Université Badji Mokhtar - Annaba

Faculté des sciences

Département de physique

Polycopié

Mécanique du point matériel

Travaux dirigés corrigés

Première année Sciences et technologie (ST)
Sciences de la matière (MS)

CHELLI Samira

2025 - 2026

PREFACE

Ce polycopié est destiné aux étudiants des troncs communs de sciences des matériaux (SM), sciences et techniques (ST). Ce document inclut des problèmes solutionnés relatifs aux différents chapitres du module de Physique 1 (Mécanique du point). Ces exercices englobent les quatre sections du programme de cours relatif à la mécanique du point matériel :

- Outil mathématique : vecteurs et systèmes de coordonnées.
- Cinématique du point matériel.
- Dynamique du point matériel.
- Travail et énergie.

Les exercices résolus visent à permettre aux étudiants :

- De renforcer leurs savoirs,
- Un entraînement optimal pour garantir la bonne compréhension du cours,
- L'acquisition des outils et méthodes indispensables à leur formation,
- L'introduction à leur culture scientifique dans le domaine de la mécanique du point matériel.

Chaque chapitre débute par un rappel du cours. A la fin de chaque chapitre, on propose des exercices sans solutions. Ces exercices ont été proposés aux examens et aux travaux dirigés.

Je souhaite que ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du point matériel puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

S. CHELLI

SOMMAIRE

Rappels mathématiques

Équations dimensionnelles et calcul vectoriel

<u>Rappel du cours</u> : Équations dimensionnelles, vecteurs.

Définition d'une grandeur physique

Une grandeur physique est une caractéristique attribuée à un objet ou un phénomène se produisant dans l'espace et le temps. Parmi toutes les grandeurs physiques, certaines sont considérées comme indépendantes. Ce sont les grandeurs de base ou grandeurs fondamentales.

Il existe sept grandeurs fondamentales. Une quantité X peut être donnée par une relation reliant deux quantités A et B et des coefficients fixes C, et : X=C. A. B.

Une grandeur physique A a une dimension, notée par :

$$\dim A = [A]$$

En physique, les sept grandeurs fondamentales ou de base avec leurs symboles et dimensions sont listées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1. Grandeurs physiques fondamentales.

Quantité	Symbole de la quantité	Dimension
Longueur	l	L
Masse	m	M
Temps	t	T
Courant électrique	i	I
Température	T	Ɵ
Quantité de mouvement	n	N

Incertitudes

L'erreur ou l'incertitude est la différence entre la valeur exacte et la valeur obtenue par la mesure.

La valeur exacte d'une grandeur physique est souvent inaccessible. Pour se rapprocher de cette valeur, l'erreur doit être estimée avec précision. On distingue deux types d'erreur, l'Incertitude absolue et relative.

Vecteurs

Soit un vecteur $\vec{V}$:

- Composantes : $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- Modules : $\|\vec{V}\| = V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$/\!/$: Vecteurs parallèles.

$\perp$: Vecteurs perpendiculaires.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

❖ Opérations sur les vecteurs :

<u>1- Somme de vecteurs</u>

$$\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_1} + \vec{V_1} + \cdots = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \\ y_1 + y_2 + y_3 + \cdots \\ z_1 + z_2 + z_3 + \cdots \end{pmatrix}$$

<u>2- Produit scalaire</u>

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = V_1.V_2.cos(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2})$$

Produit scalaire commutatif : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_1}$

<u>3- Produit vectoriel</u>

$$\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{\imath} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{\jmath} + (x_1 z y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

Produit vectoriel <u>non</u> commutatif.

<u>4- Dérivée d'un vecteur</u>

Dans un repère fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Les formules suivantes sont-elles valides sur le plan dimensionnel ? Effectuez une analyse dimensionnelle pour confirmer ou corriger.

1- $F = \frac{Gm}{r}$, tel que: F est une force, G est une constante exprimée en $\frac{m^3}{kg.s^{-1}}$, m est une unité de masse et r est une unité de longueur.

2- p = g.h_1 + h_2 .F , telles que: P: pression, g: accélération due à la gravité, h_1 et h_2 : hauteurs, F : force.

3- $\theta = \frac{b.\sin(a)}{t.\cos(c)}$, telles que : b, t dimensions de longueur.

Solution Ex 1

1- $F = \frac{Gm}{r}$ L'équation peut être écrite sous la forme dimensionnelle suivante :

$$[F]^{\alpha}.[G]^{\beta}.[m]^{\gamma}.[r]^{\theta} = 1 \qquad (1)$$

Tels que: $[F] = M.L.T^{-2}$; $[G] = L^3.M^{-1}T^{-1}$; $[m] = M$ and $[r] = L$

En remplaçant les dimensions des paramètres dans l'équation (1) par leurs expressions dimensionnelles ci-dessous, on obtient: $[M.L.T^{-2}]^{\alpha}[L^3.M^{-1}.T^{-1}]^{\beta}.[M]^{\gamma}.[L]^{\theta} = 1$

Mathématiquement, cette équation n'est valable que si les exposants des paramètres de base sont égaux à zéro. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + \theta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

la solution est

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 2\beta \\ \alpha + 3\beta + \theta = 0 \Rightarrow \theta = -2\beta \end{cases}$$

En substituant ces valeurs à β dans (1), on obtient : $[F]^{-\beta}.[G]^{\beta}.[m]^{2\beta}.[r]^{-2\beta} = 1$

Et si nous demandions β = 1 : $[F]^{-1}.[G]^{1}.[m]^{2}.[r]^{-2} = 1$ Ce qui équivaut à $[F] = [G].\frac{[m]^2}{[r]^2}$

Par rapport à l'équation (1), cette dernière peut être représentée physiquement comme suit :

$F = k.G.\frac{m^2}{r^2}$ telle que k : une constante sans dimension.

2- Ainsi, dans (1), il manque un paramètre r/m pour que l'équation soit correcte sur le plan dimensionnel.

3- $p = g.h_1 + h_2 .F$

Cette équation peut être présentée sous cette forme : $p = \alpha\, g\, h_1 + \beta\, h_2 F$

Pour vérifier la validité de l'équation, nous analysons ses dimensions terme par terme, c'est-à-dire que nous représentons l'équation sous la forme :

$$\begin{cases} [p] = [\alpha][g][h_1] \\ [p] = [\beta][h_2][F] \end{cases}$$

Depuis $[p] = M.L^{-1}.T^{-2}$; $[g]^2 = LT^{-2}$ et $[h_1] = L$ par conséquent $[\alpha] = ML^{-3}$ qui est la dimension de la densité, Depuis $[p] = M.L^{-1}.T^{-2}$; $[h_2] = L$ *et* $[F] = M.L.T^{-2}$ donc $[\beta] = L^{-3}$.

L'équation du premier terme doit être multipliée par la densité (ρ), tandis que le second terme doit être multiplié par un paramètre ayant pour dimension $1/L^3$.

4- $\theta = \frac{b.\sin(a)}{t.\cos(c)}$ Les termes sin(a) et cos(b) sont des termes dimensionnels, car :

$[\sin(a)] = [\cos(c)] = L/L$, alors : $[\theta] = \frac{[b].[sin(a)]}{[t].[cos(c)]} = \frac{L}{L} = 1$ et l'équation est correcte.

Exercice 2

Dans un fluide, une bille de rayon r se déplaçant à une vitesse v est soumise à une force de frottement donnée par $F = -6\pi\eta r v$, où η est la viscosité du fluide.

1) Quelle est la dimension de η ?

2) Lorsque la bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant t = 0, sa vitesse s'écrit t > 0 :$v = a.\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{b}\right)}\right)$ où a et b sont deux quantités qui dépendent des caractéristiques du fluide.

3) Si ρ désigne la densité du fluide, trouvez une combinaison simple $Re = \rho^{\alpha} v^{\beta} r^{\gamma} \eta^{\delta}$ qui soit sans dimension (parmi les différents choix possibles, nous prendrons α = 1). Cela nous donne le nombre de Reynolds, qui caractérise le régime d'écoulement d'un fluide (laminaire ou turbulent).

Solution Ex 2

1)

$$F = -6\pi\eta r v \Longrightarrow \eta = \frac{F}{6\pi r v} \Longrightarrow [\eta] = \frac{[F]}{[r][v]} = \frac{[masse][accéleration]}{[r][v]} = \frac{M.(L.T^{-2})}{L.(L.T^{-1})}$$

$$= M.L^{-1}.T^{-1}$$

2) L'argument de l'exponentielle est sans dimension, donc [b] = T. Le membre de droite a la dimension d'une vitesse, donc [a] = $L.T^{-1}$.

3)

$$Re = \rho^{\alpha} v^{\beta} r^{\gamma} \eta^{\delta} \Longrightarrow [Re] = [\rho]^{\alpha} [v]^{\beta} [r]^{\gamma} [\eta]^{\delta} = (M.L^{-3})^{\alpha} (L.T^{-1})^{\beta} L^{\gamma} (M.L^{-1}T^{-1})^{\delta}$$

$$\Longrightarrow [Re] = M^{\alpha+\delta}.L^{-3\alpha+\beta+\gamma-\delta}.T^{-\beta-\delta}$$

Puisque Re est sans dimension (selon l'énoncé), en prenant a = 1, nous en déduisons que :

$$\begin{cases} 1+\delta=0 \\ -3+\beta+\gamma-\delta=0 \\ -\beta-\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\delta=0 \\ \beta=1 \\ \gamma=1 \end{cases}$$

On conclusion : $Re = \frac{\rho v r}{\eta}$

Exercice 3

Indiquez lesquelles de ces formules sont homogènes :

1. (*l*) longueur, (*g*) champ gravitationnel, (*T*) temps :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{(l+g)}{\lg}}$$

2. P est l'impulsion (masse multipliée par la vitesse), m est la masse, C'est la vitesse de la lumière, E est l'énergie.:

$$E = \sqrt{pc^2 + m^2c^4} \qquad E^2 - \frac{p^2c^2}{m} = m^4 \qquad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Solution Ex 3

1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \sqrt{\frac{[L]}{[L][T]^{-2}}} = \sqrt{[T]^2} = [T]$ Homogène

$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \sqrt{\frac{[L][T]^{-2}}{[L]}} = \sqrt{[T]^{-2}} = [T]^{-1}$ Non homogène

$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \left[\frac{1}{2\pi}\right] = 1$ et $\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = [T]$ Homogène

$T = 2\pi\sqrt{\frac{(l+g)}{\lg}} \rightarrow$ Non homogène car les termes d'une somme doivent être homogènes, mais l et g n'ont pas la même dimension.

2) $E = \sqrt{pc^2 + m^2c^4} \rightarrow [pc^2] = [M][L]^3[T]^{-3}$ et $[m^2c^4] = [M]^2[L]^4[T]^{-4}$ Non homogène car les termes de la somme ne sont pas homogènes.

$E^2 - \frac{p^2c^2}{m} = m^4$

$[E]^2 = [M]^2[L]^4[T]^{-4}$ et $\frac{(p^2c^2)}{m} = \frac{[M]^2[L]^4[T]^{-4}}{[M]} = [M][L]^4[T]^{-4}$ Non homogène car les termes de la différence ne sont pas homogènes.

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$[p^2c^2] = [M]^2[L]^4[T]^{-4}$. $[m^2c^4] = [M]^2[L]^4[T]^{-4}$; $[E]^2 = [M]^2[L]^4[T]^{-4}$ Homogène

Exercice 4

1) Construisez une grandeur ayant pour dimension le temps à l'aide d'une résistance R et d'une capacité C.

2) Même question avec une résistance R et une inductance L.

3) Déterminez l'équation dimensionnelle de la raideur K d'un ressort, puis construisez une grandeur ayant pour dimension le temps à l'aide d'une raideur K et d'une masse m.

Solution Ex 4

1) La loi d'Ohm U=RI s'écrit en termes dimensionnels comme suit : [U]=[R].I (1)

La relation entre le courant et la tension aux bornes d'un condensateur s'écrit comme suit :

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

Soit dimensionnellement: $I = [C]\frac{[U]}{T}$ (2)

D'après les équations (1) et (2), nous avons :

$$\frac{[U]}{I} = [R] = \frac{T}{[C]}$$

D'où $[RC] = T$

Le produit a la dimension du temps.

2) La relation entre le courant et la tension aux bornes d'une bobine s'écrit comme suit:

$$U = L\frac{dI}{dt}$$

Soit dimensionnellement: $[U] = [L]\frac{I}{T}$ (3)

D'après les équations (1) et (3), nous avons: $\frac{[U]}{I} = [R] = \frac{[L]}{T}$ d'où $\frac{[L]}{[R]} = T$

Le rapport a la dimension du temps.

3) La force de tension d'un ressort est de la forme. À partir de là, nous déduisons l'équation dimensionnelle

Selon le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}$ soit $[F] = MLT^{-2}$.

Nous avons donc: $MLT^{-2} = [K].L$, par conséquent $[K] = MT^{-2}$.

Si m est une masse, nous avons donc : $\left[\frac{m}{K}\right] = T^2$

La grandeur $\tau = \sqrt{\frac{m}{K}}$ a une dimension du temps.

Exercice 5

Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux, nous mesurons le diamètre intérieur (D_1) et le diamètre extérieur (D_2) et obtenons : $D_1 = (19,5 \pm 0,1)$ mm, $D_2 = (26,7 \pm 0,1)$ mm.

Indiquez le résultat de la mesure et sa précision.

Solution Ex 5

Tout d'abord, calculons l'épaisseur du cylindre: e=3,6m

L'incertitude absolue concernant l'épaisseur est donc $\boxed{\Delta e = \frac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2}}$ $\Delta e = \pm 0{,}1 mm$

Notons le résultat de la mesure : $e = (3{,}6 \pm 0{,}1) mm$

Nous déduisons l'incertitude relative : $\Delta_e / e = 0{,}03 = 3\,\%$

Exercice 6

Déterminez la densité (ρ) de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse (m) et de la longueur de ses arêtes (a). Notez le résultat de la mesure.

Solution Ex 6

Calcul de la densité $\rho = \frac{m}{v} = \frac{m}{a^3}$ $\rho = 3{,}041$ g/cm^3

Nous déduisons l'incertitude absolue à partir de l'incertitude relative :

$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}$ $\Rightarrow$ $\Delta\rho \simeq 0{,}02$ g/cm^3

D'où l'incertitude relative:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}0063 = 6{,}3\ \%$$

Écrire le résultat de la mesure : $\rho = (3{,}04 \pm 0{,}02)$ g/cm^3 .

Exercice 7

Soient les vecteurs suivants: $\vec{V_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{V_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{V_3} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ défini dans un cadre de référence $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

1) Calculez les amplitudes des trois vecteurs.
2) Déterminez les composantes et l'amplitude du vecteur $\vec{S} = \vec{V_1} + 2\vec{V_2} - \vec{V_3}$.
3) Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$transporté par vecteur $\vec{S}$. Déduisez ces directions cosinus.
4) Calculez les produits suivants $\vec{V_1}.\vec{V_2}$, $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$, $\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$. Et vérifiez que $\vec{V_1}.(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2})$=0.

Solution Ex 7

1) $|\vec{V_1}| = \sqrt{14}$

   $|\vec{V_2}| = \sqrt{6}$

   $|\vec{V_3}| = \sqrt{3}$

2) $\vec{S} = \vec{V_1} + 2\vec{V_2} - \vec{V_3} = 5\vec{\imath} + 6\vec{k}$

   $\vec{S} = \sqrt{61}$

3) $|\vec{S}| = |\vec{S}|.\vec{u} \;\Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{5}{\sqrt{61}}\vec{\imath} + \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{k}$

$$cos\alpha = \frac{\vec{S}.\vec{\imath}}{|\vec{S}||\vec{\imath}|} = \frac{5}{\sqrt{61}} \quad ; \quad cos\beta = 0 \quad ; \quad cos\gamma = \frac{\vec{S}.\vec{k}}{|\vec{S}||\vec{k}|} = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} = cos\alpha\,\vec{\imath} + cos\beta\,\vec{\jmath} + cos\gamma\,\vec{k}$$

4)

- $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = 2 - 3 + 2 = 1.$

- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$

- $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

- $\vec{V}_1 . (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 - 3 = -5$

- Vérifiez que $\vec{V}_1 . (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$=0 :

$$\vec{V}_1 . (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = 14 - 9 - 5 = 0.$$

À vérifier :

Nous avons : $\vec{V}' = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$\vec{V}'$ perpendiculaire à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ alors $\vec{V}_1 . \vec{V}' = 0.$

Exercice 8

Soient les vecteurs :

$$\vec{A} = \vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$$

$$\vec{B} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

1) Trouvez les valeurs de α et β telles que $\vec{A}$ est parallèle à $\vec{B}$.

2) Déterminez les vecteurs unitaires of $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Solution Ex 8

1)

- Méthode 1 :

$$\vec{A} /\!/ \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \alpha & \beta \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (3\alpha + 3\beta)\vec{i} + (3\beta - 3)\vec{j} + (-3 - 3\alpha)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 0 \\ 3\beta - 3 = 0 \\ -3 - 3\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

- Méthode 2 :

$$\vec{A} /\!/ \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = \lambda \vec{B}$$

Donc: $\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k} = 3\lambda\vec{i} - 3\lambda\vec{j} + 3\lambda\vec{k}$

$$3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \text{ et } \beta = 1$$

2) Détermination des vecteurs unitaires de $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

Exercice 9

Considérons les deux vecteurs suivants: $\vec{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{OB} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$, Dans le système de coordonnées (OXYZ), calculez :

1) Produits scalaires: $\vec{OA} \bullet \vec{OB}, \vec{OA} \bullet \vec{OA}$ et $\vec{OB} \bullet \vec{OB}$

2) Produits vectoriels: $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$ et $\vec{OB} \wedge \vec{OA}$. Déduisez l'aire du triangle OAB.

3) Déterminez le vecteur $\vec{AC}$ avec un module égal à 5 et perpendiculaire au plan formé par OA et OB.

