

BADJI MOKHTAR-ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITÉ BADJI  
MOKHTAR-ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année: 2024

Département de Mathématiques



# THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de doctorat

MÉTHODES VARIATIONNELLES POUR DES  
FONCTIONNELLES NONDIFFÉRENTIABLES APPLIQUÉES  
AUX EDP NONLINÉAIRES

Filière  
Mathématiques

Spécialité  
Mathématiques et Applications

Par:  
Raid ZOUAI

Sous la direction de :

Prof. Nawel BENOUHIBA

Devant le jury :

<b>PRESIDENT :</b>	Abdelhak DJEBABLA	Prof.	U.B.M. ANNABA
<b>EXAMINATEUR :</b>	Mohamed DENCHE	Prof.	U.M. CONSTANTINE
<b>EXAMINATEUR :</b>	Abdelouahab SALMI	Prof.	U.B.M. ANNABA



*A ma grande famille  
Je dédie ce travail.*



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
ملخص	v
<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>Notation générale</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
0.1 Introduction . . . . .	1
0.2 Apport de la thèse . . . . .	7
0.3 Liste des productions scientifiques . . . . .	10
<b>1 Gradient Généralisé</b>	<b>13</b>
1.1 Définitions et propriétés de base . . . . .	14
1.1.1 Dérivée généralisée . . . . .	14
1.1.2 Gradient généralisé . . . . .	17
1.1.3 Fonction d'appui . . . . .	19
1.1.4 Dérivée généralisée de Clarke et autres sens classiques de déri- vation . . . . .	21
1.2 Opération sur le gradient généralisé . . . . .	22
1.2.1 Calcul de base . . . . .	22
1.2.2 Régularité . . . . .	25
1.3 Gradient généralisé dans les espaces fonctionnelle . . . . .	26
<b>2 Méthodes de résolutions</b>	<b>32</b>
2.1 Rappel sur la théorie de la mesure . . . . .	33
2.1.1 Définitions . . . . .	33
2.1.2 Quelques critères de convergence . . . . .	34
2.2 Méthodes Variationnelles . . . . .	35
2.2.1 Suite de Palais Smale . . . . .	35
2.2.2 Théorème du Col "Mountain pass theorem" . . . . .	37
2.3 Principe de concentration-compacité . . . . .	41
<b>3 Les problèmes avec nonlinéarité discontinue</b>	<b>45</b>
3.1 Introduction . . . . .	46
3.2 Problème de type $p$ -Laplacien . . . . .	47
3.2.1 Le $p$ -Laplacien régulier . . . . .	47

---

3.2.2	Problème $p$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues . . . . .	50
3.3	Problème du type $(p, q)$ -Laplacien . . . . .	56
3.3.1	Rappel sur les problèmes du type $(p, q)$ -Laplacien régulier . . . . .	57
3.3.2	Les problèmes de type $(p, q)$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Existence de solutions nontriviales d'un problème de type <math>(p, q)</math>-Laplacien avec des nonlinéarités discontinues</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	64
4.2	Position du problème . . . . .	64
4.2.1	Hypothèses . . . . .	64
4.2.2	Formulation faible . . . . .	64
4.3	Fonctionnelle d'énergie . . . . .	65
4.4	Géométrie du Col . . . . .	66
4.5	La suite de Palais-Smale et ses propriétés . . . . .	69
4.6	Existence des solutions faibles . . . . .	75
4.7	Nontrivialité de la solution . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Existence de solutions nontriviales d'un problème de type <math>(p, q)</math>-Laplacien avec des nonlinéarités discontinues et un exposant critique</b>	<b>81</b>
5.1	Introduction . . . . .	82
5.2	Position du Problème . . . . .	82
5.3	Fonctionnelle d'énergie . . . . .	83
5.4	Existence des solutions faibles . . . . .	85
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>101</b>



# ملخص

عنوان هذه الأطروحة هو "أساليب التغيرات الخاصة بالدوال غير قابلة للإشتقاق وتطبيقاتها على المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية غير الخطية".

خلال هذه الأطروحة قمنا بدراسة معادلة تفاضلية غير خطية من نوع  $(p,q)$ -لابلاس تحتوي على عناصر غير خطية متقطعة، حيث قمنا بإثبات وجود حلول ضعيفة غير معدومة لهذه المعادلة باستعمال نظرية الممر الجبلي الخاصة بالدوال الغير قابلة للإشتقاق وبعض تقنيات التحليل الدالي.

**الكلمات المفتاحية:** الحل الضعيف، نظرية الممر الجبلي، مؤثر  $(p,q)$ -لابلاس ، اللاخطيات المتقطعة، متتالية بالي-سمائل، الأس الحرج.

# RÉSUMÉ

Dans ce travail de recherche, nous étudions l'existence de solutions nontriviales d'une classe de problèmes  $(p, q)$ -Laplacien donnée par

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) + \lambda H(u - \beta)u^{q^*-1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

où  $1 < p < q < N$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction discontinue,  $\lambda$  est un paramètre positif et  $H$  représente la fonction de Heaviside. Nous divisons la thèse en cinq chapitres.

Dans les chapitres 1 et 2, nous examinons en détail les différentes notions et outils que nous utilisons fréquemment dans les chapitres qui suivent.

Dans le chapitre 3, nous proposons une revue exhaustive des principaux concepts et résultats liés à l'analyse des équations elliptiques avec des nonlinéarités discontinues.

Dans le chapitre 4, nous démontrons, en utilisant le théorème du Col ainsi que le principe de Concentration-Compacité, que le problème (1) possède au moins une solution faible nontriviale lorsque  $\lambda = 0$ .

Dans le chapitre 5, nous étudions un problème du type  $(p, q)$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues et un exposant critique. En particulier, nous prouvons que pour certains  $\lambda > 0$ , le problème (1) admet une solution faible nontriviale.

Nous achevons cette thèse par une conclusion générale et une liste de bibliographie.

**Mots clés :** Solution faible ; Théorème du Col ; L'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien ; Nonlinéarité discontinue ; Suite de Palais-Smale ; Exposant critique.

# ABSTRACT

This thesis, titled "Variational Methods for Nondifferentiable Functionals Applied to Nonlinear partial differential equations", investigates the application of variational techniques to analyze nondifferentiable functionals in a nonlinear partial differential equations context. Focusing specifically on a class of  $(p, q)$ -Laplacian problems given by

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) + \lambda H(u - \beta)u^{q^*-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

where  $1 < p < q < N$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a discontinuous function,  $\lambda$  is a positive parameter, and  $H$  represents the Heaviside function. The structure of the thesis is organized across five intricately woven chapters.

Chapter 1 serves as a foundational platform, offering an in-depth examination of the generalized gradient introduced by Clarke. This chapter seeks to establish a foundational comprehension of nonsmooth critical point theory, providing the basis for further investigation in the dissertation.

Chapter 2 focuses on resolution methods, giving special attention to the Mountain Pass Theorem applied to nondifferentiable functionals and the concentration compactness principle. The objective is to present these methods comprehensively, highlighting their applicability and advantages, setting the stage for their pivotal role in Chapters 4 and 5.

Chapter 3 deepens the exploration by offering a comprehensive review of essential concepts and outcomes associated with the analysis of elliptic equations with discontinuous nonlinearities.

Chapter 4, serves as a crucial juncture in the thesis, employing the Mountain Pass Theorem and the Concentration-Compactness principle to show us the existence of non-trivial weak solutions to problem 2 when  $\lambda = 0$ .

The exploration reaches its culmination in Chapter 5, where the research pivots towards the  $(p, q)$ -Laplacian equation with discontinuous nonlinearities and a critical exponent. In this part, the thesis makes a substantial contribution by establishing the existence of non-trivial weak solutions for specific positive values of  $\lambda$ .

In conclusion, the knowledge presented in this thesis has provided me with a solid foundation in the field of nonlinear functional analysis enabling me to attain significant new results in the field of nonlinear nonsmooth partial differential equations.

**Keywords :** Weak solution ; Mountain pass theorem ; The  $(p, q)$ -Laplacian operator ; Discontinuous nonlinearities ; Palais-Smale sequence ; Critical exponent.





# REMERCIEMENTS

C'est avec une immense gratitude et une profonde reconnaissance que je partage ces mots de remerciement après l'achèvement de ma thèse de doctorat. Tout au long de ce parcours académique, j'ai été béni du soutien d'Allah Tout-Puissant.

À ma chère famille, ma source de force et de soutien indéfectible, je vous adresse des remerciements du fond du coeur. Votre amour, vos encouragements et votre compréhension ont été les piliers de ma persévérance.

À ma directrice de thèse, N. Benouhiba, je vous exprime ma plus profonde reconnaissance. Votre expertise, vos conseils éclairés et votre soutien indéfectible ont été la boussole qui a guidé ma thèse vers l'excellence.

Je souhaite également adresser mes remerciements aux membres du jury, dont la contribution et l'évaluation ont enrichi la qualité de mon travail. Votre expertise a été un honneur et un défi que j'ai accueillis avec humilité.

Ma gratitude s'étend à mes proches, à mes amis qui ont partagé ce voyage avec moi. Votre soutien moral et vos encouragements ont été les piliers de ma persévérance.

Je n'oublie pas de remercier chaleureusement les membres du LMA, mes collègues et mes amis. Votre collaboration, vos discussions fructueuses, et votre camaraderie ont coloré ces années d'études d'une expérience inoubliable.

Enfin, à tous mes professeurs tout au long de mon parcours académique, je vous adresse mes remerciements pour le savoir que vous avez partagé et les leçons que vous m'avez inculquées. Chacun de vous a contribué à forger mon chemin académique.

Mes remerciements sont sincères, mes prières sont profondes, et ma reconnaissance est éternelle. Que chacun trouve dans ces mots le reflet de ma gratitude la plus profonde.

---

# NOTATIONS GÉNÉRALES

<i>Symbole</i>	<i>Signification</i>
$\mathbb{R}^N$	Espace Euclidien de dimension $N$
$x \cdot y$	Produit scalaire de $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^N$
$ x $	Module de $x$ , si $x \in \mathbb{R}^N$ , $ x  = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$B_\epsilon(x)$	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon $\epsilon$ centrée en $x \in \mathbb{R}^N$
$\mathcal{B}$	La sigma algèbre de Borel
$X^*$	L'espace dual de $X$
$\ \cdot\ _X$	Norme dans l'espace $X$
$\ \cdot\ _*$	Norme dans l'espace $X^*$
$\rightharpoonup$	Convergence faible
$\rightharpoonup^*$	Convergence préfaible
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions $k$ -fois différentiables sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$
$C_c^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compact
$C^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$
$C_c(\Omega)$	Espace des fonctions continues à support compact dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$
$C_c^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$
$L^p(\Omega)$	Espace des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $p$ -intégrables (Espace de Lebesgue)
$L^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions essentiellement bornées dans $\Omega$
$L_{loc}^p(\Omega)$	Espace des fonctions localement $p$ -intégrables
$L^p(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$ , $p' = \frac{p}{p-1}$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W_0^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$	La fermeture de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme $\ u\ _{1,p} = \int_{\mathbb{R}^N}  \nabla u ^p dx$
$Lip_{loc}(X, Y)$	Espace des fonctions localement lipschitziennes de $X$ vers $Y$
$p^*$	Exposant critique de Sobolev, $p^* = \frac{Np}{N-p}$
$\Delta u$	Laplacien de $u$
$\nabla u$	Gradient de $u$
p.p.	presque pour tous les points
$\partial\Omega$	frontière de $\Omega$
$D_G\Phi(x)$	Dérivée de Gâteaux de $\Phi$ en $x$
$D_s\Phi(x)$	Dérivée stricte de $\Phi$ en $x$
$\Phi^\circ(x; v)$	Dérivée généralisée de $\Phi$ en $x$ suivant la direction $v$
$\partial_Y\Phi(x)$	Gradient généralisé au sens de Clarke de $\Phi$ en $x$ sur le sous-espace $Y \subset X$

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

*Certes Allah aime que lorsque l'un de vous fait un acte qu'il le fasse parfaitement*

---

– Prophète Mohamed (que la prière d'Allah et Son salut soient sur lui)

## 0.1 Introduction

Au fil des années, l'intérêt accordé à l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP) nonlinéaires contenant des nonlinéarités discontinues a connu une valorisation significative. Ce domaine de recherche a suscité un engouement particulier en raison de sa capacité à aborder et à décrire un vaste éventail de phénomènes complexes et diversifiés. Cette popularité croissante peut être attribuée à la prise de conscience que la nature elle-même présente souvent des irrégularités, des discontinuités et des comportements nonlinéaires qui nécessitent une modélisation et une analyse mathématiques avancées.

Les EDP jouent un rôle crucial dans la description des lois fondamentales qui régissent un large éventail de phénomènes physiques, techniques et mathématiques. Ces équations fournissent un cadre mathématique puissant pour comprendre et prédire le comportement des systèmes complexes. Il convient de noter que de nombreux phénomènes physiques présentent des caractéristiques nonlinéaires, ce qui rend leur modélisation et leur analyse mathématiques difficiles.

Lorsqu'il s'agit de formuler des modèles mathématiques pour différents phénomènes, les EDP sont souvent utilisées en raison de leur capacité à capturer les relations et les interactions complexes entre différentes variables. Ces équations impliquent des dérivées partielles, représentant la manière dont le système change en fonction de plusieurs variables indépendantes. Par conséquent, les EDP nous permettent d'étudier et de comprendre divers phénomènes tels que la conduction thermique, la dynamique des fluides, les champs électromagnétiques et la mécanique quantique...

Pour résoudre les EDP, les chercheurs ont développé un vaste répertoire de techniques analytiques et numériques. Une classe commune de problèmes concerne l'existence et les propriétés des solutions des équations elliptiques, qu'elles soient linéaires ou

nonlinéaires. Ces problèmes se posent dans divers domaines, notamment la physique, l'ingénierie et la biologie.

La forme générale de l'équation modèle pour de tels problèmes peut être écrite comme suit :

$$Au = g(u), \quad x \in \Omega,$$

où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  représente le domaine spatial,  $A$  est un opérateur différentiel de type divergence,  $u$  est une fonction inconnue définie sur  $\Omega$ , et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  désigne une fonction donnée.

Pour résoudre des problèmes de telle difficulté, les mathématiciens ont développé des cadres innovants. Une approche largement adoptée est les méthodes variationnelles, qui fournit un outil puissant pour assurer l'existence des solutions des équations elliptiques. En particulier, ces problèmes peuvent être reformulés comme la recherche de points critiques d'une fonctionnelle  $I$  définie sur un espace de Banach  $X$ .

Si la fonction  $g$  est continue, la fonctionnelle  $I$  associée au problème représente des propriétés de différentiabilité régulière, appartenant spécifiquement à la classe  $C^1$ . Cette propriété permet d'appliquer les techniques d'optimisation et la théorie classique des points critiques pour localiser les points critiques de  $I$ . En analysant ces points critiques, on peut obtenir des informations sur l'existence, l'unicité et le comportement qualitatif des solutions des équation sous-jacentes.

Étant donné que les phénomènes physiques présentent souvent une nature plus chaotique et imprévisible, de nombreux problèmes elliptiques se caractérisent par des nonlinéarités discontinues [16, 14, 20, 21, 23], ce qui rend leur résolution considérablement plus ardue. En effet, la présence de termes discontinues nonlinéaires constitue un obstacle à la mise en oeuvre de la théorie des points critiques classiques, ce qui requiert donc l'élaboration de nouvelles approches théoriques novatrices.

Dans cette optique, afin de surmonter cette difficulté, une avancée significative a été réalisée par Chang [42] en 1981, qui a étendu les théorèmes de points critiques à la classe des fonctions localement lipschitziennes, en utilisant la notion du gradient généralisé introduite par Clarke [47] en 1975. Cette extension théorique a marqué une avancé significative dans la compréhension et la résolution des problèmes elliptiques comportant des nonlinéarités discontinues.

En outre, Chang a apporté d'importantes contributions en développant les règles du

calcul différentiel dans les espaces fonctionnels, fournissant ainsi un cadre mathématique solide pour l'analyse et la manipulation de ces équations complexes. Grâce à ces développements théoriques, il est désormais possible d'étudier de manière approfondie les équations contenant des nonlinéarités discontinues, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives de recherche dans ce domaine.

Au cours des années 80 et au début des années 90, les chercheurs ont manifesté un vif intérêt pour les équations présentant des nonlinéarités discontinues, en particulier celles de type Laplacien et  $p$ -Laplacien, dans des domaines bornés [20, 16]. Les chercheurs étaient motivés par le désir de comprendre le comportement complexe de ces équations et de dévoiler leurs propriétés mathématiques.

En 2000, une avancée importante a été réalisée avec l'introduction de la version faible du théorème de Col par Rădulescu [93]. En s'appuyant sur ce théorème révolutionnaire, Gazzola, F. et Rădulescu, V. [60] ont pu établir, pour la première fois, plusieurs résultats concernant l'existence des solutions à une équation de type Laplacien avec une nonlinéarité discontinue dans un domaine non borné, en particulier  $\mathbb{R}^N$ . Ce résultat a ouvert de nouvelles voies de recherche, permettant une exploration plus approfondie des équations au-delà des limites des domaines bornés. Par la suite, Alves, C.O. et Bertone, A. et Gonçalves, J.V.[4] ont apporté des contributions notables à cette ligne de recherche en étendant et en généralisant les résultats initialement obtenus par Gazzola, F. et Rădulescu.

En 2003, Alves, C.O. et Bertone, A [3] ont fait de nouveaux progrès dans ce domaine en se penchant sur l'étude des équations comportant des opérateurs  $p$ -Laplaciens avec des nonlinéarités discontinues et des exposants critiques dans le contexte de  $\mathbb{R}^N$ . Cette étude a ouvert la voie à une meilleure compréhension de l'interaction complexe entre les différents composants de ces équations. S'appuyant sur les travaux d'Alves, Shang [100] a mené une étude complète en 2018, en se concentrant sur l'équation :

$$\Delta_p u = \lambda |u|^{p^*-1} u + f(x, u) \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

Cette étude, qui constitue une extension naturelle des résultats obtenus par Alves [3], a attiré l'attention des chercheurs désireux d'élucider le comportement et les propriétés des équations nonlinéaires dans des domaines non bornés. Les recherches de Shang ont mis en lumière les mécanismes sous-jacents qui régissent ces équations et ont fourni des informations précieuses sur leurs solutions.

En 2019, Figueiredo, G.M. et Nascimento, R.G. [57] se sont lancés dans une étude pionnière qui explore les équations incorporant des nonlinéarités discontinues avec l'opé-

rateur  $(p, q)$ -Laplacien. Cet opérateur, défini par l'expression

$$\Delta_{p,q}u = \Delta_p u + \Delta_q u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2}\nabla u),$$

saisit l'interaction complexe entre les opérateurs  $p$ -Laplacien et  $q$ -Laplacien. Notamment, l'étude de Figueiredo, G.M. et Nascimento, R.G. s'est concentrée exclusivement sur les domaines bornés, visant à démêler les complexités associées aux équations de cette nature dans un cadre spatial confiné.

La présente thèse est consacrée à l'étude complète d'un problème spécifique connu sous le nom de problème du  $(p, q)$ -Laplacien présentant des nonlinéarités discontinues dans  $\mathbb{R}^N$ . Le problème considéré est formulé comme suit :

$$-\Delta_{p,q}u = f(u) + \lambda H(u - \beta)u^{q^*-1}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (0.1.1)$$

où  $1 < p < q < N$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\beta > 0$ , et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction présentant des discontinuités.

Le problème (0.1.1) mentionné précédemment provient d'une classe plus large de systèmes de réaction-diffusion, qui sont fondamentaux pour la compréhension de divers phénomènes dans différents domaines scientifiques. En particulier, le modèle prototype qui englobe ces systèmes peut être formulé mathématiquement comme suit :

$$u_t = -\operatorname{div}[D(\nabla u)\nabla u] + g(u).$$

Dans cette équation, la variable  $u$  représente la concentration, et le terme  $-\operatorname{div}[D(\nabla u)\nabla u]$  dans l'équation caractérise la composante diffusive du système. Il décrit la diffusion spatiale de la concentration, où  $D(\nabla u)$  représente le coefficient de diffusion. Le coefficient de diffusion lui-même est déterminé par le gradient de la concentration, désigné par  $\nabla u$ . Une forme spécifique de  $D(\nabla u)$  est donnée par  $|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u$ , qui rend compte de la dépendance de la diffusion par rapport au gradient de concentration local. D'autre part, la fonction  $g(u) = f(u) + \lambda H(u - \beta)u^{q^*-1}$  représente l'aspect réactif du système. Elle incorpore à la fois les processus de source et de perte qui contribuent à la dynamique globale de la concentration.

En utilisant ce prototype de modèle, les chercheurs disposent d'un cadre polyvalent pour étudier un large éventail de systèmes de réaction-diffusion et explorer leurs implications dans divers domaines. La formulation mathématique fournit une base pour l'étude des modèles complexes, des propriétés de stabilité et des comportements émer-

gents qui découlent de l'interaction entre les processus de diffusion et de réaction.

L'étude de ce problème particulier présente de nombreux défis qui nécessitent un examen attentif et de nouvelles approches. Ces défis comprennent, mais ne sont pas limités aux points suivants

1. La présence de nonlinéarités discontinues pose des difficultés dans l'application de la théorie conventionnelle des points critiques. Les outils et techniques traditionnels utilisés dans l'analyse des systèmes réguliers ou continus sont insuffisants pour aborder les complexités introduites par la nature discontinue des termes non-linéaires.
2. L'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien présente lui-même une nonlinéarité inhérente. Cette nonlinéarité complique encore l'analyse et nécessite le développement du cadre mathématique et de méthodologies adaptés pour la traiter efficacement.
3. La nature non bornée du domaine  $\mathbb{R}^N$  introduit des complications supplémentaires. En particulier, le manque de compacité des injections de Sobolev devient un problème important. L'absence de compacité entrave l'application des arguments standards de compacité, ce qui nécessite l'exploration de techniques alternatives pour surmonter cet obstacle.
4. L'exposant critique associé au problème induit une perte d'injections compactes locales, exacerbant le défi d'établir les propriétés et le comportement souhaités des solutions. Cette perte de compacité nécessite l'exploration de stratégies alternatives et l'utilisation d'outils spécialisés pour surmonter ses effets néfastes.

Afin de relever ces redoutables défis et éclairer la problématique en question, nous exploitons le principe de concentration-compacité, tel qu'il est introduit à l'origine par Lions [79, 80, 81, 82], et le théorème de Col conçu spécifiquement pour les fonctions nondifférentiable [93, 94, 63]. Ces cadres théoriques offrent des voies prometteuses pour surmonter les obstacles posés par les nonlinéarités discontinues, la nonlinéarité de l'opérateur Laplacien  $(p, q)$ , le manque de compacité, et la perte des injections compactes locales induite par l'exposant critique.

En employant ces outils mathématiques avancés, cette étude s'efforce de fournir une analyse complète et perspicace du problème  $(p, q)$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues dans  $\mathbb{R}^N$ . Les conclusions et les idées tirées de cette recherche sont organisées dans cette thèse comme suit :

Dans le chapitre 1, nous examinons en détail les résultats fondamentaux concernant le gradient généralisé introduit par Clarke. Nous présentons également aux lecteurs certains concepts essentiels de la théorie des points critiques non régulière. Notre intention est de créer les bases pour les chapitres à venir.

Le chapitre 2 offre une plateforme pour introduire les méthodes variationnelles qui occupent une position centrale dans les chapitres 4 et 5. Nous fournissons une analyse détaillée et approfondie de ces méthodes, en soulignant leur applicabilité et leurs avantages dans la résolution des problèmes considérés.

Dans le chapitre 3, nous présentons un aperçu complet des concepts et résultats fondamentaux de l'analyse des équations elliptiques avec des nonlinéarités discontinues. Plus précisément, nous exposons une synthèse des problèmes liés au  $p$ -Laplacien et au  $(p, q)$ -Laplacien, en examinant leur pertinence et leurs caractéristiques. De plus, nous donnons un aperçu des articles les plus notables dans ce domaine.

Dédié entièrement à l'étude du problème (0.1.1) sous la condition  $\lambda = 0$ , le chapitre 4 apparaît comme une partie cruciale de cette thèse. Ici, nous concentrons nos efforts sur l'étude de ce problème dans ces moindres détails. La démonstration de l'existence d'une solution nontriviale de l'équation suivante est particulièrement intéressante :

$$-\Delta_{p,q}u = f(u), \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (0.1.2)$$

En fournissant des preuves rigoureuses et en mettant en évidence l'importance de ce résultat, nous contribuons à la compréhension de ce cas particulier et mettons les bases d'une analyse plus approfondie.

Dans le chapitre 5, nous étendons notre exploration pour traiter le problème donné par l'équation 0.1.1. Nous introduisons ici le paramètre  $\lambda > 0$  et étudions les implications qu'il a sur le problème. En examinant attentivement ce cas et en considérant l'influence des différents paramètres, nous désirons fournir une compréhension complète du comportement du problème et de ses solutions.

