

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

BADJI MOKHTAR-ANNABA

UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار

- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Spectre de Fucik (p,q) du Laplacian

Filière

Mathématiques

Spécialité

Mathématiques

Par

SELMA HADJER DJEFFAL

DIRECTEUR DE THÈSE: LAMINE BOUZETTOUTA .

M.C.A Université de Skikda

Devant le jury

PRESIDENTE: MESSIKH CHAHRAZED.

M.C.A Université de Annaba

EXAMINATEUR: ZITOUNI SALAH.

Prof. Université de Souk Ahras

EXAMINATRICE: KHENNICHE GHANIA.

M.C.A Université de Skikda

EXAMINATEUR: KHOCHEMANE HOUSSEM EDDINE. M.C.A. ENSET – Skikda

Année : 2024/2025

Remerciements

Avant tout je voudrais témoigner ma profonde reconnaissance envers Dieu, qui m'a permis de mener à bien mon travail. Conformément à la tradition, je m'efforcerai de saluer avec un grand respect tous ceux qui ont collaboré à l'accomplissement de ce manuscrit, en tentant de ne laisser personne dans l'oubli. Ainsi, je remercie par avance tous ceux dont le nom ne figure pas sur cette page, mais qui m'ont apporté leur soutien, que ce soit de près ou de loin. Ils s'identifieront.

Cette thèse ne pouvait pas naître sans l'indulgence, l'optimisme et le dévouement de mon directeur de thèse, le Docteur Lamine Bouzatouta, que je remercie chaleureusement pour tout ce qu'il m'a donné au cours de ces années, ainsi que pour sa foi en mes capacités. De plus, les conseils qu'il m'a prodigués au cours de la rédaction étaient pertinents en permanence, simplifiant ainsi mon travail ce qui m'a donné l'occasion de mener à bien cette thèse.

Je souhaite rendre grâce à ceux qui ont bien voulu présider le jury, je les remercie aussi pour leurs appuis et leur attention pour mon travail. Je salue également les professeurs qui ont eu le mérite d'être les rapporteurs de cette thèse. Je conçois une totale considération pour leur expertise et leurs qualités humaines, et je leur suis reconnaissante pour leur participation au jury. De plus, je leur suis profondément reconnaissante pour leur contribution à l'amélioration de cette thèse, à travers leurs nombreuses remarques et suggestions.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance au personnel du laboratoire de mathématiques appliquées et à tous mes confrères doctorants du laboratoire, avec qui j'ai passé ces années enrichissantes.

Je voudrais aussi témoigner mes sincères remerciements pour toute ma famille qui m'ont sans cesse épaulé.

المخلص

في هذه الأطروحة سوف نهتم بدراسة نوع من أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية التي تتضمن (p,q)-Laplacian المعروف على مجال مغلق ومنتظم Ω ب

$$(\Delta_p + \Delta_q)u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u).$$

في البداية سنقوم بدراسة معادلة تفاضلية جزئية ذات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(\alpha P(x)|u|^{p-2}u + \beta Q(x)|u|^{q-2}u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

في ظل الفرضيات المناسبة وباستعمال نظرية لجسترنيك شنيرلمان نتحصل على حل وحيد للمعادلة. أما الجانب الآخر من عملنا يتركز على دراسة المعادلة التالية

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda.P(x)(u^+)^{p-1} - \mu.Q(x)(u^-)^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

من خلال الجمع بين نظرية كول ونظرية لجسترنيك شنيرلمان نتحصل على عائلة من المنحنيات من الشكل

$$C_n := \{(s + c_k(s, t), t + c_k(s, t)), (t + c_k(s, t), s + c_k(s, t))\},$$

الكلمات مفتاح :

نقطة حرجة

قيم ذاتية

نظرية كول

نظرية لجسترنيك شنيرلمان

Abstract

In the following thesis we will focus our interest in partial differential equations of non-linear elliptics involving the (p, q) – *Laplacian* operator defined by

$$(\Delta_p + \Delta_q)u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u).$$

In a fairly regular bounded domain Ω , we place ourselves in \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. It is noted that the methods used are mainly variational methods.

First, we will study the following eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(\alpha P(x)|u|^{p-2}u + \beta Q(x)|u|^{q-2}u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Under adequate hypotheses as well as an imposed constraint $M_{\alpha, \beta}$ the existence of a non trivial solution of the above problem is demonstrated by the Ljusternick-Shnirelmann method.

Our second concern will be about the study of the Fučík spectrum of the (p, q) – *Laplacian* through the following problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda.P(x)(u^+)^{p-1} - \mu.Q(x)(u^-)^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

By combining the Ljusternick-Schnirelmann theory and the mountain pass theorem with constraint we will end up creating a family of curves

$$C_n := \{(s + c_k(s, t), t + c_k(s, t)), (t + c_k(s, t), s + c_k(s, t))\},$$

Key Words : (P, Q) -Laplacian, Nontrivial solution, Critical value, Ljusternick-Schnirelmann Theorem. Fučík spectrum, Mountain Pass Theorem.

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons des équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur (p, q) – *Laplacien* défini par

$$(\Delta_p + \Delta_q)u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u), x \in \Omega$$

où $1 < q < p < \infty$, un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ suffisamment régulier, avec $N \geq 1$.

Tout d'abord, nous commençons par examiner le problème spectral suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(\alpha P(x)|u|^{p-2}u + \beta Q(x)|u|^{q-2}u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sous des hypothèses adéquates ainsi qu'une contrainte imposée sur $M_{\alpha, \beta}$ l'existence d'une solution non triviale du problème ci-dessus est démontrée à l'aide de la méthode de Ljusternick-Schnirelmann.

Ensuite, nous nous consacrons à l'étude du spectre de fučík de l'opérateur (p, q) – *Laplacien* à travers l'analyse du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda.P(x)(u^+)^{p-1} - \mu.Q(x)(u^-)^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalement, la combinaison de la théorie de Ljusternick-Schnirelmann et du théorème du col de la montagne sous contrainte conduit à la construction d'une famille de courbes associées au problème étudié donnée par :

$$C_n := \{(s + c_k(s, t), t + c_k(s, t)), (t + c_k(s, t), s + c_k(s, t))\},$$

Mots Clés : (P, Q) – *Laplacian*, Valeur critique, Solution non triviale, Théorème du Col de la montagne, Théorème de Ljustenick-Shnirelmann, Spectre de Fučík.

Table des matières

1	Notions préliminaires.	1
1.1	Propriétés de base de l'opérateur (p, q) -Laplacien.	1
1.2	Définitions Essentielles.	4
1.3	Espace de Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$.	9
2	Spectre de Fučík des opérateurs elliptiques.	11
2.1	Spectre de Fučík du Laplacien.	12
2.1.1	Le spectre de Fučík en dimension 1.	13
2.1.2	Le spectre de Fučík dans un rectangle.	13
2.1.3	Le spectre de Fučík dans le cas radial.	15
2.2	Spectre de Fučík de l'opérateur p -Laplacien.	18
2.2.1	Initiation au spectre de Fučík du p -Laplacien.	18
3	Méthodes de résolution pour les EDP non linéaires	22
4	Valeur propre du (p,q)-Laplacien avec contrainte.	27
5	Spectre de Fučík de l'opérateur (p, q)-Laplacien	37
5.1	Existence de la famille de courbes.	37
5.2	Propriétés de la famille de courbes.	47
	Bibliographie	3

Notations Générales

Symbole	Signification
Δu	Laplacien de u
$\Delta_p u$	p -Laplacien de u
$\Delta_{(p,q)} u$	(p, q) -Laplacien de u
p^*	Exposant critique de p
$\ \cdot\ _X$	Norme dans l'espace X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Produit scalaire dans l'espace X
$d(x, A)$	Distance entre x et l'ensemble A
S	Sphère unitaire dans $W_0^{1,p}(\Omega)$
X'	Espace dual de X
p.p.	Presque pour tous les points
$C(\Omega)$	Ensemble des fonctions continues sur Ω
$C^k(\Omega)$	Ensemble des fonctions de classe C^k sur Ω
$C^{k,m}(\Omega)$	Ensemble des fonctions hölderiennes de classe $C^{k,m}$ sur Ω
$C_{loc}^{k,m}(\Omega)$	Ensemble des fonctions localement hölderiennes de classe $C^{k,m}$ sur Ω
$C_c^k(\Omega)$	Ensemble des fonctions de classe C^k à support compact sur Ω
$C^\infty(\Omega)$	Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω
$C_c^\infty(\Omega)$	Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur Ω
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable et } \int_\Omega u ^p < \infty, 1 \leq p < \infty\}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable et } \exists C > 0, u(x) \leq C \text{ p.p.}\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$, où $p' = \frac{p}{p-1}$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev à trace nulle
$W_0^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
Σ_p	Spectre de Fučik du p -Laplacien
$\Sigma_{p,q}$	Spectre de Fučik du (p,q) -Laplacien

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous nous consacrons à l'analyse de certains problèmes elliptiques non linéaires. Les questions abordées dans ce travail s'inscrivent dans le cadre d'un domaine borné. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ soumis à une condition aux limites de Dirichlet ainsi qu'à une contrainte supplémentaire. Cette configuration engendre certaines difficultés notamment liées à la nécessité de rechercher une solution non triviale dans un espace fonctionnel approprié, tout en respectant les conditions imposées par la contrainte.

Dans les chapitres 4 et 5, nous présenterons et démontrerons de nouveaux résultats concernant l'existence d'une solution d'un problème aux limites non linéaire avec contrainte.

Nous mentionnons que les problèmes abordés dans ce manuscrit impliquent des opérateurs de type divergence, en particulier un opérateur non linéaire et non homogène appelé (p, q) -Laplacien défini par

$$(\Delta_p + \Delta_q)u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u).$$

Notons que durant cette dernière décennie l'opérateur (p, q) -Laplacien a suscité l'attention de plusieurs auteurs, en raison de son importance et son apparition dans de nombreuses applications. Parmi les problèmes de modélisations dans ce contexte, on trouve des modèles issus de la physique des plasmas [62], des équations de réaction-diffusion [17, 10], de la biophysique [36], ainsi que des modèles liés aux particules élémentaires [8, 9, 10, 28].

Dans la littérature, de nombreux travaux ont été consacrés à l'analyse théorique de ce type d'équations et de systèmes d'équations. Au cours des dernières années une attention particulière a été portée aux problèmes elliptiques faisant intervenir le (p, q) -Laplacien, où la majorité des cas possibles ont été étudiés. Parmi ceux-ci, on trouve notamment des problèmes de valeurs propres et des problèmes à exposant critique comme dans [47], où l'auteur a mis en évidence l'influence du coefficient $f(x)$ sur le nombre des solutions positives du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = f(x)|u|^{p^*-2}u + \lambda g(x)|u|^{r-2}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec λ positive assez petit.

Le résultat relatif à l'existence et à la non-existence de solutions positives a été examiné par S. Motreanu et N. Tanaka [54], ils ont démontré que si μ est positive, alors il existe un intervalle de valeurs propres associé au problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu\Delta_q u = \lambda(m_p(x)|u|^{p-2}u + \mu m_q(x)|u|^{q-2}u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour le cas singulier on peut voir [66] où l'existence d'un intervalle de valeurs propres a été démontré par l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Concernant le cas de valeur propre généralisé on peut consulter [54] particulièrement l'auteur a construit une courbe qui sépare entre les intervalles d'existence et non existence des solutions positives du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \alpha|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Concernant le spectre du (p, q) -Laplacien, de nombreuses études ont été menées par divers chercheurs, lesquels ont conjointement contribué à établir la structure et la forme générale de ce spectre. Néanmoins, à notre connaissance, le spectre de Fučík associé au (p, q) -Laplacien n'a pas encore été abordé dans la littérature.

Dans cette thèse, notre objectif principal est d'initier une étude préliminaire

du spectre de Fučík associé au (p, q) -Laplacien. Il s'agit d'une tâche particulièrement délicate, en raison de la nouveauté du sujet et du manque de références bibliographiques ou de travaux antérieurs sur lesquels s'appuyer. Afin de surmonter ces difficultés, nous débutons par une analyse détaillée d'un problème elliptique non linéaire faisant intervenir l'opérateur (p, q) -Laplacien.

Le problème considéré s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(\alpha P(x)|u|^{p-2}u + \beta Q(x)|u|^{q-2}u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où, $1 < q \leq p < +\infty$, $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions poids $P(x), Q(x) \in L^\infty(\Omega)$ et $M_{\alpha, \beta}$ est une contrainte tel que

$$M_{\alpha, \beta}(u) = \{u \in W_0^{1, p}(\Omega) : \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x)|u|^p + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x)|u|^q = 1\}.$$

Nous utiliserons ensuite les résultats acquis dans l'étude du spectre de Fučík. Nous soulignons que les fonctionnelles et la contrainte introduites dans ce travail ont été spécialement conçues pour le présent sujet, et n'ont, à notre connaissance, jamais été définies ni utilisées auparavant.

Dans ce qui suit, nous exposons explicitement et en détails l'ensemble des résultats obtenus, en suivant l'organisation du manuscrit présentée ci-dessous. Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires essentielles à la bonne compréhension du reste de la thèse.

Le deuxième chapitre présente un aperçu historique du spectre de Fučík pour les opérateurs elliptiques.

Le troisième chapitre est dédié aux méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles utilisées dans ce travail.

Enfin, les quatrième et cinquième chapitres regroupent l'ensemble des résultats obtenus au cours de cette étude.

Apport de la Thèse.

Avant de présenter en détail les résultats que nous avons trouvé durant notre travail, nous souhaitons donner un banal aperçu pour chaque chapitre. Le chapitre 1, chapitre 2 et chapitre 3 sont consacrés aux différentes définitions et rappels indispensables à l'interprétation et à la compréhension de ce présent manuscrit. Nous allons donc exposer principalement les résultats du chapitre 4 et chapitre 5.

Résultats essentiels du chapitre 4.

