

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-  
ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme  
De Doctorat  
Filière : Mathématiques Appliquées  
Spécialité : Contrôle Optimal

Quelques Suites pour la création de nouveaux  
Polynômes Orthogonaux

Présentée par:

Belkebir Amel

Devant le jury

Directeur de thèse : Bouras Mohammed Chérif Prof U.B.M. ANNABA

Co-directeur de thèse : Haiour Mohamed Prof U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRÉSIDENT : Ghanem Radouen Prof U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Ellagoune Fateh Prof U.GUELMA

EXAMINATEUR : Ali Khelil Karima M.C.A U.B.M. ANNABA

Année : 2023/2024

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Définitions et Notations . . . . .	5
1.1.1 Quelques Opérations élémentaires dans le dual $\mathcal{P}'$ . . . . .	6
1.1.2 Suite duale . . . . .	7
1.2 L'orthogonalité usuelle . . . . .	8
1.2.1 Orthogonalité . . . . .	8
1.2.2 Existence des suites de polynômes orthogonaux . . . . .	8
1.2.3 Propriété des suites de polynômes orthogonaux . . . . .	8
1.2.4 Formes régulière et Formes définies positives. . . . .	9
1.2.5 Suites des polynômes symétriques . . . . .	10
1.3 Relations de type fini entre les suites de polynômes . . . . .	10
<b>2 Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes de polynômes orthogonaux de type 2-4</b>	<b>12</b>
2.1 Caractérisation de l'orthogonalité . . . . .	19
2.2 Cas particulier . . . . .	30
<b>3 Problème inverse pour une combinaison linéaire de polynômes orthog- onaux de type 2-5</b>	<b>34</b>
3.1 Caractérisation de l'orthogonalité . . . . .	42
3.2 Cas Particulier . . . . .	51

---

<b>4 Conclusion</b>	<b>54</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

## ملخص

في عملنا هذا، نقدم خاصية جديدة لتعامد متتالية كثيرات حدود معيارية  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  معرفة بعلاقة خطية مع متتالية أخرى من كثيرات حدود متعامدة معيارية  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  كما يلي:

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = P_n(x) + s_n P_{n-1}(x) + t_n P_{n-2}(x) + v_n P_{n-3}(x)$$

حيث:  $v_n r_n \neq 0$  من أجل كل  $n \geq 4$ ، بالإضافة إلى ذلك، برهنا على علاقة بين الأشكال

$$k(x - c)u = (x^3 + ax^2 + bx + d)v$$

حيث  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  و  $k \in \mathbb{C}/\{0\}$ . كما قدمنا عدد من الأمثلة التوضيحية.

قمنا أيضا بدراسة الحالة 2-5.

**الكلمات المفتاحية:** كثيرات حدود متعامدة، أشكال خطية، مشكلة عكسية، كثيرات حدود

تشبيبيشيف.

## Abstract

In our work, a new characterization of the orthogonality of a monic polynomials sequence  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  is obtained. This is defined as a linear combination of another monic orthogonal polynomials sequence  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  such as

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = P_n(x) + s_n P_{n-1}(x) + t_n P_{n-2}(x) + v_n P_{n-3}(x)$$

where  $v_n r_n \neq 0$ , for every  $n \geq 4$ . Futhermore, the relation between the corresponding linear functionals is showed to be

$$k(x-c)u = (x^3 + ax^2 + bx + d)$$

where  $a, b, c$  and  $d \in \mathbb{C}$  and  $k \in \mathbb{C}/\{0\}$ . Finally, an illustration using special case of the above type relation is given.

The case 2-5 has also been studied.

**Keywords:** Orthogonal polynomials, linear functionals, inverse problem, Chebyshev polynomials.

## Résumé

Dans notre travail, on donne une nouvelle caractérisation de l'orthogonalité d'une suite de polynômes normalisés  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  qui est définie comme une combinaison linéaire d'une autre suite de polynômes orthogonaux normalisés  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  telle que

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = P_n(x) + s_n P_{n-1}(x) + t_n P_{n-2}(x) + v_n P_{n-3}(x)$$

où  $v_n r_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq 4$ . De plus, on montre que la relation entre les fonctionnelles linéaires correspondantes est donnée par

$$k(x-c)u = (x^3 + ax^2 + bx + d)$$

où  $a, b, c$  et  $d \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{C}/\{0\}$ . Un certain nombre d'exemples illustratifs sont aussi fournis.

Le cas 2-5 a été aussi étudié .

**Mots-clés:** Polynômes orthogonaux, fonctionnelles linéaires, problème inverse, polynômes de Chebychev.

---

# Introduction

Les polynômes orthogonaux sont depuis longtemps un sujet de recherche pour les mathématiciens. Par exemple, Adrien-Marie Legendre, dans le cadre de ses calculs de mécanique céleste au début du XIXe siècle, a commencé à considérer la famille de polynômes désormais associée à son nom, les polynômes de Legendre. Depuis lors jusqu'à aujourd'hui, la théorie de ces polynômes n'a cessé de croître en précision et en importance, ainsi que d'autres applications. En fait, avec l'avènement des ordinateurs, les polynômes orthogonaux sont devenus des outils très utiles pour l'approximation et l'encodage et le décodage. C'est pourquoi leurs recherches se poursuivent à ce jour.

Les polynômes orthogonaux apparaissent également dans l'étude de l'interpolation polynomiale, du développement en série des fonctions, du calcul approximatif ou exact des intégrales, des approximations scalaires, vectorielles et matricielles de Padé et des fractions continues scalaires, vectorielles et matricielles. Elles permettent par exemple d'étudier la convergence de ces différentes grandeurs. Ce sont également des outils importants pour résoudre les systèmes dynamiques Toda-Langmuir et les systèmes Kac-van Moerbeke associés et les équations de Korteweg-de Vries. Les polynômes orthogonaux formels peuvent également prouver et démontrer des algorithmes d'algèbre linéaire, tels que la méthode du gradient conjugué, Lanczos ou les algorithmes GMRES.

Ces multitudes des domaines d'application des systèmes de polynômes orthogonaux font que ces derniers jouissent d'un intérêt particulier.

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), a utilisé certains outils de ces systèmes, tel que les fonctions de Legendre, pour résoudre certains problèmes de la mécanique céleste, alors que Gauss a pu transformer son système non linéaire dans la méthode de quadrature de

Gauss en un système linéaire en utilisant les zéros des suites de polynômes classiques. Tchebychev (1821 – 1894) ainsi que Hermite (1822 – 1901) ont utilisés des polynômes qui portent leurs noms pour la construction des polynômes d’interpolation d’une fonction connue discrètement.

Hermite et Padé ont utilisé les polynômes orthogonaux dans l’approximation des fonctions réelles ou complexes ou des séries formelles, cette approximation est connue sous le nom de Hermite-Padé.

D’autres auteurs, tels que Stieljes et Hausdorff ont pu résoudre certains problèmes de moments portant leurs noms. Comme il existe aussi des problèmes de la physique théorique qui ont pu être modélisés par des EDO ou aux EDPs, dont les solutions sont des polynômes orthogonaux. Quelques résultats obtenus lors des premiers développements de la théorie de l’orthogonalité polynomiale ont été motivés par le désir de construire des formules de quadrature avec les nombres de Christoffel dont les noeuds sont des zéros de polynômes connus. De nos jours ces quadratures sont succinctement dénommées formules de quadrature positives.

Le plus convaincant exemple est la preuve d’Askey et Gasper [7, 8] de la positivité de certaines sommes des polynômes de Jacobi qui ont joué un rôle clé dans l’étape finale de Branges preuve de la conjecture de Bieberbach. Nous nous référons à la belle étude d’Askey [9] pour la motivation pour étudier les sommes positives de polynômes de Jacobi, provenant de quadratures, et pour plus d’informations sur ces connexions naturelles.

La construction de règles de quadrature positives est liée à ce que l’on appelle les polynômes quasi-orthogonaux. Soit donnée  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes orthogonaux normalisés, générés par la relation de récurrence à trois termes suivante

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n > 0, \quad \gamma_n \neq 0, \quad (0.1)$$

avec  $P_{-1}(x) = 0$  et  $P_0(x) = 1$ . Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes orthogonaux normalisée,  $m$  et  $k$  sont des entiers positifs. Considérons un autre suite de polynômes normalisés  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  liés à  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  par

$$Q_n(x) + \sum_{j=1}^{m-1} a_{j,n} Q_{n-j}(x) = P_n(x) + \sum_{i=1}^{k-1} b_{i,n} P_{n-i}(x) \quad , \quad n \geq 0 \quad (0.2)$$

avec  $a_{j,n}, b_{i,n} \in \mathbb{R}$ , et  $a_{m-1,n} \cdot b_{k-1,n} \neq 0$ . De plus, supposons que  $r_{m,m+n} \neq 0$  et  $s_{n,m+n} \neq 0$ ,  $\det [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^{m+n} \neq 0$  où les entrées  $\alpha_{ij}$  de la matrice sont définies sur la base de  $\{r_{i,n}\}_{n \geq 0}$  et  $\{s_{k,n}\}_{n \geq 0}$ . Alors il existe deux polynômes  $\Phi$  et  $\Psi$  avec  $\deg \Phi = m$  et  $\deg \Psi = n$  tels que .

$$\Phi(z)u = \Psi(z)v.$$

Ces polynômes  $\Phi$  et  $\Psi$  peuvent être construits de manière explicite [30]. D'autre part, le résultat inverse est également analysé. On obtient un théorème de caractérisation pour que la suite  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  soit orthogonale en supposant que  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est orthogonale, lorsque  $m = 0$  et  $n = 1$ ,  $m = 1$  et  $n = 1$ ,  $m = 0$  et  $n = 2$ ,  $m = 1$  et  $n = 2$ ,  $m = 0$  et  $n = 3$ ,  $m = 0$  et  $n = k$  [1, 2, 3, 4, 5].

Ensuite, le problème qui consiste à trouver des conditions nécessaires et conditions suffisantes pour que  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  soit aussi une suite de polynômes normalisés et d'obtenir la relation entre les fonctionnelles linéaires régulières correspondantes est appelé un problème inverse. Un grand nombre de résultats intéressants ont été obtenus sur des sujets liés à ce genre de problème inverse [1, 2, 3, 4, 5, 11, 13, 16, 17, 20, 30] .

L'objet de notre travail est de porter notre attention sur les polynômes quasi-orthogonaux définis par (0.2) dans le cas où  $m = 2$  et  $k = 4$ , et comme prolongement de notre travail, on a aussi étudié le cas  $m = 2$  et  $k = 5$  afin de faire une généralisation de cette formule. Ces travaux ont été publiés dans des revues de renommées internationales.

En lien avec les polynômes orthogonaux, le travail présent se décompose donc en quatre chapitres.

Après une introduction bien détaillée, nous rappelons dans le deuxième chapitre l'aspect théorique nécessaire à la compréhension de la thèse où on y définit les polynômes orthogonaux et on démontre des résultats sur ces polynômes, tout en donnant quelques théorèmes, définitions et quelques outils qui nous seront utiles pour la suite de notre travail, on présente dans le chapitre 3 de nouveaux résultats sur les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes de polynômes orthogonaux de type 2-4.

Une extension de cette étude, à savoir l'étude du problème inverse pour une combinaison linéaire de polynômes orthogonaux de type 2-5 se trouve dans le quatrième chapitre.

Une nouvelle caractérisation de l'orthogonalité de ses suites de polynômes a été étudiée, comme on a aussi dressé un cas particulier.

On terminera cette thèse en donnant des perspectives comme prolongement de ce travail. Une bibliographie succincte se trouve en fin de ce mémoire.

Nous allons introduire les notions nécessaires pour la bonne compréhension de cette thèse où nous rappelons les notations, les définitions et les propriétés habituelles d'orthogonalité.

## 1.1 Définitions et Notations

Soit  $\mathcal{P}$  l'espace linéaire des polynômes en une variable à coefficients complexes et soit  $\mathcal{P}'$  son dual algébrique. On désigne par  $\langle u, f \rangle$  l'action de  $u$  dans  $\mathcal{P}'$  sur  $f$  dans  $\mathcal{P}$  et par  $(u)_n := \langle u, x^n \rangle$ ,  $n \geq 0$ , les moments de  $u$  par rapport à la suite monomiale  $\{x^n\}_{n \geq 0}$ . Lorsque  $(u)_0 = 1$ , la fonction linéaire  $u$  est dite normalisée. Pour notre travail, nous devons rappeler quelques opérations dans  $\mathcal{P}'$ , (voir [15], [19]). Pour tout  $u$  dans  $\mathcal{P}'$ , tout  $q$  dans  $\mathcal{P}$  et tout nombre complexe  $a, b, c$  avec  $a \neq 0$ , soit  $Du = u'$ ,  $qu$ ,  $h_a u$ ,  $\tau_b u$  et  $\sigma u$  respectivement la dérivée, la multiplication à gauche, la translation, l'homothétie la partie paire des formes linéaires définies par la dualité :

$$\begin{aligned} \langle u', f \rangle &:= -\langle u, f' \rangle, \\ \langle qu, f \rangle &:= \langle u, qf \rangle, \\ \langle \tau_b u, f \rangle &:= \langle u, \tau_{-b} f \rangle = \langle u, f(x+b) \rangle, \\ \langle h_a u, f \rangle &:= \langle u, h_a f \rangle = \langle u, f(ax) \rangle, \\ \langle \sigma u, f \rangle &:= \langle u, \sigma f \rangle = \langle u, f(x^2) \rangle, \quad f \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

La forme linéaire  $u$  est dite régulière (quasi-définie) si les principales sous-matrices  $\mathcal{H}_n$  de la matrice de Hankel  $\mathcal{H} = (u_{i+j})_{i,j \geq 0}$  relatives aux moments  $(u)_n = \langle u, x^n \rangle$ ,  $n \geq 0$ , sont non singulières, pour chaque  $n \geq 0$  [15].

### 1.1.1 Quelques Opérations élémentaires dans le dual $\mathcal{P}'$

a/ La multiplication à gauche d'une forme par un polynôme:

On définit la multiplication à gauche d'une forme linéaire par:

$$\langle fu, p \rangle = \langle u, fp \rangle, \quad p \in \mathcal{P}$$

et pour tout polynôme  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$

$$(fu)_n = \langle fu, x^n \rangle = \sum_{i=0}^m a_i (u)_{i+n}, \quad n \geq 0.$$

b/ La multiplication à droite d'une forme par un polynôme:

Pour chaque polynômes  $f(x) = \sum_{\nu=0}^p a_\nu x^\nu$  on définit:

$$uf(x) = \sum_{n=0}^p \left( \sum_{\nu=n}^p a_\nu u_{\nu-n} \right) x^n$$

avec:

$$u_n = \langle u, x^n \rangle, \quad n \geq 0$$

c/ La transposée de  $f \rightarrow uf$  permet de définir le produit multiplicatif de deux formes linéaires:

$$\langle vu, f \rangle = \langle v, uf \rangle, \quad v, u \in \mathcal{P}', \quad f \in \mathcal{P}$$

d/ La dérivée d'une forme par un polynôme de degré 1:

On définit l'opérateur  $\theta_c$  par:

$$\theta_c f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Par transposition, la division d'une forme linéaire par un polynôme de degré un est donnée par:

$$\langle (x - c)^{-1} u, f(x) \rangle = \langle u, \theta_c f(x) \rangle,$$

et on a particulièrement

$$\left( (x - c)^{-1} u \right)_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{k=0}^{n-1} c^{n-k-1} (u)_k. & n > 0. \end{cases}$$

e/ La dérivée d'une forme:

On définit la dérivée d'une forme par:

$$\langle Du, P_n \rangle = -\langle u, P'_n \rangle, \quad n > 0.$$

et on a en particulier

$$(Du)_n = -n(u)_{n-1}; \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad (u)_0 = 0.$$

### 1.1.2 Suite duale

Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes normalisés (qu'on notera *SPN*) (i.e.  $P_n(x) = x^n + \dots$ ,  $n \geq 0$ ).