Enfin, dans la conclusion de cette thèse, nous offrons un résumé complet des différents résultats obtenus tout au long de notre recherche. Nous soulignons l'importance de nos résultats et leurs implications potentielles dans un domaine d'étude plus large. En outre, nous soulignons les limites et les difficultés rencontrées au cours du processus de recherche, en suggérant des pistes d'exploration futures et des orientations potentielles

pour des recherches plus approfondies.

## 0.2 Apport de la thèse

Afin de permettre une lecture aisée du présent manuscrit, nous offrons dans ce qui suit un bref résumé de chaque chapitre.

Les deux premiers chapitres ont été soigneusement dédiés à l'exposition de différentes définitions et concepts importants qui mettent les bases de la compréhension du reste de la thèse. Nous exposons également aux lecteurs quelques principes fondamentaux de la théorie des points critiques. En établissant soigneusement ce travail de base, nous avons voulu nous assurer que les lecteurs possèdent les connaissances et le contexte nécessaires pour s'engager pleinement dans les chapitres qui suivent.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une synthèse des problèmes discontinus et les travaux antérieurs les plus significatifs dans ce domaine.

### Résultats principaux du chapitre 4

Dans ce chapitre, nous avons examiné le problème  $(p, q)$ -Laplacien suivant

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) \text{ dans } \mathbb{R}^N, \quad (0.2.1)$$

où  $1 < p < q < N$ ,  $N \geq 2$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ce problème est étudié en prenant en compte les conditions suivantes.

( $f_1$ ) Il existent  $C > 0$  et  $r \in (\max\{q, p^*\}, q^*)$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$|f(t)| \leq C|t|^{r-1},$$

et

$$f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \leq 0.$$

( $f_2$ ) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$0 \leq rF(t) \leq t\underline{f}(t),$$

où

$$\underline{f}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,inf}_{|t-s| < \epsilon} f(s) \quad \text{et} \quad \bar{f}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{|t-s| < \epsilon} f(s).$$

On est concerné dans ce chapitre par trouver une démonstration du résultat d'existence des solutions faibles pour le problème 0.2.1.

Le principal résultat obtenu dans ce chapitre, porteur d'une importance significative, réside dans le théorème suivant.

**Théorème 0.2.1.** *Supposons que  $1 < p < q < N$  et que  $(f_1)$  et  $(f_2)$  sont valables, alors le problème (0.2.1) possède au moins une solution faible nontriviale.*

Nous commençons les preuves par la définition de la fonctionnelle

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx, \text{ pour tout } u \in E,$$

où  $F(u) = \int_0^u f(t) dt$  et  $E = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ . Nous démontrons ensuite qu'elle est localement Lipschitzienne, puis nous établissons que les points critiques de la fonctionnelle  $I$  sont des solutions faibles du problème (0.2.1).

Ce qui suit sont des résultats auxiliaires liés au Théorème 0.2.1.

**Lemme 0.2.1.** *Il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que*

$$f(t) \geq C_1 t^{r-1} - C_2, \text{ p.p. } t \in [0, +\infty).$$

Compte tenu de cette inégalité, nous pouvons observer que la fonction  $I$  satisfait la géométrie du Col, comme le résume le lemme suivant.

**Lemme 0.2.2.** (i)  $I(0) = 0$ ,

(ii) *il existe  $R > 0$  et  $\alpha > 0$ , tels que  $I(u) \geq \alpha$ , si  $\|u\| = R$ ,*

(iii) *il existe  $e \in X \setminus B_R(0)$  tel que  $I(e) < 0$ .*

En utilisant le lemme précédent ainsi que le théorème de Col, nous pouvons établir l'existence d'une suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$ . Notamment,

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ et } \lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \tag{0.2.2}$$

**Lemme 0.2.3.** *La suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$  est bornée dans  $E$ .*

La réflexivité de l'espace  $E$  garantit l'existence d'une sous-suite de  $u_n$  (également notée  $u_n$ ) qui converge de manière faible vers un élément  $u$  appartenant à  $E$ .

**Lemme 0.2.4.** *La suite  $\{u_n\}$  satisfait*

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Si nous rassemblons toutes ces informations, nous pouvons prouver que la limite faible de la suite de Palais-Smale  $u$  est une solution faible, mais il se peut qu'elle soit triviale. En appliquant le principe de concentration-compacité (le cas localement compact), nous pouvons conclure que  $u$  est nontriviale.

## Résultats principaux du chapitre 5

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions faibles nontriviales pour l'équation (0.1.1) lorsque  $\lambda > 0$  sous les mêmes hypothèses utilisées au Chapitre 4 sur la nonlinéarité  $f$ . Explicitement, nous nous sommes intéressés au problème  $(p, q)$ -Laplacien suivant

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) + \lambda H(u - \beta)u^{q^*-1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (0.2.3)$$

où  $1 < p < q < N$ ,  $N \geq 2$ ,  $q^*$  est l'exposant de Sobolev, la fonction  $f$  est à variable et à valeurs réelles et la fonction de Heaviside est représentée par  $H$ .

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

**Théorème 0.2.2.** *Supposons que les hypothèses  $(f_1)$  et  $(f_2)$  sont satisfait, alors il existe un  $\lambda_* > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , le problème (0.2.3) admet au moins une solution faible nontriviale.*

Une fonction  $u \in E = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  est dite solution faible du problème (0.2.3) si elle vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho \varphi dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \xi \varphi dx, \quad (0.2.4)$$

pour tous  $\varphi \in E$  avec

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \quad (0.2.5)$$

et

$$\xi(x) \in [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N. \quad (0.2.6)$$

avec  $\underline{g}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \inf_{|t-s| < \epsilon} g(s)$  et  $\overline{g}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|t-s| < \epsilon} g(s)$  où  $g(t) = H(t - \beta)t^{q^*-1}$ .

La fonction énergétique associée au problème (0.2.3) peut être exprimée comme suit :

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx, \quad (0.2.7)$$

où  $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ .

En exploitant le principe de Concentration-Compacité de Lions (cas limite), nous avons été en mesure de démontrer qu'il existe  $\lambda_* > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  le problème (0.2.3) admet une solution faible  $u$  qui est une limite faible d'une suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$ .

Compte tenu des hypothèses  $(f_1)$  et  $(f_2)$ , nous pouvons également vérifier que la fonctionnelle  $I_\lambda$  satisfait la géométrie du Col.

En combinant toutes ces informations, nous parvenons à prouver le résultat principal de cette section en utilisant le théorème du Col.

### 0.3 Liste des productions scientifiques

Les recherches effectuées dans le cadre de cette thèse ont donné lieu à une série de publications et de présentations, listés ci-dessous.

#### Publications internationales

R. Zouai et N. Benouhiba, *Nontrivial solutions for a nonlinear elliptic equation of  $(p, q)$ -Laplacian type with a discontinuous nonlinearity in  $\mathbb{R}^N$* , Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 9 :247-262(2023).

R. Zouai and N. Benouhiba. *Nontrivial weak solutions for a  $(p, q)$ -Laplacian equation involving discontinuities with critical exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 527(2) :127448, (2023).

**Actes de conférences internationales**

R. Zouai et N. Benouhiba, *Existence of nontrivial solutions for  $(p, q)$ -Laplacian problem with discontinuous nonlinearity*, Istanbul Mathematics Conference, Istanbul, December 2021.

R. Zouai et N. Benouhiba, *Nontrivial solutions for a discontinuous Schrödinger equation in  $\mathbb{R}^N$* , 7th International Workshop on Applied Mathematics and Modelling "WIMAM'2023", Guelma, December 2023.

**Actes de conférences nationales**

R. Zouai et N. Benouhiba, *Existence d'une solution nontriviale d'un problème  $p$ -elliptique avec nonlinéarité discontinue*, Mini-congrès des mathématiques algériens, M'sila, October 2021.

R. Zouai et N. Benouhiba, *Existence d'une solution positive d'un problème  $(p, q)$ -elliptique avec nonlinéarité discontinue*, Journées Jeunes Chercheurs en Mathématiques et Applications, Annaba, November 2021.

R. Zouai et N. Benouhiba, *Positive solutions for a discontinuous  $(p, q)$ -Laplacian problem without the Ambrosetti-Rabinowitz condition*, Third National Mathematics Seminar, Constantine, May 2022.

R. Zouai et N. Benouhiba, *Problème elliptique de type  $p$ -Laplacien avec nonlinéarité discontinue dans  $\mathbb{R}^N$* , Journées Jeunes Chercheurs en Mathématiques et Applications, Annaba, Décembre 2022.

R. Zouai et N. Benouhiba, *A variational approach for a stationary Schrödinger equation with discontinuous nonlinearities in  $\mathbb{R}^N$* , Journées Jeunes Chercheurs en Mathématiques et Applications, Annaba, Décembre 2023.



# GRADIENT GÉNÉRALISÉ

*La volonté trouve, la liberté choisit.  
Trouver et choisir, c'est penser*

– Victor Hugo

*Ce qui est maintenant prouvé ne fut  
jadis qu'imaginé*

– William Blake

---

1.1	Définitions et propriétés de base . . . . .	14
1.1.1	Dérivée généralisée . . . . .	14
1.1.2	Gradient généralisé . . . . .	17
1.1.3	Fonction d'appui . . . . .	19
1.1.4	Dérivée généralisée de Clarke et autres sens classiques de dérivation . . . . .	21
1.2	Opération sur le gradient généralisé . . . . .	22
1.2.1	Calcul de base . . . . .	22
1.2.2	Régularité . . . . .	25
1.3	Gradient généralisé dans les espaces fonctionnelle . . . . .	26

---

## 1.1 Définitions et propriétés de base

Dans cette partie nous allons introduire les concepts fondamentaux du calcul de gradient généralisé développé par F. H. Clarke.

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach.

### 1.1.1 Dérivée généralisée

**Définition 1.1.1.** Soit  $Y$  un sous-ensemble de  $X$  et  $\Phi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. La fonction  $\Phi$  est dite Lipschitzienne de rang  $K$  s'il existe un  $K > 0$  tel que pour tout  $u, u'$  dans  $Y$  on a

$$|\Phi(u) - \Phi(u')| \leq K\|u - u'\|.$$

La fonction  $\Phi$  est dite Lipschitzienne aux voisinage d'un point  $u$  s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que la restriction de  $\Phi$  à  $B_\epsilon(u)$  est Lipschitzienne.

La fonction  $\Phi$  est dite localement Lipschitzienne sur  $Y$  si pour tout  $u \in Y$ , il existent  $K_u, \epsilon_u > 0$  tels que

$$|\Phi(u') - \Phi(u'')| \leq K_u\|u' - u''\|, \text{ pour tous } u', u'' \in B_{\epsilon_u}(u).$$

**Définition 1.1.2.** Soit  $\Phi$  une fonction Lipschitzienne au voisinage de  $u \in X$  et soit  $v$  un vecteur de  $X$ . Alors, la dérivée généralisée de  $\Phi$  au point  $u$  suivant la direction  $v$  est définie par

$$\Phi^\circ(u; v) = \limsup_{w \rightarrow u} \frac{\Phi(w + \lambda v) - \Phi(w)}{\lambda} \quad (1.1.1)$$

où  $w \in X$  et  $\lambda$  est un scalaire positif.

#### Remarque.

(i) La dérivée généralisée d'une fonction ne présuppose pas l'existence de la limite. Néanmoins, si la fonction est localement Lipschitzienne alors  $\Phi^\circ(u; v)$  est un nombre fini.

(ii) la limite supérieur dans (1.1.1) n'est influencée que par le comportement de  $\Phi$  au voisinage de  $u$  d'une façon arbitraire. Ainsi, cette notion est différente de la dérivée directionnelle traditionnelle.

**Proposition 1.1.1.** Soit  $\Phi$  une fonction Lipschitzienne de rang  $K$  au voisinage de  $u$ . Alors

(a) La fonction  $v \mapsto \Phi^\circ(u; v)$  est finie, positivement homogène et sous-additive sur  $X$ .  
De plus,  $\Phi$  satisfait

$$|\Phi^\circ(u; v)| \leq K\|v\|, \forall v \in X.$$

(b) La fonction  $\Phi^\circ(u; v)$  est semi-continue supérieurement par rapport à  $(u; v)$ .

(c)  $\Phi^\circ(u; -v) = (-\Phi)^\circ(u; v)$ .

*Démonstration.* (a) Puisque  $\Phi$  est une fonction Lipschitzienne de rang  $K$  au voisinage de  $u$ , il exist  $\epsilon > 0$  tel que  $\Phi$  est Lipschitzienne sur  $B_\epsilon(u)$ . Donc, pour tout  $w, v \in X$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\|w - u\| < \epsilon$  et  $\|w + \lambda v - u\| < \epsilon$  on a

$$-K\|v\| < \frac{\Phi(w + \lambda v) - \Phi(w)}{\lambda} < K\|v\|.$$

Il en résulte que

$$|\Phi^\circ(u; v)| \leq K\|v\|.$$

En utilisant la définition de  $\Phi^\circ(u, v)$  il est facile de montrer que  $\Phi^\circ(u; \alpha v) = \alpha\Phi^\circ(u; v)$  pour tout  $\alpha > 0$  c'est-à-dire  $\Phi$  est positivement homogène. Maintenant, nous allons montrer la sous-additivité de  $\Phi^\circ(u; v)$ . Nous calculons

$$\begin{aligned} \Phi^\circ(u; v_1 + v_2) &= \limsup_{w \rightarrow u} \sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(w + \lambda v_1 + \lambda v_2) - \Phi(w)}{\lambda} \\ &\leq \limsup_{w \rightarrow u} \sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(w + \lambda v_1 + \lambda v_2) - \Phi(w + \lambda v_1)}{\lambda} + \limsup_{w \rightarrow u} \sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(w + \lambda v_1) - \Phi(w)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\Phi^\circ(u; v_1 + v_2) \leq \Phi^\circ(u; v_1) + \Phi^\circ(u; v_2)$$

c'est-à-dire que la fonction  $\Phi^\circ(u; v)$  est sous-additive par rapport à  $v$ .

(b) Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites arbitraires convergeant vers  $u$  et  $v$  respectivement. D'après la définition de la limite supérieure, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ils existent  $w_n \in X$  et  $t_n > 0$  tels que

$$\|w_n - u_n\| + t_n < \frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned}\Phi^\circ(u_n; v_n) - \frac{1}{n} &\leq \frac{\Phi(w_n + t_n v_n) - \Phi(w_n)}{t_n} \\ &= \frac{\Phi(w_n + t_n v) - \Phi(w_n)}{t_n} + \frac{\Phi(w_n + t_n v_n) - \Phi(w_n + t_n v)}{t_n}.\end{aligned}$$

Puisque  $\Phi$  est Lipschitzienne de rang  $K$  en  $u$  alors on a

$$\frac{\Phi(w_n + t_n v_n) - \Phi(w_n + t_n v)}{t_n} \leq K \|v_n - v\|.$$

Quand on passe à la limite supérieure lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi^\circ(u_n; v_n) \leq \Phi^\circ(u; v).$$

Par conséquent, la fonction  $\Phi$  est semi-continue supérieurement. Maintenant, on démontre que  $\Phi$  est  $K$ -Lipschitzienne par rapport à  $v$ . Soit  $v_1, v_2 \in X$ , on a pour  $t > 0$

$$\Phi(w + t v_1) - \Phi(w + t v_2) \leq K \|v_1 - v_2\| t$$

donc

$$\Phi(w + t v_1) - \Phi(w) \leq \Phi(w + t v_2) - \Phi(w) + K \|v_1 - v_2\| t$$

pour  $w$  près de  $u$  et  $t$  près de 0. Divison par  $t$  et passons à la limite supérieure lorsque  $w \rightarrow u$  et  $t \downarrow 0$ , on obtient

$$\Phi^\circ(u; v_1) \leq \Phi^\circ(u; v_2) + K \|v_1 - v_2\|.$$

L'inégalité précédente reste vraie si l'on permute  $v_1$  et  $v_2$ . Nous concluons ainsi que  $\Phi(u; \cdot)$  est  $K$ -Lipschitzienne .

(c) Par définition, on a

$$\Phi^\circ(u; -v) = \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\Phi(w - t v) - \Phi(w)}{t}.$$

En utilisant le changement de variable  $x = w - t v$ , on aura  $x \rightarrow u$  lorsque  $w \rightarrow u$  et  $t \rightarrow 0$  et la limite précédente devient

$$\Phi^\circ(u; -v) = \limsup_{\substack{x \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\Phi(x) - \Phi(x + t v)}{t} = (-\Phi)^\circ(u; v),$$

d'où le résultat.

□

### 1.1.2 Gradient généralisé

Dans cette partie, nous introduisons la notion du gradient généralisé. Ceci peut se faire de deux façon. la première définition tire sa consistance de la version analytique du théoreme de Hahn-Banach qui permet le prolongement des formes linéaires continues minorantes des fonctions positivement homogènes et sous-additives à des éléments de l'espace dual ayant la même propriété de minoration. Une deuxième définition équivalente du gradient généralisé repose sur la notion de la fonction d'appui que nous verrons ultérieurement.

**Définition 1.1.3.** *Le gradient généralisé de Clarke d'une fonction  $\Phi$ , noté  $\partial\Phi$  en un point  $u \in X$  est défini par*

$$\partial\Phi(u) = \{\rho \in X^* : \Phi^\circ(u; v) \geq \langle \rho, v \rangle \text{ pour tout } v \in X\}. \quad (1.1.2)$$

Dans la proposition suivante, nous résumons quelques propriétés de cette notion.

**Proposition 1.1.2.** *Si  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne de rang  $K$  en  $u$ . Les assertion suivantes sont vraies*

(a)  $\partial\Phi(u)$  est un sous-ensemble nonvide, convexe, faiblement\*-compact dans  $X^*$  et

$$\|\rho\|_* \leq K \text{ pour tout } \rho \in \partial\Phi(u).$$

(b) Pour tout  $v \in X$  on a

$$\Phi^\circ(u; v) = \max\{\langle \rho, v \rangle : \rho \in \partial\Phi(u)\}.$$

*Démonstration.* (a) Soit  $w \in X$ ,  $w \neq 0$  fixé. on note par  $W$  le sous-espace vectoriel engendré par l'élément  $w$ . On definit sur  $W$  l'application

$$\begin{aligned} \Lambda : W &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda w &\mapsto \lambda \Phi^\circ(u; w), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a

$$\begin{cases} \Lambda(\lambda w) = \lambda \Phi^\circ(u; w) = \Phi^\circ(u; \lambda w), \\ \Lambda(-\lambda w) = -\lambda \Phi^\circ(u; w) = -\Phi^\circ(u; \lambda w) \leq \Phi^\circ(u; -\lambda w). \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Par conséquent,  $\Lambda$  satisfait

$$\Lambda(\lambda w) \leq \Phi^\circ(u; \lambda w), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.1.4)$$

De sa définition,  $\Lambda$  est linéaire et continue sur le sous-espace vectoriel  $W$ . De la relation (1.1.4) et du théorème de Hahn-Banach, cette forme admet un prolongement linéaire et continue  $\rho$ , c'est à dire un élément de l'espace dual  $X^*$  qui vérifie

$$\langle \rho, \lambda w \rangle = \lambda \Phi^\circ(u; w), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

et

$$\langle \rho, v \rangle \leq \Phi^\circ(u; v), \quad \forall v \in X. \quad (1.1.5)$$

La relation (1.1.5) confirme que  $\partial\Phi(u)$  n'est pas vide.

Nous allons montrer maintenant que  $\partial\Phi(u)$  est convexe. Si  $\rho_1, \rho_2 \in \partial\Phi(u)$ , alors nécessairement

$$\begin{cases} \langle \rho_1, v \rangle \leq \Phi^\circ(u, v), \\ \langle \rho_2, v \rangle \leq \Phi^\circ(u, v), \quad \forall v \in X. \end{cases}$$

Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  on a

$$\langle \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2, v \rangle = \alpha\langle \rho_1, v \rangle + (1 - \alpha)\langle \rho_2, v \rangle \leq \Phi^\circ(u, v), \quad \forall v \in X.$$

Par conséquent  $(\alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2) \in \partial\Phi(u)$  c'est-à-dire  $\partial\Phi(u)$  est un ensemble convexe.

La faible\*-compacité de  $\partial\Phi(u)$  sera une conséquence évidente du théorème d'Alaoglu [85] si l'on arrive à démontrer que  $\partial\Phi(u)$  est borné.

D'après le point (a) de la Proposition 1.1.1 on a

$$|\Phi^\circ(u, v)| \leq K\|v\|, \quad \forall v \in X.$$

Pour tout  $\rho \in \partial\Phi(u)$  on aura alors

$$|\langle \rho, v \rangle| \leq K\|v\|, \quad \forall v \in X.$$

Ce qui implique que  $\|\rho\|_* \leq K$  où  $\|\cdot\|_*$  est la norme de  $X^*$ .

On en déduit que  $\Phi(u)$  est bornée dans  $X^*$ , et donc il est faiblement\* compact.

(b) De la définition du gradient généralisé on a directement que

$$\max\{\langle \rho, v \rangle; \rho \in \partial\Phi(u)\} \leq \Phi^\circ(u; v), \quad \forall v \in X.$$

Pour démontrer l'autre sens, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe

$w \in X$  tel que

$$\Phi^\circ(u; w) > \max\{\langle \rho, w \rangle; \rho \in \partial\Phi(u)\}. \quad (1.1.6)$$

Suivant la même démarche utilisée dans la preuve du point (a) et en utilisant le théoreme de Hahn-Banach on peut assurer l'existence d'un élément  $\xi \in X^*$  qui vérifie

$$\begin{aligned} \langle \xi, w \rangle &= \Phi^\circ(u; w) \text{ et} \\ \Phi^\circ(u; v) &\geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X. \end{aligned}$$

La dernière inégalité confirme que  $\xi \in \partial\Phi(u)$ . Ceci avec l'inégalité (1.1.6) conduit à la contradiction

$$\Phi^\circ(u; w) > \langle \xi, w \rangle = \Phi^\circ(u; w).$$

□

**Exemple 1.** Nous voulons déterminer le gradient généralisé de la fonction valeur absolue  $\Phi(x) = |x|$  au point  $x = 0$ . Remarquons que la fonction  $\Phi$  n'est pas différentiable en  $x = 0$ . Puisque  $\Phi$  est localement Lipschitzienne, alors elle est dérivable aux sens de Clarke. Par un simple calcul, on obtient

$$\Phi^\circ(0; v) = |v|.$$

Ainsi, le gradient généralisé de  $\Phi$  en 0 est

$$\partial\Phi(0) = \{\rho \in \mathbb{R} : |v| \geq \rho v, \forall v \in \mathbb{R}\} = [-1, 1].$$

**Exemple 2.** Le gradient généralisé de la fonction  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$\Phi(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est

$$\partial\Phi(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \leq 0 \\ \{\frac{1}{2\sqrt{x}}\} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

### 1.1.3 Fonction d'appui

Les ensembles convexes fermés sont caractérisés par leur fonction d'appui. Rappelons que la fonction d'appui d'un sous-ensemble nonvide  $A$  de  $X$  est donnée par

$$\begin{aligned}\sigma_A : X^* &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \varsigma &\mapsto \sup\{\langle \varsigma, u \rangle : u \in A\}.\end{aligned}$$

Si  $\Sigma$  est un sous-ensemble nonvide de  $X^*$ , sa fonction d'appui est une fonction  $\sigma_\Sigma : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  définie comme suit

$$\sigma_\Sigma(u) = \sup\{\langle \varsigma, u \rangle : \varsigma \in \Sigma\},$$

si l'on considère que  $X$  est un sous-ensemble de  $X^{**}$ .

Nous tenons à préciser que nous avons introduit la notion de la fonction d'appui pour deux raisons. La première est la mise en évidence de la relation intime entre la dérivée généralisée et le gradient généralisé d'une fonction localement Lipschitzienne. Quant à la deuxième raison, la fonction d'appui permet une caractérisation simple de la propriété de la faible\*-compacité.

D'après les travaux de Hörmander [66] sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, si  $A, B$  sont deux sous-ensembles nonvides, convexes et fermés de  $X$ , et si  $\Sigma, \Lambda$  sont deux sous-ensembles nonvides qui sont faiblement\*-fermés, alors on a

- (1)  $A \subset B$  si et seulement si  $\sigma_A(\varsigma) \leq \sigma_B(\varsigma)$  pour tout  $\varsigma \in X^*$ .
- (2)  $\Sigma \subset \Lambda$  si et seulement si  $\sigma_\Sigma(u) \leq \sigma_\Lambda(u)$  pour tout  $u \in X$ .
- (3)  $\Sigma$  est faiblement\*-compacte si et seulement si  $\sigma_\Sigma(\cdot)$  est de valeurs finies sur  $X$ .
- (4) une fonction quelconque  $\sigma : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est positivement homogène, sous-additive, semicontinue inférieurement et non identiquement  $\infty$  si et seulement s'il existe un sous-ensemble nonvide, convexe et faiblement\*-fermé  $\Sigma$  de  $X^*$  tel que  $\sigma = \sigma_\Sigma$ .

Une adaptation de ces résultats au gradient généralisé donne la proposition suivante.

