

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2024

Département de Mathématiques



THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Doctorat en Mathématiques

SOLUTIONS PERIODIQUES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES

Filière

Mathématiques

Spécialité

Mathématiques et Applications

Par

TABET Achref Eddine

DIRECTEUR DE THÈSE : MAKHLOUF Amar Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : LAOUAR Abdelhamid Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : HADIDI Elbahi Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : MENACEUR Amor M.C.A U. GUELMA

EXAMINATRICE : BOULFOUL Amel M.C.A U. SKIKDA

Dédicace

Je souhaite dédier ce travail à :

Mes chers parents « **Nemra** » et « **Mosbah** », qui ont constamment cru en ma détermination à réussir, m'ont soutenu et encouragé de toutes les façons imaginables

Tous les membres de ma famille, mes sœurs « **Nora** » et « **Zohra** », ainsi que mes frères.

Chacun de mes amis et collègues avec qui j'ai vécu d'innombrables moments agréables tout au long de ces années.

Un grand merci à vous tous.

Remerciements

Avant tout, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude envers Allah le Tout-Puissant, qui nous a accordé la volonté, la patience, la force et la santé nécessaires à l'accomplissement de ce travail modeste.

Nous tenons également à exprimer notre profonde gratitude envers nos parents pour leur patience, leur générosité et leur merveilleuse présence. Ils ont constamment été une source de motivation et d'encouragement pour nous.

Je tiens à exprimer ma gratitude particulière envers Monsieur **Makhlouf Amar**, Professeur au département de mathématiques de l'Université Badji-Mokhtar à Annaba, pour sa direction tout au long de mes années de thèse. Sa disponibilité constante, son écoute attentive à mes nombreuses questions, et son intérêt constant pour l'avancement de mes travaux ont été inestimables, ainsi que ses conseils avisés, ont largement contribué au résultat final de ce travail. Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude pour ses nombreuses relectures et corrections apportées à cette thèse, qui ont été extrêmement précieuses. Ce travail lui doit beaucoup. Pour tout cela, je lui adresse mes sincères remerciements.

Je tiens à exprimer mes respectueux remerciements à Monsieur **Laouar Abdelhamid**, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse. Mes vifs remerciements s'adressent également aux membres du jury, Monsieur **Hadidi Elbahi**, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, Monsieur **Menaceur Amor**, Maître de conférence A, à l'Université de Guelma et Madame **Boulfoul Amel**, Maître de conférence A, à l'Université de Skikda. Je leur suis également reconnaissant pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches, en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir avec leurs précieuses suggestions.

Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches, à notre famille et à nos amis, qui nous ont constamment soutenus et encouragés tout au long de la réalisation de ce travail.

Résumé

Cette thèse vise à établir des conditions suffisantes garantissant l'existence de solutions périodiques pour certaines équations différentielles du cinquième et du septième ordre, perturbées par un petit paramètre ε , ainsi que pour des systèmes différentiels polynomiaux en dimensions 3 et 5, en utilisant la méthode de moyennisation du premier au quatrième ordre. De plus, nous illustrons les résultats obtenus par des exemples.

Mots clés : Bifurcation de zéro-Hopf, cycle limite, théorie de moyennisation, solution périodique, système différentiel.

Abstract

This thesis aims to provide sufficient conditions for the existence of periodic solutions for certain fifth and seventh-order differential equations perturbed by a small parameter ε , as well as for polynomial differential systems in dimensions 3 and 5, using the averaging method up to the fourth order.

Keywords : Averaging theory, differential system, limit cycle, periodic solution, zero-Hopf bifurcation,

المخلص

تهدف هذه الأطروحة إلى وضع شروط كافية لضمان وجود حلول دورية لبعض المعادلات التفاضلية من الدرجة الخامسة والسابعة، المتأثرة بمعامل صغير ϵ ، وكذلك للأنظمة التفاضلية كثيرة الحدود في الأبعاد 3 و 5 باستخدام نظرية المتوسط. حيث قمنا بتوضيح النتائج التي حصلنا عليها بأمثلة.

كلمات مفتاحية : نظام تفاضلي ، دورة الحد ، حل دوري، نظرية المتوسط ، تشعب هوبف.

Table des matières

| | |
|--|----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Notions préliminaires | 6 |
| 1.1 Équations différentielles ordinaires | 6 |
| 1.2 Existence, unicité et stabilité de la solution | 7 |
| 1.2.1 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz | 7 |
| 1.3 Stabilité de la solution | 7 |
| 1.3.1 Stabilité au sens de Liapunov | 7 |
| 1.4 Systèmes différentiels | 8 |
| 1.5 Systèmes différentiels linéaires non homogènes | 8 |
| 1.6 Systèmes dynamiques | 9 |
| 1.7 Systèmes différentiels autonomes | 10 |
| 1.8 Flot d'une équation différentielle | 10 |
| 1.9 Points d'équilibre et linéarisation | 11 |
| 1.9.1 Points d'équilibre | 11 |
| 1.9.2 Linéarisation des systèmes différentiels | 11 |
| 1.9.3 Point d'équilibre hyperbolique | 12 |
| 1.9.4 Point d'équilibre puits | 12 |
| 1.9.5 Point d'équilibre source | 12 |
| 1.9.6 Point d'équilibre selle | 12 |
| 1.10 Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 | 12 |
| 1.11 Stabilité des points d'équilibres | 15 |

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.12 | Orbites périodiques | 16 |
| 1.13 | Cycles limites | 16 |
| 1.14 | Théorie des bifurcations | 17 |
| 1.14.1 | Bifurcation de selle-nœud | 17 |
| 1.14.2 | Bifurcation de Hopf | 19 |
| 1.15 | Le seizième problème de Hilbert | 20 |
| 1.15.1 | Introduction | 20 |
| 1.15.2 | Historique et résultats principaux | 21 |
| 2 | Théorie de la moyennisation | 23 |
| 2.1 | Théorie de moyennisation dans le cas périodique | 23 |
| 2.1.1 | Théorie de moyennisation du premier ordre | 23 |
| 2.1.2 | Théorie de moyennisation du second ordre | 30 |
| 2.2 | Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer | 33 |
| 2.2.1 | Rappels sur le degré de Brouwer | 33 |
| 2.2.2 | Théorie de moyennisation d'ordre un, deux, trois et quatre dans \mathbb{R}^n . . . | 34 |
| 2.3 | Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre | 38 |
| 3 | Bifurcation zéro-Hopf pour des systèmes différentiels cubiques en dimension 3 | 44 |
| 3.1 | Introduction et position du problème | 44 |
| 3.2 | Résultats principaux | 45 |
| | Théorème 3.2.1 | 45 |
| 3.3 | Preuve du Théorème 3.2.1 | 46 |
| | Preuve de l'affirmation (a) du théorème 3.2.1 | 46 |
| | Exemple 3.3.1 | 48 |
| | Preuve de l'affirmation (b) du théorème 3.2.1 | 50 |
| | Exemple 3.3.2 | 52 |
| | Preuve de l'affirmation (c) du théorème 3.2.1 | 53 |
| | Exemple 3.3.3 | 55 |

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| 4 Solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynomiaux en dimension 5 | 60 |
| 4.1 Introduction et position du problème | 60 |
| 4.2 Résultats principaux | 61 |
| Théorème 4.2.1 | 61 |
| Théorème 4.2.2 | 62 |
| 4.3 Preuves des résultats | 64 |
| Preuve du théorème 4.2.1 | 64 |
| Exemple 4.3.1 | 67 |
| Preuve du théorème 4.2.2 | 68 |
| Exemple 4.3.2 | 71 |
| 5 Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du cinquième ordre | 73 |
| 5.1 Introduction et position du problème | 73 |
| 5.2 Résultats principaux | 74 |
| Théorème 5.2.1 | 74 |
| Corollaire 5.2.1 | 74 |
| Corollaire 5.2.2 | 75 |
| 5.3 Preuves des résultats | 75 |
| Preuve du théorème 5.2.1 | 75 |
| Preuve du corollaire 5.2.1 | 78 |
| Preuve du corollaire 5.2.2 | 79 |
| 6 Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du septième ordre | 81 |
| 6.1 Introduction et position du problème | 81 |
| 6.2 Résultats principaux | 82 |
| Théorème 6.2.1 | 82 |
| Corollaire 6.2.1 | 83 |
| 6.3 Preuves des résultats | 83 |
| Preuve du théorème 6.2.1 | 83 |
| Preuve du corollaire 6.2.1 | 87 |

Conclusion et Perspectives

89

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un point selle. | 13 |
| 1.2 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un noeud stable. | 13 |
| 1.3 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un noeud instable. | 13 |
| 1.4 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un noeud propre stable. | 14 |
| 1.5 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un noeud propre instable. | 14 |
| 1.6 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un foyer stable. | 14 |
| 1.7 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un foyer instable. | 15 |
| 1.8 | Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un centre. | 15 |
| 1.9 | Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a < 0$ | 18 |
| 1.10 | Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a > 0$ | 19 |
| 1.11 | Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a = 0$ | 19 |
| 2.1 | Cycle limite instable du système (2.1.6) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ | 25 |
| 2.2 | Cycle limite instable du système (2.1.6) avec $\varepsilon = 0.3$ | 25 |
| 2.3 | Cycle limite instable du système (2.1.6) avec $\varepsilon = 0.6$ | 25 |
| 2.4 | Cycle limite instable du système (2.1.9) avec $\varepsilon = 10^{-4}$ | 27 |
| 2.5 | Cycle limite instable du système (2.1.9) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ | 27 |
| 2.6 | Cycle limite instable du système (2.1.12) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ | 29 |
| 2.7 | Cycle limite instable du système (2.1.12) avec $\varepsilon = 10^{-1}$ | 29 |
| 2.8 | Les 2 cycles limites du système (2.1.18) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ | 33 |
| 2.9 | Les 2 cycles limites du système (2.1.18) avec $\varepsilon = 10^{-1}$ | 33 |
| 2.10 | Les 2 cycles limites du système (2.1.18) avec $\varepsilon = 0.2$ | 33 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 2.11 | Cycle limite du système (2.2.23) pour $\varepsilon = 10^{-1}$ | 38 |
| 3.1 | Les 3 cycles limites du système (3.3.5) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ | 50 |
| 3.2 | Les 3 cycles limites du système (3.3.5) avec $\varepsilon = 0.2$ | 50 |
| 3.3 | Les 3 cycles limites du système (3.3.9) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ | 53 |
| 3.4 | Les 3 cycles limites du système (3.3.9) avec $\varepsilon = 0.2$ | 53 |
| 3.5 | Les 10 cycles limites du système (3.3.13) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ | 59 |
| 3.6 | Les 10 cycles limites du système (3.3.13) avec $\varepsilon = 0.2$ | 59 |
| 3.7 | Les 10 cycles limites du système (3.3.13) avec $\varepsilon = 0.4$ | 59 |

Introduction

Un système dynamique représente un modèle qui décrit comment un groupe d'objets en interaction change au fil du temps. On observe l'émergence de diverses applications pour ces systèmes dans une multitude de secteurs

- **Biologie et médecine** : étude des oscillations des pendules et autres phénomènes oscillatoires.
- **Éthologie et écologie** : analyse des interactions entre proies et prédateurs visant à rechercher un équilibre.
- **Mécanique classique ou quantique** : pendules, phénomènes oscillatoires.
- **Sociologie** : analyse de l'évolution des populations et des dynamiques sociales.

Ces exemples illustrent la diversité des applications des systèmes dynamiques et leur importance dans de nombreux domaines de la science et de la société.

Une partie essentielle de la théorie des équations différentielles ordinaires est l'étude des cycles limites, en particulier en ce qui concerne leur existence, leur nombre et leur stabilité. Un cycle limite est une orbite périodique qui est isolée par rapport aux autres orbites périodiques du même système différentiel. Le concept de cycles limites a été initialement introduit par H. Poincaré en 1881, dans son œuvre *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. Poincaré s'est concentré sur l'analyse qualitative des solutions des équations différentielles, en particulier sur les points d'équilibre et les cycles limites, ainsi que sur leur stabilité, dans le but d'offrir une vue d'ensemble des diverses orbites du système étudié.

Le théorème de Poincaré-Bendixson [2] est un outil fondamental pour l'étude des systèmes dynamiques. Il énonce que, dans une région compacte du plan, la trajectoire d'un

Introduction

système planaire converge soit vers un point d'équilibre, soit vers un cycle limite. En conséquence, la détermination du nombre de cycles limites est cruciale. Cette interrogation est au cœur du 16^{ème} problème posé par Hilbert, qui se penche sur les équations différentielles polynomiales dans le plan. La formulation de ce problème est la suivante : étant donné le degré n d'une équation différentielle planaire, est-il possible d'évaluer le nombre de ses cycles limites ? Il est à noter que cette question constitue la seconde partie non résolue du problème. La première partie, que nous n'examinerons pas ici, porte sur le nombre et l'arrangement des composantes réelles d'une courbe algébrique.

En mathématiques appliquées les méthodes de perturbations sont très importantes. La méthode de moyennisation est un outil classique qui nous permet d'étudier la dynamique des systèmes différentiels non linéaires sous une force périodique. Le développement historique de la méthode de moyennisation s'ancre dans les contributions fondamentales de Lagrange et Laplace, qui ont établi une base intuitive pour l'application de cette technique mathématique. En 1928, Fatou a fourni la première formalisation de cette théorie [13]. Des contributions pratiques et théoriques importantes à la théorie de moyennisation ont été apportées dans les années 1934 par Bogoliubov et Krylov [10], et en 1945 par Bogoliubov [6]. En 2004, Buica et Llibre ont appliqué le degré de Brouwer pour étendre la théorie de moyennisation à l'étude des orbites périodiques pour les systèmes différentiels continus [9]. Pour une introduction complète à cette théorie, nous renvoyons au livre de Sanders, Verhulst et Murdock's [34].

La notion fondamentale de la théorie de moyennisation consiste à étudier une équation différentielle perturbée, formulée de la manière suivante

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon f(t, \mathbf{x}), \quad (0.0.1)$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ε suffisamment petit, et f est T -périodique en t . On définit l'équation moyennée associée à l'équation (0.0.1), on obtient

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon F(\mathbf{x}), \quad (0.0.2)$$

où

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \mathbf{x}) dt, \quad (0.0.3)$$

Introduction

Ainsi, nous pouvons rechercher les solutions périodiques de l'équation (0.0.1) en utilisant l'équation moyennée (0.0.2). Beaucoup de classes d'importants problèmes en mécanique classique,..., peuvent être transformées en l'équation (0.0.1).

Le contenu de cette thèse est organisé en une introduction, cinq chapitres et une conclusion.

Le premier chapitre : Notions préliminaires

Ce chapitre vise à expliquer des concepts de base et préliminaires, nécessaires pour l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques. Nous commençons par rappeler quelques notions fondamentales. Nous procédons en définissant un système dynamique, le flot associé à un système différentiel, les points d'équilibre, et la linéarisation des systèmes différentiels. Par la suite, nous examinons la nature et la stabilité des points d'équilibre. Nous introduisons également quelques rappels sur le plan et le portrait de phase, l'orbite périodique, le cycle limite, la théorie des bifurcations, ainsi que le seizième problème de Hilbert. En résumé, ce chapitre fournit un cadre conceptuel robuste pour aborder l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques.

Le deuxième chapitre : Théorie de moyennisation

Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie de moyennisation afin d'explorer les cycles limites des systèmes différentiels qui seront examinés dans les chapitres ultérieurs. Nous exposons également quelques résultats concernant la méthode de moyennisation, du premier au quatrième ordre.

Le troisième chapitre : Bifurcation zéro-Hopf pour des systèmes différentiels cubiques en dimension 3

Dans ce chapitre, nous examinons le nombre maximal de cycles limites générés par une bifurcation zéro-Hopf à l'origine d'un système différentiel cubique dans \mathbb{R}^3 , représenté sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3 + b_4\varepsilon^4)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3 + b_4\varepsilon^4)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + c_4\varepsilon^4)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z), \end{cases} \quad (0.0.4)$$

Introduction

avec

$$X_j(x, y, z) = a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}xy^2 + a_{j4}xyz + \\ a_{j5}xz^2 + a_{j6}y^3 + a_{j7}y^2z + a_{j8}yz^2 + a_{j9}z^3,$$

$Y_j(x, y, z)$ et $Z_j(x, y, z)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} et c_{ji} pour $j = \overline{0, 2}$ et $i = \overline{0, 9}$, respectivement. Les coefficients $a_{ji}, b_{ji}, c_{ji}, a_1, a_2, a_3, a_4, b, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$. Lorsque $\varepsilon = 0$, le système (0.0.4) possède des valeurs propres $\pm b i$ et 0 à l'origine, c'est-à-dire que l'origine est un point d'équilibre zéro-Hopf.

Cette étude a été acceptée dans le journal " **São Paulo Journal of Mathematical Sciences** ".

Le quatrième chapitre : Solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynomiaux en dimension 5

Dans ce chapitre, nous examinons les conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques pour les systèmes différentiels polynomiaux de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_1(x, y, z, u, v) + h_1(t), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_2(x, y, z, u, v) + h_2(t), \\ \dot{z} = -u + \varepsilon P_3(x, y, z, u, v) + h_3(t), \\ \dot{u} = z + \varepsilon P_4(x, y, z, u, v) + h_4(t), \\ \dot{v} = \lambda v + \varepsilon P_5(x, y, z, u, v) + h_5(t), \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel, P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 sont des polynômes en x, y, z, u, v de degré n , $h_i(t)$ sont des fonctions 2π -périodiques avec $i = \overline{1, 5}$, et ε est un paramètre suffisamment petit.

Cette étude a été publiée dans le journal " **Nonautonomous Dynamical Systems** ", voir [39].

Le cinquième chapitre : Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du cinquième ordre

Dans ce chapitre, nous examinons les conditions suffisantes garantissant l'existence de solutions périodiques pour une classe des équations différentielles du cinquième ordre de la

Introduction

forme

$$x^{(5)} + (p^2 + q^2)\ddot{x} + p^2 q^2 \dot{x} = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}),$$

où p, q sont des nombres rationnels différents de 0, $p \neq \pm q$, ε est un paramètre suffisamment petit et F est une fonction non-linéaire non autonome périodique en t .

Ce travail a été publié dans le " **Journal of Applied Mathematics and Informatics** ", voir [38].

Le sixième chapitre : Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du septième ordre

L'objectif de cet chapitre est d'examiner les conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle d'ordre sept de la forme

$$x^{(7)} + (\alpha^2 + \beta^2 + 1)x^{(5)} + (\alpha^2(\beta^2 + 1) + \beta^2)\ddot{x} + (\alpha\beta)^2 \dot{x} = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{\ddot{x}}}, x^{(5)}, x^{(6)}),$$

où α, β sont des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$, et $\alpha \neq \pm\beta$ avec ε suffisamment petit, et F est une fonction autonome.

Cette étude a fait l'objet d'un article accepté dans le journal " **Palestine Journal of Mathematics** ".

Dans ce chapitre, nous allons revoir certaines notions fondamentales relatives concernant les équations différentielles et les systèmes dynamiques.

1.1 Équations différentielles ordinaires

Définition 1.1.1 *Considérons une fonction continue $f : I \times U \rightarrow U$, où I est un intervalle inclus dans \mathbb{R} et U est un ouvert de \mathbb{R}^n . Nous recherchons des fonctions $t \mapsto x(t) \in U$ de classe C^1 sur un intervalle $J \subseteq I$, qui satisfont à l'équation différentielle suivante*

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad \text{où} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.1.1)$$

Une condition initiale est spécifiée par une valeur $t_0 \in I$ et une valeur $x_0 \in U$. Nous cherchons une solution telle que $x(t_0) = x_0$. L'équation (1.1.1) est désignée comme une équation différentielle ordinaire (EDO).

Le problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1.1) est défini par le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), & t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

1.2. Existence, unicité et stabilité de la solution

1.2 Existence, unicité et stabilité de la solution

1.2.1 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.2.1 Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in U$ donnés. Si f est localement lipschitzienne en x , i.e s'il existe une constante $k > 0$, un voisinage de t_0 et un voisinage de x_0 sur lesquels on a

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|,$$

alors il existe une unique solution du problème de Cauchy donné. Les hypothèses de Cauchy-Lipschitz sont en particulier réalisées si f est de classe C^1 sur $I \times U$.

1.3 Stabilité de la solution

1.3.1 Stabilité au sens de Liapunov

Une solution $\phi(t)$ du système (1.1.2) satisfaisant aux conditions initiales $\phi(t_0) = \phi_0$, est dite stable au sens de Liapunov pour $t \rightarrow +\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que pour toute solution $x(t)$ du système (1.1.1) dont les valeurs initiales satisfont aux conditions

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta,$$

l'on ait les inégalités

$$\|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

$\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable si en plus des inégalités précédentes elle vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0.$$

La solution $\phi(t)$ est dite instable si pour un $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut, les inégalités précédentes ne sont pas vérifiées pour au moins une solution $x(t)$.

1.4 Systèmes différentiels

Un système différentiel linéaire d'ordre n se compose d'équations différentielles linéaires, exprimées comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{cases} \quad (1.4.3)$$

où les fonctions inconnues à déterminer sont représentées par $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, tandis que les coefficients $a_{ij}(t)$ et les valeurs $b_j(t)$ sont considérés comme étant donnés. Ce système différentiel peut être représenté comme une seule équation différentielle dans \mathbb{R}^n :

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t), \quad (1.4.4)$$

où A est la matrice des coefficients $a_{ij}(t)$, et les vecteurs de \mathbb{R}^n sont définis comme suit : $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $\dot{X}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$, $b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$. L'équation est dite homogène si $b(t) = 0$, et non homogène lorsque $b(t) \neq 0$.

1.5 Systèmes différentiels linéaires non homogènes

Considérons le système différentiel linéaire non homogène suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad (1.5.5)$$

où A est une matrice de dimensions $n \times n$, et $b(t)$ est un vecteur de fonctions continues.

La matrice fondamentale du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1.5.6)$$

est toute matrice inversible $\Phi(t)$ de dimension $n \times n$ qui satisfait

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.5.7)$$

où $\Phi(t) = e^{At}$ avec $\Phi(0) = I$, et I est la matrice identité de dimension $n \times n$.

Une fois la matrice fondamentale du système (1.5.6) obtenue, il est facile de résoudre le système (1.5.5) en utilisant le théorème suivant.

1.6. Systèmes dynamiques

Théorème 1.5.1 Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (1.5.6), alors la solution du système linéaire non homogène (1.5.5) avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est unique, donnée par

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s) ds. \quad (1.5.8)$$

1.6 Systèmes dynamiques

Définition 1.6.1 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

1. $\mu(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $\mu(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $\mu(0, x) = x$.
4. $\mu(t + s, x) = \mu(t, \mu(s, x))$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.6.1 Considérons le système différentiel linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6.9)$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ représente le temps, et $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. La solution du système (1.6.9) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Le système (1.6.9) engendre un système dynamique, puisque l'application

$$\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui associe à tout couple $(t, x(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, la valeur

$$\mu(t, x(t)) = e^{tA}x(t),$$

satisfait aux propriétés requises pour un système dynamique.

Définition 1.6.2 Un système dynamique noté μ dans \mathbb{R}^n est dit linéaire si, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tous vecteurs $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$, il satisfait à la relation suivante

$$\mu(t, \alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha \mu(t, x(t)) + \beta \mu(t, y(t)).$$

1.7 Systèmes différentiels autonomes

Définition 1.7.1 *Un système différentiel autonome est défini par l'équation suivante*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où la fonction $f(x(t))$ ne dépend pas explicitement du temps t .

1.8 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.8.1 *Considérons le système différentiel non linéaire défini par*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.8.10)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in E$, avec E désignant un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et f appartenant à C^1 (l'ensemble des fonctions continûment différentiables). Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de système (1.8.10). L'ensemble des applications Φ_t , défini par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

constitue le flot du système non linéaire.

Considérons le système différentiel non linéaire, défini par l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.8.11)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et x_0 appartient à E , un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et f appartenant à C^1 (l'ensemble des fonctions continûment différentiables). Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution du système exprimée par l'équation (1.8.11). Les applications définies par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

constituent le flot du système non linéaire (1.8.11).

1.9 Points d'équilibre et linéarisation

1.9.1 Points d'équilibre

Définition 1.9.1 *Considérons le système différentiel non linéaire donné par*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.9.12)$$

Un point d'équilibre ou point critique du système (1.9.12) est défini comme tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant la condition suivante

$$f(x_0) = 0,$$

1.9.2 Linéarisation des systèmes différentiels

Définition 1.9.2 *Le système différentiel linéarisé du système référencé par (1.9.12) au voisinage du point d'équilibre x_0 est donné par*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1.9.13)$$

où $A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ représente la matrice jacobienne de f en x_0 , associée au système (1.9.12).

Remarque 1.9.1 *La linéarisation est utilisée pour examiner les propriétés et la stabilité des points d'équilibre dans le contexte des systèmes dynamiques.*

Exemple 1.9.1 *Considérons le système défini par (1.9.12), où la fonction $f(x)$ est donnée par*

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.9.14)$$

Les points d'équilibre, qui satisfont $f(x) = 0$, sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. La matrice jacobienne du système linéarisé en un point d'équilibre x_0 , notée $Df(x_0)$, est exprimée par

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1.9.15)$$

ce qui donne, pour les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, respectivement

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.10. Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

1.9.3 Point d'équilibre hyperbolique

Définition 1.9.3 Un point d'équilibre x_0 du système différentiel (1.9.12), est hyperbolique si toutes les valeurs propres de sa matrice jacobienne $A = Df(x_0)$ présentent des parties réelles non nulles. Si ce n'est pas le cas, le point d'équilibre est dit non-hyperbolique.

