وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار عنابة

Année : 2017

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

MÉTHODES DE L'ANALYSE NON LINÉAIRE APPLIQUÉES AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

Option

Mathématiques Appliquée

Présentée par

Yessaad Mokhtari Sabah

DIRECTEUR DE THÈSE : NISSE Lamine PROF. U.E.H.L. EL OUED

Devant le jury

PRESIDENTE :	REBBANI Faouzia	PROF.	ESTI. ANNABA
EXAMINATEUR :	LASKRI Yamina	PROF.	ESTI. ANNABA
EXAMINATEUR :	CHORFI Lahcen	PROF.	UNIV. B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	BOUSSETILA Nadjib	PROF.	UNIV. DE GUELMA

Remerciements

*Je tiens avant tout à remercier **ALLAH** pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.*

*J'exprime toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse **Nisse Lamine** pour son aide, son soutien, ses conseils ainsi que la confiance qu'il m'a fait en acceptant de m'encadrer.*

*Je tiens également à remercier Mme. **REBBANI Faouzia** qui m'a fait l'honneur de présider mon jury ainsi que M. **BOUSSETILA Nadjibe**, M. **CHORFI Lahcen**, Mme **LASKRI Yamina** pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.*

*Je remercie a mes chers parents (A mon chère père **Ahmed Yessaad Mokhtari** dieu bénisse son âme et rend le reste du Paradis et pour ma chère mère **Saffaf Elhedba**) Mes sincères remerciements vont à mes sœurs (**Nadia**, **Radia**, **Fadila** et **Malika**) et à mes frères (**Amar** et **Mourad**) pour leur soutien et contribution à la réalisation de ce travail.*

*Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes années études et en particulier mes enseignants et aussi à remercier tous ce qui m'a aidé (en particulier : **Assala Aicha**, **Chemmam Ouafa*** et ***Gellal Sana**) de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.*

Enfin, Je ne saurais oublier l'apport de mes parents pour l'accomplissement de ce travail, je tiens à leur rendre hommage à travers cette thèse.

طرق التحليل غير الخطية المطبقة على المعادلات التفاضلية الكسرية

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة استقرار في حل مشكلة قيمة الحدود في فضاء بناخ لجانب نظام المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية، وذلك باستخدام عدم المساواة غرونويل من نوع كسري.

نبدأ في تقديم دراسة وجود حل النظام مع وظائف البيانات محدودة التي تقوم على تقنيات النقطة الثابتة من شودار، ثم تعاملنا مع استقرار الحل من النظام نفسه فيما يتعلق بأوامر المشتقات الكسرية . نعطي شروطا كافية لهذا النوع من الاستقرار.

وأخيرا, استنادا إلى نظرية النقطة الثابتة من شودار، نحن نقدم شروطا كافية على وجود الحل، و أيضا دراسة الاستقرار بحيث وظائف البيانات غير محدودة.

الكلمات المفتاحية:

مشتق كسور، دالة قرين، نظرية النقطة الثابتة من شودار، عدم المساواة غرونويل من نوع كسري.

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier la stabilité de la solution d'un problème aux limites dans un espace de Banach pour un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires, en utilisant l'inégalité de Gronwall de type fractionnaire.

On commence par une étude de l'existence de la solution du système avec des données bornées, basée sur les techniques du point fixe de Schauder.

Ensuite, nous traitons la stabilité de la solution du même système par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire dans le cas où les fonctions données sont bornées. Nous donnons des conditions suffisantes, pour ce type de stabilité.

Enfin, en se basant sur le théorème du point fixe de Schauder, nous déterminons des conditions suffisantes pour l'existence de la solution, et nous étudions également la stabilité dans le cas où les fonctions données ne sont pas bornées.

Mots clés : Dérivée fractionnaire, fonction de Green, le théorème du point fixe de Schauder, inégalité de type Gronwall.

Abstract

Our aim in this thesis is to study the stability of the solution of a boundary value problem in a Banach space for a system of nonlinear fractional differential equations, using Gronwall inequality of fractional type.

We begin by the study of the existence of a solution to the system with bounded data functions that is based on Schauder fixed -point techniques.

Then, we treat the stability of the solution of the same system with respect to the fractional derivation orders in the case where the given functions are bounded. We give sufficient conditions for this type of stability.

Finally, by the use of Schauder's fixe point theorem, we determine sufficient conditions for the existence of the solution, and we also study the stability in the case where the given functions are unbounded.

Keywords : Fractional derivative, Green's function, Schauder fixed-point theorem, Gronwall-type inequality.

Notations

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \backslash \{0\}$.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- $I = [0,1]$: intervalle fermée de $\mathbb{R}$.
- $[a,b]$: intervalle fermée de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
- $C([0,1])$: espace des fonctions continues sur $[0,1]$.
- $L^p[a,b]$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1,\infty)$ intégrables sur $[a,b]$.
- $\Gamma(.)$: fonction Gamma d'Euler.
- $B(.,.)$: fonction Bêta.
- $\mathcal{L}f(t)$: transformation de laplace de la fonction $f(t)$.
- $I_{a^+}^{\alpha} f(t)$: intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$.
- $D_a^{\alpha} f(t)$: dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction $f(t)$.
- ${}^cD_a^{\alpha} f(t)$: dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction $f(t)$.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques appliquées qui généralise la notion de dérivation ou d'intégration usuelles (d'ordres entiers) aux ordres non entiers. Plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire. L'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisait le symbole de dérivation d'ordre n, $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ où n est un entier positif. C'est peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospitale à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans $\mathbb{Q}$. Il posa la question : et si $n = 1/2$?. En 1695, dans une lettre adressée à l'Hospital, Leibniz écrivait prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal à $x\sqrt[2]{dx : x}$, un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions des grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au $XVII^e$ siècle, Laplace, Fourier, Liouville ou Riemann ainsi que Grünwald et Letnikov au XIX^e siècle dans la seconde moitié du même siècle.

Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques, viscoélastiques et acoustiques sont régis par des équations différentielles à dérivées non-entières voir [8, 10, 17, 21].

Ces auteurs ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral, mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt.

La stabilité des systèmes non linéaires à dérivées d'ordres non entiers restent encore des problèmes ouverts à cause de leur nature fractionnaire et non linéaire. En effet, la stabilité est l'une des préoccupations majeures, aussi bien pour les chercheurs que pour les ingénieurs.

On doit à Lyapunov la première méthode de l'étude de stabilité.

Notre thèse s'organisera comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire où quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction gamma, la fonction de Mittag-Leffler et la fonction de Green qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires.

Le deuxième chapitre sera basé sur deux approches, Riemann-Liouville et Caputo et la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérées.

Le troisième chapitre de cette thèse met le point sur un problème aux limites pour un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville. A l'aide du théorème de point fixe de Schauder, nous présenterons quelques résultats sur l'existence de la solution du système dans un certain espace de Banach.

Ensuite, nous étudierons la stabilité du système, et nous proposerons des conditions suffisantes pour la stabilité de la solution par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire, tout en supposant que les fonctions données sont bornées.

Le dernier chapitre, portera sur un système d'équations différentielles non linéaires, où nous supposerons que les fonctions données sont non bornées. Nous déterminons des conditions optimales et suffisantes pour l'existence de la solution du système.

Sous ces mêmes conditions nous montrons aussi que le système est structurellement stable en un sens qui sera bien défini.

CHAPITRE 1 Préliminaires

Dans ce chapitre, on va commencer par rappeler des résultats sur quelques espaces fonctionnels et de fonctions spéciales. On donne ensuite les théorèmes du point fixe qu'on utilisera par la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

Soit $\Omega = [a, b]$; $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *[21] Pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit:*

1. *L'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, est l'ensemble des (classes de) fonctions réelles ou complexes sur Ω telle que*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \ \text{est mesurable :} \ \int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty. \tag{1.1}$$

est un Banach.

2. *L'espace $L^\infty(\Omega)$, $p = \infty$, est l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout (p.p.) sur Ω muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = \underset{t\in\Omega}{ess\sup} |f(t)| = \inf \{ K \geq 0; \ |f(t)| \leq K, \ p.\ p.\ sur\ \Omega \} \tag{1.2}$$

est un Banach.

1.2 Fonctions spéciales

Dans cette section, on va présenter deux fonctions spéciales qui sont trés utilisées dans le calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Bêta.

La fonction Gamma

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la factorielle.

Définition 1.2.1 *[2] La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \;\; \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.3}$$

Théorème 1.2.1 *[2] La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes*

1) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ *(où* $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$*), on a* $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.