**Définition 1.1.1** [18] *La suite de formes linéaires  $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 0}$  définie par :*

$$\mathcal{L}_n(P_m) = \langle \mathcal{L}_n, P_m \rangle = \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0. \quad (1.1)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité entre  $\mathcal{P}$  et sa duale algébrique  $\mathcal{P}'$ , est appelée suite duale de la suite  $\{P_n\}_{n \geq 0}$

La suite  $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 0}$  est unique et libre.

**Lemme 1.1.1** [18] *Soit  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'$  et soit  $p \geq 1$  un entier. Pour que  $\mathcal{F}$  vérifie:*

$$\mathcal{F}(P_{p-1}) \neq 0, \quad \mathcal{F}(P_n) = 0, \quad n \geq p \quad (1.2)$$

*il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq \nu \leq p-1$ ,  $\lambda_{p-1} \neq 0$ , tels que:*

$$\mathcal{F} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \lambda_\nu \mathcal{L}_\nu. \quad (1.3)$$

## 1.2 L'orthogonalité usuelle

### 1.2.1 Orthogonalité

**Définition 1.2.1** [15] Une suite de polynômes  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est appelée suite de polynômes orthogonaux (qu'on notera SPO) par rapport à la forme  $\mathcal{L}$  si pour tout les entiers  $n$  et  $m$  on a:

- $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$
- $\mathcal{L}(P_n(x)P_m(x)) = 0$  pour  $n \neq m$  et  $n, m \geq 0$
- $\mathcal{L}(P_n^2(x)) \neq 0$  pour  $n \geq 0$

### 1.2.2 Existence des suites de polynômes orthogonaux

Soit la suite des moments  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  donné par:

$$\mu_n = \mathcal{L}(x^n), \quad n \geq 0 \quad (1.1)$$

et soit les déterminants dits de Henkel suivants:

$$H_n = \Delta_n = \det [\mu_{i+j}]_{i,j=0}^n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (1.2)$$

**Théorème 1.2.1** [15] Soit  $\mathcal{L}$  une fonctionnelle moments dont la suite des moments est  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ . Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une suite de polynômes orthogonaux par rapport à  $\mathcal{L}$  est que:

$$H_n = \Delta_n \neq 0, \quad n \geq 0$$

### 1.2.3 Propriété des suites de polynômes orthogonaux

Une des plus importantes caractéristiques des polynômes orthogonaux étant la récurrence d'ordre deux vérifiée par ces polynômes.

**Théorème 1.2.2** [15] *Soit  $\mathcal{L}$  une forme linéaire régulière et  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  sa SPO correspondante alors, il existe deux suites de nombres  $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  telles que:*

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x - \beta_0 \\ P_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x), & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec la condition de régularité  $\gamma_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . De plus si on pose  $P_n = x^n + b_n x^{n-1} + \dots$ , pour tout  $n \geq 0$  on aura

$$\beta_n = b_{n+2} - b_{n+1} \quad (1.4)$$

et

$$\gamma_n = \frac{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \quad (1.5)$$

où  $\Delta_{-1} = 1$  (par convention).

Il est très utile d'énoncer le théorème de Favard

**Théorème 1.2.3** [15] *Pour toute suite  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  de polynômes normalisés vérifiant la récurrence d'ordre deux de la forme (1.3).*

*Il existe une forme  $\mathcal{L}$  telle que  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est orthogonale par rapport à  $\mathcal{L}$  (et réciproquement). De plus  $\mathcal{L}$  est unique si  $\mathcal{L}(P_0) = \mu_0 \neq 0$ .*

### 1.2.4 Formes régulière et Formes définies positives.

**Définition 1.2.2** [15] *La formes  $\mathcal{L}$  est dite régulière (admissible, quasi-définie) si on peut lui associer une suite  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  telle que:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(P_n(x)P_m(x)) = 0, & n \neq m \\ \mathcal{L}(P_n^2(x)) \neq 0 & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

*Une telle suite est dite régulièrement orthogonale par rapport à  $\mathcal{L}$ , elle est libre, qu'on peut toujours la normalise et dont ce cas elle est unique.*

**Théorème 1.2.4** [15] *La forme  $\mathcal{L}$  est régulière si et seulement si les déterminants de Henkel définis par:*

$$H_n = \Delta_n, \quad n \geq 0$$

*Soient différents de zéro pour tout  $n$ .*

**Définition 1.2.3** [15] Une forme  $\mathcal{L}$  est dite définie positive si pour tout polynôme  $P$  positif et non nul et pour tout réel  $x$ , on a  $\mathcal{L}(P(x)) > 0$ .

### 1.2.5 Suites des polynômes symétriques

**Lemme 1.2.1** [15] Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une SPON par rapport à la forme  $u$ , alors on a les équivalences suivantes:

- $u$  est symétrique.
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ ,  $n \geq 0$ .
- $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x)$ ,  $n \geq 1$ , (i.e.  $\beta_n = 0$ ,  $n \geq 0$ )

**Définition 1.2.4** [15] Une fonctionnelle moment  $u$ , est dite symétrique si et seulement si tous ses moments d'ordre impair sont nuls.

## 1.3 Relations de type fini entre les suites de polynômes

Nous rappelons dans cette section les principaux résultats concernant les relations de type fini (RTF) entre deux suites de polynômes. Tout les définitions et les résultats de cette section sont de la référence [20]

soit  $\Phi$  un polynôme normalisé  $PN$  tels que  $\deg \Phi = t$ .

**Définition 1.3.1** On dit qu'une suite de polynômes (SP)  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est compatible avec  $\Phi$  si  $\Phi P_n \neq 0$ ,  $n \geq 0$ .

**Remarque 1.3.1** Toute suite de polynômes orthogonaux est compatible avec n'importe quel polynôme normalisé.

**Définition 1.3.2** Soient  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  deux suites de polynômes normalisés, s'il existe un entier  $s \geq 0$  tels que

$$\begin{aligned} \Phi(x) P_n(x) &= \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \lambda_{n,\nu} Q_\nu(x), \quad n \geq s, \\ \exists r \geq s : \lambda_{r,r-s} &\neq 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

on dit que les suites  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  vérifient une RTF par rapport à  $\Phi$ . Si  $\lambda_{n,n-s} \neq 0$ ,  $n \geq s$ , (1.1) est dite RTF stricte.

**Théorème 1.3.1** Soient  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  deux suites normalisées dont  $\{u_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  sont respectivement les suites duales associées, et soit  $\Phi$  un polynôme normalisé de degré  $t$ .

Pour toute suite  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  compatible avec un polynôme normalisé  $\Phi$ , on a

i) Il existe un entier positive  $s \geq 0$  tel que

$$\begin{aligned} \Phi(x) Q_n(x) &= \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \lambda_{n,\nu} R_\nu(x), \quad n \geq s, \\ \exists r \geq s : \quad \lambda_{r,r-s} &\neq 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

ii) Il existe un entier positive  $s \geq 0$  et une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N} : m \mapsto \mu_m$  satisfaisant

$$\begin{aligned} \max(0, m-t) &\leq \mu_m \leq m+s, \quad m \geq 0, \\ \exists m_0 \geq 0 : \mu_m &= m_0 + s, \end{aligned} \tag{1.3}$$

tel que:

$$\begin{aligned} \Phi u_m &= \sum_{\nu=m-t}^{\mu_m} \lambda_{\nu,m} v_\nu(x), \quad m \geq t, \\ \lambda_{\mu_m,m} &\neq 0, \quad m \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

sont équivalentes.

---

# Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes de polynômes orthogonaux de type 2-4

Dans ce chapitre, nous intéressons au problème inverse suivant. Nous supposons que  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de polynômes orthogonaux normalisés par rapport à une forme linéaire quasi-définie  $u$  et nous analysons l'existence d'une suite de polynômes orthogonaux  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  telle que nous avons la décomposition suivante

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = P_n(x) + s_n P_{n-1}(x) + t_n P_{n-2}(x) + v_n P_{n-3}(x), \quad n \geq 0 \quad (2.1)$$

lorsque  $v_n r_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq 4$ . De plus, nous montrons que l'orthogonalité de la suite  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  peut également être caractérisée par l'existence de suites dépendant des paramètres  $r_n, s_n, t_n, v_n$  et des coefficients de récurrence qui restent constants. De plus,

## 2. Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes de polynômes orthogonaux de type 2-4

---

nous montrons que la relation entre les formes linéaires correspondantes est

$$k(x - c)u = (x^3 + ax^2 + bx + d)v$$

où  $c, a, b, d \in \mathbb{C}$  and  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Nous étudions également quelques sous-cas dans lesquels les paramètres  $r_n, s_n, t_n$  et  $v_n$  peuvent être calculés plus facilement. Nous terminons par une illustration d'un exemple particulier de la relation de type ci-dessus.

Soient  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  deux suites de polynômes orthogonaux normalisés par rapport aux formes régulières  $u$  et  $v$  respectivement, où  $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$ , soient  $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  et  $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$  les suites correspondantes de coefficients de récurrence caractérisant respectivement  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ . Supposons que ces suites soient liées par la relation (2.1).

Les conditions initiales  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $v_4 r_4 \neq 0$  donnent une relation entre les formes linéaires  $u$  et  $v$  telle que .

$$\phi u = \psi v$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont des polynômes de degré 1 et 3, respectivement.

Tout d'abord, si  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $r_4 \neq 0$  alors il existe un nombre complexe  $c$  tel que

$$\langle (x - c)u, Q_4(x) \rangle = 0.$$

de plus,

$$\langle (x - c)u, Q_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 4.$$

Comme

$$\begin{aligned} \langle (x - c)u, Q_0(x) \rangle &= \beta_0 - c, \\ \langle (x - c)u, Q_1(x) \rangle &= \gamma_1 + (s_1 - r_1)(\beta_0 - c), \\ \langle (x - c)u, Q_2(x) \rangle &= (s_2 - r_2)\gamma_1 + (t_2 - r_2(s_1 - r_1))(\beta_0 - c), \\ \langle (x - c)u, Q_3(x) \rangle &= (t_3 - r_3(s_2 - r_2))\gamma_1 + (v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1)))(\beta_0 - c), \\ \langle (x - c)u, Q_4(x) \rangle &= (v_4 - r_4(t_3 - r_3(s_2 - r_2)))\gamma_1 \\ &\quad - r_4(v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1)))(\beta_0 - c). \end{aligned} \tag{2.2}$$

**2. Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes  
de polynômes orthogonaux de type 2-4**

---

alors il existe  $c$  tel que

$$\langle (x - c)u, Q_4(x) \rangle = 0.$$

ce qui nous donne

$$c := \beta_0 - \frac{\gamma_1}{r_4} \times \frac{v_4 - r_4(t_3 - r_3(s_2 - r_2))}{v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))}. \quad (2.3)$$

et par suite

$$\langle (x - c)u, Q_n(x) \rangle = -r_n \langle (x - c)u, Q_{n-1}(x) \rangle, \quad n \geq 5.$$

D'autre part, [19]

$$(x - c)u = \sum_{i=0}^3 \frac{\langle (x - c)u, Q_i(x) \rangle}{\langle v, Q_i^2(x) \rangle} Q_i(x)v.$$

Donc, si  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $v_4 r_4 \neq 0$ , on obtient la relation entre la forme  $u$  et la forme  $v$

$$(x - c)u = q(x)v$$

où  $q$  est un polynôme de degré 3.

**Lemme 2.0.1** *Soient  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  deux SPON par rapport aux formes linéaires normalisées  $u$  et  $v$  respectivement, où  $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$ . Supposons qu'il existe des suites de nombres complexes  $\{r_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{s_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  avec les conditions initiales  $r_0 = s_0 = t_0 = t_1 = v_0 = v_1 = v_2 = 0$ , telle que*

$$Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) = P_n(x) + s_n P_{n-1}(x) + t_n P_{n-2}(x) + v_n P_{n-3}(x), \quad n \geq 0$$

avec les conditions initiales  $Q_0(x) = P_0(x) = 1$  et  $Q_{-1}(x) = P_{-m}(x) = 0$ , pour  $m = 1, 2, 3$ , soient satisfaites, pour tout  $n \geq 0$ .

Alors on a les implications suivantes:

1- Si  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $r_4 = 0$  alors  $v_n \neq r_n(t_{n-1} - r_{n-1}(s_{n-2} - r_{n-2}))$ , pour  $n \geq 3$ , et  $r_n = 0$ , pour tout  $n \geq 4$ . Dans ce cas, la relation (2.1) se réduit à une relation de type 1 - 4

$$Q_n(x) = P_n(x) + a_n P_{n-1}(x) + b_n P_{n-2}(x) + c_n P_{n-3}(x), \quad n \geq 0$$

**2. Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes  
de polynômes orthogonaux de type 2-4**

---

avec

$$\begin{aligned} a_n &:= s_n - r_n, & n \geq 1, \\ b_n &:= t_n - r_n (s_{n-1} - r_{n-1}), & n \geq 2, \\ c_n &:= v_n - r_n (t_{n-1} - r_{n-1} (s_{n-2} - r_{n-2})), & n \geq 3. \end{aligned}$$

2- Si  $v_3 \neq r_3 (t_2 - r_2 (s_1 - r_1))$  et  $r_4 \neq 0$  alors  $r_n \neq 0$ ,  $n \geq 4$ .

3- Si  $v_3 \neq r_3 (t_2 - r_2 (s_1 - r_1))$  et  $v_4 r_4 \neq 0$  alors  $v_n r_n \neq 0$ , pour  $n \geq 4$ .

Ainsi, dans ce cas, la relation (2.1) est une relation de type 2 – 4 non dégénérée.

**Preuve.** On a

$$\begin{cases} \langle u, Q_1(x) \rangle = s_1 - r_1, \\ \langle u, Q_2(x) \rangle = t_2 - r_2 (s_1 - r_1), \\ \langle u, Q_3(x) \rangle = v_3 - r_3 (t_2 - r_2 (s_1 - r_1)), \\ \langle u, Q_n(x) \rangle = -r_n \langle u, Q_{n-1} \rangle, & n \geq 4. \end{cases} \quad (2.4)$$

Si  $v_3 = r_3 (t_2 - r_2 (s_1 - r_1))$  alors on a les cas suivants :

i)  $t_2 = r_2 (s_1 - r_1)$  et  $s_1 = r_1$ .

ii)  $t_2 = r_2 (s_1 - r_1)$  et  $s_1 \neq r_1$ .

iii)  $t_2 \neq r_2 (s_1 - r_1)$  et  $r_3 = 0$ .

iv)  $t_2 \neq r_2 (s_1 - r_1)$  et  $r_3 \neq 0$ ,  $t_3 = 0$ .

v)  $t_2 \neq r_2 (s_1 - r_1)$  et  $r_3 t_3 \neq 0$ .