Au coeur de ce chapitre, nous allons nous intéresser au problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(\alpha P(x)|u|^{p-2}u + \beta Q(x)|u|^{q-2}u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ est l'opérateur p-Laplacien, $1 < q \leq p < +\infty$. Les paramètres $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et les fonctions poids $P(x), Q(x) \in L^\infty(\Omega)$. Nous posons les hypothèses suivantes :

$$\text{H1 } 1 < q \leq p < +\infty,$$

$$\text{H2 } P(x), Q(x) \in L^\infty(\Omega),$$

$$\text{H3 } \int_{\Omega} P(x)|u|^p dx \leq C_1 \|P\|_{\infty} \|u\|_{1,p}^p,$$

$$H4 \int_{\Omega} Q(x)|u|^q dx \leq C_2 \|Q\|_{\infty} \|u\|_{1,p}^p.$$

Existences des valeurs propres. Nous visons à établir l'existence de solutions faibles de la fonctionnelle d'énergie

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx$$

dans la variété

$$M_{\alpha,\beta} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x)|u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x)|u|^q dx = 1 \right\}.$$

Le premier résultat de ce chapitre porte sur la contrainte. $M_{\alpha,\beta}$.

Proposition 0.1 . *Sous les hypothèses H1-H4 alors, nous avons que $M_{\alpha,\beta}$ est non vide .*

Le second résultat concerne la régularité des fonctionnelles I et $G_{\alpha,\beta}$ avec

$$G_{\alpha,\beta}(u) = \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x)|u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x)|u|^q dx.$$

Lemme 0.1 . *Sous les hypothèses H1-H4 alors, nous avons*

(1) *La fonctionnelle I est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et sa différentielle est donnée par :*

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(2) *$G_{\alpha,\beta} \in C_{loc}^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ et sa différentielle est donnée par :*

$$\langle G'_{\alpha,\beta}(u), v \rangle = \alpha \int_{\Omega} P(x)|u|^{p-2} uv dx + \beta \int_{\Omega} Q(x)|u|^{q-2} uv dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(3) *I et $G_{\alpha,\beta}$ sont paires et I n'est pas constante .*

Le résultat qui suit, annonce que l'ensemble B_k est non vide.

Lemme 0.2 . Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $B_k \neq \Phi$ en particulier si X_k est un sous-espace de dimension k de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $\gamma(M_{\alpha,\beta} \cap X_k) = k$, où γ est le genre que nous définirons plus tard.

Pour pouvoir appliquer le théorème de Ljusternick-Schnirelmann, il est capital de garantir que la fonctionnelle I vérifie la condition de Palais-Smale.

Lemme 0.3 . Sous les hypothèses $H1-H4$ alors, la fonctionnelle I vérifie La condition de Palais-Smale sur $M_{\alpha,\beta}$.

Afin de conclure ce chapitre, nous démontrons l'existence d'une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (1).

Théorème 0.1 . Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, nous posons

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} I(u)$$

alors, pour tout $k \geq 1$, il existe $u_k \in M_{\alpha,\beta}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que (u_k, λ_k) est une solution du problème (1).

.

Résultats essentiels du chapitre 5.

Au coeur de ce chapitre nous étudierons le problème de Fučík suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda.P(x)(u^+)^{p-1} - \mu.Q(x)(u^-)^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

où, Ω est un domaine borné assez régulier de \mathbb{R}^N , $u = u^+ - u_-$, $u^\pm = \max\{0, u^\pm\}$ est la solution recherchée du problème. Nous supposons que $1 < q \leq p \leq N$.

Nous cherchons à construire le spectre de Fučík de l'opérateur (p, q) -Laplacien qui est déterminé comme étant l'ensemble des couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ de tel que le problème (2) possède une solution non triviale dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, nous le notons par $\Sigma_{p,q}$.

Afin de pouvoir atteindre notre but, nous avons besoin de définir les deux fonctionnelles suivantes.

$$I_{s,s_0,t,t_0}, G_{\alpha,\beta} : W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$$

tel que :

$$I_{s,s_0,t,t_0} = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx - \frac{s}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^+|^p dx + \frac{s_0}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^-|^p dx \\ - \frac{t}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^q dx + \frac{t_0}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^q dx$$

et

$$G_{\alpha,\beta}(u) = \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx$$

où, $s \leq s_0, t \leq t_0$ avec s_0 et t_0 deux valeurs positives.

Posons aussi la contrainte $M_{\alpha,\beta}$ défini dans la section précédente par :

$$M_{\alpha,\beta} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx = 1 \right\}$$

La régularité de la fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} est le premier résultat que nous avons obtenu dans ce chapitre.

Lemme 0.4 . *La fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx - s \int_{\Omega} P(x) |u^+|^{p-1} v dx + s_0 \int_{\Omega} P(x) |u^-|^{p-1} v dx \\ - t \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^{q-1} v dx + t_0 \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^{q-1} v dx$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous allons définir la fonctionnelle $\bar{I}_{s,s_0,t,t_0} = I_{s,s_0,t,t_0} |_{M_{\alpha,\beta}}$.

Dans le but d'être capable d'employer le théorème de Ljusternick-Schnirelmann ainsi que le théorème du Col et démontrer l'existence des solutions du problème (2), nous devons d'abord prouver que la condition de Palais-Smale est vérifiée par la fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} sur $M_{\alpha,\beta}$.

Lemme 0.5 . *La fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} vérifie la condition de Palais-Smale sur $M_{\alpha,\beta}$.*

Nous posons maintenant

$$I_{0,0,0,0}(u) = I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx.$$

En combinant les résultats du chapitre 4 et le théorème de Ljusternick-Schnirelmann nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 0.6 . *I possède une infinité de points critiques sur $M_{\alpha,\beta}$. Et*

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} I(u)$$

est une suite infinie de valeurs critiques de I , de plus $c_k \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$.

A présent, nous pouvons vérifier que la fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} satisfait la géométrie du Col avec contrainte.

Lemme 0.7 . *$\forall \epsilon > 0$ assez petit, $\exists u_0, u_1 \in M_{\alpha,\beta}$ tel que : $\|u_1 - u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} > \epsilon$ et que*

$$\inf \left\{ \bar{I}_{s,s_0,t,t_0}(u) : u \in M_{\alpha,\beta} \text{ et } \|u - u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \epsilon \right\} > \max \left\{ \bar{I}_{s,s_0,t,t_0}(u_0), \bar{I}_{s,s_0,t,t_0}(u_1) \right\}.$$

En regroupant toutes ces informations, nous arrivons au résultat principale de ce chapitre.

Théorème 0.2 . *Pour $s > 0, t > 0$,*

(i)

$$c_k(s, t) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} I_{s,s_0,t,t_0}$$

est une suite de valeurs critiques de I_{s,s_0,t,t_0} , où

$$\Gamma = \{ \gamma \in C([-1, 1], M_{\alpha,\beta}) : \gamma(-1) = -u_k^1, \gamma(1) = u_k^1 \}.$$

Où, u_k est le point critique associé a la valeur critique c_k défini précédemment.

(ii) Le point $(s + c_k(s, t), t + c_k(s, t)) \in \Sigma_{p,q}$.

A la fin, nous terminerons par définir une famille de courbes et donner ses propriétés.

Nous définissons la famille de courbes suivantes

$$C_n := \{(s + c_k(s, t), t + c_k(s, t)), (t + c_k(s, t), s + c_k(s, t))\},$$

Le résultat de la régularité de la famille de courbes est donné dans le lemme qui suit.

Lemme 0.8 . *La famille de courbes*

$$(s, t) \mapsto (s + c_n(s, t), t + c_n(s, t))$$

est lipchitzienne et continue dans le sens où, $s + c_n(s, t) < s' + c_n(s', t)$, $t + c_n(s, t) < t' + c_n(s, t')$ et $c_n(s, t) > c_n(s', t')$.

Le second résultat concerne la monotonie de la famille de courbes.

Lemme 0.9 . *la famille de courbes*

$$(s, t) \mapsto (s + c_n(s, t), t + c_n(s, t))$$

est décroissante dans le sens où, $s + c_n(s, t) < s' + c_n(s', t)$, $t + c_n(s, t) < t' + c_n(s, t')$ et $c_n(s, t) > c_n(s', t')$.

Chapitre 1

Notions préliminaires.

Au coeur de ce chapitre nous fournirons certaines définitions utiles à la lecture de cette thèse. Ces dernières sont tirées de plusieurs ouvrages spécialisés dans l'analyse fonctionnelle linéaire et non linéaire ou encore dans l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Nous commençons ce chapitre par les propriétés de l'opérateur (p, q) -Laplacien.

1.1 Propriétés de base de l'opérateur (p, q) -Laplacien.

Soient $1 < q \leq p < N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ et soit $\mu \in \mathbb{R}_0^+$. Notons par p' l'exposant dual de p ,

$$p' := p/(p-1),$$

et p^* l'exposant critique de p ,

$$p^* := \frac{Np}{N-p}, N \in \mathbb{N}.$$

Notons par $A_{p,q}^\mu$ la différentielle de classe $C^1(\Omega)$ de la fonctionnelle

$$u \mapsto \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{\mu}{q} \|u\|_q^q, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

nous avons donc

$$\langle A_{p,q}^\mu(u), v \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + \mu |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v) dx, \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Nous remarquons que si nous posons $\mu = 0$ nous obtenons le p -Laplacien et si $\mu = 1$ nous obtenons le (p, q) -Laplacien .

Homogénéité :

Nous avons la définition suivante.

Définition 1.1 : Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un opérateur non linéaire. Nous disons que T est un opérateur homogène de degré d si pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons alors, $T(\lambda x) = \lambda^d T(x)$ où, $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'opérateur $A_{p,q}^\mu$ n'est pas homogène dans le cas où $p \neq q$, ce qui engendre un certain nombre d'obstacles notamment dans l'utilisation de la théorie des points fixes. Cependant nous pouvons y remédier grâce à un raisonnement analogue. En effet, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution de l'équation quasi-linéaire telle que

$$(-\Delta_{p,q})u = g(\cdot, u), \text{ où } g \in W^{-1,p'}(\Omega),$$

alors pour $k \in \mathbb{R}$, u est une solution de l'équation

$$(-\Delta_{p,q})(ku) = k^{p-1}\Delta_p(u) + k^{q-1}\Delta_q(u) = k^{p-1}(\Delta_{p,q}^{kq-p})(u).$$

Si nous posons $\mu := k^{q-p}$, nous trouvons alors que $v := \mu^{1/(q-p)}u$ est une solution de l'équation

$$(-\Delta)_{p,q}(v) = \mu^{\frac{p-1}{q-p}}g(\cdot, u) = g_\mu(\cdot, v),$$

avec

$$g_\mu(x, t) := \mu^{\frac{p-1}{q-p}}g(x, \mu^{\frac{1}{q-p}}t).$$

Régularité du (p, q) -Laplacien :

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de l'équation

$$(-\Delta_{p,q})(u) = g(\cdot, u), \tag{1.1}$$

où, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui vérifie que

$$|g(x, t)| \leq c(1 + |t|^{p^*-1}). \tag{1.2}$$

Nous définissons l'ensemble

$$C_0^1(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

1.1. Propriétés de base de l'opérateur (p, q) -Laplacien.

avec sa partie positive donnée par

$$C_+ = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}), u(x) \geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}\}.$$

Si il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tel que

$$tg(x, t) \geq -Ct^q \text{ dans } \Omega[-\delta, \delta],$$

alors sous la condition (1.2), il existe une solution non triviale et non négative de l'équation (1.1) dans C_+ .

Spectre du (p, q) -Laplacien :

Le spectre pour les valeurs propres du $(\Delta_{p,q})$ dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ consiste à trouver tout les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'équation

$$(-\Delta_{p,q})(u) = \alpha|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u,$$

possède une solution non triviale $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Les résultats qui ont été obtenus sur le spectre du (p, q) – Laplacien sont donnés dans le théorème suivant.

Théorème 1.1 . *Supposons que $1 < q < p < N$, $N \in \mathbb{N}$ alors, nous avons*

$$\sigma_{p,q} \subseteq \{\lambda_1(p), \lambda_1(q)\} \cup \{(\alpha, \beta) : \alpha > \lambda_1(p)\} \cup \{(\alpha, \beta) : \beta > \lambda_1(q)\},$$

où, $\lambda_1(p)$ et $\lambda_1(q)$ sont respectivement les premières valeurs propres du (Δ_p) et (Δ_q) définies comme suite :

$$\lambda_1(p) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_p^p}{|u|_p^p}, \lambda_1(q) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_q^q}{|u|_q^q}.$$

De plus, si les fonctions propres $u_1(p)$ et $u_1(q)$ associées aux valeurs propres $\lambda_1(p)$ et $\lambda_1(q)$ sont linéairement indépendantes alors, il existe une fonction continue non décroissante $\lambda^* : \mathbb{R} \rightarrow (\lambda_1(q), +\infty[$ tel que $\gamma(t) = (\lambda^*(t) + t, \lambda^*(t))$, alors, nous obtenons

$$\sigma_{p,q}^+ \setminus \gamma(\mathbb{R}) = \{(\alpha, \beta) : \lambda_1(p) < \alpha < \lambda^*(\alpha - \beta)\} \cup \{(\alpha, \beta) : \lambda_1(q) < \beta < \lambda^*(\alpha - \beta)\}$$

de plus $\lambda^*(t) = \lambda(t)$, pour t assez grand.

1.1. Propriétés de base de l'opérateur (p, q) -Laplacien.

1.2 Définitions Essentielles.

Nous allons commencer par donner la définition d'une dérivée directionnelle .

Définition 1.2 [I6] : Soit Y un espace de Banach et E un sous-ensemble de Y , Posons $H : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Considérons un point $u \in E$ et un vecteur $z \in Y$ de telle manière que pour $T > 0$ suffisamment petits, nous ayant $u + Tz \in E$. Nous disons alors que la fonction H possède au point u une dérivée directionnelle dans la direction z si la limite suivante existe :

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{H(u + Tz) - H(u)}{T},$$

nous l'écrivons $H'(u)$.

Définition 1.3 [I6] : Soit Y un espace de Banach et E un sous-ensemble de Y , posons $H : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Nous prenons un point $u \in E$, s'il y a un point $L \in Y'$ de telle sorte que pour $T > 0$ assez petits, $H(u + Tz)$ existe dans chaque direction z . Nous disons alors que H est dérivable au sens de Gateaux, ou encore G-Différentiable en u s' il existe une dérivée directionnelle $H'_z(u)$ donné par :

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{H(u + Tz) - H(u)}{T} = \langle L, z \rangle,$$

nous l'écrivons $H'(u) := L$.