En particulier, pour $z = n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $\Gamma(n) = (n-1)!$

2) On peut représenter $\Gamma(z)$ *par la limite,*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{(z+1)\cdots(z+n)} \;, \;\; \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.4}$$

La fonction Gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée s'écrit

$$\psi(\xi) = \frac{d}{d\xi}(\log \Gamma(\xi)) \tag{1.5}$$

La fonction Bêta

Définition 1.2.2 *[2] La fonction Bêta est donnée par*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\, dt, \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Re}(w) > 0. \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.1 *La fonction Béta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante*

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\;\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \forall z, w : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Re}(w) > 0 \tag{1.7}$$

La fonction de Mittag-Leffler

La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [1], elle est définie comme suit:

Définition 1.2.3 *Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie par*

$$E_\alpha(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+1)} \ , \ (\alpha > 0) \tag{1.8}$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie à son tour par:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+\beta)} \ , \ (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.9}$$

Exemple 1.2.1 *Pour des valeurs spéciales de α et β on a*

1) $E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z$

2) $E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$ *; soit,* $E_{1,2} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\kappa+2)} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{(\kappa+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1)$

Théorème 1.2.2 *La fonction de Mittag-Leffler possède les proprietés suivantes*

1)Pour $|z| < 1$, on a

$$\int_0^\infty e^{-t} \ t^{\beta-1} \ E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha) \ dt = \frac{1}{z-1} \tag{1.10}$$

2)Son intégrale

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) \ t^{\beta-1} \ dt = z^\beta \ E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha) \tag{1.11}$$

3)Sa dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{dz^n} \ \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)\right) = z^{\beta-n-1} \ E_{\alpha,\beta-n}(\ \lambda z^\alpha) \tag{1.12}$$

Lemme 1.2.1 *[15] (l'inégalité Gronwall de type fractionnaire)*

Soient α, c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}_+$ et $t \in]0,1[$. Supposons que $\delta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que:

$$|\delta(x)| \leq c_1 + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} |\delta(t)| \, dt \ , \forall x \in [0,T] \tag{1.13}$$

Alors

$$|\delta(x)| \leq c_1 E_\alpha(c_2 T^\alpha) \ \text{ pour } x \in [0,T] \tag{1.14}$$

La fonction de Green

A travers une recherche effectuée sur la formulation mathématique de la théorie de l'électricité et du magnétisme, Georges Green (1793−1841) a été considéré comme l'initiateur de l'introduction de la théorie du potentiel. Boulanger de métier, il s'est initié seul aux mathématiques principalement, en lisant les travaux de Poisson. Cela s'explique par l'originalité des approches qu'il a utilisées pour modeliser des phénomènes physiques.

En 1828, Green a publié un travail intitulé "An Essay on the Application of Mathmatical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism", qui est passé inapercu du monde des mathématiciens jusqu'à sa rédition par Lord Kelvin en 1846 dans le "Journal fùt Mathematik". Nous y trouvons la formule de Green, ainsi que la fonction de Green (Ain dénommée par Riemann) qui est devenue un des concepts fondamentaux de la théorie des équations aux dérivées partielles.

En 1832 et 1833, Green a publié des articles sur les lois de l'équilibre des fluides, sur les lois de l'attraction dans un espace n-dimensionnel.

Nous appelons fonction de Green en physique; ce que les mathématiciens appellent aujourd'hui la solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire.

Les fonctions de Green fournissent une méthode générale pour résoudre les équations différentielles (en particulier, le cas des équations différentielles fractionnaires) dans des conditions aux limites appropriées. Elles sont largement utilisées en mécanique quantique. Nous les retrouvons dans divers domaines des mathématiques, de la physique et de l'ingénierie. Ce ne sont que les fonctions de Green dans la définition généralisée. De là, nous pouvons comprendre pourquoi les fonctions de Green sont aujourd'hui très populaires dans de nombreux domaines (l'hydrodynamique, l'électrodynamique, l'acoustique, la mécanique et la physique des particules élémentaires.

Exemple 1.2.2 *(Dans le cas de la fonction de Green en une dimension)*

Soit $q :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dx^2}+q\left(x\right)\right)\ f\left(x\right)=h\left(x\right) \quad 0<x<1 \\ \\ \alpha_1\ f\left(a\right)+\beta_1\ \acute{f}\left(a\right)=0 \\ \\ \alpha_2\ f\left(b\right)+\beta_2\ \acute{f}\left(b\right)=0 \end{cases} \tag{1.15}$$

où h est une fonction donnée et α_j, β_j $(j=1,2)$ sont des constantes données.

La méthode de la fonction de Green est solution du problème aux limites, pour chaque $y \in \left]a,b\right[$ fixée.

L'équation

$$\begin{cases} \left[-\frac{d^2}{dx^2}+q\left(x\right)\right]\ G\left(x,y\right)=\delta\left(x-y\right) \\ G\left(a,y\right)=G\left(b,y\right)=0 \\ \left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{x=y}=0 \end{cases} \tag{1.16}$$

qui doit être au sens des distributions.

Définition 1.2.4 *[29] La fonction de Green est une solution élémentaire du problème aux limites* (1.16)

Si G est trouvée, alors f peut être représentée sous la forme:

$$f\left(x\right)=\int_a^b G\left(x,y\right)\ h\left(x\right)\ dx \tag{1.17}$$

Remarque 1.2.2 *La fonction de Green $G\left(x,y\right)$ satisfait les conditions suivantes :*

1) $G\left(x,y\right)$ est continue en x et y, pour $x \neq y$

2) $G\left(x,y\right)=G\left(y,x\right)$

Exemple 1.2.3 *Considérons le système:*

$$\begin{cases} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}-3\frac{df(x)}{dx}+2x=h\left(x\right) \\ f\left(0\right)=\frac{d}{dx}f\left(0\right)=0 \end{cases} \tag{1.18}$$

L'équation (1.18) peut être remplacée par:

$$\begin{cases} \frac{d^2 G(x,y)}{dx^2}-3\frac{dG(x,y)}{dx}+2G\left(x,y\right)=\delta\left(x-y\right) \\ G\left(0,y\right)=\frac{d}{dx}G\left(0,y\right)=0 \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace, on obtient:

$$\mathcal{L}(\frac{d^2}{dx^2}G(x,y))(s) - 3\mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}G(x,y)\right)(s) + 2\mathcal{L}(G(x,y))(s) = \mathcal{L}(\delta(x-y))(s)$$

$$x^2G(x,y) - xG(0,y) - \frac{d}{dx}G(0,y) - 3[xG(x,y) - G(0,y)] + 2G(x,y) = \frac{1}{x}$$

où $\delta(x-y) = \begin{cases} 1, & x > y \\ 0, & x < y \end{cases}$ *alors,* $\mathcal{L}(\delta(x-y)(s) = \frac{1}{x}$

Donc,

$$G(x,y) = \frac{1}{x(x^2-3x+2)}$$

Alors, la fonction de Green donnée par:

$$G(x,y) = \left[\frac{1}{2}e^{2(x-y)} - e^{x-y} + \frac{1}{2}\right] H(x-y), x \geq y$$

où H *est la fonction de Heaviside.*

la solution du problème (1.18) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^b G(x,y)\,h(y)\,dy \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2}e^{2(x-y)} - e^{x-y} + \frac{1}{2}\right] H(x-y)\,h(y)\,dy \end{aligned}$$

Il est notée que la transformée de laplace d'une fonction f *de la variable réelle* $t \in \mathbb{R}_+$ *est donnée par*

$$\mathcal{L}\ f(s) := \int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt \quad , s \in \mathbb{C} \tag{1.19}$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont des outils très utils en mathématiques, essentiellement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.3.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de f tout point $x \in E$ tel que $f(x) = x$.*

Le théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour garantir l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une fonction.

Définition 1.3.2 *[7] Soit (E, d) un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite κ-Lipschitzienne de constante $\kappa \geq 0$ si*

$$\forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x; y).$$

Définition 1.3.3 *L'application κ-Lipschitzienne f est dite une contraction si $\kappa \in (0, 1)$.*

Théorème 1.3.1 *(Théorème du point fixe de Banach)*

Soit (E, d) un espace métrique complet, soit F une partie fermée de E, et soit $f : E \to E$ une contraction. Alors f admet un unique point fixe.

Définition 1.3.4 *Une partie M d'un espace métrique (E, d) est dite compacte si toute suite $\{x_n\}$ de M admet une sous-suite convergente vers une limite appartenant à M.*

M est relativement compacte si toute suite de M admet une sous-suite convergente vers une limite appartenant à E (i.e. si la fermeture de M est compacte)

Théorème 1.3.2 *(Théorème Ascoli-Arzela)*

Soit $A \subset C(J, E)$, A est relativement compacte (i.e. $\overline{A}$ est compacte) si et seulement si :

i) L'ensemble A est uniformément borné i.e:

$$\exists R > 0 \text{ tel que } |f(t)| \leq R \text{ pour tout } t \in J, \text{ et } f \in A$$

et

ii) L'ensemble A est équicontinue i.e:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ telque } |t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$$
$$\text{pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et } f \in A$$

Le théorème du point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder de nature topologique a affirmé qu'une application complètement continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.3.3 *[7] (Théorème du point fixe de Schauder)*

Soit E un espace de Banach, U un convexe fermé borné de E et $A : U \to U$ un opérateur continu et compact, alors A admet au moins un point fixe dans U.