Voir [5], dans tous ces cas  $v_n = 0$ , pour  $n \geq 3$ .

1- Si  $v_3 \neq r_3 (t_2 - r_2 (s_1 - r_1))$  et  $r_4 = 0$ , d'après (2.4), on a

$$\langle u, Q_i(x) \rangle \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

et

$$\langle u, Q_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 4.$$

Ainsi, il existe un polynôme  $q$  de degré 3 tel que  $u = q(x)v$  [17].

par conséquent,

$$Q_n(x) = P_n(x) + a_n P_{n-1}(x) + b_n P_{n-2}(x) + c_n P_{n-3}(x),$$

**2. Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes  
de polynômes orthogonaux de type 2-4**

---

pour chaque  $n \geq 0$ , avec  $c_n \neq 0$ ,  $n \geq 3$ .

De plus, la relation (2.1) nous donne

$$\begin{aligned} s_n &= a_n + r_n, & n \geq 1, \\ t_n &= b_n + r_n a_{n-1}, & n \geq 2, \\ v_n &= c_n + r_n b_{n-1}, & n \geq 3 \end{aligned}$$

et

$$r_n c_{n-1} = 0, n \geq 4$$

Donc,  $r_n = 0$ ,  $n \geq 4$ , et  $v_n \neq 0$ ,  $n \geq 3$ . C'est la relation dégénérée de type 1 - 4 .

2- Si

$$v_3 \neq r_3 (t_2 - r_2 (s_1 - r_1)) \quad \text{et} \quad r_4 \neq 0$$

alors d'après (2.4), on a

$$\langle u, Q_3(x) \rangle \neq 0 \quad \text{and} \quad \langle u, Q_4(x) \rangle \neq 0,$$

et si  $r_n = 0$ , pour chaque  $n \geq 5$ , on a

$$\langle u, Q_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 5.$$

Supposant maintenant qu'il existe  $n \geq 5$  tel que  $r_n = 0$ ,

en posant

$$n_0 := \min \{n \in \mathbb{N} / n \geq 5, r_n = 0\}$$

alors

$$\langle u, Q_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq n_0$$

et

$$\langle u, Q_n(x) \rangle \neq 0, \quad 3 \leq n \leq n_0 - 1.$$

Ainsi, il existe un polynôme  $q$  de degré  $n_0 - 1$  tel que  $u = q(x)v$  [17].

Par conséquent,

$$Q_n(x) = P_n(x) + \sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_{n,k} P_{n-k}(x)$$

## 2. Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes de polynômes orthogonaux de type 2-4

---

où  $\alpha_{n,n_0-1} \neq 0$ ,  $n \geq n_0 - 1$ .

Compte tenu de (2.1), cela n'est pas possible. Ainsi  $r_n \neq 0$ ,  $n \geq 4$ .

3- Si  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $r_4v_4 \neq 0$  alors il existe une constante  $c$  telle que

$$(x - c)u = q(x)v$$

avec  $q$  un polynôme de degré 3 et d'après (2.1), on peut écrire pour  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle (x - c)u, Q_n(x) Q_{n-4}(x) \rangle &= \langle (x - c)u, (P_n(x) + s_n P_{n-1}(x) + t_n P_{n-2}(x) \\ &\quad + v_n P_{n-3}(x)) Q_{n-4}(x) \rangle \\ &\quad - r_n \langle (x - c)u, Q_{n-1}(x) Q_{n-4}(x) \rangle \\ &= v_n \langle u, P_{n-3}^2(x) \rangle - r_n \langle (x - c)u, Q_{n-1}(x) Q_{n-4}(x) \rangle. \end{aligned}$$

et par suite, on a

$$\begin{aligned} v_n \langle u, P_{n-3}^2(x) \rangle &= \langle (x - c)u, (Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x)) Q_{n-4}(x) \rangle \\ &= \langle q(x)v, (Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x)) Q_{n-4}(x) \rangle \\ &= r_n \langle v, q(x) Q_{n-1}(x) Q_{n-4}(x) \rangle \\ &= k_1 r_n \langle v, Q_{n-1}^2(x) \rangle \end{aligned}$$

où  $k_1$  est le coefficient de tête du polynôme  $q$ . Où, il suffit d'appliquer (2) pour obtenir  $r_n \neq 0$ ,  $n \geq 4$ , et d'après la définition 1.1.1, on a

$$v_n r_n \neq 0, n \geq 4$$

■

Dans la proposition suivante, on montre que si  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $r_4v_4 \neq 0$  cette équivalence est vérifiée si la forme  $(x - c)u$  est régulière.

**Proposition 2.0.1** *Soient  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  deux SPON par rapport aux formes linéaires normalisées régulières  $u$  et  $v$  respectivement, Alors il existe des suites de nombres complexes  $\{r_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{s_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  avec les conditions initiales  $r_0 = s_0 = t_0 = t_1 = v_0 = v_1 = v_2 = 0$ , telle que la relation (2.1) soit vérifiée et que les conditions*

**2. Les fonctionnelles linéaires associées aux suites linéairement dépendantes  
de polynômes orthogonaux de type 2-4**

---

initiales  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $r_4v_4 \neq 0$  soient vérifiées, alors les assertions suivantes sont équivalentes:

i) La forme  $(x - c)u$  est régulière.

ii)  $v_n \neq r_n(t_{n-1} - r_{n-1}(s_{n-2} - r_{n-2}))$ ,  $n \geq 3$ .

**Preuve.** En multipliant la relation (2.1) par  $P_{n-1}$  et en appliquant  $u$ , de la même manière pour  $P_{n-2}$  et  $P_{n-3}$ , on obtient, respectivement,

$$\langle u, Q_n(x) P_{n-1}(x) \rangle = (s_n - r_n) \langle u, P_{n-1}^2(x) \rangle, \quad n \geq 1,$$

$$\langle u, Q_n(x) P_{n-2}(x) \rangle = (t_n - r_n(s_{n-1} - r_{n-1})) \langle u, P_{n-2}^2(x) \rangle, \quad n \geq 2,$$

$$\langle u, Q_n(x) P_{n-3}(x) \rangle = (v_n - r_n(t_{n-1} - r_{n-1}(s_{n-2} - r_{n-2}))) \langle u, P_{n-3}^2(x) \rangle, \quad n \geq 3.$$

Ainsi

$$v_n - r_n(t_{n-1} - r_{n-1}(s_{n-2} - r_{n-2})) \neq 0 \Leftrightarrow \langle u, Q_n(x) P_{n-3}(x) \rangle \neq 0, \quad n \geq 3.$$

sachant que  $(x - c)u$  est régulière si et seulement si  $P_n(c) \neq 0$ , pour tout  $n \geq 0$  [17].  
alors nous devons montrer que

$$\langle u, Q_{n+3}(x) P_n(x) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow P_n(c) \neq 0$$

pour chaque  $n \geq 0$ . Soit pour cela

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk}(x - c)^k, \quad n \geq 0$$

avec  $a_{n0} = P_n(c)$  et  $a_{nn} = 1$ .

La relation entre les formes régulières  $u$  et  $v$  est donnée par

$$(x - c)u = q(x)v,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \langle u, Q_{n+3}(x) P_n(x) \rangle &= \langle (x-c)u, (x-c)^{n-1} Q_{n+3}(x) \rangle \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} \langle (x-c)u, (x-c)^{k-1} Q_{n+3}(x) \rangle \\
 &+ P_n(c) \langle u, Q_{n+3}(x) \rangle \\
 &= \langle v, q(x)(x-c)^{n-1} Q_{n+3}(x) \rangle \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} a_{ni} \langle v, q(x)(x-c)^{k-1} Q_{n+3}(x) \rangle \\
 &+ P_n(c) \langle u, Q_{n+3}(x) \rangle, \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

et

$$\langle u, Q_{n+3}(x) P_n(x) \rangle = P_n(c) \langle u, Q_{n+3}(x) \rangle, \quad n \geq 0.$$

Ainsi, d'après le lemme 2.0.1 et la relation (2.4), nous obtenons

$$\langle u, Q_n(x) \rangle \neq 0, \quad n \geq 3.$$

■

## 2.1 Caractérisation de l'orthogonalité

Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une *SPON* par rapport à une forme régulière  $u$  et soient  $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  les suites des coefficients de récurrence correspondantes telle que

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales  $P_0(x) = 1$ ,  $P_{-1}(x) = 0$  et la condition  $\gamma_n \neq 0$ , pour chaque  $n \geq 1$ .

Dans cette section, nous donnons les caractérisations de l'orthogonalité d'une suite  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  de polynômes normalisés définis par une relation de type non dégénérée (2.1).

D'après le lemme 2.0.1, les conditions  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $r_4 v_4 \neq 0$  doivent être vérifiées, afin d'avoir une relation de type 2 – 4 non dégénérée avec  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$

## 2.1. Caractérisation de l'orthogonalité

sont *SPON* et ces conditions impliquent  $v_n r_n \neq 0$ , pour chaque  $n \geq 4$ .

Dans ce qui suit, nous donnons la première caractérisation de l'orthogonalité de la suite  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$

**Proposition 2.1.1** *Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une SPON satisfaisant (2.1), et soit  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes donnée par la relation de structure (2.1) avec  $v_3 \neq r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))$  et  $v_n r_n \neq 0$  pour  $n \geq 4$ . Alors,  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON où les coefficients de récurrences  $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$  sont donnés par*

$$\tilde{\beta}_n := \beta_n - s_{n+1} + s_n + r_{n+1} - r_n, \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_n := & \gamma_n + t_n - t_{n+1} + s_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-1}) \\ & - r_n (r_{n+1} - r_n - \tilde{\beta}_n + \tilde{\beta}_{n-1}), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

si et seulement si  $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \neq 0$ , et les relations suivantes sont vérifiées:

$$a_n s_{n-1} = s_n \gamma_{n-1} + t_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-2}) - v_{n+1} + v_n, \quad n \geq 2, \quad (2.4)$$

$$a_n t_{n-1} = t_n \gamma_{n-2} + v_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-3}), \quad n \geq 3, \quad (2.5)$$

$$a_n v_{n-1} = v_n \gamma_{n-3}, \quad n \geq 4, \quad (2.6)$$

$$a_n r_{n-1} = r_n \tilde{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (2.7)$$

où

$$a_n := \gamma_n + t_n - t_{n+1} + s_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-1}), \quad n \geq 1, \quad (2.8)$$

**Preuve.** En substituant (2.1) à (2.1), pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$Q_{n+1}(x) = xP_n(x) - (\beta_n - s_{n+1})P_n(x) - (\gamma_n - t_{n+1})P_{n-1}(x) + v_{n+1}P_{n-2}(x) - r_{n+1}Q_n(x). \quad (2.9)$$

En appliquant (2.1) à  $xP_n(x)$ , et en substituant la relation de récurrence(2.1) dans (2.9) pour  $xP_{n-1}(x)$ ,  $xP_{n-2}(x)$  et  $xP_{n-3}(x)$ , on obtient pour  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= (x - r_{n+1}) Q_n(x) + r_n (xQ_{n-1}(x)) \\ &\quad - (\beta_n - s_{n+1} + s_n) P_n(x) \\ &\quad - (\gamma_n + t_n - t_{n+1} + s_n \beta_{n-1}) P_{n-1}(x) \\ &\quad - (s_n \gamma_{n-1} + t_n \beta_{n-2} + v_n - v_{n+1}) P_{n-2}(x) \\ &\quad - (v_n \beta_{n-3} + t_n \gamma_{n-2}) P_{n-3}(x) - v_n \gamma_{n-3} P_{n-4}(x). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.1) pour  $P_n$ , et avec la convention  $P_{-n}(x) = 0$ ,  $n \geq 1$ , la relation ci-dessus devient, pour  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= \left(x - \tilde{\beta}_n\right) Q_n(x) - r_n (Q_n - xQ_{n-1}) - r_n (\beta_n + s_n - s_{n+1}) Q_{n-1}(x) \\ &\quad - [\gamma_n + t_n - t_{n+1} - s_n (\beta_n - \beta_{n-1} + s_n - s_{n+1})] P_{n-1}(x) \\ &\quad - [s_n \gamma_{n-1} - t_n (\beta_n - \beta_{n-2} + s_n - s_{n+1}) + v_n - v_{n+1}] P_{n-2}(x) \\ &\quad - [t_n \gamma_{n-2} - v_n (\beta_n - \beta_{n-3} + s_n - s_{n+1})] P_{n-3}(x) \\ &\quad - v_n \gamma_{n-3} P_{n-4}(x). \end{aligned}$$

où  $\tilde{\beta}_n$  est donné par (2.2). Puis en utilisant à nouveau(2.1) pour  $P_{n-1}$ , on obtient pour  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= \left(x - \tilde{\beta}_n\right) Q_n(x) - \tilde{\gamma}_n Q_{n-1}(x) - r_n Q_n(x) - (x - \tilde{\beta}_{n-1}) Q_{n-1}(x) \\ &\quad + \tilde{\gamma}_{n-1} Q_{n-2}(x) - (a_n r_{n-1} - r_n \tilde{\gamma}_{n-1}) Q_{n-2}(x) \\ &\quad - [s_n \gamma_{n-1} - t_n (\beta_n - \beta_{n-2} + s_n - s_{n+1}) + v_n - v_{n+1} - a_n s_{n-1}] P_{n-2}(x) \quad (2.10) \\ &\quad - [t_n \gamma_{n-2} - v_n (\beta_n - \beta_{n-3} + s_n - s_{n+1}) - a_n t_{n-1}] P_{n-3}(x) \\ &\quad - (v_n \gamma_{n-3} - a_n v_{n-1}) P_{n-4}(x). \end{aligned}$$

où  $\tilde{\gamma}_n$  et  $a_n$  sont donnés par(2.3) et (2.8).

D'où (2.10),  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une *SPON* si et seulement si  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$ , pour  $n \geq 1$ , et les conditions(2.4) – (2.7) sont vérifiées.

