



République Algérienne
Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



Badji Mokhtar-Annaba University
Université Badji Mokhtar-Annaba

جامعة باجي مختار-عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme de Doctorat
Option : Contrôle Optimal déterministe et stochastique

Estimation d'erreur d'une classe de problème de contrôle optimal de l'obstacle

Présentée et soutenue par
Yazid Dendani

Directeur : M. Radouen Ghanem Prof. Université Badji Mokhtar-Annaba

Membres du Jury

M. Mohammed Haiour	Prof.	Université Badji Mokhtar-Annaba	Président
M. Radouen Ghanem	Prof.	Université Badji Mokhtar-Annaba	Rapporteur
M. Frekh Taallah	Prof.	Université Badji Mokhtar-Annaba	Examineur
M. Messaoud Maouni	Prof.	Université 20 août 1955, Skikda	Examineur
M. Kamel Slimani	M.C.A.	Université 20 août 1955, Skikda	Examineur

Octobre 2023



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Badji Mokhtar-Annaba University
Université Badji Mokhtar-Annaba

جامعة باجي مختار-عنابة

كلية العلوم
قسم الرياضيات



أطروحة

لنيل شهادة الدكتوراه
شعبة: تحكم مثالي التحديدي والاحتمالي

تقدير خطأ في فئة من مشكلات التحكم في العقبة

قدمها ودافع عنها
يزيد دنداني

المشرف: رضوان غانم أستاذ التعليم العالي جامعة باجي مختار-عنابة

أعضاء لجنة التحكيم

رئيسا	جامعة باجي مختار عنابة	أستاذ التعليم العالي	محمد حيور
مقررا	جامعة باجي مختار عنابة	أستاذ التعليم العالي	رضوان غانم
ممتحنا	جامعة باجي مختار عنابة	أستاذ التعليم العالي	طاع الله فرنج
ممتحنا	جامعة 20 أوت 1955 سكيكدة	أستاذ التعليم العالي	مسعود ماوني
ممتحنا	جامعة 20 أوت 1955 سكيكدة	أستاذ محاضر قسم أ	كمال سليمان

أكتوبر 2023



People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education
and Scientific Research



Badji Mokhtar-Annaba University
Université Badji Mokhtar-Annaba

جامعة باجي مختار-عنابة

Faculty of Sciences
Department of Mathematics or other



THESIS

For the obtention of the Doctorate's degree
Option: Optimal control deterministic and stochastic

Error estimation for a class of an optimal control obstacle problem

Presented and defended by
Yazid Dendani

Supervisor: M. Radouen Ghanem Prof. Badji Mohtar-Annaba University

Jury Members

M. Mohammed Haiour	Prof.	Badji Mohtar-Annaba University	President
M. Radouen Ghanem	Prof.	Badji Mohtar-Annaba University	Rapporteur
M. Frekh Taallah	Prof.	Badji Mohtar-Annaba University	Examiner
M. Messaoud Maouni	Prof.	20 august 1955-Skikda University	Examiner
M. kamel Slimani	M.C.A.	20 august 1955-Skikda University	Examiner

October 2023

تقدير خطأ في فئة من مشكلات التحكم في العقبة

ملخص

في هذه الأطروحة، نهتم بتحليل التقارب لطريقة العنصر المحدود لمشكلة التحكم الأمثل في العقبة، حيث يتطابق التحكم والعائق. تم تأسيس تقديرات الخطأ لكل من المتغيرات الحالة والتحكم. نقوم بتطبيق طريقة التكرار من نوع النقطة الثابتة لحل المشكلة المتبسطة. لتأكيد تقديرات الخطأ الخاصة بنا وكفاءة الخوارزميات الخاصة بنا، يتم توضيح نتائج التقارب والتجارب العددية من خلال أمثلة واقعية.

كلمات مفتاحية: التحكم الأمثل، مشكلة العقبة، العنصر المحدود، تقدير الخطأ المسبق.

Error estimation for a class of an optimal control obstacle problem

Abstract

In this thesis, we prove the convergence of the finite element method for an elliptic penalized unilateral obstacle, an optimal control problem where the control and the obstacle coincide was considered. Some estimations on the error are established for both the state and the control variables.

An iterative method of fixed point type is used to solve the discretized problem.

We conclude our study, by providing some numerical examples to concretize and illustrate the convergence and the efficiency of our algorithm.

Keywords: Optimal control, obstacle problem, finite element, a priori error estimate.

Estimation d'erreur d'une classe de problème de contrôle optimal de l'obstacle

Résumé

Ce travail vise à résoudre l'aspect numérique du système de condition d'optimalité d'un problème d'obstacle elliptique avec une inéquation variationnelle unilatérale et le contrôle joue le rôle de l'obstacle. Tout d'abord, nous nous intéressons à l'estimation d'erreur a priori pour l'approximation des éléments finis du problème de contrôle optimal puis nous proposons un algorithme numérique et nous étudions sa faisabilité pratique par plusieurs tests numériques dans des espaces de dimension finis. Les résultats obtenus démontrent la convergence de notre méthode et la précision de nos approximations.

Mots-clés : contrôle optimal, problème d'obstacle elliptique, éléments finis, estimation d'erreur a priori.

Je dédie cette œuvre à Allah, l'Unique, l'Éternel, le Vivant, le Soutien, le Créateur des cieux et de la terre. À tous ceux qui m'ont aidé dans les moments difficiles et m'ont encouragé, à ma mère et mon père qui ont veillé et travaillé dur pour moi, à tous ceux qui m'ont aidé à me relever lorsque j'étais à terre, à mes frères et amis fidèles qui m'ont soutenu, qui ont été à mes côtés, qui ont souffert avec moi et qui ont combattu pour moi, Je vous remercie tous du fond du cœur, et les mots ne suffiront jamais à exprimer mon amour et ma loyauté envers vous, je vous dédie cette œuvre de tout mon cœur.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail. Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes superviseurs de thèse, le Professeur Ghanem Radouen, pour ses conseils avisés et sa disponibilité, ainsi que le Docteur Souahi Abed Alrazak pour ses précieuses suggestions qui ont amélioré la qualité de ce travail. J'adresse également mes remerciements aux examinateurs pour avoir accepté l'invitation. Je ne peux pas oublier de remercier ma famille et mes amis pour leur soutien et leur encouragement. Je tiens enfin à exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1	Introduction	2
1.1	Notations	11
2	Problème de contrôle optimal de l'obstacle	16
2.1	Présentation du problème :	16
2.2	Propriétés de l'opérateur d'état \mathcal{T}	18
2.2.1	Approximation de \mathcal{T}	18
2.3	Algorithme de résolution du problème (\mathcal{P}^δ) continue	39
2.3.1	Algorithme de résolution du problème (\mathcal{P}^δ)	39
3	Etude numérique du problème de contrôle optimal de l'obstacle	77
3.1	Discrétisation du problème de contrôle optimal	77
3.1.1	Approximation par la méthode des éléments finis du problème de contrôle optimal	78
4	Estimation d'erreur a priori	88
4.1	Implementation numérique	102
4.1.1	Approximation numérique de l'équation d'état par la méthode des element finis	102
4.1.2	Approximation numérique de la fonction objectif par la méthode des element finis	105
4.1.3	Approximation numérique de l'équation d'état adjoint par la mé- thode des éléments finis	106

4.1.4	Approximation numérique de l'équation de projection par la méthode des éléments finis	107
5	Calculs numériques	109
	Conclusions et perspectives	116
	Bibliographie	117

Table des figures

5.1	Fonction de contrôle φ_h^δ	111
5.2	Fonction d'état y_h^δ	112
5.3	Fonction d'état y_h^δ et la fonction de contrôle φ_h^δ	112
5.4	La région de contact	112
5.5	L'historique de variation de $J_{n,h}^\delta$ et de l'erreur $ J_{n+1,h}^\delta - J_{n,h}^\delta $ en fonction de (a) : N , (b) : ρ , (c) : ω	113

Liste des tableaux

5.1	Variation de J^δ et de l'erreur $\left J_n^\delta - J_{n-1}^\delta\right $ en fonction de ρ	109
5.2	Variation de J^δ et de l'erreur $\left J_n^\delta - J_{n-1}^\delta\right $ en fonction de ω	110
5.3	Variation de J^δ et de l'erreur $\left J_n^\delta - J_{n-1}^\delta\right $ en fonction de N	110
5.4	Ordres de convergence pour les variables de contrôle et d'état.	114

Liste des algorithmes

2.1	Algorithme (version continue)	40
2.2	Implémentation de l'algorithme 2.1	59

Introduction

La théorie de la commande optimale est l'un des domaines de recherche les plus importants dans la théorie du contrôle. Son origine remonte à 1696, lorsque Johann Bernoulli a posé et résolu le problème du brachystochrone [18]. Ce problème est aujourd'hui considéré par les théoriciens du contrôle comme un problème de contrôle optimal visant à minimiser le temps. Les fondements de la théorie du contrôle optimal sont ancrés dans le domaine mathématique du calcul des variations. Les contributions les plus significatives ont été apportées par Bernoulli, Newton, Euler et Lagrange. Un des résultats majeurs de la théorie du contrôle optimal est le célèbre principe du maximum de Pontryagin [17].

On commence par une introduction concernant les problèmes de contrôle optimal gouvernés par des équations différentielles ordinaires et en particulier leur résolution numérique [19]. On considère l'évolution d'un système dynamique sur un intervalle temporel I . L'état du système à tout moment t dans I est décrit par une fonction $y(t)$ de I dans \mathbb{R}^n . On appellera la fonction $y(t)$ la trajectoire ou l'état du système. Le contrôle envoyé au système à tout moment de temps t sera représentée par une fonction $u(t)$ de I dans \mathbb{R}^m [17]. Nous supposons que l'évolution du système sous l'effet de la commande est décrite par une équation différentielle ordinaire [17].

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), u(t)), \text{ avec } t \text{ dans } I, \quad (1)$$

où, f est définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, qui est une fonction continûment dérivable. On associe à cette équation différentielle la connaissance des conditions initiales et/ou finales. On suppose que les fonctions de commande appartiennent à un espace de fonctions définies sur I donné, que l'on note U . On définit également un ensemble G dans \mathbb{R}^n comme étant l'ensemble des états finaux ou des états cibles. On définit \mathcal{U}_{ad} comme

l'ensemble des contrôles admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles qui peuvent permettre d'atteindre un état final (défini à l'avance) de l'ensemble G . On doit également définir une fonction objectif, appelée également fonction coût, qui est une fonctionnelle définie sur la classe des contrôles admissibles.

$$J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}. \quad (2)$$

Dans ce cas, le problème de commande optimale peut être formulé comme suit : Étant donné le système dynamique (1) et la fonction objectif (2), trouver la commande optimale u qui minimise la fonction objectif (2), où la trajectoire optimale x (l'état du système) est une solution de l'équation (1).

Les systèmes distribués sont des systèmes où l'équation d'état est une équation aux dérivées partielles (avec des conditions aux limites et, dans le cas d'évolution, des conditions initiales sont nécessaires pour la détermination de la solution).

Commençons par rappeler le schéma général des problèmes de contrôle optimale des systèmes distribués que nous allons étudier dans ce travail. Ainsi, le problème générique est le suivant :

$$\min\{J(y, u), A(y, u) = 0, u \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}, y \in \mathcal{K} \subset \mathcal{X}\},$$

où \mathcal{U} est un espace de Hilbert, \mathcal{X} un espace de Banach, \mathcal{U}_{ad} et \mathcal{K} sont des sous-ensembles convexes, fermés et non vides de \mathcal{U} et \mathcal{X} respectivement. J est une fonction coût de $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ dans $\mathbb{R} \cup +\infty$, semi-continue inférieurement et convexe (en général). A est un opérateur différentiel elliptique ou parabolique, linéaire ou non-linéaire. La fonction y est la fonction d'état et u la fonction de contrôle. Ce problème peut être également vu comme un problème de programmation mathématique (c'est-à-dire un problème d'optimisation sous contraintes) dans des espaces de dimension infinie. Souvent, l'équation d'état $A(y, u) = 0$ admet une solution unique, et on peut alors définir un opérateur $\mathcal{T} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ qui à u associe $y = \mathcal{T}(u)$. Le problème de contrôle optimal s'écrit alors comme une fonction de la seule variable u :

$$\min \{J(\mathcal{T}(u), u), \text{ avec } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ et } \mathcal{T}(u) \in \mathcal{K}\}.$$

La démarche classique pour résoudre ce genre de problème est en générale la suivante :

1. Établir l'existence et, si possible, l'unicité de la solution de ce problème : on fait appel à des techniques d'estimation a priori et de compacité. Il faut bien sûr, pour cela, avoir une régularité "minimale" de l'opérateur \mathcal{T} (par exemple, la continuité faible) et si possible de la convexité stricte ou un résultat équivalent [14].
2. On essaie ensuite de caractériser la ou les solutions, ou, à défaut, de trouver des conditions nécessaires d'optimalité (voir par exemple [2], [20]). La plupart du temps, ces conditions sont des conditions différentielles du premier ordre, ce qui impose donc des propriétés de différentiabilité de J et de \mathcal{T} . Si la régularité le permet, on peut également établir des conditions suffisantes du second ordre.
3. Enfin, on utilise les conditions précédentes pour établir des algorithmes permettant de calculer numériquement la ou les solutions.

Dans une autre dynamique, est de considérer les problèmes qui sont modélisés par des inéquations variationnelles. Les problèmes de contrôle des inéquations variationnelles (voir par exemple [3]) sont intéressants car ils permettent de contrôler certaines frontières libres via l'inéquation variationnelle associée (voir par exemple [6]) et débouchent sur des questions d'optimisation de formes (voir par exemple [8]). Ils peuvent également être posés sous la forme générale

$$\min \{J(y, u), y = \mathcal{T}(u), \text{ avec } u \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}, \text{ et } y \in \mathcal{K} \subset \mathcal{X}\},$$

où \mathcal{T} est un opérateur qui associe à u la solution y (si elle existe et est unique) de l'inéquation variationnelle suivante

$$\langle A(y, u), z - u \rangle \geq 0, \text{ pour tout } z \text{ dans } \mathcal{K}. \quad (3)$$

Les résultats d'existence et d'unicité sont nombreux (voir par exemple Friedman [11] ou Barbu [3]). Cependant, plusieurs difficultés se présentent lors de l'étude des conditions d'optimalité :

1. Même si l'opérateur A est linéaire, l'opérateur \mathcal{F} est lui toujours non-linéaire. Il suffit de considérer la formulation forte de l'inéquation variationnelle (3) pour constater qu'il y a une contrainte bilinéaire « cachée ».
2. La seconde difficulté résulte de la non-convexité stricte ou de résultats équivalents de la fonction objectif J , ainsi on ne peut pas assurer une unicité globale de la solution optimale.
3. La troisième difficulté est réhibitoire, en ce sens qu'il est impossible d'assurer une quelconque propriété de différentiabilité (même de Gâteaux) de l'application \mathcal{F} . La seule différentiabilité "faible" utilisable est la notion de différentiabilité conique proposée par Mignot [15] et que l'on retrouve dans [16], et par laquelle on peut exhiber un système de conditions d'optimalité qu'on ne peut pas exploiter numériquement.

Nous pouvons alors adopter plusieurs points de vue, l'idée étant toujours de se ramener à un problème gouverné par une équation variationnelle. Par suite, l'inéquation variationnelle donnée par (3) peut être écrite sous la forme :

$$A(y, u) + \partial I_{\mathcal{K}}(y) \ni 0,$$

où $\partial I_{\mathcal{K}}$ est le sous différentielle en y de la fonction indicatrice de l'ensemble \mathcal{K} , qui peut aussi s'écrire

$$\partial I_{\mathcal{K}}(y) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v(x) \in \beta_0(y(x)), \text{ presque partout dans } \Omega\},$$

l'idée est d'approximer l'opérateur $\partial I_{\mathcal{K}} = \beta_0$, où $\beta_0 = \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ où le graphe maximal monotone est donnée par

$$\beta_0(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ \mathbb{R}^- & \text{si } r = 0 \\ \emptyset & \text{si } r < 0 \end{cases} . \quad (1.11)$$

L'approximation de $\partial I_{\mathcal{X}}$ est une méthode ancienne et de loin la méthode la plus utilisée puisqu'il s'agit d'approcher l'opérateur multivoque (dans notre exemple $\partial I_{\mathcal{X}}(y)$) de l'inéquation variationnelle, pour obtenir un problème de contrôle approché gouverné par une équation [9]. Pour une approximation possible de $\beta_0 = \partial I_{\mathcal{X}}$, on peut par exemple considérer l'approximation de Yosida [4]), sous la forme

$$\beta_{\delta}(r) = \frac{1}{\delta} \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ -r^2 & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ r + \frac{1}{4} & \text{si } r < -\frac{1}{2} \end{cases} . \quad (1.12)$$

On obtient alors un problème de contrôle optimal approché, comme suit

$$\begin{cases} \min J(y^{\delta}, u^{\delta}), \text{ pour } u^{\delta} \text{ dans } \mathcal{U}_{ad} \\ A(y^{\delta}, u^{\delta}) + \beta_{\delta}(y^{\delta}) = f, \text{ pour } y^{\delta} \text{ dans } \mathcal{X}, \end{cases}$$

qui dépend du paramètre d'approximation δ .

Ainsi, on étudie le problème approché et on exhibe un système de conditions d'optimalité dépendant du paramètre d'approximation δ , ensuite on passe (si nécessaire) à la limite avec δ tend vers 0.

La résolution analytique des problèmes de contrôle optimal elliptique est souvent difficile, voir impossible, en raison de la complexité des équations aux dérivées partielles non-linéaires associées, pour cela on fait appel aux méthodes numériques pour résoudre ce type de problèmes. Pour être plus précis, on fait appel aux méthodes d'approximation pour discrétiser le problème continu de dimension infinie et le transformer en un problème discret de dimension finie qu'on pourra résoudre par des techniques de calcul scientifique et d'analyse numérique. Par conséquent, les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis, jouent un rôle crucial dans l'approximation des solutions pour ce genres

de problèmes.

Il est connu que la méthode des éléments finis est une approche bien établie pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles [10]. En introduisant un paramètre d'approximation h qui tend naturellement vers 0, elle repose sur une discrétisation du domaine de calcul en éléments finis, qui sont des sous-domaines de forme simple tels que des triangles ou des quadrilatères dans le plan, ou des tétraèdres et des hexaèdres dans l'espace. En utilisant des fonctions polynomiales locales sur ces éléments finis. De ce fait, les solutions approchées sont représentées et les équations discrétisées sont résolues par des méthodes numériques.

Une question cruciale dans l'approximation des problèmes de contrôle optimal elliptique est l'estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée obtenue par la méthode des éléments finis. Une estimation précise de l'erreur permet de quantifier la qualité de l'approximation et d'orienter les choix liés à la discrétisation, tels que le choix du maillage ou le degré des polynômes utilisés.

Les estimations d'erreur a priori fournissent une évaluation théorique de l'erreur avant d'effectuer la résolution numérique. Ces estimations sont basées sur des propriétés de régularité de la solution exacte et des approximations discrètes, ainsi que sur des hypothèses sur le maillage et les espaces de fonctions utilisés. Elles permettent de prédire l'ordre de convergence de la méthode des éléments finis et d'obtenir des bornes supérieures sur l'erreur.

Dans cette étude, nous nous concentrons sur l'approximation des problèmes de contrôle optimal elliptique en utilisant la méthode des éléments finis, en mettant l'accent sur l'estimation d'erreur a priori, où nous abordons les aspects théoriques et numériques de ces estimations.

Par conséquent, le problème discret obtenu peut être écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(y_h, u_h), \text{ pour } u_h \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}^h \\ A(y_h, u_h) + \beta_{\delta}(y_h) = f, \text{ pour } y_h \text{ dans } \mathcal{X}_h \end{array} \right. ,$$

où \mathcal{U}_{ad}^h et \mathcal{X}_h sont respectivement les versions discrètes de \mathcal{U}_{ad} et de \mathcal{X} .

Avant d'aborder la difficulté, rencontrée pour extraire l'estimation de l'erreur a priori commise sur la fonction de contrôle, on doit mentionner que cette difficulté est due à la notion de non-convexité uniforme de la fonction objectif J , et pour ce faire, on doit introduire quelques notions utiles à la compréhension de cette difficulté.

Définition 1.1. Soit u dans \mathcal{U}_{ad} , l'ensemble convexe $C(u)$ qui comprend toute les directions h dans $L^p(\Omega)$ tel que $u + th$ est dans \mathcal{U}_{ad} pour $t > 0$ est donné par

$$C(u) = \{h \in L^p(\Omega) : u + th \in \mathcal{U}_{ad}, \text{ pour } t > 0\}.$$

Définition 1.2. Si \mathcal{K} est un sous-ensemble convexe de l'espace de Banach \mathcal{X} , et soit x dans \mathcal{K} , le cône des directions réalisable $R_{\mathcal{K}}$ et les cônes tangents et normales $T_{\mathcal{K}}$ et $N_{\mathcal{K}}$, sont définis par

$$R_{\mathcal{K}}(x) = \{y \in \mathcal{X}; \exists \sigma > 0; x + \sigma y \in \mathcal{K}\},$$

$$T_{\mathcal{K}}(x) = \left\{ y \in \mathcal{X}; \exists x(\sigma) = x + \sigma y + o(\sigma) \in \mathcal{K}, \sigma \geq 0, \left\| \frac{o(\sigma)}{\sigma} \right\|_2 \rightarrow 0 \right\},$$

et

$$N_{\mathcal{K}}(x) = \left\{ x^* \in \mathcal{X}^*; \langle x^*, y - x \rangle_{\mathcal{X}^*, \mathcal{X}} \leq 0, \forall y \in \mathcal{K} \right\},$$

où \mathcal{X}^* est le dual topologique de l'espace \mathcal{X} et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}^*, \mathcal{X}}$ est le crochet de dualité. Si \mathcal{K} est un ensemble fermé et convexe, on dit que \mathcal{K} est polyhédrique si on a $T_{\mathcal{K}}(x) = \overline{(R_{\mathcal{K}}(x))}^{\mathcal{X}}$ et $N_{\mathcal{K}}(x)$ est le cône polaire de $T_{\mathcal{K}}(x)$ c'est-à-dire

$$N_{\mathcal{K}}(x) = \left\{ x^* \in \mathcal{X}^*; \langle x^*, h \rangle_{\mathcal{X}^*, \mathcal{X}} \leq 0, \forall h \in T_{\mathcal{K}}(x) \right\} = [T_{\mathcal{K}}(x)]^-,$$

avec

$$C(x) = \{h \in T_{\mathcal{K}}(x) \text{ et } DJ(x)h = 0\},$$

avec $N_{\mathcal{K}}(x) = \mathbf{0}$ si $x \notin \mathcal{K}$.