Définition 1.4 [I6] : Soit E un sous ensemble ouvert d'un espace de Banach Y . Notons que $H : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. S'il existe un $L \in Y'$ tel que

$$\forall v \in E, H(v) - H(u) = \langle L, v - u \rangle + o\langle v - u, v - u \rangle.$$

Nous disons alors que H est différentiable ou dérivable au sens de Fréchet au point u .

Nous notons que L est unique dans le cas où H est différentiable et nous l'écrivons $H'(u) := L$.

Notons que $C^1(E, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions différentiables de $E \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 1.1 .

- 1- La continuité de la fonction H est nécessaire pour que celle-ci soit différentiable au sens de Fréchet.
- 2- Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la notion de G-dérivée, car nous pouvons examiner l'application $T \rightarrow H(u + T\omega)$ définie sur un intervalle $[0, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$ et ω fixé dans Y . Afin de ne pas alourdir les développements à venir, nous ne ferons pas de distinction entre la G-dérivée et la dérivée au sens de Fréchet.

Définition 1.5 (Point Critique) [58] : Soient Y un espace de Banach, E un sous-ensemble ouvert de Y et $H \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonction. Nous disons qu'un point $u \in E$ est un point critique de H , dans l'éventualité où $H'(u) = 0$. À l'inverse, u est désigné comme un point régulier de H dans l'hypothèse où u n'est pas un point critique.

De plus, s'il y a $u \in E$ de telle sorte que $H(u) = c$ et $H'(u) = 0$ alors, la valeur $c \in \mathbb{R}$ est définie comme étant une valeur critique de H . Dans l'éventualité où c ne satisfait pas cette condition, nous l'appellons valeur régulière de H .

Définition 1.6 (Multiplicateur de Lagrange) [58] : Soit Y un espace de Banach, $H \in C^1(Y, \mathbb{R})$ une fonction et M un ensemble de contrainte défini par

$$M := \{v \in Y; H(v) = 0\}.$$

Nous supposons que pour tout $u \in M$ vérifiant la condition $H'(u) \neq 0$, alors pour $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ (ou de classe C^1 dans un voisinage de M où bien C^1 sur M). Nous disons qu'un réel $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J sur M s'il existe un point $u \in M$ et une valeur réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = \lambda H'(u)$. Le point u est alors un point critique de J sur M et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la valeur critique c (où au point critique u).

Définition 1.7 (Fonction de Carathéodory) [58] : Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et h une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . Nous disons que h est une fonction de Carathéodory, si les conditions suivantes sont satisfaites :

1.2. Définitions Essentielles.

- 1) L'application $r \rightarrow h(x, r)$ est continue p.p $x \in \Omega$,
- 2) L'application $r \rightarrow h(x, r)$ est mesurable pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Définition 1.8 (Valeur Propre) [58] : Soit Y un espace de Banach. Soient Q et R deux opérateurs non linéaires définis sur Y .

Nous disons qu'un réel λ est une valeur propre de l'opérateur Q relativement à l'opérateur R s'il existe un élément $u \in Y$, avec $u \neq 0$ tel que :

$$Qu = \lambda Ru.$$

Définition 1.9 (Genre) [58] : Soit Y un espace de Banach.

Nous désignons par $S(Y)$ l'ensemble des parties fermées, symétriques et ne contenant pas l'origine de Y .

Cet ensemble est défini plus précisément par :

$$S(Y) := \{D \subset Y; D \text{ est fermée, non vide, } 0 \notin D, -D = D\}.$$

Si $D \in S(Y)$, nous appelons genre de D le nombre noté par $\gamma(D)$, défini comme suit

$$\gamma(D) := \inf\{n \geq 1 \text{ il existe une fonction } \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ impaire et continue } \}.$$

Par convention, nous posons $\gamma(\emptyset) = 0$.

Dans l'éventualité où il n'ya aucun entier $n \geq 1$ ni aucune fonction φ impaire et continue de D dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nous posons $\gamma(D) = +\infty$.

Nous pouvons de manière analogue, définir $\gamma(D)$ par

$$\gamma(D) := \inf\{n \geq 1 \text{ il existe } \varphi : A \rightarrow S^{n-1} \text{ continue et impaire}\}.$$

Où, S^{n-1} est la sphère unitée de dimension $n - 1$.

Il est essentiel de noter que le genre ne peut être défini que pour des ensembles fermés.

Remarque 1.2 .

- 1 Le concept du genre nous permet de différencier deux ensembles fermés symétriques, notés D et Q ne contenant pas l'origine, en examinant l'existence d'une fonction continue et impaire de D vers Q .

1.2. Définitions Essentielles.

2 Le concept de genre est analogue à celui de l'indice pour les ensembles invariants sous l'action du groupe \mathbb{Z}_2 . Par conséquent, il joue un rôle essentiel dans la résolution des problèmes variationnels présentant une invariance par rapport à cette action.

Où \mathbb{Z}_2 est l'ensemble $\{0, 1\}$ muni de l'addition modulo 2 définie par :

- (a) $0 + 0 = 0$,
- (b) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$,
- (c) $1 + 1 = 0$.

Nous allons maintenant énoncer un théorème présentant les propriétés fondamentales du Genre.

Théorème 1.2 (*Propriétés du Genre.*). Soit Y un espace de Banach et $D, Q \in S(Y)$.

1. S'il existe $h : D \rightarrow Q$ continue et impaire, alors, $\gamma(D) \leq \gamma(Q)$,
2. Si $D \subset Q$ alors, $\gamma(D) \leq \gamma(Q)$,
3. S'il existe un homéomorphisme impair $h : D \rightarrow Q$ alors, nous avons $\gamma(D) = \gamma(Q)$,
4. γ est sous-additif : $\gamma(D \cup Q) \leq \gamma(D) + \gamma(Q)$,
5. Dans le cas où D est compact, nous avons $\gamma(D) < \infty$,
6. Si D est compact, il en découle que D possède un voisinage fermé qui possède le même genre que D . Plus précisément, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$D_\epsilon := \{x \in Y; \text{dist}(x, D) \leq \epsilon\}.$$

7. Si $\gamma(Q) < \infty$, alors, $\gamma(\overline{D \setminus Q}) = \gamma(\overline{D \cap Q^c}) \geq \gamma(D) - \gamma(Q)$.

Définition 1.10 (Convergence forte) [16] : Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et soit $h_n, h \in L^p(\Omega)$. Nous disons que h_n converge fortement vers h dans $L^p(\Omega)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Nous écrirons $h_n \rightarrow h_{L^p(\Omega)}$.

1.2. Définitions Essentielles.

Définition 1.11 (Convergence faible) [16] : Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et soit $h_n, h \in L^p(\Omega)$. Nous disons que h_n converge faiblement vers h dans $L^p(\Omega)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (h_n(x) - h(x))\chi(x)dx = 0, \forall \chi \in L^{p'}(\Omega).$$

Nous écrirons $h_n \rightharpoonup h_{L^p(\Omega)}$.

La condition de Palais-Smale [58].

La compacité des suites minimisantes constitue un outil fondamental dans le cadre du calcul des variations. Lorsqu' il s'agit des suites pour lesquelles la fonctionnelle converge vers une éventuelle valeur critique, et non seulement vers la borne inférieure, la condition de Palais-Smale joue un rôle analogue. Ainsi, cette condition doit être vérifiée pour toute fonctionnelle indépendamment de l'existence effective de valeurs critiques. Elle représente néanmoins un élément essentiel dans l'établissement de résultats d'existence de solutions dans de nombreuses situations variées.

Définition 1.12 (Condition de Palais-Smale) : Soit Y un espace de Banach et $I : Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 . Nous disons que I satisfait la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$ si, pour toute suite (u_n) de Y telle que $I(u_n) \rightarrow c$ dans \mathbb{R} et $I'(u_n) \rightarrow 0$ dans Y' , il existe une sous-suite de u_n qui converge dans Y .

Définition 1.13 (Condition de Palais-Smale avec contrainte) : Soit Y un espace de Banach, considérons la contrainte

$$S = \{v \in Y : F(v) = 0\},$$

où, $F \in C^1(Y, \mathbb{R})$ et $\forall v \in S, F'(v) \neq 0$.

Soit $I \in C^1(Y, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. Nous disons que $I|_S$ satisfait la condition de Palais-Smale au niveau c (ou encore que I satisfait la condition de Palais-Smale sur S si, pour toute suite $(u_n, b_n) \in S \times \mathbb{R}$ telle que : $I(u_n) \rightarrow c$ dans \mathbb{R} et $I'(u_n) - b_n F'(u_n) \rightarrow 0$ dans Y' il existe une sous suite $(u_{n_k}, b_{n_k})_k$ qui converge vers un couple (u, b) dans $S \times \mathbb{R}$.

1.2. Définitions Essentielles.

Remarque 1.3 . La condition de Palais-Smale n'assure pas l'existence d'une valeur critique, elle ne garantit que la compacité relative des suites qui la satisfont. Son utilisation efficace requiert donc de démontrer, au préalable et par d'autres moyens, l'existence d'une telle suite.

1.3 Espace de Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$.

Au coeur de cette section, nous introduisons les espaces de Sobolev, qui constituent le cadre naturel pour l'étude des fonctions permettant de formuler les équations différentielles aux dérivées partielles sous une forme variationnelle. D'un point de vue physique, ces espaces peuvent être vus comme des espaces de fonctions possédant une énergie finie.

Pour les démonstrations détaillées des résultats présentés, le lecteur pourra se référer à la référence [16].

Espace de Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq q \leq \infty$. Nous avons alors, la définition suivante.

Définition 1.14 . Soit q un réel et $k > 1$ un nombre entier tel que, $1 \leq q \leq \infty$. Nous définissons l'espace $W^{k,q}(\Omega)$ par :

$$W^{k,q}(\Omega) = \left\{ v \in W^{k-1,q}(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in W^{k-1,q}(\Omega) \forall i = 1, 2, 3, \dots, N \right\}.$$

Nous munissons l'espace $W^{k,q}(\Omega)$ de la norme correspondante

$$\|v\|_{W^{k,q}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq \vartheta \leq k} \|D^\vartheta v\|_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposition 1.1 . Pour $1 \leq q \leq \infty$. Les espaces $W^{k,q}(\Omega)$ sont de Banach. En outre, pour $1 < q < \infty$, $W^{k,q}(\Omega)$ est réflexif et séparable .

Si Ω est borné, alors l'espace $W_0^{k,q}(\Omega)$ représente la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{k,q}(\Omega)$. La semi-norme

$$|v|_{W^{k,q}(\Omega)} = \left(\sum_{\vartheta=k} \|D^\vartheta v\|_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{1}{q}},$$

1.3. Espace de Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$.

est équivalente à la norme induite dans $W_0^{k,q}(\Omega)$.

Espace $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Pour $1 \leq q \leq \infty$, $W_0^{1,q}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$.

Proposition 1.2 . Pour $1 \leq q \leq \infty$. L'espace $W_0^{1,q}(\Omega)$ muni de la norme induite est un espace de Banach séparable et réflexif.

Remarque 1.4 . Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $1 \leq q \leq \infty$, donc $W_0^{1,q}(\Omega)$ peut être défini comme étant l'ensemble des fonctions $v \in W^{1,q}(\Omega)$ nulles presque partout sur le bord de Ω , nous le définissons précisément par :

$$W_0^{1,q}(\Omega) = \{v \in W^{1,q}(\Omega) | v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Dans le cas où, $q = \infty$, alors l'égalité précédente n'est pas valide . Cependant, la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ est équivalente à $C^1(\overline{\Omega})$. Où l'ensemble $W^{1,\infty}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega) \forall i = 1, 2, 3, \dots, N\}.$$

Chapitre 2

Spectre de Fučik des opérateurs elliptiques.

Au coeur de ce chapitre, nous nous intéressons au spectre de Fučik pour les opérateurs elliptiques . Nous allons vous présenter une synthèse sur les résultats principaux concernant le spectre de Fučik du Laplacien et du p -Laplacien .

La notion du spectre de Fučik a été introduite pour la première fois dans les années 70 par Dancer [26] et Fučik [41] dans le cas linéaire où $p = 2$ principalement motivés par les travaux de Ambrosetti et Brezis dans [2] et de Ambrosetti et Prodi dans [3] sur les problèmes asymétriques.

Soit $N \geq 1$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N et $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, le Laplacien de u défini pour tout $u \in C^2(\Omega)$. Le spectre de Fučik de l'opérateur $-\Delta$ avec la condition aux limites de Dirichlet est défini comme étant l'ensemble des paires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \alpha u^+ - \beta u^- & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

possède une solution non triviale. Où, $u^+ = \max\{0, u\}$ et $u^- = (-u)^+$. Il est noté par Σ .

Il est clair que Σ est une généralisation du spectre du Laplacien.

Le spectre de Fučik peut aussi s'étendre aux cas non linéaires, à titre d'exemple

nous avons le spectre de Fučik de l'opérateur p -Laplacien Σ_p qui est défini comme l'ensemble des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \alpha v_+^{p-1} - \beta v_-^{p-1} & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

possède une solution non triviale. Où $v_{\pm} = \max\{v_{\pm}, 0\}$.

De nombreux travaux ont été dévoués à l'étude des ensembles Σ et Σ_2 . Pour plus de détails, vous pouvez consulter [41, 24, 25]. Dans les deux sections qui suivent nous présenterons les principaux résultats les concernant.

2.1 Spectre de Fučik du Laplacien.

Soit $H_0^1(\Omega)$ l'espace de sobolev muni de la norme $\|u\| = (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. Nous rappelons que le spectre de Fučik du Laplacien dans $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le problème (2.1) possède une solution non triviale $u \in H_0^1(\Omega)$.

La formulation variationnelle du problème (2.1) est donnée par

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} (\alpha u^+ - \beta u^-) v dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.3)$$

où u est la fonction-propre associée au couple (α, β) .