## 2.1. Caractérisation de l'orthogonalité

Supposons que  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  soit une *SPON*, alors la relation (2.10) est équivalente à

$$(f_n - a_n r_{n-1}) Q_{n-2}(x) = (b_n - a_n s_{n-1}) P_{n-2}(x) + (c_n - a_n t_{n-1}) P_{n-3}(x) \\ + (e_n - a_n v_{n-1}) P_{n-4}(x), \quad n \geq 2 \quad (2.11)$$

où

$$b_n := s_n \gamma_{n-1} + t_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-2}) - v_{n+1} + v_n, \quad n \geq 2, \quad (2.12)$$

$$c_n := t_n \gamma_{n-2} + v_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-3}), \quad n \geq 3, \quad (2.13)$$

$$e_n := v_n \gamma_{n-3}, \quad n \geq 4, \quad (2.14)$$

$$f_n := r_n \tilde{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (2.15)$$

De plus, puisque  $v_3 \neq t_3 - r_3 (s_2 - r_2)$  et  $r_n \neq 0$ , pour  $n \geq 4$ , alors par (2.4), on déduit que

$$\langle u, Q_n \rangle \neq 0, \quad n \geq 3.$$

et en appliquant  $u$  aux deux côtés de (2.11), on obtient

$$(f_n - r_{n-1} \alpha_n) \langle u, Q_{n-2} \rangle = 0, \quad n \geq 5.$$

ce qui nous donne

$$f_n = r_{n-1} \alpha_n, \quad n \geq 5.$$

En multipliant (2.11) par  $P_{n-2}$ ,  $P_{n-3}$  et  $P_{n-4}$  et appliquant  $u$ , on obtient pour tout  $n \geq 5$

$$b_n = a_n s_{n-1},$$

$$c_n = a_n t_{n-1},$$

$$e_n = a_n v_{n-1},$$

$$f_n = a_n r_{n-1}$$

et en comparant les coefficients des deux côtés de (2.11), pour  $n = 2, 3$  et  $4$ , on obtient

$$b_2 - f_2 = a_2 (s_1 - r_1), \quad (2.16)$$

$$b_3 - f_3 = a_3 (s_2 - r_2), \quad (2.17)$$

## 2.1. Caractérisation de l'orthogonalité

$$c_3 - b_3(s_1 - r_1) = a_3(t_2 - s_2(s_1 - r_1)), \quad (2.18)$$

$$b_4 - f_4 = a_4(s_3 - r_3), \quad (2.19)$$

$$c_4 - b_4(s_2 - r_2) = a_4(t_3 - s_3(s_2 - r_2)), \quad (2.20)$$

$$e_4 - b_4(t_2 - r_2(s_1 - r_1)) = a_4[v_3 - s_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))]. \quad (2.21)$$

Inversement, si (2.11) est satisfaite et que  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq 1$ , alors on a pour  $n \geq 1$

$$Q_{n+1}(x) - (x - \tilde{\beta}_n) Q_n(x) + \tilde{\gamma}_n Q_{n-1}(x) = -r_n \left[ Q_n(x) - (x - \tilde{\beta}_{n-1}) Q_{n-1}(x) + \tilde{\gamma}_{n-1} Q_{n-2}(x) \right], \quad n \geq 1.$$

De plus, à partir de (2.1), on obtient

$$Q_1(x) = P_1(x) + s_1 - r_1 = x - \beta_0 + s_1 - r_1 = x - \tilde{\beta}_0,$$

nous déduisons récursivement que

$$Q_{n+1}(x) = (x - \tilde{\beta}_n) Q_n(x) - \tilde{\gamma}_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

ce qui prouve que  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une *SPON* avec des coefficients de récurrences  $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$ . ■

Maintenant, nous montrons que l'orthogonalité de la suite  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  peut être aussi caractérisée par le fait qu'il existe quatre suites dépendant des paramètres  $r_n, s_n, t_n, v_n$  et des coefficients de récurrences qui restent constants.

**Théorème 2.1.1** *Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une SPON et soit  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes donnée par (2.1). Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i)  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une *SPON* avec des coefficients de récurrences  $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$  donnés par (2.2) et (2.3).

(ii)  $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \neq 0$  avec les conditions initiales (2.16) – (2.21) et

$$v_5 \gamma_2 = v_4 (\gamma_5 + t_5 - t_6 + s_5 (s_6 - s_5 - \beta_5 + \beta_4)) \quad (2.22)$$

## 2.1. Caractérisation de l'orthogonalité

et il existe quatre nombres complexes  $A, B, C$  et  $D$  tels que, pour chaque  $n \geq 4$

$$A = \tilde{\beta}_n - r_{n+1} - \frac{\tilde{\gamma}_n}{r_n}, \quad (2.23)$$

$$B = \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} + s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2}, \quad (2.24)$$

$$C = \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} + \left( \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} + s_{n+1} - \beta_{n-2} \right) (s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1}) \\ - s_{n+1} (s_{n+2} - \beta_{n+1}) + \beta_{n-1} \beta_n - \gamma_{n+1} - \gamma_n - \gamma_{n-1} + t_{n+2}, \quad (2.25)$$

$$D = \frac{\gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2}}{v_n} + \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} (s_{n+1} - \beta_n) \\ + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} s_{n+1} (s_{n+1} - s_{n+2} + \beta_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1}) \\ + \beta_n \beta_{n-1} - \gamma_{n+1} - \gamma_n + t_{n+2} \\ + (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_{n-1} + \beta_{n-2}) (\alpha_{n+1} - t_{n+1}) \\ + (s_{n+1} - \beta_n) (\beta_{n-1} \beta_{n-2} - \gamma_{n-1}) - (s_{n+1} - \beta_{n-2}) \gamma_n + v_{n+2}. \quad (2.26)$$

**Preuve.** Les conditions (2.4) – (2.7) de la proposition 2.1.1 peuvent être écrites pour chaque  $n \geq 5$  sous la forme

$$s_{n-1} \frac{v_n}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} = s_n \gamma_{n-1} + t_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-2}) - v_{n+1} + v_n, \quad (2.27)$$

$$t_{n-1} \frac{v_n}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} = t_n \gamma_{n-2} + v_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-3}), \quad (2.28)$$

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} = \gamma_n + t_n - t_{n+1} + s_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-1}), \quad (2.29)$$

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \tilde{\gamma}_{n-1} = \tilde{\gamma}_n + r_n (r_{n+1} - r_n - \tilde{\beta}_n + \tilde{\beta}_{n-1}), \quad (2.30)$$

De plus  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une *SPON* si et seulement si les conditions  $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \neq 0$ , les conditions initiales (2.16) – (2.21) et les équations ci-dessus (2.27), (2.28), (2.29) et (2.30) soient vérifiées.

Tout d'abord, on montre que (2.27) – (2.30)  $\Rightarrow$  (2.22) – (2.26).

Pour  $n = 5$  dans (2.29), on obtient (2.22).

D'après (2.30), en divisant les côtés gauche et droit par  $r_n$ , on obtient

$$\tilde{\beta}_n - r_{n+1} - \frac{\tilde{\gamma}_n}{r_n} = \tilde{\beta}_{n-1} - r_n - \frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{r_{n-1}}, \quad n \geq 5. \quad (2.31)$$

Donc (2.23) est vérifiée.

Maintenant, nous allons déduire (2.24),

En utilisant (2.28), en divisant les côtés gauche et droit par  $v_n$ , nous obtenons

$$\frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} + s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2} = \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} + s_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \beta_{n-3}, \quad n \geq 5. \quad (2.32)$$

donc (2.24) est vérifiée.

En suite, nous allons déduire (2.25),

D'après (2.27), en multipliant les côtés gauche et droit par  $\frac{\gamma_{n-2}}{v_n}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{s_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} (s_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2}) \\ &= \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} (s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1}) + \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \gamma_{n-2}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

en tenant compte de (2.29) pour  $n + 1$  au lieu de  $n$ , pour chaque  $n \geq 5$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{s_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} (s_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2}) \\ &= \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} (s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1}) \\ &+ \gamma_{n-2} - \gamma_{n+1} - t_{n+1} + t_{n+2} - s_{n+1} (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n), \end{aligned}$$

## 2.1. Caractérisation de l'orthogonalité

en utilisant (2.24), dans l'expression, pour chaque  $n \geq 5$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} + \left( \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} + s_{n+1} - \beta_{n-1} - \beta_{n-2} \right) (s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1}) \\
& - \gamma_{n+1} - \gamma_n - \gamma_{n-1} + t_{n+2} - s_{n+1} (s_{n+2} - \beta_{n+1} - \beta_{n-1}) - \beta_{n-1}^2 \\
& = \frac{s_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} + \left( \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} + s_n - \beta_{n-2} - \beta_{n-3} \right) (s_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2}) \\
& - \gamma_n - \gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} + t_{n+1} - s_n (s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-2}) - \beta_{n-2}^2.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Enfin, nous déduisons (2.26),

D'après (2.29), en multipliant les côtés gauche et droit par  $\frac{\gamma_{n-1} \gamma_{n-2}}{v_n}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3}}{v_{n-1}} + \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} (s_n - \beta_{n-1}) \\
& = \frac{\gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2}}{v_n} + \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} (s_{n+1} - \beta_n) + \left( \frac{t_n}{v_n} - \frac{t_{n+1}}{v_n} \right) \gamma_{n-1} \gamma_{n-2},
\end{aligned}$$

en tenant compte de (2.28) pour  $n+1$  au lieu de  $n$ , pour chaque  $n \geq 5$ , on a

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3}}{v_{n-1}} + \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} (s_n - \beta_{n-1}) \\
& = \frac{\gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2}}{v_n} + \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} (s_{n+1} - \beta_n) \\
& + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} (\gamma_{n-1} - \gamma_{n+1} - t_{n+1} + t_{n+2} - s_{n+1} (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n)) \\
& + (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_{n-2}) (\gamma_{n+1} + t_{n+1} - t_{n+2} + s_{n+1} (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n)),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

en utilisant (2.33) et (2.32), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2}}{v_n} + \left( \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} - \gamma_{n-1} \right) (s_{n+1} - \beta_n) \\
& + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} (-\gamma_n - \gamma_{n+1} + t_{n+2} - s_{n+1} (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n + \beta_{n-1}) + \beta_n \beta_{n-1}) \\
& + (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_{n-2} - (s_n - \beta_{n-1})) \\
& \times (\gamma_{n+1} + t_{n+1} - t_{n+2} + s_{n+1} (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n)) \\
& = \frac{\gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3}}{v_{n-1}} + \left( \frac{s_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} - \gamma_{n-2} \right) (s_n - \beta_{n-1}) - (s_n - \beta_{n-3}) \gamma_{n-1} \\
& + \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} (-\gamma_{n-1} - \gamma_n + t_{n+1} - s_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-1} + \beta_{n-2}) + \beta_{n-1} \beta_{n-2}) \\
& + (-s_{n+1} + s_n + \beta_n - \beta_{n-3}) - \gamma_n + t_{n+1} - s_n (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-1} + \beta_{n-2}) + \beta_{n-1} \beta_{n-2},
\end{aligned}$$

## 2.1. Caractérisation de l'orthogonalité

et en tenant compte de (2.8) et (2.12) dans les expressions ci-dessus et par un calcul direct, pour chaque  $n \geq 5$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2}}{v_n} + \frac{s_n}{v_n} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} (s_{n+1} - \beta_n) \\
& + \frac{t_n}{v_n} \gamma_{n-2} [s_{n+1}(s_{n+1} - s_{n+2} + \beta_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1}) + \beta_n \beta_{n-1} - \gamma_{n+1} - \gamma_n + t_{n+2}] \\
& + (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_{n-1} + \beta_{n-2}) (\alpha_{n+1} - t_{n+1}) \\
& + (s_{n+1} - \beta_n) (\beta_{n-1} \beta_{n-2} - \gamma_{n-1}) - (s_{n+1} - \beta_{n-2}) \gamma_n + v_{n+2} \\
& = \frac{\gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3}}{v_{n-1}} + \frac{s_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} (s_n - \beta_{n-1}) \\
& + \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} [s_n (s_n - s_{n+1} + \beta_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2}) + \beta_{n-1} \beta_{n-2} - \gamma_n - \gamma_{n-1} + t_{n+1}] \\
& + (s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-2} + \beta_{n-3}) (\alpha_n - t_n) + (s_n - \beta_{n-1}) (\beta_{n-2} \beta_{n-3} - \gamma_{n-2}) \\
& - (s_n - \beta_{n-3}) \gamma_{n-1} + v_{n+1}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Deuxièmement, on montre que (2.23) – (2.26)  $\Rightarrow$  (2.27) – (2.30).

Remarquant que, les relations (2.27)–(2.30) sont équivalentes à (2.4)–(2.7) et les relations (2.23) – (2.26) sont équivalentes à (2.31) – (2.36)

alors, il suffit de montrer (2.31) – (2.36)  $\Rightarrow$  (2.27) – (2.30).

D'après (2.31), en multipliant les côtés gauche et droit par  $r_n$ , on obtient (2.30).

D'après (2.32), en multipliant les côtés gauche et droit par  $v_n$ , on obtient (2.28).

D'après (2.35), nous avons

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma_{n-1} \gamma_{n-2}}{v_n} \left[ \frac{v_n}{v_{n-1}} \gamma_{n-3} - \gamma_n - t_n + t_{n+1} + s_n (s_n - s_{n+1} - \beta_{n-1} + \beta_n) \right] \\
& = \frac{\gamma_{n-2}}{v_n} [-t_n \alpha_{n+1} + t_{n+1} \gamma_{n-1} + v_{n+1} (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_{n-2})] \\
& + (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_{n-2}) \\
& \times \left( -\frac{v_{n+1}}{v_n} \gamma_{n-2} + \gamma_{n+1} + t_{n+1} - t_{n+2} + s_{n+1} (s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n) \right),
\end{aligned}$$

en utilisant (2.5), pour  $n + 1$  au lieu de  $n$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}}{v_n} \left[ \frac{v_n}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} - \gamma_n - t_n + t_{n+1} + s_n(s_n - s_{n+1} - \beta_{n-1} + \beta_n) \right] \\ &= (s_{n+1} - s_{n+2} - \beta_{n-2} + \beta_{n+1}) \\ & \times \left[ \frac{v_{n+1}}{v_n}\gamma_{n-2} - \gamma_{n+1} - t_{n+1} + t_{n+2} + s_{n+1}(s_{n+1} - s_{n+2} - \beta_n + \beta_{n+1}) \right], \end{aligned}$$

la relation (2.22) à remplacer par

$$\frac{v_5}{v_4}\gamma_2 - \gamma_5 - t_5 + t_6 + s_5(s_5 - s_6 - \beta_4 + \beta_5) = 0,$$

puis

$$\frac{v_n}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} - \gamma_n - t_n + t_{n+1} + s_n(s_n - s_{n+1} - \beta_{n-1} + \beta_n) = 0, \quad n \geq 5.$$

donc (2.29) est vérifiée.

En tenant compte du fait que  $\frac{t_{n-1}}{v_{n-1}}\gamma_{n-3}$ , obtenue à partir de (2.32), la relation (2.34) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{s_n}{v_n}\gamma_{n-1}\gamma_{n-2} + \frac{t_n}{v_n}\gamma_{n-2}(s_{n+1} - \beta_n - \beta_{n-1}) - \gamma_{n+1} - \gamma_n - \gamma_{n-1} + t_{n+2} \\ & - s_{n+1}(s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n) + (\beta_n + \beta_{n-1} - s_{n+1})(\beta_{n-1} + \beta_{n-2}) - \beta_{n-1}^2 \\ &= \frac{s_{n-1}}{v_{n-1}}\gamma_{n-2}\gamma_{n-3} + \left( \frac{t_n}{v_n}\gamma_{n-2} + s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-3} \right) (s_n - \beta_{n-1} - \beta_{n-2}) \\ & - \gamma_n - \gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} + t_{n+1} - s_n(s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-1}) \\ & + (\beta_{n-1} + \beta_{n-2} - s_n)(\beta_{n-2} + \beta_{n-3}) - \beta_{n-2}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{s_{n-1}}{v_{n-1}}\gamma_{n-2}\gamma_{n-3} &= \frac{s_n}{v_n}\gamma_{n-1}\gamma_{n-2} + \frac{t_n}{v_n}\gamma_{n-2}(s_{n+1} - s_n - \beta_n + \beta_{n-2}) \\ & + \gamma_{n-2} - (\gamma_{n+1} + t_{n+1} - t_{n+2} + s_{n+1}(s_{n+2} - s_{n+1} - \beta_{n+1} + \beta_n)). \end{aligned}$$

et en utilisant (2.29) pour  $n + 1$  au lieu de  $n$  et après des simplifications, on obtient (2.27).