1.9.4 Point d'équilibre puits

Définition 1.9.4 Un point d'équilibre x_0 du système différentiel (1.9.12) est puits s'il est caractérisé par le fait que toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement négatives.

1.9.5 Point d'équilibre source

Définition 1.9.5 Un point d'équilibre x_0 du système différentiel (1.9.12) est dit source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement positives.

1.9.6 Point d'équilibre selle

Définition 1.9.6 Un point d'équilibre x_0 du système différentiel (1.9.12) est appelé un point selle s'il est hyperbolique et si les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement positives.

1.10 Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

Considérons le système différentiel (1.9.12) où $x \in \mathbb{R}^2$. Supposons que A représente la matrice jacobienne évaluée à l'ordre 2 en $x_0 = (0, 0)$, et λ_1 et λ_2 désignent ses valeurs propres. Nous examinerons les différents cas en fonction de ces valeurs propres

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles et non nulles de signes opposés, alors le point d'équilibre x_0 est un point de selle. Il reste toujours instable, comme illustré dans la figure 1.1.

1.10. Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

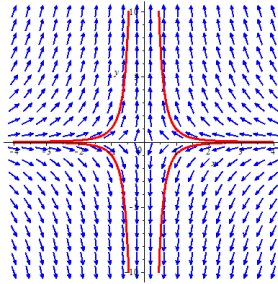


FIGURE 1.1 – Le point d'équilibre $(0,0)$ est un point selle.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles et de même signe, cela donne lieu à trois cas distincts

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, alors le point d'équilibre x_0 représente un nœud stable voir la figure 1.2.

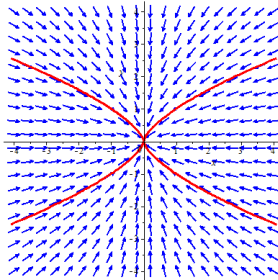


FIGURE 1.2 – Le point d'équilibre $(0,0)$ est un nœud stable.

- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, alors x_0 est un nœud instable voir la figure 1.3.

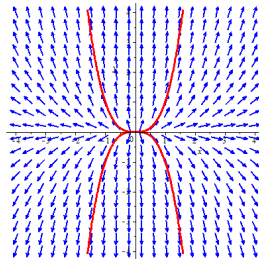


FIGURE 1.3 – Le point d'équilibre $(0,0)$ est un nœud instable.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point d'équilibre x_0 forme un nœud propre. Ce dernier est stable lorsque $\lambda < 0$ et instable lorsque $\lambda > 0$ voir les figures 1.4 et 1.5.

1.10. Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

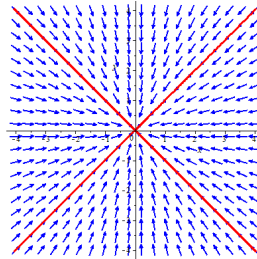


FIGURE 1.4 – Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un noeud propre stable.

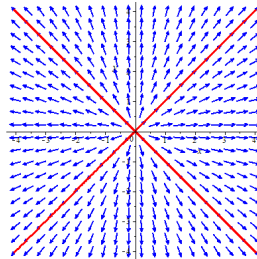


FIGURE 1.5 – Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un noeud propre instable.

3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjugués avec une partie imaginaire non nulle, alors le point d'équilibre x_0 est un foyer. Sa stabilité dépend du signe de la partie réelle de $\lambda_{1,2}$: stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ voir les figures 1.6 et 1.7.

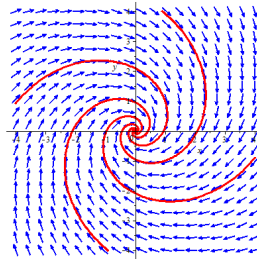


FIGURE 1.6 – Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un foyer stable.

1.11. Stabilité des points d'équilibres

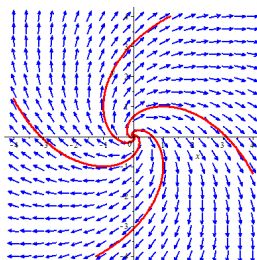


FIGURE 1.7 – Le point d'équilibre $(0,0)$ est un foyer instable.

4. Si λ_1 et λ_2 sont des imaginaires purs, le point critique x_0 prend la forme d'un centre. Bien qu'il soit stable, il ne présente pas de stabilité asymptotique voir la figure 1.8.

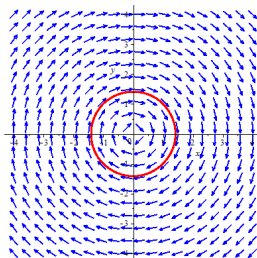


FIGURE 1.8 – Le point d'équilibre $(0,0)$ est un centre.

1.11 Stabilité des points d'équilibres

La stabilité du point critique x_0 dépend des valeurs propres de la matrice $Df(x_0)$ du système (1.9.12). Pour éclaircir cela on dénonce les trois théorèmes suivants.

Théorème 1.11.1 *Si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement négatives, alors le point critique x_0 est asymptotiquement stable.*

Théorème 1.11.2 *Si au moins une valeur propre de la matrice $Df(x_0)$ a sa partie réelle positive, alors le point critique x_0 est instable.*

Théorème 1.11.3 *Si toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont à parties réelles négatives et s'il y a au moins une valeur propre à partie réelle nulle, on ne peut rien dire sur la stabilité du point critique x_0 .*

1.12. Orbites périodiques

1.12 Orbites périodiques

Définition 1.12.1 On appelle orbite périodique toute trajectoire $\psi_t(x)$ du système (1.9.12) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\psi(t + T, x) = \psi(t, x), \quad (1.12.16)$$

où le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.13.17) est appelé période.

1.13 Cycles limites

Définition 1.13.1 Un cycle limite est une orbite périodique fermée et isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques. En d'autres termes, il n'existe pas d'autres orbites périodiques fermées situées à proximité de cette orbite dans l'espace des phases.

Définition 1.13.2 (Stabilité des cycles limites) Soit C la trajectoire correspondante au cycle limite, et soient toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C . Elles convergent en spirales vers C lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 1.13.1 Considérons le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + 4x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 4y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.13.17)$$

En utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système (1.13.17) se réécrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{r} = 4r^2(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = r^2. \end{cases}$$

En résolvant l'équation différentielle pour \dot{r} , on obtient

$$f(r) = \dot{r} = 4r^2(1 - r^2),$$

ce qui implique que $\dot{r} = 0$ si et seulement si $r = 0$ ou $r = \pm 1$. Puisque $r > 0$, seule la racine positive $r = 1$ est conservée. La solution périodique s'exprime alors comme suit

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)), \text{ avec } \theta(0) = \theta_0.$$

1.14 Théorie des bifurcations

La théorie des bifurcations est un domaine d'étude en mathématiques et en physique qui se concentre sur l'analyse des changements qualitatifs dans la structure des solutions des systèmes dynamiques en réponse à des variations des paramètres du système. Une bifurcation survient lorsqu'une modification minimale d'un paramètre du système entraîne une transformation significative dans le comportement ou l'organisation globale du système. Cette théorie trouve des applications dans de nombreux domaines, y compris la mécanique des fluides, la biologie évolutive, et l'économie, offrant un cadre pour comprendre comment les systèmes évoluent et s'adaptent face à des changements externes ou internes.

1.14.1 Bifurcation de selle-nœud

La bifurcation de selle-nœud est une bifurcation locale qui consiste sur le fait qu'il existe deux points d'équilibre un stable et l'autre instable avant la bifurcation et qu'après cette dernière aucun point d'équilibre n'existe.

Considérons les fonctions suivantes définies par

$$f(x, y) = x^2 + a,$$

$$g(x, y) = -y.$$

Ces fonctions conduisent au système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + a, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (1.14.18)$$

L'analyse de ce système révèle trois cas distincts selon le signe de a :

Pour $a < 0$: Le système admet deux points d'équilibre, $P_1 = (-\sqrt{|a|}, 0)$ et $P_2 = (\sqrt{|a|}, 0)$.

La matrice jacobienne du système est

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Au point P_1 , la matrice devient

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|a|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

1.14. Théorie des bifurcations

avec des valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2\sqrt{|a|}$, indiquant que P_1 est un nœud stable.

- Au point P_2 , la matrice est

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|a|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

avec des valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2\sqrt{|a|}$, faisant de P_2 un point selle instable.

Pour $a = 0$: Le système se réduit à

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (1.14.19)$$

Il existe un unique point d'équilibre à l'origine, $P_0 = (0, 0)$, où la matrice jacobienne est

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ce point n'est pas hyperbolique, menant à un nœud stable pour $x < 0$ et à un point selle pour $x > 0$.

Pour $a > 0$: Le système n'a pas de point d'équilibre. La variable x est toujours en augmentation, tandis que y augmente pour $y < 0$ et diminue pour $y > 0$.

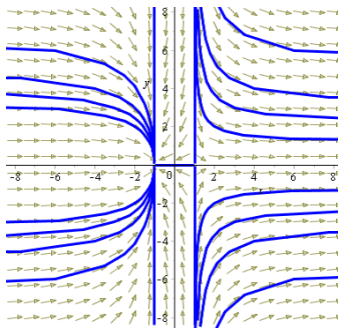


FIGURE 1.9 – Portrait de phase de la bifurcation selle-nœud pour $a < 0$.

1.14. Théorie des bifurcations

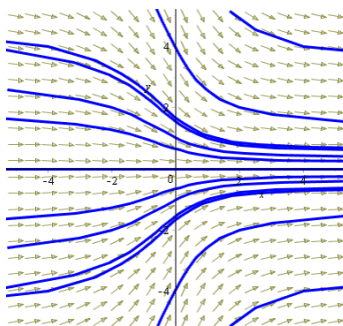


FIGURE 1.10 – Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a > 0$.

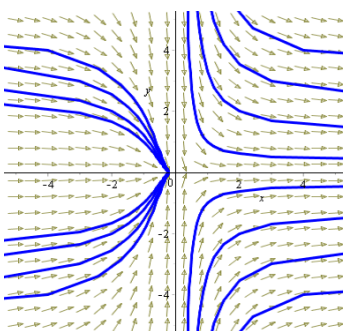


FIGURE 1.11 – Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour $a = 0$.

1.14.2 Bifurcation de Hopf

Dans la théorie des bifurcations, une bifurcation de Hopf, également connue sous le nom de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf, désigne un phénomène local où une solution périodique émerge ou disparaît à partir d'un point d'équilibre lorsque le paramètre de bifurcation franchit une valeur critique.

Définition 1.14.1 *Dans un système différentiel, une bifurcation de Hopf survient lorsque, autour d'un point d'équilibre, une paire de valeurs propres complexes conjuguées du système linéarisé traverse l'axe imaginaire pour devenir purement imaginaire, signalant un changement qualitatif dans la dynamique du système.*

Théorème 1.14.1 *Supposons que $(x, y) = (x_0, y_0)$ est un point d'équilibre qui dépend de μ .*

Soient $\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ les valeurs propres du système linéaire au voisinage de ce point d'équilibre. Supposons que pour $\mu = \mu_0$ les conditions suivantes sont satisfaites.

1. $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = w \neq 0$, où $\text{sgn}(w) = \text{sgn} \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu} \right)_{\mu=\mu_0} (x_0, y_0) \right]$

1.15. Le seizième problème de Hilbert

2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$
3. $a \neq 0$ où $a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + \frac{1}{16w}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy})$ et $f_{xy} = \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x \partial y}\Big|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$.

Alors :

- (i) Il existe une orbite périodique qui bifurque du point d'équilibre pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou pour $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$.
- (ii) Le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu_0$ (respectivement $\mu < \mu_0$) et instable pour $\mu < \mu_0$ (respectivement $\mu > \mu_0$) si $d < 0$ (respectivement $d > 0$).
- (iii) L'orbite périodique est stable (respectivement instable) si le point d'équilibre est instable (respectivement stable).
- (iv) L'amplitude de l'orbite périodique croît comme $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$; la période tend vers $\frac{2\pi}{|w|}$ lorsque $\mu \rightarrow \mu_0$.
- (v) La bifurcation est dite super-critique si la solution périodique est stable et sous-critique si elle est instable.

1.15 Le seizième problème de Hilbert

Le problème 16^{ème} de Hilbert est l'un des 23 énoncés par Hilbert, se divisant en deux parties distinctes

1.15.1 Introduction

- La première partie traite du compte et de la disposition des branches réelles (ou ovales) d'une courbe algébrique, et des résultats modernes fournissent des informations à ce sujet.
- La deuxième partie cherche à déterminer le nombre maximal et la disposition relative des cycles limites de Poincaré (orbites périodiques isolées) pour une équation différentielle polynomiale plane de degré spécifique. Cette problématique demeure actuellement ouverte.

1.15. Le seizième problème de Hilbert

1.15.2 Historique et résultats principaux

En abordant la suite du seizième problème de Hilbert, on se réfère implicitement à sa seconde composante, qui se penche sur une équation différentielle dans le plan \mathbb{R}^2 exprimée par

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.15.20)$$

où P et Q représentent des fonctions polynomiales. La question principale est de déterminer si l'on peut établir une limite supérieure, notée K , pour le nombre de cycles limites, pouvant être formulée par une inégalité $K \leq d^q$, où d indique le degré maximal parmi les polynômes P et Q , et q une constante déterminée.

Cette piste de recherche constitue une version actualisée de la seconde partie du problème posé par Hilbert.

D'après une publication de Petrovskii et Landis en 1957, qui affirmait apporter une réponse affirmative à cette question, les avancées semblent être remises en question. Auparavant, Dulac, en 1923, avait suggéré que le système en question n'admet qu'un nombre fini de cycles limites. Néanmoins, une erreur fut plus tard identifiée dans l'étude de Petrovskii-Landis, et Ilyashenko, en 1985, a mis en évidence une faute dans le travail de Dulac.

Puis, Shi Songling, en 1982, a présenté un contre-exemple qui contestait les limites établies par Petrovskii-Landis pour le cas où $d = 2$. Ensuite, deux analyses détaillées ont été publiées de manière indépendante, venant confirmer l'hypothèse de Dulac selon laquelle le système présente un nombre fini de cycles limites, bien qu'une borne supérieure précise pour ces cycles reste indéterminée.

Soit H_n le nombre maximal possible de cycles limites que le système (1.15.20) peut avoir où P et Q sont de degré n . Plus formellement, les nombres de Hilbert H_n sont donnés par

$$H_n = \sup\{\pi(P, Q) : \partial P, \partial Q \leq n\},$$

où ∂ représente le degré et $\pi(P, Q)$ est le nombre des cycles limites. Parmi les nombreuses tentatives pour progresser dans cette question, l'une des meilleures approches était de créer des champs de vecteurs avec le plus possible des orbites périodiques isolées en utilisant les deux types de bifurcations, locales et globales.

1.15. Le seizième problème de Hilbert

Il y en a quelques résultats dans le cas général des systèmes polynomiaux même si on considère les bifurcations locales [24].

- Pour un système quadratique, Bautin a prouvé qu'au plus 3 cycles limites de faible amplitude peuvent bifurquer du point critique de ce système.
- Pour un système cubique homogène (pas de termes quadratiques), Sibirski a prouvé qu'au plus 5 cycles limites de faible amplitude peuvent bifurquer du point critique de ce système.
- Pour un système cubique, Zoladek a trouvé un exemple où 11 cycles limites ont bifurqué de l'origine de ce système, mais il n'a pas pu trouver le maximum.

Même s'il est établi de façon simple, le seizième problème de Hilbert reste complètement non résolu. Pour un système quadratique, Shi Songling a obtenu une borne inférieure pour le nombre de Hilbert $H_2 \leq 4$.

La théorie de la moyennisation est l'une des théories perturbatives les plus importantes utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette théorie, de nature classique, établit des conditions selon lesquelles les points d'équilibre du système moyenné génèrent des cycles limites pour des systèmes différentiels présentant un comportement central. Elle s'applique aux systèmes de la forme $\dot{x} = \varepsilon f(t, x)$, où ε est suffisamment petit, et $f(t, x)$ est T -périodique par rapport à la première variable.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de moyennisation du premier, deuxième, troisième et quatrième ordre dans le cas périodique.

2.1 Théorie de moyennisation dans le cas périodique

2.1.1 Théorie de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.1.1)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. Supposons que $F(t, x)$ et $R(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (2.1.1) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.1.2)$$

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.1.3)$$

Théorème 2.1.1 ([33]) *Soit le système (2.1.1). On suppose que $F, R, D_x F, D_x^2 F$ et $D_x R$ sont continues et bornées par une constante M dans $[0, \varepsilon) \times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Supposons aussi que F et R sont T -périodiques en t , où T est indépendante de ε . Alors*

(a) *Si p est un point critique pour le système (2.1.2) tel que*

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (2.1.4)$$

Alors pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.1.1) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) *Si le point critique $y = p$ du système moyenné (2.1.2) est hyperbolique, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x(t, \varepsilon)$ du système (2.1.1) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .*

Preuve. Voir [33].

Exemple 2.1.1 *On considère l'équation de Van Der Pol*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad (2.1.5)$$

où $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

L'équation (2.1.5) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

En coordonnées polaires (r, θ) , où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, ce système forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)). \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Le système (2.1.7) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (2.1.8)$$

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

On note que l'équation (2.1.8) est sous la forme standard (2.1.1) pour appliquer la théorie de moyennisation si on prend

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(t, x) = -r(1 - r^2 \cos(\theta)^2) \sin^2(\theta).$$

On calcule l'équation (2.1.3) du théorème 2.1.1, on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{8} r(r^2 - 4).$$

Ainsi que, $f^0(r)$ a une unique racine positive $r = 2$. Puisque $(df^0/dr)(2) = 1$, par l'hypothèse (a) du théorème 2.1.1 le système (2.1.6) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ une orbite périodique qui bifurque l'orbite périodique de rayon $r = 2$ du système non perturbé (2.1.6), i.e. $\varepsilon = 0$. De plus, puisque $(df^0/dr)(2) = 1 > 0$ par l'hypothèse (b) du théorème, cette orbite périodique est instable. Voir les figures 2.1, 2.2 et 2.3.

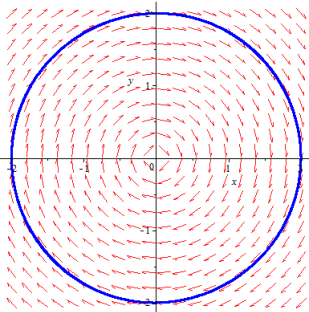


FIGURE 2.1 – Cycle limite instable du système (2.1.6) avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

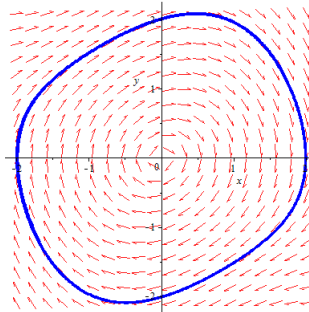


FIGURE 2.2 – Cycle limite instable du système (2.1.6) avec $\varepsilon = 0.3$.

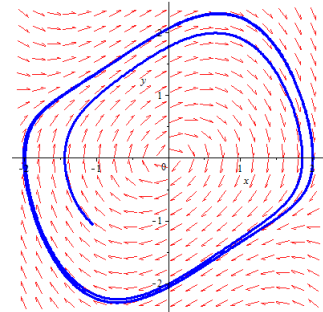


FIGURE 2.3 – Cycle limite instable du système (2.1.6) avec $\varepsilon = 0.6$.

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

Exemple 2.1.2 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + xy + z^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + yz), \\ \dot{z} = \varepsilon(x^2 + yz - 1), \end{cases} \quad (2.1.9)$$

où $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

En coordonnées cylindriques $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = z$, le système (2.1.9) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{1}{r} \varepsilon(rz \cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta)z^2 + \cos^3(\theta)r^2 - r^2 \cos(\theta)), \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases}$$

Pour écrire le système (2.1.9) sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation on considère θ comme nouvelle variable indépendante. D'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Le système (2.1.10) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où F_1, F_2 sont 2π -périodiques. Calculons maintenant le système moyenné, on obtient

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2} r(z-2), \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2} r^2 - 1. \end{cases} \quad (2.1.11)$$

On résout le système (2.1.11), on obtient les deux racines

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2), \quad (r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2).$$

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

Comme $r > 0$, la solution $(\sqrt{2}, 2)$ c'est la seule qui fournit un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)} = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème, le système (2.1.9) a pour ε suffisamment petit un seul cycle limite.

Le point d'équilibre $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$ du système moyenné (2.1.11) est hyperbolique, donc le cycle limite est de même stabilité que $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$. Les valeurs propres ± 1 de $D_{r_1, z_1} f^0$ sont de signes différents, alors le point d'équilibre est un point selle qui est toujours instable. Donc, le cycle limite est instable. Voir les figures 2.4 et 2.5.

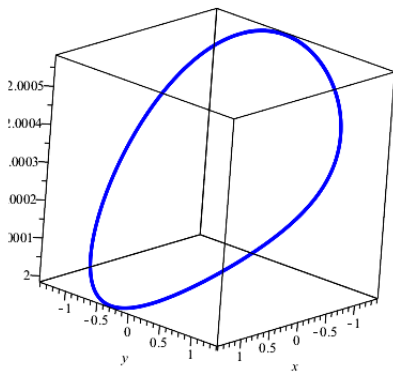


FIGURE 2.4 – Cycle limite instable du système (2.1.9) avec $\varepsilon = 10^{-4}$.

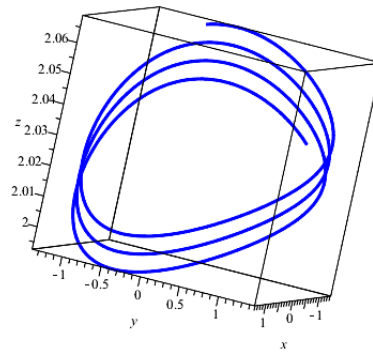


FIGURE 2.5 – Cycle limite instable du système (2.1.9) avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

Exemple 2.1.3 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y z, \\ \dot{z} = \varepsilon (y^2 - z - 6), \end{cases} \quad (2.1.12)$$

où $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

En coordonnées cylindriques $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = z$, le système (2.1.12) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon r z \sin^2(\theta), \\ \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon z \cos(\theta) \sin(\theta) - 1, \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon (r^2 \sin^2(\theta) - z - 6). \end{cases}$$

Pour écrire le système (2.1.12) sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation on considère θ comme nouvelle variable indépendante. D'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon (r z \sin^2(\theta)), \\ \frac{dz}{d\theta} = -\varepsilon (r^2 \sin^2(\theta) + z + 6). \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Le système (2.1.13) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où F_1, F_2 sont périodiques de période 2π . Calculons maintenant le système moyenné, on obtient

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = -\frac{1}{2} r z, \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = -\frac{1}{2} r^2 + z + 6. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

On résout le système (2.1.14), on obtient les trois racines

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2), \quad (r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2).$$

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

Comme $r > 0$, la solution $(\sqrt{2}, 2)$ c'est la seule qui fournit un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)} = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème, le système (2.1.12) a pour ε suffisamment petit un seul cycle limite.

Le point d'équilibre $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$ du système moyenné (2.1.11) est hyperbolique, donc le cycle limite est de même stabilité que $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$. Les valeurs propres $3, -2$ de $D_{r_1, z_1} f^0$ sont de signes différents, alors le point d'équilibre est un point selle qui est toujours instable. Donc, le cycle limite est instable. Voir les figures 2.6 et 2.7.

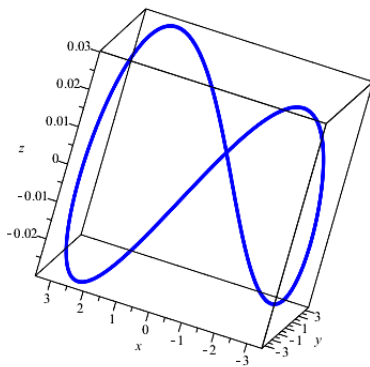


FIGURE 2.6 – Cycle limite instable du système (2.1.12) avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

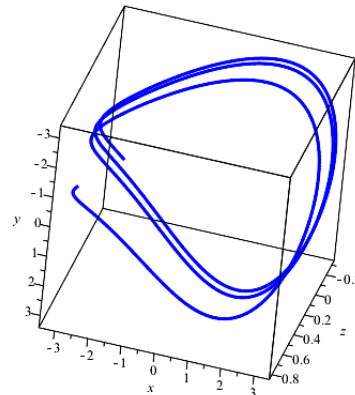


FIGURE 2.7 – Cycle limite instable du système (2.1.12) avec $\varepsilon = 10^{-1}$.

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

2.1.2 Théorie de moyennisation du second ordre

Le théorème ci-dessous offre une estimation de deuxième ordre pour les solutions périodiques de certains systèmes différentiels

Théorème 2.1.2 ([33]) *On considère les deux problèmes de Cauchy*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1.15)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 [f^{10}(y) + g^0(y)], \quad y(0) = x_0, \quad (2.1.16)$$

où $F_1, F_2 : [0, +\infty) \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $G : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues T -périodique en la première variable t , et D un ouvert de \mathbb{R}^n . f^0, f^{10} et g^0 sont des fonctions moyennées correspondantes à F_1, F_2 et G respectivement.