CHAPITRE 2 Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions sur les intégrales et les dérivées fractionnaires.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$\begin{aligned} I^n f(t) &= \int_a^{t_1} dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n-1} f(t_n)\ dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1}\ f(s)\ ds \text{ où } t > a \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Définition 2.1.1 *L'intégrale fractionnaire à gouche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est définie par*

$$I_a^\alpha\ f(t) := \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\ f(s)}{\Gamma(\alpha)}\ ds,\ a < t < b \tag{2.1}$$

Exemple 2.1.1 *Soit $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$. Alors*

$$I_a^\alpha\ f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta} \tag{2.2}$$

En effet,

$$I_a^\alpha\ f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\ (s-a)^\beta\, ds,$$

En effectuant le changement de variable $s - a = \tau (t - a), 0 \leq \tau \leq 1$ *et en utilisant la fonction Bêta, on obtient*

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} \ f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \ [t - a - \tau (t - a)]^{\alpha - 1} \ \tau^{\beta} \ (t - a)^{\beta + 1} \ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ (t - a)^{\alpha + \beta} \ \int_0^1 \ (1 - \tau)^{\alpha - 1} \ \tau^{\beta} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ (t - a)^{\alpha + \beta} \ \beta(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ (t - a)^{\alpha + \beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \end{aligned}$$

donc

$$I_a^{\alpha} \ f(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \ (t - a)^{\alpha + \beta}$$

Théorème 2.1.1 [21] *Si* $f \in L^1 [a, b]$ *et* $\alpha > 0$, *alors* $I_a^{\alpha} \ f(x)$ *existe pour presque tout* $x \in [a, b]$ *et on a*

$$I_a^{\alpha} \ f \in L^1 [a, b]$$

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivante:

Théorème 2.1.2 *[21], [10] Soit* $\alpha, \beta > 0$, *alors, pour toute* $f \in L^1 [a, b]$, *on a*

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} \ f(t) = I_a^{\alpha + \beta} f(t) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} \ f(t) \tag{2.3}$$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

Preuve. Soit $f \in L^1 [a, b]$, on a

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} \ f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha - 1} \int_a^s (s - \tau)^{\beta - 1} f(\tau) \, d\tau ds$$

En utilisant le théorème de Fubini, on trouve:

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} \ f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \int_a^t \ f(\tau) \int_{\tau}^t (t - s)^{\alpha - 1} (s - \tau)^{\beta - 1} \, ds d\tau$$

En effectuant le changement de variable $s-\tau = z\,(t-\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} I_a^{\beta}\ f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^t\ f(\tau)\quad (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\, z^{\alpha-1} dz d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\tau)\ \ (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\, d\tau \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$. ■

2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *telsque* $n-1 \leq \alpha < n$ *, la dérivée fractionnaire à gouche au sens de Riemann-Liouville d'ordre* α *d'une fonction* f *:* $[a,b] \to \mathbb{R}$ *est définie par*

$$D_a^{\alpha}\ f(t)\ \ := D^n I_a^{n-\alpha}\ f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}\, f(s)}{\Gamma(n-\alpha)}\, ds \tag{2.4}$$

Exemple 2.2.1 *En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple, si* $\alpha > 0$ *est non entier, alors pour tout* $K \in \mathbb{R}$

$$D_a^{\alpha} K = \frac{K\,(t-a)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ *avec* $\beta > -1$*. Alors on a*

$$D_a^{\alpha}\ f(t) = D^n I_a^{n-\alpha}\ f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n\,(t-a)^{n-\alpha+\beta}$$

Il s'ensuit que si $(\alpha-\beta) \in \{1,2,...,n\}$, *alors*

$$D_a^{\alpha}\ f(t) = 0,\ \ (\alpha-\nu) \in \{1,2,\ldots,n\}$$

Par ailleurs si $(\alpha-\beta) \notin \mathbb{N}$ *, on a*

$$D_a^{\alpha}\ \ f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\ \ (t-a)^{\beta-\alpha} \tag{2.6}$$

Théorème 2.2.1 *[21] Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour tout λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors $D_a^\alpha\left(\lambda\ f+\mu\ g\right)$ existe, et on a:*

$$D_a^\alpha\left(\lambda f\left(t\right)+\mu\ g\left(t\right)\right)=\lambda D_a^\alpha\ f\left(t\right)+\mu\ D_a^\alpha g\left(t\right) \tag{2.7}$$

Remarque 2.2.1 *[26] Soit $f\in C\left(0,1\right)\cap L\left(0,1\right)$ la dérivée fractionnaire est :*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f\ \ (t)=f\ \ (t)-\sum_{k=1}^{n} C_k\ t^{\alpha-k},\ C_k\in\mathbb{R},\ n=[\alpha]+1 \tag{2.8}$$

Lemme 2.2.1 *[21] Soient $\alpha>0$ et $f\in L^1\left[a,b\right]$, alors l'égalité*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha\ f\left(t\right)=f\left(t\right) \tag{2.9}$$

est vraie pour presque tout $t\in\left[a,b\right]$.

Preuve. On utilise $(2,4)$ pour trouver

$$D_a^\alpha I_a^\alpha\ f\left(t\right)=D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha\ \ f\left(t\right)=D^n I_a^n\ f\left(t\right)=f\left(t\right)$$

■

Théorème 2.2.2 *[21] Soient $\alpha,\ \beta>0$ tel que $n-1\leq\alpha<n$, $m-1\leq\beta<m$ $\left(n,\ m\in\mathbb{N}^*\right)$, alors on a:*

1) Si $\alpha>\beta>0$, alors pour tout $f\in L^1\left[a,b\right]$ l'égalité

$$D_a^\beta\left(I_a^\alpha\ f\right)\left(t\right)=I_a^{\alpha-\beta}f\left(t\right) \tag{2.10}$$

est presque partout sur $[a,b]$.

2) Si $\beta\geq\alpha>0$, et si la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha}\ f$ existe, alors on a

$$D_a^\beta\ \ \left(I_a^\alpha\ f\right)\left(x\right)=D_a^{\beta-\alpha}\ f\ \ (x) \tag{2.11}$$

pour presque tout $t\in[a,b]$.

3) Pour $\alpha>0$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $D_a^\alpha\ f$ et $D_a^{\kappa+\alpha}\ f$ existent, alors:

$$D^\kappa\left(D_a^\alpha\ f\left(t\right)\right)=D_a^{\kappa+\alpha}f\left(t\right) \tag{2.12}$$

pour tout $t \in [a, b]$

4) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a, b]$ *telle que* $f = I_a^\alpha \varphi$*, alors*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha \, f(t) = f(t) \tag{2.13}$$

Preuve. En utilisant (2.3) et $(2,4)$, on obtient pour $n \geq m$

1)

$$\begin{aligned} D_a^\beta \ (\jmath_a^\alpha \ f) \ (x) &= D^m \ I_a^{m-\beta} \ (I_a^\alpha \ f)(x) \\ &= D^m \left(I_a^{m+\alpha-\beta} \ f\right)(x) \\ &= D^m I_a^m \left(I_a^{\alpha-\beta} \ f\right)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} \ f(x) \end{aligned}$$

presque pour tout $t \in [a, b]$

2) $\qquad D_a^\beta (I_a^\alpha \ f)(t) = D^m I_a^{m-\beta} (I_a^\alpha \ f)(t) = D^m I^{m-(\beta-\alpha)} f(t) = D_a^{\beta-\alpha} f(t)$

existe pour $t \in [a, b]$.

3) on a

$$\begin{aligned} D^\kappa [D_a^\alpha \ f \ (t)] &= D^\kappa D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^{\kappa+n} I_a^{n-\alpha+\kappa-\kappa} f(t) \\ &= D^{\kappa+n} I_a^{\kappa+n-(\alpha+\kappa)} f(t) \\ &= D_a^{\kappa+\alpha} f(t) \end{aligned}$$

4)D'après $(2,9)$, on peut écrire

$$I_a^\alpha D_a^\alpha \ f(t) = I_a^\alpha (\ D_a^\alpha \ I_a^\alpha \ \varphi \ (t)) = I_a^\alpha \ (\varphi \ (t)) = f \ (t)$$

■

Lemme 2.2.2 *(Fonction de Green dans le cas fractionnaire)*

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *et* $1 < \alpha < 2$*, alors la solution du problème*

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t), \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

s'écrit comme équation à l'équation intégrale

$$u(t) = \int_0^1 G_1(t,s) f(s)\, ds$$

où

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1} - [t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & s \leq t \\ \\ \frac{-[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t \leq s \end{cases} \tag{2.13}$$

Preuve. En utilisant (2.1) et (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} I^\alpha D^\alpha u(t) &= I^\alpha f(t) \\ I^\alpha f(t) &= u(t) - c_1 t^{\alpha-1} - c_2 t^{\alpha-2} \\ u(t) &= I^\alpha f(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions aux limites, on aura

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = -\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds \end{cases}$$

et la solution s'écrit :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds - \int_0^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1} - [t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds \\ &\quad - \int_t^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds \\ &= \int_0^1 G_1(t,s) f(s)\, ds \end{aligned}$$

où $G_1(.,.)$ est la fonction de Green donnée par (2.13). ■

2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Ici, nous donnons une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo.

Définition 2.3.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pour une fonction f est donnée par :*

$$^{c}D_a^{\alpha}\ f(t) := I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f^{(n)}(s)\,ds\ ,\ t > a \tag{2.15}$$

où $n = [\alpha] + 1$ (avec $[\alpha]$ désignant la partie entière de α).