Définition 1.3. Soit \mathcal{K} un sous ensemble fermé et convexe de l'espace de Banach \mathcal{X} , et soient x_0 dans \mathcal{K} et x^* dans $N_{\mathcal{K}}(x_0)$. On dit que \mathcal{K} est polyédrique en x pour la direction normal x^* si

$$T_{\mathcal{K}}(x_0) \cap (x^*)^\perp = \overline{R_{\mathcal{K}}(x_0) \cap (x^*)^\perp}.$$

Si \mathcal{K} est polyédrique en tout x_0 dans \mathcal{K} pour tout x^* dans $N_{\mathcal{K}}(x_0)$, on dit que \mathcal{K} est polyédrique en tout x_0 dans \mathcal{K} pour tout x^* dans $N_{\mathcal{K}}(x_0)$.

Définition 1.4. On définit le cône des directions critiques par

$$C_T(\bar{v}) = \{z \in T_{\mathcal{K}}(\bar{v}); DJ(\bar{v})z = 0\}.$$

Proposition 1.1. Si u est une solution optimale locale, alors elle satisfait la condition d'optimalité du premier ordre suivantes

$$DJ(u) + N_{\mathcal{K}}(u) \ni 0.$$

Définition 1.5. Soit u dans \mathcal{K} qui vérifie la condition d'optimalité du premier ordre donnée par [14], on dit que u vérifie la condition suffisante du second ordre si on a

$$\exists \alpha > 0; \forall v \in C(u), (D^2J(u)v, v) \geq \alpha \|v\|_2^2,$$

où d'après la condition précédente on peut déduire facilement la condition de convexité uniforme suivante

$$\forall v, u \in C(u), (DJ(u) - DJ(v), u - v) \geq \alpha \|u - v\|_2^2,$$

qui est utilisée principalement dans le calcul des estimations des erreurs.

Afin de mieux fixer les idées, on peut citer plusieurs ensemble qui sont polyédrique,

par exemple avec

$$\mathcal{K} = \{u \in L^p(\Omega) \mid u_a < u < u_b \text{ dans } \Omega\} \text{ dans } L^p(\Omega),$$

ou

$$\mathcal{K} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u_a < u < u_b \text{ dans } \Omega\} \text{ dans } W^{1,p}(\Omega),$$

D'un autre coté on a un résultat qu'on le doit à Bonnans et qui annonce que si \mathcal{K} induit une structure de treillis sur Y , alors \mathcal{K} est polyhedric.

L'ordre ponctuel sur $H_0^2(\Omega)$ ne donne pas lieu à une structure de treillis. Cependant, il est démontré dans [7] que les sous-ensembles \mathcal{K} de $H_0^2(\Omega)$ définis par des contraintes ponctuelles sont polyédriques seulement en certains points de \mathcal{K} , mais pas pour tout les points de \mathcal{K} , ce qui nous ramène à conclure que l'ensemble $\mathcal{U}_{ad} = \left\{ u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \mid \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq R \right\}$ n'est pas polyhedric. Une autre difficulté demeure dans le choix de la fonction de pénalisation β_δ (voir par exemple [5]), qui n'est que de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, ce qui nous empêche de calculer la dérivée seconde de la fonction objectif J et ainsi d'extraire les conditions d'optimalité du second ordre.

Ce manuscrit est divisé en cinq chapitres et une bibliographie qui couvrent différents aspects du problème qu'on a étudié.

Chapitre 1: Introduction, ce chapitre est une introduction nécessaire à l'étude de ce type de problème. Il présente les notions de base ainsi que quelques notions d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles tout au long de cette thèse.

Chapitre 2: Problème de contrôle optimal de l'obstacle, dans ce chapitre, nous nous penchons sur l'étude du problème de l'obstacle ainsi que du problème de contrôle optimal. Nous nous tournons vers l'étude de l'approximation du problème de contrôle optimal déjà introduit. Nous examinons l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la régularité de celle-ci. Notre attention se porte également sur la méthode d'approximation utilisées pour résoudre le problème de contrôle optimal.

Chapitre 3: Méthode des éléments finis, dans ce chapitre, nous présentons la méthode des éléments finis. Cette approche bien établie est largement utilisée pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles. Nous expliquons la discrétisation du domaine de calcul en éléments finis, la représentation des solutions approchées à l'aide de fonctions polynomiales locales, et la résolution itérative des équations discrétisées.

Chapitre 4: Estimations d'erreur a priori, il est consacré à l'estimation d'erreur a priori. Nous abordons les aspects théoriques et numériques de ces estimations, en examinant les hypothèses sous-jacentes et les techniques d'analyse utilisées. Nous explorons également les implications pratiques de ces estimations pour le choix du maillage et du degré des polynômes, ainsi que pour l'optimisation de la méthode de résolution numérique.

Chapitre 5: l'implémentation numérique, dans ce chapitre, nous consacrons notre attention à l'étude et à l'implémentation numérique du problème étudié. Nous nous concentrons particulièrement sur les représentations graphiques qui nous permettent de visualiser et d'interpréter les résultats obtenus.

Chapitre 6: Conclusion, ce dernier chapitre est dédié à la conclusion de notre étude. Nous résumons les principaux résultats et contributions, et nous discutons des perspectives futures de recherche dans le domaine de l'approximation des problèmes de contrôle optimal elliptique liées à notre problème.

1.1 Notations

On va présenter maintenant les notations utilisées dans ce travail, rappelons que les notions des espaces dans lesquels les solutions vont être cherchées, plus généralement tous les espaces utilisés pour l'analyse numériques du problème (propriétés de régularité, approximation,...). Les notations utilisées dans ce travail pour les espace de Sobolev sont classiques ainsi que les démonstrations qui peuvent êtres trouvées dans [1].

Dans toute la suite x désigne le point générique de Ω qui est un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière $\partial\Omega$ Lipshitzienne où $n \leq 3$, on note également $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact dans Ω . Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace

de distribution qui est toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On introduit également l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ noté par $\mathcal{C}(\Omega)$.

Soit p un entier de $[1; +\infty]$, on appelle espace de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions numériques v de Ω dans \mathbb{R} Lebesgue mesurables telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} < +\infty,$$

où $\|v\|_{L^p(\Omega)}$ désigne la norme :

si $p < +\infty$, $\|v\|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} |v(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ et si $p = +\infty$, $\|v\|_{L^{+\infty}(\Omega)} = \sup \text{ess} |v(x)| < +\infty$.

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ sont des espaces de Banach pour p dans $[1; +\infty]$, qui est réflexif si et seulement si p est dans $]1; +\infty[$. On sait également que

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $L^p(\Omega)$ c'est-à-dire l'espace $L^p(\Omega)$ contient l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$.
2. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, alors l'espace $L^p(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$.

En particulier si $p = 2$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire donné par

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

La théorie des distributions permet de définir, pour les fonctions de $L^p(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeur dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: pour tout d-uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de \mathbb{N}^d , $|\alpha|$ représente la longueur $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et on note ∂^α la dérivée partielle d'ordre total $|\alpha|$ et d'ordre α_j par rapport à la j -ième variable, $1 \leq j \leq n$.

Définition 1.6. Soit p dans $[1; +\infty]$ et m un entier positif, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Soit p un nombre réel, $1 \leq p < +\infty$, et m un entier positif. On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence

de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$, on le munit de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^{\alpha} v(\mathbf{x}))^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

notons que si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif. En particulier si $p = 2$ l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme précédente

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^{\alpha} u)(\mathbf{x}) (\partial^{\alpha} v)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Corollaire 1.1. Soit p un nombre réel, $1 \leq p < +\infty$, et m un entier positif, la semi-norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} (\partial^{\alpha} v(\mathbf{x}))^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Définition 1.7. Soit p un nombre réel, $1 \leq p < +\infty$, et m un entier positif. On définit le nombre réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On note par $W^{-m,q}(\Omega)$ le dual de l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$, et on le munit de la norme duale

$$\|v\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{W^{m,p}(\Omega)}},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $W^{-m,q}(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega)$, en particulier dans le cas où $p = 2$ on observe que $q = 2$. On note respectivement par $H_0^m(\Omega)$ et $H^{-m}(\Omega)$ les espaces $W_0^{m,2}(\Omega)$ et $W^{-m,2}(\Omega)$, et on utilise la même notation pour les normes associées ; on pose

$$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))',$$

alors

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega),$$

où les inclusions précédentes sont considérées algébriquement et topologiquement.

Dans la suite, on note la norme définie sur l'espace de Sobolev d'ordre m dans Ω par $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ et par $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme sur $L^2(\Omega)$.

Définition 1.8. Soient X et Y deux ensembles non vides. On dit que F est multifonction définie X dans Y si F est une application de X dans l'ensemble $P(Y)$ des parties de Y .

Définition 1.9. Soit H et V deux espaces de Hilbert, un opérateur T défini de H dans V est dit antimonotone, si pour tout v et u dans H , on a

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle \leq 0. \quad (1.1)$$

On considère la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par

$$\sigma(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} \sigma_0 uv dx, \quad (1.2)$$

où σ_0, σ_i et σ_{ij} vérifient l'hypothèse

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0, \sigma_i \text{ et } \sigma_{ij} \in L^\infty(\Omega), \\ \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \theta_i \theta_j \geq c \sum_{i=1}^n \theta_i^2, c > 0, \text{ presque partout (p.p) dans } \Omega, \text{ pour tout } \theta \text{ dans } \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

On appelle A dans $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ l'opérateur linéaire elliptique associé à la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ telle que $\langle Au, v \rangle = \sigma(u, v)$.

On dit que la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$ si elle satisfait la condition suivante

$$C_1 : \quad \exists C > 0, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad |\sigma(u, v)| \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (1.3)$$

où C sera appelée la constante de continuité

On dit que la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ si elle satisfait la condition suivante :

$$C_2 : \quad \exists c > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \sigma(u, u) \geq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad (1.4)$$

dans ce cas la constante c sera appelée la constante de coercivité.

Problème de contrôle optimal de l'obstacle

2.1 Présentation du problème :

On considère un problème de contrôle optimal où la fonction état vérifie une inéquation variationnelle de type obstacle unilatéral où la fonction contrôle est l'obstacle lui même.

La fonction coût s'écrit sous la forme

$$\min \left\{ J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx \text{ où, } \varphi \in \mathcal{U}_{ad} \right\}. \quad (2.1)$$

Où φ est le contrôle qui est l'obstacle et y désigne la fonction d'état tel que $y = \mathcal{T}(\varphi)$ est une solution du problème de l'obstacle unilatéral donnée par :

$$\sigma(y, v - y) + (g(y) - f, v - y) \geq 0, \text{ pour toute } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi), \quad (2.2)$$

où f est une fonction de $L^2(\Omega)$ choisi comme une fonction source et $\mathcal{K}(\varphi)$ est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $H_0^1(\Omega)$ donnée par

$$\mathcal{K}(\varphi) = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \varphi, \text{ presque partout dans } \Omega\}, \quad (2.3)$$

et g est une fonction réelle non décroissante telle que

$$\exists r \in \mathbb{R}, \exists \phi \geq 0 \text{ tel que, } \forall y \in \mathbb{R}, |g(y)| \leq r + \phi |y|. \quad (2.4)$$

Nous supposons que la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est continue et coercive et ν est une

constante positive, z est une fonction de $L^2(\Omega)$ qui désigne l'état désiré.

Où \mathcal{U}_{ad} est un sous-ensemble convexe et fermé de $\mathcal{U} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui est l'ensemble des contrôles admissibles et défini comme suit

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq R \right\}, \quad (2.5)$$

où \mathcal{U}_{ad} peut être vu comme la boule $\mathcal{B}_{H^2(\Omega)}(0, R)$ définie sur $H^2(\Omega)$ de centre 0 et de rayon R où R est un nombre réel positif assez grand. L'inéquation variationnelle (2.2) admet une solution unique y dans $\mathcal{K}(\varphi)$, pour tout φ dans $H_0^1(\Omega)$. Si de plus, φ est dans $H^2(\Omega)$ alors y est dans $\mathcal{U} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et l'opérateur \mathcal{T} de \mathcal{U} vers \mathcal{U} tel que $y = \mathcal{T}(\varphi)$ qui donne la solution de l'inéquation variationnelle (2.2) et n'est pas différentiable.

Le problème d'obstacle donné par (2.2)-(2.3) peut être écrit sous la forme :

$$Ay + \partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}(y - \varphi) \ni f, \text{ dans } \Omega, \quad y = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.6)$$

Plus précisément, $I_{\mathcal{K}(\varphi)}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathcal{K}(\varphi)$ et $\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice $I_{\mathcal{K}(\varphi)}$ donné par

$$I_{\mathcal{K}(\varphi)}(y - \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Maintenant on cherche à approximer le sous différentiel $\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}(\cdot)$ par un opérateur multivoque $\beta_0(\cdot)$ alors le sous-différentiel $\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}(y - \varphi)$, peut aussi s'écrire

$$\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}(y - \varphi) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v(x) \in \beta_0((y - \varphi))(x), \text{ presque partout dans } \Omega\}.$$

On peut considérer $\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}(\cdot) = \beta_0(\cdot)$ comme une multifonction, où β_0 de \mathbb{R} dans $2^{\mathbb{R}}$

est le graphe maximal monotone, défini par :

$$\beta_0(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ \mathbb{R}^- & \text{si } r = 0. \\ \emptyset & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

On se donne une approximation régulière $\beta(\cdot)$ de $\beta_0(\cdot)$ qui peut par exemple être l'approximation de Yosida de $\beta_0(\cdot)$, une approximation possible de $\beta_0(\cdot)$ est la suivante :

$$\beta_\delta(r) = \frac{1}{\delta} \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -r^2 & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}; 0]. \\ r + \frac{1}{4} & \text{si } r < -\frac{1}{2} \end{cases} (2.8)$$

Notons que $\beta(r)$ est une fonction négative où δ est un réel positif, tel que δ tend vers 0.

2.2 Propriétés de l'opérateur d'état \mathcal{T}

2.2.1 Approximation de \mathcal{T}

La méthode de pénalisation est de loin la méthode la plus utilisée, puisqu'il s'agit d'approcher l'opérateur multivoque $\beta_0(\cdot)$ de l'inéquation variationnelle (2.6), par une famille de problèmes réguliers afin d'obtenir un problème de contrôle approché gouverné par une équation semi-linéaire qui dépend de paramètre d'approximation ici noté par δ . Il s'agit alors d'étudier le problème approché en exhibant si possible un système d'optimalité, ensuite on passe à la limite en faisant tendre le paramètre d'approximation δ vers 0.

Il est bien connue que l'opérateur \mathcal{T} n'est pas différentiable, il s'agit d'approcher l'opérateur \mathcal{T} par une famille d'opérateur \mathcal{T}^δ et de remplacer le problème de l'obstacle donné par (2.2)-(2.3) par l'équation semilinéaire suivante :

$$Ay + \beta_\delta(y - \varphi) = f, \text{ dans } \Omega, y = 0 \text{ sur } \partial\Omega (2.8). \quad (2.7)$$

Où $\delta > 0$ et $\beta(y - \cdot)$ est un opérateur monotone défini par (2.8). L'équation (2.8) admet une solution unique y^δ dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dans la suite on pose $y^\delta = \mathcal{T}^\delta(\varphi)$. Notons que $\beta(r)$ est une fonction négative et dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il est facile de remarquer que $\beta(r) < |r| + \frac{1}{2}$, avec

$$\beta'(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -2r & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1 & \text{si } r < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On donne aussi

$$\beta''(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[\\ -2 & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \end{cases}$$

Le problème de contrôle approché (\mathcal{P}^δ) s'écrit sous la forme

$$\min \left\{ J_\delta(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}^\delta(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx, \text{ où } \varphi \in \mathcal{U}_{ad} \right\}. \quad (2.8)$$

Notons que l'opérateur \mathcal{T}^δ est Gâteaux différentiable, maintenant on peut donner les conditions nécessaires d'optimalité du problème (\mathcal{P}^δ) donnée par (2.8) donc le problème a au moins une solution notée par $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$ caractérisée par le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Supposons que φ^δ est dans \mathcal{U}_{ad} est une solution optimale du problème (\mathcal{P}^δ) et $y^\delta = \mathcal{T}^\delta(\varphi^\delta)$, alors il existe un état adjoint p^δ dans $H_0^1(\Omega)$ et $\beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta$ dans $L^2(\Omega)$ tel que le système d'optimalité (\mathcal{S}^δ) suivant soit satisfait :*

$$\sigma(y^\delta, v) + (\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad (2.9)$$

$$\sigma(p^\delta, w) + (\beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta, w) = (y^\delta - z, w), \text{ pour tout } w \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad (2.10)$$

$$(-\nu \Delta \varphi^\delta + \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta, \psi - \varphi^\delta) \geq 0, \text{ pour tout } \psi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad} \quad (2.11)$$

où $\tilde{\sigma}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$.

Ainsi, dans le but de résoudre numériquement le problème obtenu, on doit écrire l'inéquation variationnelle donnée par (2.11) sous la forme d'une équation de la forme suivante $\varphi^\delta = P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \varphi^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta)$, où ρ est un nombre réel positif et $P_{\mathcal{U}_{ad}}$ est l'opérateur de projection de $L^2(\Omega)$ dans \mathcal{U}_{ad} . Ensuite on introduit l'opérateur S_ρ de $L^2(\Omega)$ dans \mathcal{U}_{ad} donné par $S_\rho(\varphi^\delta) = P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \varphi^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta)$ dans le but de réécrire l'équation précédente sous la forme $\varphi^\delta = S_\rho(\varphi^\delta)$ donc on obtient un problème de point fixe.

Remarque 2.1. Soit $P_{\mathcal{U}_{ad}}$ l'opérateur de projection de $L^2(\Omega)$ dans \mathcal{U}_{ad} alors la résolution de l'inéquation variationnelle (2.11) est équivalente à trouver φ^δ telle que :

$$\varphi^\delta = P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \varphi^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta), \quad (2.12)$$

où ($\rho > 0$) est un réel positif, en outre on définit l'opérateur S_ρ de $L^2(\Omega)$ dans \mathcal{U}_{ad} par

$$S_\rho(\varphi^\delta) = P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \varphi^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta). \quad (2.13)$$

Le Lemme suivant nous informe que l'application non linéaire $(y^\delta - \varphi^\delta) \rightarrow \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta$ définie de \mathcal{U}_{ad} dans $H_0^1(\Omega)$ est une application antimotone, on utilise ce résultat qui sert à démontrer le Lemme 2.6.

Lemme 2.1. Pour tout triplet $(y_i^\delta, \varphi_i^\delta, p_i^\delta)$ dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}$ avec $i=1, 2$ satisfaisant le système des conditions d'optimalité donné par (2.9)-(2.11), l'application non linéaire $(y^\delta - \varphi^\delta) \rightarrow \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta$ définie de \mathcal{U}_{ad} dans $H_0^1(\Omega)$ est une application anti-monotone, tel que

$$(\beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta - \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta, \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta) \leq 0. \quad (2.14)$$

Démonstration. Soient φ_1^δ et φ_2^δ vérifiant l'équation de projection donnée par (2.11), alors

on peut écrire :

$$\left(-\nu \Delta \varphi_1^\delta + \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta, \psi - \varphi_1^\delta\right) \geq 0, \text{ pour tout } \psi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad},$$

et

$$\left(-\nu \Delta \varphi_2^\delta + \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta, \psi - \varphi_2^\delta\right) \geq 0, \text{ pour tout } \psi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}.$$

Si on choisit de prendre $\psi = \varphi_2^\delta$ dans la premier inéquation et $\psi = \varphi_1^\delta$ dans la deuxième, on obtient :

$$\left(-\nu \Delta \varphi_1^\delta + \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta, \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right) \geq 0,$$

et

$$\left(-\nu \Delta \varphi_2^\delta + \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) \geq 0.$$

Alors par soustraction, on peut obtenir

$$\left(-\nu \Delta \varphi_2^\delta + \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \left(-\nu \Delta \varphi_1^\delta + \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) \geq 0.$$

En appliquant l'intégrale de Green, on obtient

$$-\nu \left(\nabla \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right), \nabla \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) \right) - \left(\beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta - \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta, \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right) \geq 0,$$

par suite, on déduit que

$$-\nu \left(\nabla \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right), \nabla \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) \right) \geq \left(\beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta - \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta, \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right).$$

Finalement, on obtient

$$\left(\beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta - \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta, \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right) \leq 0.$$

Cela signifie que $\beta' (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta$ est anti-monotone. \square

Le Théorème suivant montre que l'opérateur \mathcal{T}^δ est un opérateur de Lipschitz de $L_2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ respectivement, ce Théorème sera utile pour démontrer les Théorèmes 2.4 et 2.5.

Théorème 2.2. *Pour tout couple $(y_i^\delta, \varphi_i^\delta)$ dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{ad}$ satisfaisant le système des d'optimalité (\mathcal{S}^δ) pour $i = 1, 2$, avec $\delta \leq C$, on obtient*

$$\|y_1^\delta - y_2^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq l_\delta \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.15)$$

en outre, on déduit que

$$\|y_1^\delta - y_2^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq l_\delta \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.16)$$

où $l_\delta := \frac{C}{\delta}$. Ceci signifie que l'application $y^\delta = \mathcal{T}^\delta(\varphi^\delta)$ est Lipschitzienne, avec la constante de Lipschitz l_δ .

Démonstration. Pour la première inégalité on utilise la formulation faible de l'équation de l'état donné par (2.9).