Soit

$$f_1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y_1(t, x) - \frac{\partial y_1}{\partial x} f^0(x),$$

où

$$y_1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x),$$

et $z(x)$ est une fonction différentiable de moyenne nulle. Supposons que

- (a) $\frac{\partial F_1}{\partial x}, F_2$ et G sont Lipschitziennes relativement à x , et continues dans leur domaine de définition.
- (b) $|G(t, x, \varepsilon)|$ est bornée par une constante M positive dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}] \times D \times (0, \varepsilon_0]$.
- (c) T est indépendante de ε .
- (d) $y(t) \in D$ pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y_1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.1.1 ([33]) *Si les hypothèses du théorème sont satisfaites, et de plus*

$$f^0(y) = 0.$$

Alors

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

1. Si p est un point d'équilibre du système moyenné (2.1.16) tel que

$$\frac{\partial}{\partial y}(f^{10}(y) + g^0(y))|_{y=p} \neq 0, \quad (2.1.17)$$

alors, il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.1.15) telle que $\phi(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Si (2.1.17) est négative, la solution périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.1.15) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (2.1.17) est positive, cette solution est instable.

Exemple 2.1.4 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x^2 - 4xy), \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2(y^2x + y^5x - 2y + 6y^3 - y^5). \end{cases} \quad (2.1.18)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-4r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta)) + \varepsilon^2(r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ \quad + 2r \cos^2(\theta) - r^6 \cos^7(\theta) + r^5 \cos^6(\theta) - 2r + 6r^3 + r^6 \cos(\theta) - r^5 - 3r^6 \cos^3(\theta) \\ \quad + 3r^5 \cos^2(\theta) - 12r^3 \cos^2(\theta) + 3r^6 \cos^5(\theta) - 3r^5 \cos^4(\theta) + 6r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(4r \cos(\theta) - 4r \cos^3(\theta) - r \cos^2(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^2(-\cos(\theta)r^4 \sin(\theta) \\ \quad + \sin(\theta)r^5 \cos^6(\theta) - 6 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^2 + \sin(\theta)r^5 \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 2 \sin(\theta)r^5 \cos^4(\theta) - \cos^4(\theta)r^2 - \sin(\theta) \cos^5(\theta)r^4 + r^2 \cos^2(\theta) + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^4 \\ \quad + 6r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)). \end{cases}$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (2.1.19)$$

où

$$F_1(r, \theta) = -4r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta),$$

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) = & 15r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) - 15r^3 \cos(\theta)^5 \sin(\theta) + r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos^5(\theta) \\ & - r^5 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta) - 8r^3 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 2r^6 \sin^2(\theta) \cos^3(\theta) + 2r^5 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ & - 6r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - r^5 \sin^2(\theta) - 2r \sin^2(\theta) + 6r^3 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

2.1. Théorie de moyennisation dans le cas périodique

En appliquant maintenant le théorème, on calcule la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0.$$

On peut passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) = -8r \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2r \cos^3(\theta),$$

ensuite

$$\int_0^\theta F_1(r, s) ds = -\frac{4}{3}r^2 + \frac{4}{3}r^2 \cos^3(\theta) + \frac{1}{3}r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{2}{3}r^2 \sin(\theta).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds + F_2(r, \theta) \right] d\theta \\ &= r \left(-\frac{5}{16}r^4 + \frac{7}{4}r^2 - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation (2.1.20) et on obtient deux racines positives $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 + 10\sqrt{29})}$, $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 - 10\sqrt{29})}$, et comme

$$\frac{d}{dr} f^{10}(r) = -\frac{25}{16}r^4 + \frac{21}{4}r^2 - 1.$$

D'où

$$\frac{d}{dr} f^{10}(r_1) = -13.33923079 \neq 0, \quad \frac{d}{dr} f^{10}(r_2) = 1.739230730 \neq 0.$$

Donc il existe deux cycles limites, et d'après l'hypothèse (2) du corollaire on a

$$\frac{d}{dr} f^{10}(r_1) = -13.33923079 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dr} f^{10}(r_2) = 1.739230730 > 0.$$

Alors, le premier cycle limite est stable d'amplitude $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 + 10\sqrt{29})}$ et le deuxième cycle limite est instable d'amplitude $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 - 10\sqrt{29})}$ pour ε suffisamment petit. Voir les figures 2.8, 2.9 et 2.10.

2.2. Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

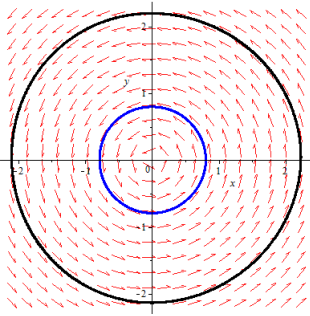


FIGURE 2.8 – Les 2 cycles limites du système (2.1.18) avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

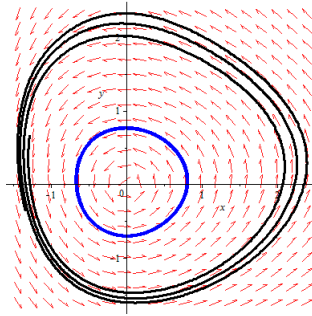


FIGURE 2.9 – Les 2 cycles limites du système (2.1.18) avec $\varepsilon = 10^{-1}$.

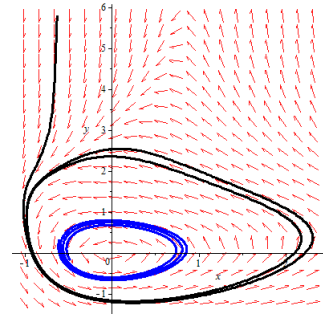


FIGURE 2.10 – Les 2 cycles limites du système (2.1.18) avec $\varepsilon = 0.2$.

2.2 Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

Dans cette partie, nous abordons la théorie de la moyennisation en vue d'identifier les solutions périodiques d'un système différentiel selon le degré de Brouwer.

2.2.1 Rappels sur le degré de Brouwer

Définition 2.2.1 (Degré de Brouwer). *Considérons D comme étant une région ouverte de \mathbb{R}^n et V un sous-ensemble ouvert et limité de \mathbb{R}^n avec la condition $V \subset D$. Supposons l'existence d'une fonction $f : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que l'ensemble 0 n'est pas une image de f sur la frontière de V , ∂V , pour un certain ε . Le degré de Brouwer de la fonction $f(\cdot, \varepsilon)$ par rapport à l'espace V et au point 0 est noté par $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$.*

Proposition 2.2.0 *Si le degré de Brouwer $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ est différent de zéro, cela implique que l'équation $f(\cdot, \varepsilon) = 0$ possède au moins une solution à l'intérieur de l'ensemble V .*

Définition 2.2.2 (Degré de Brouwer pour des fonctions de classe C^1). *Soit $g \in C^1(t)$, $\bar{V} \subset D$ et définissons $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. Supposons également que le déterminant jacobien de g en tout point z , noté $J_g(z)$, soit non nul pour tout $z \in Z_g$. Ceci garantit que l'ensemble Z_g est fini. Alors, le degré de Brouwer de g dans V par rapport à zéro est donné par la somme des signes*

2.2. Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

du déterminant jacobien en chaque point de Z_g :

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)).$$

Remarque 2.2.1 Soit $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 , avec $g(a) = 0$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in D$. Si $J_g(a) \neq 0$, il existe un voisinage V de a tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et on a

$$d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}.$$

2.2.2 Théorie de moyennisation d'ordre un, deux, trois et quatre dans \mathbb{R}^n

Théorème 2.2.1 On considère le système différentiel

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 F_4(t, x) + \varepsilon^5 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.2.21)$$

où $F_1, F_2, F_3, F_4 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues et T -périodiques dans la première variable. Supposons que

D) Pour chaque $t \in \mathbb{R}, F_i \in C^{4-i}(D), \partial^{k-i} F_i$ avec $i = \overline{1, 4}, R$ sont localement Lipschitziennes dans la deuxième variable. Nous définissons $f_1, f_2, f_3, f_4 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \\ f_2(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_1(s, z) + F_2(s, z) \right] ds, \\ f_3(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[F_3(s, z) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(s, z) y_1(s, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} y_1(s, z)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_2(s, z) \right] ds, \\ f_4(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[F_4(s, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(s, z) y_1(s, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}(s, z) y_1(s, z)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_2}{\partial z} y_2(s, z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(s, z) y_1(s, z) \odot y_2(s, z) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_1}{\partial z^3}(s, z) y_1(s, z)^3 + \frac{1}{6} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_3(s, z) \right] ds, \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

2.2. Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt,$$

$$y_2(s, z) = \int_0^s \left[2F_2(t, z) + 2 \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) y_1(t, z) \right] dt,$$

$$y_3(s, z) = \int_0^s \left[6F_3(t, z) + 6 \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, z) y_1(t, z) + 3 \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(t, z) y_1(t, z)^2 + 3 \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) y_2(t, z) \right] dt.$$

II) Pour $V \subset D$ un sous ensemble ouvert et borné, et pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a \in V$ tel que $f_1(a) + \varepsilon f_2(a) + \varepsilon^2 f_3(a) + \varepsilon^3 f_4(a) = 0$ et $d_B(f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \varepsilon^3 f_4, V, a) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.2.21) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

L'expression $d_B(f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \varepsilon^3 f_4, V, a) \neq 0$ signifie que le degré de Brouwer de la fonction $f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \varepsilon^3 f_4 : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ au point d'équilibre a est non nulle. Une condition suffisante pour que cette inégalité soit vraie est que la jacobienne de la fonction $f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \varepsilon^3 f_4$ en a ne soit pas égale à zéro.

Pour plus d'informations sur la théorie de moyennisation, voir [20], [34] et [33].

Exemple 2.2.1 On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x^2 - 2x^4), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon^3(x^2 + y - y^3). \end{cases} \quad (2.2.23)$$

En coordonnées polaires (r, θ) avec $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $r > 0$, le système (2.2.23) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-r^2 \cos^3(\theta) + 2r^4 \cos^5(\theta)) + \varepsilon^3(-\sin(\theta)r^2 \cos^2(\theta) - r + r^3 \\ \quad - 2r^3 \cos^2(\theta) + r \cos^2(\theta) + r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(-2 \sin(\theta)r^3 \cos^4(\theta) + \sin(\theta)r \cos^2(\theta)) + \varepsilon^3(\cos(\theta) \times \\ \quad r^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)r^2 \cos^3(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) - r \cos^3(\theta)). \end{cases} \quad (2.2.24)$$

En considérant θ comme nouvelle variable, le système (2.2.24) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + \varepsilon^3 F_3(r, \theta) + O(\varepsilon^4), \quad (2.2.25)$$

2.2. Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

où

$$F_1(r, \theta) = r^2 \cos^3(\theta) - 2r^4 \cos^5(\theta),$$

$$F_2(r, \theta) = 4 \sin(\theta) \cos^9(\theta) r^7 - 4 \sin(\theta) \cos^7(\theta) r^5 + \sin(\theta) \cos^5(\theta) r^3,$$

$$\begin{aligned} F_3(r, \theta) = & \sin(\theta) r^2 \cos^2(\theta) - 8r^{10} \cos^{13}(\theta) \sin^2(\theta) + 12r^8 \cos^{11}(\theta) \sin^2(\theta) \\ & - 6r^6 \cos^9(\theta) \sin^2(\theta) + r^4 \cos^7(\theta) \sin^2(\theta) + r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ & - r^3 \sin^2(\theta) + r \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Premièrement, on calcule

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0,$$

ensuite on doit calculer f_2 et pour cela, on calcule l'expression $\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \int_0^\theta F_1(r, t) dt$, et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \int_0^\theta F_1(r, t) dt = & r(2 \cos^3(\theta) - 8r^2 \cos^5(\theta)) \cdot \left(\frac{r^2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta) \right. \\ & + \frac{2r^2}{3} \sin(\theta) + r^4 \left(-\frac{2}{5} \cos^4(\theta) \sin(\theta) \right. \\ & \left. \left. - \frac{8}{15} \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} \sin(\theta) \right) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, t) dt + F_2(r, \theta) \right] d\theta = 0.$$

Maintenant, en appliquant la théorie de moyennisation d'ordre trois et pour cela, on calcule la fonction moyennée suivante

$$\begin{aligned} f_3(r) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(r, \theta) \cdot (y_1(r, \theta))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_2(r, \theta) \right. \\ & \left. + \frac{\partial F_2}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_1(r, \theta) + F_3(r, \theta) \right] d\theta, \end{aligned}$$

où

$$y_1(r, \theta) = \int_0^\theta F_1(r, s) ds,$$

$$y_2(r, \theta) = \int_0^\theta \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, s) \cdot \int_0^s F_1(r, t) dt + F_2(r, s) \right] ds.$$

2.2. Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

On calcule d'abord

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(r, \theta) \cdot (y_1(r, \theta))^2 &= (\cos^3(\theta) - 12r^2 \cos^5(\theta)) \cdot \left(\frac{1}{3} \sin(\theta) r^2 \cos^2(\theta) \right) \\ &\quad + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta) - \frac{2}{5} r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad - \frac{8}{15} r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} r^4 \sin^2(\theta), \end{aligned}$$

ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_2(r, \theta) &= \left(\frac{1}{2} (2r \cos^3(\theta) - 8r^3 \cos^5(\theta)) \right) \cdot \left(\frac{602}{225} r^7 - \frac{38}{15} r^5 + \frac{11}{18} r^3 \right) \\ &\quad - \frac{18}{25} r^7 \cos^10(\theta) + \frac{14}{15} r^5 \cos^8(\theta) - \frac{8}{15} r^7 \cos^8(\theta) \\ &\quad - \frac{5}{18} r^3 \cos^6(\theta) - \frac{64}{45} r^7 \cos^6(\theta) + \frac{16}{15} r^5 \cos^6(\theta) \\ &\quad + \frac{8}{15} r^5 \cos^4(\theta) - \frac{1}{3} r^3 \cos^4(\theta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_1(r, \theta) &= (28 \sin(\theta) \cos^9(\theta) r^6 - 20 \sin(\theta) \cos^7(\theta) r^4) \\ &\quad + 3 \sin(\theta) \cos^5(\theta) r^2 \cdot \left(\frac{r^2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta) \right) \\ &\quad - \frac{2}{5} r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) - \frac{8}{15} r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} r^4 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation

$$f_3(r) = \frac{1}{2} r \left(1 - \frac{3}{4} r^2 \right) = 0. \quad (2.2.26)$$

L'équation (2.2.26) a une seule racine positive $r = \frac{2}{3} \sqrt{3}$. Selon le théorème, pour avoir un cycle limite on doit vérifier que $\left. \frac{d}{dr} f_3(r) \right|_{r=\frac{2}{3}\sqrt{3}} = -1 \neq 0$, ce qui est fait.

On conclut que le système (2.2.23) a un seul cycle limite d'amplitude $r = \frac{2}{3} \sqrt{3}$. Voir la figure 2.11.

2.3. Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

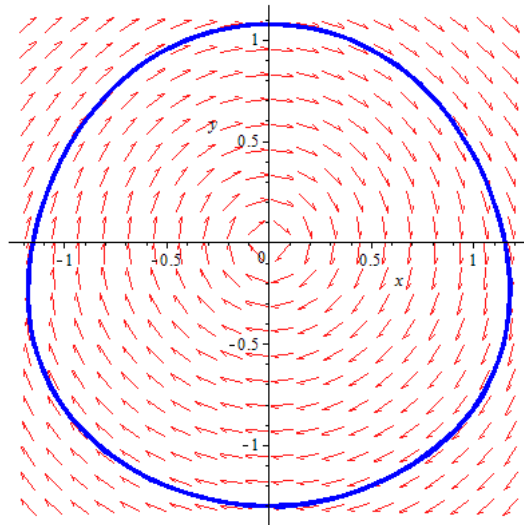


FIGURE 2.11 – Cycle limite du système (2.2.23) pour $\varepsilon = 10^{-1}$.

2.3 Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

L'analyse des bifurcations de solutions périodiques dans un système différentiel se présente sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (2.3.27)$$

où ε représente un petit paramètre, et les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ainsi que $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont définies comme étant de classe \mathcal{C}^2 , avec une périodicité de T en ce qui concerne leur première variable t , dans un domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Pour le cas où le système est non affecté par des perturbations, il est décrit par

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}). \quad (2.3.28)$$

On identifie une sous-variété contenant des solutions qui se répètent avec le temps. Le problème de ce sujet s'articule autour de l'application de la théorie de moyennisation.

Nous exprimons par $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ la solution du système (2.3.28) telle que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Le système linéarisé du système non perturbé (2.3.28) le long d'une solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ est

$$\dot{\mathbf{y}} = D_x F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}))\mathbf{y}. \quad (2.3.29)$$

où \mathbf{y} est une matrice $n \times n$. Dans ce qui suit, on note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du

2.3. Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

système différentiel linéaire (2.3.29) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses premières k coordonnées, c'est-à-dire, $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

Supposons qu'il existe une sous-variété k -dimensionnelle de Ω remplie des solutions T -périodiques de (2.3.28). Le théorème suivant fournit une solution au problème de l'étude des solutions T -périodiques à partir des solutions périodiques contenues dans \mathcal{Z} pour le système (2.3.27).

Théorème 2.3.1 *Soient W un ouvert borné \mathbb{R}^k , et $\beta : Cl(W) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que*

- i) $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in Cl(W)\} \subset \Omega$ et pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (2.3.28) est T -périodique.
- ii) Pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (2.3.29) telle que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit une matrice de dimension $k \times (n-k)$ et dans le coin inférieur droit une matrice Δ_α de dimension $(n-k) \times (n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : Cl(W) \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt \right). \quad (2.3.30)$$

Si il existe $a \in W$ tel que $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.3.27) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

De plus, si la matrice jacobienne $d\mathcal{F}/d\alpha(a)$ possède des valeurs propres avec partie réelle négative alors la solution périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ est asymptotiquement stable. Si une des valeurs propres a la partie réelle positive alors la solution périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ est instable.

Le théorème 2.3.1 provient de Malkin [29] et Roseau [31]; pour une preuve simplifiée, voir [8].

Soit V est un ensemble ouvert et borné avec $Cl(V) \subset \Omega$, tel que pour chaque $\mathbf{z} \in Cl(V)$. Dans ce contexte, $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ représente la solution périodique du système non perturbé (2.3.28) avec $\mathbf{x}(0, \mathbf{z})$. L'ensemble $Cl(V)$ est isochrone pour le système (2.3.27); c'est-à-dire, il s'agit d'un ensemble formé uniquement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période. Le résultat suivant fournit une réponse au problème de la bifurcation des solutions T -périodiques à partir des solutions périodiques $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ qui sont contenues dans $Cl(V)$.

2.3. Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

Théorème 2.3.2 (Perturbation d'un ensemble isochrone) *Supposons qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $Cl(V) \subset \Omega$ tel que, pour chaque $\mathbf{z} \in Cl(V)$, la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ est T -périodique, en considérant la fonction $\mathcal{F} : Cl(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par*

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) dt. \quad (2.3.31)$$

Si il existe $a \in V$ tel que $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\mathbf{z})(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.3.27) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour la preuve du théorème 2.3.2, voir le corollaire 1 de [8].

Exemple 2.3.1 *On considère l'équation suivante*

$$\ddot{x} - \dot{x} + x - x = \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \quad (2.3.32)$$

Si $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, L'équation (2.3.32) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = z - y + x + \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \end{cases} \quad (2.3.33)$$

L'origine est le seul point critique du système (2.3.33) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (2.3.33) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_{1,2} = \mp i$ et $\lambda_3 = 1$. avec la transformation linéaire inversible

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T.$$

On transforme le système (2.3.33) en un autre système

$$(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T,$$

2.3. Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

où J est la matrice de Jordan associée à A donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0,$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - y, \\ Y = -y + z, \\ Z = x + z, \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{X - Y + Z}{2}, \\ y = \frac{-X - Y + Z}{2}, \\ z = \frac{-X + Y + Z}{2}. \end{cases}$$

Le nouveau système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \end{cases} \quad (2.3.34)$$

où

$$\tilde{F} = F\left(\frac{X - Y + Z}{2}, \frac{-X - Y + Z}{2}, \frac{-X + Y + Z}{2}, t\right).$$

2.3. Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

Pour $\varepsilon = 0$ la solution du système (2.3.34) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

En appliquant le théorème précédent le système (2.3.34) est similaire au système (2.3.27) avec

$$x = (X, Y, Z), F_0(x, t) = (-Y, X, Z), F_1(x, t) = (0, \tilde{F}, \tilde{F}) \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ la solution du système (2.26) telle que

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Le système (2.3.34) avec $\varepsilon = 0$ admet un centre à l'origine dans le plan (X, Y) et les solutions 2π -périodiques correspondantes sont

$$x(t, X_0, Y_0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t)),$$

telles que

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t, Z(t) = 0. \quad (2.3.35)$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (2.3.35) avec $\varepsilon = 0$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, 0)$. On a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{2\pi} \end{pmatrix},$$

vu que $1 - e^{2\pi} \neq 0$, toutes les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes $(F_1(\alpha), F_2(\alpha))$ de la

2.3. Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

fonction $F(\alpha)$ où

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sin(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt. \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

$$\begin{aligned} F_2(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

On pose $F(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$ et on intègre (2.3.36) et (2.3.37) on obtient

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0) &= -\frac{1}{16}(X_0 + Y_0)(6X_0^2 + X_0 + 6Y_0^2 - Y_0), \\ f_2(X_0, Y_0) &= \frac{3}{8}(-Y_0X_0^2 + Y_0^2X_0) - \frac{3}{8}(-Y_0^3 + X_0^3) + \frac{1}{8}(-Y_0^2 + X_0^2) - \frac{1}{8}Y_0X_0. \end{aligned}$$

Le système $f_1(X_0, Y_0) = f_2(X_0, Y_0) = 0$, a une unique solution

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

De plus,

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\right)_{(X_0, Y_0) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{2048} \neq 0.$$

Alors, pour ε suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ de l'équation différentielle (2.3.32) telle que

$$x(0, \varepsilon) \longrightarrow -\frac{1}{4}, \dot{x}(0, \varepsilon) \longrightarrow 0, \ddot{x}(0, \varepsilon) \longrightarrow \frac{1}{4},$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Bifurcation zéro-Hopf pour des systèmes différentiels cubiques en dimension 3

3.1 Introduction et position du problème

En 2004, Buica et Llibre ont appliqué le degré de Brouwer pour étendre la théorie de moyennisation à l'étude des orbites périodiques pour les systèmes différentiels continus [9].

Dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 3$, un point d'équilibre est dit zéro-Hopf s'il est isolé parmi l'ensemble de tous les points d'équilibre du système différentiel, et s'il possède des valeurs propres $\pm bi$, avec $b \neq 0$, tandis que 0 est une valeur propre de multiplicité $n - 2$.

Dans [23], J. Llibre et X. Zhang démontrent que pour $n > 3$, la théorie de moyennisation de premier ordre permet à 2^{n-3} cycles limites de bifurquer d'un point d'équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel polynomial dans \mathbb{R}^n .

Dans l'étude menée par J. Llibre, A. Makhlouf et S. Badi dans [19], ils ont examiné la bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux dans \mathbb{R}^3 . Pour cette analyse, ils ont utilisé la théorie de moyennisation du deuxième ordre. Leurs résultats ont montré qu'au plus 3 cycles limites peuvent bifurquer d'un point d'équilibre ayant des valeurs propres de la forme $\pm bi$ et 0.

Dans [14], A. Feddaoui, J. Llibre et A. Makhlouf examinent la bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux dans \mathbb{R}^4 en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre. Les auteurs démontrent qu'au maximum 9 cycles limites peuvent bifurquer d'un point d'équilibre caractérisé par des valeurs propres de la forme $\pm bi$ et deux zéros.

3.2. Résultats principaux

Les recherches précédentes ont exploré la théorie de la moyennisation d'ordre 1 et 2.

3.2 Résultats principaux

Ce chapitre se concentre sur l'analyse du nombre maximal de cycles limites pouvant découler d'un point d'équilibre zéro-Hopf dans un système différentiel cubique de dimension 3. Nous aborderons cette étude en utilisant la théorie de moyennisation du quatrième ordre. En particulier, nous examinerons des systèmes différentiels ayant la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3 + b_4\varepsilon^4)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3 + b_4\varepsilon^4)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + c_4\varepsilon^4)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z), \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z) = & a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}xy^2 + a_{j4}xyz + \\ & a_{j5}xz^2 + a_{j6}y^3 + a_{j7}y^2z + a_{j8}yz^2 + a_{j9}z^3, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z)$ et $Z_j(x, y, z)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z)$ en remplaçant respectivement a_{ji} par b_{ji} et c_{ji} pour $j = \overline{0,2}$ et $i = \overline{0,9}$. Les coefficients a_{ji} , b_{ji} , c_{ji} , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , b , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 sont des paramètres réels avec $b \neq 0$. Lorsque $\varepsilon = 0$ le système (3.2.1) a des valeurs propres $\pm bi$ et 0 à l'origine, c'est-à-dire que l'origine est un point d'équilibre zéro-Hopf.