4) Le double produit vectoriel: $\vec{OA} \wedge \vec{OB} \wedge \vec{AB}$

5) Le produit mixte: $\vec{OA} \bullet \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right)$. Déduisez le volume du parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs $\vec{OA}, \vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Solution Ex 9

$$\vec{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} \ ; \ \vec{OB} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$$

1) Calcul des produits scalaires :

$$\vec{OA} \bullet \vec{OB} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 + (-3) \cdot (-3) = -2$$

$$\vec{OA} \bullet \vec{OA} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 2^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 22$$

$$\vec{OB} \bullet \vec{OB} = \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 5^2 + 7^2 + (-3)^2 = 83$$

2) Calcul des produits vectoriels :

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 5\vec{i} \\ 7\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 9+21 \\ -(-6+15) \\ 14+15 \end{cases} = \begin{cases} 30\vec{i} \\ -9\vec{j} \\ 19\vec{k} \end{cases} = -\vec{OB} \wedge \vec{OA}$$

Aire du triangle :

L'aire du triangle formé par les vecteurs et est égale à la moitié de la quantité $\left|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right|$:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OAOB} = \frac{1}{2}\left|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{30^2 + (-9)^2 + (19)^2} = \frac{36.63}{2} = 18.31 \text{ Unités de surface.}$$

3) Vecteur $\vec{AC}$:

D'une part, $\vec{AC}$ est perpendiculaire au plan $\left(\vec{OA}, \vec{OB}\right) \Rightarrow \vec{AC} = \lambda.\left(\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right)$ telles que $\lambda \in R$

D'autre part; $\left|\vec{AC}\right| = 5.$

$$\left|\vec{AC}\right| = \left|\lambda.\left(\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right)\right| = \lambda.\left|\left(\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right)\right| = 36.63\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{36.63} = 0.136$$

$$\text{Donc : } \vec{AC} = 4.01\vec{i} - 1.23\vec{j} + 2.59\vec{k}$$

4) Le double produit vectoriel: $\vec{OA} \wedge \left(\vec{OB} \wedge \vec{AB}\right)$

$$\vec{OA} \wedge \left(\vec{OB} \wedge \vec{AB}\right) = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 5\vec{i} \\ 7\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 3\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 12\vec{i} \\ -9\vec{j} \\ -1\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} -24\vec{i} \\ -34\vec{j} \\ 18\vec{k} \end{cases}$$

5) Le produit mixte: $\vec{OA} \bullet \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right)$

$$\vec{OA} \bullet \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right) = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \begin{cases} 3\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 4.01\vec{i} \\ -1.23\vec{j} \\ 2.59\vec{k} \end{cases} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(10.36\vec{i} - 7.77\vec{j} - 19.73\vec{k}\right)$$

$= 20.72 + 23.31 + 59.19 = 103.22$ Unités de volume: Volume du parallélépipède dont les côtés sont des vecteurs $\vec{OA}; \vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle.

1) Construisez les points D et E tels que: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

2) Montrez que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. What can be deduced geometrically ?

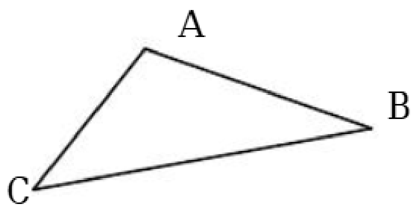
3) Montrez que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA}$. Déduisez de cette égalité et de la précédente que E, B et D sont alignés.

4) Soit I le milieu de [AB]. Justifiez cela. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$. Que peut-on déduire pour les lignes (AE)

et (CI) ?

Solution Ex 10

1)



2) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

3) Nous pouvons en déduire que ABDC est un parallélogramme.$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} +$ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} +$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$

Nous concluons que:

$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires, les points E, B et D sont alignés.

4) Puisque I est le milieu de [AB], nous avons: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Où $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI}$

Il s'ensuit que, comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ alors $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CI}$

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CI}$ par conséquent $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Les droites (AE) et (CI) sont parallèles.

Exercice 11

Dans un trièdre orthonormé direct, on nous donne le vecteur de glissement $\vec{V} = (1,2,3)$ passage par un point A(3,4,2).

1) Calculer le moment de $\vec{V}$ par rapport à O et par rapport aux axes Ox, Oy et Oz.
2) Soit Δ une droite avec vecteur unitaire $\vec{u}$ (-1/√2, 1/2, 1/2) passant par O, calculez le moment de $\vec{V}$ par rapport à (Δ). Calculez le moment de $\vec{V}$ par rapport au point B (3,6,0).
3) Calculez le moment de $\vec{V}$ par rapport à l'axe (Δ) qui passe par les points A et B.

Solution Ex 11

$\vec{V} = (1,2,3)$ passe par A(3,4,2).

1) $\vec{\mathcal{M}}\,\vec{V}/_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V} = \begin{cases}3\\1\end{cases} \wedge \begin{cases}4\\2\end{cases} \wedge \begin{cases}2\\3\end{cases} = 8\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

- $\mathcal{M}\,\vec{V}/_{ox} = \vec{\mathcal{M}}\,\vec{V}/_O \cdot \vec{u}_{ox} = \begin{pmatrix}8\\7\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 8\ (units)$

  With $\vec{u}_{ox} = \vec{\imath} = \begin{cases}1\\0\\0\end{cases}$ vecteur unitaire, et O ϵ (Δ)

- $\mathcal{M}\,\vec{V}/_{oy} = -7\ (u)$
- $\mathcal{M}\,\vec{V}/_{oz} = 2\ (u)$

2) $\overrightarrow{u_\Delta}$ (-1/√2, 1/2, 1/2)

$$\mathcal{M}\,\vec{V}/_{(\Delta)} = \vec{\mathcal{M}}\,\vec{V}/_O \cdot \vec{u}_{(\Delta)} = \begin{pmatrix}8\\7\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-{}^1/_{\sqrt{2}}\\ {}^1/_{\sqrt{2}}\\ {}^1/_{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{-8}{\sqrt{2}} - \frac{-7}{2} + \frac{2}{2} = -8{,}2\ (u)$$

$$\vec{\mathcal{M}}\,\vec{V}/_B = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -10\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

3) L'un ou l'autre axe (Δ'), qui passe par A et B :

$$\mathcal{M}\,{}^{\vec{V}}\!/_{(\Delta')} = \vec{\mathcal{M}}\,{}^{\vec{V}}\!/_{B}\,.\vec{u}_{(\Delta')}$$

Avec B $\in$ (Δ')

$$\vec{u}_{(\Delta')} = \frac{\overrightarrow{BA}}{BA} = \frac{-2\vec{j}+2\vec{k}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

$$\mathcal{M}\,{}^{\vec{V}}\!/_{(\Delta')} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/_2 \\ \sqrt{2}/_2 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

Ou écrivez :

$$\mathcal{M}\,{}^{\vec{V}}\!/_{(\Delta')} = \vec{\mathcal{M}}\,{}^{\vec{V}}\!/_{A}\,.\vec{u}_{(\Delta')} = 0$$

$\vec{\mathcal{M}}\,{}^{\vec{V}}\!/_{A} = 0$ parce que $\vec{V}$ passe à travers (A).

Exercices complémentaires

Exercice 1

Trouver l'équation aux dimensions du moment d'une force par rapport à un point. Quelle est alors son unité dans le système international.

Exercice 2

1) Déterminer la dimension d'une densité superficielle de charge σ, dans le système international SI. σ étant donnée par: $\sigma = Q / S$.

2) Déduire la dimension de la permittivité du vide s_0 sachant que pour un conducteur de charge superficielle σ on a : $p = \sigma^2 / 2s_0$.

Exercice 3

Soit A une grandeur physique de dimension $M.L^{-2}.T^{2}$. Cette grandeur physique est calculée à partir de l'équation suivante : $A = \alpha.V^{-2}.F^{-2} + \beta.P^{3}.m$

F est une force, V est une vitesse, P est une pression et g l'accélération de la pesanteur. Etablir les dimensions de α et β.

Exercice 4

L'équation d'état des gaz parfaits relative a une mole s'écrit : $P.V_m = R.T$.
Donner l'équation aux dimensions de la constante molaire des gaz parfaits.

Exercice 5

Dans le plan, considérons les points A (-1;0), B (2;4) et C (3;-1).

1) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Calculer les coordonnées du point situé au quart (à partir de A) du segment [AB].

3) Déterminer D tel que ABCD soit un parallélogramme.

4) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ? Comment cela se manifeste-t-il algébriquement via un calcul avec les composantes ?

5) Ecrire $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, géométriquement, puis algébriquement.

Exercice 6

Etant donnés trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, on considère le double produit vectoriel :
$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$.

1) Calculer les composantes du double produit vectoriel.

2) En déduire la relation : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C}.\vec{A}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$.

3) Montrer que si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires, on a : $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A} - \vec{B}\|$

Chapitre I

Cinématique d'une particule

Rappel du cours : cinématique

Trajectoire

La trajectoire est le chemin géométrique des positions séquentielles du point matériel au fil du temps par rapport au système de référence considéré.

Équation du mouvement

Le changement de position d'un mobile au fil du temps dans un référentiel sélectionné est appelé équation du mouvement.

Exemple : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$

Caractéristiques du mouvement

Trois vecteurs sont nécessaires pour décrire le mouvement du corps : le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération.

Vecteur vitesse

Le rythme par rapport au temps correspond au changement de position à l'instant t.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Vecteur d'accélération

La variation du vecteur vitesse par rapport au temps est le vecteur accélération à l'instant t.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Dans le système international, l'accélération est mesurée en m/s^2.

Système de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Soit le cadre R(O,x,y,z) avec les vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ and $\vec{k}$.

Avec x, y et z sont les coordonnées du point M qui donnent sa position dans l'espace.

Le vecteur position est : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Coordonnées polaires

En utilisant une coordonnée r (la distance entre l'origine du repère et le point M) et l'angle orienté θ que le vecteur $\vec{r}$ avec l'axe des abscisses (OX), nous pouvons déterminer l'emplacement du point M. Les coordonnées polaires sont les données (r, θ). Deux vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ constituent la base du système de coordonnées polaires.

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r} \Rightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = r$$

Coordonnées cylindriques

Un point M dans l'espace est représenté par les coordonnées (r, θ, z) dans le système de coordonnées cylindriques, où z est la distance le long de l'axe Oz, r et θ sont les coordonnées polaires de la projection de M sur le plan xy, et les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})$ constituent la base du cadre de référence cylindrique.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = r.\overrightarrow{u_r} + z\,\vec{k}$

Coordonnées sphériques

Dans le système de coordonnées sphériques, un point M est représenté par les coordonnées (r, θ, φ), avec les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ servant de base:

$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$

Cadre de Frenet (base intrinsèque)

Il est difficile d'étudier le point M dans des coordonnées cartésiennes pour des mouvements sur des trajectoires curvilignes. Ce problème peut être résolu en utilisant le repère frénétique, qui est relié au point M. Deux vecteurs unitaires, $\vec{u}_t$ and $\vec{u}_n$, sont associés. Un référentiel qui se déplace avec le mobile M est appelé référentiel frénétique.

Exercices corrigés

Exercice 1

Soit $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une représentation cartésienne. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération d'un point M par rapport à R dans les coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Solution Ex 1

a) Coordination cartésienne :

Le vecteur de position :

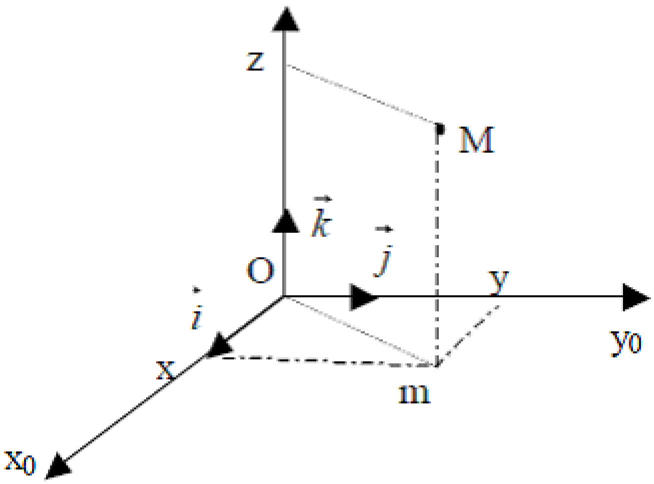
$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Le vecteur d'accélération :

$$\vec{a}(M) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$



b) Coordonnées cylindriques :

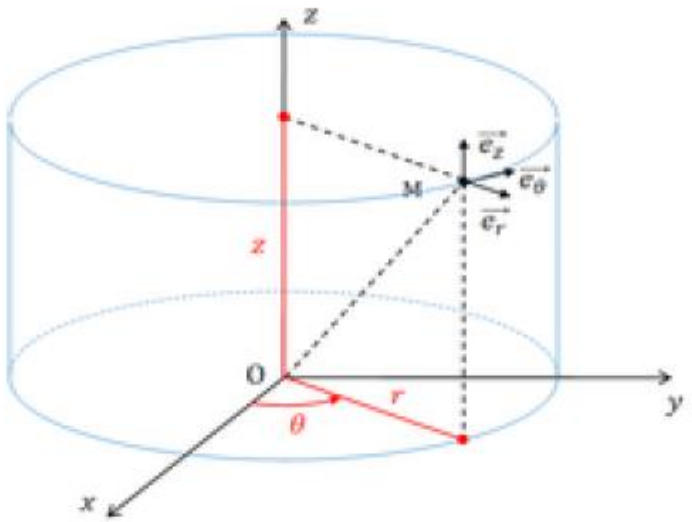
$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}.\vec{e}_r$$

$$\text{par conséquent} \begin{cases} \vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k} \\ \\ \vec{a}(M) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$



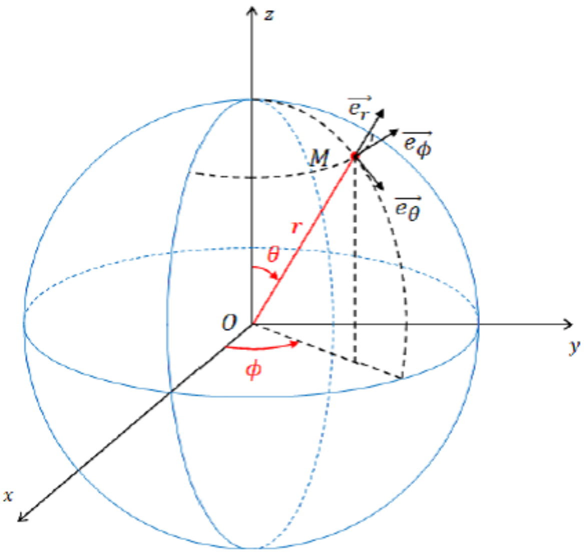
c) Coordonnées sphériques :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\text{avec} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Rappelons les relations entre les vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$
$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$



Dérivons le vecteur de position en coordonnées sphériques par rapport au temps :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

Dérivons le vecteur $\vec{e}_r$, puis organisez la nouvelle expression pour obtenir le résultat suivant :

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta}_{\vec{e}_\theta}\right] + \dot{\varphi}\sin\theta\left[\underbrace{-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi}_{\vec{e}_\varphi}\right]$$

C'est-à-dire: $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta.\vec{e}_\varphi$

Par substitution, nous obtenons l'expression finale de la vitesse en coordonnées sphériques:
$\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\varphi}.\vec{e}_\varphi$

Le vecteur accélération :

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps, on obtient l'expression du vecteur accélération, qui est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}.\vec{e}_r + (r\sin\theta)\dot{\varphi}.\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right]$$

$$\vec{a}(M)=\left[\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right]\vec{e}_r+\left[2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{e}_\theta+$$
$$\left[2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+r\ddot{\varphi}\sin\theta\right]\vec{e}_\varphi$$

Exercice 2

Les composantes de la vitesse d'un objet en mouvement sont données par les équations suivantes :

$$v_x=\frac{t}{t^2+1}$$
$$v_y=2t$$

Au temps t=0, l'objet en mouvement se trouve à la position x=0 et y=1. Déterminer l'équation de la trajectoire y(x) et les composantes de l'accélération $a_x(t)$ et $a_y(t)$.

Solution Ex 2

$$v_x=\frac{t}{t^2+1}=\frac{dx}{dt}$$
$$v_y=2t=\frac{dy}{dt}$$

A *t=0, x=0, y=1*

$$\bullet\frac{dx}{dt}=\frac{t}{t^2+1}\Rightarrow x=\int\left(\frac{t}{t^2+1}\right)dt\times\frac{2}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+c_1$$

$$t=0, x=0\Rightarrow c_1=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)$$

$$\bullet\frac{dy}{dt}=2t\Rightarrow y=\int 2t\,dt\Rightarrow y=t^2+c_2$$
$$t=0, y=1\Rightarrow c_1=1$$
$$\Rightarrow y=t^2+1$$

Exercice 3

Considérons le vecteur position d'un objet en mouvement :

$$\vec{r} = 2t^2\vec{\imath} + (5 - 3t)\vec{\jmath} - t^3\vec{k}$$

1) Calculer sa vitesse et son accélération.

2) Étudier la nature du mouvement.

Solution Ex 3

1)

- ✓ La vitesse du mobile :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 3t^2\vec{k}$$

Son module :

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 16t^2 + 9t^4}$$

- ✓ L'accélération de l'objet en mouvement :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{\imath} - 6t\vec{k}$$

Son module :

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 36t^2}$$

Le produit scalaire $\vec{a}.\vec{v} = 16t + 18t^3$ est positif.

2)

Par conséquent, le mouvement de l'objet en mouvement est accéléré.

• Le rayon de courbure est donné par la relation :

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\wedge\vec{a}|}$$

$$\vec{v}\wedge\vec{a} = 18t\vec{\imath} + 12t^2\vec{\jmath} + 12\vec{k}$$

Par conséquent, le rayon de courbure est :

$$\rho = \frac{(9 + 16t^2 + 9t^4)^{3/2}}{(144 + 324t^2 + 144t^4)^{1/2}}$$

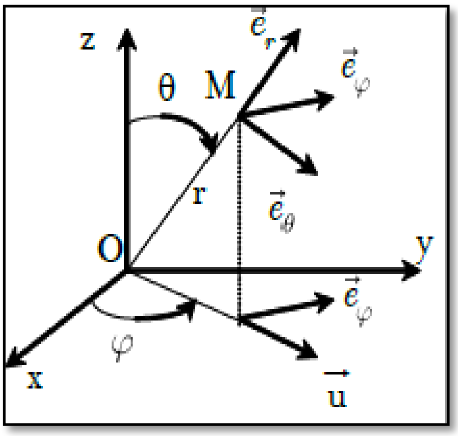
Exercice 4

1) Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point M en fonction de ses coordonnées sphériques.
2) Déduiser l'angle entre deux vecteurs de position $\overrightarrow{OM}_1(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ et $\overrightarrow{OM}_2(r_2,\theta_2,\varphi_2)$ en fonction de $\theta_1,\varphi_1,\theta_2,\varphi_2$.