Exemple 2.3.1 *Soit $\alpha > 0$ tel que $(n-1 \leq \alpha < n)$ et $f(t) = (t-a)^{\beta}$ (où $\beta > -1$), on trouve:*

si $\beta \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$, alors $^{c}D_a^{\alpha} f(t) = 0$

et si $\beta > n-1$, alors $^{c}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}$

En utilisant le changement de variables: $s - a = \tau(t-a)$ (où $0 \leq \tau < 1$), on aura

$$\begin{aligned}
^{c}D_a^{\alpha} f(t) &= I_a^{1-\alpha} f'(t) = \beta I_a^{1-\alpha} (t-a)^{\beta-1} \\
&= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} (s-a)^{\beta-1}\, ds \\
&= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\beta} \int_0^1 \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{-\alpha}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\beta} B(\beta, 1-\alpha) \\
^{c}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)} (t-a)^{-\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante non nulle est nulle.*

La relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par le théorème suivant:

Théorème 2.3.1 [21] *Soient* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, *si* f *possède* $(n-1)$ *dérivées en* a *et si* $D_a^{\alpha} f$ *existe, alors:*

$$^{c}D_a^{\alpha} f(t) = D_a^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right] \tag{2.16}$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

Preuve. D'après $(2,4)$, on a

$$\begin{aligned}
& D_a^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right] \\
= \; & D^n I_a^{n-\alpha}\left[f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right] \\
= \; & \frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(s-a)^{\kappa}\right] ds
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned}
& I_a^{n-\alpha}\left[f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right] \\
= \; & \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(s-a)^{\kappa}\right] ds \\
= \; & -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\left(f(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(s-a)^{\kappa}\right)(t-s)^{n-\alpha}\right]_{s=a}^{s=t} \\
& + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha}\left[Df(s) - D\sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(s-a)^{\kappa}\right] ds
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
& \jmath_a^{n-\alpha}\left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(x-a)^{\kappa}\right] \\
= \; & \jmath_a^{n-\alpha+1} D\left[f(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(x-a)^{\kappa}\right]
\end{aligned}$$

de la même façon pour n fois, alors:

$$\begin{aligned}
& I_a^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right] \\
&= I_a^{n-\alpha+n}D^n\left[f(t)-\sum_{\kappa=0}^{n-n}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right] \\
&= I_a^n I_a^{n-\alpha}D^n\left[f(t)-\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right]
\end{aligned}$$

Or $\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}$ est un polynôme de dégré $n-1$, alors

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right]=I_a^n\,I_a^{n-\alpha}D^n f(t)$$

Donc

$$\begin{aligned}
D_a^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}(t-a)^{\kappa}\right] &= D^n I^n I_a^{n-\alpha}D^n f(t) \\
&= I_a^{n-\alpha}D^n f(t) \\
&= {}^{c}D_a^{\alpha} f(t)
\end{aligned}$$

Pour presque tout $t\in[a,b]$. ■

CHAPITRE 3

Système d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires (avec des données bornées)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va considérer un système d'équations différentielles faction-naires non linéaires donné par:

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t, v(t), D^{\mu}v(t)), & 0 < t < 1 \\ D^{\beta}v(t) = g(t, u(t), D^{\nu}u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = v(1) = v(0) = 0 \end{cases} \qquad ((3,1)_{(\alpha,\beta)})$$

où

- $1 < \alpha, \beta < 2$, $\alpha - \nu \geq 1$, $\beta - \mu \geq 1$, $\nu, \mu > 0$,

• D^{α} $\left(\text{respectivement } D^{\beta}\right)$est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α (respectivement β).

• $f,\ g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions données continues.

on considère l'espace $X \times Y = \left\{(u,v) : (u,v) \in (C\,[0,1])^2\ \right\}$

muni de la norme:

$$\|(u,v)\|_{X\times Y} = \max\{\|u\|_X\,, \|v\|_Y\},$$

pour

$$\begin{aligned}
\|u\|_X &= \max_{t\in I}|u\,(t)| + \max_{t\in I}|D^{\nu}u\,(t)|\,,\\
\|v\|_Y &= \max_{t\in I}|v\,(t)| + \max_{t\in I}|D^{\mu}v\,(t)|
\end{aligned}$$

où $\left(X \times Y, \|(u,v)\|_{X\times Y}\right)$ est un espace de Banach.

Commençons tout d'abord par le résultat suivant:

Lemme 3.1.1 *Si $f,\ g : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues, $(u,v) \in X \times Y$ est une solution du système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$si et seulement si $(u,v) \in X \times Y$ est une solution du système suivant:*

$$\begin{cases}
u\,(t) = \int_0^1 G_1\,(t,s)\,f\,(s, v\,(s)\,, D^{\mu}v\,(s))\,ds\\
\\
v\,(t) = \int_0^1 G_2\,(t,s)\,g\,(s, u\,(s)\,, D^{\nu}u\,(s))\,ds
\end{cases} \tag{3.2}$$

où:

$$G_i\,(t,s) = \begin{cases}
\frac{(t-s)^{\sigma_i-1}-[t(1-s)]^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)},\ s \leq t\\
\\
\frac{-[t(1-s)]^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)},\ t \leq s
\end{cases} \tag{3.3}$$

telle que, pour $i = 1,2,\ \sigma_1 = \alpha$ et $\sigma_2 = \beta$.

Définition 3.1.1 *Soit l'opérateur $T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ défini par:*

$$\begin{aligned}
T\,(u,v)\,(t) \ &: \ = \left(\int_0^1 G_1\,(t,s)\,f\,(s, v\,(s)\,, D^{\mu}v\,(s))\,ds\ ;\ \int_0^1 G_2\,(t,s)\,g\,(s, u\,(s)\,, D^{\nu}u\,(s))\,ds\right)\\
&: \ = (T_1 v\,(t)\,, T_2 u\,(t))
\end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2 Existence de la solution

Pour montrer l'existence des solutions en utilisant la fonction de Green correspondante et le théorème du point fixe de Schauder, on a le théorème suivant:

Théorème 3.2.1 *[24] Soit $f,\ g : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et supposons qu'il existe deux fonctions non-négatives $a(t)$, $b(t) \in L[a,b]$ telles que:*

$$(H)\begin{cases} |f(t,X,Y)| \leq a(t) + c_1 |X|^{p_1} + c_2 |Y|^{p_2}, \\ \\ |g(t,X,Y)| \leq b(t) + d_1 |X|^{q_1} + d_2 |Y|^{q_2} \end{cases}$$

où, pour $i = 1,2$, $c_i, d_i \geq 0$, et $0 < p_i, q_i < 1$. Alors le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ admet une solution.

Proposition 3.2.1 *Si l'hypothèse (H) est vérifiée et si*

$$M = \max_{t\in I} |f(t, v(t), D^{\mu} v(t))| < \infty, \ N = \max_{t\in I} |g(t, u(t), D^{\nu} u(t))| < \infty \qquad (3.5)$$

Alors, le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ admet une solution.

Preuve. Considérons l'opérateur T donné par (3.4)

et soit

$$U = \{(u,v) : \ (u,v) \in X \times Y, \ \|(u,v)\| \leq R\}$$

où R est la constante définie par:

$$R \geq \max\left\{3K, 3L, (3Ac_1)^{\frac{1}{1-p_1}}, (3Ac_2)^{\frac{1}{1-p_2}}, (3Bd_1)^{\frac{1}{1-q_1}}, (3Bd_2)^{\frac{1}{1-q_2}}\right\}$$

Il est clair que U est un convexe fermé et borné.

On va montrer que $T : U \longrightarrow U$ est compact, et pour ce faire, il suffit de démontrer qu'elle est relativement compacte.

En effet:

(i) Montrons que $T(U)$ est bornée $\Leftrightarrow$ si $(u,v) \in U$ alors, $T(u,v) \in U$

Soit

$$\begin{aligned} |T_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 G_1(t,s) f(s, v(s), D^\mu v(s))\, ds \right| \\ &\le \int_0^1 |G_1(t,s)| \, |f(s, v(s), D^\mu v(s))| \, ds \end{aligned}$$

d'après (H), on peut écrire:

$$\begin{aligned} |T_1 v(t)| &\le \int_0^1 |G_1(t,s)| \left(a(s) + c_1 |v(s)|^{p_1} + c_2 |D^\mu v(s)|^{p_2}\right) ds \\ &\le \int_0^1 |G_1(t,s)\, a(s)| \, ds + \left(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}\right) \int_0^1 |G_1(t,s)| \, ds \\ &= \int_0^1 |G_1(t,s)\, a(s)| \, ds + \left(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}\right) \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - t^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right\} \\ &= \int_0^1 |G_1(t,s)\, a(s)| \, ds + \left(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}\right) \left\{ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right\} \\ &= \int_0^1 |G_1(t,s)\, a(s)| \, ds + \left(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(t^\alpha - t^{\alpha-1}\right) \\ |T_1 v(t)| &\le \int_0^1 |G_1(t,s)\, a(s)| \, ds + \left(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |D^\nu T_1 v(t)| &= \left| D^\nu \int_0^1 G_1(t,s) f(s, v(s), D^\mu v(s))\, ds \right| \\ &= \left| D^\nu I^\alpha f(t, v(t), D^\alpha v(t)) - D^\nu t^{\alpha-1} I^\alpha f(t, v(t), D^\mu v(t))\big|_{t=1} \right| \end{aligned}$$