Théorème 3.2.1 *Les affirmations suivantes sont valides*

- (a) *En appliquant la théorie de la moyennisation du deuxième ordre, on obtient qu'au plus trois cycles limites peuvent bifurquer de l'origine du système (3.2.1) lorsque ε tend vers zéro.*
- (b) *En appliquant la théorie de la moyennisation du troisième ordre, on obtient qu'au plus trois cycles limites peuvent bifurquer de l'origine du système (3.2.1) lorsque ε tend vers zéro.*
- (c) *En appliquant la théorie de la moyennisation du quatrième ordre, on obtient qu'au plus dix cycles limites peuvent bifurquer de l'origine du système (3.2.1) lorsque ε tend vers zéro.*

3.3 Preuve du Théorème 3.2.1

Preuve de l'affirmation (a) du théorème 3.2.1. Nous devons reformuler le système d'équations (3.2.1) en une forme standard afin d'appliquer la théorie de la moyennisation. Cette démarche est essentielle pour démontrer l'affirmation (a) du théorème 3.2.1. Pour entamer ce processus, nous procédons à un changement d'échelle en posant $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, et nous obtenons le système différentiel $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. Ensuite, nous considérons le changement des variables $X = \rho \cos \theta$, $Y = \rho \sin \theta$, $Z = \eta$ et nous obtenons le système différentiel $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ en coordonnées cylindriques (ρ, θ, η) et nous prenons θ comme nouvelle variable indépendante. Enfin, nous faisons un développement de Taylor dans la variable ε au quatrième ordre et nous obtenons le système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^2 F_{12}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^3 F_{13}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^4 F_{14}(\theta, \rho, \eta) + O(\varepsilon^5), \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= \varepsilon F_{21}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^3 F_{23}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^4 F_{24}(\theta, \rho, \eta) + O(\varepsilon^5), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

où les fonctions F_{ij} avec $i = 1, 2$ et $j = 1, \dots, 4$ sont données dans l'appendice.

Prenant $x = (\rho, \eta)$, $t = \theta$, $F_1(t, x) = (F_{11}(\rho, \theta, \eta), F_{21}(\rho, \theta, \eta))$, $F_2(t, x) = (F_{12}(\rho, \theta, \eta), F_{22}(\rho, \theta, \eta))$, $F_3(t, x) = (F_{13}(\rho, \theta, \eta), F_{23}(\rho, \theta, \eta))$, $F_4(t, x) = (F_{14}(\rho, \theta, \eta), F_{24}(\rho, \theta, \eta))$ et $T = 2\pi$, le système (3.3.2) est identique au système (2.2.21). La fonction moyennée suivante est calculée en appliquant la théorie de moyennisation du premier ordre au système (3.3.2).

$$f_{1i}(\rho, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{i1}(\theta, \rho, \eta) d\theta,$$

où $i = 1, 2$.

En faisant les calculs, nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{11}(\rho, \eta) &= \frac{a_1 \rho}{b}, \\ f_{12}(\rho, \eta) &= \frac{c_1 \eta}{b}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

En résolvant (3.3.3), nous obtenons $(\rho, \eta) = (0, 0)$. Par conséquent, la théorie de moyennisation du premier ordre ne donne aucune information concernant les cycles limites du système différentiel (3.3.2).

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

Étant donné que la théorie de moyennisation du deuxième ordre peut donner des informations sur les cycles limites du système différentiel (3.3.2), nous avons besoin que le système moyenné (3.3.3) soit identiquement nul. Ainsi, nous prenons $a_1 = c_1 = 0$. Maintenant, nous calculons les secondes fonctions moyennées $f_2 = (f_{21}(\rho, \eta), f_{22}(\rho, \eta))$, nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned} f_{21}(\rho, \eta) &= \frac{\rho}{8b} (8a_2 + (3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06})\rho^2 + 4(a_{05} + b_{08})\eta^2), \\ f_{22}(\rho, \eta) &= \frac{\eta}{2b} (2c_2 + (c_{02} + c_{07})\rho^2 + 2c_{09}\eta^2). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Nous résolvons le système $f_{21}(\rho, \eta) = 0$, $f_{22}(\rho, \eta) = 0$ par rapport aux variables (ρ, η) , et nous trouvons trois solutions

$$\begin{aligned} (\rho_1, \eta_1) &= \left(2\sqrt{-\frac{2a_2}{3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}}}, 0 \right), \\ (\rho_{2,3}, \eta_{2,3}) &= \left(\sqrt{-\frac{8a_2c_{09} - 4c_2(a_{05} + b_{08})}{c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}}, \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{-\frac{c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 4a_2(c_{02} + c_{07})}{c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}} \right). \end{aligned}$$

Ces solutions sont réelles avec $\rho > 0$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

- (i) $a_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) < 0$,
- (ii) $(8a_2c_{09} - 4c_2(a_{05} + b_{08}))(c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})) < 0$,
- (iii) $(c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 4a_2(c_{02} + c_{07}))(c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})) \leq 0$.

Nous procédons au calcul du déterminant de la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(f_{21}, f_{22})}{\partial(\rho, \eta)},$$

aux trois solutions précédentes, nous obtenons que le déterminant pour la première solution est

$$\frac{2a_2(4a_2(c_{02} + c_{07}) - c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))}{(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06})b^2},$$

tandis que pour la deuxième et la troisième, est

$$-\frac{2(4a_2(c_{02} + c_{07}) - c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))(2a_2c_{09} - c_2(a_{05} + b_{08}))}{(c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07}))b^2}.$$

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

Selon les conditions (i), (ii) et (iii), de plus, les deux déterminants sont non nuls. Par conséquent, d'après le théorème 2.3.1, nous obtenons que le système différentiel (3.3.2) a trois cycles limites $(\rho_l(\theta, \varepsilon), \eta_l(\theta, \varepsilon))$ tend vers les solutions (ρ_l, η_l) pour $l = 1, 2, 3$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Revenant maintenant du système différentiel (3.3.2) au système différentiel $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$, et prenant en compte que $\dot{\theta} = b + O(\varepsilon)$, nous obtenons les trois cycles limites $(X_l(t, \varepsilon), Y_l(t, \varepsilon), Z_l(t, \varepsilon))$ pour $l = 1, 2, 3$ satisfaisant

$$(X_l(0, \varepsilon), Y_l(0, \varepsilon), Z_l(0, \varepsilon)) \rightarrow (\rho_l, 0, \eta_l) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Finalement, revenant du système différentiel $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ au système différentiel (3.2.1), nous obtenons trois cycles limites $(x_l(t, \varepsilon), y_l(t, \varepsilon), z_l(t, \varepsilon))$ pour $l = 1, 2, 3$ satisfaisant que

$$(x_l(0, \varepsilon), y_l(0, \varepsilon), z_l(0, \varepsilon)) \rightarrow (\rho_l, 0, \eta_l) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ainsi, ces trois cycles limites bifurquent de l'origine du système différentiel (3.2.1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire, ils bifurquent du point d'équilibre zéro-Hopf localisé à l'origine du système (3.2.1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela complète la preuve de l'affirmation (a) du Théorème 3.2.1. ■

Exemple 3.3.1 *On considère le système différentiel suivant*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon^2 \frac{1}{2} x - 5y - \frac{1}{2} x^3 + \frac{5}{4} x y^2, \\ \dot{y} &= \varepsilon^2 \frac{1}{2} y + 5x + \frac{3}{2} x^2 y - y^3, \\ \dot{z} &= \varepsilon^2 \frac{3}{2} z - \frac{1}{3} z^3, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

En changeant les variables $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, le système (3.3.5) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -5Y + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} X - \frac{1}{2} X^3 + \frac{5}{4} X Y^2 \right), \\ \dot{Y} &= 5X + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} Y + \frac{3}{2} X^2 Y - Y^3 \right), \\ \dot{Z} &= \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2} Z - \frac{1}{3} Z^2 \right). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Nous écrivons le système (3.3.6) en coordonnées cylindriques, $X = \rho \cos \theta$, $Y = \rho \sin \theta$, $Z = \eta$, et nous obtenons

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{\varepsilon^2 \rho}{4} (-17\rho^2 \cos^4 \theta + 19\rho^2 \cos^2 \theta - 4\rho^2 + 2), \\ \dot{\theta} &= \varepsilon^2 \left(\frac{17}{4} \rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta - \frac{9}{4} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \right) + 5, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2} \eta - \frac{1}{3} \eta^3 \right).\end{aligned}$$

En prenant maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\theta} &= \frac{\varepsilon^2 \rho}{20} (-17\rho^2 \cos^4 \theta + 19\rho^2 \cos^2 \theta - 4\rho^2 + 2) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= \varepsilon^2 \left(\frac{3}{10} \eta - \frac{1}{15} \eta^3 \right) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

Nous appliquons la théorie de moyennisation du deuxième ordre et obtenons le système de moyenné $f_2(\rho, \eta) = (f_{21}(\rho, \eta), f_{22}(\rho, \eta))$ donné par

$$\begin{aligned}f_{21}(\rho, \eta) &= -\frac{\rho}{160} (7\rho^2 - 16), \\ f_{22}(\rho, \eta) &= -\frac{\eta}{30} (2\eta^2 - 9).\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

En résolvant le système $f_{21} = 0, f_{22} = 0$, nous obtenons les trois solutions

$$(\rho_1, \eta_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{7}}, 0 \right), \quad (\rho_2, \eta_2) = \left(\frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right), \quad (\rho_3, \eta_3) = \left(\frac{4}{\sqrt{7}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right).$$

Nous calculons la matrice jacobienne du système (3.3.7), et leurs déterminants dans ces trois solutions, sont respectivement $-\frac{3}{50}, \frac{3}{25}$ et $\frac{3}{25}$ respectivement. Ainsi, selon le Théorème (2.2.1), le système différentiel (3.3.5) a trois cycles limites bifurquant de son point d'équilibre zéro-Hopf localisé à l'origine des coordonnées.

Nous traçons ces trois cycles limites en utilisant Maple, voir les Figures 3.1 et 3.2.

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

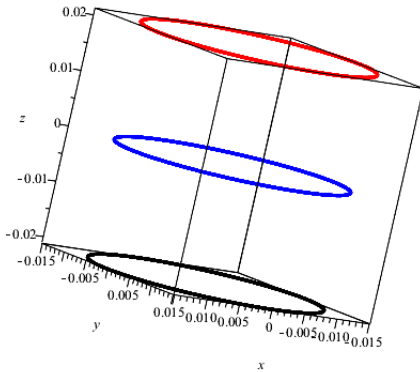


FIGURE 3.1 – Les 3 cycles limites du système (3.3.5) avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

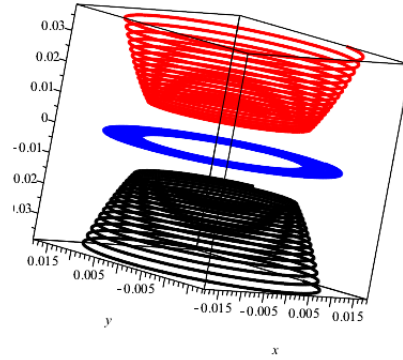


FIGURE 3.2 – Les 3 cycles limites du système (3.3.5) avec $\varepsilon = 0.2$.

Preuve de l'affirmation (b) du Théorème 3.2.1. Nous utilisons la théorie de moyennisation du troisième ordre pour prouver l'affirmation (b) du Théorème 3.2.1. Nous devons vérifier que les secondes fonctions moyennes $(f_{21}(\rho, \eta), f_{22}(\rho, \eta))$ sont identiquement nulles. Nous prenons donc

$$a_2 = 0, c_2 = 0, a_{05} = -b_{08}, a_{03} = -b_{01} - 3a_{00} - 3b_{06}, c_{09} = 0, c_{02} = -c_{07}.$$

Considérant ces conditions pour appliquer la théorie de moyennisation du troisième ordre. Alors, nous avons les fonctions moyennées $f_3 = (f_{31}(\rho, \eta), f_{32}(\rho, \eta))$, sont donnés par

$$\begin{aligned} f_{31}(\rho, \eta) &= \frac{\rho}{8b^2} (8ba_3 - 8b_1a_2 + (3ba_{10} + ba_{13} + bb_{11} + 3bb_{16} - 3b_1a_{00} - b_1a_{03} - b_1b_{01} - 3b_1b_{06})\rho^2 \\ &\quad + 4(ba_{15} + bb_{18} - b_1a_{05} - b_1b_{08})\eta^2), \\ f_{32}(\rho, \eta) &= \frac{\eta}{2b^2} (2bc_3 - 2b_1c_2 + (bc_{12} + bc_{17} - b_1c_{02} - b_1c_{07})\rho^2 + 2(bc_{19} - b_1c_{09})\eta^2). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Nous résolvons le système $f_{31}(\rho, \eta) = 0, f_{32}(\rho, \eta) = 0$ concernant les variables (ρ, η) , et nous trouvons les trois solutions suivantes

$$\begin{aligned} (\rho_4, \eta_4) &= \left(2\sqrt{-\frac{2a_3}{3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}}}, 0 \right), \\ (\rho_{5,6}, \eta_{5,6}) &= \left(\sqrt{-\frac{8a_3c_{19} - 4c_3(a_{15} + b_{18})}{c_{19}(3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}) - 2(a_{15} + b_{18})(c_{12} + c_{17})}}, \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{-\frac{c_3(3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}) - 4a_3(c_{12} + c_{17})}{c_{19}(3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}) - 2(a_{15} + b_{18})(c_{12} + c_{17})}} \right). \end{aligned}$$

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

Ces solutions sont réelles avec $\rho > 0$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

$$(j) \quad a_3(3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}) < 0,$$

$$(jj) \quad (8a_3 c_{19} - 4c_3(a_{15} + b_{18}))(c_{19}(3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}) - 2(a_{15} + b_{18})(c_{12} + c_{17})) < 0,$$

$$(jjj) \quad (c_3(3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}) - 4a_3(c_{12} + c_{17}))(c_{19}(3a_{10} + a_{13} + b_{11} + 3b_{16}) - 2(a_{15} + b_{18})(c_{12} + c_{17})) < 0.$$

Nous calculons le déterminant de la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(f_{31}, f_{32})}{\partial(\rho, \eta)},$$

aux trois solutions précédentes, et nous obtenons que le déterminant pour la première solution est

$$\frac{2a_2(4a_2(c_{02} + c_{07}) - c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))}{(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06})b^2},$$

tandis que pour la deuxième et la troisième, il est

$$\frac{2(4a_2(c_{02} + c_{07}) - c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))(2a_2 c_{09} - c_2(a_{05} + b_{08}))}{b^2(c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07}))}.$$

D'après les conditions (j), (jj) et (jjj), les deux déterminants sont non nuls. Par conséquent, d'après le Théorème 2.2.1, nous obtenons que le système différentiel (3.3.2) a trois cycles limites $(\rho_k(\theta, \varepsilon), \eta_k(\theta, \varepsilon))$ tels que $(\rho_k(0, \varepsilon), \eta_k(0, \varepsilon))$ tend vers les solutions (ρ_k, η_k) pour $k = 4, 5, 6$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Revenant maintenant du système différentiel (3.3.2) au système différentiel $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$, et prenant en compte que $\dot{\theta} = b + O(\varepsilon)$, nous obtenons les trois cycles limites $(X_k(t, \varepsilon), Y_k(t, \varepsilon), Z_k(t, \varepsilon))$ pour $k = 4, 5, 6$ satisfaisant

$$(X_k(0, \varepsilon), Y_k(0, \varepsilon), Z_k(0, \varepsilon)) \rightarrow (\rho_k, 0, \eta_k) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Finalement, revenant du système différentiel $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ au système différentiel (3.2.1), nous obtenons trois cycles limites $(x_k(t, \varepsilon), y_k(t, \varepsilon), z_k(t, \varepsilon))$ pour $k = 4, 5, 6$ satisfaisant que

$$(x_k(0, \varepsilon), y_k(0, \varepsilon), z_k(0, \varepsilon)) \rightarrow (\rho_k, 0, \eta_k) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ainsi, ces trois derniers cycles limites bifurquent de l'origine du système différentiel (3.2.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire, ils bifurquent du point d'équilibre zéro-Hopf localisé à l'origine du

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

système (3.2.1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela complète la preuve de l'affirmation (b) du Théorème 3.2.1.

■

Exemple 3.3.2 *On considère le système différentiel suivant*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2\varepsilon^3 x + \varepsilon(-x^3 + x y^2 + 2x z^2) + x^3 - 10x y^2 - 4x z^2 - y, \\ \dot{y} &= -2\varepsilon^3 y + \varepsilon(2x^2 y + \frac{1}{3} y^3) + x + x^2 y + 2y^3 + 4y z^2, \\ \dot{z} &= \varepsilon^3 z + \varepsilon(-2x^2 z + 2z^3) - x^2 z + y^2 z, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

En changeant les variables $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, le système (3.3.9) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y + \varepsilon^3(-X^3 + X Y^2 + 2X Z^2 - 2X) + \varepsilon^2(X^3 - 10X Y^2 - 4X Z^2), \\ \dot{Y} &= X + \varepsilon^3\left(-2Y + 2X^2 Y + \frac{1}{3} Y^3\right) + \varepsilon^2(X^2 Y + 2Y^3 + 4Y Z^2), \\ \dot{Z} &= \varepsilon^3(-2X^2 Z + 2Z^3 + Z) + \varepsilon^2(-X^2 Z + Y^2 Z). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Nous écrivons le système (3.3.10) en coordonnées cylindriques $(X, Y, Z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta)$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\varepsilon^3 \rho}{3} ((-11 \cos^4 \theta + 7 \cos^2 \theta + 1) \rho^2 + 6 \eta^2 \cos^2 \theta - 6) - \frac{\varepsilon^2 \rho}{3} (-3 \rho^2 (12 \cos^4 \theta - 13 \cos^2 \theta + 2) \\ &\quad + (24 \cos^2 \theta - 12) \eta^2), \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon^3 \cos \theta \sin \theta}{3} (11 \rho^2 \cos^2 \theta - 6 \eta^2 - 2 \rho^2) - 4 \varepsilon^2 \cos \theta \sin \theta (3 \rho^2 \cos^2 \theta - 4 \eta^2 - 3 \rho^2) + 1, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon^3 \eta (-2 \rho^2 \cos^2 \theta + 2 \eta^2 + 1) - \varepsilon^2 \rho^2 \eta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

En utilisant θ comme nouvelle variable indépendante, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} &= -\frac{\varepsilon^2 \rho}{3} (-3 \rho^2 (12 \cos^4 \theta - 13 \cos^2 \theta + 2) + (24 \cos^2 \theta - 12) \eta^2) \frac{\varepsilon^3 \rho}{3} + ((-11 \cos^4 \theta + 7 \cos^2 \theta + 1) \rho^2 \\ &\quad + 6 \eta^2 \cos^2 \theta - 6) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= -\varepsilon^2 \rho^2 \eta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \varepsilon^3 \eta (-2 \rho^2 \cos^2 \theta + 2 \eta^2 + 1) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Nous appliquons la théorie de moyennisation du troisième ordre et obtenons le système de moyenné donné par

$$\begin{aligned} f_{31}(\rho, \eta) &= \frac{\rho}{8} (8 \eta^2 + \rho^2 - 16), \\ f_{32}(\rho, \eta) &= \eta (2 \eta^2 - \rho^2 + 1). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

En résolvant le système $f_{41} = 0, f_{42} = 0$, nous obtenons les trois solutions

$$(\rho_1, \eta_1) = (4, 0), \quad (\rho_2, \eta_2) = \left(2, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \quad (\rho_3, \eta_3) = \left(2, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Nous calculons la matrice jacobienne du système (3.3.11) et leurs déterminants à ces trois solutions, et nous obtenons les déterminants $-60, 30$ et 30 respectivement. Ainsi, selon le théorème 2.3.1, le système différentiel (3.3.9) a trois cycles limites qui bifurquent de l'origine quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous traçons ces 3 cycles limites en utilisant Maple, voir les Figures 3.3 et 3.4.

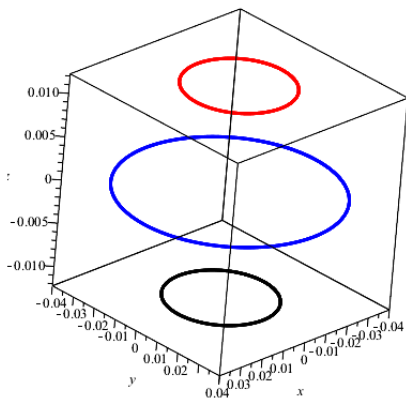


FIGURE 3.3 – Les 3 cycles limites du système (3.3.9) avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

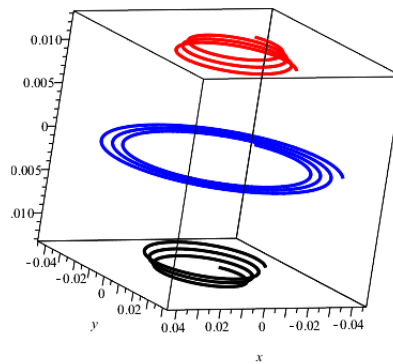


FIGURE 3.4 – Les 3 cycles limites du système (3.3.9) avec $\varepsilon = 0.2$.

Preuve de l'affirmation (c) du Théorème 3.2.1. Nous utiliserons la théorie de moyennisation du quatrième ordre pour prouver le principal résultat de ce chapitre. Selon le théorème 2.2.1, nous devons annuler le système moyenné du troisième ordre $(f_{31}(\rho, \eta), f_{32}(\rho, \eta))$. Nous prenons donc

$$a_3 = 0, \quad c_3 = 0, \quad a_{15} = -b_{18}, \quad a_{13} = -b_{11} - 3a_{10} - 3b_{16}, \quad c_{19} = 0, \quad c_{12} = -c_{17}.$$

En utilisant la théorie de moyennisation du quatrième ordre, nous avons que les fonctions moyennées sont

$$\begin{aligned} f_{41}(\rho, \eta) &= \frac{\rho}{48b^2} (A_0 + A_1\eta^4 + A_2\eta^2 + A_3\eta^2\rho^2 + A_4\rho^2 + A_5\rho^4), \\ f_{42}(\rho, \eta) &= \frac{\eta}{8b^2} (B_0 + B_1\eta^4 + B_2\eta^2 + B_3\eta^2\rho^2 + B_4\rho^2 + B_5\rho^4), \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

où

$$A_0 = 48a_4b,$$

$$A_1 = 24a_{09}(a_{04} + 2b_{07} - 3c_{08}) - 24b_{09}(b_{04} + 2a_{02} - 3c_{05}),$$

$$A_2 = 24b(a_{25} + b_{28}),$$

$$\begin{aligned} A_3 = & -18a_{00}(a_{08} + b_{05}) - 12b_{08}a_{01} + 6a_{02}(a_{04} - 2b_{02} - 3c_{08}) + 6a_{04}(a_{07} + c_{05}) + 6a_{07}(2b_{07} - c_{08}) \\ & - 6a_{08}(b_{01} + 2c_{07}) - 18a_{09}(c_{01} + 3c_{06}) - 6b_{01}b_{05} - 6b_{02}(b_{04} - c_{05}) - 12b_{08}b_{03} - 6b_{04}(b_{07} + c_{08}) \\ & - 12b_{05}c_{07} + 18b_{07}c_{05} + 12c_{04}b_{08} + 18b_{09}(c_{03} + 3c_{00}), \end{aligned}$$

$$A_4 = 6b(3a_{20} + a_{23} + b_{21} + 3b_{26}),$$

$$\begin{aligned} A_5 = & -3a_{00}(a_{01} + 3a_{06} + 3b_{00} + b_{03}) - 3a_{01}(b_{01} + 2b_{06}) - a_{02}(5c_{01} + 13c_{06}) + a_{04}(c_{03} + 5c_{00}) \\ & - 3a_{06}b_{01} - a_{07}(c_{01} + 5c_{06}) - 3b_{01}(b_{00} + b_{03}) + b_{02}(c_{03} + 5c_{00}) - 6b_{03}b_{06} - b_{04}(c_{01} + 5c_{06}) \\ & + b_{07}(5c_{03} + 13c_{00}), \end{aligned}$$

$$B_0 = 8c_4b,$$

$$B_1 = 8(a_{09}c_{08} - b_{09}c_{05}),$$

$$B_2 = 8c_{29}b,$$

$$\begin{aligned} B_3 = & 4a_{02}c_{08} + 4a_{07}c_{08} + 4a_{08}c_{07} + 4a_{09}(c_{01} + 3c_{06}) - 4b_{02}c_{05} + 4b_{05}c_{07} - 4b_{07}c_{05} - 4b_{08}c_{04} \\ & - 4b_{09}(3c_{00} - c_{03}) \end{aligned}$$

$$B_4 = 4b(c_{22} + c_{27}),$$

$$\begin{aligned} B_5 = & a_{01}c_{07} + a_{02}(3c_{01} + 7c_{06}) - 2a_{04}c_{00} + 3a_{06}c_{07} + a_{07}(c_{01} + 5c_{06}) + 3b_{00}c_{07} - b_{01}c_{04}, \\ & - b_{02}(5c_{00} + c_{03}) + b_{03}c_{07} + 2b_{04}c_{06} - 3b_{06}c_{04} - 7b_{07}(c_{00} - 3c_{03}) + 6c_{00}c_{08} - 2c_{01}c_{05} \\ & + 2c_{03}c_{08} - 6c_{05}c_{06}, \end{aligned}$$