Solution Ex 4

Les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point M en fonction de ses coordonnées sphériques :

$O\vec{M} = r\vec{e}_r \qquad O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



avec $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$$\overrightarrow{OM} = r\left[\underbrace{\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta}_{\vec{e}_r}\right]$$

2) L'angle entre deux vecteurs de position $\overrightarrow{OM}_1(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ et $\overrightarrow{OM}_2(r_2,\theta_2,\varphi_2)$ selon $\theta_1,\varphi_1,\theta_2,\varphi_2$:

$$\overrightarrow{OM}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = r_1\sin\theta_1\cos\varphi_1.\vec{i} + r_1\sin\theta_1\sin\varphi_1.\vec{j} + r_1\cos\theta_1.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = r_2\sin\theta_2\cos\varphi_2.\vec{i} + r_2\sin\theta_2\sin\varphi_2.\vec{j} + r_2\cos\theta_2.\vec{k}$$

alors: $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = r_1 r_2 \left[\sin\theta_1 \sin\theta_2 \left(\underbrace{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \right) + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right]$

$$= r_1 r_2 [\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2]$$

D'autre part: $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|.\left|\overrightarrow{OM_2}\right|.\cos\beta = r_1 r_2 \cos\beta$

$$\Rightarrow \cos\beta = [\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2]$$

Exercice 5

Le mouvement plan d'un objet en mouvement est défini par :

$$x = sin^2(t) \quad ; \quad y = 1 + \cos(2t)$$

1) Déterminer la trajectoire du mouvement.
2) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération.

Solution Ex 5

1) Sachant que $\cos(2t) = 1 + 2sin^2(t)$, nous obtenons la relation suivante entre x et y : y = 2(1+x), qui est l'équation d'une droite.

Depuis $0 \le x \le 1$ and $0 \le y \le 2$: La trajectoire est donc un segment reliant les points (1,0) et (0,2). 2)

- Le vecteur vitesse a les coordonnées :

$v_x = 2\, sin\,(t) cos(t) = sin(2t)$ and $v_y = -2\sin(2t)$,

par conséquent, $v_y = -2v_x$ with $v_x(0) + v_y(0) = 0$ and $v_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

- Le vecteur d'accélération a les coordonnées :

$$a_x = 2cos(2t) \quad \text{et} \quad a_y = -\cos(2t)$$

Donc: $a_y = -1$ et $a_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$; $a_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Exercice 6

Un point matériel M se déplace dans le plan (xOy) selon les équations de mouvement suivantes: $x(t) = t + 1$ et $y(t) = t^2 - 2$

1) Donner l'équation du mouvement du corps en mouvement.

2) Fournir les vecteurs de position, de vitesse et d'accélération.

Solution Ex 6

1) L'équation de la trajectoire est : $y=x^2$ (trajectoire parabolique).

2) Vecteur de position: $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \vec{OM} = (t+1)\vec{i} + (t^2-2)\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{i} - 2t.\vec{j}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j}$$

Exercice 7

On donne les équations paramétriques du mobile M par rapport un référentiel : $x = 2t^2 + 1$ et $y = t$.

1) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. Quelle est son allure ?

2) Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

3) Déterminer la vitesse du mobile $\vec{v}(t)$.

4) Déterminer l'accélération du mobile $\vec{a}(t)$.

5) Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

6) Déduire le rayon de courbure $\rho(t)$.

Solution Ex 7

Nous avons les équations paramétriques du mobile :

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 + 1 & (1) \\ y(t) = t & (2) \end{cases}$$

1) Equation de la trajectoire :

On tire le temps de l'équation (2) et en remplacent dans l'équation (1):

Donc $x(t) = 2y^2 + 1$, alors l'équation parabolique $x = f(y)$, l'allure de la trajectoire est une parabole.

2) Expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{OM} = (2t^2 + 1)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}$

3) Vitesse du mobile $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[(2t^2 + 1)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}] = \dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath}$$

Alors, $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} = 4t\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

4) Accélération du mobile $\vec{a}(t) = \vec{\gamma}(t)$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}[(2t^2 + 1)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}] = \ddot{x}(t)\vec{\imath} + \ddot{y}(t)\vec{\jmath}$$
$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{\jmath}$$

Donc, $\vec{a}(t) = 4\vec{\imath} \Rightarrow$ Vecteur fixe.

Comme le vecteur d'accélération est basé sur un seul vecteur unitaire, il est donc fixe et par conséquent, l'accélération reste constante.

5) Composantes tangentielle et normale de l'accélération $\vec{a}(t)$.

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{a_N}(t) + \overrightarrow{a_T}(t) = |\overrightarrow{a_N}(t)|\overrightarrow{U_N} + |\overrightarrow{a_T}(t)|\overrightarrow{U_T}$$

D'où : $|\vec{a}(t)|^2 = |\overrightarrow{a_T}(t)|^2 + |\overrightarrow{a_N}(t)|^2$

- Composante tangentielle de l'accélération

$$|\overrightarrow{a_T}(t)| = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

Nous avons : $\vec{v}(t) = 4t\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, alors le module de $\vec{v}(t)$ est donc :

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(4t)^2 + (1)^2} = \sqrt{16t^2 + 1}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{16t^2 + 1}$$

$$|\overrightarrow{a_T}(t)| = \frac{16t}{\sqrt{16t^2 + 1}}$$

- Composantes normale de l'accélération

D'où : $|\vec{a}(t)|^2 = |\overrightarrow{a_T}(t)|^2 + |\overrightarrow{a_N}(t)|^2$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = 4\ {}^{m}/_{s^2}$$

$$|\overrightarrow{a_N}(t)| = \sqrt{|\vec{a}(t)|^2 - |\overrightarrow{a_T}(t)|^2} = \sqrt{(4)^2 - \left(\frac{16t}{\sqrt{16t^2 + 1}}\right)^2} \Rightarrow \quad |\overrightarrow{a_N}(t)| = \frac{4}{\sqrt{16t^2 + 1}}$$

6) Rayon de courbure $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\left(\sqrt{16t^2 + 1}\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{16t^2 + 1}}} \quad \Rightarrow \rho(t) = \frac{(16t^2 + 1)^{3/2}}{4}$$

Exercice 8

Le mouvement d'un point matériel *M* est donné par les équations suivantes :

$x(t) = 8t - 4t^2$ et $y(t) = 6t - 3t^2$; (x, y en mètre, t en seconde).

1) On demande de déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération de point M.

2) Déduire le rayon de courbure et conclure.

Solution Ex 8

$$\begin{cases} x(t) = 8t - 4t^2 \\ y(t) = 6t - 3t^2 \end{cases}$$

1)

- Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = (8t - 4t^2)\vec{\imath} + (6t - 3t^2)\vec{\jmath}$$

- La trajectoire de M :

$$x(t) = 8t - 4t^2 = 4(2t - t^2)$$

$$y(t) = 6t - 3t^2 = 3(2t - t^2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x$$

- La vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = 8 - 8t$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = 6 - 6t$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (8 - 8t)\vec{\imath} + (6 - 6t)\vec{\jmath}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(8 - 8t)^2 + (6 - 6t)^2} \ {}^{m}/_{s}$$

- L'accélération

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (-8\vec{\imath} - 6\vec{\jmath})$$

$|\vec{a}(t)| = 10\ ^{m}/_{s^2}$

2) Rayon de courbure :

$$\rho(t) = \frac{v^2}{a_N}$$

$$a_N = \sqrt{|\vec{a}(t)|^2 - |\overrightarrow{a_T}(t)|^2}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 10\ ^{m}/_{s^2}$$

Alors : $a_N = 0 \Rightarrow \rho = \infty$

La droite est un arc d'un cercle de rayon R.

Exercice 9

Les coordonnées polaires d'une particule M sous l'influence de champs électriques et magnétiques complexes sont les suivantes :

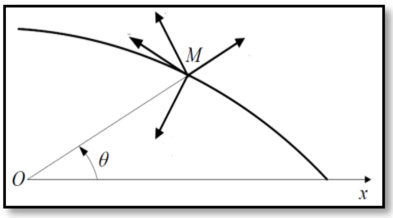
$$\begin{cases} r = r_0 e^{-\frac{t}{a}} \\ \theta = \dfrac{t}{a} \end{cases}$$

Où : r_0 et a sont des constantes positives.

1) Identifier les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, vecteur vitesse et le vecteur accélération de la particule.

2) Démontrer que l'angle $(\vec{v}, \vec{e}_\theta)$ reste constant. Quelle est la valeur de cet angle ?

3) Représenter les vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{\tau}, \vec{n}.$; sur la figure 1.



Solution Ex 9

1) Vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération de la particule.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_\rho = r_0 e^{-\frac{t}{a}}\vec{e}_\rho .$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_\rho + r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = \frac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}.(-\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta)$$

2)
$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta = -2\frac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}.\vec{e}_\theta = v.e_\theta \cos(\vec{v},\vec{e}_\theta) \Rightarrow \cos(\vec{v},\vec{e}_\theta) = \frac{\vec{v}.\vec{e}_\theta}{v.e_\theta}$$

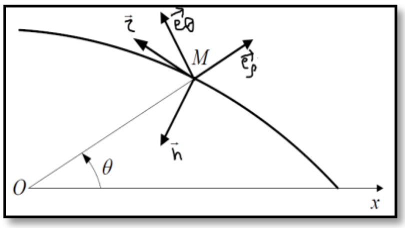
$$\cos(\vec{v};\vec{e}_\theta) = \frac{\frac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}\left(-\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta\right)\vec{e}_\theta}{\frac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}.e_\theta}$$

$-\vec{e}_\rho.\vec{e}_\theta = 0$ $\qquad$ $\vec{e}_\theta.\vec{e}_\theta = 1$ $\qquad$ $e_\theta = 1$

$$\Rightarrow \cos(\vec{v};\vec{e}_\theta) = \frac{1}{e_\theta} = 1 \Rightarrow (\vec{v},\vec{e}_\theta) = 0$$

Ce résultat indique que $\vec{v}$ et $\vec{e}_\theta$ sont colinéaires.

2) Représentation des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{\tau}, \vec{n}$.



Exercices complémentaires

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le mouvement d'un mobile M est défini par les équations suivantes : $x = t^3 - 3t$; $y = -2t^2; z = t^3 + 2t$.

1) Calculer les coordonnées à l'instant t, du vecteur vitesse $\vec{v}$, et celles du vecteur accélération $\vec{a}$, du mobile M.

2) Calculer le module du vecteur $\vec{v}$ et montrer que ce vecteur fait un angle constant avec Oz.

Exercice 2

Soit, dans un plan (P), un repère orthonormé xOy et un mobile M se déplaçant dans ce plan.

A l'instant t, ses coordonnées sont définies par : $x = \sqrt{2}\, cos\frac{t}{2}$; $y = 2\sqrt{2}\, sin\frac{t}{2}$

1) Quelle est la trajectoire ?

2) Calculer les coordonnées à l'instant t du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ de ce mobile. Quelle relation y a- t- il entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$? Au bout de combien de temps le mobile repasse-il par une même position sur la courbe ?

3) Entre $t_1 = 0$ et $t_2 = \pi$, déterminer les positions du mobile et les coordonnées de $\vec{v}$ pour avoir un vecteur accélération de longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3

Un point M trace une hélice circulaire autour de l'axe OZ. Ses équations de mouvement sont les suivantes : $x = R\, cos\theta$; $y = R\, sin\theta$; $z = h\theta$.

R représente le rayon du cylindre de révolution sur lequel l'hélice est dessinée, h est une constante et θ symbolise l'angle formé par la projection OM' de OM sur xOy par rapport à Ox.

1/ Fournisser les formules de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques.

2/ Prouver que le mouvement de rotation est uniforme, que le vecteur accélération traverse l'axe du cylindre et est en parallèle avec le plan XOY. Déterminer le rayon de courbure.

Exercice 4

Sur le plan xOy d'un système de coordonnées, un point P se déplace le long d'un cercle dont le rayon est R et le centre se situe en I (R, 0, 0).

Au moment t = 0, P est situé en A (2R, 0, 0) et a une vitesse positive donnée par $\overrightarrow{v_0}(0, v_0, 0)$.

On utilise les symboles r et q pour représenter les coordonnées polaires de P.

1) Établir l'équation polaire du cercle et en déduire son équation sous forme cartésienne.

2) Sur la figure, illustrer la base polaire de P. Déterminer les éléments polaires des vecteurs vitesse $\vec{v}$

et accélération $\vec{a}$ de P en utilisant q et ses dérivées successives par rapport au temps.

3) Considérons s comme l'abscisse curviligne de P, où A représente l'origine.

- Exprimer s en termes de q.

-Illustrer sur le graphique la base intrinsèque $(\vec{T},\vec{N})$ de P.

-Effectuer le calcul des composantes de $\overrightarrow{v}$et de$\overrightarrow{a}$ en utilisant q et ses dérivées successives par rapport au temps dans cette base.

- Déterminer les éléments polaires de $\vec{T}$et de $\vec{N}$. Dans ces conditions, identifiez les composantes polaires de $\overrightarrow{v}$et de$\overrightarrow{a}$.

4. Nous notons ω la vitesse angulaire de P, que nous supposons constante dans toutes les considérations suivantes.

- Fournir les expressions de θ et ensuite de r, en fonction de t.

-Former les expressions de $\overrightarrow{v}$et $\overrightarrow{a}$ en termes de t dans les systèmes de coordonnées polaires et de Frenet.

Exercice 5

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $R(O,x,y,z)$ par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) données par: $x = R(1 - \cos \omega t)$; $y = R(1 - \sin \omega t)$; $z = 0$.
Où R et ω sont des constantes positives et t le temps.
1) Donner l'équation de la trajectoire de M. En déduire sa nature.
2) Calculer la vitesse et l'accélération du point M.

Exercice 6

On considère le point matériel M avec les coordonnées $(-2, t-1, 1-t^2)$, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Ecrire son vecteur position, les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ et son module, les composantes

du vecteur accélération $\vec{a}$ et son module.

2) L'angle θ entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$, preciser sa valeur à t = 2s.

3) Trouver la projection de $\vec{a}$ sur l'axe tangent à la trajectoire T, qu'est ce qu'elle représente ?

4) Calculer l'accélération normale, tangentielle et le rayon de courbure.

Exercice 7

Les équations horaires d'un point matériel M dans le repère (xOy) sont :

$$x(t) = b\, e^{2t} \;\; ; \;\; y(t) = \frac{b^2}{2} e^{4t}$$

1) Trouver l'équation de la trajectoire du point M.

2) Quels sont les composantes et les modules des vecteurs vitesse et accélération ?

3) Calculer les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération, en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 8

Les équations paramétriques du vecteur vitesse d'un point M dans le système des coordonnées polaires sont données par : $\frac{dr}{dt} = 2k_1 t \; ; \;\; r\frac{d\theta}{dt} = k_2 r^2$.

Où : k_1 et k_2 sont des constantes positives.

1) Déterminer les équations du mouvement en coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$ sachant qu'à l'instant $t = 0$, on a : $r(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$.

2) En déduire l'équation de la trajectoire $r = f(\theta)$.

3) Calculer les composantes polaires a_r et a_θ du vecteur.

Chapitre II

Mouvement relatif

<u>Rappel du cours</u>: Mouvement relatif

Deux systèmes de référence distincts seront utilisés pour évaluer le mouvement d'un point M: Le mouvement d'une particule par rapport à un référentiel fixe est appelé mouvement absolu de la particule.

a- Mouvement absolu

Le système de référence R (0, x, y, z) est considéré comme fixe (absolu).

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$, mesurée à partir de l'origine des axes fixes x, y et z, définit la position absolue de M.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

b- Mouvement relatif:

Le système de référence mobile (relatif) est désigné par :

$R'(O', x', y', z')$.

Par rapport aux repères x', y' et z', le vecteur de position de M est le suivant :

$$\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}$$

La position de M peut désormais être exprimée à l'aide d'une équation vectorielle qui montre la relation entre les deux systèmes. En fait, c'est :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

<u>Calculs d'accélération et de vitesse</u>

Les vitesse du mobile par rapport à la référence mobile (relative) R' et la référence fixe (absolue) R

- La vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$: la vitesse du point M par rapport à R : $\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R$
- La vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$: la vitesse du point M par rapport à R': $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R'$
- L'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$: l'accélération du point M par rapport à R: $\overrightarrow{a_a} = \frac{d\,\overrightarrow{v_a}}{dt}/R$
- L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$: l'accélération du point M par rapport à R': $\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/R'$
- La vitesse d'entraînement: $\overrightarrow{v_\tau} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

b- La composition des accélérations

- $\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/R'$, est l'accélération relative

- $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$: est l'accélération de Coriolis

- $\overrightarrow{a_\tau} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$: est l'accélération d'entraînement.

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_\tau}}$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Soit une référence absolue $R_1(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et une référence relative $R_2(O_1,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{k})$ de telle sorte que $\theta(t)=(\vec{i},\vec{e}_1)=(\vec{j},\vec{e}_2)$. Le mouvement de O_1 est défini par: $\overrightarrow{OO_1}=x(t)\vec{i}+ax^2(t)\vec{j}$ où a est une constante positive et x(t) est une fonction du temps. Nous définissons $\overrightarrow{O_1M}=\lambda(t)\vec{e}_1$.

1) Calculez la vitesse relative $\vec{v}_r(M)$, la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M)$ et la vitesse absolue $\vec{v}_a(M)$.

2) Calculez l'accélération relative $\vec{a}_r(M)$, accélération de Coriolis $\vec{a}_c(M)$, accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ puis accélération absolue $\vec{a}_a(M)$.

Solution Ex 1

1) Calcul des vecteurs vitesse :

Le vecteur de rotation: $\vec{\omega}=\dot{\theta}.\vec{k}$

$$\vec{v}_r=\vec{v}(M/R_2)=\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R_2}=\dot{\lambda}\vec{e}_1$$

$$\vec{v}_e=\vec{v}(O_1/R_1)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\left(\dot{x}\vec{i}+2a\dot{x}x\vec{j}\right)+\dot{\theta}\vec{k}\wedge\lambda\vec{e}_1=\dot{x}\vec{i}+\lambda\dot{\theta}.\vec{e}_2+2ax\dot{x}\vec{j}$$

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}=\dot{\lambda}\vec{e}_1+\dot{x}\vec{i}+\lambda\dot{\theta}.\vec{e}_2+2ax\dot{x}\vec{j}$$

2) Calcul des vecteurs d'accélération :

$$\vec{a}_r=\vec{a}(M/R_2)=\ddot{\lambda}\vec{e}_1$$

$$\vec{a}_e=\vec{a}(O_1/R_1)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{a}(O_1/R_1)=\ddot{x}\vec{i}+2a\left(\dot{x}^2+x\ddot{x}\right)\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\ddot{\theta}\vec{k}\wedge\lambda\vec{e}_1=\lambda\ddot{\theta}.\vec{e}_2$$

$$\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)=\dot{\theta}\vec{k}\wedge\left(\dot{\theta}\vec{k}\wedge\lambda\vec{e}_1\right)=\dot{\theta}\vec{k}\wedge\left(\lambda\dot{\theta}.\vec{e}_2\right)=-\lambda\dot{\theta}^2\vec{e}_1$$

$$\vec{a}_c=2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r(M)=2\dot{\theta}.\vec{k}\wedge\dot{\lambda}\vec{e}_1=2\dot{\lambda}\dot{\theta}.\vec{e}_2$$

$$\vec{a}_a(M)=\left(\ddot{\lambda}-\lambda\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_1+\left(\lambda\ddot{\theta}+2\dot{\lambda}\dot{\theta}\right)\vec{e}_2+\ddot{x}\vec{i}+2a\left(\dot{x}^2+x\ddot{x}\right)\vec{j}$$

Exercice 2

Un référentiel R'(OX'Y') tournant par rapport à un référentiel fixe R(OXY) autour de l'axe (OZ) à une vitesse angulaire constante ω. Considérons l'angle θ entre les axes (OX) et (OX') tel que θ=ωt. Soit M un corps en mouvement suivant l'axe (OX') et obéissant à la relation suivante :

$\overrightarrow{OM} = ae^{-t}\vec{i}\,'$ (a constant)

1) Déterminer la vitesse relative, la vitesse de traînée et la vitesse absolue.