D'après les équations (2.9) on peut écrire pour $i = 1, 2$

$$\sigma(y_1^\delta, v) + (\beta_\delta(y_1^\delta - \varphi_1^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

et

$$\sigma(y_2^\delta, v) + (\beta_\delta(y_2^\delta - \varphi_2^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

par soustraction, on trouve

$$\sigma(y_2^\delta - y_1^\delta, v) + (\beta_\delta(y_2^\delta - \varphi_2^\delta) - \beta_\delta(y_1^\delta - \varphi_1^\delta), v) = 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

et si on choisit de prendre $v = y_2^\delta - y_1^\delta$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\sigma\left(y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta\right) = -\left(\beta_\delta\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \beta_\delta\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right), y_2^\delta - y_1^\delta\right), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

On ajoute et on retranche la quantité $\left(\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right)$, il vient

$$\sigma\left(y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta\right) = -\left(\beta_\delta\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \beta_\delta\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right), \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) + \left(\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right)\right),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sigma\left(y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta\right) &= -\left(\beta_\delta\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \beta_\delta\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right), \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right)\right) \\ &\quad - \left(\beta_\delta\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \beta_\delta\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right), \left(\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right)\right). \end{aligned}$$

Sachant que $-\left(\beta_\delta\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \beta_\delta\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right), \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right)\right)$ est négative, on obtient

$$\sigma\left(y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta\right) \leq -\left(\beta_\delta\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \beta_\delta\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right), \left(\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right)\right).$$

Comme $\sigma(.,.)$ est coercive, on déduit

$$c \left\|y_2^\delta - y_1^\delta\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sigma\left(y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta\right) \leq \left|\left(\beta_\delta\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) - \beta_\delta\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right), \left(\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right)\right)\right|.$$

D'après le Théorème des accroissements finis appliqué à $\beta_\delta(.)$ sur l'intervalle ayant pour bords $\left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right)$ et $\left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right)$, on obtient

$$c \left\|y_2^\delta - y_1^\delta\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\delta} \left\|\max\left|\beta_\delta'(\cdot)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\left(y_2^\delta - y_1^\delta\right) - \left(\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Où encore

$$c \left\|y_2^\delta - y_1^\delta\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(\left\|y_2^\delta - y_1^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\right) \left\|\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right\|_{L^2(\Omega)},$$

d'après les résultats d'injection des espace de Sobolev, on sait que $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$c \left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(C \left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par la suite, on déduit deux cas :

Le premier cas : $\left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$ dans ce cas, il n'y a rien à démontrer.

Pour le deuxième cas : où $\left\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}$, on a

$$C \left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(C \left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right) \left\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

par suite, on trouve

$$\left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement, on obtient

$$\left\| y_2^\delta - y_1^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq l_\delta \left\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

où $l_\delta = \frac{C}{\delta}$.

Pour la deuxième inégalité, ainsi on peut écrire la formulation forte de l'équation d'état donnée par (2.9)

$$-\Delta y_1^\delta + \beta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) = f, \text{ dans } \Omega, \text{ et } y_1^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et

$$-\Delta y_2^\delta + \beta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) = f, \text{ dans } \Omega, \text{ et } y_2^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

par soustraction, on obtient

$$-\Delta (y_1^\delta - y_2^\delta) + \beta_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - \beta_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) = 0.$$

Par la suite on déduit que

$$\left\| \Delta (y_1^\delta - y_2^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\delta} \left\| \beta_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - \beta_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant le Théorème des accroissements finis à $\beta(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $(y_2^\delta - \varphi_2^\delta)$ et $(y_1^\delta - \varphi_1^\delta)$, on obtient

$$\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \max |\beta'(\cdot)| \frac{1}{\delta} \left\| (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \left(\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

d'après les résultats d'injection des espace de Sobolev, on sait que $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \left(C \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Ainsi, comme précédemment, on peut déduire deux cas :

Premier cas : si $\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$ alors, il n'y a plus rien à démontrer

Deuxième cas : si où $\left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$, on a

$$C \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi, pour δ suffisamment petit, on peut avoir

$$\delta \leq \frac{1}{C}$$

Finalement, on obtient

$$\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1} \leq L_\delta \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

où $L_\delta = \max \left\{ 1, \frac{C}{\delta} \right\}$ pour $0 < \delta < c$, on déduit

$$\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Le Lemme suivant montre que y^δ est borné dans $H^1(\Omega)$, ce résultat va apparaître dans la démonstration du Lemme 2.3 c'est-à-dire pour montrer que p^δ est borné dans $H^1(\Omega)$.

Lemme 2.2. *Pour tout couple $(y^\delta, \varphi^\delta)$ dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{ad}$ satisfaisant le système des conditions d'optimalité donné par (\mathcal{S}^δ) , on a*

$$\left\| y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + C, \quad (2.17)$$

et si φ^δ est dans $\mathcal{B}_{H^2}(0, R) \cap \mathcal{U}_{ad}$, alors on trouve

$$\left\| y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq R_1. \quad (2.18)$$

Ceci implique que y^δ est dans $\mathcal{B}_{H^1}(0, R_1) \cap \mathcal{U}$ où $R_1 = CR + C$.

Démonstration. Soit v est dans $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$, notons que si $y^\delta - \varphi^\delta \geq 0$ alors $\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) = 0$, et si $y^\delta - \varphi^\delta < 0$ alors $v - y^\delta > v - \varphi^\delta \geq 0$, et $\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) \leq 0$, par suite, on déduit que

$$\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta)(v - y^\delta) \leq 0, \text{ presque par tout dans } \Omega.$$

En utilisant l'équation (2.9) avec $v = v - y^\delta$, on obtient

$$\sigma(y^\delta, v - y^\delta) + \frac{1}{\delta} (\beta(y^\delta - \varphi^\delta), v - y^\delta) = (f, v - y^\delta),$$

par suite, on a

$$\sigma(y^\delta, v - y^\delta) - (f, v - y^\delta) = -\frac{1}{\delta} (\beta(y^\delta - \varphi^\delta), v - y^\delta) \geq 0.$$

D'après les propriétés de $\beta(\cdot)$, on sait que $\beta(\cdot)$ est négatif. on déduit que

$$-\sigma(y^\delta, y^\delta) + \sigma(y^\delta, \varphi^\delta) - (f, \varphi^\delta - y^\delta) \geq 0,$$

Par conséquent, on obtient

$$\sigma(y^\delta, y^\delta) + (f, \varphi^\delta - y^\delta) \leq a(y^\delta, \varphi^\delta),$$

on déduit que

$$\sigma(y^\delta, y^\delta) \leq \sigma(y^\delta, \varphi^\delta) + (f, y^\delta - \varphi^\delta).$$

Où, sous les hypothèses C_1 et C_2 la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive, on déduit que

$$C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\|y^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

Sachant que $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Selon l'inégalité ci-dessus, on distingue les deux cas suivants :

Premier cas : si $\|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}$ alors, on a

$$C\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)},$$

et on trouve

$$C\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Deuxième cas : si $C\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ alors, on a

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)},$$

et par l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned} \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq \max \left\{ C\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)}, C\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|f\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\leq C\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C.$$

□

Le Lemme suivant montre que p^δ est borné de $H^1(\Omega)$, et ce résultat va servir à la démonstration des Lemmes 2.4 et 2.5.

Lemme 2.3. *Pour tout couple (p^δ, y^δ) dans $\mathcal{U} \times (\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{H^1}(0, R_1))$ vérifiant le système*

des conditions d'optimalité (\mathcal{I}^δ) , alors on a

$$\|p^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C, \quad (2.19)$$

et si y^δ est dans $\mathcal{B}_{H^1}(0, R_1) \cap \mathcal{U}_{ad}$, on trouve

$$\|p^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq R_2. \quad (2.20)$$

Ceci implique que p^δ est dans $\mathcal{B}_{H^1}(0, R_2) \cap \mathcal{U}$ où $R_2 = CR_1 + C$.

Démonstration. D'après l'équation de l'état adjoint (2.10) avec $w = p^\delta$, on obtient

$$\sigma(p^\delta, p^\delta) + (\beta'(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta, p^\delta) = (y^\delta - z, p^\delta).$$

d'après les propriétés de $\beta'(\cdot)$ on sait que $\beta'(\cdot)$ est positive, ainsi on obtient

$$\sigma(p^\delta, p^\delta) \leq (y^\delta - z, p^\delta),$$

d'après l'hypothèse C_2 de la coercivité de la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$, il vient

$$C \|p^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (y^\delta - z, p^\delta),$$

par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$C \|p^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|y^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|p^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on trouve

$$C \|p^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|y^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|p^\delta\|_{H^1(\Omega)},$$

et grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$C \left\| p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\left\| y^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

et encore une fois par l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$\left\| p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(C \left\| y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

c'est-à-dire

$$\left\| p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement, on obtient

$$\left\| p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + C.$$

□

Dans la suite, et d'après l'équation de l'état adjoint donnée par (2.10), on peut définir l'opérateur Q^δ défini de \mathcal{U}_{ad} dans $H_0^1(\Omega)$ tel que $p^\delta = Q^\delta(\varphi^\delta)$. Cela veut dire Q^δ est l'opérateur qui nous donne la solution p^δ de l'équation de l'état adjoint donnée par (2.10) associée à l'obstacle φ^δ . Le Lemme suivant, affirme que l'opérateur Q^δ est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz C_1^δ , et ce dernier Lemme va être utilisé pour démontrer le Lemme 2.5.

Lemme 2.4. *Pour tout couple $(y^\delta, \varphi^\delta)$ dans $(\mathcal{B}_{H^1}(0, R_1) \cap \mathcal{U}) \times \mathcal{U}_{ad}$ satisfaisant le système des conditions d'optimalité (\mathcal{S}^δ) , et si p^δ est dans $\mathcal{B}_{H^1}(0, R_2) \cap \mathcal{U}$, alors on a*

$$\left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1^\delta \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.21)$$

où $C_1^\delta := \frac{CR_2}{\delta^3}$, et R_2 est donnée par le Lemme 2.3.

Démonstration. D'après l'équation de l'état adjoint (2.10), pour $i = 1, 2$, on peut écrire

$$\sigma(p_i^\delta, w) + (\beta'(y_i^\delta - \varphi_i^\delta) p_i^\delta, w) = (y_i^\delta - z, w), \text{ pour tout } w \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Par soustraction, on obtient

$$\sigma(p_1^\delta - p_2^\delta, w) + (\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta - \beta'(y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta, w) = (y_1^\delta - y_2^\delta, w),$$

pour tout w dans $H_0^1(\Omega)$, ainsi, si on choisit de prendre $v = p_1^\delta - p_2^\delta$, on obtient

$$\sigma(p_1^\delta - p_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta) + (\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta - \beta'(y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta) = (y_1^\delta - y_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta).$$

D'après l'hypothèse C_2 de la coercivité de la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$, il vient

$$c \|p_1^\delta - p_2^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq -(\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta - \beta'(y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta) + (y_1^\delta - y_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta).$$

Si on ajoute et on retranche la quantité $(\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta)$ dans l'inégalité précédente, on peut éventuellement obtenir

$$\begin{aligned} c \|p_1^\delta - p_2^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq -(\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) (p_1^\delta - p_2^\delta) + (\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - \beta'(y_2^\delta - \varphi_2^\delta)) p_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta) \\ &\quad + (y_1^\delta - y_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta). \end{aligned}$$

Sachant d'après les propriétés de $\beta'(\cdot)$ que $-(\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) (p_1^\delta - p_2^\delta), p_1^\delta - p_2^\delta)$ est négatif, on obtient

$$c \|p_1^\delta - p_2^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq -((\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - \beta'(y_2^\delta - \varphi_2^\delta)) p_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta) + (y_1^\delta - y_2^\delta, p_1^\delta - p_2^\delta),$$

et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$c \|p_1^\delta - p_2^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \|p_2^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\beta'(y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - \beta'(y_2^\delta - \varphi_2^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|p_1^\delta - p_2^\delta\|_{H^1(\Omega)}$$

$$+ C \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après le Théorème des accroissements finis appliqué à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $y_1^\delta - \varphi_1^\delta$ et $y_2^\delta - \varphi_2^\delta$, il vient

$$\begin{aligned} c \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{C}{\delta} \left\| p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \max |\beta''(\cdot)| \right\| \left\| (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.3 on sait que la quantité p_2^δ est bornée, alors on déduit que

$$c \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} R_2 \left\| \max |\beta''(\cdot)| \right\| \left\| (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} + C \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

et grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$c \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} R_2 \left(\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + C \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite, on déduit que

$$\left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} R_2 \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} R_2 \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + C \left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant la relation (2.15) du Théorème 2.2, on obtient

$$\left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta^2} R_2 \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} R_2 \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement, on obtient

$$\left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1^\delta \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

où

$$C_1^\delta = \frac{C}{\delta^2} R_2 + \frac{C}{\delta c} R_2 + \frac{C}{\delta c}.$$

Ainsi, pour δ suffisamment petit, on peut déduire

$$C_1^\delta \leq \frac{C}{\delta^2} R_2.$$

□

Le Lemme suivant annonce que l'opérateur $\beta' (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_2^\delta$ défini de \mathcal{U}_{ad} dans $L^2(\Omega)$ est Lipschitzien qui va être utilisé pour la démonstration du lemme 2.6.

Lemme 2.5. *Pour tout triplet $(y_i^\delta, \varphi_i^\delta, p_i^\delta)$ dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}$ satisfaisant le système des conditions d'optimalité (\mathcal{S}^δ) , alors on a pour $i = 1, 2$*

$$\left\| \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta - \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2^\delta \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.22)$$

où $C_2^\delta := \frac{CR_2}{\delta^3}$. et R_2 est donné par le Lemme 2.3.

Démonstration. Si on ajoute et on retranche la quantité $\beta' (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_2^\delta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta - \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ \left\| \begin{aligned} &\beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta - \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_2^\delta + \\ &\beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_2^\delta - \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta \end{aligned} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) p_1^\delta - \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ \left\| \begin{aligned} &(\beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) - \beta'_\delta (y_2^\delta - \varphi_2^\delta)) p_2^\delta + \\ &\beta'_\delta (y_1^\delta - \varphi_1^\delta) (p_1^\delta - p_2^\delta) \end{aligned} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

par application du Théorème des accroissements finis à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $(y_1^\delta - \varphi_1^\delta)$ et $(y_2^\delta - \varphi_2^\delta)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left\| \max \left| \frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right| \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left\| \max \left| \beta''(\cdot) \right| \right\| \left\| \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) - \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité Triangulaire et d'après les propriétés de $\beta'(\cdot)$ et de $\beta''(\cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\delta} \left\| p_2 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il vient

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\delta} \left\| p_2 \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \left(\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par application du Lemme 2.3, on déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{CR_2}{\delta} \left(\left\| y_1^\delta - y_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left\| p_1^\delta - p_2^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.2 et le Lemme 2.4, on déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{CR_2}{\delta} \left(\frac{C}{\delta} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \frac{C}{\delta^2} R_2 \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} \left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{CR_2}{\delta^2} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{CR_2}{\delta} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{C}{\delta^3} R_2 \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et pour δ suffisamment petit, on peut avoir que

$$\left\| \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta^3} R_2 \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

□

Le Lemme suivant montre que l'application S_ρ est contractante de $L^2(\Omega)$ dans \mathcal{U}_{ad}

Lemme 2.6. *Pour tout triplet $(y_i^\delta, \varphi_i^\delta, p_i^\delta)$ dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}$ satisfaisant le système des conditions d'optimalité (\mathcal{I}^δ) , alors on a pour $i = 1, 2$*

$$C \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\beta' \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta' \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right). \quad (2.23)$$

En outre, pour $\rho < \frac{2(Cv^2 - v)}{(C_{2\delta} - v^2)}$ et $\delta < \left(\frac{CR_2}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}}$, S_ρ est contractante de $L^2(\Omega)$ dans \mathcal{U}_{ad} , où $C_{2\delta}$ est donné par le Lemme 2.5 et R_2 par le Lemme 2.3, ainsi on obtient une solution unique du problème de l'équation de projection donnée par (2.13) en appliquant le Théorème du point fixe. Ce qui prouve l'existence de la solution de (2.11).

Démonstration. D'après l'équation de projection (2.11), on peut écrire pour $i = 1, 2$:

$$\left(-v \Delta \varphi_1^\delta + \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta, \psi - \varphi_1^\delta \right) \geq 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{U}_{ad},$$

et

$$\left(-v\Delta\varphi_2^\delta + \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \psi - \varphi_2^\delta\right) \geq 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{U}_{ad},$$

et si on choisit de prendre $\psi = \varphi_2^\delta$ dans la première inéquation et $\psi = \varphi_1^\delta$ dans la deuxième, on obtient

$$\left(-v\Delta\varphi_1^\delta + \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta, \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\right) \geq 0,$$

et

$$\left(-v\Delta\varphi_2^\delta + \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) \geq 0,$$

par addition on obtient

$$\left(v\Delta \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) + \left(\beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta - \beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta\right), \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) \geq 0,$$

où encore

$$\left(-v\Delta \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right), \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) \leq - \left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right).$$

Si on ajoute et on retranche la quantité $\left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(-v\Delta \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right), \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) &\leq - 2 \left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) \\ &\quad + \left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right). \end{aligned}$$

On sait que la quantité $- 2 \left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right)$ est négative, alors on obtient

$$\left(-v\Delta \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right), \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right) \leq \left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta\right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta\right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right).$$

En appliquant l'intégrale de Green, on obtient

$$\left\| \mathbf{v} \nabla \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right).$$

Finalement, il vient

$$\mathbf{v}^2 C \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\beta'_\delta \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \beta'_\delta \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta, \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right).$$

Sachant que $P_{\mathcal{A}_{ad}}$ est une contraction, alors il vient

$$\begin{aligned} \left\| S_\rho \left(\varphi_1^\delta \right) - S_\rho \left(\varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) + \mathbf{v} \rho \left(\Delta \varphi_1^\delta - \Delta \varphi_2^\delta \right) \right. \\ &\quad \left. - \rho \left(\frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$\begin{aligned} \left\| S_\rho \left(\varphi_1^\delta \right) - S_\rho \left(\varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \rho \left(\frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \mathbf{v} \rho \left\| \left(\Delta \varphi_1^\delta - \Delta \varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \rho \left(\frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \rho^2 \left\| \frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2\rho \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta, \frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right), \end{aligned}$$

et d'après les deux Lemmes 2.4 et 2.5, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \rho \left(\frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \rho^2 C_{2\delta} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 - 2\rho v^2 C \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \rho \left(\frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq (1 + \rho^2 C_{2\delta} - 2\rho C v^2) \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \rho \left(\frac{\beta'}{\delta} \left(y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) p_1^\delta - \frac{\beta'}{\delta} \left(y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) p_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \sqrt{1 + \rho^2 C_{2\delta} - 2\rho C v^2} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par suite, il est facile de déduire que

$$\begin{aligned} \left\| S_\rho \left(\varphi_1^\delta \right) - S_\rho \left(\varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} & \leq \sqrt{(1 + \rho^2 C_{2\delta} - 2\rho v^2 C)} \left\| \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\ & \quad + v\rho \left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) \right\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\left\| S_\rho \left(\varphi_1^\delta \right) - S_\rho \left(\varphi_2^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\sqrt{(1 + \rho^2 C_{2\delta} - 2\rho v^2 C)} + v\rho \right) \left\| \left(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta \right) \right\|_{H^2(\Omega)}.$$

Ainsi, l'application S_ρ est une contraction si on a

$$\sqrt{(1 + \rho^2 C_{2\delta} - 2\rho v^2 C)} + v\rho < 1.$$

Ou encore

$$0 < \rho < \frac{2(Cv^2 - v)}{(C_{2\delta} - v^2)},$$

supposons que ρ vérifie la condition précédente, on déduit que le problème (2.12) admet une solution φ en appliquant le théorème du point fixe, ce qui prouve évidemment l'existence de la solution de l'équation de projection donnée par (2.11). En prenant ρ dans cet intervalle, on obtient une solution unique du problème de point fixe (2.12) ce qui prouve l'existence de la solution de (2.11). \square

2.3 Algorithme de résolution du problème (\mathcal{P}^δ) continue

2.3.1 Algorithme de résolution du problème (\mathcal{P}^δ)

Dans cette section, nous donnons un algorithme pour résoudre le problème (\mathcal{P}^δ) . L'algorithme conceptuel suivant peut être interprété comme une méthode d'approximations successives pour calculer le point fixe d'une fonction F donnée par (2.13) définie dans la sous-section 1.2 puis nous expliquerons les différentes étapes de l'algorithme 2.1 et nous donnerons les définitions des différentes fonctions de cet algorithme. Rappelons que la suite du dit algorithme définies par $(y_n^\delta, p_n^\delta, \varphi_n^\delta)$ désigne la dernière solution itérée (courante) c'est-à-dire n -ième itération de l'algorithme (donnée ci-dessous). Ainsi, la nouvelle itération $(y_n^\delta, p_n^\delta, \varphi_n^\delta)$ est obtenue par l'algorithme suivant

Maintenant il faut expliquer les différentes étapes de l'algorithme 2.1. Dans la suite on va extraire quelques fonctions et donner leurs définitions et nous donnons également des définitions détaillées des différentes fonctions de notre algorithme 2.1.

D'après la première étape de l'algorithme, on définit F_1 de \mathcal{U}_{ad} dans \mathcal{U} par :

$$y_{n+1}^\delta = F_1(\varphi_n^\delta). \quad (2.24)$$

Algorithme 2.1 Algorithme (version continue)**Entrée :** $\{y_0, p_0, \varphi_0, \delta, \rho, v, \varepsilon, f, z\}$.1: $err = \varepsilon + 1$ 2: **tant que** $err > \varepsilon$ **faire**3: Calculer $J_n \leftarrow J_{n-1} \left(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta \right)$.4: Résoudre $Ay_n^\delta + \beta_\delta \left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) = f$ en y_n^δ .5: Résoudre $Ap_n^\delta + \beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) p_n^\delta = y_n^\delta - z$ en p_n^δ .6: Résoudre $\left(-v \Delta \varphi_n^\delta + \beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) p_n^\delta, \psi^\delta - \varphi_n^\delta \right) \geq 0$ en φ_n^δ .7: Calculer $J_n \leftarrow J_{n-1} \left(y_n^\delta, \varphi_n^\delta \right)$.8: Calculer $err \leftarrow |J_n - J_{n-1}|$.9: $n \leftarrow n + 1$.10: **fin tant que**11: Ecrire $S_n^\delta := \left(y_n^\delta, p_n^\delta, \varphi_n^\delta \right)$ est une solution.