Nous résolvons la première équation f_{41} par rapport à ρ en considérant $\rho > 0$, et nous obtenons les quatre solutions suivantes

$$\rho_{1,2} = \pm \frac{1}{2A_5} \sqrt{-2A_5 \left(+A_3\eta^2 + A_4 - \sqrt{(A_3^2 - 4A_1A_5)\eta^4 + (2A_3A_4 - 4A_2A_5)\eta^2 + A_4^2 - 4A_0A_5} \right)},$$

$$\rho_{3,4} = \pm \frac{1}{2A_5} \sqrt{-2A_5 \left(+A_3\eta^2 + A_4 + \sqrt{(A_3^2 - 4A_1A_5)\eta^4 + (2A_3A_4 - 4A_2A_5)\eta^2 + A_4^2 - 4A_0A_5} \right)}.$$

Nous conservons ρ_1 et ρ_3 car $\rho > 0$ doit être positif. Par conséquent, la deuxième équation devient

$$\begin{aligned} f_{42}(\rho_1, \eta) &= -\frac{\eta}{16A_5^2 b^2 K} (K_0\eta^8 + K_1\eta^6 + K_2\eta^4 + K_3\eta^2 + K_4), \\ f_{42}(\rho_3, \eta) &= \frac{\eta}{16A_5^2 b^2 K'} (K_0\eta^8 + K_1\eta^6 + K_2\eta^4 + K_3\eta^2 + K_4), \end{aligned}$$

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

où

$$K = (-\eta^2 A_3 B_5 + \eta^2 A_5 B_3 + A_5 B_4 - B_5 A_4) \sqrt{(-4A_1 A_5 + A_3^2) \eta^4 + (-4A_2 A_5 + 2A_3 A_4) \eta^2 - 4A_0 A_5 + A_4^2} \\ + (2A_1 A_5 B_5 - A_3^2 B_5 + A_3 A_5 B_3 - 2A_5^2 B_1) \eta^4 + (2A_2 A_5 B_5 - 2A_3 A_4 B_5 + A_3 A_5 B_4 + A_4 A_5 B_3 - 2A_5^2 B_2) \eta^2 \\ + 2A_0 A_5 B_5 - A_4^2 B_5 + A_4 A_5 B_4 - 2B_0 A_5^2,$$

$$K' = \sqrt{(-4A_1 A_5 + A_3^2) \eta^4 + (-4A_2 A_5 + 2A_3 A_4) \eta^2 - 4A_0 A_5 + A_4^2} (\eta^2 A_5 B_3 - \eta^2 A_3 B_5 + A_5 B_4 - A_4 B_5) \\ + (-2A_1 A_5 B_5 + A_3^2 B_5 - A_3 A_5 B_3 + 2A_5^2 B_1) \eta^4 + (-2A_2 A_5 B_5 + 2A_3 A_4 B_5 - A_3 A_5 B_4 - A_4 A_5 B_3 + 2A_5^2 B_2) \eta^2 \\ - 2A_0 A_5 B_5 + A_4^2 B_5 - A_4 A_5 B_4 + 2B_0 A_5^2,$$

$$K_0 = 4A_5^2 (A_1^2 B_5^2 - A_1 A_3 B_3 B_5 - 2A_1 A_5 B_1 B_5 + A_1 A_5 B_3^2 + A_3^2 B_1 B_5 - A_3 A_5 B_1 B_3 + A_5^2 B_1^2),$$

$$K_1 = 4A_5^2 (2A_1 A_2 B_5^2 - A_1 A_3 B_4 B_5 - A_1 A_4 B_3 B_5 - 2A_1 A_5 B_2 B_5 + 2A_1 A_5 B_3 B_4 - A_2 A_3 B_3 B_5 \\ - 2A_2 A_5 B_1 B_5 + A_2 A_5 B_3^2 + A_3^2 B_2 B_5 + 2A_3 A_4 B_1 B_5 - A_3 A_5 B_1 B_4 - A_3 A_5 B_2 B_3 - A_4 A_5 B_1 B_3 \\ + 2A_5^2 B_1 B_2),$$

$$K_2 = 4A_5^2 (2A_0 A_1 B_5^2 - A_0 A_3 B_3 B_5 - 2A_0 A_5 B_1 B_5 + A_0 A_5 B_3^2 - A_1 A_4 B_4 B_5 - 2A_1 A_5 B_0 B_5 + A_2^2 B_5^2 \\ + A_1 A_5 B_4^2 - A_2 A_3 B_4 B_5 - A_2 A_4 B_3 B_5 - 2A_2 A_5 B_2 B_5 + 2A_2 A_5 B_3 B_4 + A_3^2 B_0 B_5 \\ + 2A_3 A_4 B_2 B_5 - A_3 A_5 B_0 B_3 - A_3 A_5 B_2 B_4 + A_4^2 B_1 B_5 - A_4 A_5 B_1 B_4 - A_4 A_5 B_2 B_3 + 2A_5^2 B_0 B_1 + A_5^2 B_2^2),$$

$$K_3 = 4A_5^2 (2A_0 A_2 B_5^2 - A_0 A_3 B_4 B_5 - A_0 A_4 B_3 B_5 - 2A_0 A_5 B_2 B_5 + 2A_0 A_5 B_3 B_4 - A_2 A_4 B_4 B_5 - 2A_2 A_5 B_0 B_5 \\ + A_2 A_5 B_4^2 + 2A_3 A_4 B_0 B_5 - A_3 A_5 B_0 B_4 + A_4^2 B_2 B_5 - A_4 A_5 B_0 B_3 - A_4 A_5 B_2 B_4 + 2A_5^2 B_0 B_2),$$

$$K_4 = 4A_5^2 (A_0^2 B_5^2 - A_0 A_4 B_4 B_5 - 2A_0 A_5 B_0 B_5 + A_0 A_5 B_4^2 + A_4^2 B_0 B_5 - A_4 A_5 B_0 B_4 + A_5^2 B_0^2).$$

Ainsi, il est facile de vérifier que le système (3.3.12) peut fournir au plus dix solutions réelles avec $\rho > 0$.

Soit (ρ^*, η^*) une solution du système (3.3.12). Pour avoir un cycle limite selon la théorie de la moyenne du quatrième ordre, nous devons avoir

$$D(\rho^*, \eta^*) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{41}}{\rho} & \frac{\partial f_{41}}{\eta} \\ \frac{\partial f_{42}}{\rho} & \frac{\partial f_{42}}{\eta} \end{pmatrix} \Big|_{(\rho, \eta) = (\rho^*, \eta^*)} \neq 0.$$

Ensuite, nous concluons que, selon la théorie de la moyenne du quatrième ordre, le système (3.3.2) a au plus dix cycles limites. Par conséquent, le système (3.2.1) a au plus 10 cycles limites se bifurquant de l'origine en raison de la mise à l'échelle. Cela achève la preuve de l'énoncé (c) du Théorème 3.2.1. ■

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

Exemple 3.3.3 *Considérons le système différentiel suivant*

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \varepsilon^4 \frac{x}{6} + \varepsilon^2(x^3 - x y^2) + x y^2 + \frac{19}{24} x y z - x z^2 + x^2 y - y - y z^2 + \frac{5}{6} y^3 + z^3, \\
 \dot{y} &= \varepsilon^4 \frac{y}{6} + \varepsilon^2(-y^3 - \frac{5}{12} y z^2) + x - x^3 + x y^2 - x z^2 + 2x^2 y - y^3 + y z^2, \\
 \dot{z} &= \varepsilon^4 \frac{z}{4} + \varepsilon^2(x^2 z - y^2 z - \frac{1}{2} z^3) + x y z - x^2 y - x^2 z + y^3 + \frac{1}{4} y z^2 + y^2 z,
 \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

En changeant les variables $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, le système (3.3.13) devient

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -Y + \varepsilon^4(\frac{1}{6}X + X^3 - X Y^2) + \varepsilon^2(X^2 Y + X Y^2 + \frac{19}{25} X Y Z - X Z^2 + \frac{5}{6} Y^3 - Y Z^2 + Z^3), \\
 \dot{y} &= X + \varepsilon^4(\frac{1}{6}Y - Y^3 - \frac{5}{12} Y Z^2) + \varepsilon^2(-X^3 + 2X^2 Y + X Y^2 - X Z^2 - Y^3 + Y Z^2), \\
 \dot{z} &= \varepsilon^4(\frac{1}{4}Z + X^2 Z - Y^2 Z - \frac{1}{2} Z^3) + \varepsilon^2(-X^2 Y - X^2 Z + X Y Z + Y^3 + Y^2 Z + \frac{1}{4} Y Z^2).
 \end{aligned}$$

Nous écrivons le système (3.3.3) en coordonnées cylindriques $(X, Y, Z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= \frac{\varepsilon^4 \rho}{12} (12\rho^2 \cos^4 \theta + 5\eta^2 \cos^2 \theta + 12\rho^2 \cos^2 \theta - 5\eta^2 - 12\rho^2 + 2) - \frac{\varepsilon^2}{24} (96\rho^3 \cos^4 \theta \\
 &\quad + 44\rho^3 \cos^3 \theta \sin \theta - 120\rho^3 \cos^2 \theta + 48\rho\eta^2 \cos^2 \theta - 19\rho^2 \eta \cos^2 \theta \sin \theta + 48\rho\eta^2 \cos \theta \sin \theta \\
 &\quad - 44\rho^2 \cos \theta \sin \theta - 24\eta^3 \cos \theta + 24\rho^3 - 24\rho\eta^2), \\
 \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon^4}{12} (-12\rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta - 5\eta^2 \cos \theta \sin \theta) - \frac{\varepsilon^2}{24\rho} (44\rho^3 \cos^4 \theta - 19\rho^2 \eta \cos^3 \theta - 40\rho^3 \cos^2 \theta \\
 &\quad + 48\rho\eta^2 \cos^2 \theta + 19\rho^2 \eta \cos \theta + 48\rho^3 \cos \theta \sin \theta - 48\rho\eta^2 \cos \theta \sin \theta + 24\eta^3 \sin \theta + 20\rho^3 \\
 &\quad - 24\rho\eta^2 - 96\rho^3 \cos^3 \theta \sin \theta) + 1, \\
 \dot{\eta} &= \frac{\varepsilon^4 \eta}{4} (4\rho^2 \cos^2 \theta - 4\rho^2 \sin^2 \theta - 2\eta^2 + 1) - \frac{\varepsilon^2}{4} (4\rho\eta \cos^2 \theta + 4\rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta - 4\rho\eta \cos \theta \sin \theta \\
 &\quad - 4\rho^2 \sin^3 \theta - 4\rho\eta \sin^2 \theta - \eta^2 \sin \theta).
 \end{aligned}$$

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

En considérant θ comme la nouvelle variable indépendante, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} = & \frac{\varepsilon^4}{576\rho} \left(7280\rho^6 \cos^7 \theta \sin \theta + 3648\rho^5 \eta \cos^7 \theta - 12432\rho^6 \cos^5 \theta \sin \theta - 13440\rho^4 \eta^2 \cos^6 \theta \right. \\ & + 3936\rho^3 \eta^3 \cos^5 \theta - 6840\rho^5 \eta \cos^5 \theta + 5424\rho^6 \cos^3 \theta \sin \theta - 5520\rho^2 \eta^4 \cos^4 \theta + 22176\rho^4 \eta^2 \cos^4 \theta \\ & + 2304\rho \eta^5 \cos^3 \theta - 5352\rho^3 \eta^3 \cos^3 \theta + 3648\rho^5 \eta \cos^3 \theta + 576\eta^6 \cos \theta \sin \theta - 272\rho^6 \cos \theta \sin \theta \\ & + 5520\rho^2 \eta^4 \cos^2 \theta - 10368\rho^4 \eta^2 \cos^2 \theta + 576\rho \eta^5 \sin \theta - 576\rho^3 \eta^3 \sin \theta - 1728\rho \eta^5 \cos \theta \\ & + 1992\rho^3 \eta^3 \cos \theta - 456\rho^5 \eta \cos \theta + 240\rho^2 \eta^2 \cos^2 \theta - 240\rho^2 \eta^2 - 576\rho^2 \eta^4 + 1056\rho^4 \eta^2 \\ & - 8448\rho^6 \cos^8 + 19680\rho^6 \cos^6 \theta - 16224\rho^6 \cos^4 \theta + 576\rho^4 \cos^4 \theta + 5472\rho^6 \cos^2 \theta \\ & + 576\rho^4 \cos^2 \theta + 1672\rho^5 \eta \cos^6 \theta \sin \theta + 4631\rho^4 \eta^2 \cos^5 \theta \sin \theta - 2784\rho^3 \eta^3 \cos^4 \theta \sin \theta \\ & - 2432\rho^5 \eta \cos^4 \theta \sin \theta - 4919\rho^4 \eta^3 \cos^3 \theta \sin \theta - 2304\rho \eta^5 \cos^2 \theta \sin \theta + 2664\rho^3 \eta^3 \cos^2 \theta \sin \theta \\ & + 1216\rho^5 \eta \cos^2 \theta \sin \theta + 288\rho^4 \eta^2 \cos \theta \sin \theta - 480\rho^6 - 576\rho^4 + 96\rho^2) - \frac{\varepsilon^2}{24} (44\rho^3 \cos^3 \theta \sin \theta \\ & + 96\rho^3 \cos^4 \theta - 19\rho^2 \eta \cos^2 \theta \sin \theta + 48\rho \eta^2 \cos \theta \sin \theta - 44\rho^3 \cos \theta \sin \theta + 48\rho \eta^2 \cos^2 \theta \\ & \left. - 120\rho^3 \cos^2 \theta - 24\eta^3 \cos \theta - 24\rho \eta^2 + 24\rho^3) + O(\varepsilon^5) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\theta} = & \frac{\varepsilon^4}{96} \left(192\rho^2 \eta \cos^2 \theta - 96\rho^2 \eta - 68\rho^3 \eta^2 \cos \theta + 48\rho \eta^4 \cos \theta + 24\eta + 192\rho^2 \cos \theta + 32\rho^4 \eta \cos^6 \theta \right. \\ & - 80\rho^4 \eta \cos^4 \theta + 496\rho^5 \cos^4 \theta \sin \theta - 352\rho^5 \cos^6 \theta \sin \theta - 136\rho^3 \eta^2 \cos^5 \theta - 320\rho^5 \cos^2 \theta \sin \theta \\ & + 204\rho^3 \eta^2 \cos^3 \theta - 96\rho^2 \eta^3 \cos^2 \theta - 128\rho^4 \eta \cos^2 \theta + 72\rho \eta^4 \sin \theta - 76\rho^3 \eta^2 \sin \theta + 80\rho^5 \sin \theta \\ & + 80\rho^4 \eta - 24\eta^5 - 48\eta^3 + 144\rho \eta^4 \cos^2 \theta \sin \theta + 420\rho^3 \eta^2 \cos^2 \theta \sin \theta - 269\rho^2 \eta^3 \cos \theta \sin \theta \\ & + 348\rho^4 \eta \cos \theta \sin \theta + 1096\rho^4 \eta \cos^5 \theta \sin \theta - 416\rho^3 \eta^2 \cos^4 \theta \sin \theta + 557\rho^2 \eta^3 \cos^3 \theta \sin \theta \\ & - 156\rho^4 \eta \cos^3 \theta \sin \theta - 48\rho \eta^4 \cos^3 \theta - 768\rho^5 \cos^7 \theta - 24\eta^5 \cos^2 \theta - 960\rho^5 \cos^3 \theta \\ & \left. + 1536\rho^5 \cos^5 \theta) - \frac{\varepsilon^2}{4} (4\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta - 4\rho^3 \sin^3 \theta + 4\rho^2 \eta \cos^2 \theta - 4\rho^2 \eta \cos \theta \sin \theta - 4\rho^2 \eta \sin^2 \theta \right. \\ & \left. - \rho \eta^2 \sin \theta) + O(\varepsilon^5). \right) \end{aligned}$$

Nous appliquons la théorie de la moyenne du quatrième ordre et obtenons le système moyenné

$f_4 = (f_{41}(\rho, \eta), f_{42}(\rho, \eta))$ donné par

$$\begin{aligned} f_{41}(\rho, \eta) &= \frac{\rho}{48} (\eta^4 + \rho^4 - 10\eta^2 - 6\rho^2 + 8), \\ f_{42}(\rho, \eta) &= \frac{\eta}{16} (4\eta^4 + 5\rho^4 - 8\eta^2 - 8\eta^2 \rho^2 + 4). \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

En résolvant le système (3.3.14), nous obtenons les dix solutions avec $\rho > 0$

$$\begin{aligned}(\rho_1, \eta_1) &= (2, 0), & (\rho_2, \eta_2) &= (1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}), & (\rho_3, \eta_3) &= (1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), \\(\rho_4, \eta_4) &= (\sqrt{2}, 0), & (\rho_5, \eta_5) &= (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1), & (\rho_6, \eta_6) &= (\sqrt{3} - 1, 1 - \sqrt{3}), \\(\rho_7, \eta_7) &= \left(\frac{\sqrt{13260 + 910\sqrt{211}}}{65}, \frac{\sqrt{20670 + 1170\sqrt{211}}}{65} \right), \\(\rho_8, \eta_8) &= \left(\frac{\sqrt{13260 + 910\sqrt{211}}}{65}, -\frac{\sqrt{20670 + 1170\sqrt{211}}}{65} \right), \\(\rho_9, \eta_9) &= \left(\frac{\sqrt{13260 - 910\sqrt{211}}}{65}, \frac{\sqrt{20670 - 1170\sqrt{211}}}{65} \right), \\(\rho_{10}, \eta_{10}) &= \left(\frac{\sqrt{13260 - 910\sqrt{211}}}{65}, -\frac{\sqrt{20670 - 1170\sqrt{211}}}{65} \right),\end{aligned}$$

Maintenant, nous devons vérifier que le déterminant de la matrice jacobienne du système (3.3.14) est différent de zéro à ces racines avec

$$D(\rho, \eta) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{48}\eta^4 + \frac{1}{48}\rho^4 - \frac{5}{24}\eta^2 - \frac{3}{8}\rho^2 + \frac{1}{6} & \frac{1}{12}\rho\eta(\eta^2 - 5) \\ -\frac{1}{4}\rho\eta(4\eta^2 - 5\rho^2) & \frac{5}{4}\eta^4 - \frac{3}{2}\eta^2\rho^2 + \frac{5}{16}\rho^4 - \frac{3}{2}\eta^2\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Des calculs simples montrent que

$$\begin{aligned}D(\rho_1, \eta_1) &= \frac{7}{4}, & D(\rho_2, \eta_2) &= -\frac{73}{6}\sqrt{3} - 21, & D(\rho_3, \eta_3) &= -\frac{73}{6}\sqrt{3} - 21, & D(\rho_4, \eta_4) &= -\frac{1}{4}, \\D(\rho_5, \eta_5) &= \frac{73}{6}\sqrt{3} - 21, & D(\rho_6, \eta_6) &= \frac{73}{6}\sqrt{3} - 21, & D(\rho_7, \eta_7) &= \frac{12293493 + 846403\sqrt{211}}{549250}, \\D(\rho_8, \eta_8) &= \frac{12293493 + 846403\sqrt{211}}{549250}, & D(\rho_9, \eta_9) &= \frac{12293493 - 846403\sqrt{211}}{549250}, \\D(\rho_{10}, \eta_{10}) &= \frac{12293493 - 846403\sqrt{211}}{549250}.\end{aligned}$$

Donc, selon le Théorème 3.2.1, le système différentiel (3.3.13) a dix cycles limites qui bifurquent de l'origine.

Nous traçons ces dix cycles limites en utilisant Maple, voir les Figures 3.5, 3.6 et 3.7.

3.3. Preuve du Théorème 3.2.1

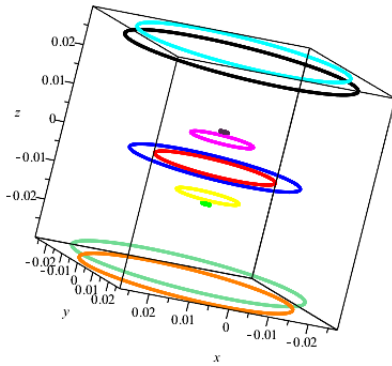


FIGURE 3.5 – Les 10 cycles limites du système (3.3.13) avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

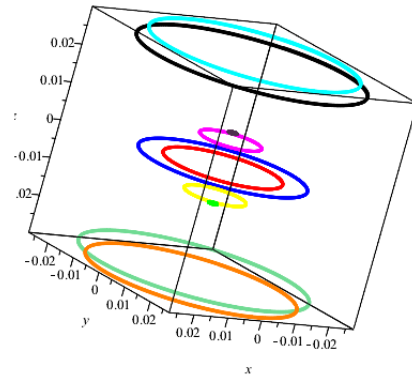


FIGURE 3.6 – Les 10 cycles limites du système (3.3.13) avec $\varepsilon = 0.2$.

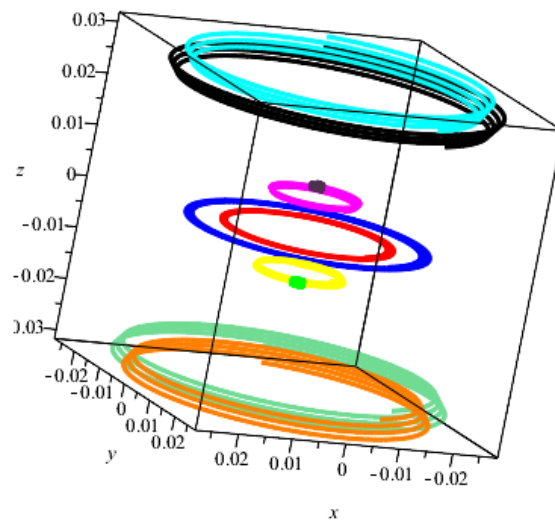


FIGURE 3.7 – Les 10 cycles limites du système (3.3.13) avec $\varepsilon = 0.4$.

4

Solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynomiaux en dimension 5

4.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre, nous fournissons des conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques pour le système différentiel polynomial de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_1(x, y, z, u, v) + h_1(t), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_2(x, y, z, u, v) + h_2(t), \\ \dot{z} = -u + \varepsilon P_3(x, y, z, u, v) + h_3(t), \\ \dot{u} = z + \varepsilon P_4(x, y, z, u, v) + h_4(t), \\ \dot{v} = \lambda v + \varepsilon P_5(x, y, z, u, v) + h_5(t), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 sont des polynômes en les variables x, y, z, u, v de degré n , $h_i(t)$ sont des fonctions 2π -périodiques avec $i = \overline{1, 5}$, λ est un nombre réel, et ε est un petit paramètre.

Beaucoup de travaux ont étudié les solutions périodiques de ce genre des systèmes dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 , voir [16, 26, 27, 28].

Notre résultat principal pour l'étude des solutions périodiques du système (4.1.1) est le suivant.

4.2 Résultats principaux

Théorème 4.2.1 *On considère le système différentiel (4.1.1) avec $\lambda = 0$. Nous définissons*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t)P_1(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \sin(t)P_2(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin(t)P_1(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \cos(t)P_2(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t)P_3(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \sin(t)P_4(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin(t)P_3(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \cos(t)P_4(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \\ \mathcal{F}_5(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_5(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) dt,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}a(t) &= \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s)) ds, \\ b(t) &= \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)) ds, \\ c(t) &= \cos(t)z_0 - \sin(t)u_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s)) ds, \\ d(t) &= \sin(t)z_0 + \cos(t)u_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_3(s) + \cos(t-s)h_4(s)) ds, \\ e(t) &= v_0 + \int_0^t h_5(s) ds.\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\cos(s)h_1(s) + \sin(s)h_2(s)) ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s)) ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (\cos(s)h_3(s) + \sin(s)h_4(s)) ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_3(s) + \cos(s)h_4(s)) ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} h_5(s) ds &= 0,\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

alors, pour chaque solution $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*, v_0^*)$ du système

$$\mathcal{F}_k(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0, \quad k = \overline{1, 5},$$

satisfaisant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5)}{\partial(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)}\Big|_{(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*, v_0^*)}\right) \neq 0,$$

4.2. Résultats principaux

le système différentiel (4.1.1) avec $\lambda = 0$ possède une solution périodique

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) \\ v(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

qui tend vers la solution périodique donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s)) ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)) ds \\ \cos(t)z_0^* - \sin(t)u_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s)) ds \\ \sin(t)z_0^* + \cos(t)u_0^* + \int_0^t (\sin(t-s)h_3(s) + \cos(t-s)h_4(s)) ds \\ v_0^* + \int_0^t h_5(s) ds \end{pmatrix},$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \\ \dot{z} &= -u + h_3(t), \\ \dot{u} &= z + h_4(t), \\ \dot{v} &= h_5(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Notons que cette solution est 2π -périodique.