2) Déterminer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement, l'accélération de Coriolis

Solution Ex 2

1) Détermination de la vitesse relative, d'entraînement et de la vitesse absolue

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R'} = -ae^{-t}\vec{i}\,'$$

$$\vec{v}_e = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}}_{=0} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \omega\vec{k}\,'\wedge\overrightarrow{OM} = a\omega.e^{-t}\vec{j}\,'$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = -ae^{-t}\vec{i}\,' + a\omega.e^{-t}\vec{j}\,'$$

2) Détermination de l'accélération relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue

$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{R'} = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{R'} = ae^{-t}\vec{i}\,'$$

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt}\right)_{R'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right) = -a\omega^2e^{-t}\vec{i}\,'$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r\right) = -2a\omega^2e^{-t}\vec{j}\,'$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = ae^{-t}\left(1-\omega^2\right)\vec{i}\,' - 2a\omega^2e^{-t}\vec{j}\,'$$

Exercice 3

Un référentiel mobile R' (OX', OY', OZ') tourne par rapport à un référentiel fixe

R (OX, OY, OZ) le long de l'axe Oz à une vitesse angulaire constante Ω.

Un objet mobile M se déplace le long de la ligne OX' selon la loi, où A est une constante.

1) Déterminez la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le référentiel mobile X'OY' à l'instant t en fonction de A et Ω.
2) Déduisez la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, montrez que son module est constant.
3) Déterminez l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis de M par leurs projections dans le référentiel mobile X'OY' à l'instant t en fonction de A et Ω.
4) Déduisez l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrez que le module de cette accélération est constant.

Solution Ex 3

1) $\overrightarrow{OM}(t) = A\cos\Omega t\vec{\imath'}$ et $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k'}$

Sachant cela: $\vec{\imath'} = \cos\Omega t\vec{\imath} + \sin\Omega t\vec{\jmath}$; $\vec{\jmath'} = -\sin\Omega t\vec{\imath} + \cos\Omega t\vec{\jmath}$ and $\vec{k} = \vec{k'}$

- Vitesse relative: $\vec{v_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big| R'\right) = -A\Omega\sin\Omega t\vec{\imath'}$

$\vec{v_r} = -A\Omega\sin\Omega t(\cos\Omega t\vec{\imath} + \sin\Omega t\vec{\jmath})$

- Vitesse d'entraînement: $\vec{v_e} = (\vec{v}(o')|R) + \vec{\Omega}\wedge(\vec{r'}|R') = 0 + \Omega\vec{k'}\wedge A\cos\Omega t\vec{\imath'} = A\Omega\cos\Omega t\vec{\jmath'} = A\cos\Omega t(-\sin\Omega t\vec{\imath} + \cos\Omega t\vec{\jmath})$.

2) Vitesse absolue: $\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$

$\vec{v_a} = A\Omega\cos\Omega t\vec{\jmath'} - A\Omega\sin\Omega t\vec{\imath'} = A\Omega\left(-\sin\Omega t\vec{\imath'} + \cos\Omega t\vec{\jmath'}\right)$

Nous pouvons vérifier que $\vec{v_a} = A\Omega\left(-\sin 2\Omega t\vec{\imath'} + \cos 2\Omega t\vec{\jmath'}\right)$

$|\vec{v_a}| = A\Omega$ Le module de la vitesse absolue est constant.

3) Accélération relative $\vec{a_r} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\Big| R'\right) = -A\Omega^2\cos\Omega t\vec{\imath'}$

$\vec{a_r} = -A\Omega^2\cos\Omega t[\cos\Omega t\vec{\imath} + \sin\Omega t\vec{\jmath}]$

4) Accélération d'entraînement $\vec{a_e} = (\vec{a}(o')|R) + \dot{\vec{\Omega}}\wedge\left(\vec{r'}|R'\right) + \Omega\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r'}|R'\right) = 0 + 0 + \Omega\vec{k'}\wedge\left(\Omega\vec{k'}\wedge A\cos\Omega t\vec{\imath'}\right)$

$= -A\Omega^2 cos\Omega t\vec{\iota'}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\vec{a_e} = -A\Omega^2 cos\Omega t[cos\Omega t\vec{\imath} + sin\Omega t\vec{\jmath}\,]$

- Accélération de Coriolis

$\vec{a_c} = 2\Omega\vec{k'}\wedge\left(-A\Omega^2 sin\Omega t\vec{\iota'}\right) = -2A\Omega^2 sin\Omega t\vec{\jmath'}$

$\vec{a_c} = -2A\Omega^2 sin\Omega t[-sin\Omega t\vec{\imath} + cos\Omega t\vec{\jmath}\,]$

5) Accélération absolue: $\quad$: $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$

$\vec{a_a} = -2A\Omega^2 cos\Omega t\vec{\iota'} - 2A\Omega^2 sin\Omega t\vec{\jmath'}$

$\vec{a_a} = -2A\Omega^2 cos\Omega t\vec{\iota'} - 2A\Omega^2 sin\Omega t\vec{\jmath'} = -2A\Omega^2[cos2\Omega t\vec{\imath} + sin2\Omega t\vec{\jmath}\,]$

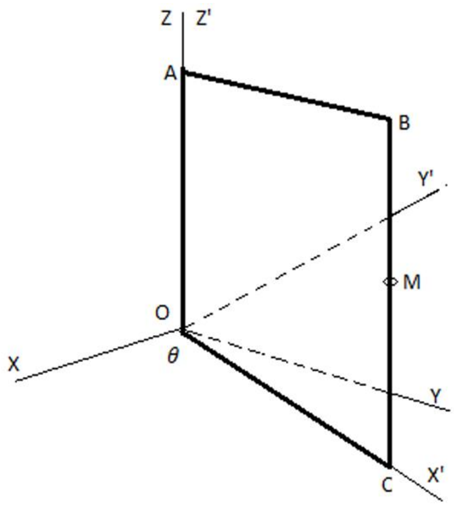
Nous pouvons vérifier que $\quad \vec{a_a} = \frac{d\vec{v_a}}{dt}$

$|\vec{a_a}| = 2A\Omega^2$; le module de l'accélération absolue est constant.

Exercice 4

Un carré OABC de côté *L* tourne autour de son côté OA à une vitesse angulaire constante ω. Un point matériel M se déplace le long de BC à partir de B avec une accélération constante a et une vitesse initiale Vo au point B.

1) Calculez la vitesse absolue et l'accélération absolue du point matériel M.
2) Déterminez la vitesse relative, la vitesse d'entraînement du point matériel M.
3) Déduisez sa vitesse absolue.
4) Déterminez l'accélération relative, l'accélération d'entraînement, l'accélération de Coriolis.
5) Déduisez son accélération absolue.



Solution Ex 4

Le vecteur de position par rapport au référentiel absolu :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = L\overrightarrow{\imath'} + (L - x)\vec{k}$ avec $x = \frac{1}{2}At^2 + V_0 t$

En utilisant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{k} = \overrightarrow{k'}$, $\omega = \omega\vec{k}$, $\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = -\omega\overrightarrow{\imath'}$

- La vitesse absolue :

$$\overrightarrow{v_a} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = L\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} - (At + V_0) = L\omega\overrightarrow{\jmath'} - (At + V_0)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_a} = L\omega\overrightarrow{\jmath'} - (At + V_0)\vec{k}$$

- L'accélération absolue: $\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}$

$$\overrightarrow{v_a} = -L\omega^2\overrightarrow{\imath'} - (At + V_0)\vec{k}$$

- La vitesse relative: $\overrightarrow{v_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$$\overrightarrow{v_r} = -(At + V_0)\vec{k}$$

- La vitesse d'entraînement: $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$

$$\overrightarrow{v_r} = L\omega\overrightarrow{\jmath'}$$

- La vitesse absolue :

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = L\omega\overrightarrow{j'} - (At + V_0)\vec{k}$, nous obtenons le même résultat.

- L'accélération relative :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = -A\vec{k}$$

- L'accélération d’entraînement :

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{\omega}\vec{k}\wedge L\omega\overrightarrow{j'}$$

$$\overrightarrow{a_e} = -L\omega^2\overrightarrow{i'}$$

- Accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} = 0$$

- Accélération absolue: $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$

$\overrightarrow{a_a} = -L\omega^2\overrightarrow{i'} - A\vec{k}$, nous obtenons le même résultat

Exercice 5

Un bateau navigue dans une direction de 60° nord-ouest (N60°O) à une vitesse de 4 km/h par rapport à l'eau. La direction du courant est telle que le mouvement résultant par rapport à la terre ferme est vers l'ouest à une vitesse de 5 km/h. Calculez la vitesse et la direction du

Solution Ex 5

$\vec{v}_a$: vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport au sol.

$\vec{v}_e$: la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du courant d'eau par rapport au sol.

$\vec{v}_r$: vitesse relative, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport à l'eau de mer.

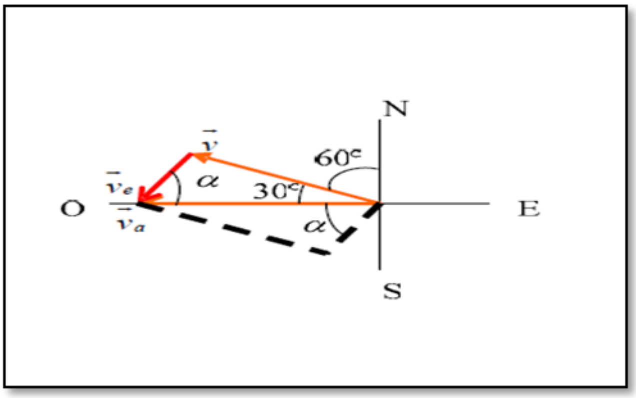
En nous basant sur la figure et la loi de composition des vitesses, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$v_e = \left[v_a{}^2 + v_r^2 - 2v_a.v_r.\cos 30^\circ\right]^{1/2}$$

Application numérique: $v_e = 2.52 km.h^{-1}$

Pour déterminer la direction de $\overrightarrow{v_e}$ il est nécessaire de calculer l'angle α à l'aide de la loi des sinus:



$$\frac{v_r}{\sin\alpha} = \frac{v_e}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_r}{v_e}\sin 30^\circ$$

Application numérique: $\sin\alpha = 0.4 \Rightarrow \alpha = 23.6^\circ$

Cela signifie que la direction du vecteur vitesse de l'eau de mer par rapport au sol forme un angle de 23,6° avec l'axe ouest-est vers le sud, soit 23.

Exercice 6

Un point M se déplace sur l'axe OZ selon l'équation horaire $Z = 3t^2$. Le référentiel relatif $R(OXYZ)$

tourne autour de l'axe O_1X_1 avec une vitesse angulaire ω et glisse sur ce même axe selon l'équation horaire $x = 4t^3$. $R_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ est absolu. L'axe OX est confondu avec l'axe O_1X_1, utiliser $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ pour :

1) Calculer la vitesse d'entrainement du module M.

2) Calculer la vitesse relative du mobile M.

3) Calculer la vitesse absolue du mobile M.

Solution Ex 6

1)

$$\vec{v_e}(M) = \vec{v_a}(0) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{v_a}(0) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1 O}}{dt}\right|_{R_1} = \frac{d}{dt}(x\vec{\imath}) = \dot{x}\vec{\imath} \qquad (\vec{\imath} = const).$$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\omega z \\ 0 \end{vmatrix} = -\omega z\vec{\jmath} \qquad \text{avec } \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v_e}(M) = 12t^2\vec{\imath} - 3\omega t^2\vec{\jmath}$$

2)

$$\vec{v_r}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg| R = \dot{z}\vec{k} = 6t\vec{k}$$

$$\vec{v_r}(M) = 6t\vec{k}$$

3)

$$\overrightarrow{v_0}(M) = \vec{v}_e + \vec{v}_r = 12t^2\vec{i} - 3\omega t^2\vec{j} + 6t\vec{k}$$

Exercice 7

Une roue de rayon OA tourne dans le référentiel absolu $R_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ autour de O_1 avec une vitesse angulaire ω constante. Un point M se déplace sur la roue. Le référentiel $R(OXYZ)$ est relatif.

1) Calculer la vitesse et l'accélération relatives du mobile M écrite dans R.

2) Calculer la vitesse et l'accélération d'entrainement du mobile M écrite dans R_1.

Solution Ex 7

1) Vitesse et l'accélération relatives du mobile M.

$$\overrightarrow{v_r}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

$$\overrightarrow{OM} = R\,cos\omega t\,\vec{i} + R\,cos\omega t\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v_r} = -R\omega\,sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\,sin\omega t\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{a_r}(M) = -R\omega^2\,cos\omega t\,\vec{i} - R\omega^2\,sin\omega t\,\vec{j}$$

2) Vitesse et l'accélération d'entrainement du mobile M.

- Vitesse d'entrainement.

$$\overrightarrow{v_e}(M) = \overrightarrow{v_a}(0) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Ona : $\overrightarrow{O_1O} = R\,cos\omega t\,\vec{i}_1 + R\,sin\omega t\,\vec{j}_1 \Rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}\right|_{R_1} = -R\omega\,sin\omega t\,\vec{i}_1 + R\omega\,cos\omega t\,\vec{j}_1 =$

$\overrightarrow{v_a}(0)$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R\, cos2\omega t \\ R\, sin2\omega t \\ 0 \end{vmatrix} ;$$

a savoir : $\overrightarrow{OM} = R\, cos\omega t\, \vec{\imath} + R\, cos\omega t\, \vec{\jmath}$

$$= R\, cos\omega t(cos\omega t\, \vec{\imath}_1 + sin\omega t\, \vec{\jmath}_1) + R\, sin\omega t(-sin\omega t\vec{\imath}_1 + cos\omega t\, \vec{\jmath}_1)$$

$$= \begin{vmatrix} Rcos^2\omega t - Rsin^2\omega t \\ 2Rcos\, \omega t \sin \omega t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R \cos 2\omega t \\ R \sin 2\omega t \end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} -R\omega \sin 2\omega t \\ R\omega \cos 2\omega t \end{vmatrix}$$

Alors :

$$\overrightarrow{v_e}(M) = [-R\omega \sin \omega t - R\omega \sin 2\omega t]\, \vec{\imath}_1 + [R\omega \cos \omega t + R\omega \cos 2\omega t]\vec{\jmath}_1$$

- Accélération d'entrainement.

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_a}(O) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\overrightarrow{a_a}(O) = \frac{d\overrightarrow{v_a}(0)}{dt} = (-R\omega^2\, cos\omega t)\overrightarrow{i_1} - (R\omega^2\, sin\omega t)\, \overrightarrow{j_1}$$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R\omega\, sin2\omega t \\ R\omega\, cos2\omega t \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\omega^2\, cos2\omega t \\ -R\omega^2\, sin2\omega t \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_e} = [-R\omega^2(cos\omega t + cos2\omega t)\,]\, \vec{\imath}_1 + [-R\omega^2(sin\omega t + \ sin2\omega t)]$$

Exercice 8

Un hélicoptère en mode stationnaire pulvérise un perticide verticalement à la vitesse v = 30 Km/h. Le vent souffle à la vitesse v_0 = 40 Km/h. Un agriculteur essaye de déterminer le mouvement des gouttelettes du perticide.

- Quelle est leur vitesse de chute, si l'agriculteur est immobile par rapport au sol.

Solution Ex 8

Le mouvement de la gouttelette de pesticide.

R_1 fixe lié à la terre, R mobile lié au vent

- La vitesse d'entrainement est celle du repère mobile (R) qui se déplace par rapport au repère fixe (R_1)

avec une vitesse $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_0} = v_0\,\vec{j}$

- La vitesse relative de la gouttelette (c-à-d) par rapport à (R) est $\overrightarrow{v_r} = -\overrightarrow{v_1} = -v_1\vec{k}$
- La vitesse absolue : $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = v_0\,\vec{j} - v_1\vec{k}$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{v_a}| = 70\ {}^{Km}/_{h}$

L'observateur qui est l'agriculteur verra les gouttelettes arriver en faisant un angle α avec (Z)

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{v_e}{v_r} \Rightarrow \quad \alpha = 53{,}13°.$

Exercice 9

Soit le repère absolu $R_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ et le repère relative $R(OXYZ)$ qui tourne autour de l'axe O_1Z_1, avec une vitesse angulaire constante ω. Soit (D) une droite fixe dans le repère R, parallèle à OY et passant par le point H, avec $OH = a\vec{\imath}$. Le point M se déplace sur la droite (D) selon la relation suivante : $HM = b\sin\Omega t\,\vec{j}$ (a, b sont des constantes).

- Calculer la vitesse et l'accélération absolues dans le repère relatif R, en utilisant la méthode directe et la méthode de composition des vitesses.

Solution Ex 9

1) La vitesse absolue.

La méthode directe

$$\vec{v_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$$

a, b et Ω sont des constantes.