Soit $\{\lambda_k\}$ une suite de valeurs-propres du Laplacien sur $H_0^1(\Omega)$. Alors le point (λ_k, λ_k) appartient à Σ . De plus en utilisant la fonction propre associée a la valeur propre λ_1 et la caractérisation variationnelle de la première valeur propre, Custa, De Figueiredo et Gossez, [24] ont démontrés que les deux lignes $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ appartiennent à Σ , et que

$$\Sigma \setminus (\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\lambda_1\}) \subset \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > \lambda_1, \beta > \lambda_1\},$$

où, les deux lignes $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ constituent la partie triviale de Σ .

L'existence des courbes constituant la partie non triviale de Σ a été étudié par plusieurs auteurs, dont Kavian [49] qui a démontré qu'il existe au moins une paire de courbes qui émanent de chaque point (λ_k, λ_k) de Σ . Dans [24], Custa a donné la structure de Σ dans plusieurs domaines différents.

2.1. Spectre de Fučik du Laplacien.

2.1.1 Le spectre de Fučik en dimension 1.

Considérons le problème (2.1) avec $N = 1$ et $\Omega = (0, 1)$. Alors le problème (2.1) devient

$$\begin{cases} -u''(t) = \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) & \text{dans } (0, 1) \\ u = (0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

La résolution du problème (2.4) dans le cas où $\alpha = \beta$ montre que les valeurs propres du Laplacien dans $H_0^1(\Omega)$ donnent une suite $\lambda_k = k^2\pi^2, k \in \mathbb{N}$. De plus, les fonctions-propres associées à λ_k sont les multiples de la fonction $v_k(t) = (k\pi t)$.

En supposant que u est une fonction propre généralisée du couple (α, β) et que u change de signe, et en faisant quelques estimations, Custa a montré dans [24] que la partie non triviale de $\Sigma(0, 1)$ est constituée d'une suite de courbes.

Si k est pair, alors nous avons une seule suite de courbes qui passe par le point (λ_k, λ_k) donnée par

$$C_k = \{(\alpha, \beta) : k\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + k\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = 2\}.$$

Dans le cas où k est impair, nous avons deux suites de courbes qui passent par le point (λ_k, λ_k) , elles sont données par

$$C_k^1 = \{(\alpha, \beta) : (k+1)\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + (k-1)\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = 2\},$$

$$C_k^2 = \{(\alpha, \beta) : (k+1)\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + (k-1)\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = 2\}.$$

2.1.2 Le spectre de Fučik dans un rectangle.

Considérons maintenant le problème (2.1) avec Ω un rectangle dans \mathbb{R}^N , $\Omega = \prod_{i=1}^N [0, c_i], c_i \in \mathbb{R}_*^+$.

En employant la méthode de séparation des variables, nous pouvons voir que $\lambda_n = \sum_{i=1}^N \frac{\pi^2}{c_i^2} n_i^2, n = (n_1, \dots, n_N) \in (\mathbb{N})_*^N$, est une suite de valeurs propres de $-\Delta$ dans $H_0^1(\prod_{i=1}^N [0, c_i])$. Les fonctions propres associées à λ_n sont les multiples constants de la suite de fonctions suivante

$$\phi_n(x) = \prod_{i=1}^N \sin\left(\frac{n_i\pi}{c_i} x_i\right); x = (x_1, \dots, x_N).$$

2.1. Spectre de Fučik du Laplacien.

Par l'analyse de Fourier nous obtenons que l'ensemble des fonctions propres associées à λ_n forme l'orthogonale de $H_0^1(\Pi_{i=1}^N[0, c_i])$. Pour plus de détails nous pouvons consulter [27], où l'auteur a montré en utilisant la méthode de séparation des variables que

$$\left(\alpha + \sum_{j \neq i}^N \frac{\pi^2}{c_j^2}, \beta + \sum_{j \neq i}^N \frac{\pi^2}{c_j^2}\right) \in \Sigma(\Pi_{i=1}^N[0, c_i]).$$

2.1.3 Le spectre de Fučík dans le cas radial.

Soit $\Omega = B(0, 1)$ la boule unitaire de \mathbb{R}^N , et $u(x) = v(|x|) = v(r)$ la solution de (2.1) qui satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} v'' + \frac{N-1}{r}v' + \alpha v^+ - \beta v^- = 0 & \text{dans } (0, 1) \\ v(1) = 0, \limsup_{r \rightarrow 0} v(r) < \infty. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous notons par $\Sigma^r(B(0, 1))$ l'ensemble des paires (α, β) tel que le problème (2.5) possède une solution non triviale.

Dans [5], Arias et Campos ont complètement déterminer le spectre de Fučík de l'opérateur $-\Delta$, $N > 1$ en utilisant la technique de tir et le théorème de comparaison de Sturn. Nous allons brièvement rappeler leurs résultats.

Soit $v_a(r) = r^{1-\frac{N}{2}} J_v(\sqrt{ar})$, solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} v'' + \frac{N-1}{r}v' + av = 0 & \text{dans } (0, 1) \end{cases} \quad (2.6)$$

avec la condition au bord

$$\limsup_{r \rightarrow 0} v(r) < \infty, \quad (2.7)$$

où, a un réel positive. Pour $s > 0$, nous posons $v(\cdot, a, s)$ solution de (2.6) satisfaisant la condition initiale

$$v(s, a, s) = 0, v'(s, a, s) = 1. \quad (2.8)$$

Si $v(\cdot, a, s)$ est borné au voisinage de 0, alors $v(\cdot, a, s) = Cv_a(\cdot)$, $C > 0$.

Soit maintenant la variété suivante

$$\Phi_a(s) = \min\{t > s : v(t, a, s) = 0\}.$$

En prenant v solution de (2.5) et en supposant que $v(0^+) > 0$ avec $v'(0) \neq 0$, et que v s'écrase une fois dans $(0, 1)$, par exemple elle s'écrase en t_1 . Si de plus v vérifie (2.7) avec $a = \alpha$ sur $(0, t_1)$ et $a = \beta$ sur $(t_1, 1)$ alors, $v = C_1 v_\alpha$ sur $(0, t_1)$ et $v = C_2 v_\beta$ sur $(t_1, 1)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$. Puisque v s'écrase pour la première fois en $\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\alpha}}$, il en découle que $\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\alpha}} < 1$ et nous avons donc

$$\Phi_\beta\left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\alpha}}\right) = 1.$$

2.1. Spectre de Fučík du Laplacien.

Si v s'écrase deux fois dans $(0, 1)$ alors

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta \left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\alpha}} \right) = 1.$$

Par récurrence, nous continuons de la même manière.

Le cas où, $v(0^+) < 0$ est similaire au premier cas, à titre d'exemple si v s'écrase dans $(0, 1)$ alors,

$$\Phi_\alpha \left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\beta}} \right) = 1,$$

et si v s'écrase deux fois dans $(0, 1)$ alors,

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha \left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\beta}} \right) = 1.$$

Par récurrence, nous obtenons donc que $(\alpha, \beta) \in \Sigma^r(B(0, 1))$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{2n}^1(\alpha, \beta) = (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta)^n \left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\alpha}} \right) = 1 \quad \text{ou ,} \\ R_{2n+1}^1(\alpha, \beta) = \Phi_\beta \circ (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta)^n \left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\alpha}} \right) = 1 \quad \text{ou ,} \\ R_{2n}^2(\alpha, \beta) = (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha)^n \left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\beta}} \right) = 1 \quad \text{ou ,} \\ R_{2n+1}^2(\alpha, \beta) = \Phi_\alpha \circ (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha)^n \left(\frac{j(v, 1)}{\sqrt{\beta}} \right) = 1. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Notons que les lignes $\lambda_1 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \lambda_1$ sont respectivement R_0^1 et R_0^2 .

Dans [5], les auteurs ont démontrés que si $C_i^j = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : R_i^j(\alpha, \beta) = 1\}$, alors pour tout $i \geq 1$ et $j = 1, 2$, il existe un homéomorphisme strictement décroissant $c_i^j : (a_i^j, +\infty) \rightarrow (b_i^j, +\infty)$ tel que $C_i^j = \{(\alpha, C_i^j(\alpha)) : \alpha \in (a_i^j, +\infty)\}$. De plus $(j_{(v, i+1)}^2, j_{(v, i+1)}^2) \in C_i^j$, en outre, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{2n}^1(\alpha) \rightarrow j_{(v, n)}^2, \\ C_{2n}^1(\alpha) \rightarrow j_{(v, n+1)}^2, \\ C_{2n+1}^1(\alpha) \rightarrow j_{(v, n+1)}^2, \\ C_{2n+1}^1(\alpha) \rightarrow j_{(v, n+1)}^2. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

2.1. Spectre de Fučík du Laplacien.

Dans le cas où $N = 3$, le spectre de Fučik radial peut être facilement calculer en faisant le changement de variable $w(r) = rv(r)$, Le problème (2.5) devient alors,

$$\begin{cases} -w''(t) = \alpha w^+(t) - \beta w^-(t) & \text{dans } (0, 1) \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

c'est exactement le problème (2.4).

2.2 Spectre de Fučik de l'opérateur p -Laplacien.

Le spectre de Fučik du p -Laplacien est défini comme l'espace Σ_p des paires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le problème (2.2) possède une solution non triviale. Le spectre usuel correspondant à $\alpha = \beta$ dans (2.2).

En désignant par $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux premières valeurs propres de $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, il est clair que Σ_p contient les deux points (λ_1, λ_1) , (λ_2, λ_2) et les deux droites $\lambda_1 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \lambda_1$.

Dans [29], Drábek a étudié le cas quasi-linéaire ($p \neq 2$) avec $N = 1$, il a prouvé que Σ_p a la même forme générale que dans le cas linéaire unidimensionnel ($p = 2, N = 1$).

Dans le cas général où $1 < p < \infty$, $N \geq 1$, de nombreux travaux ont été fait, nous citons à titre d'exemple [24, 25, 55, 57]. Pour mieux vous éclairer sur le sujet, nous allons faire un petit rappelle des principaux résultats obtenus.

2.2.1 Initiation au spectre de Fučik du p -Laplacien.

Dans [25], Custa a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \alpha v_+^{p-1} - \beta v_-^{p-1} & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

Il a montré que quand $\frac{h(x,v)^{p-2}}{v}$, se situe asymptotiquement entre le point (λ_1, λ_1) et un point (α, β) de la première courbe non triviale de Σ_p , alors le problème suivant .

$$\begin{cases} -\Delta_p v = h(x, v) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.13)$$

possède une solution non triviale.

Construction de la courbe de Fučik.

Soient $s \geq 0$ et la fonctionnelle J_s définie sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ par,

$$J_s(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - s \int_{\Omega} v^{+p} dx.$$

2.2. Spectre de Fučik de l'opérateur p -Laplacien.

Soit \overline{J}_s la restriction de J_s sur la contrainte S donnée par,

$$S = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega); I(v) = \int_{\Omega} |v|^p = 1\}.$$

En recourant au multiplicateur de Lagrange, il est facile de vérifier que les points de Σ_p situés sur la parallèle à la diagonale passant par le point $(s, 0)$ sont précisément de la forme $(s + \overline{J}_s(v), \overline{J}_s(v))$, où v désigne un point critique de \overline{J}_s . Afin d'obtenir le premier point critique, la technique de minimisation est sollicitée. Soit φ_1 la fonction propre positive normalisée associée à λ_1 avec $\overline{J}_s(\varphi_1) = \lambda_1 - s$, alors \overline{J}_s est un minimum en φ_1 et $(\lambda_1, \lambda_1 - s)$ représente le point correspondant à Σ_p et qui appartient à la droite $\lambda_1 \times \mathbb{R}$.

Suite à sa, il a été prouvé que \overline{J}_s possède un minimum local strict qui n'est que $-\varphi_1$ avec $\overline{J}_s(-\varphi_1) = \lambda_1$. Le point correspondant à Σ_p est $(\lambda_1 + s, s)$, il appartient à la droite $\mathbb{R} \times \lambda_1$.

Pour pouvoir avoir un troisième point critique, le théorème du Col de la montagne est employé sur une variété de classe C^1 .

Nous aurons donc le résultat suivant

Théorème 2.1 . Soit $\Gamma = \{\gamma \in C([-1, 1], S) : \gamma(-1) = -\varphi_1, \gamma(1) = \varphi_1\}$.

Posons,

$$c(s) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{v \in \gamma[-1,1]} \overline{J}_s(v). \quad (2.14)$$

Alors, \overline{J}_s possède une valeur critique $c(s) > \lambda_1$. De plus le point $(s+c(s), c(s))$ appartient à Σ_p .

Pour les détails de la démonstration vous pouvez consulter [25].

Première courbe dans Σ_p .

Théorème 2.2 . Soit $s \geq 0$. Le point initial non triviale de Σ_p sur la parallèle à la diagonale et qui passe par le point $(s, 0)$ est donné par $(s + c(s), c(s))$. En particulier, quand $s = 0$, nous avons alors,

2.2. Spectre de Fučík de l'opérateur p -Laplacien.

$$\lambda_2 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{v \in \gamma[-1,1]} \int_{\Omega} |\nabla v|^p. \quad (2.15)$$

Les deux lemmes prochains ont été employé dans la preuve du théorème (2.2) que vous pouvez voir dans [25].

Lemme 2.1 *Les droites $\lambda_1 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \lambda_1$ sont isolées dans Σ_p .*

Lemme 2.2 *Soit l'ensemble Θ défini par*

$$\Theta = \{r \in \mathbb{R} \mid v \in S; \overline{J_s}(v) < r\}.$$

Par conséquent chaque composante connexe non vide de Θ comporte un point critique de $\overline{J_s}$.

Propriétés de la courbe.

Les propriétés de la courbe C ont été étudiés dans [25].

Concernant la continuité et la monotonie de la courbe C , les auteurs ont montrés que la courbe C est continue et strictement décroissante au sens où si $0 \leq s < s'$ alors, $s + c(s) < s' + c(s')$ et $c(s') > c(s)$.

Pour le comportement à l'infini de C , nous avons le résultats suivant :

Lemme 2.3 *Soit $p > N$, supposons qu'il existe un point de $\partial\Omega$ au voisinage de Ω régulier. Alors $c(s) \rightarrow \lambda_1$ lorsque $s \rightarrow +\infty$.*

. Dans [55], le problème suivant a été considéré

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(u_+^{p-1}) - b(u_-^{p-1}) & \text{dans } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta |u|^{p-2} u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

Les résultats trouvés sont similaires à ceux obtenu dans [25].