D'après (2.4), (2.10), (H) et le fait que $(0 < (1-s)^\nu < 1)$, on trouve

$$|D^\nu T_1 v(t)| = \left| I^{\alpha-\nu} f(t, v(t), D^\mu v(t)) - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} t^{\alpha-\nu-1} I^\alpha \, f(t, v(t), D^\mu v(t))\big|_{t=1} \right|$$

$$\begin{aligned}
|D^{\nu}T_1v(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1}|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))|\,ds \\
&\quad +\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))|\,ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1}(a(s)+c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})\,ds \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}(a(s)+c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{t^{\alpha-\nu}\left[\int_0^t (1-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\,ds+(c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})\int_0^t (1-s)^{\alpha-\nu-1}\,ds\right]\right. \\
&\quad \left.+\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}a(s)\,ds+(c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\,ds\right\} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\left[1+(1-s)^{\nu}\right]ds\right. \\
&\quad \left.+(c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1}\left[1+(1-s)^{\nu}\right]ds\right\} \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\,ds+(c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1}\,ds\right\} \\
&= \frac{2}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\,ds+(c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})\frac{1}{\alpha-\nu}\right\} \\
&= \frac{2}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\,ds+\frac{2(c_1R^{p_1}+c_2R^{p_2})}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|T_1 v\| &= \max_{t\in I}|T_1 v(t)| + \max_{t\in I}|D^{\nu} T_1 v(t)| \\
&\leq \max_{t\in I}\left(\int_0^1 |G_1(t,s)\,a(s)|\,ds + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\
&\quad + \max_{t\in I}\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s)\,ds + \frac{2(c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right) \\
&= \max_{t\in I}\int_0^1 |G_1(t,s)\,a(s)|\,ds + \frac{2}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s)\,ds \\
&\quad + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_1})\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right)
\end{aligned}$$

On pose:

$$A = \frac{\Gamma(\alpha-\nu+1) + 2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha-\nu+1)}$$

et

$$M = \max_{t\in I}\int_0^1 |G_1(t,s)\,a(s)|\,ds + \frac{2}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\nu-1} a(s)\,ds$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|T_1 v\| &\leq K + (c_1 R^{p_1} + c_2 R^{p_2})\,A \leq R \\
&\leq \max\left\{3K, (3Ac_1)^{\frac{1}{1-p_1}}, (3Ac_2)^{\frac{1}{1-p_2}}\right\} \leq R
\end{aligned}$$

De la même manière, on démontre que:

$$\|T_2 u\| \leq \max\left\{3L, (3Bd_1)^{\frac{1}{1-q_1}}, (3Bd_2)^{\frac{1}{1-q_2}}\right\} \leq R$$

où:

$$B = \frac{\Gamma(\beta-\mu+1) + 2\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\beta-\mu+1)}$$

et

$$L = \max_{t\in I}\int_0^1 |G_2(t,s)\,b(s)|\,ds + \frac{2}{\Gamma(\beta-\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-\mu-1} b(s)\,ds$$

On choisi,

$$R \geq \max\left\{3K, 3L, (3Ac_1)^{\frac{1}{1-p_1}}, (3Ac_2)^{\frac{1}{1-p_2}}, (3Bd_1)^{\frac{1}{1-q_1}}, (3Bd_2)^{\frac{1}{1-q_2}}\right\}$$

ce qui implique que:

$$\|T(u,v)\|_{X\times Y} \leq R$$

Donc $T\ (u,v) \in U$.

(ii) Montrons maintenant que:

$T(U)$ est équicontinue $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \delta(\varepsilon) > 0, |\tau - t| < \delta \Longrightarrow |T(u,v)(\tau) - T(u,v)(t)| < \epsilon$

Soit $t, \tau \in I$, tels que $t < \tau$:

$$\begin{aligned}
|T_1 v(\tau) - T_2 v(t)| &= \left| \int_0^1 [G_1(\tau,s) - G_1(t,s)] f(s, v(s), D^\mu v(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |G_1(\tau,s) - G_1(t,s)| \, |f(s, v(s), D^\mu v(s))|\, ds \\
&\leq M \int_0^t |G_1(\tau,s) - G_1(t,s)|\, ds + \int_t^\tau |G_1(\tau,s) - G_1(t,s)|\, ds \\
&\quad + \int_\tau^1 |G_1(\tau,s) - G_1(t,s)|\, ds \Big] \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left((\tau - s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} + \tau^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} \right) \right. \\
&\quad + \int_t^\tau \left((\tau - s)^{\alpha-1} + \tau^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} \right) ds \\
&\quad \left. + \int_\tau^1 \left(\tau^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} \right) ds \right] \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[-\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right) ds \right] \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{\tau^\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right) \right] \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\tau^\alpha - t^\alpha + \tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|D^{\nu}T_1v(\tau)-D^{\nu}T_1v(t)\right| &= \Big|I^{\alpha-\nu}f(\tau,v(\tau),D^{\mu}v(\tau))-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\tau^{\alpha-\nu-1}I^{\alpha}\ f(t,v(t),D^{\mu}v(t))|_{t=1}\\
&\quad -I^{\alpha-\nu}f(t,v(t),D^{\mu}v(t))+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)}t^{\alpha-\nu-1}I^{\alpha}\ f(t,v(t),D^{\mu}v(t))|_{t=1}\Big|\\
&= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\\
&\quad -\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\Big|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\Big[\Big|\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\\
&\quad -\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\Big|\Big]\\
&\quad +\frac{M}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\Big[\Big|\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\\
&\quad -\int_0^{\tau}(t-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\\
&\quad +\int_0^{\tau}(t-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\\
&\quad -\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\Big|\Big]\\
&\quad +\frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|D^{\nu}T_1 v(\tau) - D^{\nu}T_1 v(t)\right| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left[\int_0^{\tau}\left((\tau-s)^{\alpha-\nu-1}-(t-s)^{\alpha-\nu-1}\right)ds + \int_t^{\tau}(t-s)^{\alpha-\nu-1}ds\right] \\
&\quad + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\left(\tau^{\alpha-\nu}-t^{\alpha-\nu}\right) + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)
\end{aligned}
$$

De la même manière, on démontre que,

$$
\left|T_2 u(\tau) - T_2 u(t)\right| \leq \frac{N}{\Gamma(\beta+1)}\left(\tau^{\beta-1}-t^{\beta-1}+\tau^{\beta}-t^{\beta}\right)
$$

$$
\left|D^{\mu}T_2 u(\tau) - D^{\mu}T_2 u(t)\right| \leq \frac{N}{\Gamma(\beta-\mu+1)}\left(\tau^{\beta-\mu}-\tau^{\beta-\mu}\right) + \frac{N}{\beta\Gamma(\beta-\mu)}\left(\tau^{\beta-\mu-1}-t^{\beta-\mu-1}\right)
$$

Alors:

$$
\left|T_1 v(\tau) - T_1 v(t)\right| + \left|T_2 u(\tau) - T_2 u(t)\right| + \left|D^{\nu}T_1 v(\tau) - D^{\nu}T_1 v(t)\right| + \left|D^{\mu}T_2 u(\tau) - D^{\mu}T_2 u(t)\right| < \epsilon
$$

Ce qui montre que T est équicontinue.

On conclut d'après le théorème de Schauder que l'opérateur T admet au moins un point fixe qui est une solution du système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$. ■

3.3 Stabilité du système

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité de la solution du système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ considéré.

Définition 3.3.1 *On dit que le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ est stable (par rapport aux ordres de dérivées) si et seulement si:*

$$
\forall\epsilon>0,\ \exists K>0,\ \left|\alpha-\overline{\alpha}\right| + \left|\beta-\overline{\beta}\right| < K
$$

$$
\Rightarrow
$$

$$
\left|u-\overline{u}\right| + \left|v-\overline{v}\right| < \epsilon
$$

où (u,v) et $(\overline{u},\overline{v})$ sont les solution de $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ et $(3.1)_{(\overline{\alpha},\overline{\beta})}$ respectivement.

Théorème 3.3.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

(H_1) f et g sont deux fonctions continues dans $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et il existe K_f, K_g, L_f et L_g des constantes positives telles que

$$\begin{aligned} \left|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\right| &\le K_f\left|x_1-x_2\right|+L_f\left|y_1-y_2\right| \\ \left|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)\right| &\le K_g\left|x_1-x_2\right|+L_g\left|y_1-y_2\right| \end{aligned}$$

(H_2) $\Delta := \max\left(K_f,L_f,K_g,L_g\right)\max\left\{\psi_{(\alpha,\nu)},\psi_{(\beta,\mu)}\right\}<1$

où $\psi_{(\alpha,\nu)}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}$, $\psi_{(\beta,\mu)}=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\beta-\mu+1)}$

(H_3) $\alpha\le\beta$, $\mu\le\nu$ et $\alpha-\nu\le\beta-\mu$

Alors, le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ est stable.