**Proposition 1.1.3.** [48] *Supposons toujours que  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est localement lipschitzienne, alors on a*

- (a)  $\rho \in \partial\Phi(u)$  si et seulement si  $\Phi^\circ(u, v) \geq \langle \rho, v \rangle$  pour tout  $u \in X$ .
- (b) Soient  $u_n$  et  $\rho_n$  deux suites de  $X$  et  $X^*$  respectivement telles que  $\rho_n \in \partial\Phi(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $u_n \rightarrow u$  dans  $X$  et  $\rho_n \xrightarrow{*} \rho$  pour un certain  $\rho \in X^*$ , alors  $\rho \in \partial\Phi(u)$ .
- (c)  $\partial\Phi(u) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{w \in B(u, \delta)} \partial\Phi(w)$ .

### 1.1.4 Dérivée généralisée de Clarke et autres sens classiques de dérivation

Il existe différentes notions de dérivée dans les espaces de Banach qui généralisent le concept classique de dérivée dans les espaces euclidiens. Nous allons voir dans cette section le rapport entre le gradient généralisé, la dérivée stricte pour les fonctions agissant sur un espace de Banach à valeurs réelles.

On dit que  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  admet une dérivée directionnelle (usuelle) en  $u \in X$  dans la direction  $v \in X$  si la limite

$$\Phi'(u; v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi(u_0 + tv) - \Phi(u_0))}{t}$$

existe. On dit que  $\Phi$  admet une dérivée au sens de Gâteaux en  $u$  s'il existe un élément de l'espace  $X^*$ , noté  $D\Phi(u)$ , tel que pour tout  $v \in X$ ,  $\Phi'(u; v)$  existe et est égal à  $\langle D\Phi; v \rangle$ . Notons que cela revient à dire que le quotient des différences converge pour chaque  $v \in X$ , c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi(u + tv) - \Phi(u))}{t} = \langle D\Phi(u); v \rangle,$$

et que la convergence est uniforme par rapport aux ensembles finis. La fonction  $\Phi$  est dite continûment dérivable au sens de Gâteaux (ou de classe  $C^1$ ) au point  $u$  si  $\Phi$  est dérivable au voisinage de  $u$  et elle est même continue en  $u$ . On dit que  $\Phi$  est de classe  $C^1$  dans  $X$  si  $\Phi$  est continûment dérivable en chaque point de  $X$  et on note  $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ .

Il s'avère que le concept différentiel le plus naturellement lié à la théorie de ce chapitre est celui de dérivabilité stricte (appelée "différentiabilité stricte" par Bourbaki). Nous dirons que  $\Phi$  admet une dérivée stricte en  $u$ , s'il existe un élément de  $X^*$  noté  $D_s\Phi(u)$ , pourvu que pour chaque  $v \in X$  :

$$\lim_{t \rightarrow 0, u' \rightarrow u} \frac{(\Phi(u' + tv) - \Phi(u'))}{t} = \langle D_s\Phi(u); v \rangle,$$

et à condition que la convergence soit uniforme sur les ensembles compacts. Cette dernière condition est évidente si  $\Phi$  est Lipschitzienne au voisinage de  $u$ .

**Remarque.** (a) *La dérivabilité stricte implique la différentiabilité de Gâteaux, mais pas réciproquement.*

(b) *Si  $\Phi$  est continûment dérivable au sens de Gâteaux en  $u$  alors  $\Phi$  admet une dérivée stricte en  $u$ .*

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $\Phi$  une fonction Lipschitzienne au voisinage de  $u$  telle que  $\Phi$  admet*

une dérivé de Gâteaux(ou strict ou de fréchet)  $D\Phi(u)$ . Alors  $D\Phi(u) \in \partial\Phi(u)$ .

*Démonstration.* Par définition,  $\Phi'(u, v) = \langle D\Phi(u), v \rangle$ . Il est facile de voir que  $\Phi'(u, v) \leq \Phi^\circ(u, v)$ , par conséquent  $\langle D\Phi(u), v \rangle \leq \Phi^\circ(u, v)$ . De la Proposition 1.1.3, il vient que  $D\Phi(u) \in \partial\Phi^\circ(u)$ .  $\square$

**Proposition 1.1.5.** [48] *La fonction  $\Phi$  admet une dérivée stricte  $D_s\Phi$  en  $u$  si et seulement si  $\Phi$  est Lipschitzienne au voisinage de  $u$  et  $\partial\Phi(u)$  se réduit à un singleton  $\{\rho\}$ . En particulier  $D_s\Phi(u) = \rho$ .*

**Corollaire 1.1.1.** *Si  $\Phi$  est continûment dérivable au sens de Gâteaux en  $u$ , alors  $\partial\Phi(u) = \{D_G(u)\}$ .*

## 1.2 Opération sur le gradient généralisé

On considère ici un certain nombre d'opérations qui facilitent le calcul du gradient généralisé. Supposons que la fonction  $\Phi$  est lipschitzienne au voisinage de  $u_0$ .

### 1.2.1 Calcul de base

**Proposition 1.2.1.**

(a) *Pour tout scalaire  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\partial(\alpha\Phi)(u_0) = \alpha\partial\Phi(u_0).$$

(b) *Si  $\{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est une famille finie des fonctions Lipschitziennes au voisinage de  $u_0$  alors*

*$\sum_{i=1}^n \Phi_i$  est Lipschitzienne au voisinage de  $u_0$  et on a*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\right)(u_0) \subset \sum_{i=1}^n \partial\Phi_i(u_0).$$

*Démonstration.*

(a) Observons que  $\alpha\Phi$  est Lipschitzienne au voisinage de  $u_0$ . Si  $\alpha$  est positif, il est facile de voir que  $(\alpha\Phi)^\circ(u_0) = \alpha\Phi^\circ(u_0)$ , par conséquent on a

$$\partial(\alpha\Phi)(u_0) = \alpha\partial\Phi(u_0). \tag{1.2.1}$$

Il nous reste à démontrer que  $\partial(-\Phi)(u_0) = -\partial\Phi(u_0)$ . De la définition du gradient généralisé, un élément  $\rho \in X^*$  appartient à  $\partial(-\Phi)(u_0)$  si et seulement si  $(-\Phi)^\circ(u_0; v) \geq \langle \rho; v \rangle$  pour tout  $v \in X$ . D'après la Proposition 1.1.1 cela est équivalent à

$$\Phi^\circ(u_0; -v) \geq \langle \rho; v \rangle = \langle -\rho; -v \rangle,$$

c'est à dire que  $(-\rho) \in \partial\Phi(u_0)$ . Ainsi  $\rho \in \partial(-\Phi)(u_0)$  si et seulement si  $\rho \in -\partial\Phi(u_0)$ . Cela combiné avec (1.2.1) implique que

$$\partial(\alpha\Phi)(u_0) = \alpha\partial\Phi(u_0) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Il suffit de prouver l'inclusion pour  $n = 2$  et on peut par la suite conclure le cas général par induction.

D'après la définition de la dérivée généralisée, on a

$$(\Phi_1 + \Phi_2)^\circ(u_0; v) \leq \Phi_1^\circ(u_0; v) + \Phi_2^\circ(u_0; v), \text{ pour tout } v \in X.$$

Comme  $(\Phi_1 + \Phi_2)^\circ(u_0; v)$  et  $\Phi_1^\circ(u_0; v) + \Phi_2^\circ(u_0; v)$  sont les fonctions d'appui de  $\partial(\Phi_1 + \Phi_2)(u_0)$  et  $\partial\Phi_1(u_0) + \partial\Phi_2(u_0)$  respectivement, la proposition 1.1.3 affirme que

$$\partial(\Phi_1 + \Phi_2)(u_0) \subset \partial\Phi_1(u_0) + \partial\Phi_2(u_0).$$

□

**Corollaire 1.2.1.** Si  $\{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est une famille finie de fonctions Lipschitziennes au voisinage de  $u_0$  alors pour tout scalaire  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , on a

$$\partial\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i\right)(u_0) \subset \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial\Phi_i(u_0).$$

De plus, si toutes les fonctions  $\Phi_i$  sont strictement différentiables, sauf une au plus, alors

$$\partial\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i\right)(u_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial\Phi_i(u_0).$$

*Démonstration.* De la proposition 1.2.1, on peut facilement vérifier que

$$\partial\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i\right)(u_0) \subset \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial\Phi_i(u_0).$$

Maintenant, supposons que toutes les fonctions  $\Phi_i$  sont strictement différentiables au voisinage de  $u_0$  sauf une  $\Phi_{i_0}$ . Puisque  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i \Phi_i$  est strictement différentiable en  $u_0$  alors

$$D_s \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i \Phi_i \right) (u_0; v) = \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i \Phi_i \right)^\circ (u_0; v).$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i \right)^\circ (u_0; v) &= (\alpha_{i_0} \Phi_{i_0})^\circ (u_0; v) + D_s \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i \Phi_i \right) (u_0; v) \\ &= \alpha_{i_0} \Phi_{i_0}^\circ (u_0; v) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i D_s \Phi_i (u_0; v) \\ &= \alpha_{i_0} \Phi_{i_0}^\circ (u_0; v) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i \Phi_i^\circ (u_0; v) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i^\circ (u_0; v). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

**Définition 1.2.1** (Point, valeur critique). *On dit que  $u_0 \in X$  est un point critique de  $\Phi$  si  $0 \in \partial\Phi(u_0)$ . On dit que  $c \in \mathbb{R}$  est une valeur critique de  $\Phi$  s'il existe  $u_0 \in X$  tel que  $\Phi(u_0) = c$  et  $0 \in \partial\Phi(u_0)$ .*

**Proposition 1.2.2.** *Si  $u_0$  est un minimum local de  $\Phi$ , alors  $u_0$  est un point critique de  $\Phi$ .*

*Démonstration.* Si  $u_0$  est un minimum local de  $\Phi$ , alors il exist  $\epsilon > 0$  tel que

$$\Phi(u) \geq \Phi(u_0), \text{ pour tout } u \in B(u_0, \epsilon).$$

Sans perte de la généralité, on peut choisir  $h \in X$  et  $\lambda > 0$  tel que  $u = u_0 + h + \lambda v$  avec  $\|u\| < \epsilon$ . Donc pour tout  $v \in X$ , on obtient

$$\frac{\Phi(u_0 + h + \lambda v) - \Phi(u_0)}{\lambda} \geq 0,$$

ceci implique que

$$\Phi^\circ(u_0; v) \geq 0.$$

Ainsi,  $0 \in \partial\Phi(u_0)$ . □

**Corollaire 1.2.2.** *Si  $u_0$  est un maximum local de  $\Phi$ , alors  $u_0$  est un point critique de  $\Phi$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $u_0$  est un maximum local de  $\Phi$ , alors  $u_0$  est un minimum local de  $(-\Phi)$ , c'est à dire  $0 \in \partial(-\Phi)(u_0)$ . De la proposition 1.2.1 on obtient

$$\partial(-\Phi)(u_0) = -\partial\Phi(u_0),$$

il vient que  $0 \in (-\partial\Phi(u_0))$ , donc  $0 \in \partial\Phi(u_0)$ . □

## 1.2.2 Régularité

Nous avons vu dans la section précédente que les formules de calcul du gradient généralisé sont données par des inclusions. Ces formules peuvent être plus précises en transformant les inclusions en égalités. Voici une classe de fonctions qui permettent d'atteindre l'égalité.

**Définition 1.2.2.** *La fonction  $\Phi$  est dite régulière en  $u_0$  si pour tout  $v \in X$ , la dérivée directionnelle  $\Phi'(u_0; v)$  existe et*

$$\Phi'(u_0; v) = \Phi^\circ(u_0; v).$$

**Remarque.** *Observons que si chaque fonctions  $\Phi_i$  est régulière dans la proposition 1.2.1, on obtient l'égalité.*

Voici quelques propriétés des fonctions régulières.

**Proposition 1.2.3.** [48] *Supposons que la fonction  $\Phi$  est lipschitzienne au voisinage de  $u_0$ .*

- (a) *Si  $\Phi$  est strictement différentiable au voisinage de  $u_0$  alors  $\Phi$  est régulière en  $u_0$ .*
- (b) *Si  $\Phi$  est convexe alors,  $\Phi$  est régulière en  $u_0$ .*
- (c) *Une combinaison linéaire finie (par des scalaires nonnégatifs) des fonctions régulières en  $u_0$ , est une fonction régulière.*
- (d) *Si  $\Phi$  est régulière et admet une dérivée de Gâteaux en  $u_0$  alors  $\partial\Phi(u_0) = \{D\Phi(u_0)\}$ .*

### 1.3 Gradient généralisé dans les espaces fonctionnelle

Dans cette section, nous allons focaliser sur le gradient généralisé d'une certaine classe de fonctions agissant sur des espaces de Lebesgue, à fortiori, sur des espaces de Sobolev. De telles fonctions seront appelées des fonctionnelles.

Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable satisfaisant la condition suivante

$$|\phi(t)| \leq C|t|^{\sigma-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.3.1)$$

où  $C > 0$  est une constante et le réel  $\sigma$  est tel que  $\sigma > 1$ . On introduit les fonctions suivantes

$$\underline{\phi}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{ess inf}_{|s-t| < \epsilon} \phi(s) \quad \text{et} \quad \bar{\phi}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{ess sup}_{|s-t| < \epsilon} \phi(s). \quad (1.3.2)$$

**Lemme 1.3.1.** [94] *Les fonctions  $\underline{\phi}$  et  $\bar{\phi}$  sont mesurables.*

Pour toute fonction  $\phi$  qui satisfait (1.3.1), on définit la fonction  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s) ds. \quad (1.3.3)$$

**Lemme 1.3.2.** *La fonction  $\Phi$  définie dans (1.3.3) est localement Lipschitzienne. De plus, on a*

$$\partial\Phi(t) \subset [\underline{\phi}(t), \bar{\phi}(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* De la relation (1.3.1), pour tout  $t > 0$  il existe  $\epsilon > 0$ , tel que pour tout  $t_1 < t_2 \in ]t - \epsilon, t + \epsilon[$ , on a

$$\begin{aligned} |\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\phi(s)| ds \leq \frac{C}{\sigma} (t_2^\sigma - t_1^\sigma) \\ &\leq \frac{C}{\sigma} (t_2^{\sigma-1} + t_1^{\sigma-1})(t_2 - t_1) \leq \frac{C}{\sigma} 2^\sigma \epsilon^{\sigma-1} (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Ceci implique que la fonction  $\Phi$  est localement Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, sa dérivée généralisée existe pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et on a

$$\begin{aligned} \Phi^\circ(t; z) &= \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{\phi(t+h+\lambda z) - \phi(t+h)}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} \int_{t+h}^{t+h+\lambda z} \phi(s) ds. \end{aligned}$$

De la dernière expression, on remarque que

$$\begin{aligned} \Phi^\circ(t; z) &\leq \bar{\phi}(t)z \text{ si } z > 0 \text{ et que} \\ \Phi^\circ(t; z) &\leq \underline{\phi}(t)z \text{ si } z < 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\partial\Phi(t) \subset [\underline{\phi}(t), \bar{\phi}(t)] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}.$$

□

Soit  $u$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^N$ . On note par  $\Psi$  la fonctionnelle suivante

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{u(x)} \phi(t) dt dx, \quad (1.3.4)$$

Nous allons étudier les propriétés de la fonctionnelle  $\Psi$  lorsqu'elle agit sur l'espace de Lebesgue  $L^\sigma(\mathbb{R}^N)$ .

**Proposition 1.3.1.** *La fonctionnelle  $\Psi$  est localement Lipschitzienne de  $L^\sigma(\mathbb{R}^N)$  dans  $\mathbb{R}$  si  $\phi$  satisfait l'inégalité (1.3.1). De plus, on a pour tout  $u \in L^\sigma(\mathbb{R}^N)$*

$$\partial_L \Psi(u(x)) \subset [\underline{\phi}(u(x)), \bar{\phi}(u(x))] \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N,$$

où  $\partial_L$  désigne le gradient généralisé dans  $L^\sigma(\mathbb{R}^N)$ .

*Démonstration.* Soient  $u_1, u_2 \in L^\sigma(\mathbb{R}^N)$ . De l'inégalité (1.3.1) on a

$$|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)| \leq C \int_{\mathbb{R}^N} (|u_1(x)|^{\sigma-1} + |u_2(x)|^{\sigma-1}) |u_1(x) - u_2(x)| dx$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |\Psi(u_1) - \Psi(u_2)| &\leq C \| |u_1|^{\sigma-1} + |u_2|^{\sigma-1} \|_{\sigma-1} \|u_1 - u_2\|_\sigma \\ &\leq 2C \|w\|_\sigma \|u_1 - u_2\|_\sigma \end{aligned}$$

où  $w(x) = \max\{|u_1(x)|, |u_2(x)|\}$ .

Notons par  $U$  un voisinage ouvert dans  $L^\sigma(\mathbb{R}^N)$  contenant  $u_1$  et  $u_2$ , alors on a

$$|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)| \leq 2C \sup_{w \in U} \|w\|_\sigma \|u_1 - u_2\|_\sigma.$$

Ceci prouve que  $\Psi$  est localement Lipschitzienne sur  $L^\sigma(\mathbb{R}^N)$ .

Soit  $u \in L^\sigma(\mathbb{R}^N)$  et soit  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . De la définition de la dérivée généralisée, on peut toujours trouver des suites  $h_n \rightarrow 0$  dans  $L^\sigma(\mathbb{R}^N)$  et  $\lambda_n \downarrow 0$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que

$$\Psi^\circ(u; v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\lambda_n} \int_{u(x)+h_n(x)}^{u(x)+h_n(x)+\lambda_n v(x)} \phi(s) ds.$$

Sans perte de la généralité, on peut supposer que la suite  $h_n$  est telle que  $h_n \rightarrow 0$  p.p. dans  $\mathbb{R}^N$ . Du Lemme de Fatou, il vient que

$$\begin{aligned} \Psi^\circ(u; v) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi^\circ(u(x); v(x)) dx \\ &\leq \int_{v(x)>0} v(x) \cdot \bar{\phi}(u(x)) dx + \int_{v(x)>0} v(x) \cdot \underline{\phi}(u(x)) dx. \end{aligned}$$

Supposons par contradiction qu'il existe un élément  $\rho \in \partial_L \Psi(u)$  et une partie  $A \in \mathbb{R}^N$  avec  $meas(A) > 0$  tel que

$$\rho(x) < \underline{\phi}(u(x)) \text{ p.p. dans } A.$$

Alors, il existe  $B \subset A$  avec  $0 < meas(B) < \infty$  tel que

$$\rho(x) < \underline{\phi}(u(x)) \text{ p.p. dans } B.$$

Ceci implique que

$$\int_B \rho(x) dx < \int_B \underline{\phi}(u(x)) dx.$$

Maintenant, posons que  $v(x) = -\chi_B$ , on obtient

$$\begin{aligned} - \int_B \rho(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) v(x) dx \\ &\leq \int_{v<0} \underline{\phi}(u(x)) v(x) dx = - \int_A \underline{\phi}(u(x)) dx, \end{aligned}$$

et ceci est une contradiction. Donc, nécessairement on a

$$\underline{\phi}(u(x)) \leq \rho(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Par analogie, on a aussi

$$\rho(x) \leq \bar{\phi}(u(x)) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Le résultat est ainsi démontré. □

Dans certaines situation, on a besoin de déterminer la relation entre les gradients généralisés relatifs à des espaces de Sobolev et\ou Lebesgue liées par des injections continues. S'il s'agit d'espace réflexif, le théorème de Riesz explicite cette relation.

**Lemme 1.3.3.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. On suppose que  $X$  s'injecte continûment dans  $Y$ . Soit  $\Psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle localement Lipschitzienne. On note  $\widehat{\Psi} = \Psi|_X$ .*

Alors, on a

$$\partial_X \widehat{\Psi}(u) \subset \partial_Y \Psi(u), \quad \text{pour tout } u \in X,$$

dans le sens où tout élément de  $\partial_X \widehat{\Psi}(u)$  admet une extention appartenant à  $\partial_Y \Psi(u)$ .

*Démonstration.* L'injection  $X \subset Y$  étant continue, alors il existe  $C > 0$  tel que

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \quad \text{pour tout } u \in X. \quad (1.3.5)$$

Fixons  $u_0 \in X$  et soit  $B_{C\epsilon}(u_0)$  pour  $\epsilon > 0$  la boule de centre  $u_0$  et de rayon  $C\epsilon$  dans  $Y$ . Alors il existe  $K_{u_0}, \epsilon > 0$  telles que pour tout  $u_1, u_2 \in B_{C\epsilon}(u_0)$  on a

$$|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)| \leq K_{u_0}\|u_1 - u_2\|_Y, \quad (1.3.6)$$

puisque  $\Psi$  est localement lipshitzienne.

Soit  $B'_\epsilon(u_0)$  la boule de centre  $u_0$  et de rayon  $\epsilon$  dans  $X$  et soient  $u'_1, u'_2 \in B'_\epsilon(u_0) \subset B_{C\epsilon}(u_0)$ .

En combinant les relations (1.3.5) et (1.3.6) on obtient

$$|\Psi(u'_1) - \Psi(u'_2)| \leq K_{u_0}\|u'_1 - u'_2\|_Y \leq CK_{u_0}\|u'_1 - u'_2\|_X, \quad \forall u'_1, u'_2 \in B'_\epsilon(u_0). \quad (1.3.7)$$

Donc la fonctionnelle  $\Psi$  est localement lipshitzienne sur  $X$ .

De la définition de la dérivée généralisée, on a

$$\Psi^\circ(u; \cdot)|_X \geq \widehat{\Psi}^\circ(u; \cdot). \quad (1.3.8)$$

Soient  $u \in X$  et  $\widehat{\rho} \in \partial_X \widehat{\Psi}(u)$ , alors

$$\langle \widehat{\rho}, v \rangle \leq \Psi^\circ(u; v) \geq \widehat{\Psi}^\circ(u; v), \quad \forall v \in X. \quad (1.3.9)$$

L'application  $v \mapsto \Psi^\circ(u; v)$  est sous-additive et positivement homogène sur  $Y$  d'après

la Proposition 1.1.1, le théorème de Hahn-Banach assure alors l'existence d'une forme linéaire  $\rho$  définie sur tout  $Y$  qui prolonge  $\hat{\rho}$ . La continuité de la forme  $\rho$  sur  $Y$  découle directement de la Proposition 1.1.1. Ceci achève la démonstration.  $\square$



# MÉTHODES DE RÉOLUTIONS

*Les sciences n'essayent pas d'expliquer; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter; elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner*

– John Von Neumann

2.1	Rappel sur la théorie de la mesure . . . . .	33
2.1.1	Définitions . . . . .	33
2.1.2	Quelques critères de convergence . . . . .	34
2.2	Méthodes Variationnelles . . . . .	35
2.2.1	Suite de Palais Smale . . . . .	35
2.2.2	Théorème du Col "Mountain pass theorem" . . . . .	37
2.3	Principe de concentration-compacité . . . . .	41

Le calcul différentiel associé au concept du gradient généralisé de Clarke a contribué de manière significative au développement des méthodes variationnelles et à l'étude des problèmes nonstandards. Dans ce chapitre, nous attribuons une attention particulière à la présentation détaillée des méthodes qui seront utilisées pour résoudre les problèmes abordés dans les chapitres à venir, reconnaissant ainsi l'importance cruciale de fournir une explication approfondie de ces approches, afin de permettre une mise en œuvre efficace et une compréhension claire de nos études.

Parmi les différentes approches existantes, deux théories principales se démarquent par leur pertinence et leur application pratique. Tout d'abord, le théorème du Col est mis en avant en tant qu'outil essentiel de résolution de problèmes nonlinéaires.

En outre, nous abordons le principe de concentration-compacité qui représente un outil fondamental pour décider de la nature des suites de Palais-Smale.

## 2.1 Rappel sur la théorie de la mesure

### 2.1.1 Définitions

Soit  $\mu$  une mesure sur la  $\sigma$ -algèbre des ensembles boréliens  $\mathcal{B}(X)$  d'un espace topologique localement compact de Hausdorff  $(X, \tau)$ .

**Définition 2.1.1** (Mesure de Radon). *On dit que  $\mu$  est une mesure de Radon si pour tout  $B \in \mathcal{B}(X)$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\epsilon \subset B$  tel que  $|\mu|(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ , où  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$ .*

**Remarque.** *Si  $\mu$  est une mesure réelle positive, alors  $|\mu| = \mu$ .*

**Théorème 2.1.1.** [58][Riesz-Markov-Kakutani] *Supposons que l'espace topologique  $X$  est séparé et est localement compact. Alors, pour toute fonctionnelle positive  $L : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $X$  tel que*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) : \quad L(f) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

*De plus, cette mesure est unique.*

Grâce à ce théorème, nous pouvons avoir une autre définition équivalente de la mesure de Radon en définissant l'espace de mesures de Radon  $M(X)$  par le dual topologique de l'espace  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ .

**Théorème 2.1.2.** [33] Si  $X$  est un espace métrique complet séparable, alors toute mesure de Borel est une mesure de Radon.

**Définition 2.1.2.** On dit qu'une suite  $\{\mu_n\}$  de mesures de Radon sur  $X$  converge faiblement\* vers  $\mu$  dans  $M(X)$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu_n = \int_X \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}),$$

et on note  $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ .

La convergence faible des mesures de Radon est donc un cas particulier de la convergence faible dans l'espace dual.

**Théorème 2.1.3.** [32] De toute suite bornée de mesures de Radon on peut extraire une sous-suite qui converge au sens faible des mesures.

Soit  $f$  une fonction intégrable par rapport à une mesure  $\mu$ . On peut définir la fonction

$$\nu(B) = \int_B f d\mu, \quad \forall B \in \mathcal{B}(X).$$

Il est facile de voir que  $\nu$  est une mesure sur  $(X, \mathcal{B}(X))$ . On note  $\nu$  par  $f \cdot \mu$ . La fonction  $f$  est appelée la densité de Radon-Nikodym et il est noté par  $\frac{d\nu}{d\mu}$ .

## 2.1.2 Quelques critères de convergence

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un ouvert,  $N \geq 1$ .

**Lemme 2.1.1** (Brezis-Lieb). Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $\{u_n\}_n$  une suite bornée de  $L^p(\Omega)$  tel que

$$u_n \rightarrow u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Alors  $u \in L^p(\Omega)$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

**Remarque.** Observons que si  $u_n, u \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  tel que

$$u_n \rightarrow u \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_p = \|u\|_p,$$

alors on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_p = 0$ .

**Lemme 2.1.2.** [68] Soient  $1 < p < \infty$  et  $\{u_n\}$  une suite bornée de  $L^p(\Omega)$  convergeant p.p. vers  $u$ . Alors  $u_n$  converge faiblement vers  $u$  dans  $L^p(\Omega)$ .

**Lemme 2.1.3.** [73] Supposons que  $p \geq 1$  et  $u_n, u \in W^{1,p}(\Omega)$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ). Soit  $a \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  qui vérifie pour certaines constantes positives  $\alpha, \beta$ , les propriétés suivantes

- (i)  $\alpha|\xi|^s \leq a(x, \xi)\xi$  pour tout  $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ ,
  - (ii)  $|a(x, \xi)| \leq \beta|\xi|^{s-1}$  pour tout  $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ ,
  - (iii)  $(a(x, \xi) - a(x, \eta))(\xi - \eta) > 0$  pour tout  $(x, \xi, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{2N}$  avec  $\xi \neq \eta$ .
- Alors,

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ dans } L^p(\Omega)$$

si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_n(x)) - a(x, \nabla u(x))) \cdot (\nabla u_n(x) - \nabla u(x)) dx = 0$$

## 2.2 Méthodes Variationnelles

En pratique, la résolution des équations aux dérivées partielles peut se faire à l'aide des méthodes variationnelles. Ces méthodes convertissent l'équation en un problème de points critiques, qui peut être résolu à l'aide des techniques d'optimisation. Cette partie vise à exposer l'extension de l'application des méthodes variationnelles à un ensemble de fonctions qui manquent de régularité. En particulier, celles qui sont localement Lipschitziennes. De nombreuses références peuvent être consultées pour s'approfondir dans le sujet, telles que [42, 63, 93, 94, 108, 114].

### 2.2.1 Suite de Palais Smale

La suite de Palais-Smale qui est un outil important à l'étude des points critiques des fonctionnelles, suppose dans sa définition originale, que la fonctionnelle est différentiable. Cependant, il est possible d'étendre ce concept à des fonctionnelles nondifférentiables en utilisant le gradient généralisé de Clarke.

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne. On définit la fonction  $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\lambda(u) = \min\{\|w\|_*, w \in \partial I(u)\}. \quad (2.2.1)$$

La définition qui suit caractérise la suite de Palais-Smale associée aux fonctionnelles localement Lipschitziennes.

**Définition 2.2.1.** [Suite de Palais-Smale] On dit qu'une suite  $\{u_n\} \subset X$  est de Palais-Smale de la fonctionnelle  $I$  au niveau  $c \in \mathbb{R}$  si elle vérifie

$$I(u_n) \rightarrow c \quad \text{et} \quad \lambda(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}, \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.2.2)$$

On dit que  $I$  vérifié la condition de Palais-smale (au niveau  $c \in \mathbb{R}$ ) si de toute suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$  lui associée, on peut en extraire une sous-suite convergente.

**Proposition 2.2.1.** La fonction  $\lambda$  est bien définie et est semi-continue inférieurement sur  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in X$ . La fonction  $w \rightarrow \|w\|_*$  est faiblement semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, alors il existe un  $w_0 \in \partial I(u)$  tel que

$$\|w_0\|_* = \min\{\|w\|_*, w \in \partial I(u)\}.$$

Ainsi  $\lambda(u) = \|w_0\|_*$  est fini.

Soit  $\{u_n\} \subset X$  une suite convergente vers un élément  $u \in X$ . Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(u_n) < \lambda(u). \quad (2.2.3)$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\omega_n \in \partial I(u_n)$  telle que  $\|\omega_n\|_* = \lambda(u_n)$ .

De la relation (2.2.3), la suite  $\{\omega_n\}$  est bornée dans  $X^*$ , alors elle converge faiblement vers un élément  $\omega \in X^*$ .

Puisque  $\partial I(u)$  est faiblement\* fermé dans  $X^*$  alors  $\omega \in \partial I(u)$  donc nécessairement

$$\lambda(u) \leq \|\omega\|_*.$$

Ceci combiné avec la convergence faible\* de la suite  $\{\omega_n\}$  donne

$$\lambda(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n\|_*.$$

Mais ce résultat est en contradiction avec (2.2.3) car  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n\|_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(u_n)$ . Ainsi, la fonction  $\lambda(u)$  est semi-continue inférieurement.  $\square$

## 2.2.2 Théorème du Col "Mountain pass theorem"

Le théorème du Col de la montagne est un outil essentiel dans l'approche variationnelle des problèmes nonlinéaires. Il est très efficace dans la recherche des points critiques des fonctionnelles nonlinéaires dans les espaces de Banach. En particulier, ceux qui se posent dans l'étude des équation aux dérivées partielles. Dans sa forme principale donnée par Ambrosetti et Rabinowitz dans [15], le théorème du Col considère une fonction  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  de class  $C^1$  satisfaisant les condition géométriques suivante

- (i) il existe  $r > 0$  et  $\rho > 0$ , tels que  $I(u) \geq \rho$ , si  $\|u\| = r$
- (ii)  $I(0) < \rho$
- (iii) il existe  $e \in X \setminus B_r(0)$  tel que  $I(e) < \rho$ ,

Avec la condition de Palais-Smale, il s'ensuit que la fonctionnelle  $I$  admet un point critique  $u \in X \setminus \{0, e\}$ , de valeur critique correspondante  $c \geq \rho$ .

D'un point de vue schématique, si on se trouve dans un village 0 d'altitude  $a_0$ , entouré par une chaîne de montagnes  $S := \{u \in X; \|u\| = r\}$  où l'altitude est élevée (plus grand que  $\rho$  tel que  $\rho > a_0$ ), si on veut aller à un village  $e$  en dehors de la chaîne de montagnes, il faut monter puis redescendre, donc  $I$  doit atteindre un point critique plus bas quelque part entre les deux villages 0 et  $e$ , appelé le point Col. Autrement dit il existe un chemin passant par un col. En particulier, le point Col se trouve sur le chemin qui traverse les montagnes à l'altitude la plus basse.

Une extension du théorème du Col aux fonctionnelles localement Lipschitzienne est due à Chang [42]. Plutard, Rădulescu [93] a donné une version encore plus faible qui est donné dans le théorème suivant.

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ . On suppose que  $I(0) = 0$  et que*

- (i) *il existe  $r > 0$  et  $\rho > 0$ , tels que  $I(u) \geq \rho$ , si  $\|u\| = r$ ,*
- (ii) *il existe  $e \in X \setminus B_r(0)$  tel que  $I(e) < 0$ .*

Si

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \quad (2.2.4)$$

$$\text{où } \Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X), \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = e\} \quad (2.2.5)$$

Alors,  $c \geq \rho$  et il existe une suite de Palais-Smale  $\{u_n\} \subset X$  au niveau  $c$ , c'est à dire une suite qui vérifie

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ et } \lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Avant de démontrer ce théorème on introduit le principe d'Ekeland.

**Théorème 2.2.2.** [94] Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $I$  est une fonctionnelle semi-continue inférieurement de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $I$  a une borne inférieure  $c = \inf_{u \in X} I(u)$ . Alors, pour tout  $\epsilon$  positif, il existe  $u_\epsilon \in X$  tel que

$$\begin{cases} c \leq I(u_\epsilon) \leq c + \epsilon, \\ \forall u \in X, I(u) - I(u_\epsilon) + \epsilon d(u, u_\epsilon) > 0. \end{cases}$$

*Démonstration du Théorème 2.2.1 (Théorème du Col).* Observons que l'espace métrique  $(\Gamma, d)$  muni de la distance

$$d(\gamma, \delta) = \max_{t \in [0,1]} |\gamma(t) - \delta(t)|, \quad \gamma, \delta \in \Gamma,$$

est complet.

Soit la fonctionnelle  $\Psi$  définie sur  $\Gamma$

$$\Psi(\gamma) = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

L'application  $\Psi$  est continue et est bornée inférieurement car

$$\Psi(\gamma) \geq I(0) = 0.$$

Puisque  $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \Psi(\gamma)$ , alors

$$\Psi(\gamma) \geq c, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Appliquons le principe d'Ekeland, on obtient

$\forall \epsilon > 0, \exists \gamma \in \Gamma$  tel que :

$$\begin{aligned} \Psi(\delta) - \Psi(\gamma) + \epsilon d(\gamma, \delta) &\geq 0, \quad \forall \delta \in \Gamma, \\ \Psi(\gamma) &\leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \Psi(\gamma) + \epsilon. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Ceci signifie que

$$c \leq \Psi(\gamma) \leq c + \epsilon. \tag{2.2.7}$$

Maintenant, soit

$$M(\gamma) = \{t \in [0, 1]; I(\gamma(t)) = \Psi(\gamma)\}.$$

**Lemme 2.2.1.** [94] Soit  $M$  un espace métrique compacte et  $\varphi : M \rightarrow 2^{X^*}$  une application

semi-continue supérieurement telle que, pour tout  $t \in M$ , l'ensemble  $\varphi(t)$  est convexe et faiblement compact. Pour  $t \in M$ , notons

$$\alpha(t) = \inf\{\|x^*\|; x^* \in \varphi(t)\},$$

et

$$\alpha = \inf_{t \in M} \alpha(t).$$

Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une application continue  $v : M \rightarrow X$  telle que pour tout  $t \in M$  et  $x^* \in \varphi(t)$ ,

$$\|v(t)\| \leq 1, \quad \langle x^*, v(t) \rangle \geq \alpha - \epsilon.$$

Ce Lemme affirme qu'il existe une application continue  $v : M(\gamma) \rightarrow X$  telle que pour tout  $t \in M(\gamma)$  et  $u^* \in \partial I(\gamma(t))$ ,

$$\|v(t)\| \leq 1, \quad \langle u^*, v(t) \rangle \geq \alpha - \epsilon,$$

où

$$\alpha = \inf_{t \in M(\gamma(t))} \lambda(\gamma(t)).$$

D'après la Proposition 1.1.2, on obtient

$$I^\circ(\gamma(t), -v(t)) = \max\{\langle u^*, -v(t) \rangle; u^* \in \partial I(\gamma(t))\} \tag{2.2.8}$$

$$= -\min\{\langle u^*, v(t) \rangle; u^* \in \partial I(\gamma(t))\} \leq -\alpha + \epsilon. \tag{2.2.9}$$

D'autre part, on a pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\gamma([0, 1]) \cap B_R(0) \neq \emptyset,$$

par conséquent

$$\Psi(\gamma) = \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)) \geq \rho > 0.$$

Il vient que

$$M(\gamma) \cap \{0, e\} = \emptyset.$$

Donc, il existe une extension continue  $w : [0, 1] \rightarrow X$  de  $v$  telle que  $w(0) = w(1) = 0$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,

$$\|w(t)\| \leq 1.$$

Remplaçons  $\delta$  dans (2.2.6) par

$$\delta_h = \gamma(t) - hw(t),$$

pour  $h > 0$  assez petit, on obtient

$$\Psi(\delta_h) - \Psi(\gamma) + \epsilon \max_{t \in [0,1]} |hw(t)| \geq 0.$$

Alors,

$$-\epsilon \leq -\epsilon \|w(t)\| \leq \frac{\Psi(\delta_h) - \Psi(\gamma)}{h}. \quad (2.2.10)$$

Dans ce qui suit,  $\epsilon > 0$  sera fixé, tend que  $h \rightarrow 0$ , soit  $t_h \in [0, 1]$  telle que  $\Psi(\delta_h) = I(\delta_h(t_h))$  et supposons que la suite  $t_{h_n} \rightarrow t_0$ ,  $t_0 \in M(\gamma)$  (car  $M(\gamma)$  est compact). Observons que

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(\delta_h) - \Psi(\gamma)}{h} &= \frac{\Psi(\gamma - hw) - \Psi(\gamma)}{h} \\ &\leq \frac{I(\gamma(t_h) - hw(t_h)) - I(\gamma(t_h))}{h}. \end{aligned}$$

De (2.2.10), on a

$$\begin{aligned} -\epsilon &\leq \frac{I(\gamma(t_h) - hw(t_h)) - I(\gamma(t_h))}{h} \\ &\leq \frac{I(\gamma(t_h) - hw(t_0)) - I(\gamma(t_h))}{h} + \frac{I(\gamma(t_h) - hw(t_h)) - I(\gamma(t_h) - hw(t_0))}{h}. \end{aligned}$$

Comme  $I$  est localement Lipschitzienne, alors

$$\left| \frac{I(\gamma(t_{h_n}) - h_n w(t_{h_n})) - I(\gamma(t_{h_n}) - h_n w(t_0))}{h_n} \right| \leq C \|w(t_{h_n}) - w(t_0)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par conséquent,

$$-\epsilon \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{I(\gamma(t_0) + z_n - h_n w(t_0)) - I(\gamma(t_0) + z_n)}{h},$$

où  $z_n = \gamma(t_{h_n}) - \gamma(t_0)$ .

Combinant cette inégalité avec la relation (2.2.8), on obtient

$$-\epsilon \leq I^\circ(\gamma(t), -w(t_0)) = I^\circ(\gamma(t), -v(t_0)) \leq -\alpha + \epsilon.$$

Il vient que

$$\alpha = \inf \{ \|u^*\|; u^* \in \partial I(\gamma(t)), t \in M(\gamma) \} \leq 2\epsilon.$$

Puisque  $\lambda$  est semi-continue inférieurement, alors il existe  $t' \in M(\gamma)$  telle que

$$\lambda(\gamma(t')) = \inf\{\|u^*\|; u^* \in \partial I(\gamma(t'))\} \leq 2\epsilon. \quad (2.2.11)$$

Nous obtenons aussi à partir de la relation (2.2.6)

$$c \leq I(\gamma(t')) \leq c + \epsilon. \quad (2.2.12)$$

En prenant  $\epsilon = \frac{1}{n}$  et  $u_n = \gamma(t)$ , on trouve que

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ et } \lambda(u_n) \rightarrow 0.$$

Ce qui cloture la preuve. □

## 2.3 Principe de concentration-compacité

Le principe de la concentration-compacité a été introduit par P. Lions dans [79]. Son importance réside dans le fait qu'il nous permet d'étudier les problèmes variationnelles où les injections de Sobolev ne sont pas compactes par exemple si le domaine est non-borné ou bien si l'étude se fait dans un espace de Lebesgue à exposant critique. Nous commençons par introduire le premier lemme du principe de concentration-compacité (le cas localement compact).

**Lemme 2.3.1** (Lions). *Soient  $1 < \tau \leq \infty$ ,  $1 \leq \gamma < \infty$  avec  $\gamma \neq \frac{N\tau}{N-\tau}$  si  $\tau < N$ . Soit  $\{u_n\}$  une suite bornée de  $L^\gamma(\mathbb{R}^N)$  telle que  $\{\nabla u_n\}$  est bornée dans  $L^\tau(\mathbb{R}^N)$  et pour un certain  $R > 0$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} |u_n|^\gamma dx = 0. \quad (2.3.1)$$

*Alors,  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $\alpha$  entre  $\gamma$  et  $\frac{N\tau}{N-\tau}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, supposons que la suite  $\{u_n\}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Puisque  $\tau < N$  alors pour tout  $m > \min\{\gamma, \tau^*\}$ ,  $\{u_n\}$  est bornée dans  $L^m(\mathbb{R}^N)$ . Alors, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} |u_n|^m dx = 0.$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} |u_n(x)|^{\beta-1} |\nabla u_n(x)| dx = 0$$

telle que  $(\beta - 1)\tau' > \min\{\gamma, \tau^*\}$  et  $\beta > \gamma$ .

En supposant  $z_n = |u_n|^\beta$  et en utilisant les injections de Sobolev, on obtient que pour  $1 < \theta < \frac{N}{N-1}$  on a

$$\begin{aligned} \int_{B(y,R)} |z_n|^\theta dx &\leq C_S \left( \int_{B(y,R)} (|z_n(x)| + |\nabla z_n(x)|) dx \right)^\theta \\ &\leq C_S \epsilon_n^{\theta-1} \int_{B(y,R)} (|z_n| + |\nabla z_n(x)|) dx \end{aligned}$$

où  $\epsilon_n = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} (|z_n| + |\nabla z_n(x)|) dx \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Pour  $y^j = (y_1^j, \dots, y_N^j) \in$

$\mathbb{R}^N$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , nous supposons que les boules  $B(y^j, R)$  sont des cubes  $\prod_{i=1}^N \left[ y_i^j - \frac{R}{2}, y_i^j + \frac{R}{2} \right]$ .

En recouvrant  $\mathbb{R}^N$  par cette suite disjointe on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^\theta dx \leq C_S \epsilon_n^{\theta-1} \int_{\mathbb{R}^N} (|z_n| + |\nabla z_n(x)|) dx \leq C_1 \epsilon_n^{\theta-1}.$$

On conclut que  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$  si  $\beta\theta = \alpha$ .

Pour le cas général, observons que pour tout  $K > 0$ , la suite  $v_n = \min\{|u_n|, K\}$  satisfait les hypothèses du Lemme 2.3.1. De plus,  $v_n$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Par conséquent  $v_n \rightarrow 0$  dans  $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $\alpha$  entre  $\gamma$  et  $\tau^*$ . Si  $s$  est compris entre  $\gamma$  et  $\tau^*$  telle que  $s > \alpha$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^\alpha dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^\alpha dx + \int_{\{|u_n|>K\}} |u_n(x)|^\alpha dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^\alpha dx + K^{\alpha-s} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^s dx. \end{aligned}$$

Comme la suite  $\{u_n\}$  est bornée dans  $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^\alpha dx \leq \frac{C_2}{K^{s-\alpha}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } K \rightarrow \infty,$$

et le lemme est prouvé. □

Nous allons maintenant introduire le second lemme du principe de concentration-compacité (cas limite) qui concerne le cas critique.

**Lemme 2.3.2.** *Soient  $q < N$  un réel et  $\{u_n\}$  une suite bornée dans  $\mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  qui converge faiblement vers  $u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ . Supposons qu'il existe une mesure positive bornée  $\nu$  de  $\mathbb{R}^N$  telle que*

$$|u_n|^{q^*} \rightharpoonup^* \nu \text{ dans } M(\mathbb{R}^N).$$

*Alors, il existe un ensemble, au plus dénombrable  $J$  tel que*

$$\nu = |u|^{q^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \{x_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^N, \quad \nu_j > 0, \quad \forall j \in J,$$

*où  $\delta_{x_j}$  est la mesure de Dirac au point  $x_j$ .*



LES PROBLÈMES AVEC NONLINÉARITÉ DISCONTINUE

*Essayez toujours, même si le taux de réussite semble faible. Si vous échouez, on dit qu'ils ont essayé, et c'est de la virilité et de la fierté*

– Mostapha Benboulaid

3.1	Introduction . . . . .	46
3.2	Problème de type $p$ -Laplacien . . . . .	47
3.2.1	Le $p$ -Laplacien régulier . . . . .	47
3.2.2	Problème $p$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues	50
3.3	Problème du type $(p, q)$ -Laplacien . . . . .	56
3.3.1	Rappel sur les problèmes du type $(p, q)$ -Laplacien régulier	57
3.3.2	Les problèmes de type $(p, q)$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues . . . . .	59

## 3.1 Introduction

L'étude des EDP nonlinéaires avec des nonlinéarités discontinues offre des perspectives fascinantes pour comprendre les phénomènes dynamiques complexes qui se produisent dans des domaines variés tels que la physique, la biologie, l'ingénierie, l'économie et bien d'autres. Les systèmes nonlinéaires discontinus peuvent modéliser des phénomènes tels que les transitions de phase, les chocs, les fronts d'ondes, les interfaces et les interfaces mobiles, les phénomènes de propagation, les singularités et bien d'autres encore, voir [16, 14, 23, 40] et [41].

La théorie des équations elliptiques avec des nonlinéarités discontinues a vu le jour dans les années 1980 en étroite relation avec le concept novateur du gradient généralisé de Clarke. Avant cette période, les problèmes elliptiques traités étaient principalement liés à des fonctionnelles énergétiques de classe  $C^1$ , caractérisées par leur continuité et leur régularité. Cependant, ces approches traditionnelles se sont avérées inadéquates pour résoudre efficacement les problèmes nonlinéaires discontinus.

En effet, l'absence de théories adaptées a longtemps limité la compréhension et la résolution de ces types de problèmes elliptiques présentant des nonlinéarités discontinues. Les nonlinéarités discontinues se réfèrent à des fonctions qui ne sont pas continûment différentiables, ce qui rend leur étude plus complexe et exige des méthodes mathématiques spécifiques.

L'introduction du concept de gradient généralisé de Clarke a marqué une avancée significative dans le domaine des équations elliptiques avec des nonlinéarités discontinues. Ce concept a permis de développer des approches théoriques et computationnelles plus sophistiquées pour traiter ces problèmes complexes. Il a offert un cadre mathématique solide pour analyser les solutions et les propriétés des équations elliptiques comportant des nonlinéarités discontinues.

Ainsi, la théorie des équations elliptiques avec des nonlinéarités discontinues a ouvert de nouvelles perspectives de recherche et a contribué à élargir le champ des connaissances en mathématiques appliquées.

Au début, il existait quelques œuvres simples datant de la période entre 1978 et 1980, comprenant [40, 41] et [108]. Toutefois, ce n'est qu'après les travaux de Chang [42] en 1981 que l'étude de ces problèmes prit véritablement son envol. Les premiers articles abordèrent principalement les problèmes de type Laplacien dans des domaines bornés, comme en témoigne les références [16, 14, 15].

Durant les années 90, les recherches se sont progressivement étendues pour englober des problèmes plus complexes, tels que le  $p$ -laplacien dans des domaines bornés. Ce développement ouvrit la voie à une exploration plus approfondie des propriétés et des caractéristiques de ces types de problèmes voir ([20, 21]).

Les investigations se sont ensuite intensifiées, en globant des études couvrant à la fois les problèmes de type Laplacien et  $p$ -Laplacien étendue sur  $\mathbb{R}^N$ . Les études couvrant de l'année 2000 jusqu'à nos jours [7, 4, 60].

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à divers problèmes elliptiques de type  $p$ -Laplacien et  $(p, q)$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues issus de la littérature.

## 3.2 Problème de type $p$ -Laplacien

Nous commençons par introduire l'opérateur  $p$ -Laplacien, qui est un opérateur différentiel nonlinéaire généralisant l'opérateur de Laplace. Il est défini comme :

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Le problème  $p$ -Laplacien est une équation aux dérivées partielles bien connue en analyse mathématique et est largement étudié. L'équation peut s'écrire :

$$-\Delta_p u = g(x, u), \text{ dans } \Omega,$$

où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  est un ouvert et  $f(u)$  est une fonction nonlinéaire de l'inconnu  $u$ .

### 3.2.1 Le $p$ -Laplacien régulier

Le mot "régulier" est employé pour caractériser un problème uniquement lorsque sa fonction associée  $g(x, u)$  est continue. Il y a deux types principaux de ces problèmes

- Problèmes défini sur des domaines bornés réguliers  $\Omega$ .
- Problèmes défini sur  $\mathbb{R}^N$ .

L'existence et la multiplicité des solutions des problèmes de type  $p$ -Laplacien régulier ont été largement étudiées; voir par exemple [75] dans les domaines bornés et [2, 3] dans  $\mathbb{R}^N$ .

### Les problèmes dans un domaine bornée

Ce problème consiste à trouver une fonction  $u(x)$  qui satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta_p u = g(x, u) \text{ pour tout } x \in \Omega, \\ u = 0, \text{ pour tout } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $u \mapsto g(x, u)$  est une fonction continue.

**Formulation Faible.** La résolution du problème (3.2.1) se fait en utilisant l'approche variationnelle, qui est basée sur la notion de solutions faibles.