En 2017 Wenyoung, Geng et Chen [61], Ont construit le Spectre de Fučík du p -Laplacien avec poids en considérant le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)(u^+)^{p-1} - \mu b(x)(u^-)^{p-1} + g(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

2.2. Spectre de Fučík de l'opérateur p -Laplacien.

où, $a(x), b(x) \in L^r(\Omega)$, et $r > \frac{N}{P}$ si $1 < p \leq N$ et $r = 1$ si $p > N$. $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Caratheodory.

Ils ont trouvés que,

$$C_l^+ := \{(s + c_l^+(s, t, s_0), t + c_l^+(s, t, s_0)) : s_0 = c_l^+(s, t, s_0)\} \subset \Sigma_p(a, b). \quad (2.18)$$

respectivement,

$$C_l^- := \{(t + c_l^-(s, t, s_0), s + c_l^-(s, t, s_0)) : s_0 = c_l^-(s, t, s_0)\} \subset \Sigma_p(a, b). \quad (2.19)$$

Chapitre 3

Méthodes de résolution pour les EDP non linéaires .

Dans l'analyse fonctionnelle non linéaire, l'étude des équations aux dérivées partielles s'effectue par le biais de deux approches distinctes, La méthode variationnelle et la méthode topologique. Cette dernière est moins couramment employée que la méthode variationnelle, car la recherche des solutions sous forme de point critique s'avère plus simple.

Dans notre travail, nous utiliserons principalement les méthodes variationnelles.

Méthodes variationnelles.

La méthode variationnelle, ou encore technique des points critiques des équations aux dérivées partielles, repose sur le concept de solution faible relié à chaque problème étudié. La solution recherchée apparaît sous forme d'un point critique de la fonctionnelle lié au problème considéré.

Parmi les outils fondamentaux pour l'analyse de ce type de points critiques, nous trouvons une technique introduite en 1934 par Ljusternik et Schnirelman, connue sous le nom de technique de déformation. Cette méthode s'avère particulièrement efficace pour déterminer les points critiques des fonctionnelles qui ne possèdent pas de bornes inférieures.

Le lemme de déformation.

Il nous est nécessaire d'avoir un schéma nous permettant de construire des valeurs critiques qui ne se limitent pas seulement aux bornes inférieures. Pour ce faire, nous recourons aux notions qui suivent.

Soit V un espace de Banach et $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Pour $c \in \mathbb{R}$, nous posons

$$\{J \leq c\} = \{u \in V; J(u) \leq c\}.$$

Répectivement, nous définissons les ensembles $\{J < c\}$, $\{J \geq c\}$, $\{J > c\}$ ainsi que les ensembles de niveau $\{J = a\}$.

Pour certaines valeurs de $c \in \mathbb{R}$, la différence topologique entre les ensembles $\{J \leq c\}$ et $\{J \leq c + \epsilon\}$ est capitale dans l'existence des points critiques. Au moment où c croise une valeur critique, nous pouvons voir que quelque chose change dans la topologie initiale des ensembles $\{J \leq c\}$.

Lemme 3.1 (*Lemme de déformation*) [65] : Soit V un espace de Banach et $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 vérifiant la condition de Palais-Smale. Soit $c \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de J , alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$, il existe un homéomorphisme $\eta : V \rightarrow V$ satisfaisant

1. Pour tout $u \in \{J \leq c - \epsilon_0\} \cup \{J \geq c + \epsilon_0\}$, nous avons $\eta(u) = u$,
2. $\eta(\{J \leq c + \epsilon\}) \subset \{J \leq c - \epsilon\}$.

Pour voir la preuve du lemme de déformation vous pouvez consulter [65]

Principe du Min-Max.

Une caractérisation topologique des valeurs régulières exprimées en termes des valeurs prises par la fonctionnelle et non à l'aide de sa différentielle est possible grâce au lemme de déformation, celui ci est mis en oeuvre à travers le principe qui suit dit principe du Min-Max.

Pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $\epsilon_0 > 0$, nous introduisons l'ensemble d'homéomorphismes suivant.

$$D_c^{\epsilon_0} = [\eta \text{ homéomorphismes de } V \text{ satisfaisant la propriété 1 du lemme de déformation}]$$

Théorème 3.1 *Soit A un ensemble de partie non vide de V et*

$$c = \inf_{a \in A} \sup_{u \in a} J(u).$$

Supposons que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c où, $c \in \mathbb{R}$ et qu'il existe α tel que A soit stable sur $D_c^{\epsilon_0}$ pour tout $\alpha > \epsilon_0 \geq 0$, c'est à dire que si $a \in A$, alors $\eta(a) \in A$ pour tout $\eta \in D_c^{\epsilon_0}$. Alors c est une valeur critique de J .

Remarque 3.1 .

1. Si J vérifie la condition de Palais-Smale, alors $-J$ la vérifie aussi.
2. L'utilisation du principe du Min-Max dépend du choix de A . Nous prenons en général des classes d'ensembles qui partagent le même invariant topologique (catégorie, genre, classe d'homotopie, etc) susceptible d'être conservé par le flot η_t .

Théorèmes essentiels.

Les premiers exemples de construction de valeur critique par le principe du Min-Max sont les deux théorèmes connus de Ljusternick-Schnirelmann et du Col de la montagne. Ces deux derniers sont les mieux placés pour mettre en oeuvre la technique du Min-Max.

Théorème de Ljusternick-Schnirelmann [65].

Théorème 3.2 *Soient X un espace de Banach, $F \in C_{loc}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ et S définie par*

$$S = \{v \in X : F(v) = \alpha\}, \alpha \neq 0,$$

vérifiant, $\forall v \in S, F'(v) \neq 0$. Soit $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $J = E|_S$. supposons que F et J sont paires, que J n'est pas constante, satisfait la condition de Palais Smale sur S et que 0 n'appartient pas à S . Pour tout entier $k \geq 1$ nous posons :

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} J(u)$$

où

$$B_k = \{A \in S(X); A \subset S, \gamma(A) \geq k\}.$$

Alors,

1. Pour tout $k \geq 1$ tel que $B_k \neq \Phi$ et $c_k \in \mathbb{R}$, c_k est une valeur critique de J sur S . De plus, $c_k \leq c_{k+1}$, et si pour un entier $j \geq 1$ nous avons $B_{k+j} \neq \Phi$ et $c_k \leq c_{k+j} \in \mathbb{R}$, alors,

$$\gamma(k(c_k)) \geq j + 1,$$

où

$$k(c_k) = \{u \in S; J(u) = c_k, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } E'(u) = \lambda F'(u)\}.$$

2. Si pour tout $k \geq 1$ nous avons $B_k \neq \Phi$ et $c_k \in \mathbb{R}$ alors,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = +\infty.$$

Pour voir la démonstration du théorème de Ljusternick-Schnirelmann vous pouvez consulter [65].

Remarque 3.2 .

Nous pouvons définir les c_k par

$$c_k := \inf\{c \in \mathbb{R}; \gamma([J \leq c]) \geq k\}.$$

Ainsi, nous pouvons voir que les c_k sont des valeurs pour lesquelles il y a un changement qualitatif dans les ensembles $[J \leq c]$.

Théorème du Col de la montagne avec contrainte [44].

Théorème 3.3 . Soit E un espace de Banach et soient $g, f \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Supposons que 1 est une valeur régulière de g et que $M = \{u \in E : g(u) = 1\}$, $u_0, u_1 \in M$ et $\epsilon > 0$ tel que $\|u_1 - u_0\|_E > \epsilon$ et que

$$\inf \{f(u) : u \in M \text{ et } \|u - u_0\|_E = \epsilon\} > \max \{f(u_0), f(u_1)\}.$$

Supposons aussi que f satisfait la condition de Palais-Smale sur M et que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([-1, 1], M) : \gamma(-1) = u_0, \gamma(1) = u_1\}$$

est non vide. Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1, 1]} f(u).$$

est une valeur critique de $f|_M$.

Pour la démonstration vous pouvez consulter [\[44\]](#).

Chapitre 4

Valeur propre du (p, q) -Laplacien avec contrainte.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème faisant intervenir l'opérateur (p, q) -Laplacien avec contrainte et des poids positifs sous la condition aux limites de Dirichlet dans un domaine Ω borné de \mathbb{R} . Le problème étudié est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(\alpha P(x)|u|^{p-2}u + \beta Q(x)|u|^{q-2}u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où, Δ_r avec $r = \{p, q\}$ désigne l'opérateur r -Laplacien défini par $\Delta_r u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{r-2} \nabla u)$.

Les paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre et les fonctions poids $P(x), Q(x) \in L^\infty(\Omega)$, avec la mesure de Lebesgue $\{x \in \Omega; P(x), Q(x) > 0\}$. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ est un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et u est la solution faible recherchée dans l'espace des solutions $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous posons les hypothèses suivantes :

H1 $1 < q \leq p < +\infty$,

H2 $P(x), Q(x) \in L^\infty(\Omega)$,

H3 $\int_\Omega P(x)|u|^p dx \leq C_1 \|P\|_\infty \|u\|_{1,p}^p$,

H4 $\int_\Omega Q(x)|u|^q dx \leq C_2 \|Q\|_\infty \|u\|_{1,p}^p$.

Nous définissons maintenant la contrainte $M_{\alpha,\beta}$ par

$$M_{\alpha,\beta}(u) = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{\alpha}{p} \int_\Omega P(x)|u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_\Omega Q(x)|u|^q dx = 1 \right\}.$$

Le résultat qui assure que la contrainte $M_{\alpha,\beta}$ est non vide est donné dans la proposition suivante.

Proposition 4.1 . *Sous les hypothèses H1-H4 alors, nous avons que $M_{\alpha,\beta}$ est non vide .*

Preuve. Nous avons :

$$M_{\alpha,\beta} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{\alpha}{p} \int_\Omega P(x)|u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_\Omega Q(x)|u|^q dx = 1 \right\}.$$

Nous définissons la variété $M_{\alpha,\beta}(\delta)$ par

$$M_{\alpha,\beta}(\delta) = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{\alpha}{p} \int_\Omega P(x)|u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_\Omega Q(x)|u|^q dx = \delta \right\}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

\Leftrightarrow

$$M_{\alpha,\beta}(\delta) = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{\alpha}{\frac{\delta}{p}} \int_\Omega P(x)|u|^p dx + \frac{\beta}{\frac{\delta}{q}} \int_\Omega Q(x)|u|^q dx = 1 \right\}$$

\Leftrightarrow

$$u \in M_{\alpha,\beta}(\delta)$$

\Leftrightarrow

$$u \in M_{\frac{\alpha}{\frac{\delta}{p}}, \frac{\beta}{\frac{\delta}{q}}}(1)$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Nous disons qu'une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible du problème (4.1) si et seulement si l'équation suivante soit vérifiée,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx \\ &= \lambda \left(\alpha \int_{\Omega} P(x) |u|^{p-2} u v dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |u|^{q-2} u v dx \right), \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Ljusternick-Schnirelmann, nous allons démontrer que sous la contrainte $M_{\alpha,\beta}$ le problème (4.1) possède des solutions non triviales dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$.

La formulation variationnelle du problème (4.1) est donnée par : trouver $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx \\ &= \lambda \left(\alpha \int_{\Omega} P(x) |u|^{p-2} u v dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |u|^{q-2} u v dx \right), \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le problème (4.2) est équivalent à trouver u une solution non triviale de l'équation

$$I'(u)v = \lambda G'_{\alpha,\beta}(u)v, \quad (4.3)$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Où, I' et $G'_{\alpha,\beta}$ sont les dérivées de Gateaux des fonctionnelles :

$$I, G_{\alpha,\beta} : W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$$

tel que

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx,$$

et

$$G_{\alpha,\beta}(u) = \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx.$$

Par la théorie de Ljusternick-Schnirelmann, la résolution de l'équation (4.3) retourne exactement à la recherche des points critiques de la fonctionnelle I dans la contrainte $M_{\alpha,\beta}$.

Le lemme qui suit donne le résultat de la régularité des fonctionnelles I et $G_{\alpha,\beta}$.

Lemme 4.1 . Sous les hypothèses H1-H4 alors, nous avons

(1) La fonctionnelle I est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et sa différentielle est donnée par :

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx.$$

(2) $G_{\alpha,\beta} \in C_{loc}^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ et sa différentielle est donnée par :

$$\langle G'_{\alpha,\beta}(u), v \rangle = \alpha \int_{\Omega} P(x) |u|^{p-2} u v dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |u|^{q-2} u v dx.$$

(3) I et $G_{\alpha,\beta}$ sont paires et I n'est pas constante .

Preuve.

1 Nous commençons par définir les opérateurs suivants

$$\langle J(u), v \rangle = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p v dx,$$

et

$$\langle L(u), v \rangle = \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q v dx.$$

Nous allons démontrer que J est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et L sera traité de la même manière.

Considérons l'espace produit $\tau = \prod_{i=1}^N L^{p'}(\Omega)$, induit de la norme

$$[F]_{0,p'} = \left(\sum_{i=1}^N \|F_i\|_{0,p'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Pour $F = (F_1, \dots, F_N) \in \tau$, nous définissons

$$f = (f_1 \dots f_N) : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \chi,$$

où,

$$f(u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u,$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous allons à présent montrer que f est continue.