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1H} + \overrightarrow{HM} = a\vec{i} + b\sin\Omega t\,\vec{j}$$

$$\vec{v_a} = a\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_1} + b\Omega\cos\Omega t\,\vec{j} + b\sin\Omega t\,\frac{d\vec{j}}{dt}$$

On sait que :

$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_1} = \omega\vec{j}$ et $\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{R_1} = -\omega\vec{i}$

$$\vec{v_a} = -b\omega\sin\Omega t\,\vec{i} + (a\omega + b\Omega\cos\Omega t\ \vec{j})$$

La méthode de composition des vitesses

$$\vec{v_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R} = \frac{d}{dt}(a\vec{i} + b\,sin\,\Omega t\,\vec{j})|_R$$

$$\vec{v_r} = b\Omega\cos\Omega t\,\vec{j}$$

$$\vec{v_e} = \left.\frac{d\overline{0_10}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \omega\vec{k}\wedge\left(a\vec{i} + b\,sin\,\Omega t\,\vec{j}\right) = 0 + a\omega\,\vec{j} -$$

$\omega b sin\,\Omega t\,\vec{i}$

$$\overrightarrow{v_e} = a\omega\,\vec{j} - \omega b \sin\Omega t\,\vec{\imath}$$

Alors :

$$\overrightarrow{v_a} = -b\omega \sin\Omega t\,\vec{\imath} + (a\omega + b\Omega\cos\Omega t\;\vec{j})$$

2) L'accélération absolue

La méthode directe

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\right|_{R_1} = \frac{d}{dt} -b\omega\sin\Omega t\,\vec{\imath} + (a\omega + b\Omega\cos\Omega t\;\vec{j})|_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}_a = (-a\omega^2 - 2b\omega\Omega cos\Omega t)\,\vec{\imath} - (b(\omega^2 + \Omega^2)\sin\Omega t)\,\vec{j}$$

La méthode de composition des vitesses

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

- $\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right|_{R} = -b\Omega^2\sin\Omega t\,\vec{j}$

- $\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{0_1 0}}{dt}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = 0 + 0 + \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge (a\vec{\imath} + b\sin\Omega t\,\vec{j})\right) = -a\omega^2\vec{\imath} - b\omega^2\sin\Omega t\,\vec{j}$

- $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = 2\omega\vec{k}(b\Omega\cos\Omega t\,\vec{j}) = -2\omega b\Omega\cos\Omega t\,\vec{\imath}$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = \vec{\gamma}_a = (-a\omega^2 - 2b\omega\Omega cos\Omega t)\,\vec{\imath} - (b(\omega^2 + \Omega^2)\sin\Omega t)\,\vec{j}$$

Exercices complémentaires

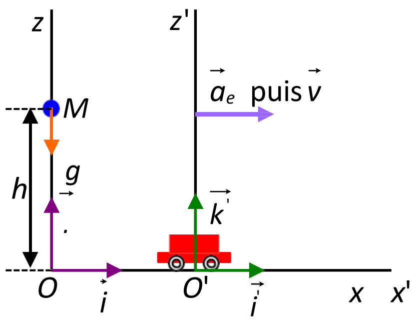
Exercice 1

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. Dans un référentiel R(OXY) lié à cet immeuble, la chute de celle-ci s'effectue verticalement selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{g} = -g\,\vec{k}$ (voir la figure).

1) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{0'M}$ de la bille dans un référentiel $R'(O'X'Y')$. Quelle est la nature de la trajectoire de la bille dans un référentiel $R'(O'X'Y')$ lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne de vitesse $\vec{v} = v\vec{\imath}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher.

2) Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O'X'Y')$.

3) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{0'M}$ de la bille dans le même référentiel $R'(O'X'Y')$ si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\overrightarrow{a_e} = a_e\vec{\imath}$. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O'X'Y')$.



Exercice 2

Dans le repos un ascenseur commence à descendre du haut d'un immeuble de hauteur h, et au même moment zéro, une voiture passe parallèlement devant cette immeuble avec une vitesse v'.

1) Si l'ascenseur descende avec une vitesse uniforme v, déterminer sa trajectoire par rapport au conducteur de la voiture.

2) Répondre sur la même question si l'ascenseur descende avec une accélération $\overrightarrow{a_a} \equiv \overrightarrow{\gamma_a}$ uniforme et une vitesse initiale v_0.

Exercice 3

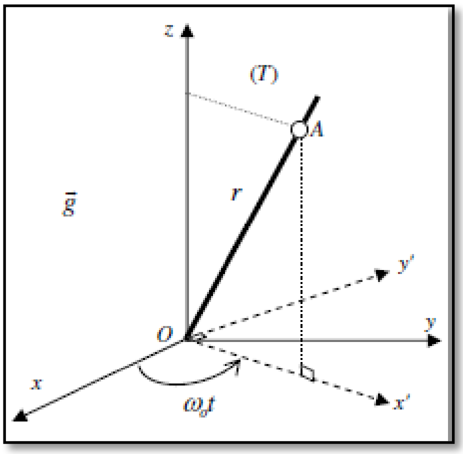
Une masselotte *A*, de masse *m*, peut coulisser sans frottements, sur une tige (*T*). On note *r* la distance *OA* entre l'extrémité de la tige et la masselotte *A* considérée comme ponctuelle. Cette tige, inclinée de l'angle θ_0 par rapport à l'axe *Oz* du repère d'observation $R(OXYZ)$, tourne uniformément à la vitesse angulaire ω_0 autour de *OZ*. On note $R'(O'X'Y'Z')$ le repère orthonormé direct lié à la tige, et indiqué sur la figure ci-contre.

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de *r* et θ_0, dans la base B' liée à R'. En déduire la vitesse de *A* dans R' $\vec{v}(A/R')$, que l'on exprimera dans *B'*.

2) Caractériser le mouvement de R' par rapport à *R* (vitesse de l'origine, vecteur rotation).

3) Déterminer l'expression de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et d'accélération de Coriolis, liées à *A*, dans le mouvement de R' par rapport à *R*.

4) Retrouver, par application des lois de composition des mouvements, les expressions de la vitesse et de l'accélération de *A* dans *R*.



Exercice 4

Considérons le repère de référence absolu $R_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ et le repère de référence relatif R(OXYZ) qui tourne autour de l'axe O_1X_1 avec une vitesse angulaire constante ω (OX ≡ O_1X_1). Soit (D) une droite fixe dans le repère R, parallèle à OY et passant par le point A, avec: $\overrightarrow{OA} = b\vec{k}$ (*b*= cte).

Soit M un point se déplaçant le long de la droite (D) selon la relation suivante:

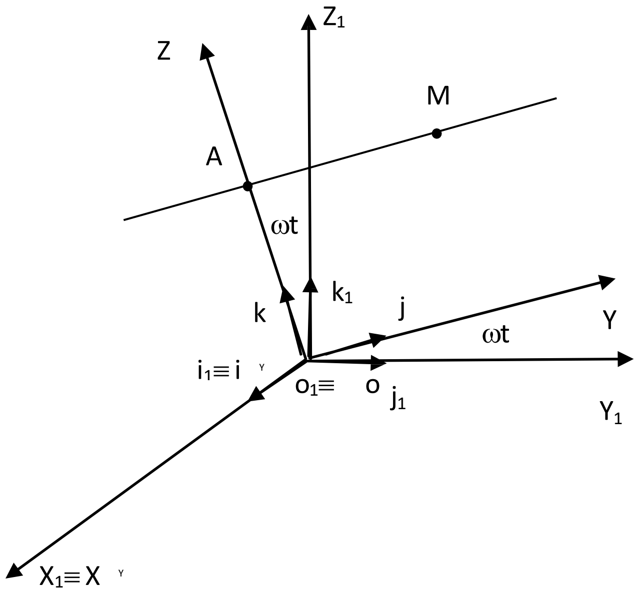
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}at^2\vec{j}$$

(a = cte)

- Calculez la vitesse et l'accélération absolues du point M dans le référentiel relatif R, en utilisant:

1) La méthode directe.

2) La méthode de composition des vitesses et des accélérations.



Exercice 5

Un nageur tente de traverser un fleuve en partant d'un point *A* sur une rive et en visant un point *B* directement opposé à *A*. La présence d'un courant marin à une certaine vitesse force le navire à suivre une trajectoire qui forme un angle avec la ligne *AB*. Si la vitesse du nageur en relation avec l'eau

est *v:*

1. Illustrer les vitesses $\vec{v}$ et $\vec{u}$ à l'aide d'un schéma. Dans quelle direction le nageur doit-il se détourner de l'angle par rapport à *AB* ? Identifiez cet angle en termes de *v* et *u*.

3. Dans le cas où $v = 2u$, évaluez la valeur de et trouvez la vitesse du nageur par rapport à la terre.

Exercice 6

Les coordonnées d'une particule en mouvement dans le référentiel (R) défini par le système de coordonnées $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par :

$$x = 2t^3, \quad y = 4t^2 + t - 1, \quad z = t^2$$

Dans un deuxième référentiel (R') par rapport au référentiel $(O', \vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ avec : $\vec{\imath} = \vec{\imath}', \vec{\jmath} = \vec{\jmath}'$, $\vec{k} = \vec{k'}$ sont données par :

$$x' = 2t^3, \quad y' = 4t^2 - 3t + 2 \quad , \quad z' = t^2 - 5$$

1) Exprimez la vitesse *v* de M dans (R) en fonction de sa vitesse v' dans (R'), et procédez de la même manière pour les accélérations.

2) Définissez le mouvement de translation de (R') par rapport à (R).

Exercice 7

Dans le plan *OXY*, un cercle de rayon *R*, de diamètre *OA*, tourne à la vitesse angulaire constante autour du point *O*. On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires $O'X'Y'$, (l'axe $O'X'$ est dirigé suivant OA). A l'instant t=0, *A* est sur *OX*, *OX* et $O'X'$ étant colinéaires.

Un point M, initialement en *A*, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω.

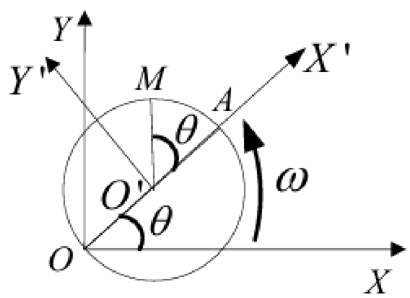
1) Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M, dans le repère OXY (en dérivant les composantes de $\overrightarrow{OM}$).

2) Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M, dans le repère $O'X'Y'$, puis dans *OXY*.

3) a/ Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère *OXY* par la loi de composition des vitesses.

b/ Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère *OXY* ; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

4) Vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$.



Chapitre III

Dynamique d'une particule

Rappel du cours: dynamique

La dynamique est l'analyse de la relation entre les forces appliquées à un corps et les changements dans le mouvement de ce corps. Elle explique la relation entre les forces et d'autres grandeurs cinématiques.

Lois fondamentales de la dynamique

1ère loi de Newton « Principe d'inertie »

a. Déclaration de principe:

- Si aucune force n'agit sur le corps matériel ou si le vecteur résultant des forces appliquées
  est nul, il est:
- Dans un mouvement rectiligne uniforme (v = cst et a=0)
- Au repos, s'il était initialement au repos (v=0). L'inertie est la capacité de tous les corps à résister aux changements de vitesse (accélération nulle).

b. Système de référence galiléen

Un référentiel qui réalise le principe d'inertie est appelé référentiel inertiel. En d'autres termes, il conserve son inertie : s'il est au repos, il reste au repos, et il conserve son mouvement rectiligne constant tant que $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{P} = \overrightarrow{cst} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

Deuxième loi de Newton: « Relation fondamentale de la dynamique (FRD)»

La dérivée de la quantité de mouvement est le résultat des forces appliquées à un corps:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

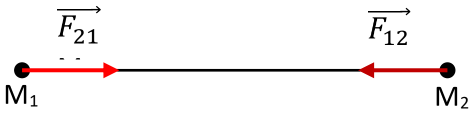
Lorsque la masse du système reste constante, alors:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Troisième loi de Newton : « Principe d'action et de réaction »

Étant donné que M_1 et M_2 sont deux points matériels, les forces de contact réciproques exercées par M_1 sur M_2 et par M_2 sur M_1 sont $\overrightarrow{F_{12}}$ and $\overrightarrow{F_{21}}$, respectivement.

- Ces deux forces sont opposes $\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{12}}$ et égaux en modules $\|\overrightarrow{F_{12}}\| = \|\overrightarrow{F_{12}}\|$.



Théorème du moment cinétique

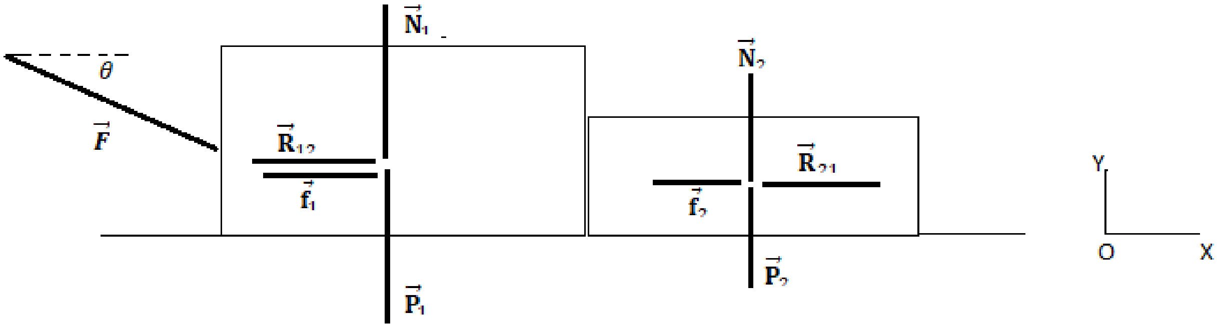
La dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport au temps en un point fixe O dans un référentiel galiléen est égale à

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Deux corps (M_1) de masse m_1 et (M_2) de masse m_2 sont placés en contact sur une table horizontale. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre les corps (M_1), (M_2) et la surface de contact sont μ_s *et* μ_d, respectivement. Une force $\vec{F}$ sous un angle θ par rapport à l'horizontale et de magnitude constante est appliquée au corps (M_1).



1) Déterminer le module maximal de la force $\vec{F}$ nécessaire pour déplacer les deux corps.
2) Écrivez la relation fondamentale de la dynamique pour chaque masse dans le cas d'un mouvement.
3) Déduisez l'accélération $\vec{a}$ du système.
4) Déterminez la force de contact entre les deux corps.

Solution Ex 1

1) La masse (M_1) est dans un état statique et est soumise aux forces suivantes :

$\vec{F}$, son poids $\overrightarrow{P_1}$, la réaction de la table $\overrightarrow{N_1}$, la réaction de la masse (M_2) $\overrightarrow{R_{12}}$ et la force de frottement statique $\overrightarrow{f_{S1}}$:

$\vec{F} + \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{R_{12}} + \overrightarrow{f_{S1}} = 0$

La masse (M_2), également à l'état statique, est soumise aux forces suivantes :

son poids $\overrightarrow{P_2}$, la réaction de la table $\overrightarrow{N_2}$, la réaction de la masse (M_1) $\overrightarrow{R_{21}}$ et la

force de frottement statique $\overrightarrow{f_{S2}}$:

$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{R_{21}} + \overrightarrow{f_{S2}} = 0$

En projetant ces deux équations sur l'axe horizontal OX et l'axe vertical OY : OX :

$F cos\theta - R_{12} - f_{s1} = 0$

$R_{21} - f_{s2} = 0$

OY : $-F sin\theta - P_1 + N_1 = 0$

$-P_2 + N_2 = 0$

Principe d'action et de réaction : $R_{12} = R_{21}$

$f_{s1} = \mu_s N_1 = \mu_s (F sin\theta + P_1) = \mu_s (F sin\theta + m_1 g)$

et $f_{s2} = \mu_s N_2 = \mu_s P_2 = \mu_s m_2 g$

$F cos\theta - \mu_s (F sin\theta + m_1 g) - \mu_s m_2 g = 0$

Par conséquent: $F = \frac{\mu_S}{\cos\theta - \mu_S \sin\theta}(m_1 + m_2)\, g$

2) La relation fondamentale de la dynamique pour chaque masse dans le cas d'un mouvement:

Masse (M_1) : $\vec{F} + \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{R_{12}} + \overrightarrow{f_{S1}} = m_1 \overrightarrow{a_1}$

Masse (M_2) : $\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{R_{21}} + \overrightarrow{f_{S2}} = m_2 \overrightarrow{a_2}$

3) Où nous avons remplacé les forces de frottement statique $\overrightarrow{f_S}$ avec des forces de frottement dynamiques $\overrightarrow{f_d}$.

En projetant ces deux équations sur l'axe horizontal OX et l'axe vertical OY :

OX : $F cos\theta - R_{12} - f d_1 = m_1 a_1$

$R_{21} - f_{d2} = m_2 a_2$

OY : $-F sin\theta - P_1 + N_1 = 0$

$-P_2 + N_2 = 0$

$f_{d1} = \mu_d N_1 = \mu_d (F sin\theta + P_1) = \mu_d (F sin\theta + m_1 g)$ et $f_{d2} = \mu_d N_2 = \mu_d P_2 = \mu_d m_2 g$

Principe d'action et de réaction : $R_{12} = R_{21}$

Le système de masse (M_1) et (M_2) se déplace avec la même accélération, comme les deux corps restent en contact, on a : $a_1 = a_2 = a$

$F cos\theta - \mu_d (F sin\theta + m_1 g) - \mu_d m_2 g = (m_1 + m_2)\, a$

Par conséquent, l'accélération des deux masses est :

$$a = \frac{F(\cos\theta - \mu_d \sin\theta) - \mu_d(m_1 + m_2)g}{(m_1 + m_2)}$$

4) La force de contact entre les deux corps $R_{12} = R_{21} = R$

$R = m_2 a + f_{d2} = m_2(a + \mu_d\, g)$

$R = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}(\cos\theta - \mu_d \sin\theta)$ F

Exercice 2

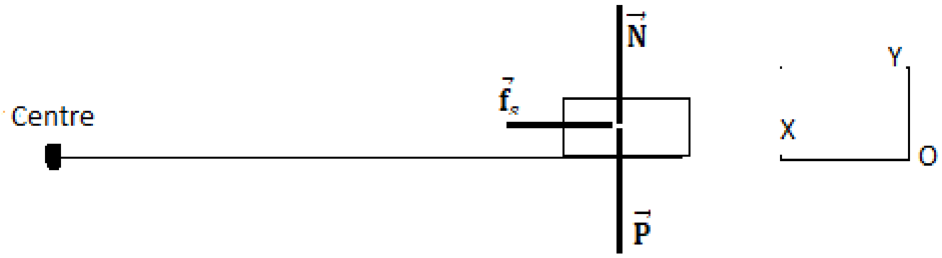
Une voiture d'une masse de 1000 kg entre dans un virage circulaire d'un rayon R = 100 m.

1) Si la surface de la route n'est pas inclinée, quel doit être le coefficient de frottement statique entre les pneus et la surface de la route pour empêcher la voiture de déraper lorsqu'elle roule à une vitesse de v = 25 m/s ?

2) Quelle est la pente de la chaussée pour permettre une vitesse de 25 m/s dans toutes les conditions météorologiques (sans frottement) ? Si la chaussée est surélevée de 300 par rapport à l'horizontale et que le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0.1$, Déterminez la vitesse maximale à laquelle la voiture peut rouler en toute sécurité.