La formulation faible de ce type des problèmes consiste à trouver une solution  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  qui satisfait :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx, \quad (3.2.2)$$

pour toutes les fonctions  $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Cette formulation est obtenue à partir de la formulation forte en multipliant l'équation (3.2.1) par une fonction  $\varphi$  et en intégrant sur  $\Omega$ .

On dit que  $u$  est une solution faible du problème (3.2.1) si  $u$  est une solution du problème (3.2.2).

**Formulation Variatinnelle.** Soit la fonctionnelle  $I : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad (3.2.3)$$

où

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt.$$

Puisque  $g$  est continue, alors  $I$  est de classe  $C^1$  et

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} g v dx.$$

Il est facile de voir que les solutions faibles du problème (3.2.1) sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie  $I$ .

Ainsi, le problème (3.2.1) peut se réécrire sous forme variationnelle. Il s'agit de trouver une fonction  $u$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  pour laquelle  $I'(u) = 0$ .

### Les problèmes dans $\mathbb{R}^N$

Les équations de type  $p$ -Laplacien dans  $\mathbb{R}^N$  s'expriment de la manière suivante :

$$-\Delta_p u = g(x, u) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.2.4)$$

**Formulation Faible.** Observons que l'espace de Sobolev classique  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

n'est pas un choix approprié pour étudier le problème (3.2.4). En particulier, cet espace est lié au problème suivant

$$-\Delta_p(u) - |u|^{p-2}u = g(x, u), \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Si on considère l'espace  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

il n'est pas certain que cet espace soit l'espace normé approprié pour étudier le problème (3.2.1), puisque cet espace n'est même pas un espace de Banach.

Ensuite, notre exigence est l'espace  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  conçu dans [28] muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  désigne la fermeture de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{1,p}$  qui est également caractérisé par

$$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx < +\infty\}.$$

Si  $1 < p < N$  alors  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  est un espace de Banach réflexif.

Une formulation faible du problème (3.2.4) est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), u \neq 0 \text{ tel que} \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

**Formulation Variatinnelle.** Le problème (3.2.5) est équivalent à trouver les points critiques de la fonctionnelle  $I : \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx, \quad (3.2.6)$$

où

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt.$$

### 3.2.2 Problème $p$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues

Un aspect important du problème  $p$ -Laplacien est le comportement de nonrégularité de l'équation. En particulier, la nonlinéarité peut être discontinue, ce qui rend le problème encore plus difficile à résoudre. Dans ce chapitre, nous aborderons le problème  $p$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues.

#### Problème dans un domaine borné

Le problème  $p$ -Laplacien dans un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  de bord  $\partial\Omega$  consiste à trouver une fonction  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u = g(x, u), \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

où  $u \mapsto g(x, u)$  est une fonction discontinue.

**Formulation Faible.** La présence d'une discontinuité dans la fonction  $g$  signifie que le concept de solution classique ne peut pas être appliqué. Par conséquent, la situation

nécessite l'introduction d'un nouveau concept de solution adéquat avec le comportement discontinue de la nonlinéarité  $g$ .

**Définition 3.2.1.** *On dit qu'une fonction  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  est solution du problème multivalué associé à (3.2.7) si  $u$  satisfait*

$$-\Delta_p u \in [g(x, u(x)), \bar{g}(x, u(x))], \text{ p.p. dans } \Omega,$$

avec  $\underline{g}(x, t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \inf_{|t-s| < \epsilon} g(x, s)$  et  $\bar{g}(x, t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|t-s| < \epsilon} g(x, s)$ . C'est à dire s'il existe  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$-\Delta_p u = \rho(x), \text{ p.p. dans } \Omega,$$

où  $\rho(x) \in [g(x, u(x)), \bar{g}(x, u(x))], \text{ p.p. dans } \Omega$ .

Ce nouveau concept permet de formuler une définition des solutions faibles.

**Définition 3.2.2.** *On dit que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  est une solution nontriviale du problème (3.2.7) si  $u$  satisfait*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \rho \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

où  $\rho(x) \in [g(x, u(x)), \bar{g}(x, u(x))] \text{ p.p. dans } \Omega$ .

**Formulation Variationnelle.** Soit la fonctionnelle  $I : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(u) = Q(u) - \Psi(u),$$

où

$$Q(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p$$

et

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} G(x, u) dx,$$

avec  $G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt$ . Il est clair que  $Q$  est de classe  $C^1$ . Puisque  $g$  est discontinue alors  $\Psi$  ne peut pas être de classe  $C^1$ , donc  $I$  ne l'est pas aussi.

Afin d'aborder cette difficulté, il devient crucial d'établir des hypothèses appropriées sur  $g$ . En particulier, nous supposons que  $g$  satisfasse la condition de croissance suivante

$$|g(x, t)| \leq C(1 + |t|^r), \tag{3.2.8}$$

où  $p < r \leq p^*$ . À partir de ceci, nous assurons que la fonctionnelle  $\Psi$  sera localement lipschitzienne dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , c'est ce que nous examinerons en détail dans le chapitre suivant.

**Remarque.** *Il convient de noter que la condition de croissance existe à la fois dans les problèmes continus et discontinus, et pas uniquement dans ces derniers. Grâce à cette condition, nous nous assurons que la fonction d'énergie associée au problème reste bien définie et physiquement significative.*

Puisque  $\Psi$  est localement lipschitzienne dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $Q$  est de classe  $C^1$  alors le Corollaire 1.2.1 implique que  $I$  est localement lipschitzienne dans  $W^{1,p}(\Omega)$  et

$$\partial_W I(u) = Q'(u) - \partial_W \Psi(u), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (3.2.9)$$

où  $\partial_W$  désigne le gradient généralisé dans l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Si nous supposons que  $u_0$  est un point critique de  $I$  c'est à dire  $0 \in \partial_W I(u_0)$ , alors il existe  $\rho_0 \in \partial_W \Psi$  tel que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \rho_0 \varphi dx = 0, \quad \text{pour tout } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.2.10)$$

En vertu du Théorème 1.3.3 et de la proposition 1.3.1, nous obtenons que

$$\rho_0(x) \in [\underline{g}(x, u(x)), \bar{g}(x, u(x))], \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (3.2.11)$$

De (3.2.10) et (3.2.11) nous concluons que  $u_0$  est une solution faible du problème (3.2.7). On en déduit que les points critiques de la fonctionnelle  $I$  sont des solutions faibles du problème (3.2.7).

**Articles fondamentaux** Les problèmes de type  $p$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues dans un domaine borné ont été largement étudiée (voir par exemple [20, 64]). Parmi les nombreux articles, un se distingue incontestablement par son rôle primordial dans l'exploration approfondie et la compréhension des problématique de cette nature. Rédigé par D. Acroya, [20] est un article tenant une position centrale dans l'exploration de ces problèmes, lui conférant ainsi un statut distingué. En particulier, D. Acroya a étudié le problème (3.2.7) sous certaines hypothèses sur la nonlinéarité  $g(x, u) = f(u) + q(x)$  où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $q \in L^p(\Omega)$ .

L'auteur considère d'abord le cas où  $f$  satisfait les conditions suivantes.

( $f_2$ ) Il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f \in C(\mathbb{R} - \{a\}, \mathbb{R})$ .

(f<sub>2</sub>)

$$|f(x, t)| \leq C_1 + C_2|t|^{r-1},$$

pour certaines constantes positives  $C_1, C_2, r > p$ .

Sous ces hypothèses et par la notion du gradient généralisé, il montre que les solutions du problème sont exactement les points critiques de la fonctionnelle suivante

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} q(x)u(x) dx,$$

où  $F(u) = \int_0^u f(t) dt$ .

L'utilisation de la théorie des points critiques pour les fonctionnelles nondifférentiables [42] a permis d'établir certains résultats d'existence dans des cas particuliers de la nonlinéarité  $g$ .

Ce travail a exercé une influence marquante sur l'investigation des problèmes discontinues, en produisant des résultats significatifs et en établissant les fondements des recherches ultérieures dans ce domaine.

### Les problèmes posés dans $\mathbb{R}^N$

La complexité de l'analyse du problème sur un domaine non borné surpasse celle du problème sur un domaine borné en raison de la non compacité des injections de Sobolev.

La tâche actuellement entreprise concernant le  $p$ -Laplacien dans l'espace  $\mathbb{R}^N$  est de trouver une fonction non identiquement nulle  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , qui satisfait

$$-\Delta_p u = g(x, u), \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \tag{3.2.12}$$

### Formulation Faible.

En suivant la même démarche que celle adoptée dans la section précédente pour les problèmes posés dans des domaines bornés, nous parvenons à la définition suivante

**Définition 3.2.3.** On dit que  $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  est solution nontriviale du problème (3.2.12)

si :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho \varphi dx, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

où  $\rho(x) \in [\underline{g}(x, u(x)), \bar{g}(x, u(x))]$  *p.p.* dans  $\mathbb{R}^N$ .

### Formulation Variationnelle.

Soit la fonctionnelle d'énergie  $I : \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx.$$

Puisque la nonlinéarité  $g$  est discontinue, alors  $I$  n'est pas de classe  $C^1$ .

Pour assurer que la fonction d'énergie  $I$  associée au problème 3.2.12. soit bien définie et physiquement significative, nous supposons que la nonlinéarité  $g$  satisfait la condition de croissance suivante

$$|g(x, t)| \leq C|t|^r, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.2.13)$$

où  $p < r \leq p^*$ . Cette condition assure que  $I$  est localement lipschitzienne dans  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . Et comme nous l'avons vu dans la section précédente, les points critiques de la fonctionnelle  $I$  sont des solutions faibles du problème (3.2.12). Ceci nous permet de chercher les solutions faibles du problème 3.2.12 comme étant des points critiques de la fonctionnelle  $I$ .

### Articles fondamentaux

Le premier article que nous discuterons dans cette partie est intitulé "A Discontinuous problem involving the  $p$ -Laplacian Operator critical exponent in  $\mathbb{R}^N$ " par C.O. Alves et A.M. Bertone [3]. Les auteurs ont étudié l'existence d'une solution nontriviale pour l'équation suivante

$$-\Delta_p u = H(u - a)u^{p^*-1} + \lambda h(x), \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (3.2.14)$$

Dans ce contexte, l'exposant  $p^*$  est l'exposant critique de Sobolev donné par  $\frac{Np}{N-p}$ ,  $H$  est la fonction de Heaviside et  $a > 0$ ,  $\lambda > 0$  sont des paramètres réels. Les auteurs ont étudié le problème sous les hypothèses suivantes

( $H_1$ )  $1 < p < N$  et  $N \geq 2$ .

( $H_2$ ) La fonction  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow ]0, +\infty[$  est une fonction positive mesurable telle que

$$h \in L^\theta(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N), \quad \text{où } \theta = (p^*)'.$$

Une formulation variationnelle de ce problème utilisant le concept du gradient généralisé de Clarke est donnée par

$$\left\{ \text{trouvez } u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } 0 \in \partial_{\mathcal{D}} I(u), \right.$$

où  $I$  est la fonctionnelle d'énergie donnée par

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u(x) dx,$$

avec  $F(u) = \int_0^u H(u-a)u^{p^*-1}.$

Les auteurs démontrent, à l'aide de cette formulation, que le problème (3.2.14) possède au moins une solution faible nontriviale. La preuve a été établie à l'aide du principe de concentration-compacité (cas limite) de Lions et du théorème du Col pour les fonctionnelles nondifférentiables.

Un autre article dans la même problématique est intitulé "Existence and multiplicity of solutions for a discontinuous problems with critical Sobolev exponents" par Shang, X. [100]. L'auteur a examiné l'existence d'une solution nontriviale pour l'équation suivante

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p^*-2} u + f(x, u), \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \tag{3.2.15}$$

où  $1 < p < N$ ,  $\lambda > 0$  est un paramètre et  $f : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable discontinue. L'auteur a étudié le problème en tenant compte les conditions suivantes

(H<sub>1</sub>)  $f(x, t) = 0$  si  $t \leq 0$  p.p.  $x \in \mathbb{R}^N$

(H<sub>2</sub>)  $|f(x, t)| \leq c_1(x) + c_2(x)|t|^{r-1}$ ,  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ , où  $c_1, c_2$  sont des fonctions positives qui vérifient

$$c_1(x) \in L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad c_2(x) \in L^{\frac{p^*}{p^*-r}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad p < r < p^*.$$

(H<sub>3</sub>)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x,t)}{|t|^{p-1}} = 0$  p.p.  $x \in \mathbb{R}^N$ .

(H<sub>4</sub>) Il existe une constante positive  $\theta$ , telle que  $p < \theta < r$  pour la quelle on a

$$\underline{f}(x, t)t \geq \theta F(x, t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N,$$

où

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds.$$

(H<sub>5</sub>)  $f$  est impair par rapport à  $t$ .

La fonction d'énergie liée au problème (3.2.15) est donnée par

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

Une formulation variationnelle est fournie par

$$\text{trouver une solution } u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \text{ telle que } 0 \in \partial_{\mathcal{D}} I(u). \quad (3.2.16)$$

L'auteur utilise cette formulation particulière pour démontrer l'existence d'une solution faible nontriviale. À l'aide du principe de concentration-compacité (cas limite), l'auteur démontre avec succès que la fonctionnelle  $I$  satisfait la condition de Palais-Smale. Par la suite, il montre que la fonctionnelle  $I$  satisfait la géométrie de Col. En appliquant le théorème du Col, il arrive à la conclusion que le problème (3.2.15) admet une solution faible nontriviale. l'auteur a également établi un résultat de multiplicité à l'aide d'un théorème de points critiques pour les fonctionnelles paires.

### 3.3 Problème du type $(p, q)$ -Laplacien

L'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien est défini comme suit :

$$\Delta_{p,q}(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2} \nabla u)$$

où  $u$  est une fonction de vecteur  $N$ -dimensionnel,  $p$  et  $q$  sont deux paramètres non négatifs,  $\nabla$  est l'opérateur gradient et  $\operatorname{div}$  est l'opérateur de divergence.

Lorsque  $p = q$ , l'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien se réduit à l'opérateur  $p$ -Laplacien. l'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien est donc une généralisation de l'opérateur nonstandard de  $p$ -Laplacien qu'est également connu opérateur quasilineaire.

L'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien est utilisé pour modéliser l'écoulement des fluides dans des milieux poreux, ou pour étudier les équations d'élasticité nonlinéaires. Il est également utilisé pour étudier les modèles de diffusion qui contient des fonctions de la concentration.

Il est important de souligner que la manipulation de l'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien peut poser des difficultés en raison de son caractère nonlinéaire.

Les problèmes elliptiques du type  $(p, q)$ -Laplacien sont des problèmes mathéma-

tiques qui concernent la résolution d'une équation aux dérivées partielles nonlinéaires qui contient l'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien. Ce type d'équation est souvent utilisé dans des modèles mathématiques pour décrire des phénomènes physiques. Cependant, la complexité du modèle exige de recourir à des techniques mathématiques avancées.

L'équation caractéristique des problèmes elliptiques de type  $(p, q)$ -Laplacien est donnée par

$$-\Delta_{p,q}u = g(x, u), \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.3.1)$$

où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  et  $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée.

La résolution du problème (3.3.1) s'effectue en adoptant l'approche variationnelle, qui est fondée sur la notion la solution faible.

### 3.3.1 Rappel sur les problèmes du type $(p, q)$ -Laplacien régulier

Dans cette partie, nous supposons que  $g$  est une fonction continue.

#### Les problèmes dans un domaine borné

L'équation correspondante au  $(p, q)$ -Laplacien dans un domaine borné est formulée comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta_{p,q}u = g(x, u) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ u = 0, & \text{pour tout } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

où  $1 < p < q < \infty$ ,  $\Omega$  est un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $u \mapsto g(x, u)$  est une fonction continue.

**Formulation Faible** On considère l'espace des solutions  $W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  muni de la norme

$$\|u\|_{1,q} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

La formulation faible du problème (3.3.5) consiste à trouver une solution  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$

qui satisfait :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx, \quad (3.3.3)$$

pour toutes les fonctions  $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ .

**Formulation Variationnelle.** Les solutions faibles du problème (3.3.3) sont les points critiques de la fonction d'énergie  $I : W_0^{1,q}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|u\|_{1,q}^q - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad (3.3.4)$$

où

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt.$$

Pour des informations plus approfondies sur ce sujet, veuillez consulter les articles [26, 84, 74, 116, 117].

### Les problèmes dans $\mathbb{R}^N$

Si le problème est posé dans  $\mathbb{R}^N$  il s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\Delta_{p,q} u = g(x, u) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

où  $1 < p < q < +\infty$  et  $\mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N)$  désigne la fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  par rapport à la norme

$$\|u\|_{1,m} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}.$$

**Formulation Faible.** L'espace des solutions  $E = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  muni de la norme

$$\|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q},$$

est un espace de Banach réflexif.

On dit que  $u \in E$  est une solution faible de (3.3.5) si elle vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} g \varphi dx, \quad (3.3.6)$$

pour tout  $\varphi \in E$ .

**Formulation Variationnelle.** Soit la fonction d'énergie  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|u\|_{1,q}^q - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad (3.3.7)$$

où

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt.$$

Si une fonction  $u \in E$  vérifie  $I'(u) = 0$  dans  $E^*$  alors elle solution du problème (3.3.5). Pour obtenir des informations plus approfondies concernant le sujet, veuillez consulter les articles [18, 29, 43, 54, 56, 71, 72, 115].

### 3.3.2 Les problèmes de type $(p, q)$ -Laplacien avec des nonlinéarités discontinues

Dans cette partie, nous examinerons le problème du  $(p, q)$ -Laplacien qui englobe des nonlinéarités avec des discontinuité.

L'exploration de ce type de problème est relativement récemment. Plus précisément, la première investigation a été entreprise en l'année 2019 par Figueiredo, G. M. et Nascimento, N. C. [57]. Cet article examine l'existence de solutions positives pour une classe de problèmes elliptiques du type  $(p, q)$ -Laplacien avec un exposant critique et une nonlinéarité discontinue. L'article considère des solutions positives pour le problème (3.3.1) lorsque la fonction  $g$  a un ensemble non dénombrable de points de discontinuité, en étudiant les combinaisons de nonlinéarité discontinue avec croissance critique et l'opérateur  $(p, q)$ -Laplacien. Le principal résultat de cette recherche est que le problème a une solution positive nontriviale.

En particulier, les auteurs ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) + |u|^{q^*-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

où  $1 < p \leq q < q^*$ ,  $\Omega$  est un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction discontinue et  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue. Les hypothèses proposées concernant les fonctions  $a$  et  $f$  sont dans ce qui suit

(a<sub>1</sub>) Ils existent des constantes positives  $k_0, k_1, k_2, k_3$  telles que

$$k_0 + k_1 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq k_2 + k_3 t^{\frac{q-p}{p}}, \text{ pour tout } t > 0.$$

(a<sub>2</sub>) Il existe  $\alpha \in (0, 1]$  tel que

$$A(t) \geq \alpha a(t)t, \text{ pour tout } t > 0,$$

$$\text{où } A(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

(f<sub>1</sub>)

$$|f(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^{r-1},$$

pour certaines constantes positives  $C_1, C_2$  et  $r > p$ .

(f<sub>2</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe  $\theta \in (p\alpha, q^*)$  tel que

$$0 \leq \theta F(t) \leq t \underline{f}(t),$$

où

$$\underline{f}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \text{ess inf}_{|t-s| < \epsilon} f(s).$$

(f<sub>3</sub>) Il existe  $\beta > 0$ , tel que

$$H(t - \beta) \leq f(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

(f<sub>4</sub>)  $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$  et  $f(t) = 0$  si  $t \leq 0$ .

Un exemple d'une fonction vérifiant les hypothèses (a<sub>1</sub>) et (a<sub>2</sub>) est

$$a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}},$$

(ici  $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ). Par conséquent, le problème (3.3.8) se réduit au problème  $(p, q)$ -Laplacien suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p,q} u = f(u) + |u|^{q^*-2} u, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Afin de prouver l'existence des solutions, les auteurs emploient une méthode basée sur l'approche variationnelle et intègrent des concepts techniques de l'analyse non convexe.

Une formulation faible du problème (3.3.8) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver une solution } u \in W_0^{1,q}(\Omega) \text{ tel que pour tout } \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega) \text{ on a} \\ \int_{\Omega} a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \varphi dx = \int_{\Omega} \rho \varphi dx + \int_{\Omega} |u|^{q^*-2} u \varphi dx \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \text{avec } \rho \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ p.p. dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.3.9)$$

La fonction énergétique associée au problème (3.3.9) peut être exprimée comme suit :

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^p) dx - \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} |u|^{q^*} dx.$$

où  $A(t) = \int_0^t a(s) ds$ . Pour établir l'existence d'une solution positive nontriviale du problème (3.3.9), les auteurs appliquent le principe de concentration-compacité, notamment dans le cadre du cas limite. Ce principe permet aux auteurs d'étudier le comportement de la fonctionnelle sous divers modèles de concentration, assurant la présence des points critiques et des solutions potentiellement nontriviales.

En réussissant à établir que la fonctionnelle  $I$  satisfait la condition de Palais-Smale, les auteurs s'assurent de la présence de points critiques.

De plus, les auteurs démontrent que cette fonctionnelle satisfait la géométrie du Col qui joue un rôle incontournable dans la détermination des suites de Palais-Smale.

En appliquant le théorème du Col les auteurs concluent que le problème (3.3.8) possède une solution faible positive nontriviale.

Dans l'ensemble, ce manuscrit contribue à l'étude des problèmes nonlinéaires avec croissance critique et nonlinéarité discontinue. Il étend les recherches précédentes en étudiant une classe plus large de problèmes du type  $(p, q)$ -Laplacien et fournit des exemples utiles et des arguments convaincants pour assurer l'existence des solutions positives.



EXISTENCE DE SOLUTIONS NONTRIVIALES D'UN  
 PROBLÈME DE TYPE  $(p, q)$ -LAPLACIEN AVEC  
 DES NONLINÉARITÉS DISCONTINUES

*Il n'y a pas de richesse comme la  
 raison, pas de pauvreté comme  
 l'ignorance, pas d'héritage comme les  
 bonnes manières, et pas de soutien  
 comme le conseil*

– Ali Ibn Abi Talb

4.1	Introduction . . . . .	64
4.2	Position du problème . . . . .	64
	4.2.1 Hypothèses . . . . .	64
	4.2.2 Formulation faible . . . . .	64
4.3	Fonctionnelle d'énergie . . . . .	65
4.4	Géométrie du Col . . . . .	66
4.5	La suite de Palais-Smale et ses propriétés . . . . .	69
4.6	Existence des solutions faibles . . . . .	75
4.7	Nontrivialité de la solution . . . . .	77

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, en utilisant le théorème de Col 2.2.1, on cherche les solutions d'une EDP contenant l'opérateur  $(p, q)$ -laplacien et une nonlinéarité discontinue sur  $\mathbb{R}^N$ . Nous assurons l'existence d'une suite de Palais-Smaile de la fonctionnelle d'Euler-Lagrange associée au problème qui contiendra une sous-suite faiblement convergente dans l'espace des solutions. Par le principe de concentration-compacité de Lions, nous concluons que la limite faible est une solution nontriviale.

## 4.2 Position du problème

Pour des réels  $1 < p < q < N$ ,  $N \geq 2$ , on considère le problème

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) \text{ dans } \mathbb{R}^N. \quad (4.2.1)$$

### 4.2.1 Hypothèses

Afin d'étudier l'existence d'une solution nontriviale du problème (4.2.1), nous supposons que la fonction  $f$  satisfait les hypothèses suivantes.

( $f_1$ ) la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est discontinue. De plus  $f(t) = 0$ ,  $\forall t \leq 0$  et il existent  $C_f > 0$  et  $r \in (\max\{q, p^*\}, q^*)$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$|f(t)| \leq C_f |t|^{r-1}, \quad \forall t > 0.$$

( $f_2$ ) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq rF(t) \leq t\underline{f}(t),$$

où

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

et

$$\underline{f}(t) = \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,inf}_{|t-s| < \epsilon} f(s) \text{ et } \bar{f}(t) = \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{|t-s| < \epsilon} f(s).$$

### 4.2.2 Formulation faible

Soit  $E$  l'espace de Banach réflexif donné par  $E = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  et muni de la norme

$$\|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q},$$

où  $\|u\|_{1,m} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}$ .

**Définition 4.2.1** (Solution faible). *On dit qu'une fonction  $u \in E$  est solution faible du problème (4.2.1) si elle vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho \varphi dx, \quad (4.2.2)$$

pour tout  $\varphi \in E$  où

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \bar{f}(u(x))] \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N \quad (4.2.3)$$

### 4.3 Fonctionnelle d'énergie

Soit la fonctionnelle d'Euler-Lagrange donnée par

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx. \quad (4.3.1)$$

Comme la fonction  $f$  est discontinue, la fonctionnelle  $I$  n'est pas de classe  $C^1$  sur  $E$ . Nous écrivons la fonctionnelle  $I$  sous la forme

$$I(u) = Q(u) - \Psi(u) \quad (4.3.2)$$

avec

$$Q(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \text{ et } \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

Alors, on a le résultat suivant.