■

Dans le théorème suivant, nous remarquons qu'il existe une relation entre les formes linéaires régulières lorsque  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une *SPON* par rapport à une forme linéaire régulière  $v$ .

**Théorème 2.1.2** Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une SPON par rapport à une forme linéaire régulière  $u$  et la suite de polynômes normalisés  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  soit donnée par la relation (2.1). Si  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON par rapport à une forme linéaire régulière  $v$ , alors

$$k(x - c)u = (x^3 + ax^2 + bx + d)v \quad (2.37)$$

avec  $c, a, b, d \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et les normalisations de ces formes linéaires  $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$ .

**Preuve.** En appliquant la forme linéaire régulière  $u$  correspondant à la SPON  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  dans (2.1), on obtient, pour chaque  $n \geq 4$

$$\langle (x - c)u, Q_n(x) \rangle = 0.$$

selon [19] et en tenant compte de la relation (2.1), nous développons la forme linéaire  $u$  en termes de la base duale  $\left\{ \frac{Q_i v}{\langle v, Q_i^2 \rangle} \right\}_{i \geq 0}$  de la SPON  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  comme

$$(x - c)u = \sum_{i=0}^3 \frac{\langle (x - c)u, Q_i \rangle}{\langle v, Q_i^2 \rangle} Q_i v.$$

Puisque  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON par rapport à  $v$ , les coefficients de récurrences  $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$  sont donnés par (2.2) et (2.3). De plus

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{\langle v, Q_n^2 \rangle}{\langle v, Q_{n-1}^2 \rangle} \neq 0, \quad n \geq 1. \quad (2.38)$$

En effet, en faisant agir les deux côtés (2.37) sur les polynômes  $Q_0, Q_1, Q_2$  et  $Q_3$ , et en tenant compte de (2.2), on obtient

$$k(\beta_0 - c) = \tilde{\beta}_0^3 + (2\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1)\tilde{\gamma}_1 + (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\beta}_0^2)a + \tilde{\beta}_0 b + d, \quad (2.39)$$

$$k[\gamma_1 + (\beta_0 - c)(s_1 - r_1)] = \left( \tilde{\beta}_0^2 + \tilde{\beta}_1^2 + \tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_1 + \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 \right) \tilde{\gamma}_1 + a(\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1)\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_1 b, \quad (2.40)$$

$$k\{\gamma_1(s_2 - r_2) + (\beta_0 - c)[t_2 - r_2(s_1 - r_1)]\} = \left( \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 + a \right) \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2, \quad (2.41)$$

$$k\{\gamma_1[t_3 - r_3(s_2 - r_2)] + (\beta_0 - c)[v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))]\} = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3. \quad (2.42)$$

où  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$  sont donnés par (2.2) et (2.3).

En utilisant les relations (2.39) – (2.42) et en tenant compte de (2.3), on obtient les valeurs  $c, a, b, d$  et  $k$

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{r_4 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3}{v_4 \gamma_1}, \\
 c &= \beta_0 - \frac{\gamma_1 v_4 - r_4(t_3 - r_3(s_2 - r_2))}{r_4 v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))}, \\
 a &= -\tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 + \frac{\tilde{\gamma}_3 r_4 v_3 (s_2 - r_2) + (v_4 - r_4 t_3) [t_2 - r_2(s_1 - r_1)]}{v_4 v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))} \\
 b &= \tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 - \tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2 \\
 &\quad - \frac{(\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1) \tilde{\gamma}_3 r_4 v_3 (s_2 - r_2) + (v_4 - r_4 t_3) [t_2 - r_2(s_1 - r_1)]}{v_4 v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))} \\
 &\quad + \frac{\tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 r_4 (v_3 - r_3 t_2) + (v_4 - r_4 (t_3 - r_3 s_2))(s_1 - r_1)}{v_4 v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))}, \\
 d &= -\tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_0 \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\beta}_2 \tilde{\gamma}_1 - \tilde{\beta}_0 \frac{\tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 r_4 (v_3 - r_3 t_2) + (v_4 - r_4 (t_3 - r_3 s_2))(s_1 - r_1)}{v_4 v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))} \\
 &\quad + \frac{(\tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_1 - \tilde{\gamma}_1) \tilde{\gamma}_3 r_4 v_3 (s_2 - r_2) + (v_4 - r_4 t_3) [t_2 - r_2(s_1 - r_1)]}{v_4 v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))} \\
 &\quad + \frac{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 v_4 - r_4 (t_3 - r_3 (s_2 - r_2))}{v_4 v_3 - r_3(t_2 - r_2(s_1 - r_1))}.
 \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.1.1** Les constantes  $A, B, C$  et  $D$  apparaissent dans le théorème 2.1.1 sont, respectivement, les coefficients  $c, a, b$  et  $d$  du polynôme qui relie les deux formes linéaires régulières.

## 2.2 Cas particulier

Dans cette section, nous allons décortiquer un cas particulier de la relation (2.1).

En effet, considérons la  $SPON \{P_n\}_{n \geq 1}$  symétrique, c'est-à-dire le cas  $\beta_n = 0$ , pour chaque  $n \geq 0$ . D'après la proposition 2.1.1, les équations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7)

s'écrivent, pour chaque  $n \geq 5$

$$s_{n+1} = s_n + \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} - \frac{t_n}{v_n}\gamma_{n-2}, \quad (2.1)$$

$$t_{n+1} = t_n + \gamma_n - \frac{v_n}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} + s_n(s_{n+1} - s_n), \quad (2.2)$$

$$v_{n+1} = v_n + s_n\gamma_{n-1} + t_n(s_{n+1} - s_n) - s_{n-1}[\gamma_n + t_n - t_{n+1} + s_n(s_{n+1} - s_n)], \quad (2.3)$$

$$r_{n+1} = r_n + \frac{v_n}{v_{n-1}}\frac{\gamma_{n-3}}{r_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\gamma_{n-2}}{r_{n+1}}, \quad n \geq 4. \quad (2.4)$$

Les équations (2.2) et (2.3) deviennent

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n &= s_n - s_{n+1} + r_{n+1} - r_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{\gamma}_n &= \gamma_n + t_n - t_{n+1} + s_n(s_{n+1} - s_n) - r_n(s_{n+1} - s_n + \tilde{\beta}_{n-1}), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

pour chaque  $n \geq 5$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n &= \frac{t_n}{v_n}\gamma_{n-2} - \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} + \frac{v_n}{v_{n-1}}\frac{\gamma_{n-3}}{r_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\gamma_{n-2}}{r_{n+1}} \\ &= \frac{\gamma_{n-2}}{v_n} \left( t_n - \frac{v_{n+1}}{r_{n+1}} \right) - \frac{\gamma_{n-3}}{v_{n-1}} \left( t_{n-1} - \frac{v_n}{r_n} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} - r_n \left( \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} - \frac{t_n}{v_n}\gamma_{n-2} \right) - r_n\tilde{\beta}_{n-1}. \quad (2.6)$$

Nous allons traiter les trois sous-cas suivants.

i) Si  $s_n = s_1$  et  $r_{n-1} = r_1$ , pour chaque  $n \geq 5$ , de (2.1) et (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{t_n}{v_n}\gamma_{n-2} &= \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} = \dots = \frac{t_3}{v_3}\gamma_1, \\ \frac{v_{n+1}}{v_n}\gamma_{n-2} &= \frac{v_n}{v_{n-1}}\gamma_{n-3} = \dots = \frac{v_4}{v_3}\gamma_1, \end{aligned}$$

la relation (2.6) nous donne

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{v_4}{v_3}\gamma_1, \quad n \geq 5. \quad (2.7)$$

on déduit que  $\tilde{\beta}_n = 0$  et  $\tilde{\gamma}_n$  sont constants, pour chaque  $n \geq 5$ .

et d'après (2.2), nous avons

$$t_{n+1} = t_n + \gamma_n - \frac{v_4}{v_3}\gamma_1. \quad (2.8)$$

ii) Si  $s_n = s_1$ ,  $r_{n-1} = r_1$  et  $t_n = t_2$ , pour chaque  $n \geq 5$ , de (2.8) et (2.7), on a

$$\tilde{\gamma}_n = \gamma_n, \quad n \geq 5.$$

les coefficients  $\gamma_n$  sont constants, pour chaque  $n \geq 5$ , alors  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est la suite de polynômes anti-associés d'ordre 5 pour les polynômes de Chebyshev du second genre [34].

iii) Si  $r_{n-1} = r_1$ ,  $s_n = s_1$ ,  $t_n = t_2$  et  $v_n = v_3$ , pour chaque  $n \geq 5$ , d'après (2.3), on a

$$v_{n+1} = v_n + s_n \gamma_{n-1} - s_{n-1} \gamma_n, \quad n \geq 5,$$

d'où

$$v_{n+1} = v_n + s_1 (\gamma_{n-1} - \gamma_n), \quad n \geq 6,$$

il est clair que  $s_1 (\gamma_{n-1} - \gamma_n) = 0$ , pour tout  $n \geq 6$ .

**Remarque 2.2.1** Si  $r_{n-1} = r_1$ ,  $s_n = s_1$  et  $t_n = t_2$  où  $r_{n-1} = r_1$ ,  $s_n = s_1$ ,  $t_n = t_2$  et  $v_n = v_3$ , pour chaque  $n \geq 5$ , alors

$$\tilde{\beta}_n = 0, \quad n \geq 5,$$

$$\tilde{\gamma}_n = \gamma_n = \gamma_5, \quad n \geq 5.$$

**Exemple 2.2.1** Soit  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes de Chebyshev normalisés du second degré orthogonaux par rapport à la fonction de poids  $\mathcal{W}(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  sur  $(-1, 1)$ . alors  $\beta_n = 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $\gamma_n = \frac{1}{4}$ ,  $n \geq 1$ , et les relations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4), pour chaque  $n \geq 5$ , deviennent

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{4} \left( \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}} - \frac{t_n}{v_n} \right),$$

$$t_{n+1} = t_n + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{v_n}{v_{n-1}} \right) + s_n (s_{n+1} - s_n),$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{4} s_n + t_n (s_{n+1} - s_n) - s_{n-1} \left[ \frac{1}{4} + t_n - t_{n+1} + s_n (s_{n+1} - s_n) \right],$$

$$r_n = r_{n-1} + \frac{1}{4} \left( \frac{v_{n-1}}{r_{n-1} v_{n-2}} - \frac{v_n}{r_n v_{n-1}} \right).$$

En supposant que  $r_{n-1} = r_1$ ,  $s_n = s_1$  et  $t_n = t_2$ , pour chaque  $n \geq 5$ , on obtient

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{4}(s_n - s_{n-1}), \quad n \geq 5,$$

et en particulier,  $v_{n+1} = v_n$ ,  $n \geq 6$ .

Dans cette situation, nous déduisons des coefficients de connexion constants, pour  $n \geq 6$ .

---

# Problème inverse pour une combinaison linéaire de polynômes orthogonaux de type 2-5

Dans ce chapitre, nous donnons une nouvelle caractérisation de l'orthogonalité d'une suite  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  de polynômes normalisés qui est donnée par:

$$T_n(x) + a_n T_{n-1}(x) = R_n(x) + b_n R_{n-1}(x) + c_n R_{n-2}(x) + d_n R_{n-3}(x) + e_n R_{n-4}(x), \quad n \geq 0 \quad (3.1)$$

où  $e_n a_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq 5$ .

En outre, on montre que la relation entre les formes linéaires correspondantes est la suivante

$$k(x - c)u = (x^4 + ax^3 + bx^2 + dx + e)v$$

où  $c, a, b, d, e \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Enfin, une illustration utilisant un cas spécial de la relation ci-dessus est donnée.

Soient  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  deux suites de polynômes orthogonaux normalisés par rapport aux formes régulières  $u$  et  $v$  respectivement, où  $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$ , soient  $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ ,

$\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  et  $\{\tilde{\delta}_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$  les suites récurrentes correspondantes caractérisant  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{T_n\}_{n \geq 0}$ , respectivement. Supposons que ces suites soient liées par la relation (3.1).

Les conditions initiales

$$e_4 \neq a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))$$

et

$$e_5 a_5 \neq 0$$

donnent une relation entre les formes linéaires  $u$  et  $v$  telle que

$$\phi u = \psi v$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont des polynômes de degré 1 et 4, respectivement.

Premièrement, si  $e_4 \neq a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))$  et  $a_5 \neq 0$ , alors il existe un nombre complexe  $c$  tel que

$$\langle (x - c)u, T_5(x) \rangle = 0.$$

de plus on a

$$\langle (x - c)u, T_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 5.$$

et comme,

$$\langle (x - c) u, T_0(x) \rangle = \delta_0 - c,$$

$$\langle (x - c) u, T_1(x) \rangle = \gamma_1 + (b_1 - a_1) (\delta_0 - c),$$

$$\langle (x - c) u, T_2(x) \rangle = (b_2 - a_2) \gamma_1 + (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)) (\delta_0 - c),$$

$$\langle (x - c) u, T_3(x) \rangle = (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)) \gamma_1 + (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))) (\delta_0 - c),$$

$$\begin{aligned} \langle (x - c) u, T_4(x) \rangle &= [d_4 - a_4 (c_3 - (b_2 - a_2))] \gamma_1 \\ &\quad + [e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))] (\delta_0 - c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (x - c) u, T_5(x) \rangle &= [e_5 - a_5 (d_4 - a_4 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)))] \gamma_1 \\ &\quad - a_5 [e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))] (\delta_0 - c). \end{aligned} \tag{3.2}$$

alors il existe  $c$  tel que

$$\langle (x - c) u, T_5(x) \rangle = 0.$$

ce qui nous donne

$$c := \delta_0 - \frac{\gamma_1 e_5 - a_5 (d_4 - a_4 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)))}{a_5 e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))}. \tag{3.3}$$

et par suite,

$$\langle (x - c) u, T_n(x) \rangle = -a_n \langle (x - c) u, T_{n-1}(x) \rangle, \quad n \geq 6.$$

D'autre part [19]

$$(x - c) u = \sum_{i=0}^4 \frac{\langle (x - c) u, T_i(x) \rangle}{\langle v, T_i^2(x) \rangle} T_i(x) v.$$

Par conséquent, si  $e_4 \neq a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))$  et  $e_5 a_5 \neq 0$ , on obtient la relation entre  $u$  et  $v$

$$(x - c) u = t(x)v,$$

où  $t$  est un polynôme de degré 4.

**Lemme 3.0.1** Soient  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  deux suites de polynômes orthogonaux normalisés (SPON) par rapport aux formes régulières  $u$  et  $v$  respectivement, où  $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$ . Supposons qu'il existe des suites de nombres complexes  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{b_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{c_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{d_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  avec les conditions initiales  $a_0 = b_0 = c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = d_2 = e_0 = e_1 = e_2 = e_3 = 0$ , telle que la relation (3.1) soit vérifiée, pour tout  $n \geq 0$ , alors

1- Si  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $a_5 = 0$  alors

$$e_n \neq a_n(d_{n-1} - a_{n-1}(c_{n-2} - a_{n-2}(b_{n-3} - a_{n-3}))),$$

pour  $n \geq 4$ , et  $a_n = 0$ , pour tout  $n \geq 5$ .