Théorème 4.2.2 On considère le système différentiel (4.1.1) avec $\lambda \neq 0$. Nous définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0, u_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t)P_1(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \sin(t)P_2(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0, u_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin(t)P_1(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \cos(t)P_2(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0, u_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t)P_3(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \sin(t)P_4(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0, u_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin(t)P_3(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)) + \cos(t)P_4(a(t), b(t), c(t), d(t), e(t))) dt, \end{aligned}$$

4.2. Résultats principaux

où

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s)) ds, \\
 b(t) &= \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)) ds, \\
 c(t) &= \cos(t)z_0 - \sin(t)u_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s)) ds, \\
 d(t) &= \sin(t)z_0 + \cos(t)u_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_3(s) + \cos(t-s)h_4(s)) ds, \\
 e(t) &= \frac{e^{\lambda t}}{1 - e^{2\lambda\pi}} \int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)} h_5(s) ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} h_5(s) ds.
 \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} (\cos(s)h_1(s) + \sin(s)h_2(s)) ds &= 0, \\
 \int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s)) ds &= 0, \\
 \int_0^{2\pi} (\cos(s)h_3(s) + \sin(s)h_4(s)) ds &= 0, \\
 \int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_3(s) + \cos(s)h_4(s)) ds &= 0, \\
 v_0 &= \frac{1}{1 - e^{2\lambda\pi}} \int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)} h_5(s) ds,
 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

alors, pour chaque solution $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)$ du système

$$\mathcal{F}_k(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0, \quad k = \overline{1, 4},$$

satisfaisant

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, z_0, u_0)} \Big|_{(x_0, y_0, z_0, u_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)} \right) \neq 0,$$

le système différentiel (4.1.1) avec $\lambda \neq 0$ possède une solution périodique

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) \\ v(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

qui tend vers la solution périodique donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s)) ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)) ds \\ \cos(t)z_0^* - \sin(t)u_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s)) ds \\ \sin(t)z_0^* + \cos(t)u_0^* + \int_0^t (\sin(t-s)h_3(s) + \cos(t-s)h_4(s)) ds \\ \frac{e^{\lambda t}}{1 - e^{2\lambda\pi}} \int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)} h_5(s) ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} h_5(s) ds \end{pmatrix},$$

4.3. Preuves des résultats

du système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \\ \dot{z} &= -u + h_3(t), \\ \dot{u} &= z + h_4(t), \\ \dot{v} &= \lambda v + h_5(t),\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Notons que cette solution est 2π -périodique.

4.3 Preuves des résultats

Preuve du Théorème 4.2.1. Nous appliquerons le théorème 2.3.2 au système différentiel (4.1.1) avec $\lambda = 0$. On voit que le système (4.1.1) est écrit sous la forme du système standard (2.3.27) pour appliquer la théorie de moyennisation, en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}, F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ -u + h_3(t) \\ z + h_4(t) \\ h_5(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_1(x, y, z, u, v) \\ P_2(x, y, z, u, v) \\ P_3(x, y, z, u, v) \\ P_4(x, y, z, u, v) \\ P_5(x, y, z, u, v) \end{pmatrix}.$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système (4.1.1) avec $\lambda = 0$ et $\varepsilon = 0$, en utilisant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \\ h_3(s) \\ h_4(s) \\ h_5(s) \end{pmatrix} ds,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4.3. Preuves des résultats

nous obtenons

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s)) ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)) ds \\ \cos(t)z_0 - \sin(t)u_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s)) ds \\ \sin(t)z_0 + \cos(t)u_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_3(s) + \cos(t-s)h_4(s)) ds \\ v_0 + \int_0^t h_5(s) ds \end{pmatrix}.$$

Ces solutions sont 2π -périodiques si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ z(2\pi) \\ u(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \\ u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

Les conditions de périodicité de ces solutions sont définies dans l'énoncé (4.2.2) du théorème 4.2.1. Nous pouvons voir que l'ensemble des solutions périodiques a une dimension 5. Par conséquent, nous devrions rechercher des solutions périodiques du système (4.1.1) avec $\lambda = 0$ en calculant les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donné par (2.3.31). La matrice fondamentale $M(t)$ pour le système différentiel (4.1.1) avec $\lambda = 0$ et $\varepsilon = 0$, le long de toute solution périodique est

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{z})$, nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_5(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0, \end{cases} \quad (4.3.4)$$

4.3. Preuves des résultats

où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ et \mathcal{F}_5 sont définis dans le théorème 4.2.1. Les zéros $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*, v_0^*)$ du système (4.3.4) par rapport aux variables x_0, y_0, z_0, u_0 et v_0 fournissent des solutions périodiques du système (4.1.1) avec $\lambda = 0$ et ε suffisamment petit s'ils sont simples, i.e si

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5)}{\partial(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)} \Big|_{(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*, v_0^*)} \right) \neq 0.$$

Alors, pour chaque zéro simple du système (4.3.4), il existe une solution 2π -périodique

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) \\ v(t, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

du système différentiel (4.1.1) avec $\lambda = 0$, et ε suffisamment petit, qui tend vers la solution périodique donnée dans l'énoncé du théorème (4.2.1) du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \\ \dot{z} &= -u + h_3(t), \\ \dot{u} &= z + h_4(t), \\ \dot{v} &= h_5(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

La preuve du théorème 4.2.1 a été complétée. ■

Exemple 4.3.1 *Supposons que le système différentiel (4.1.1), où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \\ h_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

4.3. Preuves des résultats

et

$$\begin{pmatrix} P_1(x, y, z, u, v) \\ P_2(x, y, z, u, v) \\ P_3(x, y, z, u, v) \\ P_4(x, y, z, u, v) \\ P_5(x, y, z, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + x \\ y^2 + z^2 + y \\ z^2 + u^2 + v \\ u^2 + v^2 + u \\ x + y + z + u + v \end{pmatrix}.$$

En calculant les fonctions $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ qui sont donné dans le Théorème (4.2.1), nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= x_0 + \frac{1}{2}, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= y_0, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2}z_0 - 1, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2}u_0 - v_0 - 1, \\ \mathcal{F}_5(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) &= v_0 + 1. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_5 = 0$ a une solution unique $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*, v_0^*)$ donnée par $(-\frac{1}{2}, 0, 2, 0, -1)$, de plus

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5)}{\partial(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*, v_0^*)}\right) = \frac{1}{4}.$$

Alors, le système différentiel (4.1.1) admet une solution périodique

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) \\ v(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

qui tend vers la solution périodique

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} \cos(t), \\ y(t) &= \frac{1}{2} \sin(t), \\ z(t) &= 2 \cos(t), \\ u(t) &= \sin(t), \\ v(t) &= -\cos(t), \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

4.3. Preuves des résultats

du système différentiel

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y + \sin(t), \\
 \dot{y} &= x + \cos(t), \\
 \dot{z} &= -u - \sin(t), \\
 \dot{u} &= z - \cos(t), \\
 \dot{v} &= \sin(t),
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Théorème 4.2.2. Nous appliquerons le théorème 2.3.1 au système différentiel (4.1.1) avec $\lambda \neq 0$. Le système (4.1.1) est écrit comme le système (2.3.27), en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}, F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ -u + h_3(t) \\ z + h_4(t) \\ \lambda v + h_5(t) \end{pmatrix} \text{ and } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_1(x, y, z, u, v) \\ P_2(x, y, z, u, v) \\ P_3(x, y, z, u, v) \\ P_4(x, y, z, u, v) \\ P_5(x, y, z, u, v) \end{pmatrix}.$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système (4.1.1) avec $\lambda \neq 0$ et $\varepsilon = 0$, en utilisant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \\ h_3(s) \\ h_4(s) \\ h_5(s) \end{pmatrix} ds,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

4.3. Preuves des résultats

nous obtenons

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s)) ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)) ds \\ \cos(t)z_0 - \sin(t)u_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s)) ds \\ \sin(t)z_0 + \cos(t)u_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_3(s) + \cos(t-s)h_4(s)) ds \\ e^{\lambda t} v_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} h_5(s) ds \end{pmatrix}.$$

Ces solutions sont 2π -périodiques si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ z(2\pi) \\ u(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \\ u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

Les conditions de périodicité de ces solutions sont définies dans l'énoncé (4.2.3) du Théorème 4.2.2. Nous pouvons voir que l'ensemble des solutions périodiques a une dimension 4. Par conséquent, nous devrions rechercher des solutions périodiques du système (4.1.1) quand $\lambda \neq 0$ en calculant les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0, u_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donné par (2.3.30). La matrice fondamentale $M(t)$ pour le système différentiel (4.1.1) avec $\lambda \neq 0$ et $\varepsilon = 0$, le long de toute solution périodique est

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Il vérifie

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\lambda} \end{pmatrix}.$$

4.3. Preuves des résultats

En conséquence, toutes les hypothèses du théorème 2.3.1 sont satisfaites. En calculant la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{z})$, nous trouvons le système

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0, \end{cases} \quad (4.3.8)$$

où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, et \mathcal{F}_4 sont donnés dans l'énoncé du théorème 4.2.2. Les zéros $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)$ du système (4.3.8) par rapport aux variables x_0, y_0, z_0 et u_0 , fournissent des solutions périodiques du système (4.1.1) avec $\lambda \neq 0$, et ε suffisamment petit s'ils sont simples, i.e. si

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, z_0, u_0)} \Big|_{(x_0, y_0, z_0, u_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)} \right) \neq 0.$$

Alors, pour chaque zéro simple $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)$ du système (4.3.8), nous obtenons une solution 2π -périodique

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) \\ v(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

du système différentiel (4.1.1) avec $\lambda \neq 0$ et ε suffisamment petit, qui tend vers la solution périodique donnée dans l'énoncé du théorème 4.2.2 du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \\ \dot{z} &= -u + h_3(t), \\ \dot{u} &= z + h_4(t), \\ \dot{v} &= \lambda v + h_5(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

4.3. Preuves des résultats

Exemple 4.3.2 Supposons que le système différentiel (4.1.1), avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \\ h_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1(x, y, z, u, v) \\ P_2(x, y, z, u, v) \\ P_3(x, y, z, u, v) \\ P_4(x, y, z, u, v) \\ P_5(x, y, z, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + x u \\ x + y + y z \\ x + y + v + z \\ x^2 + y^2 \\ x y z \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons facilement vérifier les conditions (4.2.3)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 2 \cos(s) \sin(s) ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (2 \cos^2(s) - 1) ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} 0 ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} 0 ds &= 0, \\ v_0 &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

En calculant les fonctions $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$, nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0, u_0) &= x_0 - y_0 + \frac{1}{2}, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0, u_0) &= x_0 + y_0 + \frac{1}{2}, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0, u_0) &= \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}z_0 - \frac{1}{5}, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0, u_0) &= -\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}u_0 - \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = 0$ a une solution unique $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*, v_0^*)$ donnée par $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{9}{10}, \frac{7}{10})$, de plus

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, z_0, u_0)} \Big|_{(x_0, y_0, z_0, u_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)} \right) = \frac{1}{2}.$$

4.3. Preuves des résultats

Alors, le système différentiel (4.1.1) admet une solution périodique instable

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) \\ v(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

qui tend vers la solution périodique

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} \cos(t), \\ y(t) &= \frac{1}{2} \sin(t), \\ z(t) &= \frac{1}{10}(9 \cos(t) - 7 \sin(t)), \\ u(t) &= \frac{1}{10}(9 \sin(t) + 7 \cos(t)), \\ v(t) &= \frac{1}{5}(-2 \cos(t) + \sin(t)), \end{aligned}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sin(t), \\ \dot{y} &= x + \cos(t), \\ \dot{z} &= -u, \\ \dot{u} &= z, \\ \dot{v} &= 2v + \cos(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du cinquième ordre

5.1 Introduction et position du problème

Il existe diverses applications pour les systèmes différentiels du cinquième ordre, telles que la théorie du contrôle et certains problèmes de circuits électriques à trois boucles (voir Rosenvasser [32]). De plus, nombreux articles ont été publiés sur de tels systèmes et équations, notamment [3, 4, 30, 35, 36].

L'objectif de ce chapitre est d'investiguer les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du cinquième ordre de la forme

$$x^{(5)} + (p^2 + q^2)\ddot{x} + q^2 p^2 \dot{x} = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}), \quad (5.1.1)$$

où p, q sont des nombres rationnels différents de 0, $p \neq \pm q$, ε suffisamment petit, et F est $2k\pi$ -périodique en la variable t .

Notre résultat principal concernant les solutions périodiques de l'équation différentielle (5.1.1) est le suivant.

5.2. Résultats principaux

5.2 Résultats principaux

Théorème 5.2.1 *Supposons que p, q sont des nombres rationnels différents de 0, et $p \neq \pm q$, dans l'équation différentielle (5.1.1). Nous définissons*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \cos(pt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)) dt, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \sin(pt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)) dt, \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \cos(qt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)) dt, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \sin(qt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)) dt, \\ \mathcal{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} F(t, A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)) dt,\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

avec

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{X_0 \cos(pt) - Y_0 \sin(pt)}{p^2(p^2 - q^2)} + \frac{U_0 \sin(qt) - Z_0 \cos(qt)}{q^2(p^2 - q^2)} + \frac{V_0}{p^2 q^2}, \\ B(t) &= -\frac{Y_0 \cos(pt) + X_0 \sin(pt)}{p(p^2 - q^2)} + \frac{Z_0 \sin(qt) + U_0 \cos(qt)}{q(p^2 - q^2)}, \\ C(t) &= -\frac{X_0 \cos(pt) - Y_0 \sin(pt)}{p^2 - q^2} + \frac{U_0 \sin(qt) - Z_0 \cos(qt)}{p^2 - q^2}, \\ D(t) &= -\frac{Y_0 \cos(pt) + X_0 \sin(pt)}{p^2 - q^2} - \frac{U_0 \cos(qt) + Z_0 \sin(qt)}{p^2 - q^2}, \\ E(t) &= \frac{p^2(X_0 \cos(pt) - Y_0 \sin(pt))}{p^2 - q^2} + \frac{q^2(U_0 \sin(qt) + Z_0 \cos(qt))}{p^2 - q^2},\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

et $p = \frac{p_1}{p_2}$, $q = \frac{q_1}{q_2}$, où p_1, p_2, q_1, q_2 sont des nombres entiers différents de 0, et k est le plus petit commun multiple de p_2 et q_2 .

Si F est $2k\pi$ -périodique, alors pour chaque zéro simple du système $\mathcal{F}_k = 0$, avec $k = \overline{1, 5}$, satisfaisant

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)} \Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)} \right) \neq 0,\tag{5.2.4}$$

il existe une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation (5.1.1) tendant vers la solution périodique donnée par

$$x(t) = \frac{X_0^* \cos(pt) - Y_0^* \sin(pt)}{p^2(p^2 - q^2)} + \frac{U_0^* \sin(qt) - Z_0^* \cos(qt)}{q^2(p^2 - q^2)} + \frac{V_0^*}{p^2 q^2},\tag{5.2.5}$$

de l'équation

$$x^{(5)} + (p^2 + q^2)\ddot{x} + p^2 q^2 \dot{x} = 0,$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Notez que cette solution est $2k\pi$ -périodique.

Corollaire 5.2.1 *Supposons que $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = (ax^2 + bx + c)(\cos(t) + 3)$, alors l'équation différentielle (5.1.1), avec $p = \frac{3}{4}$, $q = 1$, $a \neq 0$, et $b^2 > 4ac$, a quatre solutions périodiques*

5.3. Preuves des résultats

$x_k(t, \varepsilon)$, avec $k = \overline{1,4}$ qui tendent vers les solutions périodiques $x_k(t)$ données par (5.2.5) pour $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)$ égal à

$$\begin{aligned} & (0, 0, 0, 0, \frac{-9b + \sqrt{A_1}}{32a}), \\ & (0, 0, 0, 0, \frac{-9b - \sqrt{A_1}}{32a}), \\ & (0, 0, \frac{\sqrt{A_2}}{8a}, 0, \frac{-1071b - 27\sqrt{A_2}}{3808a}), \\ & (0, 0, -\frac{\sqrt{A_2}}{8a}, 0, \frac{-1071b + 27\sqrt{A_2}}{3808a}), \end{aligned}$$

avec

$$A_1 = -4ac + b^2, \quad A_2 = \frac{-56644ac + 14161b^2}{2253},$$

de l'équation

$$x^{(5)} + \frac{25}{16}\ddot{x} + \frac{9}{16}\dot{x} = 0, \quad (5.2.6)$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Notez que ces solutions sont périodiques de période 8π .

Corollaire 5.2.2 Supposons que $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = x - 1 + \dot{x} \sin(t)$, alors l'équation différentiel (5.1.1) avec $p = \frac{1}{3}$, $q = 2$, a deux solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, avec $k = 1, 2$ qui tendent vers les solutions périodiques $x_k(t)$ données par (5.2.5) pour $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)$ égal à

$$(0, 0, 0, 0, \frac{4}{9}), \quad (0, 0, 0, 0, -\frac{4}{9}),$$

de l'équation

$$x^{(5)} + \frac{37}{9}\ddot{x} + \frac{4}{9}\dot{x} = 0, \quad (5.2.7)$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Notez que ces solutions sont périodiques de période 6π .

5.3 Preuves des résultats

Preuve du Théorème 5.2.1 . En introduisant les variables $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, $u = \ddot{\ddot{x}}$, $v = \ddot{\ddot{\ddot{x}}}$, l'équation différentielle d'ordre cinq (5.1.1) peut être écrite sous la forme du système diffé-

5.3. Preuves des résultats

rentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -(p^2 + q^2)u - p^2q^2y + \varepsilon F(t, x, y, z, u, v). \end{cases} \quad (5.3.8)$$

Les points singuliers du système différentiel (5.1.1) _{$\varepsilon=0$} se trouvent sur l'axe des x , c'est-à-dire que les points singuliers du système (5.1.1) pour $\varepsilon = 0$ sont de la forme $(x, 0, 0)$. Les valeurs propres du système linéarisé en ces points singuliers sont $\pm ip$, $\pm iq$ et 0. Pour représenter le système (5.3.8) de manière appropriée, nous le réécrivons de sorte que sa partie linéaire à l'origine soit de la forme normale de Jordan. En utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^2 & 0 & 1 \\ 0 & pq^2 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 0 & 1 \\ 0 & p^2q & 0 & q & 0 \\ p^2q^2 & 0 & p^2 + q^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}. \quad (5.3.9)$$

Nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X} = -pY + \varepsilon G(t, X, Y, Z, U, V), \\ \dot{Y} = pX, \\ \dot{Z} = -qU + \varepsilon G(t, X, Y, Z, U, V), \\ \dot{U} = qZ, \\ \dot{V} = \varepsilon G(t, X, Y, Z, U, V), \end{cases} \quad (5.3.10)$$

où $G(t, X, Y, Z, U, V) = F(t, A(t), D(t), C(t), D(t), E(t))$, et $A(t), B(t), C(t), D(t), E(t)$ donnés par (5.2.3).

On constate que la partie linéaire du système différentiel (5.3.10) à l'origine est sous sa forme normale de Jordan. Le changement de variable (5.3.9) est valide lorsque $p \neq \pm q$, car le déterminant de la matrice de ce changement est $p^3q^3(p^2 - q^2)^2$. Nous allons maintenant appliquer le Théorème 2.3.2 au système différentiel (5.3.10), en prenant

5.3. Preuves des résultats

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \end{pmatrix}, F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -pY \\ pX \\ -qU \\ qZ \\ 0 \end{pmatrix}, F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} G(t, X, Y, Z, U, V) \\ 0 \\ G(t, X, Y, Z, U, V) \\ 0 \\ G(t, X, Y, Z, U, V) \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons voir que le système (5.3.10) a un centre linéaire à l'origine avec $\varepsilon = 0$, tel que les solutions périodiques $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ de ce centre, avec $\mathbf{z} = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)$, sont données par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(pt) - Y_0 \sin(pt) \\ Y_0 \cos(pt) + X_0 \sin(pt) \\ Z_0 \cos(qt) - U_0 \sin(qt) \\ U_0 \cos(qt) + Z_0 \sin(qt) \\ V_0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.11)$$

Cet ensemble d'orbites périodiques est de dimension 5, et toutes les orbites ont la même période de $2k\pi$. Nous devons calculer les zéros $\alpha = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)$ du système $\mathcal{F}(\alpha) = 0$, où $\mathcal{F}(\alpha)$ est donné par (2.3.31) ainsi que la matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel (5.3.10) avec $\varepsilon = 0$, le long de toute solution périodique est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(pt) & -\sin(pt) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(pt) & \cos(pt) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(qt) & -\sin(qt) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(qt) & \cos(qt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse de $M(t)$ est

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(pt) & \sin(pt) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(pt) & \cos(pt) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(qt) & \sin(qt) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(qt) & \cos(qt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3. Preuves des résultats

En calculant la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée dans (2.3.31), nous obtenons que le système $\mathcal{F}(\alpha) = 0$, peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \\ \mathcal{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = 0, \end{cases} \quad (5.3.12)$$

où $\mathcal{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)$ pour $k = \overline{1, 5}$, sont donnés dans (5.2.2).

Par conséquent, les zéros $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)$ du système (5.3.12) par rapport aux variables X_0, Y_0, Z_0, U_0 , et V_0 fournissent des orbites périodiques du système (5.3.10) pour ε suffisamment petit s'ils sont simples, c'est-à-dire si

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)} \Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)} \right) \neq 0.$$

Revenant au cadre initial via un changement de variables, notons que pour chaque zéro simple $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*)$ du système (5.3.12), nous obtenons $x(t, \varepsilon)$ une solution $2k\pi$ -périodique de l'équation différentielle (5.1.1) pour ε suffisamment petit, telles que $x(t, \varepsilon)$ tend vers la solution périodique

$$x(t) = \frac{X_0^* \cos(pt) - Y_0^* \sin(pt)}{p^2(p^2 - q^2)} + \frac{U_0^* \sin(qt) - Z_0^* \cos(qt)}{q^2(p^2 - q^2)} + \frac{V_0^*}{p^2 q^2},$$

de $x^{(5)} + (p^2 + q^2)\ddot{x} + p^2 q^2 \dot{x} = 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Notez que cette solution est périodique de période $2k\pi$. Cela achève la démonstration du théorème 5.2.1. ■

Preuve du corollaire 5.2.1 . Nous avons l'équation

$$x^{(5)} + \frac{25}{16}\ddot{x} + \frac{9}{16}\dot{x} = \varepsilon((ax^2 + bx + c)(\cos(t) + 3)), \quad (5.3.13)$$

qui correspond au cas $p = \frac{3}{4}$, $q = 1$, et $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = (ax^2 + bx + c)(\cos(t) + 3)$ de l'équation (5.1.1).

5.3. Preuves des résultats

Les fonctions $\mathcal{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)$ pour $k = \overline{1,5}$ du Théorème 5.2.1 sont

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{128}{1323}X_0(224V_0 + 48Z_0)a - \frac{128}{21}X_0b, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= -\frac{128}{1323}Y_0(224V_0 + 48Z_0)a - \frac{128}{21}Y_0b, \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \left(\frac{16384}{3969}X_0^2 + \frac{16384}{3969}Y_0^2 + \frac{96}{49}Z_0^2 + \frac{32}{49}U_0^2 + \frac{128}{81}V_0^2 + \frac{256}{21}Z_0V_0\right)a \\ &\quad + \left(\frac{24}{7}Z_0 + \frac{8}{9}V_0\right)b + \frac{1}{2}c, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \frac{8}{147}U_0(224V_0 + 48Z_0)a + \frac{24}{7}U_0b, \\ \mathcal{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) &= \left(\frac{32768}{1323}X_0^2 + \frac{32768}{1323}Y_0^2 + \frac{384}{49}Z_0^2 + \frac{384}{49}U_0^2 + \frac{256}{27}V_0^2 + \frac{256}{63}Z_0V_0\right)a \\ &\quad + \left(\frac{8}{7}Z_0 + \frac{16}{3}V_0\right)b + 3c.\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_5 = 0$, a quatre solutions réelles données par

$$\begin{aligned}\left(0, 0, 0, 0, \frac{-9b + 9\sqrt{A_1}}{32a}\right), & \quad \left(0, 0, 0, 0, \frac{-9b - 9\sqrt{A_1}}{32a}\right), \\ \left(0, 0, \frac{\sqrt{A_2}}{8a}, 0, \frac{-1071b - 27\sqrt{A_2}}{3808a}\right), & \quad \left(0, 0, -\frac{\sqrt{A_2}}{8a}, 0, \frac{-1071b + 27\sqrt{A_2}}{3808a}\right).\end{aligned}$$

Le déterminant (5.2.4) pour ces quatre solutions est

$$\pm \frac{142606336}{64827}(-4ac + b^2)^{5/2}, \mp \frac{713031680000}{8884685756961} \sqrt{-9012ac + 2253b^2(4ac - b^2)}.$$

respectivement. Alors, par le Théorème 5.2.1, l'équation (5.3.13) a quatre solutions périodiques, tendant vers les solutions périodiques de l'équation (5.2.6) données dans l'énoncé du Corollaire 5.2.1. ■

Preuve du corollaire 5.2.2 . On considère le système différentiel suivante

$$x^{(5)} + \frac{37}{9}x^{(3)} + \frac{4}{9}\dot{x} = \varepsilon(x^2 - 1 + \bar{x} \sin(t)), \quad (5.3.14)$$

qui correspond au cas $p = \frac{1}{3}$, $q = 2$, et $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\bar{x}}, \ddot{\bar{x}}) = x^2 - 1 + \bar{x} \sin(t)$ de l'équation (5.1.1).