En utilisant l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^N , nous pouvons facilement trouver une constante $C > 0$ telle que

$$[F]_{0,p'}^{p'} \leq C \int_{\Omega} |F|^{p'}, \forall F \in \tau.$$

Prenant maintenant $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors en utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned} [f(u) - f(v)]_{0,p}^{p'} &\leq C \int_{\Omega} |f(u) - f(v)|^{p'}, \\ &\leq C' \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p'} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2)}, \\ &\leq C' \|u - v\|_{1,p}^{p'} \|\nabla u + \nabla v\|_{0,p}^{p'(p-2)}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$[f(u) - f(v)]_{0,p} \leq M \|u - v\|_{1,p}^{p'} (\|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}^{p'(p-2)}),$$

où, $M > 0$ est une constante indépendante de u et v . Nous aurons donc

$$\|J'(u) - J'(v)\|_* \leq M' [f(u) - f(v)]_{0,p'} \quad (4.4)$$

En utilisant l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^N et l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned} |\langle J'(u) - J'(v), w \rangle| &\leq \int_{\Omega} |f(u) - f(v)| |\nabla w|, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(u) - f(v)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq M' \left(\sum_{i=1}^N \|f_i(u) - f_i(v)\|_{0,p'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|w\|_{1,p}, \\ &= M' [f(u) - f(v)]_{0,p} \|w\|_{1,p}. \end{aligned}$$

$\forall u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

De l'inégalité (4.4) et la continuité de f , alors nous obtenons que $J \in C^1$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme J et L sont des fonctionnelles de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, il en découle que la fonctionnelle I est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

(2) Nous définissons les deux opérateurs N et R par

$$\langle N(u), v \rangle = \frac{1}{p} \int_{\Omega} P(x)|u|^p v dx,$$

$$\langle R(u), v \rangle = \frac{1}{q} \int_{\Omega} Q(x)|u|^q v dx.$$

Comme précédemment nous allons montrer que N est une fonctionnelle de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et R sera traité de la même façon. Nous avons

$$\frac{|N(u + tv) - N(u)|}{t} = |N'(u + tv)||v|.$$

De plus,

$$\begin{aligned} |N'(u + tv)|, |v| &= \int_{\Omega} P(x)|u + tv|^{p-2}|u + tv||v| dx, \\ &\leq \int_{\Omega} P(x)|u + tv|^{p-2}|u + tv||u + tv| dx, \\ &= \int_{\Omega} P(x)|u + tv|^p dx. \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse H4, nous aurons alors,

$$|N'(u + tv)|, |v| \leq \int_{\Omega} P(x)|u + tv|^p dx \leq C_1 \|P\|_{\infty} \|u + tv\|_{1,p}^p.$$

Pour démontrer la continuité de la dérivée de Gateaux, nous considérons l'espace produit, $\tau = \prod_{i=1}^N L^{p'}(\Omega)$ muni de la norme

$$[H]_{0,p'} = \left(\sum_{i=1}^N \|H_i\|_{0,p'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Pour $H = (H_1, \dots, H_N) \in \tau$, nous définissons

$$h = (h_1 \dots h_N) : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \chi,$$

où,

$$h(u) = P(x)|u|^{p-2}u,$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

En utilisant l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^N , il existe une constante $T > 0$ telle que

$$[H]_{0,p'}^{p'} \leq T \int_{\Omega} |H|^{p'}, \forall H \in \tau.$$

Prenant $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, en employant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned} [h(u) - h(v)]_{0,p}^{p'} &\leq T \int_{\Omega} |h(u) - h(v)|^{p'}, \\ &\leq T' \int_{\Omega} |u - v|^{p'} (|u| + |v|)^{p'(p-2)}, \\ &\leq T' \|u - v\|_{1,p}^{p'} \|u + v\|_{0,p}^{p'(p-2)}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$[h(u) - h(v)]_{0,p} \leq M_0 \|u - v\|_{1,p}^{p'} (\|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}^{p'(p-2)}). \quad (4.5)$$

Où, $M_0 > 0$ est une constante indépendante de u et de v . De l'inégalité (4.5) nous obtenons

$$\|N'(u) - N'(v)\|_* \leq K [h(u) - h(v)]_{0,p'}. \quad (4.6)$$

De l'inégalité de Hölder et l'équivalence des normes dans \mathbb{R}^N , il en découle que

$$\begin{aligned} |\langle N'(u) - N'(v), w \rangle| &\leq \int_{\Omega} |h(u) - h(v)| |w|, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |h(u) - h(v)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega} |w|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq K \left(\sum_{i=1}^N \|h_i(u) - h_i(v)\|_{0,p'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|w\|_{1,p}, \\ &= K [h(u) - h(v)]_{0,p} \|w\|_{1,p}. \end{aligned}$$

$\forall u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme h est continue et l'inégalité (4.6) est vérifiée il en découle que N est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, il s'ensuit que $G_{\alpha,\beta}$ est une fonctionnelle de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Il est évident que $G'_{\alpha,\beta}$ est Lipchytzienne alors, $G'_{\alpha,\beta} \in C_{loc}^{1,1}(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

(3) Il est clair que I et $G_{\alpha,\beta}$ sont paires et que I n'est pas constante.

Ceci termine la démonstration. ■

Nous définissons maintenant l'ensemble B_k par

$$B_k = \{A \in S(W_0^{1,p}(\Omega)); A \subset M_{\alpha,\beta}, \gamma(A) \geq k\}.$$

Où, $S(W_0^{1,p}(\Omega))$ désigne l'ensemble de tout les sous-ensemble symétriques et fermés de $M_{\alpha,\beta}$ et $\gamma(A)$ est le genre de $A \in S(W_0^{1,p}(\Omega))$.

Afin de pouvoir appliquer le théorème de Ljusternick-Schnirelmann, nous devons d'abord vérifier que l'ensemble B_k est non vide.

Lemme 4.2 . *Sous les hypothèses H1-H4 alors, pour tout entier $k \in N$, $B_k \neq \Phi$ en particulier si X_k est un sous-espace de dimension k de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors, $\gamma(M_{\alpha,\beta} \cap X_k) = k$.*

Preuve. Soit X_k un sous-espace de $W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que $\dim X_k = k$.

Nous pouvons voir que $(X_k \cap M_{\alpha,\beta})$ est un ensemble symétrique, fermé et compact ne contenant pas l'origine, donc $\gamma(M_{\alpha,\beta} \cap X_k)$ est bien défini.

Soit maintenant S la sphère unitaire dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ donnée par

$$S = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1\}$$

Nous définissons P la projection radiale dans $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$P : W_0^{1,p} \rightarrow W_0^{1,p},$$

$$u \mapsto \frac{1}{\|u\|_{W_0^{1,p}}} u, u \neq 0.$$

Comme P est une bijection entre $M_{\alpha,\beta}$ et S , nous avons donc

$$P(X_k \cap M_{\alpha,\beta}) = X_k \cap P(M_{\alpha,\beta}) = X_k \cap S,$$

c'est à dire que P est un homéomorphisme entre $X_k \cap M_{\alpha,\beta}$ et $X_k \cap S$, donc P est impair, ce qui nous donne

$$\gamma(X_k \cap M_{\alpha,\beta}) = \gamma(X_k \cap S).$$

En utilisant les propriétés du genre nous obtenons

$$\gamma(X_k \cap M_{\alpha,\beta}) = k.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Dans le but de pouvoir appliquer le théorème de Ljusternick-Schnirelmann, nous avons besoin de vérifier que la fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale sur $M_{\alpha,\beta}$.

Lemme 4.3 . *Sous les hypothèses H1-H4, la fonctionnelle I vérifie la condition de Palais-Smale sur $M_{\alpha,\beta}$.*

Preuve. Soient $P(x), Q(x)$ deux fonctions de $L^\infty(\Omega)$. Soit $(u_n) \subset M_{\alpha,\beta}$ et $\lambda_n \in \mathbb{R}$ une suite réel, telle que il existe une constante M vérifiant

$$|I(u_n)| \leq M, \tag{4.7}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla v dx \right. \\ & \left. - \lambda_n \left(\alpha \int_{\Omega} P(x) |u_n|^{p-2} u_n v dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |u_n|^{q-2} u_n v dx \right) \right| \tag{4.8} \\ & \leq \epsilon_n \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Où, $\epsilon_n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$.

De (4.7), il en découle que (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, par conséquent, $u_n \rightarrow u$ fortement dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous montrons maintenant que $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous rappelons que

$$-\Delta_r : W_0^{1,r}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,r}((\Omega))^*$$

avec $r = p$ ou q , possède la (S_+) propriété, c'est à dire que si $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ et que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{r-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \leq 0$$

, alors $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$.

En posant $v = u_n - u$ dans (4.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx \\ &= \alpha \lambda_n \int_{\Omega} P(x) |u_n|^{p-2} u (u_n - u) dx + \beta \lambda_n \int_{\Omega} Q(x) |u_n|^{q-2} u (u_n - u) dx \end{aligned}$$

comme

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Alors, d'après la (S_+) propriété il en découle que $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Nous pouvons à présent, énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.1 . Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, nous posons

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} I(u),$$

alors, pour tout entier $k \geq 1$, il existe $u_k \in M_{\alpha,\beta}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que le couple (u_k, λ_k) est une solution du problème (4.1).

Preuve. Le résultat et la conséquence directe de l'application du théorème de Ljusternick-Schnirelmann et des lemmes 4.1, 4.2 et 4.3. ■

Chapitre 5

Spectre de Fučik de l'opérateur (p, q) -Laplacien.

Le spectre de Fučik a été défini la première fois dans le cas linéaire pour le Laplacien ensuite il a été généralisé au cas du p -Laplacien qui est un opérateur non linéaire et homogène, cette avancée a motivé une série de travaux sur le sujet. Nous avons pensé donc que la suite logique est d'étendre l'étude du spectre de Fučik à des opérateurs non linéaires, non homogène tel que le (p, q) -Laplacien.

Dans ce qui suit, nous étudierons le spectre de Fučik de l'opérateur (p, q) -Laplacien à travers le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda.P(x)(u^+)^{p-1} - \mu.Q(x)(u^-)^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

où, Ω est un domaine borné assez régulier de \mathbb{R}^N , $u = u^+ - u_-$, $u^\pm = \max\{0, u^\pm\}$ est la solution recherchée du problème (5.1) et $P(x), Q(x)$ sont des fonctions $L^\infty(\Omega)$. Nous supposons que $1 < q \leq p \leq N$.

5.1 Existence de la famille de courbes.

Nous commençons d'abord par donner une définition concernant le spectre de Fučik de l'opérateur (p, q) -Laplacien.

Définition 5.1 . Nous définissons le spectre de Fučik de l'opérateur (p, q) -Laplacien avec la condition aux limites de Dirichlet comme étant l'ensemble des $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que le problème (5.1) possède une solution non triviale dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, il est noté par $\Sigma_{p,q}$.

Dans le but de pouvoir déterminer $\Sigma_{p,q}$, nous allons chercher la solution du problème (5.1) sous forme de point critique en utilisant le théorème de Ljusternick-Schnirelmann et le théorème du Col de la montagne.

Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, nous définissons les deux fonctionnelles

$$I_{s,s_0,t,t_0}, G_{\alpha,\beta} : W_0^{1,p} \mapsto \mathbb{R},$$

telle que

$$\begin{aligned} I_{s,s_0,t,t_0} &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \\ &- \frac{s}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^+|^p dx + \frac{s_0}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^-|^p dx \\ &- \frac{t}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^q dx + \frac{t_0}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^q dx \end{aligned}$$

et

$$G_{\alpha,\beta}(u) = \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx$$

où, $s \leq s_0$ respectivement, $t \leq t_0$ avec s_0 et t_0 deux valeurs positives que nous déterminerons plus tard.

Nous rappelons que la contrainte $M_{\alpha,\beta}$ définie dans le chapitre 4 est donnée par

$$M_{\alpha,\beta} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx = 1 \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous allons donner partiellement la structure du spectre de Fučik de l'opérateur (p, q) -Laplacien en résolvant le problème (5.1).

Pour pouvoir atteindre notre but, nous allons combiner deux techniques connus de la méthode variationnelle, le théorème de Ljusternick-Schnirelmann que nous avons vu et appliquer dans le chapitre 4 ainsi que le théorème du Col de la Montagne (avec contrainte).

Dans un premier temps, nous utiliserons les résultats du chapitre 4 pour

5.1. Existence de la famille de courbes.

démontrer que la fonctionnelle $I_{0,0,0,0} = I$ possède une infinité de valeurs critiques. En suite, nous appliquerons le théorème du Col pour aboutir au résultat voulu. Le résultat qui assure la régularité de la fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} est donné dans la proposition suivante.

Proposition 5.1 . La fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sa différentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle I'_{s,s_0,t,t_0}(u), v \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \\ &+ \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx - s \int_{\Omega} P(x) |u^+|^{p-1} v dx \\ &+ s_0 \int_{\Omega} P(x) |u^-|^{p-1} v dx - t \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^{q-1} v dx \\ &+ t_0 \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^{q-1} v dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Remarque 5.1 . Nous n'allons pas donner la démonstration de la proposition 5.1 car elle se fait de la même manière que pour la fonctionnelle I définie dans le chapitre 4.

Nous définissons à présent la fonctionnelle \bar{I}_{s,s_0,t,t_0} considérée comme la restriction de I_{s,s_0,t,t_0} sur la contrainte $M_{\alpha,\beta}$. i.e

$$\bar{I}_{s,s_0,t,t_0} = I_{s,s_0,t,t_0}|_{M_{\alpha,\beta}}.$$

Par la règle de Lagrange, $u \in M_{\alpha,\beta}$ est un point critique de \bar{I}_{s,s_0,t,t_0} si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$I'_{s,s_0,t,t_0}(u) = cG'_{\alpha,\beta}(u),$$

c'est à dire que,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx \\ &- s \int_{\Omega} P(x) |u^+|^{p-1} v dx + s_0 \int_{\Omega} P(x) |u^-|^{p-1} v dx \\ &- t \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^{q-1} v dx + t_0 \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^{q-1} v dx \\ &= c \left(\alpha \int_{\Omega} P(x) |u|^{p-2} u v dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |u|^{q-2} u v dx \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.1. Existence de la famille de courbes.

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le premier résultat concernant le spectre de Fučík pour le (p, q) -Laplacien est donné dans la proposition suivante.

Proposition 5.2 Soient $s \geq 0, t \geq 0$, si il existe $u \in M_{\alpha, \beta}$ de \bar{I}_{s, s_0, t, t_0} tel que

$$c = I_{s, s_0, t, t_0}(u),$$

alors le point $(\alpha c + s, \beta c + t) \in \mathbb{R}^2$ appartient à $\Sigma_{p, q}$.