Ce qui signifie que l'application F_1 dépend de φ_n^δ , et fournit y_{n+1}^δ comme solution de l'équation donnée par

$$Ay_{n+1}^\delta + \beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) = f \text{ sur } \Omega \text{ et } y_{n+1}^\delta = 0 \text{ dans } \partial\Omega. \quad (2.25)$$

Selon la seconde étape de l'algorithme 2.1, on définit l'application F_2 de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{ad}$ dans \mathcal{U} par :

$$p_{n+1}^\delta = F_2 \left(y_{n+1}^\delta, \varphi_n^\delta \right). \quad (2.26)$$

Ce qui signifie, que l'application F_2 dépend de φ_n^δ et de y_{n+1}^δ , et fournit p_{n+1}^δ comme solution de l'équation d'état adjoint suivante

$$Ap_{n+1}^\delta + \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta = y_{n+1}^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } p_{n+1}^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.27)$$

Enfin, selon la troisième étape de l'algorithme 2.1, on définit l'application F_3 de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ dans \mathcal{U}_{ad} par :

$$\varphi_{n+1}^\delta = F_3 \left(y_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta \right). \quad (2.28)$$

Ce qui signifie que F_3 dépend de y_{n+1}^δ et de p_{n+1}^δ , et fournit φ_{n+1}^δ comme solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$\left(-\nu \Delta \varphi_{n+1}^\delta + \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) p_{n+1}^\delta, \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta\right) \geq 0, \forall \psi^\delta \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (2.29)$$

En utilisant les définitions précédentes des applications définies par F_i , pour $i = 1, 2, 3$ on définit l'application F de \mathcal{U}_{ad} dans \mathcal{U}_{ad}

$$\varphi_{n+1}^\delta = F \left(\varphi_n^\delta \right), \quad (2.30)$$

où

$$\varphi_{n+1}^\delta = F_3 \left(F_1 \left(\varphi_n^\delta \right), F_2 \left(F_1 \left(\varphi_n^\delta \right), \varphi_n^\delta \right) \right), \quad (2.31)$$

ou encore

$$F \left(\varphi_n^\delta \right) = F_3 \left(F_1 \left(\varphi_n^\delta \right), F_2 \left(F_1 \left(\varphi_n^\delta \right), \varphi_n^\delta \right) \right). \quad (2.32)$$

Il est important de signaler que le Théorème suivant va servir à la démonstration des Corollaires 2.1, 2.2 et 2.3.

Théorème 2.3. Soit φ_n^δ appartenant à \mathcal{U}_{ad} et satisfait l'équation (2.25) et soit $\left(y_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta, \varphi_{n+1}^\delta\right)$ le triplet qui satisfait les équations (2.25), (2.27) et (2.29) associées au triplet (F_1, F_2, F_3) , avec $\delta \leq C$, alors on a

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + C, \quad (2.33)$$

$$\left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + C, \quad (2.34)$$

et

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq C_3^\delta \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + C_3^\delta R. \quad (2.35)$$

Où $C_3^\delta := \left(\frac{C}{(2C - C\varepsilon)(\nu\varepsilon)\delta^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ avec C une constante indépendante du paramètre

d'approximation (pénalisation δ).

Démonstration. Pour la démonstration de l'inégalité (2.33), on a d'après l'équation (2.25)

$$\sigma(y_{n+1}^\delta, v) + (\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{U}_{ad},$$

par suite, si on choisit de prendre $v = y_{n+1}^\delta$, on obtient

$$\sigma(y_{n+1}^\delta, y_{n+1}^\delta) + (\beta_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta), y_{n+1}^\delta) = (f, y_{n+1}^\delta).$$

Dans l'équation précédente, si on ajoute et on retranche φ_n^δ on obtient

$$\sigma(y_{n+1}^\delta, y_{n+1}^\delta) + (\beta_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta), y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) + (\beta_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta), \varphi_n^\delta) = (f, y_{n+1}^\delta).$$

D'après les propriétés de $\beta_\delta(\cdot)$, on sait que $(\beta_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta), y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)$ est positif, ainsi, on obtient

$$\sigma(y_{n+1}^\delta, y_{n+1}^\delta) \leq (f, y_{n+1}^\delta) - (\beta_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta), \varphi_n^\delta).$$

Comme la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est coercive, on déduit

$$C \|y_{n+1}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (f, y_{n+1}^\delta) - (\beta_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta), \varphi_n^\delta),$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$C \|y_{n+1}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_{n+1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite, par application du Théorème des accroissements finis à $\beta(\cdot)$ appliqué sur l'intervalle ayant pour bords 0 et $(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)$, on obtient

$$C \|y_{n+1}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_{n+1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \left\| \max |\beta'(\cdot)| \right\| \| (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) \|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)},$$

et par application de l'inégalité triangulaire et la définition de $\beta'(\cdot)$, on a

$$C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \left(\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

D'après les résultats précédents, on peut déduire qu'il y a deux cas

- Premier cas : Si $\left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$, alors on a

$$C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

et finalement, on obtient

$$C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Deuxième cas : Si $\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$, alors on a

$$C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

Poursuite, il vient

$$C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 - C \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} - \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Ainsi, on déduit

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\left(C \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2}}{2C},$$

et de plus, on a

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2}}{2C},$$

par conséquent

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \max \left\{ \frac{2C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{C}{\delta}} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}}{2C}, \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

Finalement, on obtient

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour la démonstration de l'inégalité (2.34), d'après l'inéquation (2.27), pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$\sigma \left(p_{n+1}^\delta, v \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, v \right) = \left(y_{n+1}^\delta - z, v \right),$$

et si on choisit de prendre $v = p_{n+1}^\delta$, il vient

$$\sigma \left(p_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta \right) = \left(y_{n+1}^\delta - z, p_{n+1}^\delta \right).$$

D'après les propriétés de $\beta_\delta(\cdot)$, on sait que $\left(\beta_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right)$ est positive, ainsi, on obtient

$$\sigma \left(p_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta \right) \leq \left(y_{n+1}^\delta - z, p_{n+1}^\delta \right).$$

Sachant que la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est coercive, on déduit,

$$C \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left(y_{n+1}^\delta - z, p_{n+1}^\delta \right),$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$C \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left\| y_{n+1}^\delta - z \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)},$$

ou encore

$$C \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\| y_{n+1}^\delta - z \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite, par application de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$\left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Finalement, on obtient

$$\left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + C.$$

Pour la démonstration de l'inégalité (2.35), d'après l'inéquation (2.29), on obtient

$$\left(-v \Delta \varphi_{n+1}^\delta + \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_{ad},$$

ou encore

$$\left(-v \Delta \varphi_{n+1}^\delta, \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_{ad},$$

et grâce à la formule de Green, on déduit

$$v \left(\nabla \varphi_{n+1}^\delta, \nabla \left(\psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_{ad},$$

Par suite, on a

$$\left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq -v \left(\nabla \varphi_{n+1}^\delta, \nabla \left(\psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \right), \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_{ad},$$

ou encore

$$v \left(\nabla \varphi_{n+1}^\delta, \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right) \leq v \left(\nabla \varphi_{n+1}^\delta, \nabla \psi^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right), \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Ainsi, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} v \left\| \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq v \left\| \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité de Young et à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} v \left\| \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{v}{2} \left\| \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{v}{2} \left\| \nabla \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

Par suite, il est facile de déduire que

$$\begin{aligned} \frac{v}{2} \left\| \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{v}{2} \left\| \nabla \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

alors, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{v}{2} \left\| \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{v}{2} \left\| \nabla \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et encore une fois par application de l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left\| \nabla \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{v\varepsilon} \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{2}{v\varepsilon} \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left\| \psi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit

$$C \left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left\| \psi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C\varepsilon}{2} \left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{4}{\nu\varepsilon} \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C\varepsilon}{2} \left\| \psi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ou encore

$$\left(C - \frac{C\varepsilon}{2} \right) \left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left\| \psi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{4}{\nu\varepsilon} \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C\varepsilon}{2} \left\| \psi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

par suite, on trouve

$$\left(\frac{2C - C\varepsilon}{2} \right) \left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left\| \psi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{4}{\nu\varepsilon} \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par définition de $\beta'(\cdot)$ et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{C}{2C - C\varepsilon} \right) \left\| \psi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{(2C - C\varepsilon)(\nu\varepsilon)\delta^2} \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ou encore

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{(2C - C\varepsilon)(\nu\varepsilon)\delta^2} \left(\left\| \psi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right),$$

Finalement, on obtient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + CR,$$

où on pose $C_3^\delta := \left(\frac{C}{(2C - C\varepsilon)(\nu\varepsilon)\delta^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, avec un choix convenable de ε . □

Le Corollaire suivant nous montre que y_{n+1}^δ est borné en norme $H^1(\Omega)$.

Corollaire 2.1. Pour tout φ_{n+1}^δ dans \mathcal{U}_{ad} , avec $n = 0, 1, 2, \dots$ il vient

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}_1^\delta, \quad (2.36)$$

ce qui signifie que y_{n+1}^δ appartient à $B_{H^1} \left(0, \hat{R}_1^\delta \right) \cap \mathcal{U}$, où $\hat{R}_1^\delta = C + \frac{C}{\delta} R$.

Démonstration. D'après l'équation (2.33), on obtient

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + C,$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et sachant que φ_n^δ est dans $\mathcal{B}_{H^2(\Omega)}(0, R)$, il vient

$$\left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}_1^\delta,$$

où $\hat{R}_1^\delta = C + \frac{C}{\delta} R$. □

Le Corollaire suivant nous montre que p_{n+1}^δ est borné en norme $H^1(\Omega)$.

Corollaire 2.2. Pour tout y_{n+1}^δ est dans $B_{H^1} \left(0, \hat{R}_1^\delta \right) \cap \mathcal{U}$, avec $n = 0, 1, 2, \dots$, il vient

$$\left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}_2^\delta, \quad (2.37)$$

ce qui signifie que p_{n+1}^δ appartient à $B_{H^1} \left(0, \hat{R}_2^\delta \right) \cap \mathcal{U}$, où $\hat{R}_2^\delta = C \hat{R}_1^\delta + C$.

Démonstration. D'après l'équation (2.34), on obtient

$$\left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| y_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + C,$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et sachant que $y_{n+1}^\delta \in B_{H^1} \left(0, \hat{R}_1^\delta \right)$ il vient

$$\left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}_2^\delta,$$

où $\hat{R}_2^\delta = C \hat{R}_1^\delta + C$. □

Le Corollaire suivant, montre que φ_{n+1}^δ est borné en norme $H^2(\Omega)$.

Corollaire 2.3. *Si p_{n+1}^δ est dans $B_{H^1}(0, \hat{R}_2^\delta) \cap \mathcal{U}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, alors*

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \hat{R}^\delta, \quad (2.38)$$

ce qui signifie que φ_{n+1}^δ appartient à $B_{H^2}(0, \hat{R}^\delta) \cap \mathcal{U}_{ad}$, où $\hat{R}^\delta = C\hat{R}_2^\delta + C$.

Démonstration. D'après l'équation (2.35), on obtient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq C_3^\delta \left\| p_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + C_3^\delta R,$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et sachant que p_{n+1}^δ est dans $B_{H^1}(0, \hat{R}_2^\delta)$, alors il vient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}^\delta,$$

$$\text{où } \hat{R}^\delta = \left(\frac{C}{(2C-C\varepsilon)(v\varepsilon)\delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{R}_2^\delta + \left(\frac{C}{(2C-C\varepsilon)(v\varepsilon)\delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} R. \quad \square$$

Le Théorème suivant nous montre que l'application F_1 est localement Lipschitzienne, et il va servir à la démonstration du Théorème 2.5

Théorème 2.4. *Pour $\delta \leq C$, la fonction F_1 définie par (2.24) est localement Lipschitzienne de $(\mathcal{B}_{H^2}(0, \hat{R}^\delta) \cap \mathcal{U}_{ad})$ dans $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \hat{R}_1^\delta) \cap \mathcal{U})$, avec la constante de Lipschitz $l_1 = \frac{C}{\delta}$.*

Démonstration. Soient $y_{n+1}^\delta = F_1(\varphi_n^\delta)$ et $z_{n+1}^\delta = F_1(\psi_n^\delta)$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$ où $(y_{n+1}^\delta, \varphi_n^\delta)$ et $(z_{n+1}^\delta, \psi_n^\delta)$ sont dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{ad}$, alors on obtient

$$\sigma(y_{n+1}^\delta, v) + (\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{U},$$

et

$$\sigma(z_{n+1}^\delta, v) + (\beta_\delta(z_n^\delta - \psi_n^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{U}.$$

Par soustraction des deux équations précédentes, on obtient

$$\sigma \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta, v \right) + \left(\beta_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right), v \right) = 0,$$

et si on choisit de prendre $v = y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta$, alors on obtient

$$\sigma \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta, y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right) = 0,$$

et sachant que la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est coercive, on déduit que

$$C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq - \left(\beta_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right),$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left\| \beta_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par application du Théorème des accroissements finis à $\beta(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)$ et $(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta)$, on obtient

$$C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \max \left| \beta'(\cdot) \right| \frac{1}{\delta} \left\| \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

et par application de l'inégalité triangulaire et d'après la définition de $\beta'(\cdot)$, on obtient

$$C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \left(\left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Ensuite, par l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \left(C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Ainsi, on remarque qu'on peut déduire deux cas,

- Premier cas : si on a $\left\|y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}$, il n'y a plus rien à démontrer.
- Deuxième cas : si on a $\left\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta\right\|_{H^1(\Omega)}$, alors

$$C \left\|y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\|y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalement, on obtient

$$\left\|y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta\right\|_{H^1(\Omega)} \leq l_1 \left\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\right\|_{L^2(\Omega)},$$

où

$$l_1 = \max \left\{ 1, \frac{C}{\delta} \right\}.$$

□

Le Théorème suivant montre que l'application F_2 est localement Lipschitzienne, et il va servir à la démonstration du Théorème 2.6.

Théorème 2.5. *La fonction F_2 définie par (2.26) est localement Lipschitzienne de $(B_{H^1}(0, \hat{R}_1^\delta) \cap \mathcal{U}) \times (B_{H^2}(0, \hat{R}^\delta))$ dans $(B_{H^1}(0, \hat{R}_2^\delta) \cap \mathcal{U})$, avec la constante de Lipschitz $l_2 = \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} + C$. et pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on a.*

$$\left\|p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right\|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 \left(\left\|y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta\right\|_{H^1(\Omega)} + \left\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\right\|_{H^2(\Omega)} \right). \quad (2.39)$$

Démonstration. Soient $p_{n+1}^\delta = F_2(y_{n+1}^\delta, \varphi_n^\delta)$ et $q_{n+1}^\delta = F_2(z_{n+1}^\delta, \psi_n^\delta)$ où $(y_{n+1}^\delta, \varphi_n^\delta)$ et $(z_{n+1}^\delta, \psi_n^\delta)$ sont dans $B_{H^1}(0, \hat{R}_1^\delta) \times B_{H^2}(0, \hat{R}^\delta)$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$, alors pour tout w dans \mathcal{U} , on a

$$\sigma(p_{n+1}^\delta, w) + (\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta, w) = (y_{n+1}^\delta - z, w),$$

et

$$\sigma\left(q_{n+1}^\delta, w\right) + \left(\beta'_\delta\left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta\right) p_{n+1}^\delta, w\right) = \left(z_{n+1}^\delta - z, w\right).$$

Par soustraction des deux équations précédentes, on obtient

$$\sigma\left(p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta, w\right) + \left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta\left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta\right) q_{n+1}^\delta, w\right) = \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta, w\right),$$

et si on choisit de prendre $w = p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta$, on a

$$\begin{aligned} & \left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta\left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta\right) q_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right) \\ & + \sigma\left(p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right) = \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right). \end{aligned}$$

Sachant d'après l'hypothèse C_2 que la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est coercive, on déduit

$$\begin{aligned} C \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right) \\ & - \left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta\left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta\right) q_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right), \end{aligned}$$

et si dans l'inégalité de droite précédente, on ajoute et on retranche la quantité $\left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) q_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} C \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq - \left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) \left(p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right)\right) \\ & + \left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) - \beta'_\delta\left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta\right)\right) q_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \\ & + \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right). \end{aligned}$$

D'après les propriétés de $\beta'(\cdot)$, on sait que $-\left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) \left(p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right), p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right)$ est négative, alors on obtient

$$\begin{aligned} C \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq - \left(\beta'_\delta\left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) - \beta'_\delta\left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta\right)\right) q_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \\ & + \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta, p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta\right), \end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$C \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ + \frac{C}{\delta} \left\| q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \beta' \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta' \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)},$$

et par application du Théorème des accroissements finis à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)$ et $(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta)$, on obtient

$$C \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \max |\beta''(\cdot)| \right\| \left\| \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ + C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Grâce à l'inégalité Triangulaire et la définition de $\beta''(\cdot)$, on obtient

$$C \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left(\left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ + C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après le Corollaire 2.2 et par les injections continues de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \hat{R}_2^\delta \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ + \frac{C}{\delta} \hat{R}_2^\delta \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + C \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)},$$

par suite, on a

$$\left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\frac{C \hat{R}_2^\delta}{\delta} + C \right) \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C \hat{R}_2^\delta}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)},$$

où

$$l_2 = \max \left\{ \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} + C, \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} \right\}.$$

Ainsi, pour δ suffisamment petit on déduit que

$$l_2 = \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} + C.$$

Finalement, on obtient

$$\left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 \left(\left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

□

Le Théorème suivant montre que l'application F est localement Lipschitzienne, et les résultats des Théorèmes 2.4 et 2.5 vont servir à la démonstration du Théorème 2.6.

Théorème 2.6. *La fonction F_3 définie par (2.28) est localement Lipschitzienne de $(B_{H^1}(0, \hat{R}_1^\delta) \cap \mathcal{U}) \times (B_{H^2}(0, \hat{R}^\delta))$ dans $(B_{H^1}(0, \hat{R}_2^\delta) \cap \mathcal{U}_{ad})$, et pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on a*

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq l \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \quad (2.40)$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et $l = l_3 l_2 + l_3 l_2 l_1 + l_3 l_1 + l_3$ est la constante de Lipschitz de la fonction F_3 et $l_3 = \frac{C}{\delta \nu} \hat{R}_2^\delta$.

Démonstration. D'après l'inéquation (2.30), et pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on obtient

$$\left(-\nu \Delta \varphi_{n+1}^\delta + \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq 0, \quad \forall \psi_{n+1}^\delta \in \mathcal{U}_{ad},$$

et

$$\left(\nu \Delta \psi_{n+1}^\delta - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq 0, \quad \forall \psi_{n+1}^\delta \in \mathcal{U}_{ad},$$

par addition des deux inégalités précédentes, on obtient

$$\left(-\mathbf{v} \Delta \varphi_{n+1}^\delta + \mathbf{v} \Delta \psi_{n+1}^\delta + \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta\right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta\right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta\right) \geq 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \left(\Delta \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right), \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right) \\ + \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par application de la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} -\mathbf{v} \left(\nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right), \nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right) \right) \\ + \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \geq 0, \end{aligned}$$

par suite, on trouve

$$\begin{aligned} \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right) \\ \geq \mathbf{v} \left(\nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right), \nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right) \right), \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \left(\nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right), \nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right) \right) \\ \leq \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right), \end{aligned}$$

et si on ajoute et on retranche la quantité $\left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right)$ dans l'inégalité de droite précédente, on obtient

$$\mathbf{v} \left\| \nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right), \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right)_2$$

$$+ \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) q_{n+1}^\delta, \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right),$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \left\| \nabla \left(\varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \left(\beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta'_\delta \left(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta \right) \right) q_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et d'après le Théorème des accroissements finis appliqué à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)$ et $(z_{n+1}^\delta - \psi_n^\delta)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\delta \mathbf{v}} \left\| \max \left| \beta' \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) \right| \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{\delta \mathbf{v}} \left(\left\| \max \left| \beta''(\cdot) \right| \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right) - \left(\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\quad \times \left(\left\| q_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Sachant d'après le Corollaire 2.2, que $\|q^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \hat{R}_2^\delta$ et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\delta \mathbf{v}} \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C \hat{R}_2^\delta}{\delta \mathbf{v}} \left\| \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right) - \left(\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi_{n+1}^\delta - \varphi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta \mathbf{v}} \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C \hat{R}_2^\delta}{\delta \mathbf{v}} \left\| \left(y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right) - \left(\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

et grâce à l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{m+1}^\delta - \psi_{m+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{C}{\delta \mathbf{v}} \left\| p_{m+1}^\delta - q_{m+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta \mathbf{v}} \left(\left\| y_{m+1}^\delta - z_{m+1}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_m^\delta - \psi_m^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{C}{\delta \mathbf{v}} \left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C\hat{R}_2}{\delta \mathbf{v}} \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C\hat{R}_2}{\delta \mathbf{v}} \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par la suite, on déduit que

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq l_3 \left(\left\| p_{n+1}^\delta - q_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_{n+1}^\delta - z_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right),$$

où $l_3 = \frac{C\hat{R}_2}{\delta \mathbf{v}}$, et par application des Théorèmes 2.4 et 2.5, on déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq l_3 \left(l_2 \left(\left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + l_1 \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \right. \\ &\quad \left. + l_1 \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq l_3 l_2 \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + l_3 l_2 l_1 \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + l_3 l_1 \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + l_3 \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq (l_3 l_2 + l_3 l_2 l_1 + l_3 l_1 + l_3) \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}.$$

Finalement, on obtient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \psi_{n+1}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq l \left\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right\|_{H^2(\Omega)},$$

où $l = l_3 l_2 + l_3 l_2 l_1 + l_3 l_1 + l_3$ est une constante de Lipschitz de la fonction F . \square

Lemme 2.7. *Il existe un contrôle optimal $\bar{\varphi}^\delta$ dans \mathcal{U}_{ad} qui satisfait le système des conditions d'optimalité donné par (\mathcal{S}^δ) .*

Démonstration. Par application des Corollaires 2.1, 2.2 et 2.3, on peut facilement passer à la limite dans les équations données par (2.25), (2.27) et (2.29) pour conclure que $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$ satisfait le système d'équations donné par (2.9)-(2.11). \square

En utilisant les résultats précédents de la sous-section 3.1, l'algorithme 2.1 peut être implémenté par l'algorithme suivant.