Preuve. Le lemme (1.2.1) implique que,

$$\begin{aligned} u(t)-\overline{u}(t) &= \int_0^1 G_1(t,s)\,f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)ds-\int_0^1 \overline{G}_1(t,s)\,f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)ds \\ &= \int_0^1 G_1(t,s)\,f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)ds-\int_0^1 G_1(t,s)\,f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)ds \\ &\quad+\int_0^1 G_1(t,s)\,f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)ds-\int_0^1 \overline{G}(t,s)\,f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)ds \\ &= \int_0^1 G_1(t,s)\left[f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)-f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right]ds \\ &\quad+\int_0^1 \left[G_1(t,s)-\overline{G}_1(s,t)\right]f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)ds \end{aligned}$$

D'après (2,14), on peut écrire:

$$\begin{aligned} u(t)-\overline{u}(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[f(s,v(s),D^\mu v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right]ds \\ &\quad -\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[f(s,v(s),D^\mu v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right]ds \\ &\quad +\int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right] f(s,v(s),D^\mu v(s))\,ds \\ &\quad -\int_0^1 \left[\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right] f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\,ds \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} |u(t)-\overline{u}(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f(s,v(s),D^\mu v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right|ds \\ &\quad +\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f(s,v(s),D^\mu v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right|ds \\ &\quad +\int_0^t \left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f(s,v(s),D^\mu v(s))\right|ds \\ &\quad +\int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right|ds \\ &= I_1+I_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f(s,v(s),D^\mu v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right|ds \\ &\quad +\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f(s,v(s),D^\mu v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right|ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t \left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f(s,v(s),D^\mu v(s))\right|ds \\ &\quad +\int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f(s,\overline{v}(s),D^\mu\overline{v}(s))\right|ds \end{aligned}$$

D'après (H_1), on trouve que:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f |v(s) - \overline{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \overline{v}(s)|\right) ds \\ & \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f |v(s) - \overline{v}(s)| + L_f |D^\mu v(s) - D^\mu \overline{v}(s)|\right) ds \end{aligned}$$

Et en utilisant (3.5), on déduit que

$$I_2 \leq M \left\{ \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds + \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds \right\}$$

En vertu du théorème de la moyenne, on obtient, pour tout $1 < \alpha, \overline{\alpha} < 2$

$$\|\varphi(\alpha)(s) - \varphi(\overline{\alpha})(s)\|_1 \leq \sup_{1<\alpha<2} \|\acute{\varphi}(\alpha)(s)\|_1 . |\alpha - \overline{\alpha}| \tag{3.8}$$

où:

$$\varphi(\alpha)(s) := \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

En posant $x = t(1-s)$, elle s'écrit:

$$\varphi(\alpha)(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Si on fixe $x > 0$,on aura:

$$\begin{aligned} \acute{\varphi}(\alpha)(x) &= \frac{x^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\ln x - \psi(\alpha)\Gamma(\alpha)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)^2} \\ &= \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\psi(\alpha)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ \acute{\varphi}(\alpha)(s) &= \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|\acute{\varphi}(\alpha)(s)\right\|_1 &= \int_0^1 \left|\acute{\varphi}(\alpha)(s)\right| ds \\
&= \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| ds \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} \right| ds + \int_0^1 \left| \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| ds \\
&= \int_0^1 -\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} ds + \int_0^1 \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&= k_1 + k_2
\end{aligned}$$

où:

$$k_1 = -\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} ds$$

et

$$k_2 = \int_0^1 \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds$$

Ensuite, en intégrant k_1 par parties, on trouve

$$\begin{aligned}
k_1 &= -\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&= -\left[-\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha}}{\alpha} \ln(t(1-s)) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\alpha} ds \\
&= \lim_{s\to 1^-} \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\alpha}(1-s)\ln(t(1-s)) - \frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\alpha} + t^{\alpha-1}\left[-\frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha^2} \right]_0^1 \\
&= \lim_{s\to 1^-} \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\alpha}(1-s)\ln(t(1-s)) - \frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\alpha} + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2} \\
&= 0 - \frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\alpha} + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2} \\
&= -\frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\alpha} + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

et

$$k_2 = \psi(\alpha)\int_0^1 (t(1-s))^{\alpha-1} ds = \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha}\psi(\alpha)$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\acute{\varphi}(\alpha)(s)\|_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{-\frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\alpha}+\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2}+\frac{\psi(\alpha)\,t^{\alpha-1}}{\alpha}\right\} \\ &\leq c_1 \end{aligned}$$

où $0<t<1$ et $1<\alpha<2$

L'inégalité (3.8) devient :

$$\begin{aligned} \|\varphi(\alpha)(s)-\varphi(\overline{\alpha})(s)\|_1 &= \int_0^1\left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right|ds \\ &\leq c_1\left|\alpha-\overline{\alpha}\right| \end{aligned}$$

De même, si on pose $y=\frac{s}{t}$, il s'ensuit que:

$$\int_0^t\left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right|ds=\int_0^t\left|\frac{\left(t\left(1-\frac{s}{t}\right)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\left(t\left(1-\frac{s}{t}\right)\right)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right|ds$$

alors

$$\int_0^1\left|\frac{(t(1-x))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t(1-x))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right|ds\leq c_2\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|$$

D'où

$$I_2\leq M\left\{c_1+c_2\right\}\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|=K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |u(t)-\overline{u}(t)| \leq\; & K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(K_f\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+L_f\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|\right)ds \\ & +\int_0^1\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(K_f\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+L_f\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|\right)ds \end{aligned}$$

Considérons maintenant

$$\begin{aligned} D^\nu u(t) &= D^\nu(I^\alpha f(t,v(t),D^\mu v(t))-t^{\alpha-1}I^\alpha\, f(t,v(t),D^\mu v(t))|_{t=1} \\ &= I^{\alpha-\nu}f(t,v(t),D^\mu v(t))-I^\alpha\, f(t,v(t),D^\mu v(t))|_{t=1}\,D^\nu t^{\alpha-1} \\ &= \int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}f(s,v(s),D^\mu v(s))\,ds \\ &\quad -t^{\alpha-\nu-1}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}f(s,v(s),D^\mu v(s))\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{\nu}u\left(t\right) &= \int_{0}^{t}\frac{\left(t-s\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)ds \\ &-\int_{0}^{1}\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\left(1-s\right)^{\nu}f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)ds \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} D^{\nu}u\left(t\right)-D^{\nu}\overline{u}\left(t\right) &= \int_{0}^{t}\frac{\left(t-s\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\left(f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)-f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right)ds \\ &+\int_{0}^{t}\left[\frac{\left(t-s\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}-\frac{\left(t-s\right)^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma\left(\overline{\alpha}-\nu\right)}\right]f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)ds \\ &-\left\{\int_{0}^{1}\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\left(1-s\right)^{\nu}\left(f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)-f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right)ds\right. \\ &\left.+\int_{0}^{1}\left[\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}-\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma\left(\overline{\alpha}-\nu\right)}\right]\left(1-s\right)^{\nu}f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)ds\right\} \end{aligned}$$

D'aprés les hypothèses (H_1), (3.5) et le fait que $0<\left(1-s\right)^{\nu}<1$, on aura:

$$\begin{aligned} \left|D^{\nu}u\left(t\right)-D^{\nu}\overline{u}\left(t\right)\right| &\leq \int_{0}^{t}\frac{\left(t-s\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\left(\left|f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)-f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right|\right)ds \\ &+\int_{0}^{t}\left|\frac{\left(t-s\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}-\frac{\left(t-s\right)^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma\left(\overline{\alpha}-\nu\right)}\right|\left|f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right|ds \\ &+\int_{0}^{1}\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\left(\left|f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)-f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right|\right)ds \\ &+\int_{0}^{1}\left|\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}-\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma\left(\overline{\alpha}-\nu\right)}\right|\left|f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right|ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|D^{\nu}u\left(t\right)-D^{\nu}\overline{u}\left(t\right)\right| &\leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|+\int_{0}^{t}\frac{\left(t-s\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\left|f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)-f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right|ds \\ &+\int_{0}^{1}\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\left|f\left(s,v\left(s\right),D^{\mu}v\left(s\right)\right)-f\left(s,\overline{v}\left(s\right),D^{\mu}\overline{v}\left(s\right)\right)\right|ds \end{aligned}$$

$$|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)| \leq K|\alpha-\overline{\alpha}|+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(K_f|v(s)-\overline{v}(s)|+L_f|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds$$

$$+\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(K_f|v(s)-\overline{v}(s)|+L_f|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds$$

De la même manière, on peut trouver:

$$|v(t)-\overline{v}(t)| \leq L\left|\beta-\overline{\beta}\right|+\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(K_f|u(s)-\overline{u}(s)|+L_f|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds$$

$$+\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(K_f|u(s)-\overline{u}(s)|+L_f|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds$$

et

$$|D^{\mu}v(t)-Dv(t)| \leq L\left|\beta-\overline{\beta}\right|+\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\left(K_f|u(s)-\overline{u}(s)|+L_f|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds$$

$$+\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\left(K_f|u(s)-\overline{u}(s)|+L_f|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds$$

Enfin, d'aprés (H_2) et (H_3) on trouve:

$$\max\{|u(t)-\overline{u}(t)|+|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)|\} \leq K|\alpha-\overline{\alpha}|$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\max(K_f,L_f)\max\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds$$

$$+\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\max(K_f,L_f)\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds$$

et

$$\max\{|v(t)-\overline{v}(t)|+|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)|\} \leq L\left|\beta-\overline{\beta}\right|$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(t(1-s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}+\frac{(t(1-s))^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\right)\max(K_g,L_g)\max\left(|u(s)-\overline{u}(s)|+|D^{\nu}u(s)-D^{\nu}\overline{u}(s)|\right)ds$$

$$+\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}+\frac{(t-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\right)\max(K_g,L_g)\left(|u(s)-\overline{u}(s)|+|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds$$

donc:

$$\max\{|u(t)-\overline{u}(t)|+|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)|\}+\max\{|v(t)-\overline{v}(t)|+|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)|\} \leq K|\alpha-\overline{\alpha}|$$

$$+L\left|\beta-\overline{\beta}\right|+\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\max\left(K_f,L_f,K_g,L_g\right)\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|\right.$$
$$\left.+\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|+\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^\mu u(s)-D^\mu\overline{u}(s)\right|\right)ds$$
$$+\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right)\max\left(K_f,L_f\right)\max\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|\right)$$
$$+\left(\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{t^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu+1)}\right)\max\left(K_g,L_g\right)\max\left(\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^\nu u(s)-D^\nu\overline{u}(s)\right|\right)$$