Preuve. Par définition le point $(\alpha c + s, \beta c + t) \in \Sigma_{p, q}$ si et seulement si il existe $u \in M_{\alpha, \beta}$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = (\alpha c + s) \cdot P(x) (u^+)^{p-1} - (\beta c + t) \cdot Q(x) (u^-)^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.4)$$

ce qui signifie que le problème (5.4) est vérifié au sens faible. Posons maintenant $u = v$ dans (5.3) alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u^2 dx \\ & - s \int_{\Omega} P(x) |u^+|^{p-1} u dx + s_0 \int_{\Omega} P(x) |u^-|^{p-1} u dx \\ & - t \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^{q-1} u dx + t_0 \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^{q-1} u dx \\ & = c \left(\alpha \int_{\Omega} P(x) |u|^{p-2} u^2 dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |u|^{q-2} u^2 dx \right). \\ & \Updownarrow \\ & \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx - s \int_{\Omega} P(x) |u^+|^p dx \\ & + s_0 \int_{\Omega} P(x) |u^-|^p dx - t \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^q dx + t_0 \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^q dx \\ & = c \left(\alpha \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx \right). \\ & \Updownarrow \end{aligned}$$

5.1. Existence de la famille de courbes.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx - \frac{s}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^+|^p dx \\ & \quad + \frac{s_0}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^-|^p dx - \frac{t}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^q dx \\ & \quad \quad \quad + \frac{t_0}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^q dx \\ & = c \left(\frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx \right). \end{aligned}$$

Et puisque, $\frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx = 1$
nous aurons donc

$$I_{s,s_0,t,t_0}(u) = c.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Reprenons maintenant la fonctionnelle I définie dans le chapitre 4 par

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx.$$

Dans le chapitre précédant, nous avons démontré par le biais du théorème de Ljusternick-Schnirelmann que la fonctionnelle I possède une infinité de valeurs critiques

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} I(u),$$

ce qui implique que I possède une infinité de points critique $u_k \in M_{\alpha,\beta}$ associés à c_k .

De plus, nous avons toujours par le théorème de L-S que

$$c_k \rightarrow +\infty, \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

Pour que nous puissions appliquer le théorème du Col, nous devons d'abord montrer que la fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} vérifie la condition de Palais-Smale sur $M_{\alpha,\beta}$.

Lemme 5.1 . I_{s,s_0,t,t_0} satisfait la condition de Palais-Smale sur $M_{\alpha,\beta}$.

Preuve. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions de $L^\infty(\Omega)$.

Soit $u_n \in M_{\alpha,\beta}$ et c_n une suite de \mathbb{R} , tel que il existe une constante M vérifiant

$$|I_{s,s_0,t,t_0}(u_n)| \leq M \tag{5.5}$$

5.1. Existence de la famille de courbes.

et

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla v dx \right. \\
 & \quad - (\alpha c_n + s) \int_{\Omega} P(x) (u_n^+)^{p-1} v dx \\
 & \quad - (\beta c_n + t) \int_{\Omega} Q(x) (u_n^-)^{q-1} v dx \\
 & \quad - (\alpha b_n - s_0) \int_{\Omega} P(x) (u_n^-)^{p-1} v dx \\
 & \quad \left. - (\beta c_n - t_0) \int_{\Omega} Q(x) (u_n^+)^{q-1} v dx \right| \\
 & \leq \xi_n \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\epsilon_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Nous commençons par montrer que u_n est bornée.

De (5.5), nous avons

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q dx \right. \\
 & \quad - \frac{s}{p} \int_{\Omega} P(x) |u_n^+|^p dx + \frac{s_0}{p} \int_{\Omega} P(x) |u_n^-|^p dx \\
 & \quad \left. - \frac{t}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u_n^-|^q dx + \frac{t_0}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u_n^+|^q dx \right| \leq M,
 \end{aligned}$$

comme, $s \leq s_0$ et $t \leq t_0$ nous avons donc

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q dx - \frac{s}{p} \int_{\Omega} P(x) |u_n^+|^p dx \right. \\
 & \quad \left. + \frac{s_0}{p} \int_{\Omega} P(x) |u_n^-|^p dx - \frac{t}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u_n^-|^q dx + \frac{t_0}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u_n^+|^q dx \right| \leq M.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ ce qui nous donne que $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pour montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il nous suffi de prendre $v = u_n - u$

5.1. Existence de la famille de courbes.

dans (5.6), nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx \\ &= (\alpha c_n + s) \int_{\Omega} P(x) (u_n^+)^{p-1} (u_n - u) dx \\ &+ (\beta c_n + t) \int_{\Omega} Q(x) (u_n^-)^{q-1} (u_n - u) dx \\ &+ (\alpha c_n - s_0) \int_{\Omega} P(x) (u_n^-)^{p-1} (u_n - u) dx \\ &+ (\beta c_n - t_0) \int_{\Omega} Q(x) (u_n^+)^{q-1} (u_n - u) dx \end{aligned}$$

comme

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'après la (S_+) propriété nous avons $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Nous allons maintenant démontrer que la fonctionnelle I_{s,s_0,t,t_0} vérifie la géométrie du Col.

Lemme 5.2 *Nous avons les deux résultats suivants :*

(i) *Il existe $u_0, u_1 \in M_{\alpha,\beta}$ et $\epsilon > 0$ tel que*

$$\|u_1 - u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} > \epsilon.$$

(ii)

$$\inf \{I_{s,s_0,t,t_0}(u) : u \in M_{\alpha,\beta} \text{ et } \|u - u_0\|_{E} = \epsilon\} > \max \{I_{s,s_0,t,t_0}(u_0), I_{s,s_0,t,t_0}(u_1)\}.$$

Preuve.

(i) Nous avons $u_k \in M_{\alpha,\beta}$ la suite de points critiques associés à la suite de valeurs critiques c_k , donc nous pouvons prendre $u_0 = u_k$ et $u_1 = -u_k$, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, et $u_k, -u_k \in M_{\alpha,\beta}$. Nous avons alors,

$$\|u_0 - u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u_k - (-u_k)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 2 \|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} > \epsilon.$$

5.1. Existence de la famille de courbes.

(ii) Nous avons

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} I(u)$$

est une valeurs critique de I , donc il existe un multiplicateur de Lagrange $\vartheta_k \in \mathbb{R}$ et $u \in M_{\alpha, \beta}$ tel que

$$I'(u) = c_k G'_{\alpha, \beta}(u)$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla v dx \\ &= \alpha c_k \int_{\Omega} P(x) |u_n|^{p-2} u v dx + \beta c_k \int_{\Omega} Q(x) |u_n|^{q-2} u v dx \end{aligned}$$

En prenant, $u = v$ nous aurons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \\ &= c_k \left(\frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx \right). \end{aligned}$$

Et puisque,

$$\frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} P(x) |u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u|^q dx = 1,$$

il en découle que $I(u) = c_k$ où, $c_k = \vartheta_k$. Nous obtenons donc

$$\max\{\bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(-u_k), \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(u_k)\} = c_k.$$

D'un autre coté, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \\ & < \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \\ & - \frac{s}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^+|^p dx + \frac{s_0}{p} \int_{\Omega} P(x) |u^-|^p dx \\ & - \frac{t}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^-|^q dx + \frac{t_0}{q} \int_{\Omega} Q(x) |u^+|^q dx \end{aligned}$$

5.1. Existence de la famille de courbes.

Pour tout $u \in M_{\alpha, \beta}$.

Il en résulte que,

$$\inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} \bar{I}(u) < \bar{I}s, s_0, t, t_0(u),$$

ce qui implique que,

$$\inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} \bar{I}(u) < \inf \bar{I}s, s_0, t, t_0(u),$$

Pour tout $u \in M_{\alpha, \beta}$.

Ce qui nous donne

$$\inf_{A \in B_k} \sup_{u \in A} \bar{I}(u) < \inf \{ \bar{I}s, s_0, t, t_0(u) : u \in M_{\alpha, \beta} \mid \|u - (-u_k)\|_{W_0^{1,p}} = \epsilon \}$$

Par conséquent nous obtenons

$$\begin{aligned} & \inf \{ \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(u) : u \in M_{\alpha, \beta}, \|u - (-u_k)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ & = \epsilon \} > \max \{ \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(-u_k), \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(u_k) \} = c_k. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

À présent, nous pouvons énoncer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 5.1 . Pour $s > 0, t > 0$;

(1) $c_n(s, t) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1, 1]} I_{s, s_0, t, t_0}$, est une suite de valeurs critiques de I_{s, s_0, t, t_0} , où,

$$\Gamma = \{ \gamma \in C([-1, 1], M_{\alpha, \beta}) : \gamma(-1) = -u_k, \gamma(1) = u_k \}.$$

(2) Le point $(s + c_n(s, t), t + c_n(s, t)) \in \Sigma_{p, q}$.

Preuve. Pour $s > 0, t > 0$;

(1) Nous avons I_{s, s_0, t, t_0} et $G_{\alpha, \beta}$ sont de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et il est clair que 1 est une valeur régulière de $G_{\alpha, \beta}$ de plus, la fonctionnelle I_{s, s_0, t, t_0}

5.1. Existence de la famille de courbes.

vérifie la condition de Palais-Smale sur $G_{\alpha, \beta}$ ainsi que la géométrie du Col, par conséquent d'après le théorème du Col de la montagne,

$$c_n(s, t) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1, 1]} I_{s, s_0, t, t_0}$$

est une suite de valeurs critiques de I_{s, s_0, t, t_0} .

2 Le résultat découle de la proposition 5.2 et de (1).

ce qui termine la démonstration. ■

Dans ce qui suit nous donnons la valeur de s_0 et t_0 .

Proposition 5.3 . Si $c_n(s, t) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1, 1]} I_{s, s_0, t, t_0}$ est une valeur critique de I_{s, s_0, t, t_0} alors, $s_0 = \alpha c_n$ et $t_0 = \beta c_n$.

Preuve. Pour $\alpha, \beta > 0$. Nous avons que c_n est une valeur critique de I_{s, s_0, t, t_0} donc,

$$I'_{s, s_0, t, t_0}(w_k) = c_n G'_{\alpha, \beta}(w_n),$$

où, w_n est le point critique associé à la valeur critique c_n .

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, nous avons

$$\langle I'_{s, s_0, t, t_0}(w_k), v \rangle = c_n \langle G'_{\alpha, \beta}(w_n), v \rangle,$$

ce qui signifi que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{q-2} \nabla w_n \nabla v dx \\ & - s \int_{\Omega} P(x) |w_n^+|^{p-1} v dx + s_0 \int_{\Omega} P(x) |w_n^-|^{p-1} v dx \\ & - t \int_{\Omega} Q(x) |w_n^-|^{q-1} v dx + t_0 \int_{\Omega} Q(x) |w_n^+|^{q-1} v dx \\ & = c_n \left(\alpha \int_{\Omega} P(x) |w_n|^{p-2} w_n v dx + \beta \int_{\Omega} Q(x) |w_n|^{q-2} w_n v dx \right), \end{aligned}$$

il en résult que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{q-2} \nabla w_n \nabla v dx \\ & = (\alpha c_n + s) \int_{\Omega} P(x) |w_n^+|^{p-1} v dx + (\beta c_n + t) \int_{\Omega} Q(x) |w_n^-|^{q-1} v dx \\ & + (\alpha c_n - s_0) \int_{\Omega} P(x) |w_n^-|^{p-1} v dx + (\beta c_n - t_0) \int_{\Omega} Q(x) |w_n^+|^{q-1} v dx. \end{aligned}$$

5.1. Existence de la famille de courbes.

En posant,

$$(\alpha c_n - s_0) \int_{\Omega} P(x) |w_n^-|^{p-1} v dx + (\beta c_n - t_0) \int_{\Omega} Q(x) |w_n^+|^{q-1} v dx = 0$$

Nous obtenons alors,

$$\alpha c_n - s_0 = 0 \Rightarrow \alpha c_n = s_0$$

et

$$\beta c_n - t_0 = 0 \Rightarrow \beta c_n = t_0$$

ce qui achève la démonstration. ■

5.2 Propriétés de la famille de courbes.

Dans cette section, nous nous consacrons à l'étude des propriétés de la famille de courbes définie à partir de la valeur critique c_n .

Pour $s > 0$ respectivement $t > 0$, nous définissons la famille de courbes C_n par

$$C_n := \{(s + c_n(s, t), t + c_n(s, t)), (t + c_n(s, t), s + c_n(s, t))\},$$

Le premier résultat que nous donnons concerne la régularité de la famille de courbes C_n .

Lemme 5.3 *La famille de courbes*

$$(s, t) \mapsto (s + c_n(s, t), t + c_n(s, t)),$$

est lipchitzienne et continue dans le sens où, $s + c_n(s, t) < s' + c_n(s', t)$, $t + c_n(s, t) < t' + c_n(s, t')$ et $c_n(s, t) > c_n(s', t')$.

Preuve. Soit $s' < s$, respectivement $t' < t$, nous avons alors,

$$\bar{I}_{s', s_0, t', t_0}(u) \geq \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(u), \forall u \in M_{\alpha, \beta},$$

ce qui implique que $c_n(s', t') \geq c_n(s, t)$.

Donc $\forall \epsilon > 0$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que, $\max_{u \in \gamma[-1, 1]} \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(u) \leq c_n(s, t) + \epsilon$.

Il en découle que,

$$0 \leq c_n(s', t') - c_n(s, t) \leq \max_{u \in \gamma[-1, 1]} \bar{I}_{s', s_0, t', t_0}(u) - \max_{u \in \gamma[-1, 1]} \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(u) + \epsilon.$$

5.2. Propriétés de la famille de courbes.

Si nous prenons maintenant $u_0 \in \gamma[-1, 1]$ tel que

$$\max_{u \in \gamma[-1, 1]} \bar{I}_{s', s_0, t', t_0}(u) = \bar{I}_{s', s_0, t', t_0}(u_0),$$

Alors, nous obtenons

$$0 \leq c_n(s', t') - c_n(s, t) \leq \bar{I}_{s', s_0, t', t_0}(u_0) - \bar{I}_{s, s_0, t, t_0}(u_0) + \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$, Nous pouvons donc voir que $(s, t) \mapsto (s + c_n(s, t), t + c_n(s, t))$, est continue et lipchitzienne. ■

Le résultat qui concerne la monotonie de la famille de courbes C_n est donné dans le lemme suivant.