5.3. Preuves des résultats

Les fonctions $\mathcal{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0)$ pour $k = \overline{1,5}$ du Théorème 5.2.1 sont

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = -\frac{729}{140} X_0 V_0,$$

$$\mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = -\frac{729}{140} Y_0 V_0,$$

$$\mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = \frac{81}{560} Z_0 V_0,$$

$$\mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = \frac{81}{560} U_0 V_0,$$

$$\mathcal{F}_5(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) = \frac{6561}{2450} X_0^2 + \frac{6561}{2450} Y_0^2 + \frac{81}{39200} Z_0^2 + \frac{81}{39200} U_0^2 + \frac{81}{16} V_0^2 - 1.$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_5 = 0$, a deux solutions réelles données par

$$(0, 0, 0, 0, \frac{4}{9}), (0, 0, 0, 0, -\frac{4}{9}).$$

Étant donné que le déterminant (5.2.4) pour ces deux solutions est $\pm \frac{4782969}{48020000}$, respectivement.

Selon le Théorème 5.2.1, l'équation (5.3.14) a deux solutions périodiques qui tendent vers les solutions périodiques de l'équation (5.2.7) énoncée dans le corollaire 5.2.2. ■

6 Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du septième ordre

6.1 Introduction et position du problème

L'objectif de ce chapitre est d'examiner les conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle d'ordre sept de la forme

$$x^{(7)} + (\alpha^2 + \beta^2 + 1)x^{(5)} + (\alpha^2(\beta^2 + 1) + \beta^2)\ddot{x} + (\alpha\beta)^2\dot{x} = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{\ddot{x}}}, x^{(5)}, x^{(6)}), \quad (6.1.1)$$

où α et β sont des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$, et $\alpha \neq \pm\beta$. De plus, ε est suffisamment petit, et F est une fonction autonome non linéaire.

De nombreux articles ont étudié les équations différentielles d'ordre sept de différentes manières. Ainsi, notre classe d'équations n'est pas éloignée de celles étudiées dans les références [11], [15] et [37].

Cependant, notre principal outil pour étudier les orbites périodiques de l'équation (6.1.1) est complètement différent de ceux des articles mentionnés. Par conséquent, les résultats obtenus semblent distincts et nouveaux. Nous utiliserons la méthode de moyennisation, plus précisément le théorème 2.3.2. De nombreux articles cités qui traitent des orbites périodiques des équations différentielles font usage du théorème du point fixe de Schauder ou de Leray-Schauder voir [12], ainsi que de la méthode de réduction non locale ou des méthodes variationnelles, voir [1]. Pour l'étude des solutions périodiques des équations d'ordre inférieur à sept, voir [5, 7, 17, 18, 21, 22, 25].

6.2. Résultats principaux

Les principaux résultats concernant les solutions périodiques de l'équation (6.1.1) sont énoncés dans le théorème et le corollaire suivants.

6.2 Résultats principaux

Théorème 6.2.1 *Supposons que α, β soient des nombres rationnels différents de $-1, 0, 1$ et $\alpha \neq \pm\beta$ dans l'équation différentielle (6.1.1). Pour chaque solution $(r_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*, S_0^*)$ avec $r_0^* > 0$ du système*

$$\mathcal{F}_i(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (6.2.2)$$

satisfaisant

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6)}{\partial(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0)} \Big|_{(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) = (r_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*, S_0^*)} \right) \neq 0, \quad (6.2.3)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi\alpha} \cos(\theta) F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_2(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= -\frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{\beta U_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta)}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_3(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{\beta Z_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \sin(\frac{\beta}{\alpha}\theta)}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_4(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= -\frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{W_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \cos(\frac{\theta}{\alpha})}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_5(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{Z_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \sin(\frac{\theta}{\alpha})}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_6(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi\alpha} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{r \cos(\theta)}{(\alpha^2-1)(\alpha^2-\beta^2)\alpha^2} + \frac{Z}{(\beta^2-1)(\alpha^2-\beta^2)\beta^2} - \frac{V}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)} + \frac{S}{\alpha^2\beta^2}, \\ A_2 &= \frac{r \sin(\theta)}{(\alpha^2-1)(\alpha^2-\beta^2)\alpha} - \frac{U}{(\beta^2-1)(\alpha^2-\beta^2)\beta} + \frac{W}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}, \\ A_3 &= \frac{r \cos(\theta)}{(\alpha^2-1)(\alpha^2-\beta^2)} - \frac{Z}{(\beta^2-1)(\alpha^2-\beta^2)} + \frac{V}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}, \\ A_4 &= -\frac{(\alpha^2\beta^2-\alpha)r \sin(\theta) + (\beta-\alpha^2\beta)U + (\alpha^2-\beta^2)W}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}, \\ A_5 &= -\frac{\alpha^2 r \cos(\theta)}{(\alpha^2-1)(\alpha^2-\beta^2)} + \frac{\beta^2 Z}{(\beta^2-1)(\alpha^2-\beta^2)} - \frac{V}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}, \\ A_6 &= \frac{(\alpha^3\beta^2-\alpha^3)r \sin(\theta) + (\beta^3-\alpha^2\beta^3)U + (\alpha^2-\beta^2)W}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}, \\ A_7 &= \frac{\alpha^4 r \cos(\theta)}{(\alpha^2-1)(\alpha^2-\beta^2)} - \frac{\beta^4 Z}{(\beta^2-1)(\alpha^2-\beta^2)} + \frac{V}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}, \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

l'équation différentielle (6.1.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x_0(t) = -\frac{r_0 \cos(t)}{(\alpha^2-1)(\alpha^2-\beta^2)\alpha^2} + \frac{Z_0}{(\beta^2-1)(\alpha^2-\beta^2)\beta^2} - \frac{V_0}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)} + \frac{S_0}{\alpha^2\beta^2}$$

6.3. Preuves des résultats

de l'équation $x^{(7)} + (\alpha^2 + \beta^2 + 1)x^{(5)} + (\alpha^2(\beta^2 + 1) + \beta^2)\ddot{x} + (\alpha\beta)^2\dot{x} = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que cette solution est périodique de période $2\pi\alpha$.

Corollaire 6.2.1 *Considérons l'équation différentielle (6.1.1) avec $f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}) = -x^2 + 1$, $\alpha = 2$, et $\beta = 3$. Alors cette équation possède six solutions périodiques $x_i(t, \varepsilon)$ avec $i = \overline{1, 6}$, tendant vers les solutions périodiques*

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{690214}{488055} \cos(t), \\
 x_2(t) &= \frac{403163}{532200} \cos(t) + \frac{84958338371891}{212745327291720}, \\
 x_3(t) &= \frac{10365}{15214} \cos(t) - \frac{10688}{193932}, \\
 x_4(t) &= \frac{10365}{15214} \cos(t) - \frac{37920534167429}{20199739916160}, \\
 x_5(t) &= \frac{135527}{308340} \cos(t) - \frac{104112649759}{112115190960}, \\
 x_6(t) &= \frac{135527}{308340} \cos(t) - \frac{104112649759}{112115190960},
 \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

de l'équation différentielle $x^{(7)} + 14x^{(5)} + 49\ddot{x} + 36\dot{x} = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

6.3 Preuves des résultats

Preuve du Théorème 6.2.1. En introduisant les variables $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, $u = \ddot{\ddot{x}}$, $v = \ddot{\ddot{\ddot{x}}}$, $w = x^{(5)}$, $s = x^{(6)}$, nous pouvons exprimer l'équation différentielle d'ordre sept (6.1.1) sous forme d'un système différentiel de dimension 7. Ainsi, le système différentiel écrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x} = y, \\
 \dot{y} = z, \\
 \dot{z} = u, \\
 \dot{u} = v, \\
 \dot{v} = w, \\
 \dot{w} = s, \\
 \dot{s} = -(\alpha^2 + \beta^2 + 1)w - (\alpha^2(\beta^2 + 1) + \beta^2)u - (\alpha\beta)^2y + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{\ddot{x}}}, x^{(5)}, x^{(6)}).
 \end{array} \right. \tag{6.3.7}$$

Les points singuliers du système différentiel $(6.3.7)_{\varepsilon=0}$ se trouvent sur l'axe des x , c'est-à-dire que les points singuliers du système (6.3.7) pour $\varepsilon = 0$ sont de la forme $(x, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

6.3. Preuves des résultats

Les valeurs propres du système linéarisé en ces points singuliers sont $\pm i$, $\pm i\alpha$, $\pm i\beta$ et 0. Par la transformation linéaire inversible

$$(X, Y, Z, U, V, W, S)^T = B(x, y, z, u, v, w, s)^T,$$

où la matrice B est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta^2 & 0 & \beta^2 + 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha\beta^2 & 0 & \alpha(\beta^2 + 1) & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha^2 + 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta\alpha^2 & 0 & \beta(\alpha^2 + 1) & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha\beta)^2 & 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 1 \\ 0 & (\alpha\beta)^2 & 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ (\alpha\beta)^2 & 0 & (\alpha\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 & 0 & \alpha^2 + \beta^2 + 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le système différentiel (6.3.7) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = -\alpha Y + \varepsilon G(X, Y, Z, U, V, W, S), \\ \dot{Y} = \alpha X, \\ \dot{Z} = \beta Z + \varepsilon G(X, Y, Z, U, V, W, S), \\ \dot{U} = -\beta U, \\ \dot{V} = -W + \varepsilon G(X, Y, Z, U, V, W, S), \\ \dot{W} = V, \\ \dot{S} = \varepsilon G(X, Y, Z, U, V, W, S), \end{cases} \quad (6.3.8)$$

où $G(X, Y, Z, U, V, W, S) = F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$.

Notons que la partie linéaire du système différentiel (6.3.8) à l'origine est sous sa forme normale réelle de Jordan. Nous passons maintenant des coordonnées cartésiennes (X, Y, Z, U, V, W, S) aux coordonnées cylindriques $(r, \theta, Z, U, V, W, S)$ de \mathbb{R}^6 , avec $X = r \cos(\theta)$, $Y = r \sin(\theta)$, et

6.3. Preuves des résultats

nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \cos(\theta)G(r, \theta, Z, U, V, W, S), \\ \dot{\theta} = \alpha - \frac{\varepsilon}{r} \sin(\theta)G(r, \theta, Z, U, V, W, S), \\ \dot{Z} = -\beta U + \varepsilon G(r, \theta, Z, U, V, W, S), \\ \dot{U} = \beta Z, \\ \dot{V} = -W + \varepsilon G(r, \theta, Z, U, V, W, S), \\ \dot{W} = V, \\ \dot{S} = \varepsilon G(r, \theta, Z, U, V, W, S). \end{array} \right. \quad (6.3.9)$$

En divisant par $\dot{\theta}$ le système (6.3.9) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cos(\theta)G + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = -\frac{\beta U}{\alpha} - \varepsilon \frac{\beta U \sin(\theta) - \alpha r}{\alpha^2 r} G + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dU}{d\theta} = \frac{\beta Z}{\alpha} + \varepsilon \frac{\beta Z \sin(\theta)}{\alpha^2 r} G + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dV}{d\theta} = -\frac{W}{\alpha} - \varepsilon \frac{W \sin(\theta) - \alpha r}{\alpha^2 r} G + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dW}{d\theta} = \frac{V}{\alpha} + \varepsilon \frac{V \sin(\theta)}{\alpha^2 r} G + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dS}{d\theta} = \frac{\varepsilon}{\alpha} G + O(\varepsilon^2), \end{array} \right. \quad (6.3.10)$$

où $G = G(r, \theta, Z, U, V, W, S)$.

Nous utiliserons le théorème 2.3.2 pour traiter notre système différentiel. Il est à noter que le système (6.3.10) peut être reformulé en tant que le système (2.3.27), en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ Z \\ U \\ V \\ W \\ S \end{pmatrix}, F_0(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha} U \\ \frac{\beta}{\alpha} Z \\ \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} W \\ \frac{1}{\alpha} V \\ 0 \end{pmatrix}, F_1(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta)}{\alpha} G \\ \frac{\beta U \sin(\theta) - \alpha r}{\alpha^2 r} G \\ \frac{\beta Z \sin(\theta)}{\alpha^2 r} G \\ \frac{W \sin(\theta) - \alpha r}{\alpha^2 r} G \\ \frac{V \sin(\theta)}{\alpha^2 r} G \\ \frac{G}{\alpha} \end{pmatrix},$$

6.3. Preuves des résultats

Les solutions du système (6.3.10) _{$\varepsilon=0$} sont caractérisées par

$$\begin{pmatrix} r(\theta) \\ Z(\theta) \\ U(\theta) \\ V(\theta) \\ W(\theta) \\ S(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ Z_0 \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta) - U_0 \sin(\frac{\beta}{\alpha}\theta) \\ U_0 \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta) + Z_0 \sin(\frac{\beta}{\alpha}\theta) \\ V_0 \cos(\frac{\theta}{\alpha}) - W_0 \sin(\frac{\theta}{\alpha}) \\ W_0 \cos(\frac{\theta}{\alpha}) + V_0 \sin(\frac{\theta}{\alpha}) \\ S_0 \end{pmatrix}.$$

on voit que ces solutions sont $2\pi\alpha$ -périodiques.

Pour trouver les solutions périodiques de notre équation (6.3.10), nous devons déterminer les zéros $\mathbf{z} = (r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$ décrit par (2.3.31), tels que la matrice fondamentale $M(\theta)$ du système (6.3.10), avec $\varepsilon = 0$ le long de chaque solution périodique, est donnée par

$$M(\theta) = M_{\mathbf{z}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta) & -\sin(\frac{\beta}{\alpha}\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\beta}{\alpha}\theta) & \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\theta}{\alpha}) & -\sin(\frac{\theta}{\alpha}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\frac{\theta}{\alpha}) & \cos(\frac{\theta}{\alpha}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ donné par (2.3.31) nous obtenons que le système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$ est donné par

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(r, Z, U, V, W, S) \\ \mathcal{F}_2(r, Z, U, V, W, S) \\ \mathcal{F}_3(r, Z, U, V, W, S) \\ \mathcal{F}_4(r, Z, U, V, W, S) \\ \mathcal{F}_5(r, Z, U, V, W, S) \\ \mathcal{F}_6(r, Z, U, V, W, S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.3.11)$$

6.3. Preuves des résultats

nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi\alpha} \cos(\theta) F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_2(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= -\frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{\beta U_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta)}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_3(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{\beta Z_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta)}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_4(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= -\frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{W_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta)}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_5(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} \int_0^{2\pi\alpha} \frac{Z_0 \sin(\theta) - r_0 \alpha \cos(\frac{\beta}{\alpha}\theta)}{r_0} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta, \\ \mathcal{F}_6(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{1}{2\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi\alpha} F(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) d\theta,\end{aligned}$$

où $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ et A_7 sont données dans l'énoncé du Théorème 6.2.1

Ainsi, les zéros $(r_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*, S_0^*)$ du système (6.3.11) par rapport aux variables r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0 et S_0 fournissent des orbites périodiques du système (6.3.10) pour ε suffisamment petit, si la condition (6.2.3) est satisfaite.

En revenant au changement de variable, pour chaque zéro simple du système (6.3.11), nous obtenons une solution $2\pi\alpha$ -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle (6.1.1) pour ε suffisamment petit tel que $x(t, \varepsilon)$ tende vers la solution périodique

$$x_0(t) = -\frac{r_0 \cos(t)}{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - \beta^2)\alpha^2} + \frac{Z_0}{(\beta^2 - 1)(\alpha^2 - \beta^2)\beta^2} - \frac{V_0}{(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)} + \frac{S_0}{\alpha^2\beta^2},$$

de $x^{(7)} + (\alpha^2 + \beta^2 + 1)x^{(5)} + (\alpha^2(\beta^2 + 1) + \beta^2)\ddot{x} + (\alpha\beta)^2\dot{x} = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que cette solution est périodique de période $2\pi\alpha$.

Ceci complète la preuve du théorème 6.2.1. ■

Preuve du corollaire 6.2.1 . Considérons l'équation différentielle

$$x^{(7)} + 14x^{(5)} + 49\ddot{x} + 36\dot{x} = \varepsilon(-x^2 + 1), \quad (6.3.12)$$

Ceci correspond au cas où $\alpha = 2, \beta = 3$ et $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{\ddot{x}}}, x^{(5)}, x^{(6)}) = -x^2 + 1$ dans l'équation (6.1.1). Les fonctions $\mathcal{F}_k(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0)$ avec $k = \overline{1, 6}$ du théorème 6.2.1 sont

6.3. Preuves des résultats

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= -\frac{V_0}{4608} + \frac{W_0}{4608} - \frac{r_0 S_0}{4320} - \frac{U_0 W_0}{34560} - \frac{V_0 Z_0}{34560}, \\ \mathcal{F}_2(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{8S_0 Z_0 r_0 - 9U_0^2 V_0 - 135U_0 V_0 W_0 + 9U_0 W_0 Z_0 + 36V_0 r_0^2}{207360r_0}, \\ \mathcal{F}_3(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{8S_0 U_0 r_0 + 9U_0 V_0 Z_0 + 135V_0 W_0 Z_0 - 9W_0 Z_0^2 + 36W_0 r_0^2}{207360r_0}, \\ \mathcal{F}_4(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{200S_0 V_0 r_0 - 5U_0 V_0 W_0 - 75V_0 W_0^2 + 60V_0 r_0^2 + 5W_0^2 Z_0 + 4Z_0 r_0^2}{345600r_0}, \\ \mathcal{F}_5(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= \frac{200S_0 W_0 r_0 + 5U_0 V_0^2 + 4U_0 r_0^2 + 75V_0^2 W_0 - 5V_0 W_0 Z_0 - 60W_0 r_0^2}{345600r_0}, \\ \mathcal{F}_6(r_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, S_0) &= -\frac{r_0^2}{14400} - \frac{Z_0^2}{518400} - \frac{U_0^2}{518400} - \frac{V_0^2}{2304} - \frac{W_0^2}{2304} - \frac{S_0^2}{2592} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_6 = 0$ a six solutions réelles avec $r_0 > 0$ données par

$$\begin{aligned}& \left(\frac{2760856}{32537}, 0, 0, 0, 0, 0 \right), \left(\frac{403163}{8870}, -\frac{275198}{4131}, -\frac{92749}{61623}, \frac{104667}{27463}, \frac{101674}{4061}, \frac{69964}{5209} \right), \\ & \left(\frac{310950}{7607}, 0, -\frac{300149}{1646}, 0, \frac{248943}{12656}, \frac{106889}{5387} \right), \left(\frac{310950}{7607}, \frac{300149}{1646}, 0, \frac{248943}{12656}, 0, -\frac{106889}{5387} \right), \\ & \left(\frac{135527}{5139}, -\frac{74279}{9549}, \frac{74279}{9549}, \frac{743779}{32614}, \frac{743779}{32614}, 0 \right), \left(\frac{135527}{5139}, -\frac{74279}{9549}, -\frac{74279}{9549}, \frac{743779}{32614}, -\frac{743779}{32614}, 0 \right).\end{aligned}$$

Étant donné que le déterminant (6.2.3) pour ces solutions $(r_0^*, Z_0^*, U_0^*, V_0^*, W_0^*, S_0^*)$ est

$$\begin{aligned}& (-4.845167479)10^{-14}, (-7.096581955)10^{-13}, \\ & (4.037375667)10^{-13}, (4.037375667)10^{-13}, \\ & (1.227210749)10^{-11}, (1.227210749)10^{-11},\end{aligned}$$

alors, selon le Théorème 6.2.1, l'équation (6.3.12) admet six solutions périodiques tendant vers les solutions périodiques (6.2.6) du Corollaire 6.2.1. ■

Conclusion et Perspectives

- Dans cette thèse, nous avons utilisé la méthode de moyennisation pour étudier la bifurcation zéro-Hopf pour des systèmes différentiels polynomiaux dans \mathbb{R}^3 .

- Nous avons donné des conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques pour des classes d'équations différentielles du cinquième et du septième ordre, ainsi que pour certains systèmes différentiels de dimension 5 linéaires non homogènes perturbés par des polynômes de degré n .

- On s'intéresse à la recherche des solutions périodiques du système différentiel

$$\dot{x} = Ax + h(t) + \varepsilon P(x), \quad (6.3.13)$$

où, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix}$ sont des polynômes de degré n , A est une matrice constante $n \times n$ et ε est suffisamment petit.

Appendice

Dans cet appendice, vous trouverez les fonctions F_{ij} avec $i=1, 2$ et $j=1, \dots, 4$ mentionnées dans le système (3.0.2) à la page 49. Elles sont incluses ici afin de ne pas gêner le lecteur, car elles comportent des expressions trop longues.

$$F_{11} := \frac{q a_1}{b},$$

$$F_{21} := \frac{c_1 \eta}{b},$$

$$F_{12} := \frac{1}{b} \left(-\frac{q a_1 b_1}{b} + \cos(\theta) q^3 a_{0,6} \sin(\theta) + \eta q^2 b_{0,7} \sin(\theta) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) q^3 a_{0,1} \right. \\ + \cos(\theta)^3 \eta q^2 a_{0,2} + \cos(\theta)^2 \eta^2 q a_{0,5} + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 q^3 b_{0,0} + \cos(\theta) \eta q^2 a_{0,7} \\ - \cos(\theta)^3 \eta q^2 a_{0,7} - \cos(\theta)^3 \eta q^2 b_{0,4} - \cos(\theta)^2 \eta^2 q b_{0,8} - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 q^3 a_{0,6} \\ - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 q^3 b_{0,3} + \cos(\theta) q^3 b_{0,3} \sin(\theta) + \cos(\theta) \eta q^2 b_{0,4} + \eta^2 q b_{0,8} \\ + \cos(\theta) \eta^3 a_{0,9} + \sin(\theta) \eta^3 b_{0,9} - \cos(\theta)^4 q^3 a_{0,3} - \cos(\theta)^4 q^3 b_{0,1} - 2 \cos(\theta)^2 q^3 b_{0,6} \\ + \cos(\theta)^4 q^3 b_{0,6} + \cos(\theta)^2 q^3 b_{0,1} + \cos(\theta)^2 q^3 a_{0,3} + \cos(\theta)^4 q^3 a_{0,0} \\ + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta q^2 a_{0,4} + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 q a_{0,8} + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta q^2 b_{0,2} \\ \left. + \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 q b_{0,5} - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta q^2 b_{0,7} + q^3 b_{0,6} + q a_2 \right),$$

$$F_{22} := \frac{1}{b} \left(q^3 \cos(\theta)^3 c_{0,0} + q^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) c_{0,1} + q^2 \cos(\theta)^2 \eta c_{0,2} + q^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 c_{0,3} \right. \\ + q^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \eta c_{0,4} + q \cos(\theta) \eta^2 c_{0,5} + q^3 \sin(\theta)^3 c_{0,6} + q^2 \sin(\theta)^2 \eta c_{0,7} \\ \left. + q \sin(\theta) \eta^2 c_{0,8} + \eta^3 c_{0,9} + \eta c_2 - \frac{c_1 \eta b_1}{b} \right),$$

$$F_{13} := \frac{1}{b^3} \left(\eta^2 q b_{1,8} b^2 - a_1 b q b_2 + a_1 b q^3 a_{0,6} - b_1 q a_2 b - b_1 q^3 b_{0,6} b + \cos(\theta) \eta^3 a_{1,9} b^2 \right. \\ + \sin(\theta) \eta^3 b_{1,9} b^2 + \cos(\theta)^4 q^3 a_{1,0} b^2 - \cos(\theta)^4 q^3 a_{1,3} b^2 - \cos(\theta)^4 q^3 b_{1,1} b^2 \\ - 2 \cos(\theta)^2 q^3 b_{1,6} b^2 + \cos(\theta)^4 q^3 b_{1,6} b^2 + \cos(\theta)^2 q^3 b_{1,1} b^2 + \cos(\theta)^2 q^3 a_{1,3} b^2 + q^3 b_{1,6} b^2 \\ \left. + q a_3 b^2 + q a_1 b_1^2 + b_1 \cos(\theta)^4 q^3 a_{0,3} b + b_1 \cos(\theta)^4 q^3 b_{0,1} b + 2 b_1 \cos(\theta)^2 q^3 b_{0,6} b \right)$$