En prenant $\Lambda_{K,L}=\max\left(K_f,L_f,K_g,L_g\right)$, on obtient:

$$\max\left\{\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|+\left|D^\nu u(t)-D^\nu\overline{u}(t)\right|\right\}+\max\left\{\left|v(t)-\overline{v}(t)\right|+\left|D^\mu v(t)-D^\mu\overline{v}(t)\right|\right\}\leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|$$
$$+L\left|\beta-\overline{\beta}\right|+\Lambda_{K,L}\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|\right.$$
$$\left.+\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^\mu u(s)-D^\mu\overline{u}(s)\right|\right)ds$$
$$+\Delta\left\{\max\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|\right)+\max\left(\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^\nu u(s)-D^\nu\overline{u}(s)\right|\right)\right\}$$

Alors:

$$(1-\Delta)\left\{\max\left(\left|v(t)-\overline{v}(t)\right|+\left|D^\mu v(t)-D^\mu\overline{v}(t)\right|\right)+\max\left(\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|+\left|D^\nu u(t)-D^\nu\overline{u}(t)\right|\right)\right\}$$
$$\leq K\left|\overline{\alpha}-\alpha\right|+L\left|\beta-\overline{\beta}\right|+\Lambda_{K,L}\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|\right.$$
$$\left.+\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^\mu u(s)-D^\mu\overline{u}(s)\right|\right)ds$$

$$\begin{aligned}\left|\delta(t)\right| &\leq \max\left(\left|v(t)-\overline{v}(t)\right|+\left|D^\mu v(t)-D^\mu\overline{v}(t)\right|\right)+\max\left(\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|+\left|D^\nu u(t)-D^\nu\overline{u}(t)\right|\right)\\ &\leq \frac{K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|}{(1-\Delta)}+\frac{L\left|\beta-\overline{\beta}\right|}{(1-\Delta)}+\frac{\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|\right.\end{aligned}$$
$$\left.+\left|D^\mu v(s)-D^\mu\overline{v}(s)\right|+\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^\mu u(s)-D^\mu\overline{u}(s)\right|\right)ds$$

Donc:

$$\left|\delta(t)\right|\leq\frac{K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|}{(1-\Delta)}+\frac{L\left|\beta-\overline{\beta}\right|}{(1-\Delta)}+\frac{2\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left|\delta(s)\right|ds$$

si on pose:

$$c:=\max\left(\frac{K}{1-\Delta},\frac{L}{1-\Delta}\right)\text{ et }\lambda=\frac{2\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}$$

on trouve que:

$$\delta(t) \leq c\left(|\alpha - \overline{\alpha}| + \left|\beta - \overline{\beta}\right|\right) + \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} |\delta(s)|\, ds$$

ce qui implique que:

$$0 \leq \delta(t) \leq c\left(|\alpha - \overline{\alpha}| + \left|\beta - \overline{\beta}\right|\right) E_{\alpha-\nu}(\lambda) < \epsilon.$$

Donc, d'après la définition 3.3.1, le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ est stable. ■

CHAPITRE 4

Système d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires (avec des données non bornées)

4.1 Introduction

Dans cette section, on va mettre des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité du système d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires.

Ce système avec des données bornées à été déjà traité par X. Su dans [24]. Notre but est de considérer le même système avec des données non bornées.

4.2 Existence de la solution

Pour montrer l'existence des solutions en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on a le théorème suivant:

Théorème 4.2.1 *Soient f, g : $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues, supposons que les hypothèses sont satisfaites,*

(H_1) Il existe $a(t)$, $b(t)$: $[a,b]\to\mathbb{R}^+$ telles que:

$$|f(t,x,y)|\leq a(t)(|x|+|y|)$$
$$|g(t,x,y)|\leq b(t)(|x|+|y|)$$

(H_2) Ils existent deux constantes positives m et n telles que:

$$\left(\int_0^1 \psi_1(s,\alpha,\nu)^{(1-r)q}\, a^q(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\leq m,\quad \left(\int_0^1 \psi_2(s,\beta,\mu)^{(1-\overline{r})q}\, b^q(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\leq n$$

où $\psi_1(s,\alpha,\nu)=\frac{(1-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}$, $\psi_2(s,\beta,\mu)=\frac{(1-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}$et $q,r,\overline{r}>1$

(H_3) $\max\left(c_a+2mc_{(\alpha,\nu)},c_b+2nc_{(\beta,\mu)}\right)\leq 1$

$$\text{où}\begin{cases} c_a=\max_{t\in I}\int_0^1|G_1(t,s)|\,a(t)\,ds,\, c_b=\max_{t\in I}\int_0^1|G_2(t,s)|\,b(t)\,ds\\ c_{(\alpha,\nu)}=\frac{1}{(\Gamma(\alpha-\nu+1))^r}\text{ et } c_{(\beta,\mu)}=\frac{1}{(\Gamma(\beta-\mu+1))^{\overline{r}}}\end{cases}$$

Alors, le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ admet une solution.

Preuve. Considérons l'opérateur T donné par (3.4)

et soit:

$$U=\left\{(u,v)\setminus(u,v)\in X\times Y,\|(u,v)\|_{X\times Y}\leq R\right\}$$

où $R>0$

On va montrer que $T:U\to U$ est compact, et pour ce faire il suffit de démontrer qu'il est relativement compact. en effet,

i) Montrons que $T(U)$ est borné

Soit $(u,v)\in U$

$$\begin{aligned}|T_1v(t)| &= \left|\int_0^1 G_1(t,s)\,f(s,v(s),D^\mu v(s))\,ds\right|\\ &\leq \int_0^1|G_1(t,s)|\,|f(s,v(s),D^\mu v(s))|\,ds\end{aligned}$$

D'après (H_1), on peut écrire:

$$\begin{aligned}
|T_1 v(t)| &\leq \int_0^1 |G_1(t,s)|\, a(s) \left(|v(s)| + |D^\mu v(s)|\right) ds \\
&\leq \int_0^1 |G_1(t,s)|\, a(s) \left(\max_{s\in I} |v(s)| + \max_{s\in I} |D^\mu v(s)|\right) ds \\
&\leq R \int_0^1 |G_1(t,s)|\, a(s)\, ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|D^\nu T_1 v(t)| &= \left| D^\nu \int_0^1 G_1(t,s)\, f(s, v(s), D^\mu v(s))\, ds \right| \\
&= \left| D^\nu I^\alpha f(t, v(t), D^\mu v(t)) - D^\nu t^{\alpha-1} I^\alpha \left(f(t, v(t), D^\mu v(t))\right)_{t=1} \right|
\end{aligned}$$

D'après (2.3), (2.9), (H_1) et le fait que $\left(0 < (1-s)^\nu < 1\right)$, on trouve

$$|D^\nu T_1 v(t)| = \left| I^{\alpha-\nu} f(t, v(t), D^\mu v(t)) - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} t^{\alpha-\nu-1} I^\alpha \left(f(t, v(t), D^\mu v(t))\right)_{t=1} \right|$$

$$= \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f(s, v(s), D^\mu v(s))\, ds \right.$$

$$\left. - t^{\alpha-\nu-1} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f(s, v(s), D^\mu v(s))\, ds \right|$$

$$\leq R \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} a(s)\, ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} a(s)\, ds \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2R \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} a(s)\, ds \\
&= 2R \int_0^1 \psi_1(s, \alpha, \nu)\, a(s)\, ds
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_1(s,\alpha,\nu)\, a(s)\, ds &\leq \int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^r (\psi_1(t,s,\alpha,\nu))^{1-r} a(s)\, ds \\
&\leq \left(\int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{rp}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{(1-r)q} a^q(s)\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq m \left(\int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{rp}\, ds\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Si nous posons $rp = 1$, on a:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_1(s,\alpha,\nu)\, a(s)\, ds &\leq m \left(\int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{rp}\, ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= m \left(\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} ds\right)^r \\
&= m \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right)^r
\end{aligned}$$

Alors:

$$|D^\nu T_1 v(t)| \leq 2Rm \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right)^r.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|T_1 v\|_X &= \max_{t\in[0,1]} |T_1 v(t)| + \max_{t\in[0,1]} |D^\mu T_1 v(t)| \\
&\leq R \left(\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |G_1(t,s)|\, a(t)\, ds + 2m \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right)^r\right)
\end{aligned}$$

De la même manière, on démontre que:

$$\|T_2 u\|_Y \leq R \left(\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |G_2(t,s)|\, b(t)\, ds + 2n \left(\frac{1}{\Gamma(\beta-\mu+1)}\right)^{\overline{r}}\right)$$

On déduit que:

$$\|T(u,v)\|_{X\times Y} \leq R \max\left(c_a + 2mc_{(\alpha,\nu)}, c_b + 2nc_{(\beta,\mu)}\right)$$

D'après (H_3) cela implique que:

$$\|T(u,v)\|_{X\times Y} \leq R$$

Donc $T(u,v) \in U$.

ii) Montrons maintenant que $T(U)$ est..............................