Théorème 2.7. *Si $\bar{\varphi}^\delta$ est une solution de l'équation suivante*

$$\bar{\varphi}^\delta - F(\bar{\varphi}^\delta) = 0, \quad (2.44)$$

alors, le triplet $(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta, \bar{p}^\delta)$ satisfait le système des conditions d'optimalité donné par (\mathcal{S}_δ) .

Démonstration. Comme $\bar{\varphi}^\delta$ satisfait l'équation (2.44), alors on a

$$\bar{\varphi}^\delta = F_3(\bar{y}^\delta, \bar{p}^\delta), \quad (2.45)$$

où

$$\bar{y}^\delta = F_1(\bar{\varphi}^\delta), \quad (2.46)$$

et

$$\bar{p}^\delta = F_2(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta), \quad (2.47)$$

Algorithme 2.2 Implémentation de l'algorithme 2.1

Entrée : Choisir un point initial $\{y_0, p_0, \varphi_0, w_y, \delta, \rho, v, \varepsilon, f, z\}$ telle que la tolérance $\varepsilon > 0$.

Entrée : Poser $n = 0$

1: Calculer $J_{n-1} \leftarrow J_{n-1}(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$.

2: Résoudre en r_n^δ

$$\left(A + \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)\right) r_n^\delta = -w_y \left(Ay_{n-1}^\delta + \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - f\right). \quad (2.41)$$

3: Calculer $y_n^\delta = y_{n-1}^\delta + r_n^\delta$.

4: Résoudre en p_n^δ

$$\left(A + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)\right) p_n^\delta = y_n^\delta - z. \quad (2.42)$$

5: Résoudre en φ_n^δ

$$\varphi_n^\delta = P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi_{n-1}^\delta + \rho v \Delta \varphi_{n-1}^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) p_n^\delta). \quad (2.43)$$

6: Calculer $J_n \leftarrow J_{n-1}(y_n^\delta, \varphi_n^\delta)$.

7: **si** $|J_n - J_{n-1}| \leq \varepsilon$ **alors**

8: Stop.

9: Donne $S_n^\delta := (y_n^\delta, p_n^\delta, \varphi_n^\delta)$ est une solution.

10: **sinon**

11: $n + 1 \leftarrow n$, aller à l'étape 1.

12: **fin si.**

où les applications F_1, F_2 et F_3 peuvent être écrites respectivement sous la forme

$$a(\bar{y}^\delta, v) + \frac{1}{\delta} (\beta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad (2.48)$$

$$a(\bar{p}^\delta, w) + (\beta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta, w) = (\bar{y}^\delta - z, w), \text{ pour tout } w \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad (2.49)$$

$$\bar{\varphi}^\delta = P_{\mathcal{U}_{ad}}(\bar{\varphi}^\delta + \rho v \Delta \bar{\varphi}^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta). \quad (2.50)$$

Nous observons que les équations (2.48), (2.49) et (2.50) sont les mêmes équations du système des conditions d'optimalité donné par (S_δ) , avec le triplet $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$ remplacé par le triplet $(\bar{y}^\delta, \bar{p}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$. \square

Lemme 2.8. Soit $\bar{\varphi}^\delta$ solution de l'équation (2.50) telle que

$$\left\| \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}_2^\delta, \quad (2.51)$$

alors on a

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\| \leq \lambda_1 \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right), \quad (2.52)$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$, où λ_1 est une constante positive, telle que $\lambda_1 = \frac{2\rho\hat{R}_2^\delta}{\delta}\omega_\varphi$.

Démonstration. D'après l'équation (2.43) de l'algorithme 2.2, on peut écrire pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_{n+1}^\delta = \omega_\varphi P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi_n^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \varphi_n^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta),$$

et

$$\bar{\varphi}^\delta = \omega_\varphi P_{\mathcal{U}_{ad}}(\bar{\varphi}^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \bar{\varphi}^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta).$$

Par soustraction des deux équations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta &= \omega_\varphi P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi_n^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \varphi_n^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta) \\ &\quad - \omega_\varphi P_{\mathcal{U}_{ad}}(\bar{\varphi}^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \bar{\varphi}^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta), \end{aligned}$$

et en multipliant l'équation précédente à droite et à gauche par $(\varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} (\varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) &= (\omega_\varphi P_{\mathcal{U}_{ad}}(\varphi_n^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \varphi_n^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta) \\ &\quad - \omega_\varphi P_{\mathcal{U}_{ad}}(\bar{\varphi}^\delta + \rho \mathbf{v} \Delta \bar{\varphi}^\delta - \rho \frac{\beta'}{\delta} (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta), \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta). \end{aligned}$$

Comme, $P_{\mathcal{U}_d}$ est une contraction, alors, on a

$$\begin{aligned} (\varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) &= \omega_\varphi (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \\ &\quad + \rho \nu \omega_\varphi (\Delta (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta), \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \\ &\quad - \rho (\beta'_\delta (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta, \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta), \end{aligned}$$

et si on ajoute et on retranche la quantité $(\beta'_\delta (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) \bar{p}^\delta, \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$ dans l'égalité de droite précédente, on peut avoir

$$\begin{aligned} &\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \rho \nu \omega_\varphi \left\| \Delta (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \rho \omega_\varphi \left\| \beta'_\delta (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) \bar{p}^\delta + \right. \\ &\quad \quad \left. + \beta'_\delta (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) \bar{p}^\delta - \beta'_\delta (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

par suite, on déduit

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \rho \nu \omega_\varphi \left\| \Delta (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \rho \omega_\varphi \left\| \beta'_\delta (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) (p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \rho \omega_\varphi \left\| (\beta'_\delta (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'_\delta (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)) \bar{p}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et par application du Théorème des accroissements finis à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)$ et $(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$, il vient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \nu \omega_\varphi \left\| \Delta \left(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \rho \omega_\varphi \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \beta'_\delta \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left(p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
& \left. \left\| \max \beta''_\delta (\cdot) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \bar{p}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\begin{aligned}
\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \rho \nu \omega_\varphi \left\| \Delta \left(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \rho \omega_\varphi \left\| \max \beta'_\delta (\cdot) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left(p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \rho \frac{2}{\delta} \omega_\varphi \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \bar{p}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

d'après le Corollaire 2.2, on sait que $\left\| \bar{p}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \hat{R}_2^\delta$ et par les injections continues de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 & \leq \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\
& + \rho \nu \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\
& + \rho \frac{1}{\delta} \omega_\varphi \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\
& + \rho \frac{2\hat{R}_2^\delta}{\delta} \omega_\varphi \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

par suite, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} & \leq \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \rho \nu \omega_\varphi \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\
& + \rho \frac{1}{\delta} \omega_\varphi \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\
& + \rho \frac{2\hat{R}_2^\delta}{\delta} \omega_\varphi \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

ou encore

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \rho \frac{2\hat{R}_2^\delta}{\delta} \omega_\varphi \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right),$$

où

$$\lambda_1 = \max \left\{ \rho \frac{2\hat{R}_2^\delta}{\delta} \omega_\varphi, \rho \frac{1}{\delta} \omega_\varphi, \rho \nu \omega_\varphi, \omega_\varphi \right\},$$

et pour δ suffisamment petit, on déduit

$$\lambda_1 = \rho \frac{2\hat{R}_2^\delta}{\delta} \omega_\varphi.$$

Finalement, on obtient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \lambda_1 \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

□

Lemme 2.9. *La fonction F_2 définie par (2.47) est localement Lipschitzienne de $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \hat{R}_1^\delta) \cap \mathcal{U}) \times (\mathcal{B}_{H^2}(0, \hat{R}^\delta) \cap \mathcal{U}_{ad})$ dans $(\mathcal{B}_{H^2}(0, \hat{R}_2^\delta) \cap \mathcal{U})$, avec la constante de Lipschitz $\lambda_2 = \frac{C}{\delta} \hat{R}_2^\delta + C, \hat{R}_2^\delta, \hat{R}_1^\delta$ et \hat{R}^δ données respectivement par les Corollaires 2.2, 2.1 et 2.3 alors pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on a*

$$\left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \lambda_2 \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right). \quad (2.53)$$

Démonstration. Soient $p_{n+1}^\delta = F_2(y_{n+1}^\delta, \varphi_n^\delta)$ et $\bar{p}^\delta = F_2(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$, où $(y_{n+1}^\delta, \varphi_n^\delta)$ et $(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$ sont dans $B_{H^1}(0, \hat{R}_1^\delta) \times B_{H^2}(0, \hat{R}^\delta)$, alors on obtient

$$\sigma(p_{n+1}^\delta, w) + (\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta, w) = (y_{n+1}^\delta - z, w), \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{U},$$

et

$$\sigma(\bar{p}^\delta, w) + \left(\beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta, w \right) = (\bar{y}^\delta - z, w), \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{U}.$$

Par soustraction des deux équations précédentes, il vient

$$\sigma(p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta, w) + \left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta, w \right) = (y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, w),$$

et si on choisit de prendre $w = p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta$ dans l'équation précédente, on a

$$\begin{aligned} & \sigma(p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta) \\ & + \left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right) = (y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta). \end{aligned}$$

Sachant que la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est coercive, on déduit que

$$\begin{aligned} C \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq - \left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) p_{n+1}^\delta - \beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \bar{p}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right) \\ & \quad + (y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta), \end{aligned}$$

et si dans la relation précédente, on ajoute et on retranche la quantité $\left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) \bar{p}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right)$, on obtient

$$\begin{aligned} C \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq - \left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) (p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta) \right. \\ & \quad \left. + \left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right) \bar{p}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right) \\ & \quad + (y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta). \end{aligned}$$

Comme d'après les propriétés de $\beta'(\cdot)$, on sait que $-\left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) (p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta), p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right)$, est négative, alors, on obtient

$$C \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq - \left(\beta'_\delta(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right) \bar{p}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta$$

$$+ (y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta),$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} C \|p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\delta} \|\bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \left\| \beta'(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \|p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théorème des accroissements finis appliqué à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle ayant pour bords $(y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta)$ et $(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$, on obtient

$$\begin{aligned} C \|p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{C}{\delta} \|\bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \left\| \max |\beta''(\cdot)| \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| (y_{n+1}^\delta - \varphi_n^\delta) - (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité triangulaire et la définition de $\beta''(\cdot)$, il vient

$$\begin{aligned} C \|p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{C}{\delta} \|\bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \left(\|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\quad + C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sachant d'après le Corollaire 2.2, que $\|\bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}_2^\delta$ et par injection continue de $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\|p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \hat{R}_2^\delta \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \hat{R}_2^\delta \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)},$$

Par conséquent, on obtient

$$\left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} + C \right) \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)},$$

où

$$\lambda_2 = \max \left\{ \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} + C, \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} \right\},$$

et pour δ suffisamment petit, on peut avoir

$$\lambda_2 = \frac{C\hat{R}_2^\delta}{\delta} + C.$$

Finalement, on a

$$\left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \lambda_2 \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

□

Lemme 2.10. Soit \bar{y}^δ la solution de l'équation (2.50) tel que

$$\left\| \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{R}_2^\delta,$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$, et \hat{R}_2^δ est donnée par le Corollaire 2.2, alors on a

$$\begin{aligned} \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \lambda_3 \left\{ \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\ \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

où

$$\lambda_3 = \max \left\{ \left(\frac{1 - \omega_y}{C} \right) \left(C + \frac{c}{\delta} \right), \frac{C\omega_y}{\delta} \right\}.$$

Démonstration. D'après l'étape 1 de la version continue de l'algorithme 2.2, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla v \nabla r_n^\delta dx + \int_{\Omega} \beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) v r_n^\delta dx \\ &= -\omega_y \left(\int_{\Omega} \nabla y_n^\delta \nabla v dx + \int_{\Omega} \beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) v dx - \int_{\Omega} f v dx \right), \end{aligned}$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots$, où ω_y est une constante positive inférieure à 1.

Par la suite, il vient

$$\begin{aligned} & \sigma(r_n^\delta, v) + (\beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) r_n^\delta, v) \\ &= -\omega_y \left((\sigma(y_n^\delta, v) + (\beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta), v) - (f, v)) \right), \end{aligned}$$

ainsi, si on choisit de prendre $v = y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta$ dans la relation précédente, on trouve

$$\begin{aligned} & \sigma(y_{n+1}^\delta - y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) + (\beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) (y_{n+1}^\delta - y_n^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\ &= -\omega_y \left(\sigma(y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) + (\beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) - (f, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \right), \end{aligned}$$

et si, on ajoute et on retranche $(\bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta)$ dans l'égalité de droite de la relation précédente, on déduit

$$\begin{aligned} & \sigma(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta + \bar{y}^\delta - y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) + (\beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) (y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta + \bar{y}^\delta - y_n^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\ &= -\omega_y \left(\sigma(y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) + (\beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) - (f, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \right). \end{aligned}$$

Par la suite, il vient

$$\begin{aligned} & \sigma(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) + \sigma(\bar{y}^\delta - y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\ & \quad + (\beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) (y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\ & \quad + (\beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) (\bar{y}^\delta - y_n^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \end{aligned}$$

$$= -\omega_y \left(\sigma \left(y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) - \left(f, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right),$$

en outre

$$\begin{aligned} & \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\ &= -\omega_y \left(\sigma \left(y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) - \left(f, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) \\ & \quad + \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\ &= -\left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\ & \quad - \omega_y \left(\sigma \left(y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) - \left(f, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) \\ & \quad + \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \end{aligned}$$

d'après les propriétés de $\beta'_\delta(\cdot)$, on sait que $-\left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right)$ est négative, on déduit que

$$\begin{aligned} & \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\ & \leq -\omega_y \left(\sigma \left(y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) - \left(f, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) \\ & \quad + \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \end{aligned}$$

et d'après l'équation (2.48), on peut écrire

$$\sigma \left(\bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) = \left(f, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right),$$

par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \leq -\omega_y \sigma \left(y_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) - \omega_y \left(\beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \quad + \omega_y \sigma \left(\bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \omega_y \left(\beta_\delta \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \quad + \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right),
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 & \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \leq \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \quad - \omega_y \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) - \omega_y \left(\beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta_\delta \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right),
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 & \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \leq (1 - \omega_y) \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \quad - \omega_y \left(\beta_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \beta_\delta \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right),
 \end{aligned}$$

et par application du Théorème des accroissement finis à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle d'extrémités $(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)$ et $(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \leq (1 - \omega_y) \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
 & \quad - \omega_y \left(\beta'_\delta \left(r^\delta(\theta) \right) \left(\left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) - \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right),
 \end{aligned}$$

où

$$r^\delta(\theta) = \theta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) + (1 - \theta) \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right).$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}
& \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \leq (1 - \omega_y) \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \quad - \omega_y \left(\beta'_\delta \left(r^\delta(\theta) \right) \left(\left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \quad + \omega_y \left(\beta'_\delta \left(r^\delta(\theta) \right) \left(\left(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right),
\end{aligned}$$

si dans l'inégalité précédente, on ajoute et on retranche la quantité $\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right)$, on trouve

$$\begin{aligned}
& \sigma \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \leq (1 - \omega_y) \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \quad - \omega_y \left(\left(\beta'_\delta \left(r^\delta(\theta) \right) - \beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) + \beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \quad \omega_y \left(\beta'_\delta \left(r^\delta(\theta) \right) \left(\left(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& a \left(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \leq (1 - \omega_y) \sigma \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \quad - \omega_y \left(\left(\beta'_\delta \left(r^\delta(\theta) \right) - \beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \quad - \omega_y \left(\left(\beta'_\delta \left(y_n^\delta - \varphi_n^\delta \right) \right) \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) \\
& \quad + \omega_y \left(\beta'_\delta \left(r^\delta(\theta) \right) \left(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right).
\end{aligned}$$

Par l'application du Théorème des accroissement finis à $\beta'(\cdot)$ sur l'intervalle d'extré-

mités $(r^\delta(\theta))$ et $(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)$, on trouve

$$\begin{aligned}
& \sigma(y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\
& \leq (1 - \omega_y) a(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\
& \quad + (1 - \omega_y) (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)(y_n^\delta - \bar{y}^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\
& \quad + \omega_y (\beta''_\delta(s^\delta(\theta))((1 - \theta)(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - (1 - \theta)(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta))(y_n^\delta - \bar{y}^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta) \\
& \quad + \omega_y (\beta'_\delta(r^\delta(\theta))(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta), y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta),
\end{aligned}$$

où

$$s^\delta(\theta) = \theta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) + (1 - \theta)r^\delta(\theta),$$

et en utilisant la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$, on déduit

$$\begin{aligned}
C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq (1 - \omega_y) C \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\
& \quad + (1 - \omega_y) \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\
& \quad + \omega_y (1 - \theta) \frac{C}{\delta} \|(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\|_{H^1(\Omega)} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\
& \quad + \omega_y \frac{C}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par la suite, on obtient

$$\begin{aligned}
C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} & \leq (1 - \omega_y) C \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + (1 - \omega_y) \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\
& \quad + \omega_y (1 - \theta) \frac{C}{\delta} \|(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\|_{H^1(\Omega)} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \omega_y \frac{C}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

et on déduit que

$$C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 - \omega_y) C \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + (1 - \omega_y) \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}
& + \omega_y(1-\theta) \frac{C}{\delta} \left(\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right) \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\
& + \omega_y \frac{C}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\begin{aligned}
C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} & \leq (1-\omega_y) C \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + (1-\omega_y) \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\
& + \omega_y(1-\theta) \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + \omega_y \frac{C}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\
& + \omega_y(1-\theta) \frac{C}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

et par application de l'inégalité de Young, il vient

$$\begin{aligned}
C \|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} & \leq (1-\omega_y) \left(C + \frac{C}{\delta} \right) \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \omega_y(1-\theta) \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
& + \omega_y(1-\theta) \frac{C}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \omega_y \frac{C}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} & \leq \lambda_3 \left\{ \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
& \left. + \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right\},
\end{aligned}$$

où

$$\lambda_3 = \max \left\{ (1-\omega_y) \left(C + \frac{C}{\delta} \right), \omega_y(1-\theta) \frac{C}{\delta}, \omega_y \frac{C}{\delta} \right\}.$$

□

Lemme 2.11. Soient respectivement y_{n+1}^δ et φ_{n+1}^δ les solutions des équations (2.41) et (2.43) et \bar{y}^δ et $\bar{\varphi}^\delta$ sont respectivement les solutions des équations (2.48) et (2.50), alors on a

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq k^\delta \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

où $\lambda_5 = \lambda_1(\lambda_3 + \lambda_2(\lambda_3 + 1) + 1)$ et $k^\delta = \lambda_5 + \lambda_3$ avec λ_1, λ_2 et λ_3 sont données respectivement par les Lemmes 2.8, 2.9 et 2.10.

Démonstration. D'après le résultat (2.54) du Lemme 2.10, pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on a

$$\begin{aligned} \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \lambda_3 \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

ainsi, le résultat (2.53) du Lemme 2.9 nous donne

$$\left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \lambda_2 \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right),$$

en d'autres termes, on a

$$\begin{aligned} \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \lambda_2 \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \lambda_3 \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \right), \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \lambda_2 \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \lambda_2 \lambda_3 \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\quad + \lambda_2 \lambda_3 \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Par suite, on déduit

$$\begin{aligned} \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \\ &\lambda_2(\lambda_3 + 1) \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\ &+ \lambda_2 \lambda_3 \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &+ \lambda_2 \lambda_3 \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \lambda_2(\lambda_3 + 1) \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Par la suite, on déduit

$$\begin{aligned} \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \lambda_4 \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \quad (2.57) \end{aligned}$$

où

$$\lambda_4 = \lambda_2(\lambda_3 + 1).$$

En utilisant la relation (2.52) du Lemme 2.8, on trouve

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \lambda_1 \left(\left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| p_{n+1}^\delta - \bar{p}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \right),$$

et en utilisant la relation (2.54) du Lemme 2.10 et l'inégalité (2.57), on obtient

$$\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \lambda_1 \left[\lambda_3 \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \\
& \quad + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \\
& + \lambda_4 \left(\left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right), \quad (2.58)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \lambda_1 (\lambda_3 + \lambda_4 + 1) & \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
& \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \lambda_5 & \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
& \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right), \quad (2.59)
\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_5 = \lambda_1 (\lambda_3 + \lambda_4 + 1).$$

Ainsi, d'après le résultat (2.54) du Lemme 10 et l'inégalité (2.59), on trouve

$$\begin{aligned}
& \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\
& \leq \lambda_5 \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \\
& + \lambda_3 \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

par la suite, on déduit que

$$\begin{aligned} & \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq (\lambda_5 + \lambda_3) \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \varphi_{n+1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| y_{n+1}^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq k^\delta \left(\left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

où $k^\delta = \lambda_5 + \lambda_3$ et $\lambda_5 = \lambda_1 (\lambda_3 + \lambda_2 (\lambda_3 + 1) + 1)$. □

Etude numérique du problème de contrôle optimal de l'obstacle

3.1 Discrétisation du problème de contrôle optimal

Considérons l'approximation par la méthode des éléments finis conforme du problème de contrôle optimal (2.8). Dans la suite on va présenter le problème discrétisé, nous définissons une approximation basée sur la méthode des éléments finis pour le problème de contrôle optimal.

Dans la suite, on considère une famille de triangulation $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ avec chaque élément T dans \mathcal{T}_h nous associons deux paramètres $\rho(T)$ et $\sigma(T)$, où $\rho(T)$ désigne le diamètre de l'élément T et $\sigma(T)$ est le diamètre de la plus grande boule contenue dans T , la taille des mailles est définie par $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} (\rho(T))$, nous supposons que les hypothèses de régularité suivantes sont satisfaites.