Dans ce cas, la relation(3.1) se réduit à une relation de type 1 – 5

$$T_n(x) = R_n(x) + r_n R_{n-1}(x) + s_n R_{n-2}(x) + t_n R_{n-3}(x) + v_n R_{n-4}(x), \quad n \geq 0,$$

avec

$$r_n := b_n - a_n \quad n \geq 1,$$

$$s_n := c_n - a_n(b_{n-1} - a_{n-1}) \quad n \geq 2,$$

$$t_n := d_n - a_n(c_{n-1} - a_{n-1}(b_{n-2} - a_{n-2})) \quad n \geq 3,$$

$$v_n := e_n - a_n(d_{n-1} - a_{n-1}(c_{n-2} - a_{n-2}(b_{n-3} - a_{n-3}))) \quad n \geq 4.$$

2- Si  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $a_5 \neq 0$  alors  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 5$ .

3- Si  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $e_5 a_5 \neq 0$  alors  $e_n a_n \neq 0$ , pour  $n \geq 5$ .

Ainsi, dans ce cas, la relation (3.1) est une relation de type 2 – 5 non dégénérée.

**Preuve.** Comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u, T_1(x) \rangle = b_1 - a_1, \\ \langle u, T_2(x) \rangle = c_2 - a_2(b_1 - a_1), \\ \langle u, T_3(x) \rangle = d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)), \\ \langle u, T_4(x) \rangle = e_4 - a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1))), \\ \langle u, T_n(x) \rangle = -a_n \langle u, T_{n-1} \rangle, \quad n \geq 5. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

alors

1- Si  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $a_5 = 0$ , d'après (3.4), on a

$$\langle u, T_i(x) \rangle \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et

$$\langle u, T_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 5.$$

Ainsi, il existe un polynôme  $t$  de degré 4 tel que  $u = t(x)v$ .

et par conséquent,

$$T_n(x) = R_n(x) + r_n R_{n-1}(x) + s_n R_{n-2}(x) + t_n R_{n-3}(x) + v_n R_{n-4}(x),$$

pour chaque  $n \geq 0$ , avec  $t_n \neq 0$ ,  $n \geq 4$ .

De plus, la relation (3.1) nous donne

$$b_n = r_n + a_n \quad n \geq 1,$$

$$c_n = s_n + a_n r_{n-1} \quad n \geq 2,$$

$$d_n = t_n + a_n s_{n-1} \quad n \geq 3,$$

$$e_n = v_n + a_n t_{n-1} \quad n \geq 4,$$

et

$$a_n v_{n-1} = 0, \quad n \geq 5.$$

Donc,  $a_n = 0$ ,  $n \geq 5$ , et  $e_n \neq 0$ ,  $n \geq 4$ . Alors cette relation est une relation dégénérée de type 1 - 5 .

2- Si  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $a_5 \neq 0$ ,

alors d'après (3.4), on a

$$\langle u, T_4(x) \rangle \neq 0 \text{ et } \langle u, T_5(x) \rangle \neq 0,$$

et si  $a_n = 0$ , pour chaque  $n \geq 6$ , on a

$$\langle u, T_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 6.$$

Supposant maintenant qu'il existe  $n \geq 6$  tel que  $a_n = 0$ ,  
en posant

$$s := \min \{n \in \mathbb{N} / n \geq 6, a_n = 0\},$$

alors

$$\langle u, T_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq s$$

et

$$\langle u, T_n(x) \rangle \neq 0, \quad 4 \leq n \leq s - 1.$$

Ainsi, il existe un polynôme  $t$  de degré  $s - 1$  tel que  $u = t(x)v$  [17].

Par conséquent,

$$T_n(x) = R_n(x) + \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{n,k} R_{n-k}(x),$$

où  $\alpha_{n,s-1} \neq 0$ ,  $n \geq s - 1$ .

compte tenu de (3.1), cela n'est pas possible. Ainsi  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 5$ .

3- Si  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $e_5 a_5 \neq 0$ , alors il existe une constante  $c$   
telle que

$$(x - c)u = t(x)v,$$

avec  $t$  un polynôme de degré 4 et d'après (3.1) on peut écrire pour  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle (x - c)u, T_n(x) T_{n-5}(x) \rangle &= \langle (x - c)u, (R_n(x) + b_n R_{n-1}(x) + c_n R_{n-2}(x) \\ &\quad + d_n R_{n-3}(x) + e_n R_{n-4}(x)) T_{n-5}(x) \rangle \\ &\quad - a_n \langle (x - c)u, T_{n-1}(x) T_{n-5}(x) \rangle \\ &= e_n \langle u, R_{n-4}^2(x) \rangle - a_n \langle (x - c)u, T_{n-1}(x) T_{n-5}(x) \rangle, \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
 e_n \langle u, R_{n-4}^2(x) \rangle &= \langle (x-c)u, (T_n(x) + a_n T_{n-1}(x)) T_{n-5}(x) \rangle \\
 &= \langle t(x)v, (T_n(x) + a_n T_{n-1}(x)) T_{n-4}(x) \rangle \\
 &= a_n \langle v, t(x) T_{n-1}(x) T_{n-4}(x) \rangle \\
 &= k_1 a_n \langle v, T_{n-1}^2(x) \rangle,
 \end{aligned}$$

où  $k_1$  est le coefficient de tête du polynôme  $t$ . Maintenant, il suffit d'appliquer (2) pour obtenir  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 4$ , et d'après la définition 1.1.1, on a  $e_n a_n \neq 0$ ,  $n \geq 5$ . ■

Dans la proposition suivante, on montre que si  $e_4 \neq a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))$  et  $a_5 e_5 \neq 0$  cette équivalence est vérifiée si la forme  $(x-c)u$  est régulière.

**Proposition 3.0.1** *Soient  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  deux suites de polynômes orthogonaux normalisés par rapport aux formes régulières  $u$  et  $v$  respectivement, où  $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$ . Alors il existe des suites des nombres complexes  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{b_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{c_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{d_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  avec les conditions initiales  $a_0 = b_0 = c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = d_2 = e_0 = e_1 = e_2 = e_3 = 0$ , telle que la relation (3.1) soit vérifiée et que les conditions initiales  $e_4 \neq a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))$  et  $a_5 e_5 \neq 0$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

*i) la forme  $(x-c)u$  est régulière.*

*ii)  $e_4 \neq a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))$ ,  $n \geq 4$ .*

**Preuve.** En multipliant la relation (3.1) par  $R_{n-1}$  et en appliquant  $u$  on obtient

$$\langle u, T_n(x) R_{n-1}(x) \rangle = (b_n - a_n) \langle u, R_{n-1}^2(x) \rangle, \quad n \geq 1,$$

et de la même manière pour  $R_{n-2}$ ,  $R_{n-3}$  et  $R_{n-4}$ , on obtient, respectivement,

$$\langle u, T_n(x) R_{n-2}(x) \rangle = (c_n - a_n (b_{n-1} - a_{n-1})) \langle u, R_{n-2}^2(x) \rangle, \quad n \geq 2,$$

$$\langle u, T_n(x) R_{n-3}(x) \rangle = (d_n - a_n (c_{n-1} - a_{n-1} (b_{n-2} - a_{n-2}))) \langle u, R_{n-3}^2(x) \rangle, \quad n \geq 3,$$

$$\langle u, T_n(x) R_{n-4}(x) \rangle = [e_n - a_n (d_{n-1} - a_{n-1} (c_{n-2} - a_{n-2} (b_{n-3} - a_{n-3})))] \langle u, R_{n-4}^2(x) \rangle, \quad n \geq 4.$$

Ainsi

$$e_n - a_n(d_{n-1} - a_{n-1}(c_{n-2} - a_{n-2}(b_{n-3} - a_{n-3}))) \neq 0 \Leftrightarrow \langle u, T_n(x) R_{n-4}(x) \rangle \neq 0, \quad n \geq 4.$$

Sachant que  $(x - c)u$  est régulière si et seulement  $R_n(c) \neq 0$ , pour tout  $n \geq 0$ .

Alors nous devons montrer que  $\langle u, T_{n+4}(x) R_n(x) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow R_n(c) \neq 0$ , pour chaque  $n \geq 0$ .

Soit pour cela

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_{ni}(x - c)^i, \quad n \geq 0,$$

avec  $\lambda_{n0} = R_n(c)$  and  $\lambda_{nn} = 1$ .

D'après le lemme (3.0.1), on a

$$(x - c)u = t(x)v.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \langle u, T_{n+4}(x) R_n(x) \rangle &= \langle (x - c)u, (x - c)^{n-1} T_{n+4}(x) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} \langle (x - c)u, (x - c)^{i-1} T_{n+4}(x) \rangle \\ &+ R_n(c) \langle u, T_{n+4}(x) \rangle \\ &= \langle v, t(x)(x - c)^{n-1} T_{n+4}(x) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} \langle v, t(x)(x - c)^{i-1} T_{n+4}(x) \rangle \\ &+ R_n(c) \langle u, T_{n+4}(x) \rangle, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

et

$$\langle u, T_{n+4}(x) R_n(x) \rangle = R_n(c) \langle u, T_{n+4}(x) \rangle, \quad n \geq 0,$$

Ainsi, d'après le lemme (3.0.1) et la relation (3.4), nous obtenons

$$\langle u, T_n(x) \rangle \neq 0, \quad n \geq 4.$$

■

### 3.1 Caractérisation de l'orthogonalité

Soit  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  une SPON par rapport à une forme régulière  $u$  et soient  $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  les suites des coefficients de récurrences correspondantes telle que

$$R_{n+1}(x) = (x - \delta_n) R_n(x) - \gamma_n R_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (3.1)$$

avec les CI

$$R_0(x) = 1, R_{-1}(x) = 0$$

et la condition  $\gamma_n \neq 0$ , pour chaque  $n \geq 1$ .

Dans cette section, nous donnons les caractérisations de l'orthogonalité d'une suite  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  de polynômes normalisés définis par une relation de type non dégénérée (3.1).

D'après le lemme 3.0.1, les conditions  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $a_5 e_5 \neq 0$  doivent être vérifiées, afin d'avoir une relation de type 2 – 5 non dégénérée avec  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  sont SPON et ces conditions impliquent  $e_n a_n \neq 0$ , pour chaque  $n \geq 5$ .

Nous commençons d'abord par donner une première caractérisation de l'orthogonalité de la suite  $\{T_n\}_{n \geq 0}$ .

**Proposition 3.1.1** *Soit  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  une SPON satisfaisant (3.1), et soit  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes donnée par la relation de structure (3.1) avec  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $e_n a_n \neq 0$  pour  $n \geq 5$ . Alors,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON où les coefficients de récurrences  $\{\tilde{\delta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$  sont donnés par*

$$\tilde{\delta}_n := \delta_n - b_{n+1} + b_n + a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_n := & \gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n(b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-1}) \\ & - a_n(a_{n+1} - a_n - \tilde{\delta}_n + \tilde{\delta}_{n-1}), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

si et seulement si  $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \tilde{\gamma}_4 \neq 0$ , et les relations suivantes soient vérifiées:

$$s_2 - u_2 = r_2(b_1 - a_1), \quad (3.4)$$

$$s_3 - u_3 = r_3(b_2 - a_2), \quad (3.5)$$

$$t_3 - s_3(b_1 - a_1) = r_3(c_2 - b_2(b_1 - a_1)), \quad (3.6)$$

### 3.1. Caractérisation de l'orthogonalité

---

$$s_4 - u_4 = r_4(b_3 - a_3), \quad (3.7)$$

$$t_4 - s_4(b_2 - a_2) = r_4(c_3 - b_3(b_2 - a_2)), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} w_4 - s_4(c_2 - b_2(b_1 - a_1)) &= r_4[d_3 - b_3(c_2 - b_2(b_1 - a_1)) \\ &\quad - c_3(b_1 - a_1)] + t_4(b_1 - a_1), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$s_5 - u_5 = r_5(b_4 - a_4), \quad (3.10)$$

$$t_5 - s_5(b_3 - a_3) = r_5(c_4 - b_4(b_3 - a_3)), \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} w_5 - s_5(c_3 - b_3(b_2 - a_2)) &= r_5[d_4 - b_4(c_3 - b_3(b_2 - a_2)) \\ &\quad - c_4(b_2 - a_2)] + t_5(b_2 - a_2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} h_5 - s_5[d_3 - b_3(c_2 - b_2(b_1 - a_1)) - c_3(b_1 - a_1)] & \quad (3.13) \\ &= r_5[e_4 - b_4(d_3 - b_3(c_2 - b_2(b_1 - a_1))) - c_3(b_1 - a_1) \\ &\quad - c_4(c_2 - b_2(b_1 - a_1)) - d_4(b_1 - a_1)] \\ &\quad + t_5(c_2 - b_2(b_1 - a_1)) + w_5(b_1 - a_1). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque  $n \geq 6$ , on a

$$s_n = r_n b_{n-1}, \quad (3.14)$$

$$t_n = r_n c_{n-1}, \quad (3.15)$$

$$w_n = r_n d_{n-1}, \quad (3.16)$$

$$h_n = r_n e_{n-1},$$

$$u_n = r_n a_{n-1}, \quad (3.17)$$

où

$$r_n := \gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n(b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-1}), \quad n \geq 1, \quad (3.18)$$

$$s_n := b_n \gamma_{n-1} + c_n(b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-2}) - d_{n+1} + d_n, \quad n \geq 2, \quad (3.19)$$

### 3.1. Caractérisation de l'orthogonalité

$$t_n := c_n \gamma_{n-2} + d_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-3}) - e_{n+1} + e_n, \quad n \geq 3, \quad (3.20)$$

$$w_n := d_n \gamma_{n-3} + e_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-4}), \quad n \geq 4, \quad (3.21)$$

$$h_n := e_n \gamma_{n-4}, \quad n \geq 5,$$

$$u_n := a_n \tilde{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (3.22)$$

**Preuve.** Par la définition du  $T_n$ , on a

$$T_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) + b_{n+1}R_n(x) + c_{n+1}R_{n-1}(x) + d_{n+1}R_{n-2}(x) + e_{n+1}R_{n-3}(x) - a_{n+1}T_n(x), \quad n \geq 0 \quad (3.23)$$

en remplaçant (3.1) dans (3.23), en appliquant (3.1) à  $xR_n(x)$ , en substituant  $xR_{n-1}(x)$ ,  $xR_{n-2}(x)$ ,  $xR_{n-3}(x)$ ,  $xR_{n-4}(x)$ , en utilisant à nouveau (3.1) et en tenant compte du fait que les polynômes à indice négatif sont nuls, on obtient

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= (x - \delta_n)R_n(x) - \gamma_n R_{n-1}(x) + b_{n+1}R_n(x) \\ &\quad + c_{n+1}R_{n-1}(x) + d_{n+1}R_{n-2}(x) + e_{n+1}R_{n-3}(x) - a_{n+1}T_n(x) \\ &= xT_n(x) - (\delta_n - b_{n+1} + b_n + a_{n+1} - a_n)T_n(x) \\ &\quad - a_n(\delta_n - b_{n+1} + b_n)T_{n-1}(x) \\ &\quad + [b_n(\delta_n - b_{n+1} + b_n - \delta_{n-1}) + c_{n+1} - c_n - \gamma_n]R_{n-1}(x) \\ &\quad + [c_n(\delta_n - b_{n+1} + b_n - \delta_{n-2}) - b_n\gamma_{n-1} - d_n + d_{n+1}]R_{n-2}(x) \\ &\quad + [d_n(\delta_n - b_{n+1} + b_n - \delta_{n-3}) - c_n\gamma_{n-2} - e_n + e_{n+1}]R_{n-3}(x) \\ &\quad + [e_n(\delta_n - b_{n+1} + b_n - \delta_{n-4}) - d_n\gamma_{n-3}]R_{n-4}(x) \\ &\quad - e_n\gamma_{n-4}R_{n-5}(x) - a_n(T_n(x) - xT_{n-1}(x)), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