Lemme 5.4 *La famille de courbes*

$$(s, t) \mapsto (s + c_n(s, t), t + c_n(s, t)),$$

est décroissante dans le sens où $s + c_n(s, t) < s' + c_n(s', t), t + c_n(s, t) < t' + c_n(s, t')$ et $c_n(s, t) > c_n(s', t')$.

Preuve. Soient $0 < s' < s$, et $0 < t' < t$, alors,

$$(s' + c_n(s', t'), t' + c_n(s', t')), (s + c_n(s, t), t + c_n(s, t)) \in \Sigma_{p, q}.$$

↓

$$s' + c_n(s', t'), t' + c_n(s', t') < s + c_n(s, t), t + c_n(s, t).$$

Et comme nous avons

$$c_n(s', t') \geq c_n(s, t).$$

Nous concluons donc que la famille de courbes C_n est décroissant. ■

5.2. Propriétés de la famille de courbes.

CONCLUSION

Au coeur de ce manuscrit, nous avons fait une analyse minutieuse d'un certains types de problèmes qui font apparaitre l'opérateur (p, q) -Laplacien. nous avons majoritairement examiné un problème aux valeurs propres et un problème concernant le spectre de Fučík pour le (p, q) – *Laplacien*.

Les techniques que nous avons employer pour l'obtention des résultats exposés ne sont pas semblables à ceux du Laplacien et du p -Laplacien.

Dans le but d'analyser le problème aux valeurs propres, nous avons utilisé le théorème de Ljusternick-Schnirelmann. Cependant pour l'étude du spectre de Fučík, nous avons été dans l'obligation de combiner le théorème du Col de la montagne avec contrainte et le théorème de Ljusternick-Schnirelmann. Au niveau des résultats, nous avons montré que le problème aux valeurs propres considéré possède une solution sous forme de point critique.

Au moment où nous avons posé le problème qui concene le spectre de Fučík, une difficulté majeure liée principalement à la nouveauté du sujet et au manque de références bibliographiques a rendu l'étude difficile. Nous avons alors proposé de combiner le théorème de Ljusternick-Schnirelmann pour trouver le point critique et le théorème du Col de la montagne avec contrainte pour assuré l'existence d'une famille de courbes C_n qui appartient au spectre de Fučík de l'opérateur (p, q) – *Laplacien*.

D' un autre coté, nous avons mis au point un résultat sur les propriétés de la famille de courbes et nous avons clôturer cette thèse par l'étude de sa continuité et sa monotonie.

Pour nos perspectives à l'avenir, nous souhaitons faire une simulation numérique pour nos résultats.

Bibliographie

- [1] Allegretto, W., Huang, YX. : A piconic identity for the p -Laplacian and applications. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and application* 32, 7 , 819-830, (1998).
- [2] Ambrosetti, A., Brezis, H., Cerami, G. : Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*, 122(2), 519-543. DOI :10.1006/jfan.1994.1078 2. (1994).
- [3] Ambrosetti, A., Prodi, G. : A primer in Nonlinear Analysis, Cambridge studies in advanced mathematics 34, Cambridge University Press (1993).
- [4] Anane, A. : Simplicité et isolation de la première valeur propre du p -laplacien avec poids. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique* 305, 16 , 725-728, (1987).
- [5] Arias, M., Campos, J. : Radial Fučík spectrum of the Laplace operator, *J. Math. Anal. Appl.*, 190 , 654-666.(1995).
- [6] Aris, R. : Mathematical modelling techniques, *Res. Notes Math.* 24, Pitman, Boston, (1979).
- [7] Averna, D., Motreanu, D., Tornatore, E. : Existence and asymptotic properties for quasilinear elliptic equations with gradient dependence. *Applied Mathematics Letters*, 61, 102-107. DOI :10.1016/j.aml.2016.05.009 3. (2016).
- [8] Benci, V., D-Avenia, P., Fortunato, D., Pisani, L. : Solitons in several space dimensions : Derrick's Problem and infinitely many solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.* 154 , 297-324.(2000).

-
- [9] Benci, V., Fortunato, D., Pisani, L. : Soliton like solutions of a Lorentz invariant equation in dimension 3, *Rev. Math. Phys.* 10 , 315-344. (1998).
- [10] Benci, V., Micheletti, A. M., Visetti, D. : An eigenvalue problem for a quasilinear elliptic field equation on \mathbb{R}^n , *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 17 ,1 91-211.(2001)
- [11] Benouhiba, N., Belyacine, Z. : A class of eigenvalue problems for the $(p, q) - Laplacian$ in \mathbb{R}^N , *Internat. J. Pure Appl. Math* 80 , 727-737.(2012).
- [12] Benouhiba, N., Belyacine, Z. : On the solutions of the $(p, q) - Laplacian$ problem at resonance, *Nonlinear Anal.* 77 , 74-81.(2013).
- [13] Bobkov, V., Tanaka, M. : On positive solutions for $(p, q) - Laplace$ equations with two parameters. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 54(3), 3277-3301. DOI :10.1007/s00526-015-0903-5 2, 3, 20. (2015).
- [14] Bobkov, V., Tanaka, M. : On sign-changing solutions for $(p, q) - Laplace$ equations with two parameters. *Advances in Nonlinear Analysis*. DOI :10.1515/anona-2016-0172 2, 4, 7, 8, 10, 20, 21. (2016).
- [15] Bobkov, V., Tanaka, M. : Remarks on minimizers for $(p, q) - Laplace$ equations with two parameters. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 17(3), 1219-1253. DOI :10.3934/cpaa.2018059 2, 3, 4, 12, 13, 15. (2018).
- [16] Brézis, H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Masson, Paris, 117, (1987).
- [17] Cahn, J. W., Hilliard, J. E. : Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *The Journal of chemical physics*, 28(2) , 258-267. DOI :10.1063/1.1744102 2.(1958).
- [18] Candito, P., Marano, S. A., Perera, K. : On a class of critical $(p, q) - Laplacian$ problems, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 22 , 1959-1972.(2015).
- [19] Chang, K. C. : *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*. Birkhäuser. DOI :10.1007/978-1-4612-0385-8 9 (1993).

-
- [20] Chaves, M. F., Ercole, G., Miyagaki, O. H. : Existence of a nontrivial solution for the $(p, q) - Laplacian$ in \mathbb{R}^N without the Ambrosetti-Rabinowitz condition. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 114, 133-141. (2015).
- [21] Cherfils, L., Ilyasov, y. : On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with $p, q - Laplacian$, *Comm. Pure Appl. Anal.* 4 , 9-22.(2005).
- [22] Cingolani, S., Degiovanni, M. : Nontrivial Solutions for $p - Laplace$ Equations with Right-Hand Side Having p -Linear Growth at Infinity, *Comm. Partial Differential Equations*, 30, 1191-1203.(2005).
- [23] Clément, P., Peletier, L. A. : An anti-maximum principle for second-order elliptic operators. *Journal of Differential Equations*, 34(2), 218-229. (1979).
- [24] Custa, M. : On the Fučík spectrum of the *Laplacian* and the $P - Laplacian$, *Proceedings of Seminar in Differential Equations*, Kavilda (pp.67-96).May 29-Jun 2 (2000).
- [25] Custa ; M., De Figueiredo, D., Gossez, JP. : The beginning of the Fučík spectrum of the $p - Laplacian$. *J. Differ. Equ.* 2002, 36 (2002).
- [26] Dancer, N. : On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 76 , 283-300.(1977).
- [27] Davies, E. B. : *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge Studies in Advances Mathematics 42 (1995).
- [28] Derrick, G. H. : Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles, *J. Math. Phys.* 5, 1252-1254. (1964).
- [29] Drábek, P. : Solvability and bifurcations of nonlinear equations, *Pitman Res. Notes in Math.* 264, (1992).
- [30] Drábek, P. : Geometry of the energy functional and the Fredholm alternative for the $p - Laplacian$ in higher dimensions. *Electronic Journal of Differential Equations*, Conference 08, 103-120. (2002).
- [31] Drábek, P., Girg, P., Takác, P., Ulm, M. : The Fredholm alternative for the $p - Laplacian$: bifurcation from infinity, existence and multiplicity. *Indiana University Mathematics Journal*, 53(2), 433-482. (2004).

-
- [32] Drábek, P., Milota, J. : 'Methods of nonlinear analysis : applications to differential equations. Springer, (2013).
- [33] Drábek, P., Robinson, S.B. : Resonance problems for the $p - Laplacian$. Journal of Functional Analysis, 169(1), 189-200. (1999).
- [34] Dugundji, J. : An extension of Tietze's theorem. Pacific Journal of Mathematics, 1(3), 353-367. (1951).
- [35] Faria, L., Miyagaki, O., Motreanu, D. : Comparison and positive solutions for problems with $(P, Q) - Laplacian$ and convection term, to appear in Proceedings Edi. Math. Soc.
- [36] Fife, P. C. : Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Lect. Notes in Biomath. 28, Springer, Berlin, (1979).
- [37] Figueiredo, G. M. : Existence of positive solutions for a class of p, q elliptic problems with critical growth on \mathbb{R}^N , J. Math. Anal. Appl. 378 , 507-518. (2011).
- [38] Figueiredo, G. M., Quoirin, H. R. : Ground states of elliptic problems involving non homogeneous operators, Indiana Univ. Math. J. 65 , 779-795.(2016).
- [39] Filippakis, M. E., Papageorgiou, N. S., Resonant (p, q) -equations with Robin boundary condition. Electronic Journal of Differential Equations, (1), 1-24. (2018).
- [40] Fleckinger-Pellé, J., Takác, P. : An improved Poincaré inequality and the $p - Laplacian$ at resonance for $p > 2$. Advances in Differential Equation, 7(8), 951-971.
- [41] Fučík, S. : Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value problems. Springer, Dordrecht (1980).
- [42] Fučík, S., Nečas, J., Souček, J., Souček V. : Spectral analysis of nonlinear operators (Vol. 346). Springer. (2006).
- [43] Gasinski, L., Papageorgiou, N. S. : Nonlinear Analysis, vol. 9, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, (2006).
- [44] Ghoussoub, N. : Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory, in Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 107, Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

-
- [45] Gongbao, L., Guo, Z. : Multiple solutions for the p, q – *laplacian* problem with critical exponent. *Acta Mathematica Scientia* 29, 4 , 903-918.(2009).
- [46] He, C., Li, G. : The existence of a nontrivial solution to the p, q – *Laplacian* problem with nonlinearity asymptotic to u^{p-1} at infinity in \mathbb{R}^N *Nonlinear Anal.* 68 , 1100-1119.(2008).
- [47] Hsu, T. S., Lin, H. L. : *Multiplicity of Positive Solutions for a Laplacian Type Equation with Critical Nonlinearities*. *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, Article ID 829069, 9 pages, (2014).
- [48] Il'yasov, Y. : On positive solutions of indefinite elliptic equations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 333, 6 , 533-538.(2001).
- [49] Kavian, O. : *Introduction à la théorie des points critiques et application aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et application, Springer-Verlag (1993).
- [50] Kajikiya, R., Tanaka, M., Tanaka, S. : Bifurcation of positive solutions for the one dimensional (p, q) – *Laplace* equation, preprint.
- [51] Marano, S. A., Mosconi, S. J. N., Papageorgiou, N. S. : Multiple solutions to (p, q) –*Laplacian* problems with resonant concave nonlinearity, *Adv. Nonlinear Stud.* 16 , 51-65.(2016).
- [52] Marano, S. A., Papageorgiou, N. S. : Constant-sign and nodal solutions of coercive (p, q) – *Laplacian* problems, *Nonlinear Anal. TMA*, 77 , 118-129.(2013).
- [53] Miyajima, S., Motreanu, D., Tanaka, M. : Multiple existence results of solutions for the Neumann problems via super-solutions and sub-solutions. *Journal of Functional Analysis* 262, 4 , 1921-1953.(2012).
- [54] Motreanu, D., Tanaka, M. : *On a positive solution for (p, q) – Laplace equation with indefinite weight, Minimax Theory and its Applications*, 1(1), 1-20. (2016).
- [55] Motreanu, D., Winkert, P. : On the Fučík spectrum for the p –*Laplacian* with Robin Boundary condition.

- [56] Perera, K. : Resonance problems with respect to the Fučík spectrum of the $p - Laplacian$. Electron. J. Differential Equations, pages No. 36, 10 pp. (electronic), (2002).
- [57] Perera, K. : On the Fučík spectrum of the $p - Laplacian$. NoDEA Nonlinear Differential equations Appl., 11(2) :259-270, (2004).
- [58] Struwe, M. : Variational Methods. Springer. (2008)
- [59] Tanaka, M. : Generalized eigenvalue problems for $(p, q) - Laplace$ equation with indefinite weigh, J. Math. Anal. Appl. 419 , 1181-1192.(2014).
- [60] Tanaka, M. : Uniqueness of a positive solution and existence of a sign-changing solution for $(p, q) - Laplace$ equation, J. Nonlinear Funct. Anal. Differ. Equ. , article ID 14.(2014).
- [61] Wenyong, G., Di, G., Jian, C. : The Fučík spectrum of the $p - Laplace$ equations with different weights and its resonance problems, Gan et al Boundary value problems 2017 :31.(2017).
- [62] Wilhelmsson, H. : Explosive instabilities of reaction-diffusion equations, Phys. Rev. A 36 , 965-966.(1987).
- [63] Wu, M., Yang, Z. : A class of $(p, q) - Laplacian$ type equation with potentials eigenvalue problem in \mathbb{R}^N , Boundary Value Problems, ID 185319. (2009).
- [64] Yang, Z. Yin, H. : Multiplicity of positive solutions to a $(p, q) - Laplacian$ equation involving critical nonlinearity, Nonlinear Anal. 75 , 3021-3035.(2012).
- [65] Zeidler, E. : Nonlinear Functional Analysis and its Application III. : Variational Methods and Optimization. Springer Verlag. (1985).
- [66] Zerouali, A. A., Karim, B. : *Existence and non-existence of positive solution for $(p, q) - Laplacian$ with singular weights.* Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) vol. 34 2 (2016).