Solution Ex 2

1) Lorsque la surface de la route est horizontale, la voiture est soumise aux forces suivantes : son poids $\vec{P}$, la réaction de la surface $\overrightarrow{N}$ et la force de frottement statique sur les pneus $\overrightarrow{f_S}$:



Application du principe fondamental de la dynamique :

$\vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{f_S} = m\vec{a}$

Comme le mouvement est uniforme et circulaire, l'accélération $\vec{a}$ est dirigée vers le centre du virage avec une amplitude $a = \frac{v^2}{R}$

En projetant l'équation sur l'axe radial OX et l'axe vertical OY :

OX : $f_s = ma$

OY : $-P + N = 0$

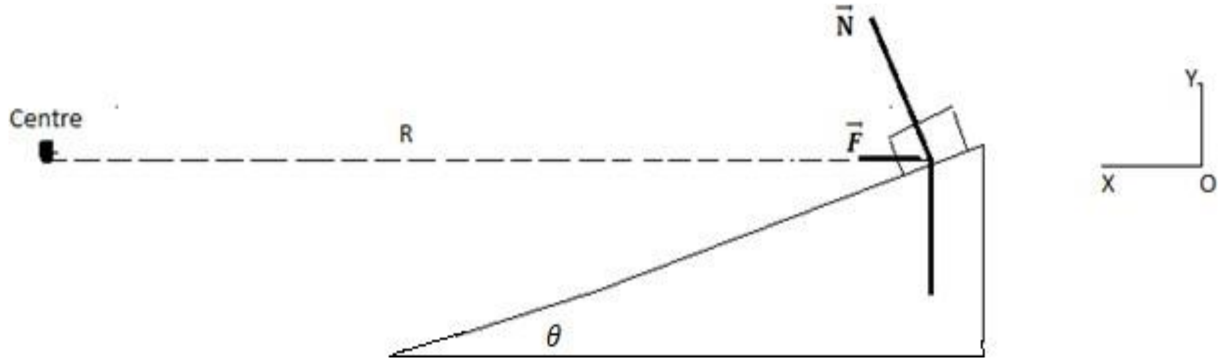
$f_s = \mu_s N = \mu_s mg$

Par conséquent, $\mu_S mg = \frac{v^2}{R}$

A.N: $\mu_s = 0.625$

2) En l'absence de frottement, la surface de la route présente une inclinaison d'un angle θ :

   La voiture est soumise aux forces exercées par son poids $\overrightarrow{P}$ et la réaction de la surface de la route $\vec{N}$:



Application du principe fondamental de la dynamique :

$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$

Comme le mouvement est uniforme et circulaire, l'accélération $\vec{a}$ est dirigé vers le centre du coude avec un module $a = \frac{v^2}{R}$

En projetant l'équation sur les axes horizontal et radial OX et l'axe vertical OY :

OX : $Nsin\theta = ma$

OY : $-P + Ncos\theta = 0$

$N = \frac{mg}{\cos\theta} \rightarrow mg\tan\theta = ma = m\frac{v^2}{R}$

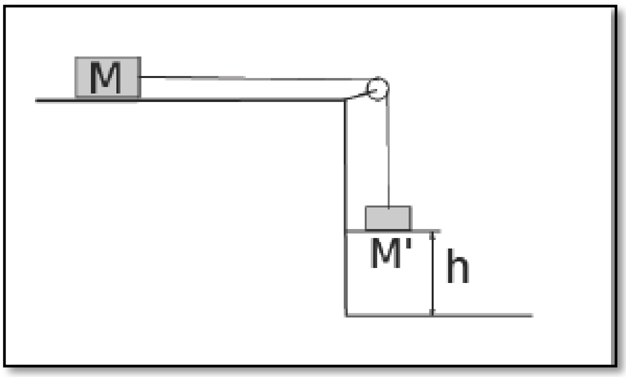
$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg} \rightarrow \theta = arc\tan\left(\frac{v^2}{Rg}\right)$

A.N: L'inclinaison : $\theta \approx 330°$.

Exercice 3

Deux corps M et M', de masses respectives m et m', sont reliés par une corde inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement, le corps M' se trouve à une hauteur h au-dessus du sol et est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique et de frottement de glissement.

Données : m = 6 kg, h = 1.5 m, and g = 10 m/s^2



1) Donnez l'expression de la masse m'min nécessaire pour mettre le système en mouvement, en fonction de m et μ_S.

2) Prenons maintenant une masse m’= 4 kg, et le système commence à se déplacer. Considérons les deux phases du mouvement de la masse M jusqu'à son arrêt. :

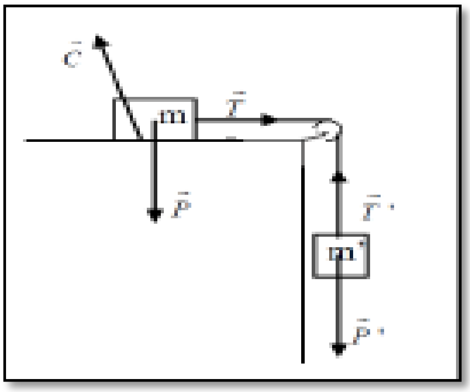
a- Quelle est la nature du mouvement de la masse M ? Justifiez votre réponse.

b- Calculez l'accélération dans la première phase.

c- Déduisez la vitesse à la fin de cette phase.

d- Calculez l'accélération dans la deuxième phase..

e- Déduisez la distance totale D parcourue par la masse M. Donnez sa valeur..



1) En équilibre :

Sur M’: $\vec{P}'+\vec{T}'=\vec{0} \Rightarrow P'-T'=0$

Sur M : $\vec{P}+\vec{C}+\vec{T}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} T-C_x=0 \\ C_y-P=0 \end{cases}$

⇒ mouvement uniformément accéléré.

Comme T=T' nous avons: $P' = C_x$ et $C_x = \mu_g C_y = \mu_g mg \Rightarrow m' = \mu_g m = 3.6kg$

2) a- Le mouvement de M peut être décomposé en deux phases :

- Phase 1 : M et M' ensemble, les forces sont constantes, donc a est c
- Phase 2 : M seul et il y a friction, donc a est constant et v diminue

⇒ mouvement uniformément décéléré.

b- Accélération de la première phase:

Sur M': $\vec{P}' + \vec{T}' = m'\vec{a}_1 \Rightarrow P' - T' = m'a_1$

Sur M : $\vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = m\vec{a}_1 \Rightarrow \begin{cases} T - C_x = ma_1 \\ C_y - P = 0 \end{cases}$ En combinant les deux premières équations,

nous obtenons :

$$P' - C_x = (m + m')a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{(m' - \mu_g m)}{m + m'} g$$

Application numérique : $a_1 = 1.6$ m/s^2

c- Vitesse à la fin de la première phase:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_1 h \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

Application numérique : $v_1 = 2.2$ m/s

d- Accélération dans la deuxième phase:

$$\vec{P} + \vec{C} = ma_2 \Rightarrow \begin{cases} -C_x = ma_2 \\ C_y - P = 0 \end{cases} \Rightarrow -\mu_g mg = ma_2 \Rightarrow a_2 = -\mu_g g$$

Application numérique : $a_2 = -4$ m/s^2

d- Distance parcourue par M:

1ère phase : Il parcourt la distance $D_1 = h = 1,5$ m

2ème phase : Il parcourt la distance D_2 telle que :

$$v_f^2 - v_1^2 = 2a_2 D_2 \Rightarrow D_2 = \frac{v_f^2 - v_1^2}{2a_2}$$

Application numérique : $D_2 = 0.6\ m$

Et enfin : $D = D_1 + D_2 = 2.1\ m$

Exercice 4

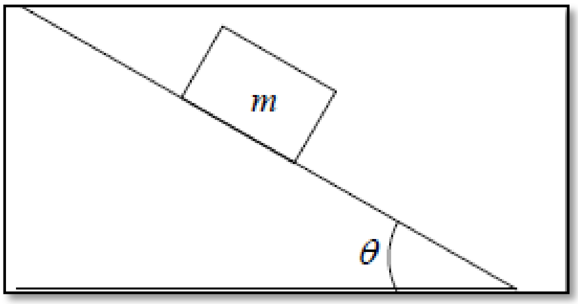
La figure ci-dessous représente un corps pesant 5 N reposant sur un plan rugueux incliné à un angle de $\theta = 35°$. Le coefficient de frottement statique est de 0,80. Soit $g = 10\ m/s^2$.

1) Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps commence à bouger ?

2) Quelle est la force de frottement statique maximale ?

3) Quelle est la force normale pour 35° ?

4) Quelle est la force de frottement statique pour une inclinaison de 35° ?



Solution Ex 4

1) Angle d'inclinaison nécessaire pour que le corps décolle.

Lorsque la force de frottement statique atteint sa valeur maximale pour un angle de décollage θ_0, appelé angle de frottement et qui est un angle limite, elle s'équilibre avec la composante du poids $\overrightarrow{P_x}$ À ce stade, le corps décolle:

$$\left.\begin{array}{l} f_{s,\max} = P_x = mg\sin\theta_0 \\ f_{s,\max} = \mu N \\ N = P_y = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow tg\theta_0 = \mu$$

$$tg\theta_0 = 0.38 \Rightarrow \theta_0 = 38.66°$$

2) Intensité maximale de la force de frottement :

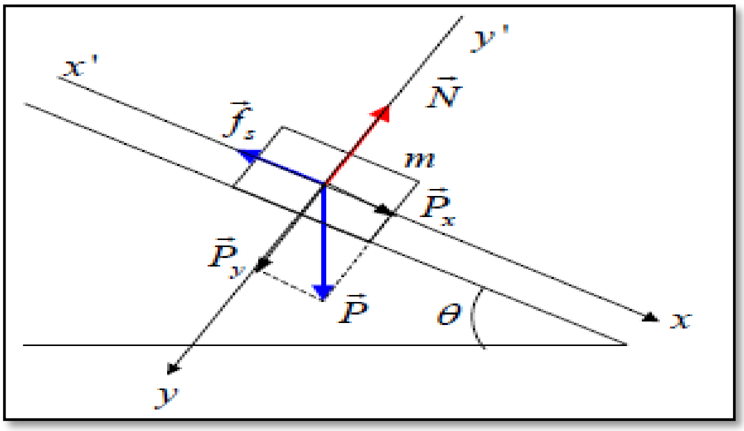
$$f_{s,\max} = \mu N = 3.13N$$

3) La force normale pour l'angle 35° :

$$N = P_y = mg\cos\theta = 4.1N$$

4) Force de frottement pour un angle de 35°:

$$f_s = P_x = mg\sin\theta = 2.87N$$



Exercice 5

Un corps (M) de masse m se déplace le long du vecteur de position

$$\vec{r} = (t^2 + 3t)\vec{\imath} - t^3\vec{\jmath} + (3t - 1)\vec{k}$$

1) Trouvez la force $\vec{F}$ agir sur le corps.

2) Le moment $\vec{\tau}$ de $\vec{F}$ par rapport à l'origine O.

3) La dynamique $\vec{P}$ du corps et son moment cinétique $\vec{L}$ par rapport à l'origine.

4) Vérifiez que: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ et $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Solution Ex 5

1) Selon le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m(2\vec{\imath} - 6t\vec{\jmath})$$

2) Le moment $\vec{\tau}$ de $\overrightarrow{F}$ par rapport à l'origine O est égal à:

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} (t^2 + 3t) & -t^3 & (3t-1) \\ 2m & -6mt & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = 6mt(3t-1)\vec{\imath} + 2m(3t-1)\vec{\jmath} - 2mt^2(2t+9)\vec{k}$$

3) La dynamique $\vec{P}$ est égal à:

$$\vec{P} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = m\left[(2t+3)\vec{\imath} - 3t^2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right]$$

- Le moment cinétique par rapport à l'origine O est égal à:

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} (t^2 + 3t) & -t^3 & (3t-1) \\ m(2t+3) & -3mt^2 & 3m \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{L_O} = 3mt^2(2t-3)\vec{\imath} + m(3t^2 - 2t - 3)\vec{\jmath} - 2m(2t+9)\vec{k}$$

Il peut être vérifié que :

$\frac{d\vec{P}}{dt} = m[2\vec{\imath} - 6t\vec{\jmath}]$ est égale à la force $\vec{F}$.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = 6mt(3t-1)\vec{\imath} + 2m(3t-1)\vec{\jmath} - 2mt^2(2t+9)\vec{k}$ est égal au moment $\vec{\tau}$.

Exercice 6

Trouver l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple en appliquant le théorème du moment cinétique.

Solution Ex 6

Théorème du moment cinétique $\vec{\sigma}$:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\left(\Sigma\,\overrightarrow{F_{ext}}\right)\,; \qquad \vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = l(ml\omega)\vec{u} = ml^2\omega\,\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = ml^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\Sigma\, \mathcal{M} = \mathcal{M}(\vec{T}) + \mathcal{M}(\vec{P}) = \vec{0} + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{P})$$

Avec : $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} mg\ cos\theta \\ -mg\ sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mgl\ sin\theta \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} = -mgl\ sin\theta$$

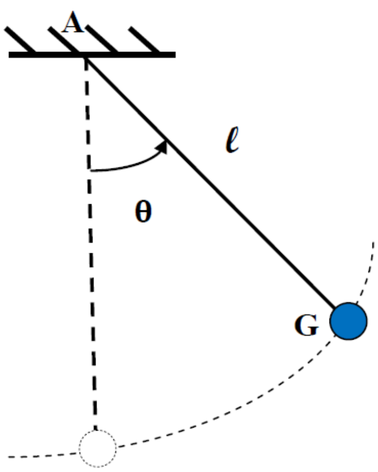
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\ sin\theta = 0$$

Exercice 7

Considérons un pendule simple *AG* (où la masse m est attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur *l*), qui est suspendu au point *A* (voir figure). Ses oscillations sont décrites par θ(t).

Déterminez l'équation différentielle du mouvement (sans la résoudre) en vous servant de :

1) La loi fondamentale de la dynamique (PFD).
2) Le théorème du moment cinétique.
3) Le théorème relatif à l'énergie cinétique.
4) Le théorème de l'énergie mécanique totale.



Solution Ex 7

L'équation différentielle du mouvement :

1) La loi fondamentale de la dynamique (PFD).

$\Sigma\,\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T} = m\,\overrightarrow{\gamma_a}$

Sur $\vec{u}_r$: $mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$

Sur $\vec{u}_\theta$: $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,sin\theta = 0$$

2) Le théorème du moment cinétique.

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \sum_i \vec{M}_A F_i$$

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m\,\vec{V}_G = l\,\vec{u}_r \wedge ml\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = m\,l^2\dot{\theta}\,\vec{K}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\,\vec{K}$$

$$\vec{M}_A(\vec{P}+\vec{T}) = \vec{M}_A.\vec{T} + \vec{M}_A.\vec{P} = 0 + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} mg\,cos\theta \\ -mg\,sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= -mgl\,sin\theta\,\vec{K}$$

$$\Rightarrow\ ml^2\ddot{\theta} = -mgl\,sin\theta$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,sin\theta = 0$$

3) Le théorème de l'énergie cinétique.

$$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = d\vec{E}_c \quad (\Delta w = \Delta E_c)$$

$$dw = (\vec{P}+\vec{T}).\overrightarrow{dl} = (m\vec{g}+\vec{T}).dl$$

$$\vec{l} = l.\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dl} = l.d\vec{u}_r = l.d\theta.\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = l.d\theta.\vec{u}_\theta$$

$$dw = (mg\cos\vec{u}_r - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta - T\vec{u}_r\,).l.d\theta.\vec{u}_\theta$$

$$dw = -mgl\ sin\theta.d\theta$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \ \Rightarrow \ dE_c = \frac{1}{2}ml^2.2.\ddot{\theta}.d\theta = ml^2\ddot{\theta}.d\theta$$

Ce qui implique que : $dw = dE_c \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mgl\ sin\theta$

On obtient finalement $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\ sin\theta = 0$

4) Le théorème de l'énergie mécanique totale.

$$E_T = E_C + E_P = Cte \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = 0$$

$$\Rightarrow \ dE_c = -dE_P = dw \quad \Rightarrow \quad dw = -dE_P$$

$$dE_c = ml^2\ddot{\theta}\ d\theta$$

$$dw = -dE_P = -mgl\ sin\theta\ d\theta \Rightarrow dE_P = mgl\ sin\theta\ d\theta$$

$$E_P = \int mgl\ sin\theta\ d\theta = -mgl\ cos\theta + C$$

$E_P = 0$ pour $\theta = 0 \Rightarrow c = mgl \ \Rightarrow \ E_p = mgl(1 - cos\theta)$

$$dE_c = ml^2\ddot{\theta}\ d\theta \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$E_T = E_C + E_P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos\theta) = Cte$$

$$\frac{dE_T}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ ml^2\ddot{\theta}\ d\theta + mgl(0 + sin\theta.d\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\ sin\theta = 0$$

Exercice 8

On envisage un objet de masse *m* qui se déplace sans résistance sur une demi-sphère de rayon *R*, centrée en *O*, posée sur le plan horizontal xOy, l'axe Oz représentant la direction verticale ascendante (voir illustration). À t = 0 s, la masse est laissée tomber sans vitesse initiale à un point *M* du plan xOz, déterminé par l'angle θ_o = (Oz, OM).

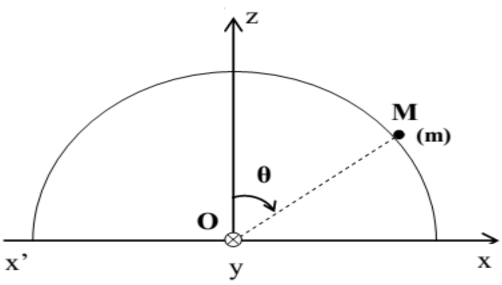
1) Évaluer les forces agissant sur la masse *m*. On peut conclure que le mouvement se fait intégralement dans le plan xOz.

2) Déterminer la vitesse et l'accélération de m en utilisant les coordonnées polaires.

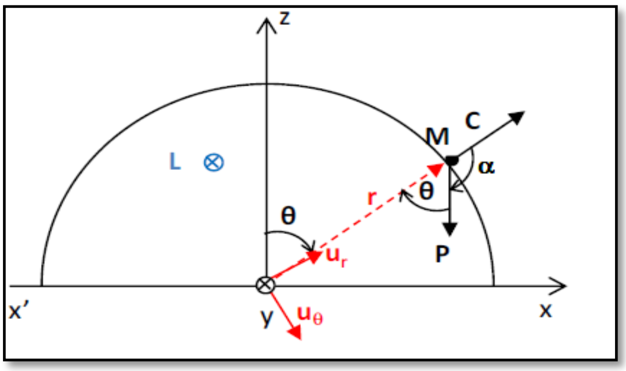
3) Déterminez le moment cinétique de *m* par rapport à *O*. En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminez une équation différentielle qui gouverne θ(t).

4) Déterminez le moment cinétique de m par rapport à *O*. En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminez une équation différentielle qui gouverne θ(t).

5) Obtenir cette équation finale à partir du principe fondamental de la dynamique.



Solution Ex 8



1) Les forces appliquées sur *m* : $\vec{P}$ et $\vec{C}$ (normale à la sphère car il n'y a pas de frottements).

$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Il est évident que $d\vec{v}$ se situe dans le plan établi par $\vec{P}$et $\vec{C}$. Étant donné que la vitesse initiale est zéro, toutes les vitesses (et donc tous les mouvements) se situent dans ce même plan.