A₁. Il existe deux constantes positives ρ et σ telles que

$$\frac{\rho(T)}{\sigma(T)} \leq \sigma \text{ et } \frac{h}{\rho(T)} \leq \sigma ,$$

pour toute T dans \mathcal{T}_h et tout $h > 0$.

A₂. Nous allons définir $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, et soient Ω_h et $\partial\Omega_h$ désignent l'intérieur et la frontière de $\bar{\Omega}_h$.

Nous supposons que $\bar{\Omega}_h$ est convexe et que les sommets de \mathcal{T}_h placés sur la frontière de $\partial\Omega_h$ sont des points de $\partial\Omega$.

On définit par \mathcal{P}_k l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k , ensuite on définit respectivement les espaces discrets suivants $U_h^0 = U \cap U_h$ et $V_h^0 = H_0^1(\Omega) \cap V$, les espaces des éléments finis associés engendrés par des fonctions de base nodales standard, tels que les nœuds de la triangulation \mathcal{T}_h sont notés par x_1, \dots, x_2 , où

$$U_h = \left\{ \varphi_h^\delta \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) : \varphi_h^\delta|_T \in \mathcal{P}_2, T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

et

$$V_h = \left\{ y_h^\delta \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : y_h^\delta|_T \in \mathcal{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Dans la suite, on note par π_h l'opérateur d'interpolation standard de Lagrange tel que pour tout v dans $\mathcal{C}(\Omega)$ on a $\pi_h v(x_i) = v(x_i)$, alors l'estimation d'erreur d'interpolation classique suivantes qui peut être trouvée dans [10].

Lemme 3.1. *Soit π_h^i pour $i = 1, 2$, π_h l'opérateur d'interpolation standard de Lagrange, pour $p > \frac{n}{2}$ et pour tout v dans $W^{m,p}(\Omega)$, on obtient*

$$|v - \pi_h^i v|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq Ch^{k-m} |v|_{W^{k,q}(\Omega)}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

Où k et m sont des entiers tel que $0 < k \leq i$ et $m = l - 1$, pour $l = 1, \dots, k$.

3.1.1 Approximation par la méthode des éléments finis du problème de contrôle optimal

Sachant que l'opérateur $\beta(\cdot)$ est non linéaire, alors le terme $\left(\beta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), v_h \right)$ est évalué en appliquant une technique d'intégration numérique en utilisant la formule de quadrature comme suit :

$$I \left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), v_h \right) = \sum_{i=1}^n w_i \beta_\delta \left(\left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) (x_i) \right) v_h(x_i),$$

où $w_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$, sont les poids d'intégration numérique et $\beta_\delta \left((y_h^\delta - \varphi_h^\delta)(x_i) \right)$ pour $i = 1, \dots, n$ sont des polynômes définis par morceaux couverts par l'opérateur d'interpolation de Lagrange π_h associé à des points d'intégration numérique qui peuvent s'écrire comme suit $\beta_\delta \left(\pi_h (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right)$.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la discrétisation du problème (P^δ) par la méthode d'éléments finis, et on développera également les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité discrètes du système (S^δ) . Une approximation de (\mathcal{P}^δ) par la méthode des éléments finis peut être donnée comme suit :

$$\begin{cases} \min_{\varphi_h \in \mathcal{U}_{ad}^h \subset \mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} (y_h^\delta - z)^2 + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega_h} (\nabla \varphi_h^\delta)^2 \right\}, \\ \text{tel que} \\ \sigma(y_h^\delta, v_h) + (\beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), v_h) = (f, v_h), \quad \text{pour tout } v_h \text{ dans } V_h \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\mathcal{U}_{ad}^h = \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{U}^h$ est un ensemble convexe fermé dans \mathcal{U}_h .

On conclut alors que le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_h^δ) admet une unique solution $(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)$, et que la paire $(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ dans $V_h \times \mathcal{U}_h$ est la solution de (\mathcal{P}_h^δ) si et seulement s'il existe un état adjoint p_h^δ dans V_h tel que le triplet $(y_h^\delta, p_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ satisfait les conditions d'optimalité :

$$\sigma(y_h^\delta, v_h) + (\beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), v_h) = (f, v_h), \quad \text{pour tout } v_h \text{ dans } V_h, \quad (3.2)$$

$$\sigma(p_h^\delta, w_h) + (\beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p_h^\delta, w_h) = (y_h^\delta - z, w_h), \quad \text{pour tout } w_h \text{ dans } V_h, \quad (3.3)$$

$$(-\Delta \varphi_h^\delta + \beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p_h^\delta, \psi_h - \varphi_h^\delta) \geq 0, \quad \text{pour tout } \psi_h \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}^h. \quad (3.4)$$

Dans le but de faciliter les calculs pour les estimations des erreurs, il convient d'introduire de nouvelles fonctions $y(\varphi_h^\delta)$, $p(\varphi_h^\delta)$ et φ_h^δ que l'on appellera fonctions auxiliaires,

de telle sorte que le triplet $(y^\delta(\varphi_h^\delta), p^\delta(\varphi_h^\delta), \varphi_h^\delta)$ soit solution du système d'équations suivant, que l'on appellera système intermédiaire

$$\sigma(y^\delta(\varphi_h^\delta), v) + (\beta_\delta(y^\delta(\varphi_h^\delta) - \varphi_h^\delta), v) = (f, v), \quad \text{pour tout } v \text{ dans } V_h \quad (3.5)$$

$$\sigma(p^\delta(\varphi_h^\delta), w) + (\beta'_\delta(y^\delta(\varphi_h^\delta) - \varphi_h^\delta) p^\delta(\varphi_h^\delta), w) = (y^\delta(\varphi_h^\delta) - z, w),$$

pour tout w dans V_h (3.6)

$$(-\Delta \varphi_h^\delta + \beta'_\delta(y^\delta(\varphi_h^\delta) - \varphi_h^\delta) p^\delta(\varphi_h^\delta), \psi - \varphi_h^\delta) \geq 0, \quad \text{pour tout } \psi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}^h \quad (3.7)$$

Le Lemme suivant annonce que le gradient de φ_h^δ est borné dans $L^2(\Omega)$ et il va servir à la démonstration du Lemme 3.3

Lemme 3.2. *Soit φ_h^δ une solution optimale qui satisfait le système d'optimalité discret donné par les équations(3.2)-(3.4) alors on a*

$$\|\nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \quad (3.8)$$

où C est une constante réelle positive qui ne dépend pas du paramètre d'approximation h .

Démonstration. De l'équation d'état discrète donnée par (3.2), on choisit de prendre $\varphi^\delta = \varphi_h^\delta = 0$, alors on obtient

$$\sigma(y_h^\delta(0), v_h) + (\beta_\delta(y_h^\delta(0)), v_h) = (f, v_h), \quad \text{pour tout } v_h \text{ dans } V_h,$$

et si on choisit de prendre $v_h = y_h^\delta(0)$, on obtient

$$\sigma(y_h^\delta(0), y_h^\delta(0)) + (\beta_\delta(y_h^\delta(0)), y_h^\delta(0)) = (f, y_h(0)).$$

Par coercivité de la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ et $y_h^\delta(0) \geq 0$, alors on obtient $\beta(y_h^\delta(0)) = 0$,

et on déduit que

$$\left\| y_h^\delta(0) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.$$

Sachant que φ_h^δ est une solution optimale du problème (P_h^δ) , on obtient

$$\left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (y_h^\delta - z)^2 dx + \int_{\Omega} (\nabla \varphi_h^\delta)^2 dx,$$

par conséquent, on déduit que

$$\left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (y_h^\delta(0) - z)^2 dx,$$

dans ce cas, il vient

$$\left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left(\int_{\Omega} (y_h(0))^2 dx + \int_{\Omega} (z)^2 dx \right),$$

et sachant que $\left\| y_h^\delta(0) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$ et z dans $L^2(\Omega)$, alors on déduit que

$$\left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

□

Le Lemme suivant nous affirme que y_h^δ est borné dans $H_0^1(\Omega)$ et il sert à la démonstration du Lemme 3.4.

Lemme 3.3. *Soit y_h^δ une solution optimale qui satisfait le système des conditions d'optimalité discret donné par (3.2)-(3.4) alors on a*

$$\left\| y_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{3.9}$$

où C est une constante réelle positive qui ne dépend pas du paramètre d'approximation h .

Démonstration. D'après la définition de $\beta(\cdot)$, on sait que si $y_h^\delta(x) - \varphi_h^\delta \geq 0$, alors on

obtient $\beta \left(y_h^\delta(x) - \varphi_h^\delta(x) \right) = 0$, et que si $y_h^\delta(x) - \varphi_h^\delta(x) < 0$, alors $v_h(x) - y_h^\delta(x) \geq v_h(x) - \varphi_h^\delta(x)$ et $\beta \left(y_h^\delta(x) - \varphi_h^\delta(x) \right) \leq 0$, alors on déduit que $\beta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \left(v_h - y_h^\delta \right) \leq 0$ presque partout dans Ω . Si on choisit de prendre $v_h = v_h - y_h^\delta$ dans l'équation d'état discrète donnée par (3.2) on obtient

$$\sigma \left(y_h^\delta, v_h - y_h^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), v_h - y_h^\delta \right) = \left(f, v_h - y_h^\delta \right),$$

par suite, il vient

$$\sigma \left(y_h^\delta, v_h - y_h^\delta \right) - \left(f, v_h - y_h^\delta \right) = - \left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), v_h - y_h^\delta \right) \geq 0.$$

D'après les propriétés de $\beta(\cdot)$, on sait que $- \left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), v_h - y_h^\delta \right) \geq 0$, alors on déduit que

$$\sigma \left(y_h^\delta, v_h - y_h^\delta \right) - \left(f, v_h - y_h^\delta \right) \geq 0,$$

ou encore

$$-\sigma \left(y_h^\delta, y_h^\delta \right) + \sigma \left(y_h^\delta, v_h \right) \geq \left(f, v_h - y_h^\delta \right).$$

Par conséquent, on obtient que

$$\sigma \left(y_h^\delta, y_h^\delta \right) \leq \left(f, y_h^\delta - v_h \right) + \sigma \left(y_h^\delta, v_h \right),$$

et si dans l'inégalité précédente on choisit de prendre $v_h = \varphi_h^\delta$, on obtient

$$\sigma \left(y_h^\delta, y_h^\delta \right) \leq \left(f, y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) + \sigma \left(y_h^\delta, \varphi_h^\delta \right).$$

En utilisant la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ données respectivement par les hypothèses C_1 et C_2 , on trouve

$$C \left\| y_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \left\| y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + C \left\| y_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et grâce à l'inégalité triangulaire, il vient

$$C \left\| y_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\left\| y_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + C \left\| y_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)},$$

Par la suite, on déduit deux cas :

Le premier cas : $C \left\| y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\| \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$ dans ce cas, il n'y a rien à démontrer.

Pour le deuxième cas : où $\left\| \varphi_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| y_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$, on a

$$\left\| y_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} + C.$$

Finalement, il vient

$$\left\| y_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.$$

□

Le Lemme suivant permet d'affirmer que $\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right)$ est bornée en norme $L^2(\Omega)$.

Lemme 3.4. Soit $(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ une solution optimale qui satisfait le système d'optimalité discret (3.2)-(3.4) alors on a

$$\left\| \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (3.10)$$

Démonstration. D'après l'équation d'état discrète donnée par (3.2), on obtient

$$\left\| \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \Delta y_h^\delta + f \right),$$

et si dans l'égalité de droite, on ajoute et on retranche $\left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \Delta \varphi_h^\delta \right)$, on obtient

$$\left\| \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \Delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right) + \left(\beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \Delta \varphi_h^\delta + f \right),$$

en utilisant la la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq - \left(\nabla \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \nabla (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right) \\ &\quad - \left(\nabla \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \nabla \varphi_h^\delta \right) + \left(\beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), f \right), \end{aligned}$$

dans ce cas, il vient

$$\begin{aligned} \left\| \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq - \left(\beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \left(\nabla (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right)^2 \right) \\ &\quad - \left(\beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \nabla (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \nabla \varphi_h^\delta \right) \\ &\quad + \left(\beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), f \right), \end{aligned}$$

et d'après les propriétés de $\beta'(\cdot)$, on sait que la quantité $-\left(\beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \left(\nabla (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right)^2 \right)$ est négative, alors on déduit

$$\left\| \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq - \left(\beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \nabla (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \nabla \varphi_h^\delta \right) + \left(\beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), f \right),$$

et par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$\left\| \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left\| \beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \nabla (y_h - \varphi_h) \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi_h\|_{L^2(\Omega)} + \left(\beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta), f \right),$$

et grâce à l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \left\| \beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\nabla (y_h - \varphi_h) \nabla \varphi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon_2}{2} \left\| \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\left\| \beta_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \left\| \beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\nabla(y_h - \varphi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla\varphi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et par application de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \left\| \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_1} \|y_h - \varphi_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \|\nabla\varphi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les Lemmes 3.2 et 3.3, on déduit

$$\left\| \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

□

Le Lemme suivant permet d'affirmer que $\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta$ est borné en norme $L^2(\Omega)$.

Lemme 3.5. *Soit $(y_h^\delta, p_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ une solution optimale qui satisfait le système des conditions d'optimalité discrètes donné par (3.2)–(3.4), alors on a*

$$\left\| \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta}, \quad (3.11)$$

où C est une constante réelle positive qui ne dépend pas du paramètre d'approximation h .

Démonstration. D'après l'équation de l'état discret donnée par (3.3) avec $v_h = p_h^\delta$, on obtient

$$\sigma \left(p_h^\delta, p_h^\delta \right) + \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta, p_h^\delta \right) = \left(y_h^\delta - z, p_h^\delta \right).$$

En utilisant la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ données respectivement par les hypothèses C_1 et C_2 et d'après la définition de $\beta'(\cdot)$, on déduit que

$$c \left\| p_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \left(y_h^\delta - z, p_h^\delta \right),$$

et en utilisant le Lemme 3.3, on déduit

$$\left\| p_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.$$

En outre, on a

$$\int_{\Omega} \left| \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta \right|^2 dx \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega} \left| p_h^\delta \right|^2 dx,$$

et par la suite, on obtient

$$\left\| \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\left\| p_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2}{\delta^2}.$$

Finalement, on déduit que

$$\left\| \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta}.$$

Le Lemme suivant nous permet d'affirmer que $\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta$ est borné en norme $L^2(\Omega)$. □

Lemme 3.6. Soit φ_h^δ une solution optimale qui satisfait le système des conditions d'optimalité discret donné par (3.5)-(3.7), alors on a

$$\left\| \Delta \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \tag{3.12}$$

où C est une constante réelle positive qui ne dépend pas du paramètre d'approximation h .

Démonstration. D'après l'inéquation de projection discrète donnée par (3.7), on obtient

$$\left(-\Delta \varphi_h^\delta + \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta, \psi_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \geq 0, \text{ pour tout } \psi_h^\delta \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}^h$$

et si on choisit de prendre $\psi_h^\delta = \Delta \varphi_h^\delta$ dans l'inégalité précédente, on a

$$\left(-\Delta \varphi_h^\delta + \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \geq 0,$$

par suite, il vient facilement que

$$\left(-\Delta \varphi_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta\right) + \left(\Delta \varphi_h^\delta, \varphi_h^\delta\right) + \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) \geq 0.$$

En outre, on trouve que

$$\left(\Delta \varphi_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta\right) \leq \left(\Delta \varphi_h^\delta, \varphi_h^\delta\right) + \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta - \varphi_h^\delta\right),$$

et grâce à la formule de Green, on déduit que

$$\left(\Delta \varphi_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta\right) \leq -\left(\nabla \varphi_h^\delta, \nabla \varphi_h^\delta\right) + \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta - \varphi_h^\delta\right).$$

Comme il est évidemment clair que $-\left(\nabla \varphi_h^\delta, \nabla \varphi_h^\delta\right)$ est négatif, alors on obtient que

$$\left\|\Delta \varphi_h^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta - \varphi_h^\delta\right),$$

ainsi, on déduit que

$$\left\|\Delta \varphi_h^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \Delta \varphi_h^\delta\right) - \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \varphi_h^\delta\right),$$

en utilisant la formule de Green, on déduit

$$\left\|\Delta \varphi_h^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\nabla \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \nabla \varphi_h^\delta\right) - \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \varphi_h^\delta\right).$$

Finalement, on trouve

$$\left\|\Delta \varphi_h^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\nabla \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) \beta''_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \nabla \varphi_h^\delta\right) - \left(\beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta\right) p_h^\delta, \varphi_h^\delta\right).$$

□

Estimation d'erreur a priori

Le Théorème qui va suivre est l'un des résultats importants dans cette thèse, il nous permet de donner une estimation a priori de l'erreur comise sur la fonction contrôle φ^δ .

Théorème 4.1. *Soient respectivement $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$ et $(y_h^\delta, p_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ les solutions du système des condition d'optimalité continu donné par (2.1.3a – 2.1.3c) et du système des condition d'optimalité discret donné par (4.1.1 – 4.1.3), alors on a*

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq c\sigma \left(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right) + c \left\langle -\Delta \varphi^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\rangle \\ &\quad + c \left\langle \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\rangle, \end{aligned}$$

pour tout ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h , et d'après le Lemme 3.5, on déduit que

$$c \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\sigma \left(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right) + c \left\langle -\Delta \varphi^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\rangle + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\|_{L_2(\Omega)},$$

pour tout ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h , où c et C sont des constantes positives qui ne dépend pas du paramètre h . Alors on obtient les estimations suivantes :

Premier cas : Si δ est indépendant de h , on obtient

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}. \quad (4.1)$$

Deuxième cas : Si δ est dépend de h , on obtient

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-\alpha} \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right). \quad (4.2)$$

Où C est une constante positive qui ne dépend pas des paramètres d'approximations h et δ .

Démonstration. D'après les propriétés de la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$, on peut écrire que

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \varphi_h^\delta) &= \sigma(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta + \psi_h^\delta - \varphi_h^\delta) \\ &= \sigma(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta) + \sigma(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \psi_h^\delta - \varphi_h^\delta),\end{aligned}$$

pour toute ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h , et grâce l'inéquation de projection discrète donnée par (3.4), on a

$$\sigma(\varphi_h^\delta, \psi_h^\delta - \varphi_h^\delta) \geq \langle \beta'_\delta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p_h^\delta, \psi_h^\delta - \varphi_h^\delta \rangle, \text{ pour toute } \psi_h^\delta \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}^h,$$

et d'après l'inéquation de projection donnée par (2.12), on a

$$\sigma(\varphi^\delta, \psi_h^\delta - \varphi^\delta) \geq \langle \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta, \psi_h^\delta - \varphi^\delta \rangle, \text{ pour toute } \psi_h^\delta \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}^h,$$

et

$$\sigma(\varphi^\delta, \psi_h^\delta - \varphi_h^\delta) + \sigma(\varphi^\delta, \varphi_h^\delta - \varphi^\delta) \geq \langle \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta, \psi_h^\delta - \varphi^\delta \rangle,$$

pour toute ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h , alors il vient que

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \varphi_h^\delta) &\leq \sigma(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta) + \langle -\Delta\varphi^\delta + \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \rangle \\ &\quad + \langle \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta - \beta'_\delta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p_h^\delta, \psi_h^\delta - \varphi^\delta \rangle \\ &\quad + \langle \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta - \beta'_\delta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p_h^\delta, \varphi - \varphi_h^\delta \rangle,\end{aligned}$$

pour toute ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h .

D'après les propriétés de $\beta'(\cdot)p^\delta$, on déduit que

$$c \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \sigma \left(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right) - \left\langle \Delta \varphi^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\rangle + \left\langle \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\rangle,$$

pour toute ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h , et par application du Lemme 3.5, on trouve que

$$c \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \sigma \left(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right) - \left\langle \Delta \varphi^\delta, \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\rangle + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \psi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

pour toute ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h , et si dans l'inégalité précédente on choisit de prendre $\psi_h = \pi_h \varphi^\delta$, alors on obtient

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{c^2} \left\| \varphi^\delta - \pi_h \varphi^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{c} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \left\| \varphi^\delta - \pi_h \varphi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \pi_h \varphi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

pour toute ψ_h^δ dans \mathcal{U}_{ad}^h . Alors, on déduit que

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Ch^2 \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + Ch^2 \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^2}{\delta} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}.$$

Dans la suite, on va traiter deux cas suivants la dépendance de δ par rapport à h .

Premier cas : si δ est indépendant de h , on obtient

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}.$$

Deuxième cas : Si δ dépend de h , alors on peut prendre $\delta = h^\alpha$ tel que $\alpha > 0$. Ainsi, on obtient

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Ch^2 \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^2}{h^\alpha} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)},$$

ou

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Ch^2 \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + Ch^{2-\alpha} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)},$$

et pour $0 < \alpha < 2$, on obtient

$$\left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-\alpha} \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right).$$

□

Le Théorème suivant, permet de donner une estimation a priori de l'erreur comise sur la fonction de l'état y^δ .

Théorème 4.2. *Soient respectivement $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$ et $(y_h^\delta, p_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ les solutions des systèmes des conditions d'optimalité donnés respectivement par (2.9)-(2.11) et (3.2)-(3.4), alors on a : Premier cas : Si δ est indépendant de h , alors on obtient*

$$\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta^2} \left(\left\| y^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right). \quad (4.3)$$

Deuxième cas : Si δ dépend de h et $0 < \alpha < 2$, alors on a

$$\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-2\alpha} \left(\left\| y^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \right), \quad (4.4)$$

Où C est une constante positive qui ne dépend pas des paramètres d'approximations h et δ .