En posons

$$\tilde{\delta}_n := \delta_n - b_{n+1} + b_n + a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0,$$

on trouve, pour  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 T_{n+1}(x) &= \left(x - \tilde{\delta}_n\right) T_n(x) + a_n \left(a_{n+1} - a_n - \tilde{\delta}_n\right) T_{n-1}(x) \\
 &\quad - \left[\gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-1})\right] R_{n-1}(x) \\
 &\quad - \left[b_n \gamma_{n-1} + c_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-2}) + d_n - d_{n+1}\right] R_{n-2}(x) \\
 &\quad - \left[c_n \gamma_{n-2} + d_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-3}) + e_n - e_{n+1}\right] R_{n-3}(x) \\
 &\quad - \left[d_n \gamma_{n-3} + e_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-4})\right] R_{n-4}(x) - e_n \gamma_{n-4} R_{n-5}(x) \\
 &\quad - a_n (T_n(x) - x T_{n-1}(x)).
 \end{aligned}$$

D'où,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON si et seulement si  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$ , pour chaque  $n \geq 1$ , et

$$\begin{aligned}
 &a_n \left(a_{n+1} - a_n - \tilde{\delta}_n\right) T_{n-1}(x) - \left[\gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-1})\right] R_{n-1}(x) \\
 &\quad - \left[b_n \gamma_{n-1} + c_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-2}) + d_n - d_{n+1}\right] R_{n-2}(x) \\
 &\quad - \left[c_n \gamma_{n-2} + d_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-3}) + e_n - e_{n+1}\right] R_{n-3}(x) \tag{3.24} \\
 &\quad - \left[d_n \gamma_{n-3} + e_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-4})\right] R_{n-4}(x) - e_n \gamma_{n-4} R_{n-5}(x) - a_n (T_n(x) - x T_{n-1}(x)) \\
 &= -\tilde{\gamma}_n T_{n-1}(x), \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

D'autre part,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  sera une SPON si et seulement si  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$ , pour chaque  $n \geq 1$ ,  
et

$$T_n(x) - x T_{n-1}(x) = -\tilde{\delta}_{n-1} T_{n-1}(x) - \tilde{\gamma}_{n-1} T_{n-2}(x), \quad n \geq 1. \tag{3.25}$$

En remplaçant (3.25) dans (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
 &\left[\tilde{\gamma}_n + a_n \left(a_{n+1} - a_n - \tilde{\delta}_n + \tilde{\delta}_{n-1}\right)\right] T_{n-1}(x) + a_n \tilde{\gamma}_{n-1} T_{n-2}(x) \\
 &= \left[\gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-1})\right] R_{n-1}(x) \\
 &\quad + \left[b_n \gamma_{n-1} + c_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-2}) + d_n - d_{n+1}\right] R_{n-2}(x) \tag{3.26} \\
 &\quad + \left[c_n \gamma_{n-2} + d_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-3}) + e_n - e_{n+1}\right] R_{n-3}(x) \\
 &\quad + \left[d_n \gamma_{n-3} + e_n (b_{n+1} - b_n - \delta_n + \delta_{n-4})\right] R_{n-4}(x) + e_n \gamma_{n-4} R_{n-5}(x),
 \end{aligned}$$

qui est vérifiée, pour chaque  $n \geq 1$ .

### 3.1. Caractérisation de l'orthogonalité

Premièrement, supposons que  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON avec des coefficients de récurrences  $\{\tilde{\delta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$ , alors

$$T_{n+1}(x) = (x - \tilde{\delta}_n) T_n(x) - \tilde{\gamma}_n T_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.27)$$

avec les conditions initiales  $T_0(x) = 1$ ,  $T_{-1}(x) = 0$  et la condition  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

Pour obtenir (3.26), il suffit de remplacer  $T_n(x) - xT_{n-1}(x)$  dans (3.24)

Inversement, si (3.26) est satisfaite et que  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq 1$ , on montre que  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  satisfait (3.27) en remarquant que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n \left( \tilde{\delta}_{n-1} T_{n-1}(x) + \tilde{\gamma}_{n-1} T_{n-2}(x) \right) &= -\tilde{\gamma}_n T_{n-1}(x) \\ &+ \left( a_{n+1} - a_n - \tilde{\delta}_n \right) (b_n R_{n-1}(x) + c_n R_{n-2}(x) + d_n R_{n-3}(x) + e_n R_{n-4}(x) - a_n T_{n-1}(x)) \\ &+ b_n (\delta_{n-1} R_{n-1}(x) + \gamma_{n-1} R_{n-2}(x)) + c_n (\delta_{n-2} R_{n-2}(x) + \gamma_{n-2} R_{n-3}(x)) \\ &+ d_n (\delta_{n-3} R_{n-3}(x) + \gamma_{n-3} R_{n-4}(x)) + e_n (\delta_{n-4} R_{n-4}(x) + \gamma_{n-4} R_{n-5}(x)) \\ &+ (\gamma_n + c_n - c_{n+1}) R_{n-1}(x) + (d_n - d_{n+1}) R_{n-2}(x) \\ &+ (e_n - e_{n+1}) R_{n-3}(x) - d_{n+1} R_{n-4}(x). \end{aligned}$$

En appliquant (3.1) dans  $b_n R_{n-1}(x) + c_n R_{n-2}(x) + d_n R_{n-3}(x) + e_n R_{n-4}(x)$  et en utilisant (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} a_n \left[ \tilde{\delta}_{n-1} T_{n-1}(x) + \tilde{\gamma}_{n-1} T_{n-2}(x) \right] &= a_n (xT_{n-1}(x) - T_n(x)) + (x - \tilde{\delta}_n) T_n(x) \\ &- T_{n+1}(x) - \tilde{\gamma}_n T_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Inversement,

$$T_{n+1}(x) - (x - \tilde{\delta}_n) T_n(x) + \tilde{\gamma}_n T_{n-1}(x) = -a_n \left[ T_n(x) - (x - \tilde{\delta}_{n-1}) T_{n-1}(x) + \tilde{\gamma}_{n-1} T_{n-2}(x) \right], \quad n \geq 1.$$

De plus, d'après (3.1)

$$T_1(x) = R_1(x) + b_1 - a_1 = x - \delta_0 + b_1 - a_1 = x - \tilde{\delta}_0,$$

nous déduisons récursivement que

$$T_{n+1}(x) = \left(x - \tilde{\delta}_n\right) T_n(x) - \tilde{\gamma}_n T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Ainsi,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON avec des coefficients de récurrences  $\{\tilde{\delta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$ .

D'après (3.1) et (3.3) nous avons (3.26), qui est équivalent à

$$\begin{aligned} (u_n - a_{n-1}r_n) T_{n-2}(x) &= (s_n - b_{n-1}r_n) R_{n-2}(x) + (t_n - c_{n-1}r_n) R_{n-3}(x) & (3.28) \\ &+ (w_n - d_{n-1}r_n) R_{n-4}(x) + (h_n - e_{n-1}r_n) R_{n-5}(x), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

où  $r_n, s_n, t_n, u_n, w_n$  et  $h_n$  sont définis par(3.18) – (3.22).

Maintenant, on montre que (3.28) est vérifiée pour  $\tilde{\gamma}_n \neq 0, n \geq 1$  si et seulement si  $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \tilde{\gamma}_4 \neq 0$  et les relations (3.4) – (3.17) sont aussi vérifiées.

En remplaçant dans (3.28) par  $n = 2, n = 3, n = 4$  et  $n = 5$ , on obtient les relations (3.4) – (3.13).

il est donc facile de montrer que (3.14) – (3.17) sont vérifiées pour  $n \geq 6$ .

De plus, puisque  $e_4 \neq a_4(d_3 - a_3(c_2 - a_2(b_1 - a_1)))$  et  $a_n \neq 0$ , pour  $n \geq 5$  alors par (3.4), on déduit que

$$\langle u, T_n \rangle \neq 0, \quad n \geq 4.$$

et en appliquant  $u$  aux deux côtés de(3.28), on obtient

$$(u_n - a_{n-1}r_n) \langle u, T_{n-2} \rangle = 0, \quad n \geq 6.$$

ce qui nous donne

$$u_n = a_{n-1}r_n, \quad n \geq 6,$$

qui prouve que (3.17).

En multipliant (3.28) par  $R_{n-2}, R_{n-3}, R_{n-4}, R_{n-5}$  et en appliquant  $u$ , on obtient, respectivement (3.14) – (3.16).

Inversement, d'après(3.16) et (3.17) on a

$$\tilde{\gamma}_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{e_n}{e_{n-1}} \gamma_{n-4}, \quad n \geq 6,$$

ce qui nous donne

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{e_{n+1}}{e_n} \gamma_{n-3}, \quad n \geq 5.$$

Ainsi

$$\tilde{\gamma}_n \neq 0, \quad n \geq 5.$$

Par conséquent, les conditions (3.4) – (3.17) avec  $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \tilde{\gamma}_4 \neq 0$  impliquent (3.28) qui sont vraies pour  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq 1$ . ■

Ceci prouve que l'orthogonalité de la suite  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  peut être aussi caractérisée par le fait qu'il existe cinq suites dépendant des paramètres  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n$  et des coefficients de récurrences qui restent constants

**Théorème 3.1.1** *Soit  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  une SPON par rapport à une forme linéaire régulière  $u$  et la suite de polynômes normalisés  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  soit donnée par la relation (3.1). Si  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  est une SPON par rapport à une forme linéaire régulière  $v$ , alors*

$$k(x - c)u = (x^4 + ax^3 + bx^2 + dx + e) v \quad (3.29)$$

avec  $c, a, b, d, e \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et les normalisations de ces formes linéaires  $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$ .

**Preuve.** En appliquant la forme linéaire régulière  $u$  correspondant à la SPON  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  dans (3.1), on obtient pour chaque  $n \geq 4$

$$\langle (x - c)u, T_n(x) \rangle = 0.$$

et par suite selon [19] et en tenant compte de la relation (3.1), nous développons la forme linéaire  $u$  en termes de la base duale  $\left\{ \frac{T_i v}{\langle v, T_i^2 \rangle} \right\}_{i \geq 0}$  de la SPON  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  comme:

$$(x - c)u = \sum_{i=0}^4 \frac{\langle (x - c)u, T_i \rangle}{\langle v, T_i^2 \rangle} T_i v.$$

Puisque  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  est une MOPS par rapport à  $v$ , les coefficients de récurrences  $\{\tilde{\delta}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \geq 1}$  sont donnés par (3.2) et (3.3), de plus

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{\langle v, T_n^2 \rangle}{\langle v, T_{n-1}^2 \rangle} \neq 0, \quad n \geq 1. \quad (3.30)$$

En effet, en faisant agir les deux côtés (3.29) sur les polynômes  $T_0, T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ , et en tenant compte de (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} & k [(c_3 - a_3 (b_2 - a_2)) \gamma_1 + (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))) (\delta_0 - c)] \\ & = (\tilde{\delta}_3 + \tilde{\delta}_2 + \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 + a \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & k [(b_2 - a_2) \gamma_1 + (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)) (\delta_0 - c)] \\ & = (\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 + \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\delta}_0^2 + \tilde{\delta}_1^2 + \tilde{\delta}_2^2 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \\ & + a (\tilde{\delta}_2 + \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 + b \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & k [\gamma_1 + (b_1 - a_1) (\delta_0 - c)] \\ & = 2 (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1^2 + (\tilde{\delta}_2 + 2\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 + (\tilde{\delta}_0^3 + \tilde{\delta}_1^3 + \tilde{\delta}_1^2 \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0^2) \tilde{\gamma}_1 \\ & + a (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\delta}_1^2 + \tilde{\delta}_0^2 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 + b (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 + d \tilde{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & k (\delta_0 - c) \\ & = \tilde{\delta}_0^4 + (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + 3\tilde{\delta}_0^2 + \tilde{\delta}_1^2 + 2\tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 + a ((\tilde{\delta}_1 + 2\tilde{\delta}_0) \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\delta}_0^3) \\ & + b (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\delta}_0^2) + d \tilde{\delta}_0 + e \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} & k [d_4 - a_4 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2))] \gamma_1 \\ & + [e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))] (\delta_0 - c) \\ & = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \tilde{\gamma}_4 \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.1. Caractérisation de l'orthogonalité

où,  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$  et  $\tilde{\gamma}_4$  sont donnés par (3.2) et (3.3).

En utilisant les relations (3.31) – (3.34) et en tenant compte de (3.3),

on obtient les valeurs  $c, a, b, d, e$  et  $k$

$$\begin{aligned}
k &= \frac{a_5 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3 \tilde{\gamma}_4}{e_5 \gamma_1}, \\
c &= \delta_0 - \frac{\gamma_1 e_5 - a_5 (d_4 - a_4 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)))}{a_5 e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))}, \\
a &= -\tilde{\delta}_3 - \tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_0 + \frac{d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))}{e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))} \\
&\quad + \frac{a_5 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)) e_4 - (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))) d_4}{e_5 (e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))))}, \\
b &= \tilde{\delta}_3 \tilde{\delta}_0 - \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 + \tilde{\delta}_0 \tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_3 \tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_1^2 - \tilde{\delta}_2^2 - \tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_3 \\
&\quad + \frac{(d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))}{e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))} \\
&\quad + \frac{a_5 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)) e_4 - (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))) d_4}{e_5 (e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))))} (\tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0) \\
&\quad + \frac{a_5 (b_2 - a_2) \tilde{\gamma}_3 + \tilde{\gamma}_3 e_5 - a_5 (d_4 - a_4 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)))}{e_5 e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))} (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)), \\
d &= - \left( \tilde{\delta}_0^3 + \tilde{\delta}_1^3 + \tilde{\delta}_1^2 \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0^2 \right) - \left( 2\tilde{\delta}_1 + 2\tilde{\delta}_0 \right) \tilde{\gamma}_1 - \left( \tilde{\delta}_2 + 2\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0 \right) \tilde{\gamma}_2 \\
&\quad + \frac{(d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))}{e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))} \\
&\quad + \frac{a_5 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)) e_4 - (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))) d_4}{e_5 (e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1))))} (\tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0) \\
&\quad + \frac{a_5 (b_2 - a_2) \tilde{\gamma}_3 + \tilde{\gamma}_3 e_5 - a_5 (d_4 - a_4 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)))}{e_5 e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))} (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)), \\
d &= - \left( \tilde{\delta}_0^3 + \tilde{\delta}_1^3 + \tilde{\delta}_1^2 \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0^2 \right) - \left( 2\tilde{\delta}_1 + 2\tilde{\delta}_0 \right) \tilde{\gamma}_1 - \left( \tilde{\delta}_2 + 2\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0 \right) \tilde{\gamma}_2 \\
&\quad + \left[ a_5 + \frac{e_5 - a_5 (d_4 - a_4 (c_3 - a_3 (b_2 - a_2)))}{e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))} (b_1 - a_1) \right] \frac{\tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3}{e_5} \\
&\quad - a \left[ \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\delta}_1^2 + \tilde{\delta}_0^2 + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0 \right] - b \left( \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_0 \right), \\
e &= \frac{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3}{e_5} \frac{e_5 - a_5 (d_4 - a_4 (c_3 - (b_2 - a_2)))}{e_4 - a_4 (d_3 - a_3 (c_2 - a_2 (b_1 - a_1)))} \\
&\quad - \left( \tilde{\delta}_0^4 + \left( \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + 3\tilde{\delta}_0^2 + \tilde{\delta}_1^2 + 2\tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_0 \right) \tilde{\gamma}_1 \right) \\
&\quad - a \left( \left( \tilde{\delta}_1 + 2\tilde{\delta}_0 \right) \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\delta}_0^3 \right) - b \left( \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\delta}_0^2 \right) - d \tilde{\delta}_0.
\end{aligned}$$

■

## 3.2 Cas Particulier

Dans cette section, nous allons décortiquer un cas particulier de la relation (3.1) .