2) Ceci concerne le calcul dans le scénario spécifique où $r = R$. Il est possible d'appliquer les formules familières en utilisant la notation.

$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

$v_r = \dot{r} = 0$ et $v_\theta = r\dot{\theta} = R\dot{\theta}$

$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -R\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = R\ddot{\theta}$$

Il est également possible d'effectuer un calcul direct en se basant sur les relations :
$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}.\vec{u}_r$.

Le vecteur position est $\vec{r} = R\vec{u}_r$

Le vecteur vitesse est $\vec{v} = R\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

Donc le vecteur accélération est : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

3) $\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$

Et d'après la figure, on a $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{j}$ (vecteur unitaire de l'axe y'Oy).

Étant donné que : $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = \vec{0}$, on obtient $\vec{r} \wedge \vec{v} = R^2\dot{\theta}.\vec{j}$ et $\vec{L} = mR^2\dot{\theta}.\vec{j}$

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{P}$ car ($\vec{r}$ parallèle à $\vec{C}$).

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = mR^2\ddot{\theta}.\vec{j}$$

et la figure montre $\vec{r} \wedge \vec{P} = Rmg \sin\theta.\vec{j}$

Par conséquent, $mR^2\ddot{\theta} = Rmg \sin\theta \Rightarrow R\ddot{\theta} = g \sin\theta$ c'est l'équation différentielle demandée.

4) PFD : $\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} = m\left(-R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\right)$

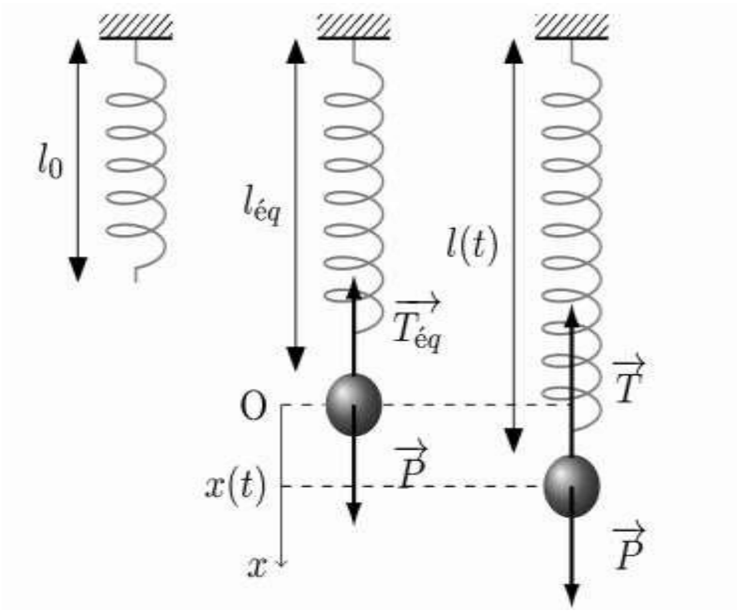
Sur : $\begin{cases} \vec{u}_r : -mg\cos\theta + C = -mR\dot{\theta} \\ \vec{u}_\theta : mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow R\ddot{\theta} = g\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

Exercice 9

Fixons un ressort à l'une de ces extrémités et suspendons une masse m à l'autre extrémité. Lorsque le ressort s'étire, une force de rappel s'exerce sur la masse ; cette force est proportionnelle à l'allongement et s'appelle la tension.

* Déterminez l'équation différentielle du mouvement à l'aide du PFD.

Solution Ex 9



À l'équilibre :

$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T} = 0 \quad \vec{T} = -\vec{P} \quad \Rightarrow \quad T = mg$

$T = mg = \mathrm{k}(l_{eq} - l_0) = kx_0$

k : constante de raideur du ressort

l : longueur du ressort à l'instant t,

l_0 : longueur du ressort lorsqu'il n'est pas comprimé.

Si l'on étire le ressort d'une longueur x puis que l'on laisse le système au repos, celui-ci effectue des oscillations. La loi de Newton donne

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Par projection sur (OX) :

$$mg - T = mg - k(x + x_0)$$
$$= m\ddot{x}$$

$$mg - kx_0 - kx = m\ddot{x} \quad ;$$

avec : $(mg = kx_0)$

$$\Rightarrow \; m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0{}^2 x =$$

0

Solution de l'équation : $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

<u>**Exercices complémentaires**</u>

Exercice 1

Calculez le champ gravitationnel d'un corps de masse *m* :

a) À la surface de la Terre,

b) À une hauteur *h* au-dessus de la Terre.

$m_t = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$, la masse de la Terre,

$r_t = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$, le rayon de la Terre.

Exercice 2

Deux masses identiques, *A* et *B*, sont connectées par un ressort dont la rigidité est notée *K*. Le tout est agencé sur un plan horizontal (voir illustration). Les caractéristiques des frictions entre le plan et les masses sont définies par μ_s et μ_g. On dispose des valeurs suivantes : $M = 1\ kg$; $\mu_s = 0{,}5$; $\mu_g = 0{,}4$;

K = 200 N/m et g = 10 m/s².

Comme le ressort n'est ni compressé ni étiré, on exerce une pression sur l'élément *A*.

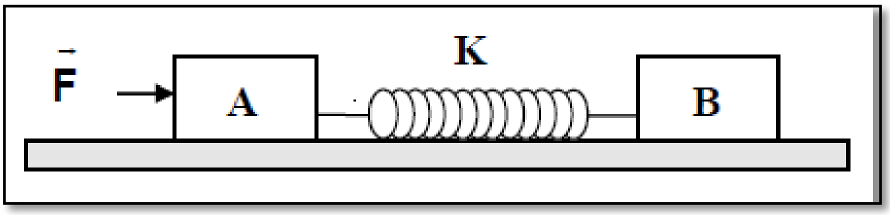
1) Quelle est la force F_0 minimale nécessaire pour provoquer le mouvement du bloc *A* ?

2) Pour $F = F_0$, déterminez et illustrez à l'échelle : 1 cm pour 2 N, les forces qui s'exercent sur *A* et *B*. Nous maintiendrons la même échelle tout au long de l'exercice.

3) Pour quel mouvement minimal de la masse *A*, la masse *B* commence-t-elle à bouger ?

4) Déterminer et illustrer les forces agissant sur les blocs *A* et *B* juste avant que le bloc *B* ne commence à bouger.

5) Une fois en mouvement, il progresse à une vitesse stable sur x = 2.5 cm. Effectuer le calcul et la représentation des forces qui s'exercent sur les blocs A et B.



Exercice 3

Deux billes identiques de masse *m* sont lâchées à $t = 0\ s$ sans vitesse initiale du même point *O* d'altitude *h* sur deux plans inclines de pentes différentes et repères par leur angle avec la verticale φ_1 et φ_2 avec $\varphi_1 < \varphi_2$. On notera x_1 et x_2 les positions respectives des deux billes le long de leur plan incline, en prenant le point *O* pour origine. On considère leur arrivée aux deux points *A* et *B* du sol supposé horizontal. L'accélération de la pesanteur supposée constante sera notée g. On supposera que les deux billes restent constamment en contact avec les plans inclinés.

1) En négligeant les frottements, exprimer :

1/a) les accélérations $\ddot{x}_1(t)$ et $\ddot{x}_2(t)$ des deux billes.

1/b) les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$des deux billes.

1/c) les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$des deux billes.

2) Toujours en négligeant les frottements, exprimer en fonction de g, h, φ_1 et φ_2:

2/a) les accélérations des deux billes en *A* et *B*. Comparer ces deux accélérations.

2/b) les temps de parcours des deux billes. Comparer ces deux temps.

2/c) les vitesses des deux billes en *A* et *B*. Comparer ces deux vitesses.

3) On considère maintenant que les deux billes sont soumises en plus à une force de frottement solide. On prendra la même valeur μ_c pour le coefficient de frottement solide de chacune des deux billes sur son plan incliné. Exprimer l'accélération des deux billes et comparer à nouveau ces deux accélérations.

Exercice 4

1) Énoncer les trois lois de Newton.
2) Citer les différents types de forces.
3) Dans quelle condition l'énergie mécanique totale se conserve ?

Exercice 5

Un corps de masse $m = 0{,}8\ Kg$ se trouve dans un plan incliné de $\alpha = 30°$.

Qu'elle force doit on applique pour qu'il se déplace vers le haut ?

On donne $\gamma = 0{,}2\ m\ /\ s^2$, et le coefficient de frottement cinétique est $0{,}3$.

On prend :$g = 10\ m\ /\ s^2$.

Exercice 6

Un point matériel de masse *m* glisse sans frottement sur le circuit *AMB*. Il est lâché au point *A* sans vitesse initiale.

En calculant la vitesse et la réaction au point M, trouver la valeur de la hauteur *H* pour que le mobile dépasse le point *B* et parcourt un cercle.

Chapitre IV

Travail et Energie

Rappel du cours: Travail et énergie

Travail élémentaire

Un point matériel M est soumis à une force constante $\vec{F}$. Le travail élémentaire dW de la force $\vec{F}$ est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Quand une force $\vec{F}$ est appliquée à un point matériel se déplaçant du point A au point B, le travail est égal à :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Puissance

La puissance d'une force $\vec{F}$ est déterminée en divisant son travail par le temps nécessaire pour le réaliser.

Puissance moyenne : $P_{moy} = \frac{W_{AB}}{\Delta t}$

Puissance instantanée : $P(t) = \frac{dW_{AB}}{dt}$

Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique du point matériel est égale au travail résultant des forces qui s'exercent sur lui entre deux points.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)$$

Énergie potentielle

- ✓ La fonction potentielle liée à la force conservatrice est appelée énergie potentielle.
- ✓ L'énergie associée à la position est appelée énergie potentielle.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)$$

Énergie mécanique totale

Les énergies cinétique et potentielle s'additionnent pour former l'énergie mécanique (totale) d'un point matériel:

$$\Delta E_M = \sum_i W\,(\overrightarrow{F_{nc}})$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Une balle de golf d'une masse m = 45 g tombe librement sans vitesse initiale depuis une hauteur h = 10 m au-dessus du sol, choisi comme point de référence pour l'énergie potentielle gravitationnelle.

1) Quelles sont les hypothèses du modèle de chute libre ? Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la balle pendant la chute libre ?

2) Quelle est la diminution de l'énergie potentielle gravitationnelle de la balle entre la hauteur h et le sol ?

3) Déduisez la variation de l'énergie cinétique de la balle.

4) Calculez la vitesse de la balle au moment où elle touche le sol.

Solution Ex 1

1) La friction de l'air sur la balle est négligeable. Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré sous l'effet de l'accélération gravitationnelle g.

L'énergie mécanique de la balle reste constante : $Em = Epp + Ec = Cte$

2) $\Delta Epp = Epp_{\,finale} - Epp_{initiale} = mg.0 - mgh = -45.10-3.9.81.10 = -4.41\,J$

3) Au début de la chute, l'énergie cinétique est nulle (vitesse = 0) et au niveau du sol, elle est maximale.

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \frac{1}{2}mV_f^2 - 0 = 4.41J$$

4) a- Au début de chute $\left.\begin{array}{l} E_{pp} = mgh \\ E_c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E_m = mgh$

À la fin de chute $\left.\begin{array}{l} E_{pp} = 0 \\ E_c = 0.5.m.V_f^2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_m = 0.5.m.V_f^2$

Comme l'énergie mécanique reste constante, les deux termes peuvent être mis en équivalence :

$$mgh = \frac{1}{2}mV_f^2 \Rightarrow V_f = \sqrt{2.g.h} = 14m/s$$

b- Basé sur la variation de l'énergie cinétique:

$$\Delta E_C = E_{C\,f} - E_{Ci} = \frac{1}{2} m V_f^2 - 0 \Rightarrow V_f = 14 m/s$$

Exercice 2

Que la force soit $\vec{F} = 2xz\vec{i} + yz\vec{j} + \left(ax^2 + by^2 + cz^2\right)\vec{k}$.

1) Trouvez les constantes a, b et c telles que $\vec{F}$ soit conservatrice, étant donné qu'au point (1,1,1) la force : $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

2) Déduire le potentiel Ep *(x, y, z).*

Solution Ex 2

1)

$$\vec{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (2xz) & (yz) & \left(ax^2 + by^2 + cz^2\right) \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{rot}\vec{F} = (2by - y)\vec{i} - (2ax - 2x)\vec{j} = \vec{0} \qquad (*)$$

et $\vec{F}(1,1,1) = 2\vec{i} + \vec{j} + (a + b + c)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \qquad (**)$

À partir de l'équation (*), nous aurons: $2by - y = 0 \Rightarrow b = 1/2$, $2ax - 2x = 0 \Rightarrow a = 1$

Et à partir de l'équation (**), nous aurons: $a + b + c = -3 \Rightarrow c = -9/2$

Ensuite : $\vec{F} = 2xz\vec{i} + yz\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2\right)\vec{k}$

2)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p(x, y, z) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -(2xz) \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = -(yz) \rightarrow (2)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = -\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2\right) \rightarrow (3)$$

À partir de l'équation (1): $E_p = -\int (2xz) dx = -2zx^2 + C(y,z)$

À partir de l'équation (2): $\frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -(yz) \Rightarrow C(y,z) = -\frac{y^2 z}{2} + D(z)$

En substituant l'expression de C (y, z) dans Ep et en utilisant l'équation (3), on obtient :

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = -2x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{\partial D(z)}{\partial z} = -\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2\right) \Rightarrow D(z) = \int \left(x^2 - \frac{9}{2}z^2\right) dz = x^2 z - \frac{9}{4}z^3 + C$$

Exercice 3

Soit la force $\vec{F} = 8xy\vec{\imath} - (x^2 + y^2)\vec{\jmath}$ être appliqué à un point matériel, en le déplaçant entre deux points A(0,1) et B(1,2)

1) Calculez le travail effectué par cette force le long du trajet. $y = x^2 + 1$
2) Que pouvons-nous conclure au sujet de la force ? $\vec{F}$?

Solution Ex 3

1) Suivre le chemin : $y = x + 1 \rightarrow dy = dx$ and $0 \leq x \leq 1$

$$W_{AB}^{(1)} = \int_{(B)}^{(A)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{(B)}^{(A)} [8xy\, dx - (x^2 - y^2)\, dy]$$

$$W_{AB}^{(1)} = \int_{(B)}^{(A)} [8x(x+1)\, dx - (x^2 + (x+1)^2)\, dy]$$

$$W_{AB}^{(1)} = \int_0^1 (6x^2 + 6x - 1)\, dx = 4$$

2) Suivre le chemin : $y = x^2 + 1 \rightarrow dy = 2x\, dx \quad 0 \leq x \leq 1$

$$W_{AB}^{(2)} = \int_{(B)}^{(A)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{(B)}^{(A)} [8xy\, dx - (x^2 + y^2)\, dy]$$

$$W_{AB}^{(2)} = \int_{(B)}^{(A)} [8x(x^2+1)\, dx - (x^2 + (x^2+1)^2)\, 2x\, dx]$$

$W_{AB}^{(2)} = \int_0^1 (-2x^5 + 2x^3 + 6x)\, dx = \frac{19}{6}$

1) Étant donné que le travail effectué par la force le long des deux trajectoires est différent, nous pouvons conclure que la force $\vec{F}$ n'est pas conservateur.

Exercice 4

Quelle vitesse une fusée doit-elle atteindre pour échapper au champ gravitationnel terrestre ? Accélération due à la gravité à la surface de la terre g_0 = 9.81 m/s², Rayon de la terre R = 6.36×10⁶ m

Solution Ex 4

En appliquant le principe de conservation totale de l'énergie mécanique :

$(E_T)_{(I)} = (E_T)_{(F)} \quad \rightarrow (E_C)_{(I)} + (E_P)_{(I)} = (E_C)_{(F)} + (E_P)_{(F)}$

$\frac{1}{2} m v_I^2 - G\frac{mM}{R^2} = \frac{1}{2} m v_F^2 - G\frac{mM}{r^2}$

La fusée échappe à la gravité $\rightarrow$ $r = \infty$ et $v_F = 0$

$\rightarrow \frac{1}{2} m v_I^2 - G\frac{mM}{R^2} = 0 \rightarrow v_I^2 = 2G\frac{M}{R^2}$

La force du poids définie par la loi universelle de la gravitation :

$mg_0 = G\frac{mM}{R^2} \rightarrow g_0 = G\frac{M}{R^2}$

$\rightarrow v_I^2 = 2g_0R$

A.N : $v_I = 1.12 \times 10^4\ m\ /\ S$

Exercice 5

Sur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon R , se déplace un point matériel M sous l'action de la force $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

1) Montrer que la force $\vec{F}$ est conservative.

a) A l'aide de $\vec{F} = -grad\, V$.

b) A l'aide de $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}$.

2) Sur cette trajectoire circulaire et fermée, monter que le travail effectué par $\vec{F}$ est nul.

3) Calculer le travail effectué par $\vec{F}$ lorsque le point matériel M se déplace le long de AB puis le long de AOB. Conclure.

Solution Ex 5

1) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$

a) $\vec{F} = -grad\ V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = +F_x = +y \Rightarrow V(x,y) = -y\,x + C_y \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = +F_y = +x \Rightarrow V(x,y) = -\,xy + C_x \qquad (2)$$

De (1) $\Rightarrow \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = -x + C_y = -F_y = -x \ \Rightarrow\ C_y = cte$

De (2) $\Rightarrow \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = -y + C_x = -F_x = -y \ \Rightarrow\ C_x = cte$

Alors, $C_x = C_y = cte$

$\Rightarrow\ V(x,y) = -x\,y + cte \ \Rightarrow \vec{F}$ est conservatrice.

b)

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{F} \text{ est conservatrice.}$$

2) $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,sin\theta \end{cases}$

$$d\tau = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = F_x\,dx + F_y\,dy = y\,dx + x\,dy = -R^2\,sin^2\theta\,d\theta + R^2\,cos^2\theta\,d\theta$$
$$= R^2\,cos2\theta\,d\theta$$

$$\tau = R^2 \int_O^{2\pi} cos2\theta\,d\theta = \frac{R^2}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi} = 0$$

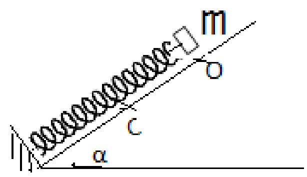
3) $\tau_{\widehat{AB}} = R^2 \int_O^{\pi/4} cos2\theta\,d\theta = \frac{R^2}{2}$

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ est conservatrice $\Rightarrow$ Le travail ne dépend pas du chemin suivi

$\Rightarrow \tau_{AOB} = \tau_{\widehat{AB}} = \frac{R^2}{2}$

Exercice 6

On place une masse *m* à l'extrémité d'un ressort ayant une constante de rigidité *k*, sur un plan incliné avec un angle α par rapport à l'horizontale. On positionne la masse au point *O* sans vitesse de départ. On présume la présence de frottements sur le plan μ.