Démonstration. Sachant que la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue, alors on peut écrire que

$$c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sigma \left(y^\delta - y_h^\delta, y^\delta - y_h^\delta \right),$$

et si dans l'inégalité de droite précédente on ajoute et on retranche $(\pi_h y, y^\delta - y_h^\delta)$ on trouve

$$c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1}^2 \leq \sigma \left(y^\delta - y_h^\delta, y^\delta - \pi_h y^\delta \right) + \sigma \left(y^\delta - y_h^\delta, \pi_h y^\delta - y_h^\delta \right).$$

En utilisant les deux équations (2.9) et (3.2), on obtient

$$c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1}^2 \leq \sigma \left(y^\delta - y_h^\delta, y^\delta - \pi_h y^\delta \right) - \left(\beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \pi_h y^\delta - y_h^\delta \right), \quad (4.5)$$

et

$$\pi_h y^\delta - y_h^\delta = \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) + \left(\varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right) + \pi_h y^\delta - y^\delta. \quad (4.6)$$

En remplaçant (4.6) dans (4.5), on obtient :

$$\begin{aligned} c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sigma \left(y^\delta - y_h^\delta, y^\delta - \pi_h y^\delta \right) \\ &\quad - \left(\beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right) \\ &\quad - \left(\beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right) \\ &\quad - \left(\beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \pi_h y^\delta - y^\delta \right), \end{aligned}$$

et comme $\beta(\cdot)$ est croissante, alors on déduit que

$$\begin{aligned} c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sigma \left(y^\delta - y_h^\delta, y^\delta - \pi_h y^\delta \right) + \left(\beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), \varphi_h^\delta - \varphi^\delta \right) \\ &\quad + \left(\beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right), y^\delta - \pi_h y^\delta \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \varphi_h^\delta - \varphi^\delta \right\|_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \beta_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) - \beta_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème des accroissement finis à $\beta(\cdot)$ sur l'intervalle d'extrémités

$(y^\delta - \varphi^\delta)$ et $(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)$, on trouve

$$\begin{aligned} c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \left| \beta'(\cdot) \right| \left(\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \left| \beta'(\cdot) \right| \left(\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \varphi_h^\delta - \varphi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et d'après le Théorème 2.2, on a

$$\begin{aligned} c \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + C \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\delta} \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{\delta} \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(\left\| y^\delta - \pi_h y^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Alors, on peut remarquer qu'on a deux cas : Premier cas : Si δ est indépendant de h , en utilisant le Lemme (3.1) et le Théorème 4.1, on a

$$\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta} \left\| y^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^2}{\delta^2} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Alors

$$\|y^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta^2} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Deuxième cas : Si δ dépend de h , alors on a

$$\|y^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta} \|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^{2-\alpha}}{\delta} \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right),$$

et si on prend $\delta = h^\alpha$ tel que $0 < \alpha < 2$, alors, il vient

$$\|y^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{h^\alpha} \|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^{2-\alpha}}{h^\alpha} \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right),$$

et

$$\|y^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-\alpha} \|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + Ch^{2-2\alpha} \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right).$$

Finalement, on obtient

$$\|y^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-2\alpha} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \right).$$

□

Le Théorème suivant nous donne une estimation a priori de l'erreur comise sur la fonction de l'état adjoint p^δ .

Théorème 4.3. *Soient respectivement $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$ et $(y_h^\delta, p_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ solutions des systèmes des conditions d'optimalité donnés respectivement par (2.9)-(2.11) et (3.2)-(3.4), alors on a :*

Premier cas : Si δ est indépendante de h , on obtient

$$\|p^\delta - p_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta^2} \left(\|p^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right). \quad (4.7)$$

Deuxième cas : Si δ dépend de h et $0 < \alpha < 2$, alors on a

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-2\alpha} \left(\left\| p^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \right), \quad (4.8)$$

Où C est une constante positive qui ne dépend pas des paramètres d'approximations h et δ .

Démonstration. Sachant que la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue, on peut écrire que

$$c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sigma \left(p^\delta - p_h^\delta, p^\delta - p_h^\delta \right),$$

et si dans l'inégalité précédente, on ajoute et retranche $\left(\pi_h p^\delta, p^\delta - p_h^\delta \right)$, on trouve

$$c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sigma \left(p^\delta - p_h^\delta, p^\delta - \pi_h p^\delta \right) + \sigma \left(p^\delta - p_h^\delta, \pi_h p^\delta - p_h^\delta \right),$$

et en utilisant (2.10) et (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sigma \left(p^\delta - p_h^\delta, p^\delta - \pi_h p^\delta \right) + \sigma \left(p^\delta - p_h^\delta, \pi_h p^\delta - p_h^\delta \right) \\ &\quad - \left(\beta'_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) p^\delta - \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta, \pi_h p^\delta - p_h^\delta \right), \end{aligned}$$

et si dans l'inégalité de droite précédente, on ajoute et on retranche la quantité $\left(p^\delta, \pi_h p^\delta - p_h^\delta \right)$ on trouve :

$$\begin{aligned} c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sigma \left(p^\delta - p_h^\delta, p^\delta - \pi_h p^\delta \right) \\ &\quad - \left(\beta'_\delta \left(y^\delta - \varphi^\delta \right) p^\delta - \beta'_\delta \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta, \pi_h p^\delta - p_h^\delta \right) \\ &\quad + \left(y^\delta - y_h^\delta, \pi_h p^\delta - p_h^\delta \right) + \left(y^\delta - y_h^\delta, p^\delta - p_h^\delta \right), \end{aligned}$$

et en ajoutant et en retranchant dans l'inégalité de droite précédente

$(\beta_\delta''(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p^\delta, \pi_h p^\delta - p^\delta)$, on obtient

$$\begin{aligned}
c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sigma(p^\delta - p_h^\delta, p^\delta - \pi_h p^\delta) \\
&\quad - (\beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)(p^\delta - p_h^\delta), \pi_h p^\delta - p^\delta) \\
&\quad - (\beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)(p^\delta - p_h^\delta), p^\delta - p_h^\delta) \\
&\quad + (y - y_h, \pi_h p - p) + (y - y_h, p^\delta - p_h^\delta) \\
&\quad - \left((\beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) - \beta_\delta'(y^\delta - \varphi^\delta)) p^\delta, \pi_h p - p^\delta \right) \\
&\quad - \left((\beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) - \beta_\delta'(y^\delta - \varphi^\delta)) p^\delta, p^\delta - p_h^\delta \right).
\end{aligned}$$

Comme d'après les propriétés de $\beta'(\cdot)$, on sait que $-(\beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)(p^\delta - p_h^\delta), p^\delta - p_h^\delta)$ est négative, alors, on obtient

$$\begin{aligned}
c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sigma(p^\delta - p_h^\delta, p^\delta - \pi_h p^\delta) - (\beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)(p^\delta - p_h^\delta), \pi_h p^\delta - p^\delta) \\
&\quad + (y^\delta - y_h^\delta, \pi_h p^\delta - p^\delta) + (y^\delta - y_h^\delta, p^\delta - p_h^\delta) \\
&\quad - \left((\beta_\delta'(y^\delta - \varphi^\delta) - \beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)) p^\delta, \pi_h p^\delta - p^\delta \right) \\
&\quad - \left((\beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) - \beta_\delta'(y^\delta - \varphi^\delta)) p^\delta, p^\delta - p_h^\delta \right),
\end{aligned}$$

et comme la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ est continue, on peut écrire que

$$\begin{aligned}
c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + \left\| \beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \pi_h p^\delta - p^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \left\| \beta_\delta'(y^\delta - \varphi^\delta) - \beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \left\| \beta_\delta'(y^\delta - \varphi^\delta) - \beta_\delta'(y_h^\delta - \varphi_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

et par l'application du Théorème d'accroissements finis à $\beta'(\cdot)$ et en utilisant l'inéga-

lité triangulaire, ainsi que le fait que la quantité $\beta' \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right)$ est bornée, alors il vient

$$\begin{aligned}
c \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + C_\delta \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \pi_h p^\delta - p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + C_\delta \left(\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + C_\delta \left(\left\| y^\delta - y_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

et d'après le Théorème 2.2, on déduit que

$$\begin{aligned}
\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C_\delta \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \left(\left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\quad + C_\delta \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, il vient

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + C_\delta \left(\left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

d'où

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_\delta \left(\left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

ou encore

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(\left\| p^\delta - \pi_h p^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \varphi^\delta - \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Ainsi, on peut remarquer que l'on a deux cas :

Premier cas : Si δ est indépendant de h , en utilisant le Lemme 3.1 et le Théorème 4.1,

il vient

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta} \left\| p^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^2}{\delta^2} \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)},$$

par conséquent

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta^2} \left(\left\| p^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Deuxième cas : Si δ dépend de h , alors on a

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{\delta} \left\| p^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^{2-\alpha}}{\delta} \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right),$$

et si on prend $\delta = h^\alpha$ avec $0 < \alpha < 2$, il vient

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^2}{h^\alpha} \left\| p^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{Ch^{2-\alpha}}{h^\alpha} \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right),$$

alors

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-\alpha} \left\| p^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + Ch^{2-2\alpha} \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right).$$

Finalement, on obtient

$$\left\| p^\delta - p_h^\delta \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{2-2\alpha} \left(\left\| p^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \right).$$

□

Le Théorème suivant permet de donner une estimation a priori de l'erreur comise sur la fonction objectif J .

Théorème 4.4. *Soient respectivement $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$ et $(y_h^\delta, p_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ solution des systèmes des conditions d'optimalité donnés respectivement par (2.9)-(2.11) et (3.2)-(3.4), alors on a*

Premier cas : Si δ est indépendant de h , on obtient

$$\left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| \leq \frac{Ch^2}{\delta^2} \left(\left\| y^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right). \quad (4.9)$$

Deuxième cas : Si δ dépend de h et $0 < \alpha < 2$, alors

$$\begin{aligned}
& \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| \\
& \leq Ch^{(1-\alpha)} \left[\left\| y^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + Ch^{(1-\alpha)} \left\| y^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \right] \\
& + Ch^{(1-\frac{\alpha}{2})} \left(\max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) + \max \left(\left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \left\| \varphi^\delta \right\|_{H^2(\Omega)} \right) \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Où C est une constante positive qui ne dépend pas des paramètres d'approximations h et δ .

Démonstration. D'après les fonctions objectifs données respectivement par (2.1) et par (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| = \\
& \left| \frac{1}{2} \left\| y^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \left\| \nabla \varphi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \left\| y_h^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\nu}{2} \left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right|,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
& \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| = \\
& \left| \frac{1}{2} \left\| y^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \left\| y_h^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \left\| \nabla \varphi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\nu}{2} \left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right|.
\end{aligned}$$

Alors on trouve

$$\begin{aligned}
& \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| = \\
& + \frac{\nu}{2} \left(\left\| \nabla \varphi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\left\| \nabla \varphi^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \nabla \varphi_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\left\| y^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| y_h^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \times \left(\left\| y^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| y_h^\delta - y_d^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| = \\ & \left| \frac{1}{2} \|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|y^\delta + y_h^\delta - 2y_d^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2} \|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi^\delta + \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right|, \end{aligned}$$

si on ajoute et on retranche y_h^δ dans la première partie et φ_h^δ dans la deuxième partie de droite de l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| = \\ & \frac{1}{2} \|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|y^\delta - y_h^\delta + 2y_h^\delta - 2y_d^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{\nu}{2} \|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta + 2\nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| \leq \\ & \frac{1}{2} \|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \left(\|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\|y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\|y_d^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ & + \frac{\nu}{2} \|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \left(\|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

et en utilisant les deux Lemmes 3.2 et le Lemme 3.4, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| \leq \\ & \left| \frac{1}{2} \|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \left(\|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} + C \right) + \frac{\nu}{2} \|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \left(\|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} + C \right) \right|. \end{aligned}$$

Par suite, on trouve

$$\begin{aligned} & \left| J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) \right| \leq \frac{1}{2} \|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C \|y^\delta - y_h^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{\nu}{2} \|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla \varphi^\delta - \nabla \varphi_h^\delta\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et par injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} |J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)| &\leq \frac{C}{2} \|y^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2C \|y^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \frac{\nu}{2} \|\varphi^\delta - \varphi_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + C \|\varphi^\delta - \varphi_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on remarque qu'il y a deux cas.

Premier cas : Si δ est indépendant de h , en utilisant les Théorème 4.2 et 4.3, on obtient,

$$\begin{aligned} |J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)| &\leq \frac{Ch^2}{2\delta^2} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right) + \frac{Ch}{\delta} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{C\nu h^2}{2\delta} \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \frac{Ch}{(\delta)^{1/2}} \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement, pour ce premier cas on déduit que

$$|J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)| \leq \frac{Ch^2}{2\delta^2} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Deuxième cas : Si δ dépend de h et si on prend $\delta = h^\alpha$ telle que $\alpha > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} |J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)| &\leq \frac{Ch^{2-2\alpha}}{2} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2Ch^{1-\alpha} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\nu Ch^{2-\alpha}}{2} \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + Ch^{1-\frac{\alpha}{2}} \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Finalement, pour ce deuxième cas on déduit que

$$\begin{aligned}
|J(y^\delta, \varphi^\delta) - J(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)| &\leq Ch^{(1-\alpha)} \left(\|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + Ch^{(1-\alpha)} \|y^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right) \right) \\
&\quad + Ch^{(1-\frac{\alpha}{2})} \left(\max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) + \max \left(\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right) \right),
\end{aligned}$$

□

4.1 Implementation numérique

4.1.1 Approximation numérique de l'équation d'état par la méthode des element finis

Dans ce paragraphe, on considère l'approximation numérique par la méthode dite de Galerkin de l'équation d'état donné par (2.9). Pour le choix de la base, il faut qu'elle

satisfait les conditons aux bords imposées dans le problème (\mathcal{P}) qui sont, bien entendu, les conditions homogènes de type Dirichlet. Il ne faut pas non plus oublier qu'on doit toujours chercher une solution optimale $(y_h^\delta(\varphi^\delta), p_h^\delta(\varphi^\delta), \varphi_h^\delta)$ sous forme d'une combinaison liniaire de polynômes de degré ≤ 2 , comme suit :

$$\varphi_h^\delta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \phi_i(x), \quad (4.11)$$

et

$$y_h^\delta(\varphi_h^\delta)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \psi_i(x). \quad (4.12)$$

Comme V_h est de dimension finie, et pour des raisons de calcul, on ne considère que la série tronquée d'ordre N . les relation (4.11) et (4.12) sont écrites respectivement sous la forme

$$\varphi_h^\delta(x) = \pi_h \varphi^\delta(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i \phi_i(x), \text{ ou } i = 1, \dots, N, \quad (4.13)$$

$$y_h^\delta(\varphi_h^\delta)(x) = \pi_h y^\delta(\varphi^\delta)(x) = \sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x), \text{ ou } i = 1, \dots, N, \quad (4.14)$$

et

$$f_i = (f, \phi_i) \text{ où } i = 1, \dots, N. \quad (4.15)$$

Il s'agit de trouver φ_h^δ et $y_h^\delta(\varphi_h^\delta)$ qui vérifient le système de conditions d'optimalité discret donné par (3.2)-(3.4) tel que φ_h^δ est dans \mathcal{U}_h et $y_h^\delta(\varphi_h^\delta)$ est dans V_h . En d'autres termes, il s'agit de trouver les valeurs des inconnues $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq M}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq N}$, telles que,

$$\sigma(y_h^\delta, v_h) + \frac{1}{\delta} (\beta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta), v_h) = (f, v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h. \quad (4.16)$$

Par suite on peut écrire

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x), v_h\right) + \frac{1}{\delta} I(\beta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta), v_h) = (f, v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h, \quad (4.17)$$

où I est l'opération de l'intégration quadrature défini par

$$I(g) = \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e g(x_t^e). \quad (4.18)$$

Où E est le nombre total d'éléments et G est le nombre total de points d'intégration dans un élément, w_t^e et x_t^e sont les poids et les points d'intégrations numérique et $t = 1, 2, \dots, G$, et $e = 1, 2, \dots, E$. La raison pour laquelle la règle d'intégration numérique I est appliquée au terme de pénalité est que l'intégration exacte de celui-ci est impossible en raison de la non-linéarité de la fonction de pénalité $\beta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)$. Ou encore, en utilisant la linéarité de $\sigma(.,.)$ et f , il sagit de trouver $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans \mathcal{U}_h et $(y_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans V_h tels que :

$$\sum_{i=1}^N y_i \sigma(\phi_i(x), \phi_j) + \frac{1}{\delta} I(\beta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta), \phi_j) = (f, \phi_j), \text{ pour tout } j = 1, \dots, N, \quad (4.19)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^N y_i \sigma(\phi_i(x), \phi_j) + \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta(y_h^\delta - \varphi_h^\delta)(x_t^e) \phi_j(x_t^e) = (f, \phi_j), \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N. \quad (4.20)$$

En substituant les deux relations (4.11) et (4.12) dans l'équation précédente, on obtient

$$\sum_{i=1}^N y_i \sigma(\phi_i(x), \phi_j) + \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \varphi_i) \phi_i(x_t^e) \right) \phi_j(x_t^e) \quad (4.21)$$

$$= (f, \phi_j), \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N. \quad (4.22)$$

Ainsi, on déduit que

$$\sum_{i=1}^N y_i \sigma(\phi_i(x), \phi_j) + \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G \sum_{i=1}^N w_t^e \beta \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \varphi_i) \phi_i(x_t^e) \right) \phi_j(x_t^e) \\ = (f, \phi_j), \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N,$$

où ${}^t y_i^e = w_t^e y_i$ et ${}^t \varphi_i^e = w_t^e \varphi_i$.

Par la suite le système d'équations (4.21) s'écrit sous la forme matricielle comme suit

$$AY + B(Y, \Phi) = F, \quad (4.23)$$

où $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$, $Y = (y_i)_{i=1}^N$ et $F = (f_i)_{i=1}^N$ tel que $a_{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx$ et $f_i = (f, \phi_i)$ avec le terme non-linéaire

$$B(Y, \phi) = \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \varphi_i) \phi_i(x_t^e) \right) \phi_j(x_t^e).$$

4.1.2 Approximation numérique de la fonction objectif par la méthode des element finis

Pour l'approche directe, on est obligé de considérer l'approximation de la fonction objectif J . En substituant les deux relations (4.12) et (4.13) dans la fonction objectif J , il vient

$$J_h(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} \left(\sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x) - z \right)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega_h} \left(\sum_{i=1}^M \varphi_i \nabla \phi_i(x) \right)^2 dx, \quad (4.24)$$

où la fonction objectif $J_h(y_h^\delta, \varphi_h^\delta)$ donnée par (4.24) s'écrit sous la forme

$$J_h(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} \left(\left(\sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x) \right)^2 + (z)^2 - 2 \sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x) z \right) dx \quad (4.25)$$

$$+ \frac{\nu}{2} \int_{\Omega_h} \left(\sum_{i=1}^M \varphi_i \nabla \phi_i(x) \right)^2 dx, \quad (4.26)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} J_h(y_h^\delta, \varphi_h^\delta) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N y_i^2 \int_{\Omega_h} \phi_i^2(x) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N y_i y_j \int_{\Omega_h} \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (4.27) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} (z)^2 dx - \sum_{i=1}^N y_i \int_{\Omega_h} \phi_i(x) z dx + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^M \varphi_i^2 \int_{\Omega_h} (\nabla \phi_i(x))^2 dx \\ &+ \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^M \varphi_i \varphi_j \int_{\Omega_h} \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) dx. \end{aligned}$$

Par suite la fonction objectif $J_h(y_h, \varphi_h)$ donnée par (3.1) s'écrit sous la forme matricielle comme suit

$$J_h(Y, \Phi) = \frac{1}{2} Y^t M Y + \Phi^t N \Phi - Y^t Z + \gamma, \quad (4.28)$$

où $M = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ et $N = (b_{ij})_{i,j=1}^M$, $z_i = \int_{\Omega_h} z \phi_i dx$ et $\gamma = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} (z)^2 dx$, tel que $b_{ij} = \int_{\Omega_h} \phi_i \phi_j dx$ et $a_{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx$ et $Z = (z_i)_{i=1}^N$.

4.1.3 Approximation numérique de l'équation d'état adjoint par la méthode des éléments finis

Introduisant également la discrétisation de p_h dans l'espace V_h comme suit

$$p_h^\delta = \sum_{i=1}^N p_i \phi_i(x) \quad (4.29)$$

Par suite, l'équation (3.3) revient à trouver p_1, \dots, p_N tels que :

$$\sigma \left(\sum_{i=1}^N p_i \phi_i(x), w_h \right) + \frac{1}{\delta} I \left(\beta' \left(y_h^\delta - \varphi_{\delta h} \right) p_h^\delta, w_h \right) = \left(\sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x) - z, w_h \right), \quad \text{pour tout } w_h \text{ dans } V_h. \quad (4.30)$$

où encore par linéarité de $\sigma(.,.)$ et $(.,.)$, il s'agit de trouver p_1, \dots, p_N dans V_h tels que :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N p_i \sigma(\phi_i(x), \phi_j(x)) + \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta' \left(y_h^\delta - \varphi_h^\delta \right) p_h^\delta(x_t^e) \phi_j(x_t^e) \\ & = \sum_{i=1}^N y_i (\phi_i(x), \phi_j(x)) - (z, \phi_j(x)), \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.31)$$

En substituant les deux relations (4.12) et (4.13) dans l'équation précédente on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N p_i \sigma(\phi_i(x), \phi_j(x)) \\ & + \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta' \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \varphi_i) \phi_i(x_t^e) \right) \left(\sum_{i=1}^N p_i \phi_i(x_t^e) \right) \phi_j(x_t^e) \\ & = \sum_{i=1}^N y_i (\phi_i(x), \phi_j(x)) - (z, \phi_j(x)), \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Par suite l'équation d'état s'écrit sous la forme matricielle comme suit

$$AP + \Theta(Y, \Phi, P) = BY - Z, \quad (4.33)$$

où $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$, $P = (p_i)_{i=1}^N$ et $Z = (z_i)_{i=1}^N$ tel que $a_{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx$, $b_{ij} = \int_{\Omega_h} \phi_i \phi_j dx$ et $z_i = (z, \phi_i)$, avec les termes non-linéaires suivants

$$\Theta(Y, \Phi, P) = \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta' \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \varphi_i) \phi_i(x_t^e) \right) \left(\sum_{i=1}^N p_i \phi_i(x_t^e) \right) \phi_j(x_t^e).$$

4.1.4 Approximation numérique de l'équation de projection par la méthode des éléments finis

Pour la suite, l'inéquation de projection donnée par (3.4) revient à trouver $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ tels que

$$-v \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i \Delta \phi_i(x), v_h \right) + (\beta'_\delta (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p_h^\delta, v_h) \geq 0, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}^h,$$

par suite on a :

$$-v \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i \Delta \phi_i(x), \phi_j(x) \right) + \frac{1}{\delta} I \left(\beta' (y_h^\delta - \varphi_h^\delta) p_h^\delta, \phi_j(x) \right) \geq 0, \text{ pour tout } j = 1, \dots, N,$$

et en substituant les trois relations (4.11), (4.12) et (4.29) dans l'inéquation précédente on obtient

$$\begin{aligned} & -v \sum_{i=1}^N \varphi_i \Delta \phi_i(x), \phi_j(x) \\ & + \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta' \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \varphi_i) \phi_i(x_t^e) \right) \left(\sum_{i=1}^N p_i \phi_i(x_t^e) \right) \phi_j(x_t^e) \geq 0, \text{ pour tout } j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & -v \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{\Omega_h} \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) dx \\ & + \frac{1}{\delta} \sum_{e=1}^E \sum_{t=1}^G w_t^e \beta' \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \varphi_i) \phi_i(x_t^e) \right) \left(\sum_{i=1}^N p_i \phi_i(x_t^e) \right) \phi_j(x_t^e) \geq 0, \text{ pour tout } j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Par suite, l'inéquation de projection donnée par (3.4) s'écrit sous forme matricielle comme suit

$$A\Phi + \frac{1}{\nu}\Theta(Y, \Phi, P) \geq 0.$$

Finalement, le système des conditions d'optimalité s'écrit sous forme matricielle, comme suit

$$AY + B(Y, \Phi) = F.$$

$$AP + \Theta(Y, \Phi, P) = BY - Z.$$

$$A\Phi + \frac{1}{\nu}\Theta(Y, \Phi, P) \geq 0.$$

Calculs numériques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats numériques pour confirmer la validité de notre analyse théorique donnée dans le chapitre 4. Ici, toutes les analyses computationnelles sont réalisées à l'aide du logiciel libre FreeFem++ conçu pour la mise en œuvre de la méthode des éléments finis. Les calculs sont effectués sur un ordinateur personnel équipé d'un processeur Core i5-3210M 2,50 GHz et de 4 Go de RAM.