En effet, considérons la SPON  $\{R_n\}_{n \geq 1}$ , symétrique, c'est-à-dire le cas  $\delta_n = 0$ , pour chaque  $n \geq 0$ . D'après la proposition 3.1.1, les équations (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17) s'écrivent, pour chaque  $n \geq 6$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{d_{n-1}}{e_{n-1}}\gamma_{n-4} - \frac{d_n}{e_n}\gamma_{n-3}, \quad (3.1)$$

$$c_{n+1} = c_n + \gamma_n - \frac{e_n}{e_{n-1}}\gamma_{n-4} + b_n(b_{n+1} - b_n), \quad (3.2)$$

$$d_{n+1} = d_n + b_n\gamma_{n-1} + c_n(b_{n+1} - b_n) \quad (3.3)$$

$$- b_{n-1}[\gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n(b_{n+1} - b_n)],$$

$$e_{n+1} = e_n + c_n\gamma_{n-2} + d_n(b_{n+1} - b_n) \quad (3.4)$$

$$- c_{n-1}[\gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n(b_{n+1} - b_n)],$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{e_n}{e_{n-1}}\frac{\gamma_{n-4}}{a_n} - \frac{e_{n+1}}{e_n}\frac{\gamma_{n-3}}{r_{n+1}}, \quad n \geq 5. \quad (3.5)$$

Les équations (3.2) et (3.3) deviennent

$$\tilde{\delta}_n = b_n - b_{n+1} + a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0,$$

$$\tilde{\gamma}_n = \gamma_n + c_n - c_{n+1} + b_n(b_{n+1} - b_n) - a_n(b_{n+1} - b_n + \tilde{\delta}_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

pour chaque  $n \geq 6$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_n &= \frac{d_n}{e_n}\gamma_{n-3} - \frac{d_{n-1}}{e_{n-1}}\gamma_{n-4} + \frac{e_n}{e_{n-1}}\frac{\gamma_{n-4}}{a_n} - \frac{e_{n+1}}{e_n}\frac{\gamma_{n-3}}{a_{n+1}} \\ &= \frac{\gamma_{n-3}}{e_n} \left( d_n - \frac{e_{n+1}}{a_{n+1}} \right) - \frac{\gamma_{n-4}}{e_{n-1}} \left( d_{n-1} - \frac{e_n}{a_n} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{e_n}{e_{n-1}}\gamma_{n-4} - a_n \left( \frac{d_{n-1}}{e_{n-1}}\gamma_{n-4} - \frac{d_n}{e_n}\gamma_{n-3} \right) - a_n\tilde{\delta}_{n-1}. \quad (3.7)$$

Dans ce cas, nous allons traiter les sous-cas suivants.

**i)** Si  $b_n = b_1$  et  $a_{n-1} = a_1$ , pour chaque  $n \geq 6$ , d'après (3.1) et (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d_n}{e_n} \gamma_{n-3} &= \frac{d_{n-1}}{e_{n-1}} \gamma_{n-4} = \dots = \frac{d_4}{e_4} \gamma_1, \\ \frac{e_{n+1}}{e_n} \gamma_{n-3} &= \frac{e_n}{e_{n-1}} \gamma_{n-4} = \dots = \frac{e_5}{e_4} \gamma_1, \end{aligned}$$

alors la relation (3.7) nous donne

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{e_5}{e_4} \gamma_1, \quad n \geq 6. \quad (3.8)$$

on déduit que  $\tilde{\delta}_n = 0$  et  $\tilde{\gamma}_n$  sont constants, pour chaque  $n \geq 6$ .

et d'après (3.2), nous avons

$$c_{n+1} = c_n + \gamma_n - \frac{e_5}{e_4} \gamma_1. \quad (3.9)$$

**ii)** Si  $b_n = b_1$ ,  $a_{n-1} = a_1$  et  $c_n = c_2$ , pour chaque  $n \geq 6$ , d'après (3.9) et (3.8), on a

$$\tilde{\gamma}_n = \gamma_n, \quad n \geq 6.$$

les coefficients  $\gamma_n$  sont constants, pour chaque  $n \geq 6$ , alors  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  est la suite de polynômes anti-associés d'ordre 6 pour les polynômes de Chebyshev du second genre [34].

**iii)** Si  $a_{n-1} = a_1$ ,  $b_n = b_1$ ,  $c_n = c_2$  et  $d_n = d_3$ , pour chaque  $n \geq 6$ , d'après (3.3), on a

$$d_{n+1} = d_n + b_n \gamma_{n-1} - b_{n-1} \gamma_n, \quad n \geq 6,$$

d'où

$$d_{n+1} = d_n + b_1 (\gamma_{n-1} - \gamma_n), \quad n \geq 7,$$

il est claire que  $b_1 (\gamma_{n-1} - \gamma_n) = 0$ , pour tout  $n \geq 7$ .

**iv)** Si  $a_{n-1} = a_1$ ,  $b_n = b_1$ ,  $c_n = c_2$ ,  $d_n = d_3$  et  $e_n = e_4$ , pour chaque  $n \geq 6$ , d'après (3.4), on a

$$e_{n+1} = e_n + c_n \gamma_{n-2} - c_{n-1} \gamma_n, \quad n \geq 6,$$

d'où

$$e_{n+1} = e_n + c_2 (\gamma_{n-2} - \gamma_n), \quad n \geq 8,$$

il est claire que  $c_2 (\gamma_{n-2} - \gamma_n) = 0$ , pour tout  $n \geq 8$ .

**Remarque 3.2.1** Si  $a_{n-1} = a_1$ ,  $b_n = b_1$  et  $c_n = c_2$  ou  $a_{n-1} = a_1$ ,  $b_n = b_1$ ,  $c_n = c_2$  et  $d_n = d_3$  ou  $a_{n-1} = a_1$ ,  $b_n = b_1$ ,  $c_n = c_2$ ,  $d_n = d_3$  et  $e_n = e_4$  pour chaque  $n \geq 6$ , alors

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_n &= 0, & n \geq 6, \\ \tilde{\gamma}_n &= \gamma_n = \gamma_6, & n \geq 6.\end{aligned}$$

**Exemple 3.2.1** Soit  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes de Chebyshev normalisés du second genre orthogonaux par rapport à la fonction de poids  $\mathcal{W}(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  sur  $(-1, 1)$ . alors  $\delta_n = 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $\gamma_n = \frac{1}{4}$ ,  $n \geq 1$ , et les relations (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5), pour chaque  $n \geq 6$ , deviennent

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= b_n + \frac{1}{4} \left( \frac{d_{n-1}}{e_{n-1}} - \frac{d_n}{e_n} \right), \\ c_{n+1} &= c_n + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{e_n}{e_{n-1}} \right) + b_n (b_{n+1} - b_n), \\ d_{n+1} &= d_n + \frac{1}{4} b_n + c_n (b_{n+1} - b_n) - b_{n-1} \left[ \frac{1}{4} + c_n - c_{n+1} + b_n (b_{n+1} - b_n) \right], \\ e_{n+1} &= e_n + \frac{1}{4} c_n + d_n (b_{n+1} - b_n) - c_{n-1} \left[ \frac{1}{4} + c_n - c_{n+1} + b_n (b_{n+1} - b_n) \right], \\ a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{4} \left( \frac{e_{n-1}}{a_{n-1} e_{n-2}} - \frac{e_n}{a_n e_{n-1}} \right).\end{aligned}$$

En supposant que  $a_{n-1} = a_1$ ,  $b_n = b_1$  et  $c_n = c_2$ , pour chaque  $n \geq 6$ , on obtient

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{4} (c_n - c_{n-1}), \quad n \geq 6,$$

et en particulier,

$$e_{n+1} = e_n, \quad n \geq 7.$$

Dans cette situation, nous déduisons des coefficients de connexion constants, pour  $n \geq 7$ .

A travers notre étude, on a pu traiter une nouvelle caractérisation de l'orthogonalité d'une suite de polynômes orthogonaux normalisés qui sont définis par la relation

$$T_n(x) + a_n T_{n-1}(x) = R_n(x) + b_n R_{n-1}(x) + c_n R_{n-2}(x) + d_n R_{n-3}(x) + e_n R_{n-4}(x)$$

où  $e_n a_n \neq 0$ , pour tout  $n \geq 5$ . De plus, on a pu démontré que la relation entre les fonctionnelles linéaires correspondantes est donnée par

$$k(x - c)u = (x^4 + ax^3 + bx^2 + dx + e)v$$

où  $a, b, c, d$  et  $e \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Enfin, une illustration utilisant un cas particulier de la relation de type ci-dessus est donnée.

Dans nos perspectives nous estimons trouver une généralisation de ce travail.

---

# Bibliographie

- [1] M. Alfaro, F. Marcellan, A. Pena, M. L. Rezola, On linearly related orthogonal polynomials and their functionals, *J. Math. Anal. Appl.* 287 (2003), 307–319.
- [2] M. Alfaro, F. Marcellan, A. Pena, M. L. Rezola, On rational transformations of linear functionals: direct problem, *J. Math. Anal. Appl.* 298 (2004), 171–183.
- [3] M. Alfaro, F. Marcellan, A. Pena, M. L. Rezola, When do linear combinations of orthogonal polynomials yield new sequences of orthogonal polynomials?, *J. Comput. Appl. Math.* 233(2010), 1446–1452.
- [4] M. Alfaro, A. Pena, M. L. Rezola, F. Marcellan, Orthogonal polynomials associated with an inverse quadratic spectral transform, *Comput. Math. Appl.* 61 (2011), 888–900.
- [5] M. Alfaro, A. Pena, J. Petronilho, M. L. Rezola, Orthogonal polynomials generated by a linear structure relation: inverse problem, *J. Math. Anal. Appl.* 401 (2013), 182–197.
- [6] K. Ali Khelil, A. Belkebir, M. C. Bouras, On a new combination of orthogonal polynomials sequences, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 24 (2022), no. 3, 5-10.
- [7] A. Angelescu, Sur les polynômes orthogonaux en rapport avec d'autres polynômes, *Bull. de la Soc. de Sc. de Cluj Roumanie*, 1 (1921-23) 44-59.
- [8] R. Askey, G. Gasper, Positive Jacobi polynomial sums. II, *Amer. J. Math.* 98 (1976), 709–737.

- 
- [9] R. Askey, G. Gasper, Inequalities for polynomials, In: A. Baernstein et al. (eds.), *The Bieberbach Conjecture* (West Lafayette, Ind., 1985), *Math. Surveys Monogr.*, 21, Amer. Math. Soc., Providence, 1986, 7–32.
- [10] R. Askey, Positive quadrature methods and positive polynomial sums, in: C.K. Chui et al. (eds.), *Approximation Theory, V* (College Station, Tex., 1986), Academic Press, Boston, MA, 1986, 1–29.
- [11] D. Beghdadi, P. Maroni, On the inverse problem of the product of a semiclassical form by a polynomial, *J. Comput. Appl. Math.* 88 (1998), 377–399.
- [12] A. Belkebir, M. C. Bouras, A combination of orthogonal polynomials sequences: 2–5 type relation, *Adv. Math. sci. journal*, 11 (2022), no. 10, 893–913.
- [13] A. Branquinho, F. Marcellan, Generating new classes of orthogonal polynomials, *Int. J. Math. Math. Sci.* 19 (1996), 643–656.
- [14] T. S. Chihara, On co-recursive orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 (1962), 899–905.
- [15] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [16] C. Houna, M.N. Hounkonnou, A. Ronveaux, New families of orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* 193 (2006), 474–483.
- [17] K.H. Kwon, D.W. Lee, F. Marcellan, S.B. Park, On kernel polynomials and self-perturbation of orthogonal polynomials, *Ann. Mat. Pura Appl.* 180 (2001), 127–146.
- [18] P. Maroni, L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 10 (1989) 105–139.
- [19] P. Maroni, Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques. " C. Brezinski et al, Eds, *Orthogonal polynomials and their Applications*" (Baltzer, Basel,). IMACS Ann. Comput. Appl. Math. 9 (1991) 95–130.

- [20] P. Maroni, Semi-classical character and finite-type relations between polynomial sequences, *Applied Numerical Mathematics*. 31 (3) (1999) 295-330.
- [21] P. Maroni, T. A. Mesquita, Z. da Rocha, On the general cubic decomposition of polynomial sequences. *J. Differ. Equ. Appl.* 17 (9) (2011) 1303-1332.
- [22] P. Maroni, M. Ihsen Tounsi, Quadratic decomposition of symmetric semi-classical polynomial sequences of even class: an example from the case  $s = 2$ . *J. Differ. Equ. Appl.* 18 (9) (2012) 1519-1530.
- [23] P. Maroni, T. A. Mesquita, Cubic Decomposition of a 2-Orthogonal Polynomials Sequences. *Mediterr. J. Math.* 10 (2013) 843-863.
- [24] T. A. Mesquita, Z. da Rocha, Symbolic approach to the general cubic decomposition of polynomial sequences. Results for several orthogonal and symmetric cases. *Opusc. Math.* 32 (4) (2012) 675-687.
- [25] T. A. Mesquita, Â. Macedo, Chebyshev polynomials via quadratic and cubic decompositions of the canonical sequence. *Integr. Transf. Spec F.* 26 (12) (2015) 956-970.
- [26] N. Obrechhoff, *Zeros of Polynomials, 1963* (in Bulgarian); English translation by I. Dimovsky and P. Rusev, *Marin Drinov Acad. Publ., Sofia*, 2003.
- [27] F. Peherstorfer, On orthogonal polynomials with perturbed recurrence relations, *J. Comput. Appl. Math.* 30 (1990), 203–212.
- [28] F. Peherstorfer, Linear combinations of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas, *Math. Comp.* 55 (1990), 231–241.
- [29] F. Peherstorfer, Zeros of linear combinations of orthogonal polynomials, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 117 (1995), 533–544.
- [30] J. Petronilho, On the linear functionals associated to linearly related sequences of orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 315 (2006), 379–393.

- [31] G. Pólya, "Über die konvergenz von quadraturverfahren, *Math. Z.* 37 (1933), 264–286.
- [32] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [33] Rainville ED, *Special Functions*, New York, The Macmillan Co1, 1960.
- [34] A. Ronvaux, W. Van Assche, Upward extension of the Jacobi matrix for orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* 86 (1996), 335–357.
- [35] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Soc.23 (1939).
- [36] J. Van Iseghem, *Approximants de Padé vectoriels*. Thèse, Univ. des Sci. et Tech. de Lille, France (1987).