**Proposition 4.3.1.** *La fonctionnelle  $\Psi$  est localement Lipschitzienne dans  $E$ . De plus, si  $\rho \in \partial_E \Psi(u)$ , alors*

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \bar{f}(u(x))] \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

*Démonstration.* De l'hypothèse  $(f_1)$  et d'après la Proposition 1.3.1, on a

$$\Psi \in Lip_{loc}(L^r(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}) \text{ et } \partial_{L^r} \Psi(u) \subset [\underline{f}(u(x)), \bar{f}(u(x))] \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Puisque  $E$  s'injecte de façon continue dans  $L^r(\mathbb{R}^N)$  ( $p^* < r < q^*$ ), le Théorème 1.3.3 affirme que

$$\Psi \in Lip_{loc}(E, \mathbb{R}) \text{ et } \partial_E \Psi(u) \subset \partial_{L^r} \Psi(u).$$

Ainsi, si  $\rho \in \partial_E \Psi(u)$  alors nécessairement

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \bar{f}(u(x))] \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

□

Des argument standards montrent que  $Q \in C^1(E, \mathbb{R})$  et que sa dérivée au sens de Gâteaux est

$$\langle Q'(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \forall \varphi \in E.$$

Comme  $\Psi \in Lip_{loc}(E, \mathbb{R})$ , la Proposition 1.2.1 et le Corollaire 1.2.1 affirment que  $I \in Lip_{loc}(E, \mathbb{R})$  et que pour tout  $u \in E$ , on a

$$\partial_E I(u) = \{Q'(u)\} - \partial_E \Psi(u). \quad (4.3.3)$$

## 4.4 Géométrie du Col

Pour montrer l'existence d'une solution faible, il faut d'abord montrer que la fonctionnelle  $I$  vérifié la géométrie du Col.

**Lemme 4.4.1.** *La fonctionnelle  $I$  définie en (4.3.1) vérifie*

- (i)  $I(0) = 0$ ,
- (ii) il existe  $R > 0$  et  $\alpha > 0$ , tels que  $I(u) \geq \alpha$  si  $\|u\| = R$ ,
- (iii) il existe  $e \in E \setminus B_R(0)$  tel que  $I(e) < 0$ .

Pour démontrer ce lemme on a besoin du résultat suivant.

**Lemme 4.4.2.** *Ils existent deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que*

$$f(t) \geq C_1 t^{r-1} - C_2, \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty).$$

*Démonstration.* D'après la définition de  $\underline{f}$ , on a clairement

$$\underline{f}(s) \leq f(s), \quad \forall s \in [0, +\infty). \quad (4.4.1)$$

Ceci avec l'hypothèse  $(f_2)$  implique que

$$0 \leq \underline{F}(s) \leq s \underline{f}(s) \quad \forall s \in [0, +\infty), \quad (4.4.2)$$

où

$$\underline{F}(s) = \int_0^s \underline{f}(\tau) d\tau.$$

Maintenant, supposons que  $K = \underline{F}(\kappa)$  et

$$\phi_t(s) = \underline{F}(st), \quad \text{pour tout } s > 0, \quad (4.4.3)$$

où  $\kappa$  est une constante positive et  $t > \kappa$ .

Ceci, en combinaison avec la relation (4.4.2), implique que

$$0 < r\phi_t(s) = r\underline{F}(st) \leq st\underline{f}(st) = s\Phi_t'(s), \quad \text{pour tout } s \geq \frac{\kappa}{t}.$$

Par conséquent,

$$\int_{\frac{\kappa}{t}}^1 \frac{\phi_t'(s)}{\phi_t(s)} ds \geq \int_{\frac{\kappa}{t}}^1 \frac{r}{s} ds,$$

alors

$$\phi_t(1) \geq \phi_t\left(\frac{\kappa}{t}\right) \frac{t^r}{\kappa^r}.$$

De la relation (4.4.3), on obtient

$$\underline{F}(t) \geq \underline{F}\left(t\frac{\kappa}{t}\right) \frac{t^r}{\kappa^r} = K \frac{t^r}{\kappa^r} = C_1 t^r, \quad \text{pour tout } t \in [\kappa, +\infty). \quad (4.4.4)$$

Par (4.4.2) et (4.4.4), nous concluons que

$$\underline{f}(t) \geq C_1 t^{r-1}, \quad \text{pour tout } t \in [\kappa, +\infty).$$

D'autre part, l'hypothèse  $(f_1)$  affirme que

$$|f(t)| \leq C t^{r-1} \leq C \kappa^{r-1}, \quad \text{pour tout } t \in [0, \kappa] \quad (4.4.5)$$

En combinant (4.4.1), (4.4.4) et (4.4.5), on obtient

$$f(t) \geq C_1 t^{r-1} - C_2, \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty).$$

□

*Démonstration du Lemme 4.4.1.* (i) Il est clair que  $I(0) = 0$ .

(ii) De l'hypothèse  $(f_1)$ , on a

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^u f(t) dt dx \leq C_f \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^u |t|^{r-1} dt dx = \frac{C_f}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx.$$

Donc pour tout  $u \in E$  on a

$$I(u) \geq \frac{1}{q} (\|u\|_{1,p}^p + \|u\|_{1,q}^q) - \frac{C_f}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx.$$

Prenons  $\|u\| < 1$ , on trouve alors que

$$I(u) \geq \frac{1}{q} (\|u\|_{1,p}^q + \|u\|_{1,q}^q) - \frac{C_f}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \quad (4.4.6)$$

$$\geq \frac{1}{2^{q-1}q} (\|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q})^q - \frac{C_f}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx. \quad (4.4.7)$$

Par l'injection de Sobolev, on a l'inégalité suivante

$$\|u\|_r \leq C_S \|u\|_{1,q} \leq C_S \|u\|.$$

Ce fait avec (4.4.6) implique que

$$I(u) \geq C_3 \|u\|^q - C_4 \|u\|^r.$$

Choisissant  $0 < R_0 < 1$ , alors pour tout  $u \in E$  tel que  $\|u\| = R_0$ , on a

$$I(u) \geq C_3 R_0^q - C_4 R_0^r.$$

Puisque  $r > q$  il vient qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \quad \forall u \in E \quad \text{avec} \quad \|u\| = R_0,$$

pour  $R_0 > 0$  suffisamment petit.

(iii) Du Lemme 4.4.2, on a

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^u f(t) dt dx \geq \frac{C_1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx - \frac{C_2}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |u| dx. \quad (4.4.8)$$

Choisissons  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  avec  $v > 0$ . Alors, de la relation (4.4.8) il vient que

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{t^p}{p} \|v\|_{1,p}^p + \frac{t^q}{q} \|v\|_{1,q}^q - \Psi(tv) \\ &\leq \frac{t^p}{p} \|v\|_{1,p}^p + \frac{t^q}{q} \|v\|_{1,q}^q + C_2 t \int_{\mathbb{R}^N} v dx - C_1 \frac{t^r}{r} \int_{\mathbb{R}^N} v^r dx, \end{aligned}$$

pour tout  $t > 0$ . Ceci implique que

$$I(tv) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

Donc, on peut choisir  $e_0 = t_0 v \in E \setminus B_{R_0}(0)$  telle que

$$I(e_0) < 0,$$

pour  $t_0 > 0$  suffisamment grand.

□

## 4.5 La suite de Palais-Smale et ses propriétés

Le lemme précédent combiné avec le théorème du Col nous assure l'existence d'une suite de Palais-Smale  $\{u_n\} \subset E$ . En particulier,  $\{u_n\}$  satisfait

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ et } \lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (4.5.1)$$

où  $\lambda(u_n)$  est défini dans (2.2.1) et

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

avec

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X), \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = e_0\}.$$

Comme  $f(t) = 0$  pour tout  $t \leq 0$ , alors on peut supposer que  $u_n$  est positive pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 4.5.1.** *La suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$  est bornée dans  $E$ .*

*Démonstration.* Comme  $\{u_n\}$  est une suite de Palais-Smale, alors il existe une suite  $\{\omega_n\} \subset E^*$  telle que

$$\lambda(u_n) = \|\omega_n\|_*, \quad \omega_n \in \partial_E I(u_n).$$

Puisque

$$\partial_E I(u_n) = \{Q'(u_n)\} - \partial_E \Psi(u_n),$$

alors, il existe  $\{\rho_n\} \subset \partial_E \Psi(u_n)$  telle que

$$\omega_n = Q'(u_n) - \rho_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (4.5.2)$$

Ainsi, on a

$$\langle \omega_n + \rho_n, u_n \rangle = \langle Q'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^q. \quad (4.5.3)$$

D'autre part, de la Proposition 4.3.1 on a

$$\underline{f}(u_n(x)) \leq \rho_n(x) \leq \bar{f}(u_n(x)) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N. \quad (4.5.4)$$

Ceci conduit à l'inégalité

$$u_n(x) \underline{f}(u_n(x)) \leq u_n(x) \rho_n(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n \underline{f}(u_n) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n dx = \langle \rho_n, u_n \rangle.$$

Comme  $0 \leq rF(t) \leq t\underline{f}(t) \forall t \in \mathbb{R}$ , il vient que

$$\Psi(u_n) \leq \frac{1}{r} \langle \rho_n, u_n \rangle. \quad (4.5.5)$$

Combinant (4.5.3) et (4.5.5) pour aboutir à la relation

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{r} \langle \omega_n + \rho_n, u_n \rangle &= \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,p}^p + \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,q}^q - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx \\ &\geq \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,p}^p + \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,q}^q - \frac{1}{r} \langle \rho_n, u_n \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$I(u_n) - \frac{1}{r} \langle \omega_n, u_n \rangle \geq \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,p}^p + \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,q}^q.$$

Puisque la suite  $I(u_n)$  est bornée et  $\langle \omega_n, u_n \rangle \leq \|u_n\|_{o_n(1)}$ , alors il existent des constantes positives  $C_5, C_6, C_7$  telles que

$$C_5(1 + \|u_n\|) \geq C_6 \|u_n\|_{1,p}^p + C_7 \|u_n\|_{1,q}^q.$$

Supposons par contradiction que  $\|u_n\| \rightarrow \infty$ . Alors, nous avons les trois possibilités suivantes :

- (i)  $\|u_n\|_{1,p} \rightarrow \infty$  et  $\|u_n\|_{1,q} \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $\|u_n\|_{1,p} \rightarrow \infty$  et  $\|u_n\|_{1,q}$  est bornée ,

(iii)  $\|u_n\|_{1,p}$  est bornée  $\|u_n\|_{1,q} \rightarrow \infty$ .

Si le premier cas est satisfait, alors il existe  $n_0$  telle que  $\forall n \geq n_0$  :

$$\|u_n\|_{1,q}^q \geq \|u_n\|_{1,q}^p$$

car  $p < q$ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} C_5(1 + \|u_n\|) &\geq C_6\|u_n\|_{1,p}^p + C_7\|u_n\|_{1,q}^q \geq C_8(\|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^p) \\ &\geq \frac{C_8}{2^{p-1}}(\|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,q})^p = \frac{C_8}{2^{p-1}}\|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction car  $\|u_n\| \rightarrow \infty$  et  $p > 1$ .

Si la deuxième possibilité est satisfaite, alors

$$C_5(1 + \|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,q}) \geq C_6\|u_n\|_{1,p}^p + C_7\|u_n\|_{1,q}^q \geq C_6\|u_n\|_{1,p}^p$$

donc,

$$0 < \frac{C_6}{C_5} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\|u_n\|_{1,p}^p} + \frac{1}{\|u_n\|_{1,p}^{p-1}} + \frac{\|u_n\|_{1,q}}{\|u_n\|_{1,p}^p} \right) = 0,$$

qui est une contradiction.

En procédant comme dans le deuxième cas, on peut vérifier facilement que le troisième cas ne peut pas avoir lieu. Ainsi, la suite  $\{u_n\}$  est bornée dans  $E$ .  $\square$

Comme le problème est posé dans un domaine non borné, l'injection  $i : E \rightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  n'est pas nécessairement compacte. C'est pourquoi nous ne pouvons pas garantir la convergence forte de la suite de Palais-Smale.

Le résultat suivant nous est de grande importance.

**Lemme 4.5.2.** *Il existe un élément  $u \in E$  pour lequel on a*

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

*Démonstration.* La réflexivité de l'espace  $E$  assure l'existence d'une sous-suite de  $\{u_n\}$  qui converge faiblement vers un élément  $u \in E$ . Les théorèmes d'injection nous assurent

les convergences suivantes

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{dans } L_{loc}^s(\mathbb{R}^N) \text{ pour } s \in [p, q^*[, \\ u_n \rightarrow u & \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (4.5.6)$$

On introduit la fonction  $P_n$  donnée par

$$P_n(x) = (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)(x).$$

Sachant que

$$(|\xi|^{l-2} \xi - |\eta|^{l-2} \eta) \cdot (\xi - \eta) > 0$$

pour tout  $l > 1$  et  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$  avec  $\xi \neq \eta$ , on déduit que  $P_n(x) \geq 0$ . Soit  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  avec  $0 < \psi < 1$  et  $\psi = 1$  sur  $B_R(0)$ . Donc, on a

$$0 \leq \int_{B_R(0)} P_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} P_n(x) \psi(x) dx,$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} P_n(x) \psi(x) dx &= \\ & \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)(x) \psi(x) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n) \cdot (u_n - u)(x) \nabla \psi(x) dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u + |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (u_n - u)(x) \nabla \psi(x) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u_n - u) \psi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u_n - u) \psi dx \\ & = \langle \omega_n, \psi(u_n - u) \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n) \cdot (u_n - u)(x) \nabla \psi(x) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u_n - u) \psi dx - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u + |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)(x) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$0 \leq \int_{B_R(0)} P_n(x) dx \leq J_1 - J_2 + J_3 - J_4, \quad (4.5.7)$$

où

$$\begin{cases} J_1 = \langle \omega_n, \psi(u_n - u) \rangle, \\ J_2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n) \cdot (u_n - u)(x) \nabla \psi(x) dx, \\ J_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u_n - u) \psi dx, \\ J_4 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (u_n - u)(x) \psi(x) dx. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous allons prouver que chaque  $J_i \rightarrow 0$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Comme  $\psi u_n$  est bornée dans  $E$  alors

$$J_1 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (4.5.8)$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{j-2} \nabla u_n) \cdot (u_n - u) \nabla \psi dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^j dx \right)^{\frac{j-1}{j}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |(u_n - u) \nabla \psi|^j dx \right)^{\frac{1}{j}}, \quad j = p, q.$$

Par conséquent,

$$|J_2| \leq C_9 \left( \int_{\mathbb{R}^N} |(u_n - u) \nabla \psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + C_{10} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |(u_n - u) \nabla \psi|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

car  $u_n$  est bornée dans  $E$ . Puisque  $u_n \rightarrow u$  dans  $L_{loc}^j(\mathbb{R}^N)$  alors

$$J_2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (4.5.9)$$

De la relation (4.5.4) et de l'hypothèse  $(f_1)$  il vient que

$$\rho_n(x) \leq C_f |u_n(x)|^{r-1} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Ainsi  $\rho_n$  est telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^{\frac{r}{r-1}} dx \leq C_f \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^r dx \leq C_{11} \quad (4.5.10)$$

car  $u_n$  est bornée dans  $L^r(\mathbb{R}^N)$ , ce qui implique que  $\rho_n$  est bornée dans  $L^r(\mathbb{R}^N)$ .

On applique l'inégalité de Hölder pour obtenir l'estimation

$$|J_3| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n |u_n - u| \psi dx \leq C_{12} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n \psi - u \psi|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Alors, il vient que

$$J_3 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (4.5.11)$$

Considérons maintenant les applications

$$\begin{cases} \langle F_1, w \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w \psi dx, & w \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ \langle F_2, w \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla w \psi dx, & w \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Il est facile de voir que  $F_1 \in (\mathcal{D}^{1,p})'(\mathbb{R}^N)$  et  $F_2 \in (\mathcal{D}^{1,q})'(\mathbb{R}^N)$ . Puisque  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $E$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{i-2} \nabla u \cdot \nabla u_n \psi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^i \psi dx; i = p, q.$$

On en conclut que

$$J_4 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (4.5.12)$$

De (4.5.8),(4.5.9),(4.5.11) et (4.5.12) , on déduit que

$$\int_{B_R(0)} P_n(x) dx \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Le Lemme 2.1.3 implique que

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ dans } L^q(B_R(0)).$$

Donc, il existe une sous suite de  $\{u_n\}$  telle que

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ p.p. dans } B_R(0),$$

Comme  $R > 0$  est arbitraire, nous concluons que

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

□

## 4.6 Existence des solutions faibles

**Théorème 4.6.1.** *La limite faible de la suite de Palais-Smale est une solution faible du problème (4.2.1).*

*Démonstration.* Remarquons que  $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$  et  $|\nabla u_n|^{q-2}\nabla u_n$  sont bornés dans  $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$  et  $L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N)$  respectivement. Du Lemme précédent on a aussi

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Le Lemme 2.1.2, implique que

$$\begin{cases} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u & \text{dans } L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \text{ et} \\ |\nabla u_n|^{q-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{q-2}\nabla u & \text{dans } L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (4.6.1)$$

D'autre part, puisque  $\{\rho_n\}$  est une suite bornée dans  $L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N)$ , alors il existe  $\rho_0 \in L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N)$  et une sous-suite de  $\{\rho_n\}$  telle que

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_0 \quad \text{dans } L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N). \quad (4.6.2)$$

De (4.6.1) et (4.6.2), il vient que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 \varphi, \quad \forall \varphi \in E. \quad (4.6.3)$$

Pour que  $u$  soit une solution faible de l'équation (4.2.1), il nous reste à démontrer que

$$\rho \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Pour tous  $R > 0$  on note  $\tilde{\psi}$  la fonction

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{sur } B_R(0), \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

avec  $\psi \in L^r(B_R(0))$ .

Il est clair que  $\tilde{\psi} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ .

Notons  $u_{n,R}$ ,  $\rho_{n,R}$ ,  $u_R$  et  $\rho_R$  les restrictions à la boule  $B_R(0)$  des fonctions  $u_n$ ,  $\rho_n$ ,  $u$  et  $\rho_0$  respectivement.

D'après le Lemme 1.3.3, on a

$$\partial_E \Psi(u) \subset \partial_{L^r} \Psi(u), \quad \forall u \in E.$$

Notons par  $\Psi_R : L^r(B_R(0)) \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$\Psi_R(u) = \int_{B_R(0)} F(u) dx.$$

Observons que

$$\int_{B_R(0)} \rho_{n,R} \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \tilde{\psi} dx, \quad (4.6.4)$$

et que

$$\Psi_R^\circ(u_{n,R}, \psi) = \Psi^\circ(u_n, \tilde{\psi}). \quad (4.6.5)$$

De la définition du gradient généralisé, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \tilde{\psi} dx \leq \Psi^\circ(u_n, \tilde{\psi}). \quad (4.6.6)$$

Combinant (4.6.4), (4.6.5) et (4.6.6), on obtient que

$$\int_{B_R(0)} \rho_{n,R} \psi dx \leq \Psi_R^\circ(u_{n,R}, \psi).$$

Ainsi,

$$\rho_{n,R} \in \partial_{L^r(B_R(0))} \Psi_R(u_{n,R}).$$

Puisque  $u_{n,R} \rightarrow u_R$  dans  $L^r(B_R(0))$  et  $\rho_{n,R} \rightharpoonup \rho_R$  dans  $L^{\frac{r}{r-1}}(B_R(0))$ , la Proposition 1.1.3 affirme que

$$\rho_R \in \partial_{L^r(B_R(0))} \Psi_R(u_R).$$

Alors, de la Proposition 1.3.1 on obtient

$$\rho_R(x) \in [\underline{f}(u_R(x)), \overline{f}(u_R(x))] \text{ p.p. dans } B_R(0).$$

Par conséquent,

$$\rho_0(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ p.p. dans } B_R(0),$$

et comme  $R$  est arbitraire, alors

$$\rho_0(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N. \quad (4.6.7)$$

Ce fait avec (4.6.3) implique que la limite faible  $u$  de la suite de Palais-Smale est une

solution faible du Problème (4.2.1). □

## 4.7 Nontrivialité de la solution

La nontrivialité de la solution trouvée n'est pas évidente, car elle ne découle que d'une limite faible. Le principe de la concentration-compacité est l'outil que nous allons utiliser pour démontrer cette nontrivialité. Afin de pouvoir appliquer le Lemme 2.3.1, on va rappeler le résultat suivant

**Lemme 4.7.1.** [72] *Soit  $\{p_n\} \subset L^1(\mathbb{R}^N)$  une suite bornée avec  $p_n > 0$ . Alors il existe une sous-suite, notée encore  $\{p_n\}$ , telle que l'une des deux possibilités suivantes est satisfaite*

(i) (Évanescence)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R(0)} p_n(x) dx = 0$  pour tout  $R, 0 < R < \infty$ .

(ii) (Non évanescence) Il existe  $\alpha > 0, 0 < R < \infty$  et  $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_n+B_R(0)} p_n(x) dx \geq \alpha > 0.$$

**Proposition 4.7.1.** *La solution faible décrite dans le Théorème 4.6.1 est nontriviale dans  $\mathbb{R}^N$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{b_n\}$  est une suite arbitraire de  $\mathbb{R}^N$ . Posons

$$\tilde{u}_n(x) = u_n(x - b_n).$$

Il est clair qu'on a  $\|\tilde{u}_n\| = \|u_n\|$ . Ainsi, la suite  $\{\tilde{u}_n\}$  est bornée dans  $E$ . Par passage à une sous-suite extraite, on a

$$\begin{cases} \tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} & \text{dans } E \\ \tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u} & \text{dans } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ pour tous } s \in [q, q^*), \end{cases}$$

pour un certain  $\tilde{u} \in E$ .

L'invariance de  $\mathbb{R}^N$  par translation, nous assure que  $I(\tilde{u}_n) = I(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc

$$I(\tilde{u}_n) \rightarrow c \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Soit  $\gamma = \max\{p^*; q\}$ . La suite  $\{|\tilde{u}_n|^\gamma\}$  est positive. Elle est aussi bornée dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$

en vue de l'injection continue de  $E$  dans  $L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ .

Ainsi et d'après le Lemme 4.7.1, elle contient une sous-suite qui est telle que

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R(0)} |\tilde{u}_n|^\gamma dx = 0 \text{ pour tout } R > 0.$$

ou bien

$$(ii) \exists \alpha, R; 0 < \alpha, 0 < R < \infty \text{ et } \{y_n\} \subset \mathbb{R}^N :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_n+B_R(0)} |\tilde{u}_n|^\gamma dx \geq \alpha > 0,$$

sans avoir une autre possibilité.

Si le cas (i) a lieu, alors le Lemme 2.3.1 assure que

$$u_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^r(\mathbb{R}^N).$$

Il s'ensuit que  $\int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{u}_n(x)) dx \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  en vue des hypothèse  $(f_1)$  et  $(f_2)$ .

Du résultat (4.5.1), on a

$$\begin{aligned} 0 < c = I(\tilde{u}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p} \|\tilde{u}_n\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|\tilde{u}_n\|_{1,q}^q \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( Q(u_n) - \langle \rho_n, u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x - b_n) \tilde{u}_n dx \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \langle \omega_n, u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x - b_n) \tilde{u}_n dx \right) = 0. \end{aligned}$$

De la propriété de la suite  $\{\omega_n\}$  et de l'inégalité (4.5.10) on obtient que

$$0 < c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^r dx = 0,$$

mais ceci est contradictoire. Par conséquent, la suite  $\{\tilde{u}_n\}$  satisfait (ii), c'est à dire qu'il existe  $\alpha > 0$ , il existent  $R > 0$  fini et une suite  $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_n+B_R(0)} |\tilde{u}_n|^\gamma dx \geq \alpha > 0.$$

En choisissant  $b_n = y_n$ , on aboutit au résultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} |u_n(x)|^\gamma dx \geq \alpha > 0.$$

Ceci prouve que la solution  $u$  est nontriviale sur  $B_R(0)$  donc nontriviale sur  $\mathbb{R}^N$ .  $\square$



EXISTENCE DE SOLUTIONS NONTRIVIALES D'UN  
 PROBLÈME DE TYPE  $(p, q)$ -LAPLACIEN AVEC  
 DES NONLINÉARITÉS DISCONTINUES ET UN  
 EXPOSANT CRITIQUE

*Savoir, c'est connaître par le moyen de  
 la démonstration*

– Aristote

5.1	Introduction . . . . .	82
5.2	Position du Problème . . . . .	82
5.3	Fonctionnelle d'énergie . . . . .	83
5.4	Existence des solutions faibles . . . . .	85

## 5.1 Introduction

Un exposent critique se réfère à une valeur particulière de l'exposant dans les équations aux dérivées partielles qui peuvent modéliser des phénomènes tels que la formation de singularités ou les changements brusques du comportement des solutions. Ces équations sont utilisées pour étudier les transitions de phases ou les modèles instables. Il convient de noter que chaque équation spécifique avec une nonlinéarité discontinue et un exposent critique aura ses propres caractéristiques et défis particuliers. Des techniques tels que l'analyse asymptotique, les méthodes de régularisation et les simulations numériques peuvent être utilisées pour étudier les équations et obtenir des solutions approximatives.