$$\begin{aligned}
& -b_1 \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,6} b - b_1 \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,1} b + \eta \varrho^2 b_{1,7} \sin(\theta) b^2 + \cos(\theta) \varrho^3 b_{1,3} \sin(\theta) b^2 \\
& + \cos(\theta) \varrho^3 a_{1,6} \sin(\theta) b^2 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 a_{1,1} b^2 + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{1,2} b^2 \\
& + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{1,5} b^2 + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{1,0} b^2 + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{1,4} b^2 + \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{1,7} b^2 \\
& - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{1,7} b^2 - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{1,4} b^2 - \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{1,8} b^2 - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{1,6} b^2 \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{1,3} b^2 + a_1 b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,1} - a_1 b \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,3} - a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,0} \\
& - a_1 b \cos(\theta) \eta^3 b_{0,9} + a_1 b \sin(\theta) \eta^3 a_{0,9} - 2 a_1 b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,6} - a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,1} \\
& + a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,3} + a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,6} - b_1 \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,3} b - b_1 \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,0} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \eta^3 a_{0,9} b - b_1 \sin(\theta) \eta^3 b_{0,9} b + a_1 b \eta^2 \varrho a_{0,8} - b_1 \eta^2 \varrho b_{0,8} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,6} \sin(\theta) b - b_1 \eta \varrho^2 b_{0,7} \sin(\theta) b - b_1 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 a_{0,1} b \\
& - b_1 \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,2} b - b_1 \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{0,5} b - b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,0} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,7} b + b_1 \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,7} b + b_1 \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,4} b + b_1 \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{0,8} b \\
& + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 a_{1,4} b^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho a_{1,8} b^2 + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{1,2} b^2 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho b_{1,5} b^2 - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{1,7} b^2 - a_1 b \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,2} \\
& - a_1 b \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{0,5} + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,0} + a_1 b \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,7} \\
& + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,6} - a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,3} - a_1 b \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,4} \\
& - a_1 b \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{0,8} + a_1 b \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,4} - a_1 b \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,7} \\
& - a_1 b \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,6} \sin(\theta) + a_1 b \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,3} \sin(\theta) + a_1 b \eta \varrho^2 a_{0,7} \sin(\theta) \\
& - a_1 b \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{0,1} + b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,6} b + b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,3} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,3} \sin(\theta) b - b_1 \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,4} b + b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{0,7} b \\
& - a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,7} + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,2} + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho a_{0,5} \\
& - a_1 b \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,4} - a_1 b \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho b_{0,8} - b_1 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,4} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho a_{0,8} b - b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{0,2} b - b_1 \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho b_{0,5} b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{23} := & \frac{1}{b^3 \varrho} \left(-b \eta \varrho^3 b_1 c_{0,7} - c_1 \eta^3 b \cos(\theta)^2 \varrho a_{0,8} + c_1 \eta^2 b \cos(\theta) \varrho^2 a_{0,4} - c_1 \eta^2 b \cos(\theta) \varrho^2 b_{0,7} \right. \\
& + c_1 \eta^2 b \varrho^2 a_{0,7} \sin(\theta) - \cos(\theta)^2 \sin(\theta) b \varrho^4 b_1 c_{0,1} - \cos(\theta)^2 b \eta \varrho^3 b_1 c_{0,2} \\
& - \cos(\theta) b \eta^2 \varrho^2 b_1 c_{0,5} - \sin(\theta) b \eta^2 \varrho^2 b_1 c_{0,8} + \varrho^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \eta c_{1,4} b^2 \\
& + c_1 \eta b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,1} - c_1 \eta b \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,3} - c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,0} \\
& - 2 c_1 \eta b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,6} - c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,1} + c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,3} \\
& + c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,6} - c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^3 \varrho^2 b_{0,2} - c_1 \eta^3 b \cos(\theta)^2 \varrho b_{0,5} \\
& + c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^3 \varrho^2 b_{0,7} - c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^3 \varrho^2 a_{0,4} - c_1 \eta b \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{0,1} \\
& \left. - \cos(\theta) \sin(\theta) b \eta \varrho^3 b_1 c_{0,4} - c_1 \eta^2 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \varrho^2 a_{0,7} + c_1 \eta^2 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \varrho^2 a_{0,2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 \eta^3 b \sin(\theta) \cos(\theta) \varrho a_{0,5} - c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \varrho^2 b_{0,4} - c_1 \eta^3 b \cos(\theta) \sin(\theta) \varrho b_{0,8} \\
& + c_1 \eta b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,0} + c_1 \eta b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,6} - c_1 \eta b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,3} \\
& - c_1 \eta b \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,6} \sin(\theta) + c_1 \eta b \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,3} \sin(\theta) - b \eta^3 \varrho b_1 c_{0,9} - b \eta \varrho b_1 c_2 \\
& + \varrho^4 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) c_{1,1} b^2 + \varrho^3 \cos(\theta)^2 \eta c_{1,2} b^2 + \varrho^2 \cos(\theta) \eta^2 c_{1,5} b^2 + \varrho^2 \sin(\theta) \eta^2 c_{1,8} b^2 \\
& - c_1 \eta^4 b \cos(\theta) b_{0,9} + c_1 \eta^4 b \sin(\theta) a_{0,9} - \cos(\theta)^3 b \varrho^4 b_1 c_{0,0} + c_1 \eta^3 b \varrho a_{0,8} - c_1 \eta b \varrho b_2 \\
& + c_1 \eta b \varrho^3 a_{0,6} - \sin(\theta) b^2 \cos(\theta)^2 \varrho^4 c_{1,6} + \eta^3 c_{1,9} b^2 \varrho + \eta c_3 b^2 \varrho + \eta \varrho b_1^2 c_1 \\
& + \varrho^4 \cos(\theta)^3 c_{1,0} b^2 - b^2 \cos(\theta)^3 \varrho^4 c_{1,3} + b \cos(\theta)^2 \eta \varrho^3 b_1 c_{0,7} + \varrho^4 c_{1,6} b^2 \sin(\theta) \\
& + b \cos(\theta)^3 \varrho^4 b_1 c_{0,3} - b^2 \cos(\theta)^2 \eta \varrho^3 c_{1,7} - \cos(\theta) b \varrho^4 b_1 c_{0,3} - b \varrho^4 b_1 c_{0,6} \sin(\theta) \\
& + \varrho^4 \cos(\theta) c_{1,3} b^2 + \varrho^3 \eta c_{1,7} b^2 + \sin(\theta) b \cos(\theta)^2 \varrho^4 b_1 c_{0,6}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{14} := & \frac{1}{b} \left(-\frac{1}{b^2 \varrho} \left((\cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,3} b + \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,0} b + \cos(\theta) \eta^3 a_{0,9} b + \sin(\theta) \eta^3 b_{0,9} b \right. \right. \\
& - \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,3} b - \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,1} b - 2 \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,6} b + \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,6} b \\
& + \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,1} b + \varrho a_2 b + \varrho^3 b_{0,6} b - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,6} b - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,3} b \\
& + \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,3} \sin(\theta) b + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,4} b + \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,6} \sin(\theta) b + \eta \varrho^2 b_{0,7} \sin(\theta) b \\
& + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 a_{0,1} b + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,2} b + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{0,5} b \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,0} b + \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,7} b - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,7} b - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,4} b \\
& - \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{0,8} b + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,4} b + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho a_{0,8} b \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{0,2} b + \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho b_{0,5} b - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{0,7} b - \varrho a_1 b_1 \\
& \left. + \eta^2 \varrho b_{0,8} b \right) \left(-\eta^2 \varrho a_{0,8} - \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,1} + \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,3} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,0} \right. \\
& + \cos(\theta) \eta^3 b_{0,9} - \sin(\theta) \eta^3 a_{0,9} + 2 \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,6} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,1} - \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,3} \\
& - \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,6} + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,7} - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,2} \\
& \left. - \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho a_{0,5} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,4} + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho b_{0,8} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,2} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{0,5} - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,0} - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,7} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,6} + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,3} + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,4} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{0,8} \\
& - \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,4} + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,7} + \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,6} \sin(\theta) - \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,3} \sin(\theta) \\
& - \eta \varrho^2 a_{0,7} \sin(\theta) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{0,1} + \varrho b_2 - \varrho^3 a_{0,6} \Big) - \frac{1}{b^3} \left(\left(\eta^2 \varrho b_{1,8} b^2 \right. \right. \\
& - a_1 b \varrho b_2 + a_1 b \varrho^3 a_{0,6} - b_1 \varrho a_2 b - b_1 \varrho^3 b_{0,6} b + \cos(\theta) \eta^3 a_{1,9} b^2 + \sin(\theta) \eta^3 b_{1,9} b^2 \\
& + \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{1,0} b^2 - \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{1,3} b^2 - \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{1,1} b^2 - 2 \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{1,6} b^2 \\
& + \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{1,6} b^2 + \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{1,1} b^2 + \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{1,3} b^2 + \varrho^3 b_{1,6} b^2 + \varrho a_3 b^2 + \varrho a_1 b_1^2 \\
& + b_1 \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,3} b + b_1 \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,1} b + 2 b_1 \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,6} b - b_1 \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,6} b \\
& - b_1 \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,1} b + \eta \varrho^2 b_{1,7} \sin(\theta) b^2 + \cos(\theta) \varrho^3 b_{1,3} \sin(\theta) b^2 \\
& + \cos(\theta) \varrho^3 a_{1,6} \sin(\theta) b^2 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 a_{1,1} b^2 + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{1,2} b^2 \\
& + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{1,5} b^2 + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{1,0} b^2 + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{1,4} b^2 + \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{1,7} b^2 \\
& - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{1,7} b^2 - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{1,4} b^2 - \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{1,8} b^2 - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{1,6} b^2 \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{1,3} b^2 + a_1 b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,1} - a_1 b \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,3} - a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,0} \\
& - a_1 b \cos(\theta) \eta^3 b_{0,9} + a_1 b \sin(\theta) \eta^3 a_{0,9} - 2 a_1 b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,6} - a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,1} \\
& + a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,3} + a_1 b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,6} - b_1 \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,3} b - b_1 \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,0} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \eta^3 a_{0,9} b - b_1 \sin(\theta) \eta^3 b_{0,9} b + a_1 b \eta^2 \varrho a_{0,8} - b_1 \eta^2 \varrho b_{0,8} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,6} \sin(\theta) b - b_1 \eta \varrho^2 b_{0,7} \sin(\theta) b - b_1 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 a_{0,1} b \\
& - b_1 \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,2} b - b_1 \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{0,5} b - b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,0} b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_1 \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,7} b + b_1 \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,7} b + b_1 \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,4} b + b_1 \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{0,8} b \\
& + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 a_{1,4} b^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho a_{1,8} b^2 + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{1,2} b^2 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho b_{1,5} b^2 - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{1,7} b^2 - a_1 b \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,2} \\
& - a_1 b \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{0,5} + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,0} + a_1 b \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,7} \\
& + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,6} - a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,3} - a_1 b \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,4} \\
& - a_1 b \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{0,8} + a_1 b \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,4} - a_1 b \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,7} \\
& - a_1 b \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,6} \sin(\theta) + a_1 b \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,3} \sin(\theta) + a_1 b \eta \varrho^2 a_{0,7} \sin(\theta) \\
& - a_1 b \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{0,1} + b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,6} b + b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,3} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,3} \sin(\theta) b - b_1 \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,4} b + b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{0,7} b \\
& - a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,7} + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,2} + a_1 b \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho a_{0,5} \\
& - a_1 b \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,4} - a_1 b \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho b_{0,8} - b_1 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,4} b \\
& - b_1 \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho a_{0,8} b - b_1 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{0,2} b - b_1 \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho b_{0,5} b \\
& b_1) - \frac{1}{b} \left(a_1 \left(-\eta^2 \varrho a_{1,8} - \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{1,6} - \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{1,1} + \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{1,3} \right. \right. \\
& + \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{1,0} + \cos(\theta) \eta^3 b_{1,9} - \sin(\theta) \eta^3 a_{1,9} + 2 \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{1,6} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{1,1} \\
& - \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{1,3} + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{1,7} - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{1,2} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho a_{1,5} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 b_{1,4} + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho b_{1,8} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{1,0} - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{1,7} - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{1,6} + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{1,3} \\
& + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{1,4} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{1,8} - \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{1,4} + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{1,7} \\
& + \cos(\theta) \varrho^3 b_{1,6} \sin(\theta) - \eta \varrho^2 a_{1,7} \sin(\theta) - \cos(\theta) \varrho^3 a_{1,3} \sin(\theta) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{1,1} \\
& \left. \left. + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{1,2} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{1,5} + \varrho b_3 - \varrho^3 a_{1,6} \right) \right) + \cos(\theta) \varrho^3 a_{2,6} \sin(\theta) \\
& + \cos(\theta) \varrho^3 b_{2,3} \sin(\theta) + \eta \varrho^2 b_{2,7} \sin(\theta) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 a_{2,1} + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{2,2} \\
& + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{2,5} + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{2,0} + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{2,4} + \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{2,7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{2,7} - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{2,4} - \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{2,8} - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{2,6} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{2,3} + \cos(\theta) \eta^3 a_{2,9} + \sin(\theta) \eta^3 b_{2,9} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{2,0} - \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{2,3} \\
& - \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{2,1} - 2 \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{2,6} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{2,6} + \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{2,3} + \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{2,1} \\
& + \eta^2 \varrho b_{2,8} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 a_{2,4} + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho a_{2,8} + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{2,2} \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho b_{2,5} - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 b_{2,7} + \varrho^3 b_{2,6} + \varrho a_4), \\
F_{24} := & \frac{1}{b} \left(\varrho^3 \cos(\theta)^3 c_{2,0} + \varrho^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) c_{2,1} + \varrho^2 \cos(\theta)^2 \eta c_{2,2} + \varrho^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 c_{2,3} \right. \\
& + \varrho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \eta c_{2,4} + \varrho \cos(\theta) \eta^2 c_{2,5} + \varrho^3 \sin(\theta)^3 c_{2,6} + \varrho^2 \sin(\theta)^2 \eta c_{2,7} \\
& + \varrho \sin(\theta) \eta^2 c_{2,8} + \eta^3 c_{2,9} + \eta c_4 - \frac{1}{b \varrho} \left(c_1 \eta \left(-\eta^2 \varrho a_{1,8} - \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{1,6} \right. \right. \\
& - \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{1,1} + \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{1,3} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{1,0} + \cos(\theta) \eta^3 b_{1,9} - \sin(\theta) \eta^3 a_{1,9} \\
& + 2 \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{1,6} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{1,1} - \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{1,3} + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{1,7} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{1,2} - \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho a_{1,5} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 b_{1,4} \\
& + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho b_{1,8} - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{1,0} - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{1,7} - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{1,6} \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{1,3} + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{1,4} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{1,8} - \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{1,4} \\
& + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{1,7} + \cos(\theta) \varrho^3 b_{1,6} \sin(\theta) - \eta \varrho^2 a_{1,7} \sin(\theta) - \cos(\theta) \varrho^3 a_{1,3} \sin(\theta) \\
& \left. \left. + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{1,1} + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{1,2} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{1,5} + \varrho b_3 - \varrho^3 a_{1,6} \right) \right) \\
& - \frac{1}{b^2 \varrho} \left(\left(\varrho^3 \cos(\theta)^3 c_{0,0} b + \varrho^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) c_{0,1} b + \varrho^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 c_{0,3} b \right. \right. \\
& + \varrho^3 \sin(\theta)^3 c_{0,6} b + \varrho^2 \cos(\theta)^2 \eta c_{0,2} b + \varrho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \eta c_{0,4} b + \varrho^2 \sin(\theta)^2 \eta c_{0,7} b \\
& + \varrho \cos(\theta) \eta^2 c_{0,5} b + \varrho \sin(\theta) \eta^2 c_{0,8} b + \eta^3 c_{0,9} b + \eta c_2 b - c_1 \eta b_1 \left. \right) \left(-\eta^2 \varrho a_{0,8} \right. \\
& \left. - \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,1} + \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,3} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,0} + \cos(\theta) \eta^3 b_{0,9} - \sin(\theta) \eta^3 a_{0,9} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,6} + \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,1} - \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,3} - \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,6} \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,7} - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \eta \varrho^2 a_{0,2} - \sin(\theta) \cos(\theta) \eta^2 \varrho a_{0,5} \\
& + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,4} + \cos(\theta) \sin(\theta) \eta^2 \varrho b_{0,8} + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,2} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho b_{0,5} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,0} - \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 b_{0,7} - \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,6} + \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,3} \\
& + \cos(\theta)^3 \eta \varrho^2 a_{0,4} + \cos(\theta)^2 \eta^2 \varrho a_{0,8} - \cos(\theta) \eta \varrho^2 a_{0,4} + \cos(\theta) \eta \varrho^2 b_{0,7} \\
& + \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,6} \sin(\theta) - \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,3} \sin(\theta) - \eta \varrho^2 a_{0,7} \sin(\theta) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{0,1} \\
& + \varrho b_2 - \varrho^3 a_{0,6} \Big) + \frac{1}{b^3 \varrho} \Big((c_1 \eta^3 b \cos(\theta)^2 \varrho a_{0,8} - c_1 \eta^2 b \cos(\theta) \varrho^2 a_{0,4} \\
& + c_1 \eta^2 b \cos(\theta) \varrho^2 b_{0,7} - c_1 \eta^2 b \varrho^2 a_{0,7} \sin(\theta) + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) b \varrho^4 b_1 c_{0,1} \\
& + \cos(\theta) \sin(\theta)^2 b \varrho^4 b_1 c_{0,3} + \cos(\theta)^2 b \eta \varrho^3 b_1 c_{0,2} + \sin(\theta)^2 b \eta \varrho^3 b_1 c_{0,7} \\
& + \cos(\theta) b \eta^2 \varrho^2 b_1 c_{0,5} + \sin(\theta) b \eta^2 \varrho^2 b_1 c_{0,8} - \varrho^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \eta c_{1,4} b^2 \\
& - c_1 \eta b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,1} + c_1 \eta b \cos(\theta)^2 \varrho^3 b_{0,3} + c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,0} \\
& + 2 c_1 \eta b \cos(\theta)^2 \varrho^3 a_{0,6} + c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,1} - c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 b_{0,3} \\
& - c_1 \eta b \cos(\theta)^4 \varrho^3 a_{0,6} + c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^3 \varrho^2 b_{0,2} + c_1 \eta^3 b \cos(\theta)^2 \varrho b_{0,5} \\
& - c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^3 \varrho^2 b_{0,7} + c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^3 \varrho^2 a_{0,4} + c_1 \eta b \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \varrho^3 b_{0,1} \\
& + \cos(\theta) \sin(\theta) b \eta \varrho^3 b_1 c_{0,4} + c_1 \eta^2 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \varrho^2 a_{0,7} - c_1 \eta^2 b \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \varrho^2 a_{0,2} \\
& - c_1 \eta^3 b \sin(\theta) \cos(\theta) \varrho a_{0,5} + c_1 \eta^2 b \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \varrho^2 b_{0,4} + c_1 \eta^3 b \cos(\theta) \sin(\theta) \varrho b_{0,8} \\
& - c_1 \eta b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,0} - c_1 \eta b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 b_{0,6} + c_1 \eta b \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \varrho^3 a_{0,3} \\
& + c_1 \eta b \cos(\theta) \varrho^3 b_{0,6} \sin(\theta) - c_1 \eta b \cos(\theta) \varrho^3 a_{0,3} \sin(\theta) + b \eta^3 \varrho b_1 c_{0,9} + b \eta \varrho b_1 c_2 \\
& + \sin(\theta)^3 b \varrho^4 b_1 c_{0,6} - \varrho^4 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) c_{1,1} b^2 - \varrho^3 \cos(\theta)^2 \eta c_{1,2} b^2 \\
& - \varrho^4 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 c_{1,3} b^2 - \varrho^2 \cos(\theta) \eta^2 c_{1,5} b^2 - \varrho^3 \sin(\theta)^2 \eta c_{1,7} b^2 - \varrho^2 \sin(\theta) \eta^2 c_{1,8} b^2 \\
& + c_1 \eta^4 b \cos(\theta) b_{0,9} - c_1 \eta^4 b \sin(\theta) a_{0,9} + \cos(\theta)^3 b \varrho^4 b_1 c_{0,0} - c_1 \eta^3 b \varrho a_{0,8} + c_1 \eta b \varrho b_2 \\
& - c_1 \eta b \varrho^3 a_{0,6} - \eta^3 c_{1,9} b^2 \varrho - \eta c_3 b^2 \varrho - \eta \varrho b_1^2 c_1 - \varrho^4 \cos(\theta)^3 c_{1,0} b^2 - \varrho^4 \sin(\theta)^3 c_{1,6} b^2 \\
& b_1 \Big).
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] A. U. Afuwape. Remarks on barbashin–ezeilo problem on third-order nonlinear differential equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 317(2) :613–619, 2006.
- [2] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math*, 24(1) :1–88, 1901.
- [3] C. E. Berrehail and Z. Bouslah. Periodic solutions for a class of fifth-order differential equations. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 29(1) :2–13, 2023.
- [4] C. E. Berrehail and A. Makhlouf. Periodic solutions for a class of perturbed fifth-order autonomous differential equations via averaging theory. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, (Online First), July 2022.
- [5] C. E. Berrehail and A. Makhlouf. Periodic solutions for a class of perturbed sixth-order autonomous differential equations. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 2022.
- [6] N. Bogolyubov. On some statistical methods in mathematical physics. *Izdat. Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev*, 1945.
- [7] A. Boulfoul and A. Makhlouf. On the limit cycles for a class of fourth-order differential equations. *International Journal of differential Equations and Applications*, 11(3) :135–144, 2012.
- [8] A. Buică, J.-P. Françoise, and J. Llibre. Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 6(1) :103–111, 2007.
- [9] A. Buică and J. Llibre. Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. *Bull. Sci. Math.*, 128(1) :7–22, 2004.

Bibliographie

- [10] N. Bogoliubov and N. Krylov. The application of methods of nonlinear mechanics to the theory of stationary oscillations, pub. 8 ukrainian acad. *Sci., Kiev*, 1934.
- [11] S. M. El-Sayed and D. Kaya. An application of the adm to seven-order sawada–kotara equations. *Applied mathematics and computation*, 157(1) :93–101, 2004.
- [12] E. Esmailzadeh, M. Ghorashi, and B. Mehri. Periodic behavior of a nonlinear dynamical system. *Nonlinear Dynamics*, 7 :335–344, 1995.
- [13] P. Fatou. Sur le mouvement d’un système soumis à des forces à courte période. *Bull. Soc. Math. France*, 56 :98–139, 1928.
- [14] A. Feddaoui, J. Llibre, and A. Makhlof. 4-dimensional zero-Hopf bifurcation for polynomial differential systems with cubic homogeneous nonlinearities via averaging theory. *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 10(4) :321–328, 2020.
- [15] M. Inc, A. Akgül, et al. Numerical solution of seventh-order boundary value problems by a novel method. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2014. Hindawi, 2014.
- [16] Z. Li, Q. Liu, and K. Zhang. Periodic solutions of nonlinear differential systems by the method of averaging. *Applications of Mathematics*, 65(4) :511–542, 2020.
- [17] J. Llibre and A. Makhlof. On the limit cycles for a class of fourth-order differential equations. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(5) :055214, 2012.
- [18] J. Llibre and A. Makhlof. Periodic orbits of the fourth-order non-autonomous differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219(3) :827–836, Oct. 2012.
- [19] J. Llibre, A. Makhlof, and S. Badi. 3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of second order. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 25(4) :1287–1295, 2009.
- [20] J. Llibre, D. D. Novaes, and M. A. Teixeira. Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree. *Nonlinearity*, 27(3) :563–583, 2014.
- [21] J. Llibre and M. A. Teixeira. On the periodic orbits of the fourth-order differential equation $u'''' + q u'' - u = \varepsilon f(u, u', u'', u''')$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 387(1) :181–188, 2012.
- [22] J. Llibre, J. Yu, and X. Zhang. Limit cycles for a class of third-order differential equations. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 581–594, 2010.

Bibliographie

- [23] J. Llibre and X. Zhang. Hopf bifurcation in higher dimensional differential systems via the averaging method. *Pacific J. Math.*, 240(2) :321–341, 2009.
- [24] S. Lynch et al. *Dynamical systems with applications using Mathematica*. Springer, 2007.
- [25] A. Makhlouf and C. E. Berhail. Limit cycles of the sixth-order non-autonomous differential equation. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 18(2) :177–187, 2012.
- [26] A. Makhlouf, L. Bousbiat, et al. Periodic solutions of some polynomial differential systems in dimension 3 via averaging theory. *International Journal of Differential Equations*, 2015, 2015.
- [27] A. Makhlouf and L. Bousbiat. Periodic solutions of some polynomial differential systems in \mathbb{R}^4 . *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 05 :194–223, 01 2017.
- [28] A. Makhlouf and M. Hamamda. Limit cycles of third-order differential equations. *Annals of Differential Equations*, 30, 2014.
- [29] I. G. Malkin. Some problems of the theory of nonlinear oscillations. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.
- [30] A. A. Rabia and A. Makhlouf. Periodic solutions for differential systems in \mathbb{R}^5 and \mathbb{R}^5 . *Journal of Dynamical and Control Systems*, 29(3) :647–657, 2023.
- [31] M. Roseau. Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, volume Vol. 8 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [32] E. Rosenvasser. On the stability of nonlinear control systems described by fifth and sixth order differential equations. *Automat. Remote Control*, 19(2) :91–93, 1959.
- [33] J. A. Sanders and F. Verhulst. Averaging methods in nonlinear dynamical systems, volume 59 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [34] J. A. Sanders, F. Verhulst, and J. Murdock. Averaging methods in nonlinear dynamical systems, volume 59 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2007.
- [35] N. Sellami and A. Makhlouf. Limit cycles for a class of fifth-order differential equations. *Annals of Differential Equations*, 28(2) :202–219, 2012.

Bibliographie

- [36] N. Sellami, R. Mellal, B. B. Cherif, and S. A. Idris. On the limit cycles for a class of perturbed fifth-order autonomous differential equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2021 :1–18, 2021.
- [37] A. Soliman. A numerical simulation and explicit solutions of kdv-burgers' and lax's seventh-order kdv equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29(2) :294–302, 2006.
- [38] A. E. Tabet and A. Makhlof. Limit cycles for a class of fifth-order differential equations. *Journal of applied mathematics and informatics*, 42(1) :139–148.
- [39] A. E. Tabet and A. Makhlof. Periodic solutions of some polynomial differential systems in dimension 5 via averaging theory. *Nonautonomous Dynamical Systems*, 10(1) :20230104, 2023.
- [40] F. Verhulst. Nonlinear differential equations and dynamical systems. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Translated from the 1985 Dutch original.