Dans cette intention, nous considérons l'exemple suivant, dans lequel nous examinons le problème posé dans le chapitre 4 avec les choix de données suivants : $\Omega = [-1; 1]^2$, $f(x, y) = -x + y$, $y_d(x, y) = x \sin(\pi y) y \cos(\pi x)$ et $\mathbf{v} = 1$ avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Nous considérons également opérateur différentiel elliptique A comme étant un opérateur Laplacien négatif $-\Delta$.

Nous présentons, dans les tableaux suivants, les résultats numériques concernant l'historique de convergence de l'algorithme numérique :

Dans le Tableau 5.1, les résultats numériques obtenues sont calculés par rapport aux différentes valeurs de ρ , avec $\delta = 1e - 2$, $\omega = 0.5$ et $N = 160$.

ρ	0.1	0.25	0.5	0.75	1
J^δ	$1.328e - 2$	$1.330e - 2$	$1.334e - 2$	$1.338e - 2$	$1.342e - 2$
$ J_n^\delta - J_{n-1}^\delta $	0.0133736	0.0133774	$1.339e - 2$	$1.341e - 2$	$1.344e - 2$

TAB. 5.1 : Variation de J^δ et de l'erreur $|J_n^\delta - J_{n-1}^\delta|$ en fonction de ρ

Dans ce tableau 5.1 la première ligne présente les valeurs de la fonction objectif J^δ pour différentes valeurs du paramètre ρ , avec $\delta = 1e - 2$, $\omega = 0.5$ et $N = 160$. la deuxième ligne présente les valeurs des erreurs de convergence $|J_n^\delta - J_{n-1}^\delta|$ pour évaluer la précision de la solution numérique itérative.

Les résultats numériques montrent que l'erreur de convergence et les valeurs de la fonction objectif sont en croissance au fur et à mesure que la valeur de ρ augmente, Ces résultats indiquent que les valeurs optimales de ρ pour atteindre une précision plus élevée de la solution sont entre 0.1 et 0.5.

Dans le tableau 5.2 les résultats numériques obtenues sont calculés par rapport aux différentes valeurs de ω , avec $\delta = 1e - 2$, $\rho = 0.1$ et $N = 160$.

ω	0.1	0.25	0.5	0.75	1
J^δ	$1.349e - 2$	0.0133984	$1.328e - 2$	$1.322e - 2$	$1.320e - 2$
$ J_n^\delta - J_{n-1}^\delta $	0.0135269	0.0134687	$1.337e - 2$	$1.328e - 2$	$1.319e - 2$

TAB. 5.2 : Variation de J^δ et de l'erreur $|J_n^\delta - J_{n-1}^\delta|$ en fonction de ω

Le tableau 5.2 présente les valeurs de la fonction objectif J^δ ainsi que les erreurs de convergence $|J_n^\delta - J_{n-1}^\delta|$ par rapport à différentes valeurs de la fréquence ω , avec $\delta = 1e - 2$, $\rho = 0.1$ et une taille de maillage $N = 160$ fixe. La première ligne présente les valeurs de la fonction objectif J^δ et la deuxième ligne montre les valeurs des erreurs de convergence. En analysant les résultats numériques, on observe que les valeurs de la fonction objectif ainsi l'erreur de convergence en décroissance lorsque la fréquence ω augmente, la valeur optimale de la fonction objectif J^δ est atteinte pour ω entre 0.9 et 1.

Dans le tableau 5.3 les résultats numériques calculés sont donnés par rapport à différentes valeurs de N , avec $\rho = 0.1$, $\delta = 1e - 2$ et $\omega = 0.5$.

# noeuds	36	121	441	1681	6561
J^δ	$1.170e - 2$	$1.285e - 2$	$1.317e - 2$	$1.325e - 2$	$1.328e - 2$
$ J_n^\delta - J_{n-1}^\delta $	$1.177e - 2$	$1.293e - 2$	$1.326e - 2$	$1.334e - 2$	$1.336e - 2$

TAB. 5.3 : Variation de J^δ et de l'erreur $|J_n^\delta - J_{n-1}^\delta|$ en fonction de N

Le tableau 5.3 présente les valeurs de la fonction objectif J^δ et de l'erreur de convergence $|J_n^\delta - J_{n-1}^\delta|$ par rapport aux différentes valeurs de N , avec $\rho = 0.1$, $\delta = 1e - 2$ et $\omega = 0.5$. La première ligne du tableau présente la fonction objectif J^δ , la deuxième

ligne présente l'erreur de convergence $\left|J_n^\delta - J_{n-1}^\delta\right|$ par rapport aux différentes valeurs du maillage N , avec $\rho = 0.1$, $\delta = 1e - 2$ et $\omega = 0.5$.

Souvent dans la littérature, on lit que l'augmentation du nombre du maillage N permet d'obtenir une solution numérique plus précise. En effet, un maillage avec un plus grand nombre de sommets permet de mieux représenter la géométrie de la solution, ce qui conduit à une approximation plus précise de la solution numérique. Cependant, Les résultats numériques obtenus dans le tableau 5.3 indiquent que la fonction objectif et l'erreur de convergence sont en décroissance au fur et à mesure que le pas h augmente, que la diminution du nombre de sommets N est un moyen efficace d'améliorer la précision de la solution numérique.

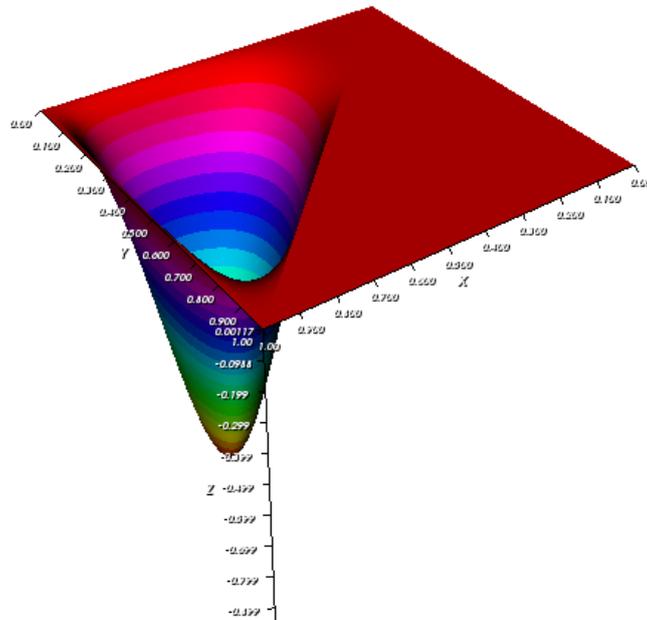


FIG. 5.1 : Fonction de contrôle φ_h^δ

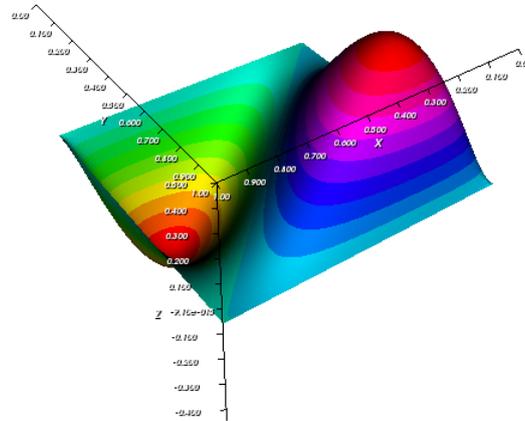
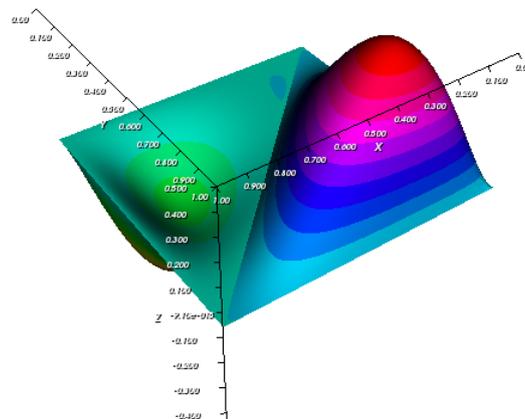
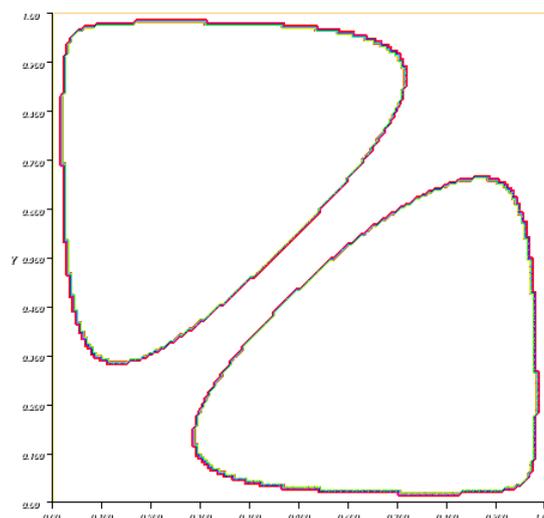
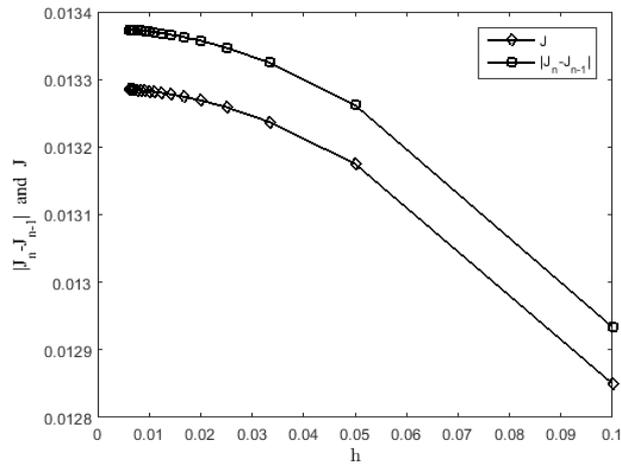
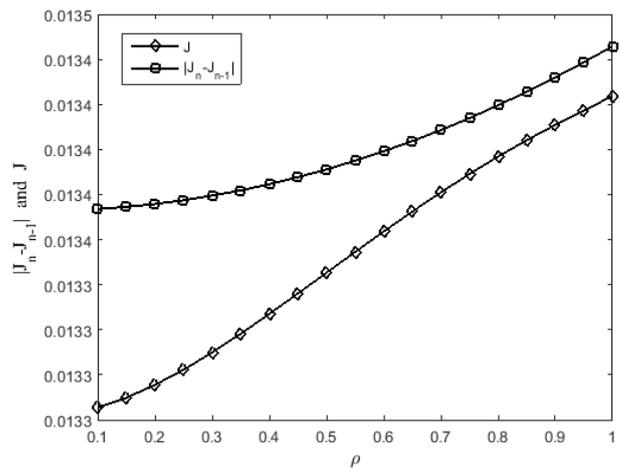
FIG. 5.2 : Fonction d'état y_h^δ FIG. 5.3 : Fonction d'état y_h^δ et la fonction de contrôle φ_h^δ 

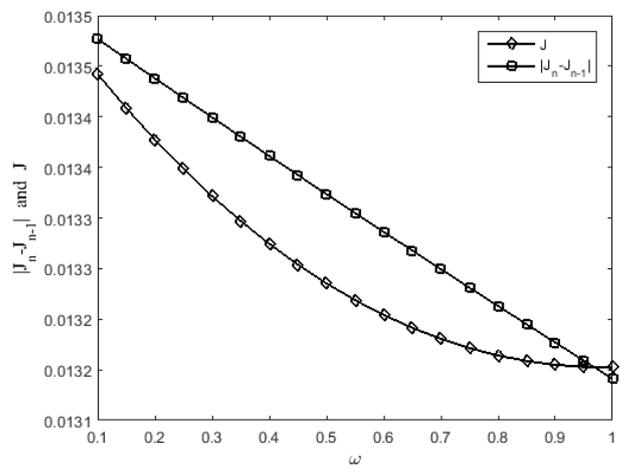
FIG. 5.4 : La région de contact



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.5 : L'historique de variation de $J_{n,h}^\delta$ et de l'erreur $|J_{n+1,h}^\delta - J_{n,h}^\delta|$ en fonction de (a) : N , (b) : ρ , (c) : ω .

La figure 5.5 présente l'historique de la fonction objective discrète en fonction de N, ρ et ω . On constate que la valeur de la fonction objective $J_{n,h}^\delta$ diminue respectivement pour ρ et ν et, contrairement, elle augmente par rapport à ω . En outre, on remarque que l'historique de variation de la fonction objective est en bonne corrélation avec l'historique de variation de l'erreur $|J_{n+1,h}^\delta - J_{n,h}^\delta|$, présenté dans la figure 5.5.

Notre intérêt se porte maintenant sur les taux de convergence des solutions discrètes $J_{n,h}^\delta$ par la méthode des éléments finis. Puisque nous ne sommes pas en mesure de déterminer une solution analytique pour notre exemple donné plus haut, nous calculons une solution de référence χ_{ref}^δ sur un maillage de taille $h_{ref} = \frac{1}{160}$, où χ^δ correspond aux variables d'état y^δ ou variables de contrôle φ^δ . En projetant les solutions χ_h^δ sur le maillage de référence, nous sommes en mesure de calculer un ordre de convergence expérimental approximatif (eoc) en utilisant la formule suivante :

$$eoc_\chi(h) = \frac{\ln \left(\left(\frac{\|\chi_{ref}^\delta - \chi_{h_{i-1}}^\delta\|_{H^1(\Omega)}}{\|\chi_{ref}^\delta - \chi_{h_i}^\delta\|_{H^1(\Omega)}} \right) \right)}{\ln(h_{i-1}/h_i)},$$

où h_{i-1} et h_i désignent deux tailles de maille consécutives, tandis que les erreurs de discrétisation $\|\chi_{ref}^\delta - \chi_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}$ et les taux de convergence expérimentaux correspondants sont fournis pour quelques tailles du maillage différentes.

# nœuds	$\ y_{2h}^\delta - y_h^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$eoc(y_h^\delta)$	$\ \varphi_{2h}^\delta - \varphi_h^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$eoc(\varphi_h^\delta)$
36	$8.44e-3$	—	$9.35e-4$	—
121	$4.58e-3$	0.88	$5.13e-4$	0.86
441	$2.46e-3$	0.89	$2.64e-4$	0.95
1681	$1.12e-3$	1.13	$1.32e-4$	1.00
6561	$5.43e-4$	1.04	$6.16e-5$	1.09

TAB. 5.4 : Ordres de convergence pour les variables de contrôle et d'état.

Le tableau 5.4 présente les résultats de convergence pour deux approximations numériques, y_h^δ et φ_h^δ , en fonction de la taille de maille h . La première colonne présente la taille de maille h , la deuxième colonne représente l'erreur de convergence $\|y_{2h}^\delta - y_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}$, la troi-

sième colonne qui correspond à $eoc(y_h^\delta)$ représente l'ordre de convergence expérimentale par rapport y_h^δ , la quatrième colonne représente l'erreur de convergence $\|\varphi_{2h}^\delta - \varphi_h^\delta\|_{H^1(\Omega)}$, la cinquième colonne qui correspond à $eoc(\varphi_h^\delta)$ représente l'ordre de convergence expérimentale par rapport φ_h^δ qui mesure la vitesse de la convergence de l'erreur.

On remarque que l'erreur de convergence en décroissance lorsque la taille de maille h est raffinée. les résultats du tableau 5.4 montrent que la vitesse de convergence eoc des deux approximations numériques, y_h^δ et φ_h^δ est similaire. On remarque que les valeurs "eoc" sont proches de 1 pour les deux approximations. Ainsi, les erreurs pour les deux approximations sont en décroissance lorsque le nombre de sommets N augmente, elles mêmes sont assez petites. Cela signifie que les ordres de convergence sont conformes à nos résultats théoriques donnés dans le chapitre 4.

Les résultats de convergence du tableau 5.4 nous fournissent des informations précieuses sur les performances des approximations numériques utilisées pour résoudre un problème de contrôle optimal. On observe que les approximations numériques de y_h^δ et φ_h^δ , convergent rapidement vers la solution exacte lorsque la taille de la maille est raffinée.

On constate aussi que la méthode des éléments finis est capable de produire des approximations précises de ces fonctions avec une erreur qui diminue rapidement lorsque la taille de la maille est raffinée.

Par conséquent, la méthode des éléments finis est efficace pour résoudre ce genre des problèmes de contrôle optimal. Il en va de même pour le modèle traité dans cette thèse et on retrouve une bonne précision.

Conclusions et perspectives

Le projet de cette thèse est d'étudier la méthode d'éléments finis pour la discrétisation d'un problème d'obstacle optimal où le contrôle et l'obstacle sont la même variable. L'objectif de cette thèse est la dérivation d'estimations d'erreur a priori pour la solution optimale discrète du problème des éléments finis et de fournir des tests numériques pour valider l'exactitude de ces estimations. Un travail futur consiste à l'utilisation d'une méthode d'éléments finis adaptative et la dérivation d'estimations d'erreur a posteriori. Il est bon de savoir qu'une méthode d'éléments finis adaptative est une technique qui ajuste automatiquement la taille et la forme des éléments dans le maillage pour atteindre un niveau de précision optimal de la solution.

Bibliographie

- [1] R. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [2] V. BARBU, *Necessary conditions for nonconvex distributed control problems governed by elliptic variational inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 80 (1981), pp. 566–597.
- [3] —, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, London, 1984.
- [4] —, *Analysis and Control of Nonlinear Infinite-Dimensional Systems*, vol. 190 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, 1989.
- [5] M. BERGOUNIOUX AND S. LENHART, *Optimal control of the obstacle in semilinear variational inequalities*, Positivity, 8 (2004), pp. 229–242.
- [6] A. BERMÚDEZ AND C. SAGUEZ, *Optimality conditions for optimal control problem of variational inequalities*, in Control Problems for Systems Described by Partial Differential Equations and Applications, vol. 97 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Berlin, 1987, Springer, pp. 143–153.
- [7] J. F. BONNANS AND A. SHAPIRO, *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] R. BUTT, *Optimal shape design of systems governed by variational inequalities*, Mathematical and Computer Modelling, 25 (1997), pp. 47–55.
- [9] —, *Penalty method for variational inequalities*, Advanced in Applied Mathematics, 18 (1997), pp. 423–431.
- [10] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam ; New York, 1978.

-
- [11] A. FRIEDMAN, *Variational Principles and Free-Boundary Problems*, Wiley, New York, 1982.
- [12] R. GHANEM AND Y. DENDANI, *A priori error estimates for obstacle optimal control problem, where the obstacle is the control itself*, Journal of Applied Mathematics and Computation, 41 (2023), pp. 673–696.
- [13] R. GHANEM, B. ZIREG, H. SISSAOUI, AND T. BOUBEHZIZ, *On the numerical study of an obstacle optimal control problem with source term*, Journal of Applied Mathematics and Computation, 45 (2014), pp. 375–409.
- [14] J. L. LIONS, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [15] F. MIGNOT, *Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques*, Journal of Functional Analysis, 22 (1976), pp. 466–476.
- [16] F. MIGNOT AND J. PUEL, *Optimal control in some variational inequalities*, SIAM Journal on Control and Optimization, 22 (1984), pp. 466–476.
- [17] L. PONTRIAGUINE, V. BOLTJANSKI, R. GAMKRELIDZE, AND E. MICHTCHEKNO, *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*, Edition Mir, Moscow, 1974.
- [18] R. SARGENT, *Optimal control*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 124 (2000), pp. 361–371.
- [19] P. WILLIAMS, *A gauss–lobatto quadrature method for solving optimal control problems*, in Proceedings of the 7th Biennial Engineering Mathematics and Applications Conference, EMAC-2005, vol. 47 of ANZIAM J., 2006, pp. C101–C115.
- [20] J. YE, *Necessary optimality conditions for control of strongly monotone variational inequalities*, in Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems, vol. 1, Kluwer Academic, 1998, pp. 153–160.