Ce chapitre est consacré à un problème contenant deux nonlinéarités discontinues dont l'une d'entre elles contient l'exposent critique de Sobolev. Pour étudier l'existence des solutions faibles nontriviales de ce type de problème, nous allons employer une approche variationnelle basée sur une version non régulière du théorème du Col "Mountain pass theorem" [93].

## 5.2 Position du Problème

Pour un réel  $m$  tel que  $1 < m < N$ , on définit son conjugué critique, le nombre noté  $m^*$ , donné par

$$m^* = \frac{Nm}{N-m}.$$

En dim  $N \geq 2$  et pour des paramètres réels  $\lambda > 0$  et  $\beta > 0$ , on considère le problème

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) + \lambda H(u - \beta)u^{q^*-1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (5.2.1)$$

où  $1 < p < q < N$ , la fonction  $f$  est à variables et à valeurs réelles et la fonction de Heaviside est représentée par  $H$ .

### Hypothèses

Nous supposons que la fonction discontinue  $f$  satisfait les hypothèses suivantes.

( $f_1$ )  $f(t) = 0$  pour tout  $t \leq 0$  et ils existent  $C_f > 0$  et  $r \in (\max\{q, p^*\}, q^*)$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| \leq C_f |t|^{r-1}.$$

(f<sub>2</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$0 \leq rF(t) \leq t\underline{f}(t),$$

où

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

et

$$\underline{f}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,inf}_{|t-s| < \epsilon} f(s), \quad \bar{f}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{|t-s| < \epsilon} f(s).$$

## Formulation Faible

L'espace des solutions associé au problème (5.2.1) est l'espace noté  $E$  qui est défini par  $E = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ . On le munie de la norme

$$\|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q}.$$

Posons que  $g(u) = H(u - \beta)u^{q^*-1}$  et notons

$$\underline{g}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,inf}_{|t-s| < \epsilon} g(s), \quad \bar{g}(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{|t-s| < \epsilon} g(s).$$

**Définition 5.2.1** (Solution faible). *Une fonction  $u \in E$  est dite solution faible du problème (5.2.1) si elle vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho \varphi dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \xi \varphi dx, \quad (5.2.2)$$

pour tous  $\varphi \in E$  avec

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \bar{f}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N, \quad (5.2.3)$$

et

$$\xi(x) \in [\underline{g}(u(x)), \bar{g}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N. \quad (5.2.4)$$

## 5.3 Fonctionnelle d'énergie

Notons par  $I_\lambda$  la fonctionnelle définie par

$$I_\lambda(u) = Q(u) - \Psi_1(u) - \lambda \Psi_2(u), \quad (5.3.1)$$

où

$$Q(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx,$$

et

$$\Psi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx, \quad \Psi_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx,$$

avec  $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ .

De la Proposition 4.3.1 on a  $\Psi_1 \in Lip_{loc}(E, \mathbb{R})$  et pour tout  $\rho \in \partial_E \Psi_1(u)$  on a

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

**Proposition 5.3.1.** *La fonctionnelle  $\Psi_2$  est localement Lipschitzienne sur  $E$ . De plus,*

$$\partial_E \Psi_2(u) \in [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

*Démonstration.* Il est facile de voir que

$$|g(t)| \leq t^{q^*-1}, \quad \forall t \geq 0.$$

De la Proposition 1.3.1 on a

$$\Psi_2 \in Lip_{loc}(L^{q^*}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}) \text{ et } \partial_{L^{q^*}} \Psi_2(u) \subset [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Puisque  $E$  s'injecte continûment dans  $L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$ , le Théorème 1.3.3 implique que

$$\Psi_2 \in Lip_{loc}(E, \mathbb{R}) \text{ et } \partial_E \Psi_2(u) \subset \partial_{L^{q^*}} \Psi_2(u).$$

Par conséquent, on a

$$\partial_E \Psi_2(u) \subset [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

□

Des arguments standards montrent que  $Q$  est stictement différentiable sur  $E$  et que

$$\langle Q'(u), \varphi \rangle = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla \varphi dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \cdot \nabla \varphi dx, \quad \forall \varphi \in E.$$

Ainsi le Corollaire 1.2.1 implique que  $I_\lambda \in Lip_{loc}(E, \mathbb{R})$  et que

$$\partial_E I_\lambda(u) \subset Q'(u) - \partial_E \Psi_1(u) - \lambda \partial_E \Psi_2(u), \quad \forall u \in E. \quad (5.3.2)$$

On en conclut que les points critiques de la fonctionnelle  $I_\lambda$  sont des solutions faibles du Problème (5.2.1).

## 5.4 Existence des solutions faibles

Nous commençons cette section par exhiber le comportement de la fonctionnelle  $I_\lambda$ .

**Lemme 5.4.1.** *Pour tout  $\lambda > 0$ , la fonctionnelle  $I_\lambda$  satisfait la géométrie du Col.*

*Démonstration.* Tout d'abord, observons que  $I_\lambda(0) = 0$ . De l'hypothèse  $(f_1)$  on obtient que pour tout  $u \in E$  on a

$$I_\lambda(u) \geq C_1 \|u\|^q - C_2 \|u\|_r^r - \lambda C_3 \|u\|_{q^*}^{q^*}.$$

L'injection de Sobolev implique que

$$I_\lambda(u) \geq C_1 \|u\|^q - C_3 \|u\|_r^r - C_4 \|u\|^{q^*}.$$

Comme  $q < r < q^*$ , on peut toujours trouver  $R_0$  assez petit et  $\rho_0 > 0$  pour que

$$I_\lambda(u) > \rho_0,$$

pour tout  $u \in E$  avec  $\|u\| = R_0 < 1$ .

Soit  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  avec  $v \geq 0$ . Puisque  $\Psi_2(u) \geq 0$  pour tout  $u \in E$ , du Lemme (4.4.2) on obtient

$$I_\lambda(tv) \leq \frac{t^p}{p} \|v\|_{1,p}^p + \frac{t^q}{q} \|v\|_{1,q}^q + C_5 t \int_{\mathbb{R}^N} v dx - C_6 \frac{t^r}{r} \int_{\mathbb{R}^N} v^r dx < 0,$$

pour  $t$  assez grand. Par conséquent, on peut choisir  $t_0 > 0$  suffisamment grand pour lequel on a

$$I(e) < 0,$$

où  $e = t_0 v \in E \setminus B_{R_0}(0)$ .

□

Le Théorème du Col 2.2.1 assure l'existence d'une suite de Palais-Smale  $\{u_n\} \subset E$ .

C'est une suite qui vérifie

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow c \text{ et } \lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \quad (5.4.1)$$

où  $c$  est le niveau du Col de la fonctionnelle  $I_\lambda$ . Dans ce qui suit, nous étudierons les propriétés de la suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$ .

**Lemme 5.4.2.** *La suite  $\{u_n\}$  est bornée dans  $E$  pour tout  $\lambda > 0$ .*

*Démonstration.* La relation (5.4.1) implique qu'il existe une suite  $\{\omega_n\} \subset E^*$  telle que

$$\lambda(u_n) = \|\omega_n\|_*, \quad \omega_n \in \partial_E I(u_n).$$

Donc, il existe  $\{\rho_n\} \subset \partial_E \Psi_1(u_n)$  et  $\{\xi_n\} \subset \partial_E \Psi_2(u_n)$  telles que

$$\omega_n = Q'(u_n) - \rho_n - \lambda \xi_n.$$

Par conséquent, on a

$$\langle \omega_n + \rho_n + \lambda \xi_n, u_n \rangle = \langle Q'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^q. \quad (5.4.2)$$

Comme les deux fonctions  $f$  et  $g$  satisfont la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz, alors les relations qui suivent sont valables

$$\Psi_1(u_n) \leq \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} u_n \underline{f}(u_n) dx \leq \frac{1}{r} \langle \rho_n, u_n \rangle \text{ et} \quad (5.4.3)$$

$$\Psi_2(u_n) \leq \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} u_n \underline{g}(u_n) dx \leq \frac{1}{r} \langle \xi_n, u_n \rangle. \quad (5.4.4)$$

Combinons (5.4.2), (5.4.3) et (5.4.4), pour aboutir à la relation

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{r} \langle \omega_n + \rho_n + \lambda \xi_n, u_n \rangle &= \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,p}^p + \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,q}^q - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n) \\ &\geq \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,p}^p + \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,q}^q - \frac{1}{r} \langle \rho_n, u_n \rangle - \frac{\lambda}{r} \langle \xi_n, u_n \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, on aura

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{r} \langle \omega_n, u_n \rangle \geq \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,p}^p + \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|_{1,q}^q.$$

Par analogie à la preuve du Lemme 4.5.1, on peut facilement montrer que la suite  $\{u_n\}$  est bornée.  $\square$

**Lemme 5.4.3.** *La suite  $\{u_n\}$  décrite par (5.4.1) satisfait*

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

*Démonstration.* Le lemme précédent affirme que la suite  $\{u_n\}$  est bornée dans  $E$  et puisque  $E$  est un espace de Banach réflexif séparable alors, il existe un élément  $u \in E$  et une sous-suite de  $\{u_n\}$  notée encore  $u_n$  qui converge faiblement vers  $u$ . Par l'injection de Sobolev, on obtient que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{dans } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ pour } s \in [p, q^*[, \\ u_n \rightarrow u & \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (5.4.5)$$

Considérons les mesures suivantes

$$(|\nabla u_n|^p + |\nabla u_n|^q) \text{ et } |u_n|^{q^*},$$

où  $|\nabla u_n|^p + |\nabla u_n|^q = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_n|^q) dx$  et  $|u_n|^{q^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q^*} dx$ . Comme ces mesures sont bornées, alors le Théorème 2.1.3 affirme qu'il existe des mesures positives  $\mu$  et  $\nu$  qui satisfait

$$(|\nabla u_n|^p + |\nabla u_n|^q) \xrightarrow{*} \mu \text{ et } |u_n|^{q^*} \xrightarrow{*} \nu. \quad (5.4.6)$$

D'après le Lemme 2.3.2, ils existent un ensemble (au plus dénombrable)  $J, \{x_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^N$  et  $\{\nu_j\} \subset (0, +\infty)$  tels que

$$\nu = |u|^{q^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}. \quad (5.4.7)$$

Nous divisons ce qui reste de la démonstration en trois étapes.

**Étape 1 :** Dans cette étape on démontre que pour tout  $j \in J$  on a

$$S \nu_j^{\frac{q}{q^*}} \leq \mu(\{x_j\}).$$

Soit  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  tel que  $0 \leq \psi \leq 1$  et

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_{\frac{1}{2}}(0), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N / B_1(0). \end{cases}$$

Fixons  $j \in J$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , on introduit la fonction  $\psi_\epsilon(x) = \psi(\frac{x-x_j}{\epsilon})$ . De la définition

de  $S$  on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'estimation

$$\begin{aligned} S^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\epsilon u_n|^{q^*} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\psi_\epsilon u_n)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_\epsilon|^q |u_n|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^q |\psi_\epsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_\epsilon|^q |u_n|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_n|^q) |\psi_\epsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$S^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\epsilon|^{q^*} d\nu \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_\epsilon|^q |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\epsilon|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (5.4.8)$$

En faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , on trouve que

$$|\nabla \psi_\epsilon|^q \rightarrow 0 \text{ et } |\psi_\epsilon|^q \rightarrow \chi_{\{x_j\}} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N, \quad (5.4.9)$$

où  $\chi_{x_j}$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $\{x_j\}$ . Par conséquent, on obtient de (5.4.8) et (5.4.9) que

$$S^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\{x_j\}} d\nu \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq \left( \int_{\{x_j\}} d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

où bien

$$Sv_j^{\frac{q}{q^*}} \leq \mu(\{x_j\}) = \mu_j. \quad (5.4.10)$$

**Étape 2 :  $J$  est un ensemble fini (éventuellement vide).** Puisque la suite  $\{\psi_\epsilon u_n\}$  est bornée dans  $E$ , la relation (5.4.1) implique que

$$\langle \omega_n, \psi_\epsilon u_n \rangle = o_n(1).$$

La dernière affirmation est équivalente à

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla(\psi_\epsilon u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \cdot \nabla(\psi_\epsilon u_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \psi_\epsilon u_n dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \xi_n \psi_\epsilon u_n dx.$$

Par conséquent, il vient que la suite  $\{u_n\}$  est telle que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon |\nabla u_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon |\nabla u_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \psi_\epsilon dx \\ + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \cdot \nabla u_n \psi_\epsilon dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \psi_\epsilon u_n dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \xi_n \psi_\epsilon u_n dx. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Par la convergence faible de la suite  $\{u_n\}$  on a pour tout  $j \in J$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(x_j)} |u_n \nabla \psi_\epsilon|^q dx = \int_{B_\epsilon(x_j)} |u \nabla \psi_\epsilon|^q dx.$$

L'application de l'inégalité de Hölder combinée avec le résultat ci-dessus nous donne les inégalités

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{q-2} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon dx \right| &\leq C_8 \left( \int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^q |\nabla \psi_\epsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_8 \left( \int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^{q^*} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \left( \int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla \psi_\epsilon|^N dx \right)^{\frac{1}{N}}. \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

De même, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \psi_\epsilon u_n dx \right| \leq C_9 \left( \int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \left( \int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla \psi_\epsilon|^N dx \right)^{\frac{1}{N}}. \quad (5.4.13)$$

Par un changement de variable, on obtient

$$\left( \int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla \psi_\epsilon|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \leq \left( \int_{B_1(0)} |\nabla \psi(2y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}}$$

Ainsi,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \psi_\epsilon u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \cdot \nabla \psi_\epsilon u_n) dx = 0. \quad (5.4.14)$$

L'hypothèse  $(f_1)$  combinée avec (5.4.5) implique que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n \psi_\epsilon dx \leq C_f \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^r \psi_\epsilon dx = C_f \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r \psi_\epsilon dx + o_n(1). \quad (5.4.15)$$

On a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi_n u_n \psi_\epsilon dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q^*} \psi_\epsilon dx. \quad (5.4.16)$$

Combinant (5.4.11), (5.4.12), (5.4.13), (5.4.15) et (5.4.16) pour obtenir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon |\nabla u_n|^q dx + o_\epsilon(1) \leq \lambda \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q^*} \psi_\epsilon dx \right) + C_{10} \int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^r \psi_\epsilon dx. \quad (5.4.17)$$

Donc, il vient que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon d\mu + o_\epsilon(1) \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon d\nu + C_{10} \int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^r \psi_\epsilon dx. \quad (5.4.18)$$

De la définition de  $\psi_\epsilon$ , on a

$$\mu(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j)) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon d\mu.$$

Ainsi,

$$\mu(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j)) + o_\epsilon \leq \lambda \nu(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j)) + C_{10} \int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^r \psi_\epsilon dx. \quad (5.4.19)$$

En faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , on obtient

$$\mu_j \leq \lambda \nu_j \text{ et } \mu_j \geq \nu_j^{\frac{q}{q^*}} S$$

où  $S$  est la constante de Sobolev. Alors

$$\nu_j \geq \left( \frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{q^*}{q^* - q}} > 0.$$

Puisque  $\nu$  est bornée, alors  $J$  est nécessairement fini.

**Étape 3 : La convergence ponctuelle du  $\nabla u_n$ .** Nous allons démontrer que  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  p.p. dans  $\mathbb{R}^N$ . Nous distinguons deux cas.

**Cas 1 : L'ensemble  $J$  est non vide** Soit  $0 < \epsilon_0 < 1$  tel que

$$\{x_j, j \in J\} \subset B_{\frac{1}{\epsilon_0}}(0) \text{ et } B_{\epsilon_0}(x_i) \cap B_{\epsilon_0}(x_j) = \emptyset \text{ pour tout } i, j \in J \text{ tel que } i \neq j.$$

On définit la fonction

$$\varrho_\epsilon(x) = \psi(\epsilon x) - \sum_{j \in J} \psi_\epsilon(x); \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Alors,

$$\varrho_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \bigcup_{j \in J} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j), \\ 1 & \text{si } x \in A_\epsilon = B_{\frac{1}{2\epsilon}}(0) \setminus \bigcup_{j \in J} B_\epsilon(x_j). \end{cases}$$

On introduit la fonction de la variable spatiale  $x$

$$P_n(x) = (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)(x).$$

Remarquons que  $P_n \geq 0$  p.p. dans  $\mathbb{R}^N$ . Fixons  $\epsilon, \epsilon > 0$  avec  $0 < \epsilon < \epsilon < \epsilon_0$ . Alors

$$0 \leq \int_{A_\epsilon} P_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} P_n(x) \varrho_\epsilon(x) dx.$$

Par conséquent, on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} \int_{A_\epsilon} P_n(x) dx &\leq \langle \omega_n, \varrho_\epsilon(u_n - u) \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n) \cdot (u_n - u) \nabla \varrho_\epsilon dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u + |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \varrho_\epsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u_n - u) \varrho_\epsilon dx \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \xi_n(u_n - u) \varrho_\epsilon dx = J_1 - J_2 - J_3 + J_4 + \lambda J_5, \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

où

$$\begin{cases} J_1 = \langle \omega_n, \varrho_\epsilon(u_n - u) \rangle, \\ J_2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n) \cdot (u_n - u) \nabla \varrho_\epsilon dx, \\ J_3 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (u_n - u) \nabla \varrho_\epsilon dx, \\ J_4 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u_n - u) \varrho_\epsilon dx, \\ J_5 = \int_{\mathbb{R}^N} \xi_n(u_n - u) \varrho_\epsilon dx. \end{cases}$$

Comme la suite  $\{\varrho_\epsilon u_n\}$  est bornée dans  $E$ , la relation (5.4.1) implique que

$$J_1 = \langle \omega_n, \varrho_\epsilon(u_n - u) \rangle \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (5.4.21)$$

L'inégalité de Hölder implique que

$$J_2 \leq C_{13} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p |\nabla \varrho_\epsilon|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + C_{14} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^q |\nabla \varrho_\epsilon|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

La relation (5.4.5) combinée avec l'inégalité ci-dessus affirment que

$$J_2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (5.4.22)$$

La convergence faible de la suite  $\{u_n\}$  vers  $u$  dans  $E$  implique que

$$J_3 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u + |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \varrho_\epsilon dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (5.4.23)$$

Les injections de Sobolev avec l'hypothèse  $(f_1)$  implique que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n|^{\frac{r}{r-1}} dx \leq C_{16} \|u_n\|_r^r.$$

On en conclut que la suite  $\{\rho_n\}$  est bornée dans  $L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N)$ . De l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n |u_n - u| \varrho_\epsilon dx \leq \|\rho_n\|_{\frac{r}{r-1}} \| (u_n - u) \varrho_\epsilon \|_r.$$

Ce qui implique que

$$J_4 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (5.4.24)$$

La suite  $\xi_n$  est bornée dans  $L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\mathbb{R}^N)$  car  $0 \leq \xi_n \leq |u_n|^{q^*-1}$  presque partout dans  $\mathbb{R}^N$ .

Par conséquent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi_n |u_n - u| \varrho_\epsilon dx \leq \|\xi_n\|_{\frac{q^*}{q^*-1}} \| (u_n - u) \varrho_\epsilon \|_{q^*}.$$

Ainsi,

$$J_5 = \int_{\mathbb{R}^N} \xi_n (u_n - u) \varrho_\epsilon dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (5.4.25)$$

En combinant (5.4.21), (5.4.22), (5.4.23), (5.4.24) et (5.4.25), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_\varepsilon} (|\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = 0.$$

Le Lemme 2.1.3 assure que

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{dans} \quad L^q(A_\varepsilon)$$

d'où

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{p.p. dans} \quad A_\varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, par le procédé de la suite diagonale, il existe une sous-suite de  $\{u_n\}$ , notée encore  $\{u_n\}$ , telle que

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{p.p. dans} \quad \mathbb{R}^N \tag{5.4.26}$$

**Cas 2 :**  $J = \emptyset$  Du cas précédent, on prend  $\varrho_\varepsilon = \psi_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon = B_{\frac{1}{2\varepsilon}}(0)$  et on répète les mêmes arguments pour avoir (5.4.26).  $\square$

**Lemme 5.4.4.** *Supposons que le niveau critique  $c$ , donné en (5.4.1), satisfait*

$$0 < c < \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{q}}.$$

*Alors, la limite faible  $u$  de la suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$  est nontriviale.*

*Démonstration.* Soit  $p_n(x) = |u_n(x)|^\gamma$ , où  $\gamma = \max\{p^*, q\}$ . La suite  $\{p_n\}$  doit satisfaire l'une de deux possibilités du Lemme 4.7.1.

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R(0)} |u_n|^\gamma dx = 0$  pour tout  $0 < R < \infty$ , le Lemme 2.3.1 garantit que

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^r(\mathbb{R}^N).$$

Par conséquent,

$$\langle \omega_n, u_n \rangle = \|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^q - \lambda \langle \xi_n, u_n \rangle + o_n(1). \tag{5.4.27}$$

Maintenant, supposons que  $\|u_n\|_{1,q}^q + \|u_n\|_{1,p}^p \rightarrow l$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Nous supposons que  $l > 0$  car dans le cas contraire, nous obtenons que  $c = 0$ . Ainsi, l'équation 5.4.27 nous donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \xi_n, u_n \rangle \geq \frac{l}{\lambda}. \tag{5.4.28}$$

En combinant ce fait avec l'inégalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \xi_n, u_n \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q^*} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S^{\frac{q}{q^*}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^q dx \right)^{q^*} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S^{\frac{q}{q^*}} (\|u_n\|_{1,q}^q + \|u_n\|_{1,p}^p)^{q^*},$$

il vient que

$$\left( \frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{q}} \leq l. \quad (5.4.29)$$

D'autre part, du Lemme 5.4.2 on a

$$I(u_n) + o_n(1) = I(u_n) - \frac{1}{r} \langle \omega_n, u_n \rangle \geq \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) (\|u_n\|_{1,q}^q + \|u_n\|_{1,p}^p). \quad (5.4.30)$$

Ainsi, on obtient l'estimation

$$c \geq \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{q}}$$

qui est une contradiction. Par conséquent, la suite de Palais-Smale  $\{u_n\}$  satisfait le cas (ii) du Lemme 4.7.1, c'est à dire qu'il existe  $\alpha > 0$ , il existent  $R > 0$  fini et une suite  $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_n + B_R(0)} |u_n|^\gamma dx \geq \alpha > 0.$$

En choisissant  $u_n(x) = u_n(x + y_n)$ . Nous concluons que la limite faible  $u$  de la suite de Palais-Smale est nontriviale.  $\square$

**Proposition 5.4.1.** Soit  $\{\xi_n\} \subset \partial \Psi_2(u_n)$  avec  $\xi_n \xrightarrow{*} \xi$  dans  $L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ . Alors,

$$\xi(x) \in [\underline{g}(u(x)), \bar{g}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

*Démonstration.* Pour tous  $\epsilon, R > 0$ , désignons par  $\Psi_{2,\Lambda} : L^q(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle suivante

$$\Psi_{2,\Lambda} = \int_{\Lambda} G(u) dx,$$

où  $\Lambda = B_R(0) \setminus \bigcup_{j \in J} B_\epsilon(x_j)$  et  $J$  représente l'ensemble des indices définis dans la preuve du Lemme 5.4.3.

Pour chaque  $\psi \in L^{q^*}(\Lambda)$ , nous définissons

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in \Lambda, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda. \end{cases}$$

Il est clair que  $\tilde{\psi} \in L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$ .

Maintenant, soit  $u_{n,\Lambda}$ ,  $\xi_{n,\Lambda}$ ,  $u_\Lambda$  et  $\xi_\Lambda$  les restrictions des fonctions  $u_n$ ,  $\xi_n$ ,  $u$  et  $\xi$  sur  $\Lambda$  respectivement. Pour tout  $\psi \in L^{q^*}(\Lambda)$ , on a

$$\int_{\Lambda} \xi_{n,\Lambda} \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \xi_n \tilde{\psi} dx,$$

et

$$\Psi_{2,\Lambda}^0(u_{n,\Lambda}; \psi) = \Psi_2^0(u_n, \tilde{\psi}).$$

Ainsi, nous obtenons

$$\int_{\Lambda} \xi_{n,\Lambda} \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \xi_n \tilde{\psi} dx \leq \Psi_2^0(u_n; \tilde{\psi}) = \Psi_{2,\Lambda}^0(u_{n,\Lambda}; \psi).$$

Il s'ensuit que  $\xi_{n,\Lambda} \in \partial\Psi_{2,\Lambda}^0(u_{n,\Lambda})$ . Du Lemme 5.4.3, nous avons  $u_{n,\Lambda} \rightarrow u_\Lambda$  dans  $L^{q^*}(\Lambda)$  et  $\xi_{n,\Lambda} \xrightarrow{*} \xi_\Lambda$  dans  $L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\Lambda)$ . Ainsi, par la Proposition 1.1.3, on a

$$\xi_\Lambda \in \partial\Psi_{2,\Lambda}(u_\Lambda).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\xi_\Lambda(x) \in [\underline{g}(u_\Lambda(x)), \bar{g}(u_\Lambda(x))] \text{ p.p. } x \in \Lambda,$$

ceci implique que

$$\xi(x) \in [\underline{g}(u(x)), \bar{g}(u(x))] \text{ p.p. } x \in \Lambda.$$

Puisque  $\epsilon, R$  sont arbitraires, nous obtenons

$$\xi(x) \in [\underline{g}(u(x)), \bar{g}(u(x))] \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

□

Le résultat principal de ce chapitre est le résultat suivant

**Théorème 5.4.1.** *Supposons que les hypothèses  $(f_1)$  et  $(f_2)$  sont satisfaits, alors il existe*

un  $\lambda_* > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , le problème (5.2.1) admet au moins une solution faible nontriviale.