- Déterminer l'énergie totale aux points *O* et *C*.

- Évaluer le travail effectué par la force de friction.

- Déduire X_c la compression maximum du ressort. Que se passe-t-il si on ignore les frottements ?

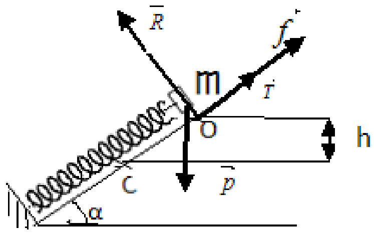
Solution Ex 6

$\vec{F}$: Force de frottement et $\vec{T}$: tension du ressort

Si on choisit le point O comme référence pour

L'énergie potentielle gravitationnelle et de raideur $E_P = 0$

et $T = 0$; $E_M(0) = 0$



Au point C :

$$E_M(C) = E_P(C) + T(C) = \frac{1}{2}k.X_C^2 - mgh = \frac{1}{2}k.X_C^2 - mgX_C \sin\alpha$$

$$\Delta\, E_M = E_M(C) - E_M(0) = \frac{1}{2}k.X_C^2 - mgX_C \sin\alpha = W(\vec{F})$$

Il s'agit du travail de la force de frottement, l'énergie mécanique (totale) ne se conserve pas.

- le travail de la force de frottement $W(F) = \int \vec{F}.\,\vec{dl} = -\int F.dl$

Avec : $F = \mu\, R = \mu mg \cos\alpha$, donc $W_{O\to C}(\vec{F}) = -\int_O^{X_C} \mu mg \cos\alpha \; dx = -\mu mg \cos\alpha\, X_C$

En mettant en parallèle ce travail avec celui de la première question :

$$\frac{1}{2}k.X_C^2 - mgX_C \sin\alpha = -\mu mg \cos\alpha\, X_C$$

$$X_C = \frac{2mg}{k}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

si on fait abstraction des frottements

$$X_C = \frac{2mg}{k}(\sin\alpha)\,.$$

Exercice 7

On considère un petit bloc de masse m =5 kg abandonné sans vitesse initiale au point A d'un plan incliné faisant un angle α=30° par rapport à l'horizontale. Le point A est à une hauteur h_0=5m par rapport à l'horizontale.

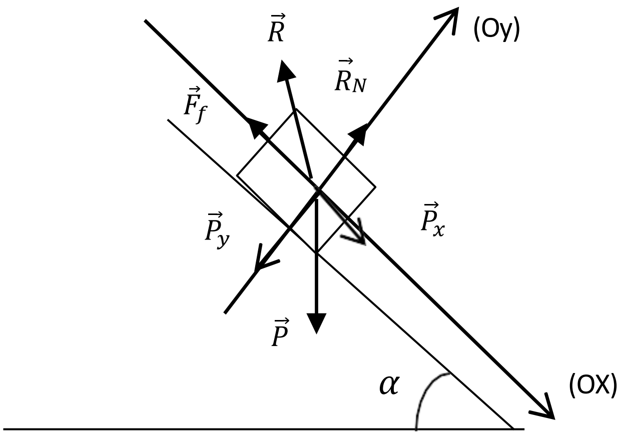
1) Sachant que le coefficient du frottement dynamique sur le plan AB est $\mu_d = 0{,}2$, en appliquant le principe fondamental de la dynamique :

- Quelle est la nature du mouvement sur le plan AB ?
- Calculer la vitesse du bloc lorsqu'il atteint le point B.

2) Après le passage au point B à la vitesse VB, la masse arrive au point C. Sachant que le coefficient de frottement est négligeable sur le plan BC :

- Déduire la vitesse au point C ?
- Calculer la compression maximale du ressort sachant que sa constante de raideur égale à k=100N/m ? (On donne g =10 m/s^2).

Solution Ex 7



1) Étant donné que le coefficient de friction dynamique sur la surface AB est: $\mu_d = 0{,}2$, nous appliquons le principe fondamental de la dynamique :

- Quel type de mouvement est observé sur AB ? On cherche à = ?

$$\Sigma \vec{F} = m\,\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F_f}$$

Suivant (OX) : $-F_f + P_x = -F_f + mg \sin\alpha = m.a$

Suivant (OY) : $R_N - P_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg\cos\alpha$

$\mu_d = tg\ \varphi = \dfrac{F_f}{R_N} \quad \Rightarrow \quad F_f = R_N.tg\ \varphi = \mu_d mg\cos\alpha$

$-\mu_d mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = m.a$

$\Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$ donc, $a = 3{,}26\ {}^{m}/_{s^2}$

- Calculer la vitesse du bloc lorsqu'il atteint le point *B*.

$v_B^2 - v_A^2 = 2.a.l \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 2\,al = 2a\left(\dfrac{h}{\sin\alpha}\right)$

$v_B = \sqrt{2a\left(\dfrac{h}{\sin\alpha}\right)} = 8{,}074\ {}^{m}/_{s}$

2) $V_c = V_B$, car on a un MRU (principe d'inertie ou 1ere loi de Newton)

On calcule la distance de compression du ressort :

$\Delta E_c = \Sigma\, W_{f_{ext}} \quad \Rightarrow \quad E_{C_D} - E_{C_C} = W_P + W_{F_r} + W_{R_N}$

$-\frac{1}{2}k.x^2 = -\frac{1}{2}mv_C^2$ donc, $x = \sqrt{\frac{mv_C^2}{k}} = 1{,}8\ m$

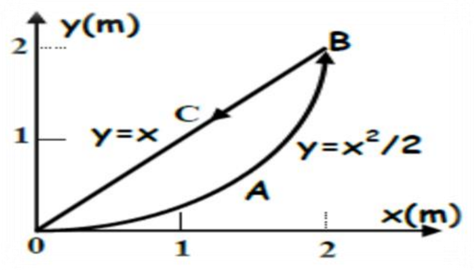
2ème Méthode : entre les deux points C et D :

$E_{M_C} = E_{M_D} \quad \Rightarrow \quad E_{C_C} + E_{P_C} = E_{C_D} + E_{p_D} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}k.x^2 = \dfrac{1}{2}mv_C^2$

Donc : $x = \sqrt{\frac{mv_C^2}{k}} = 1{,}8\ m.$

Exercice 8

Un objet de masse m, soumis à une force $\overrightarrow{F_n}$, suit la trajectoire bouclée OABCO composée d'un segment parabolique et d'une ligne droite, dans le sens indiqué par la flèche (voir illustration).



1) Évaluer le travail accompli par, dans les deux cas suivants :

a) $\overrightarrow{F_1} = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$

b) $\overrightarrow{F_2} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

2) Que peut-on en conclure dans chaque cas.

Solution Ex 8

1) Calcul du travail effectuée par$\overrightarrow{F_n}$,dans les deux cas :

Dans chaque cas, on écrit : $W_{OABCO}(\vec{F}) = W_{OAB}(\vec{F}) + W_{BCO}(\vec{F})$ et $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

a) Pour $\vec{F}_1 = -y\vec{i} + x\vec{j}$

Sur OAB : $y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \Rightarrow dy = xdx$. En remplaçant y et dy, on obtient :

$$W = \vec{F}_1 . d\vec{r} = -ydx + xdy = -\frac{x^2}{2}dx + x^2 dx = \frac{x^2}{2}dx$$

Donc, $W_{OAB}(\vec{F}_1) = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{4}{3}J$

Sur BCO : $y = x \Rightarrow dy = dx$. En remplaçant y et dy, on obtient :

$$W = \vec{F}_1 . d\vec{r} = -xdx + xdx = 0dx \Rightarrow W_{BCO}(\vec{F}) = \int_0^2 0dx = 0J$$

Finalement, $W_{OABCO}(\vec{F}_1) = \frac{4}{3}J$

b) Pour $\vec{F}_2 = x\vec{i} + y\vec{j}$

Sur OAB : $y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \Rightarrow dy = xdx$. En remplaçant y et dy, on obtient :

$$W = \vec{F}_2.d\vec{r} = xdx + ydy = xdx + \frac{x^3}{2}dx$$

Donc, $W_{OAB}\left(\vec{F}_2\right) = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} + x\right)dx = 4J$

Sur BCO : $y = x \Rightarrow dy = dx$. En remplaçant *y* et *dy*, on obtient :

$$W = \vec{F}_2.d\vec{r} = xdx + xdx = 2xdx \Rightarrow W_{BCO}\left(\vec{F}\right) = \int_0^2 2xdx = -4J$$

Finalement, $W_{OABCO}\left(\vec{F}_2\right) = 0J$

$W_{OABCO}\left(\vec{F}\right)$ est un travail sur un chemin fermé. Comme $W_{OABCO}\left(\vec{F}_1\right) \neq 0$, cette force ne dérive pas d'un potentiel. Par contre, $W_{OABCO}\left(\vec{F}_2\right) = 0$, cette force peut dériver d-un potentiel. En effet, elle dérive effectivement de l'énergie potentielle $E_P = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ car :

$$\vec{F}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j}\right)$$

Exercice 9

Un fragment de glace *M* d'une masse *m* se déplace sans résistance sur la surface extérieure d'un igloo, qui est une demi-sphère de rayon *r* avec une base horizontale.

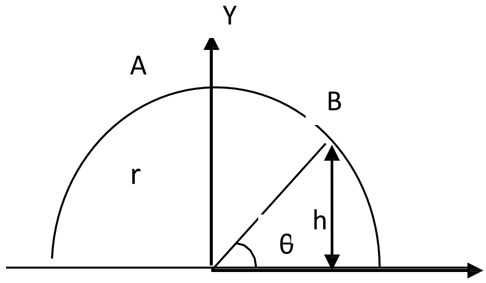
Au moment initial (t=0), il est libéré du point *A* sans vitesse de départ.

1) Déterminez l'expression de la vitesse au point *B* en termes de *g*, *r* et *θ*.

2) En se basant sur la relation fondamentale de la dynamique, trouver l'équation de $\left|\vec{N}\right|$ la force que l'igloo exerce sur *M* au point *B* en fonction de la vitesse v_B.

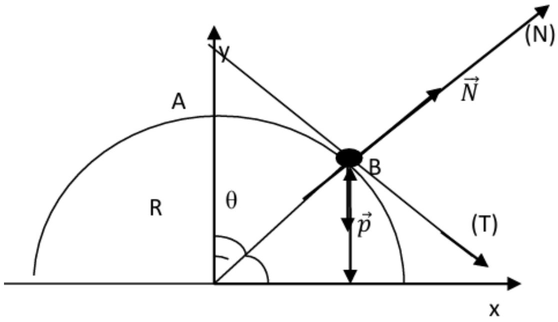
À quelle altitude *M* quitte-t-il la sphère ?

À quelle vitesse *M* se rend-elle à l'axe (Ox) ?



Solution Ex 9

1) Selon le principe de la conservation de l'énergie mécanique entre les points A et B :



$E_{M_A} = E_{M_B} = E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

Alors : $E_{C_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$ car $E_{C_A} = 0$ puisque, $v_A = 0$ car le point matériel est lancée sans vitesse initiale

Avec : $h_B = R\cos\theta$

Donc : $mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\cos\theta$ $\qquad (\ast)$

Alors : $gR = \frac{1}{2}v_B^2 + gR\cos\theta$ $\qquad (\ast')$

$\Rightarrow\ v_B^2 = 2(gR - gR\cos\theta)$

$\Rightarrow\ v_B = \sqrt{2(gR - gR\cos\theta\,)}$

2) D'après le principe fondamental de la dynamique :

$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow\ \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$

On choisit un repère composés de l'axe (OT) tangent à la demi sphère et l'axe (ON) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N}$:

En faisant la projection sur l'axe (ON) :

$$N - P\cos\theta = m\,a_N \;\Rightarrow\; N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{r}$$

3) Quand le point *P* quitte la sphère alors la réaction du support *N=0* :

$$mg\cos\theta = m\frac{v_P^2}{R} \;\Rightarrow\; v_P^2 = Rg\cos\theta$$

D'après $(\ast')$: $R = \frac{1}{2}Rg\cos\theta + gR\cos\theta$ alors : $\cos\theta = \frac{2}{3}$ donc : $\theta_0 = 48°$.

Le point matériel *P* quitte la sphère à une hauteur $h_P = \frac{2}{3}R$, et la vitesse sera $v_P = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$

L'angle auquel le point se détache de la demi-sphère par rapport à l'horizontale est :

$90 - 48 = 52$

4) La vitesse du point matériel sur l'axe (ox) sera $(\theta = 0)$:

$$v_P^2 = Rg\cos\theta \;\Rightarrow\; v_P = \sqrt{Rg}.$$

Exercices complémentaires

Exercice 1

Un anneau de masse *m*, assimilable à un point matériel *M*, peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon *r*. L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme v_0 depuis le point *A*, point le plus bas du cerceau. On repère sa position au cours de son mouvement par l'angle θ (voir figure).

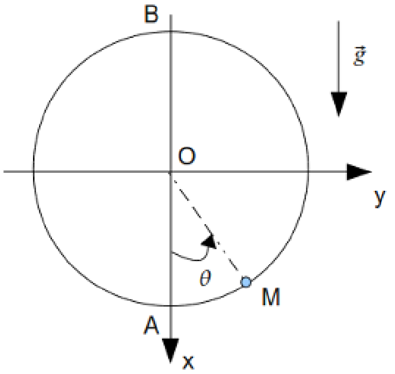
1) Établir l'expression de l'énergie potentielle de *M* en fonction de θ.

2) Tracer la courbe $E_p(\theta)$ et déterminer les positions d'équilibre de *M*.

3) On cherche à déterminer le mouvement possible de *M* selon la vitesse initiale.

a) Montrer que l'énergie mécanique de *M* se conserve et donner sa valeur.

b) En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de v_0. Préciser la valeur critique de v_0 séparant ces deux cas.



Exercice 2

Une voiture pesant 950 kg est dotée d'un moteur ayant un rendement de 30%. Cette voiture est stationnée au pied d'une rampe ayant une inclinaison de 15%. Le conducteur met en marche le véhicule, qui augmente progressivement sa vitesse, atteignant 55 km/h après avoir parcouru une distance de 300 mètres. La résistance au déplacement de la voiture est de 200 N.

- Établis la quantité d'énergie que le moteur consomme pour permettre à l'automobile d'atteindre cette condition.

Exercice 3

Un ressort horizontal, ayant une constante de rigidité $k=20\ N\cdot m^{-1}$, est équipé d'une masse de 100 g à son extrémité. Une masse de 50 g se déplace à une vitesse de 0,5 m/s et entre en collision avec une masse M qui était au repos initialement. On considère que le système est isolé.

1) Estimez la vitesse v et le déplacement maximal x_0 de la masse M suite à l'impact, en traitant le choc comme un événement élastique, et en présumant que les vitesses de M et m demeurent parallèles après l'incident.

2) Déterminer la rapidité v' du système ($M+m$) ainsi que la compression maximale que subit le ressort lors d'une collision douce.

3) Estimer le travail requis pour une compression maximale du ressort, toujours dans le contexte du choc doux.

Exercice 4

Un homme tire un traîneau de la base au sommet d'une colline dont la forme est comparable à un demi-cercle de rayon R, avec le point O comme centre. Il applique une force de traction $\vec{T}$

constante, en magnitude et formant un angle α constant avec le sol.

1) Évaluer le travail effectué par la force $\vec{T}$ sur le parcours.

2) a) En considérant qu'un homme se déplace à une vitesse constante *v*, déterminez la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ appliquée sur le traîneau en fonction de m, g, θ (l'angle polaire), *T, α, R* et *v*.

b) La formule de Coulomb permet de déterminer l'intensité de la force de friction du traîneau sur le sol $\|\overrightarrow{F_f}\| = f\|\overrightarrow{R_N}\|$, où *f* représente une constante. Évaluer le travail accompli par la force de friction au cours du parcours.

Exercice 5

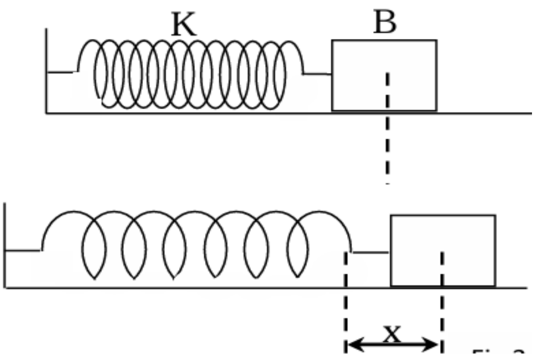
Un corps solide de masse *m* est lie d'un côté à un ressort de constante de raideur *K*, l'autre côté du ressort étant fixe. L'ensemble est centré sur une table, le coefficient de frottement est $\mu = tg\varphi$.

On déplace le corps horizontalement de sa position d'équilibre d'une distance *x* puis on le lâche.

1) Représenter les forces appliquées sur le corps.

2) Le corps passe une deuxième fois par la position d'équilibre *B*. Calculer alors la vitesse v_0.

A.N : x=0.15 m ; m=0.5 Kg ; μ=0.45 ; K=40 N/m.



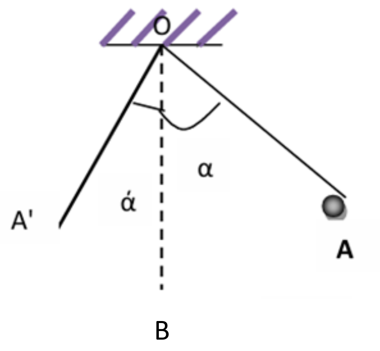
Exercice 6

Un pendule *OB* constitué d'une tige robuste de masse insignifiante et de longueur *L*=0.5m, supporte à son extrémité *B* un objet ayant une masse m= 50g. Le pendule est déclenché depuis le point *A* (la barre forme un angle α = 60° avec la verticale) sans vitesse de départ (Voir la figure).

- Calculez la vitesse et l'énergie cinétique du corps lorsqu'il :

a) Atteint le point *B* (lorsque la masse est en position verticale)

b) Passe par *A*' (quand la tige forme un angle α =30° avec la verticale, du côté opposé au point de départ).



Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- John R. Taylor, Classical Mechanics, University Science Books, 2005.
- Ahmed Fizazi, Mecanique du point Matériel, cours et exercices corriges, l’office des publications universitaires, Alger, 2016.
- HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale : Cinématique du point matériel, OPU, 2016.
- Travaux dirigés de mécanique du point, Fethi BOUDAHRI, Université Ahmed Zabana Relizane, 2021-2022.
- Polycopie d’examens de mécanique du point, A. Chafa, F, A. Dib, A. Derbouz, M. Hachmane, F. Kaouah, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.
- Travaux dirigés de mécanique du point, Arnaud LE PADELLEC et Magali MOURGUES, INP Toulouse, 2011-2012.