*Démonstration.* Par le Lemme 5.4.3,  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  p.p. dans  $\mathbb{R}^N$ , alors

$$\begin{cases} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u \text{ dans } L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{q-2} \nabla u \text{ dans } L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (5.4.31)$$

Puisque les suites  $\{\rho_n\} \subset L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N)$  et  $\{\xi_n\} \subset L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\mathbb{R}^N)$  sont bornées, alors il existe des sous-suites de  $\{\rho_n\}$  et  $\{\xi_n\}$  qui vérifient

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N), \quad (5.4.32)$$

et

$$\xi_n \rightharpoonup \xi \text{ dans } L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\mathbb{R}^N), \quad (5.4.33)$$

avec  $\zeta \in L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N)$  et  $\xi \in L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ .

À partir de (5.4.31), (5.4.32) et (5.4.33), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho \varphi dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \xi \varphi dx, \quad \forall \varphi \in E.$$

Par les Proposition 4.3.1 et 5.4.1, on a

$$\rho \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N,$$

et

$$\xi \in [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

On déduit que  $u$  est une solution faible du problème (5.2.1).

Du Lemme 4.4.2 on a

$$f(t) \geq C_{17} t^{r-1} - C_{18} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Par conséquent,

$$I_\lambda(tv) \leq \frac{t^p}{p} \|v\|_{1,p}^p + \frac{t^q}{q} \|v\|_{1,q}^q - C_{17} \frac{t^r}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^r dx + C_{18} t \int_{\mathbb{R}^N} v dx = J(tv),$$

où  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  avec  $v \geq 0$ . Donc

$$\sup_{t \geq 0} I_\lambda(tv) \leq \sup_{t \geq 0} J(tv).$$

En suite, on peut trouver  $\lambda_* > 0$  tel que

$$c \leq \sup_{t \geq 0} I(tv) < \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{q}} \text{ pour tout } \lambda \in (0, \lambda_*).$$

Par Lemme 5.4.4 nous concluons que la solution faible  $u$  est nontriviale.

□



# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous avons abordé la problématique d'existence de solutions non-triviales des EDP nonlinéaires à caractère non régulier. Plus précisément, nous avons assuré l'existence de solutions faibles nontriviales pour un problème  $(p, q)$ -Laplacien dans  $\mathbb{R}^N$ , où des nonlinéarités discontinues sont présentes.

Contrairement au cas régulier, la transformation des équations étudiées dans cette thèse en leur forme variationnelle représentait un défi qui a pu être relevé moyennant la notion du gradient généralisé de Clarke.

En substance, nous avons mis en œuvre le théorème du Col pour les fonctionnelles nondifférentiables en vue que l'analyse des problèmes de minimisation nécessitant l'application de la théorie des points critiques classique n'est pas adéquate.

Une nonlinéarité discontinue sous-critique a été considérée dans le chapitre 4. Des hypothèses sur cette nonlinéarité ont assuré l'existence d'une solution  $u$  qui est une limite faible de la suite de Palais-Smale et qui n'est pas nécessairement un point critique de la fonctionnelle d'énergie (clef. Lemme 4.5.2).

L'aspect critique de la nonlinéarité discontinue évoquée au chapitre 5 a provoqué la perte des injections localement compactes. Le cas limite du principe de concentration-compacité a contribué à l'assurance de la convergence presque partout du gradient de la suite de Palais - Smale. La solution du problème est dans ce cas une limite faible de la suite de Palais-Smale et nous n'avons pu démontrer sa nontrivialité qu'au dessous d'un certain seuil strictement positif.

Il serait pertinent, même sans les avantages des explorations préliminaires, d'étudier de près le comportement de la solution au-delà du seuil. Cette approche permettrait d'approfondir la compréhension de la relation entre les paramètres du problème et la solution.

En perspective, plusieurs voies s'ouvrent à la lumière de la présente thèse.

Envisager l'étude de la régularité des solutions permettrait d'avoir des solutions fortes à des problèmes à multi-valeurs.

---

Étendre les études à des problèmes contenant des opérateurs agissant sur les espaces de Musielak- Orlicz offre des perspectives significatives permettant d'explorer des tendances dans ce domaine de recherche.



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.A. ADAMS et J.J. FOURNIER. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [2] C.O. ALVES. “Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the  $p$ -Laplacian”. In : *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 51 (2002), p. 1187-1206.
- [3] C.O. ALVES et A. BERTONE. “A discontinuous problem involving the  $p$ -Laplacian operator and critical exponent in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Electronic Journal of Differential Equations* 2003 (2003), p. 2-9.
- [4] C.O. ALVES, A. BERTONE et J.V. GONÇALVES. “A Variational Approach to Discontinuous Problems with Critical Sobolev Exponents”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 265 (2002), p. 103-127.
- [5] C.O. ALVES et G.M. FIGUEIREDO. “Multiplicity and Concentration of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Problems”. In : *Advanced Nonlinear Studies* 11.2 (2011), p. 265-294.
- [6] C.O. ALVES, G.M. FIGUEIREDO et R.G. NASCIMENTO. “On existence and concentration of solutions for an elliptic problem with discontinuous nonlinearity via penalization method”. In : *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 65.1 (2014), p. 19-40.
- [7] C.O. ALVES et R.G. NASCIMENTO. “Existence and concentration of solutions for a class of elliptic problems with discontinuous nonlinearity in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Math. Scand.* 112 (2013), p. 129-146.
- [8] C.O. ALVES et R.G. NASCIMENTO. “Nonlinear Perturbations of a Periodic Elliptic Problem with Discontinuous Nonlinearity in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 63.1 (2012), 107–124.
- [9] C.O. ALVES et G.F. PATRICIO. “Existence of solution for a class of indefinite variational problems with discontinuous nonlinearity”. In : *Journal of Mathematical Sciences* 266.4 (2022), p. 635-663.
- [10] C.O. ALVES, Z. YUAN et L. HUANG. “Existence and multiplicity of solutions for discontinuous elliptic problems in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* 151.2 (2021), p. 548-572.
- [11] M.J. ALVES et R.B. ASSUNCAO. “Existence of solutions for a problem with multiple singular weighted  $p$ -Laplacians and vanishing potentials”. In : (2022).

- 
- [12] M.J. ALVES, R.O. ASSUNÇÃO et O.H. MIYAGAKI. “Existence result for a class of quasilinear elliptic equations with  $(p-q)$ -Laplacian and vanishing potentials”. In : *Illinois Journal of Mathematics* 59.3 (2015), p. 545-575.
- [13] A. AMBROSETTI et M. BADIÀLE. “The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities”. In : *Journal of mathematical analysis and applications* 140 (1989), p. 363-373.
- [14] A. AMBROSETTI, M. CALAHORRANO et F DOBARRO. “Global branching for discontinuous problems”. In : *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 31.2 (1990), p. 213-222.
- [15] A. AMBROSETTI et P.H. RABINOWITZ. “Dual variational methods in critical point theory and applications”. In : *Journal of functional Analysis* 14.4 (1973), p. 349-381.
- [16] A. AMBROSETTI et R.E.L. TURNER. “Some discontinuous variational problems”. In : *Differential and Integral Equations* 1 (1988), p. 341-349.
- [17] V. AMBROSIO et T. ISERNIA. “Multiplicity and concentration results for some nonlinear Schrödinger equations with the fractional  $p$ -Laplacian”. In : *Discrete and continuous dynamical systems* 38.11 (2018), p. 5835-5881.
- [18] V. AMBROSIO et D. REPOVŠ. “Multiplicity and concentration results for a  $(p, q)$ -Laplacian problem in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 72 (2021). DOI : <https://doi.org/10.1007/s00033-020-01466-7>.
- [19] C.J. AMICK, L.E. FRAENKEL et Wisconsin univ-madison mathematics research CENTER. *The uniqueness of Hill’s spherical vortex*. 1985.
- [20] D. ARCOYA et M. CALAHORRANO. “Some discontinuous problems with a quasilinear operator”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 187 (1994), p. 1059-1072.
- [21] D. ARCOYA, J.I. DIAZ et L. TELLO. “S-Shaped Bifurcation Branch in a Quasilinear Multivalued Model Arising in Climatology”. In : *Journal of Differential Equations* 150.1 (1998), p. 215-225.
- [22] J.P. AUBIN et F.H. CLARKE. “Shadow prices and duality for a class of optimal control problems”. In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 17.5 (1979), p. 567-586.
- [23] Marino BADIÀLE et al. “Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities”. In : *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 51.4 (1993), p. 331-342.

- 
- [24] S. BARILE et G.M. FIGUEIREDO. “Some classes of eigenvalues problems for generalized  $(p, q)$ -Laplacian type operators on bounded domains”. In : *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 119 (2015), p. 457-468.
- [25] R. BARTOLO, A.M. CANDELA et A. SALVATORE. “On a class of superlinear  $(p, q)$ -Laplacian type equations on  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 438.1 (2016), p. 29-41.
- [26] F. BEHBOUDI et A. RAZANI. “Two weak solutions for a singular  $(p, q)$ -Laplacian problem”. In : *Filomat* 33 (2019), p. 3399-3407.
- [27] Z. BELYACINE. “Étude d’une Equation aux Dérivées Partielles complètement non linéaire avec résonance dans  $\mathbb{R}^N$ ”. Thèse de doct. Université de Annaba-Badji Mokhtar, 2013.
- [28] A.K. BEN-NAOUM, C. TROESTLER et M. WILLEM. “Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains”. In : *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 26.4 (1996), p. 823-833.
- [29] N. BENOUHIBA et Z. BELYACINE. “A class of eigenvalue problems for the  $(p, q)$ -laplacian in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 80.5 (2012), p. 727-737.
- [30] G.M. BISCI. “Some remark on a recent critical point result of nonsmooth Analysis”. In : *Le Matematiche* 64.1 (2009), p. 97-112.
- [31] V. BOBKOV et M. TANAKA. “On positive solutions for  $(p, q)$ -Laplace equations with two parameters”. In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 54 (2014), p. 3277-3301.
- [32] V.I. BOGACHEV. *Measure Theory*. Springer, 2007.
- [33] V.I. BOGACHEV. *Weak convergence of measures*. American Mathematical Society Providence, 2018.
- [34] G. BONANNO et P. CANDITO. “Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities”. In : *Journal of Differential Equations* 244.12 (2008), p. 3031-3059.
- [35] D. BONHEURE et J.D. ROSSI. “The behavior of solutions to an elliptic equation involving a  $p$ -Laplacian and a  $q$ -Laplacian for large  $p$ ”. In : *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 150 (2017), p. 104-113.
- [36] H. BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. T. 2. 3. 2011.

- [37] H. BREZIS et E. LIEB. “A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functional”. In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 88.3 (1983), p. 486-490.
- [38] H. BRÉZIS, L. NIRENBERG et G. STAMPACCHIA. “Remarks on Ky Fan’s Min-max Theorem”. In : *Boll. UMI* 6 (1972), p. 293-300.
- [39] P. CANDITO, S.A. MARANO et K. PERERA. “On a class of critical  $(p, q)$ -Laplacian problems”. In : *Nonlinear Differential Equations and Applications* 22 (2015), p. 1959-1972.
- [40] K.C. CHANG. “ON the multiple solutions of the elliptic differential equations with discontinuous nonlinear terms.” In : *Sci. Sin* 21.2 (1978), p. 139-158.
- [41] K.C. CHANG. “The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 33.2 (1980), p. 117-146.
- [42] K.C. CHANG. “Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 80 (1981), p. 102-129.
- [43] M.F. CHAVES, G. ERCOLE et O.H. MIYAGAKI. “Existence of a nontrivial solution for a  $(p, q)$ -Laplacian equation with  $p$ -critical exponent in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Boundary Value Problems* 236 (2014). DOI : <https://doi.org/10.1186/s13661-014-0236-x>.
- [44] M.F. CHAVES, G. ERCOLE et O.H. MIYAGAKI. “Existence of a nontrivial solution for the  $(p, q)$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$  without the Ambrosetti–Rabinowitz condition”. In : *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 114 (2015), p. 133-141.
- [45] L. CHERFILS et Y. IL’YASOV. “On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with  $p$ & $q$ -Laplacian”. In : *CFAA* 1.4 (2004), p. 9-22.
- [46] G. CIMATTI. “A nonlinear elliptic eigenvalue problem for the Elenbaas equation”. In : *Boll. UMI* (5) 1 (1979), p. 555-565.
- [47] F.H. CLARKE. “Generalized gradients and applications”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 205 (1975), p. 247-262.
- [48] F.H. CLARKE. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York : Wiley, 1983.
- [49] F. CORRÊA et R.G. NASCIMENTO. “Existence of solutions to nonlocal elliptic equations with discontinuous terms”. In : *Electronic Journal of Differential Equations* 26 (2012), p. 1-14.
- [50] G.S. COSTA. “Existence and concentration of solutions for a class of quasilinear problems”. Thèse de doct. 2021.

- 
- [51] G.S. COSTA et G.M. FIGUEIREDO. “Existence and concentration of positive solutions for a critical  $(p, q)$ -equation”. In : *Advances in Nonlinear Analysis* 11.1 (2021), p. 243-267.
- [52] P. DRÁBEK et Y.X. HUANG. “Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in  $\mathbb{R}^N$  with critical Sobolev exponent”. In : *Journal of differential equations* 140.1 (1997), p. 106-132.
- [53] I. EKELAND. “On the variational principle”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 47.2 (1974), p. 324-353.
- [54] L.F. FARIA, O.H. MIYAGAKI et M. TANAKA. “Existence of a positive solution for problems with  $(p, q)$ -Laplacian and convection term in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Boundary Value Problems* 2016.1 (2016). DOI : <https://doi.org/10.1186/s13661-016-0665-9>.
- [55] G.M. FIGUEIREDO. “Existence and multiplicity of solutions for a class of  $(p, q)$  elliptic problems with critical exponent”. In : *Mathematische Nachrichten* 286.11-12 (2013), p. 1129-1141.
- [56] G.M. FIGUEIREDO. “Existence of positive solutions for a class of  $(p, q)$ -elliptic problems with critical growth on  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 378 (2011), p. 507-518.
- [57] G.M. FIGUEIREDO et R.G. NASCIMENTO. “Existence of positive solutions for a class of  $(p, q)$ -elliptic problem with critical exponent and discontinuous nonlinearity”. In : *Monatshefte für Mathematik* 189 (2019), p. 75-89.
- [58] G.B. FOLLAND. *Real analysis: modern techniques and their applications*. T. 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [59] L.E. FRAENKEL et M.S. BERGER. “A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid”. In : (1974).
- [60] F. GAZZOLA et V. RĂDULESCU. “A nonsmooth critical point theory approach to some nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Differential and Integral Equations* 13 (2000), p. 47-60.
- [61] M. GHERGU et V. RĂDULESCU. “On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term”. In : *Journal of mathematical analysis and applications* 311.2 (2005), p. 635-646.
- [62] M. GHERGU et V. RĂDULESCU. “Singular elliptic problems with lack of compactness”. In : *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 185.1 (2006), p. 63-79.
- [63] M.R. GROSSINHO et S.A. TERSIAN. *An Introduction to Minimax Theorems and their Applications to Differential Equations*. Dordrecht : Kluwer, 2001.

- 
- [64] N HALIDIAS. “Elliptic problems with discontinuities”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 276.1 (2002), p. 13-27.
- [65] C. HE et G. LI. “The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing  $(p, q)$ -Laplacians”. In : *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica* 33 (2008), p. 337-371.
- [66] L. HÖRMANDER. “Sur la fonction d’appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe”. In : *Arkiv för Matematik* 21.3 (1954), p. 181-186.
- [67] A. IANNIZZOTTO, S. MOSCONI et M SQUASSINA. “Sobolev versus Hölder minimizers for the degenerate fractional  $p$ -Laplacian”. In : *Nonlinear Analysis* 191 (2020), p. 111635.
- [68] O. KAVIAN. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, 1993.
- [69] Jae-Myoung KIM. “Elliptic problems involving the  $p$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$  with locally Lipschitz functional”. In : *Complex Variables and Elliptic Equations* 64.3 (2019), p. 361-368.
- [70] D. KINDERLEHRER et G. STAMPACCHIA. *An introduction to variational inequalities and their applications*. SIAM, 2000.
- [71] M. LATIFI et R. BAYAT. “Existence of nontrivial solution for a quasilinear elliptic equation with  $(p, q)$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$  involving critical Sobolev exponents”. In : *Journal of Elliptic and Parabolic Equations* 6.2 (2020), p. 733-749.
- [72] G. LI et X. LIANG. “The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of  $(p, q)$ -Laplacian type on  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 71 (2009), p. 2316-2334.
- [73] G. LI et O. MARTIO. “Stability in obstacle problems”. In : *Math. Scand.* 75 (1994), p. 87-100.
- [74] G. LI et G. ZHANG. “Multiple solutions for the  $(p, q)$ -Laplacian problem with critical exponent”. In : *Acta Mathematica Scientia* 29.4 (2009), p. 903-918.
- [75] G.B. LI et Y. CHUN. “The existence of solutions of quasilinear elliptic equations with change of sign”. In : *Acta mathematica scientia, Series B* 21.4 (2001), p. 469.
- [76] Q. LI et Z. YANG. “Multiplicity of positive solutions for a  $(p, q)$ -Laplacian system with concave and critical nonlinearities”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 423.1 (2015), p. 660-680.
- [77] R. LI et Z. LIANG. “Sign-changing solution and ground state solution for a class of  $(p, q)$ -Laplacian equations with nonlocal terms on  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Boundary Value Problems* 2016.1 (2016), p. 1-28.

- 
- [78] E. H. LIEB et M. LOSS. *Graduate Studies in Mathematics*. T. 14. American Mathematical Soc., 2001.
- [79] P. L. LIONS. “The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1”. In : *Annales de l’I.H.P. Analyse non linéaire* 1.2 (1984), p. 109-145.
- [80] P. L. LIONS. “The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2”. In : *Annales de l’I.H.P. Analyse non linéaire* 1.4 (1984), p. 223-283.
- [81] P.L LIONS. “The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 1”. In : *Revista Matemática Iberoamericana* 1.1 (1985), p. 145-201.
- [82] P.L LIONS. “The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 2”. In : *Revista Matemática Iberoamericana* 1.2 (1985), p. 45-121.
- [83] C. LIU et Y. ZHENG. “Existence of nontrivial solutions for  $p$ -Laplacian equations in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 380.2 (2011), p. 669-679.
- [84] S. MARANO, S. MOSCONI et N. PAPAGEORGIOU. “Multiple Solutions to  $(p, q)$ -Laplacian Problems with Resonant Concave Nonlinearity”. In : *Advanced Nonlinear Studies* 16 (2016), p. 51-65.
- [85] R. MEISE et Vogt. D. *Introduction to Functional Analysis*. New York : CLARENDON PRESS, 1997.
- [86] C. MERCURI et M. WILLEM. “A global compactness result for the  $p$ -Laplacian involving critical nonlinearities”. In : *Discrete and continuous dynamical systems* 28.2 (2010), p. 469-493.
- [87] C.B. MORREY JR. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [88] L. NIRENBERG. *Topics in nonlinear functional analysis*. T. 6. American Mathematical Society, 1974.
- [89] L. NIRENBERG. “Variational and topological methods in nonlinear problems”. In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 4.3 (1981), p. 267-302.
- [90] N.S. PAPAGEORGIOU, V. RĂDULESCU et D. REPOVŠ. “Nonlinear nonhomogeneous singular problems”. In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 59.1 (2020), p. 9-31.

- 
- [91] P.H. RABINOWITZ. “On a class of nonlinear Schrödinger equations”. In : *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik* 43.2 (1992), p. 270-291.
- [92] P.H. RABINOWITZ. “Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations”. In : *Nonlinear analysis* (1978), p. 161-177.
- [93] V. RĂDULESKU. “Mountain pass theorems for nondifferentiable functions and applications”. In : *Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci.* 69.6 (1993), p. 193-198.
- [94] V. RĂDULESKU. *Qualitative analysis of nonlinear elliptic partial differential equations: monotonicity, analytic, and variational methods*. Hindawi Publishing Corporation, 2008.
- [95] W. RUDIN. *Functional Analysis*. New York : McGraw, 1973.
- [96] G.CG dos SANTOS et G.M. FIGUEIREDO. “Existence of solutions for an NSE with discontinuous nonlinearity”. In : *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 19 (2017), p. 917-937.
- [97] G.CG dos SANTOS et L.S. TAVARES. “Existence and behavior of the solutions for an elliptic equation with a nonlocal operator involving critical and discontinuous nonlinearity”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 493.1 (2021), p. 124530. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124530>.
- [98] G.G. dos SANTOS, G.M. FIGUEIREDO et R.G. NASCIMENTO. “Existence and behavior of positive solution for a problem with discontinuous nonlinearity in  $\mathbb{R}^N$  via a nonsmooth penalization”. In : *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 71.2 (2020), p. 71.
- [99] M.S. SHAHROKHI-DEHKORDI. “On a class of  $(p, q)$ -Laplacian problems involving the critical Sobolev-Hardy exponents in starshaped domain”. In : *Communications in Mathematics* 25 (2017).
- [100] X. SHANG. “Existence and multiplicity of solutions for a discontinuous problems with critical Sobolev exponents”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 385.2 (2012), p. 1033-1043.
- [101] L. SHEN. “Ground state solution for a periodic  $(p, q)$ -Laplacian equation involving critical growth without the Ambrosetti–Rabinowitz condition”. In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2023).
- [102] G. STAMPACCHIA. “Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus”. In : *Séminaire Jean Leray* 3 (1963), p. 1-77.

- 
- [103] G. STAMPACCHIA. “Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus”. In : *Annales de l’institut Fourier*. T. 15. 1. 1965, p. 189-257.
- [104] M. STRUWE. “Large H-surfaces via the mountain-pass-lemma”. In : *Mathematische Annalen* 270.3 (1985), p. 441-459.
- [105] M. STRUWE. “Quasilinear elliptic eigenvalue problems”. In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 58.1 (1983), p. 509-527.
- [106] M. STRUWE. *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Berlin : Springer Verlag, 2000.
- [107] C.A. STUART. “Differential equations with discontinuous non-linearities”. In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 63 (1976), p. 59-75.
- [108] C.A. STUART et JF TOLAND. “A variational method for boundary value problems with discontinuous nonlinearities”. In : *Journal of the London Mathematical Society* 2 (1980), p. 319-328.
- [109] G. TALENTI. “Best constant in Sobolev inequality”. In : *Annali di Matematica pura ed Applicata* 110 (1976), p. 353-372.
- [110] G. TARANTELLO. “On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent”. In : *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. T. 9. 3. 1992, p. 281-304.
- [111] K. THEWS. “Non-trivial solutions of elliptic equations at resonance”. In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* 85.1-2 (1980), p. 119-129.
- [112] K. TINTAREV. “A semilinear elliptic problem on unbounded domains with reverse penalty”. In : *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 64.7 (2006), p. 1496-1502.
- [113] K. TINTAREV et K. H. FIESELER. *Concentration compactness: functional-analytic grounds and applications*. Imperial College Press, 2007.
- [114] M. WILLEM. *Minimax theorems*. T. 24. Springer Science & Business Media, 1997.
- [115] M. WU et Z. YANG. “A Class of  $(p, q)$ -Laplacian Type Equation with Potentials Eigenvalue Problem in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Boundary Value Problems* 2009 (2009).
- [116] H. YIN et Z. YANG. “A class of  $(p, q)$ -Laplacian type equation with concave-convex nonlinearities in bounded domain”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 382 (2011), p. 843-855.

- 
- [117] H. YIN et Z. YANG. “Multiplicity of positive solutions to a  $(p, q)$ -Laplacian equation involving critical nonlinearity”. In : *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 75 (2012), 3021–3035.
- [118] E. ZEIDLER. *Nonlinear functional analysis and its applications: III: variational methods and optimization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [119] N. ZHANG et G. JIA. “Existence and behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic problems with discontinuous nonlinearity”. In : *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 72 (2021), p. 1-21.
- [120] R. ZOUAI et N. BENOUIHBA. “Nontrivial solutions for a nonlinear elliptic equation of  $(p, q)$ -Laplacian type with a discontinuous nonlinearity in  $\mathbb{R}^N$ ”. In : *Journal of Elliptic and Parabolic Equations* 9.1 (2023), p. 247-262.
- [121] R. ZOUAI et N. BENOUIHBA. “Nontrivial weak solutions for a  $(p, q)$ -Laplacian equation involving discontinuities with critical exponent”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 527.2 (2023), p. 127448. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127448>.