Soit $t, \tau \in [0,1]$ (où $t < \tau$)

$$\begin{aligned}
|T_1 v(\tau) - T_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 (G_1(\tau, s) - G_1(t, s)) f(s, v(s), D^\mu v(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |G_1(\tau, s) - G_1(t, s)| \, |f(s, v(s), D^\mu v(s))| \, ds
\end{aligned}$$

d'après (H_1) et en utilisant l'inégalité de Hölder, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
|T_1 v(\tau) - T_1 v(t)| &\leq C \left[\int_0^t |G_1(\tau, s) - G_1(t, s)| \, a(s)\, ds + \int_t^\tau |G_1(t, s) - G_1(\tau, s)| \, a(s)\, ds \right. \\
&\quad \left. + \int_\tau^1 |G_1(\tau, s) - G_1(t, s)| \, a(s)\, ds \right] \\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left((\tau - s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} + (\tau(1-s))^{\alpha-1} \right. \right. \\
&\quad \left. - (t(1-s))^{\alpha-1} a(s)\, ds \right) \\
&\quad + \int_t^\tau \left((\tau - s)^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1} + (\tau(1-s))^{\alpha-1} \right) a(s)\, ds \\
&\quad \left. \int_\tau^1 \left((\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1} \right) a(s)\, ds \right] \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right) a(s)\, ds + \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} a(s)\, ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s)\, ds \right] \\
&\leq C \left\{ \frac{m}{(\Gamma(\alpha+1))^r} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right) + \frac{m}{(\Gamma(\alpha+1))^r} \left(\tau^\alpha - t^\alpha \right) \right\} \\
&= \frac{Cm}{(\Gamma(\alpha+1))^r} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} + \tau^\alpha - t^\alpha \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|D^{\nu}T_1v(\tau)-D^{\nu}T_1v(t)| &= \bigg| I^{\alpha-\nu}(\tau,v(\tau),D^{\mu}v(\tau))-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\tau^{\alpha-\nu-1}I^{\alpha}\ f(\tau,v(\tau),D^{\mu}v(\tau))|_{\tau=1} \\
&\quad -I^{\alpha-\nu}f(t,v(t),D^{\mu}v(t))-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)}t^{\alpha-\nu-1}I^{\alpha}\ f(t,v(t),D^{\mu}v(t))|_{t=1}\bigg| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left[\int_0^{\tau}|(\tau-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\right. \\
&\quad \left.-\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\bigg|\right] \\
&\quad +\frac{(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1})}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))|\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left[\bigg|\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\right. \\
&\quad -\int_0^{\tau}(t-s)^{\alpha-\upsilon-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\bigg| \\
&\quad +\bigg|\int_0^{\tau}(t-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds \\
&\quad \left.-\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-\nu-1}f(s,v(s),D^{\mu}v(s))\,ds\bigg|\right] \\
&\quad +\frac{(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1})}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))|\,ds \\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^{\tau}\left((\tau-s)^{\alpha-\nu-1}-(t-s)^{\alpha-\nu-1}\right)a(s)\,ds \\
&\quad +\int_t^{\tau}(t-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\,ds+\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}a(s)\,ds
\end{aligned}$$

$$|D^{\nu}T_1v(\tau)-D^{\nu}T_1v(t)|=\frac{R}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\,ds-\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-\nu-1}a(s)\,ds\right.$$

$$\left.+\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}a(s)\,ds\right\}$$

$$\leq\frac{C}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{\frac{m}{(\alpha-\nu)^r}\left(\tau^{\alpha-\nu}-t^{\alpha-\nu}\right)+\frac{m}{\alpha^r}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{Cm}{(\alpha-\nu)^r\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu}-t^{\alpha-\nu}\right)+\frac{Cm}{\alpha^r\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)$$

De la même manière, on démontre que

$$|T_2u(\tau)-T_2u(t)|\leq\frac{Cn}{(\Gamma(\beta+1))^{\overline{r}}}\left(\tau^{\beta-1}-t^{\beta-1}+\tau^{\beta}-t^{\beta}\right)$$

$$|D^{\mu}T_2u(\tau)-D^{\mu}T_2u(t)|\leq\frac{Cn}{(\beta-\mu)^{\overline{r}}\Gamma(\beta-\mu)}\left(\tau^{\beta-\mu}-t^{\beta-\mu}\right)+\frac{nC}{\beta^{\overline{r}}\Gamma(\beta-\mu)}\left(\tau^{\beta-\mu-1}-t^{\beta-\mu-1}\right).$$

Ce qui montre que T est équicontinue. On conclut, d'après le théorème du point fixe de Schauder que l'opérateur T admet au moins un point fixe qui est une solution du $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$. ■

4.3 Stabilité du système

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité du système par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire

$$\begin{cases}\left(\int_0^1\psi(t,s,\alpha,\overline{\alpha})^{(1-r)q}h_1^q(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\leq M, & \left(\int_0^1\psi\left(t,s,\beta,\overline{\beta}\right)^{(1-\overline{r})q}h_2^q(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\leq N\\ \psi_{(\alpha,\nu)}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}, & \psi_{(\beta,\mu)}=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\beta-\mu+1)}\\ q,r,\overline{r}>1\end{cases}$$

où $\psi(t,s,\rho_i,\overline{\rho_i})=\left|\frac{(t(1-s))^{\rho_i-1}}{\Gamma(\rho_i)}-\frac{(t(1-s))^{\overline{\rho_i}-1}}{\Gamma(\overline{\rho_i})}\right|$ pour $i=1,2\,(\rho_1=\alpha,\ \rho_2=\beta)$

Théorème 4.3.1 *Etant donné f et g deux fonctions continues sur $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Supposons que*

(S_1) *Il existe* K_f, K_g, L_f *et* L_g *des constantes positives telles que:*

$$\begin{aligned}\left|f\left(t,x_1,y_1\right)-f\left(t,x_2,y_2\right)\right| &\leq K_f\left|x_1-x_2\right|+L_f\left|y_1-y_2\right| \\ \left|g\left(t,x_1',y_1'\right)-g\left(t,x_2',y_2'\right)\right| &\leq K_g\left|x_1'-x_2'\right|+L_g\left|y_1'-y_2'\right|\end{aligned}$$

(S_2) *Il existe* $h_1(t)$, $h_2(t):[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^+$, *satisfaisant:*

$$\begin{aligned}\left|f\left(t,x,y\right)\right| &\leq h_1(t)\left(|x|+|y|\right), \\ \left|g\left(t,x,y\right)\right| &\leq h_2(t)\left(|x|+|y|\right)\end{aligned}$$

pour tout $x,y\in\mathbb{R}$

(S_3) $\alpha\leq\beta$, $\mu\leq\nu$ *et* $\alpha-\nu\leq\beta-\mu$

(S_4) $\Delta:=\max\left(K_f,L_f,K_g,L_g\right)\max\left\{\psi_{(\alpha,\nu)},\psi_{(\beta,\mu)}\right\}<1$

Alors, le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ *est stable.*

Preuve. Le lemme (1.2.1) implique que:

$$\begin{aligned}u(t)-\overline{u}(t)=&\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)-f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right]ds \\ &-\int_0^1\frac{\left(t(1-s)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)-f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right]ds \\ &+\int_0^t\left[\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right]f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)ds \\ &-\int_0^1\left[\frac{\left(t(1-s)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\left(t(1-s)\right)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right]f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)ds\end{aligned}$$

Il vient:

$$\begin{aligned}\left|u(t)-\overline{u}(t)\right| \leq& \int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)-f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right|ds \\ &+\int_0^1\frac{\left(t(1-s)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)-f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right|ds \\ &+\int_0^t\left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right|\left|f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)\right|ds \\ &+\int_0^1\left|\frac{\left(t(1-s)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\left(t(1-s)\right)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right|\left|f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right|ds \\ =& \; I_1+I_2\end{aligned}$$

où

$$I_1 = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \overline{v}(s), D^\mu \overline{v}(s)) \right| ds$$
$$+ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| f(s, v(s), D^\mu v(s)) - f(s, \overline{v}(s), D^\mu \overline{v}(s)) \right| ds$$

et

$$I_2 = \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| \left| f(s, v(s), D^\mu v(s)) \right| ds$$
$$+ \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| \left| f(s, \overline{v}(s), D^\mu \overline{v}(s)) \right| ds$$

D'après (S_1), on trouve:

$$\begin{aligned} I_1 \ \leq\ & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f \left| v(s) - \overline{v}(s) \right| + L_f \left| D^\mu v(s) - D^\mu \overline{v}(s) \right| \right) ds \\ & \int_0^t \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f \left| v(s) - \overline{v}(s) \right| + L_f \left| D^\mu v(s) - D^\mu \overline{v}(s) \right| \right) ds \end{aligned}$$

Et en utilisant (S_2), on déduit que:

$$\begin{aligned} I_2 \leq & \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| h_1(s) \left(|v(s)| + |D^\mu v(s)| \right) ds \\ & + \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| h_1(s) \left(|v(s)| + |D^\mu v(s)| \right) ds \\ & \leq C \left\{ \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| h_1(s)\, ds + \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| h_1(s)\, ds \right\} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(t, s, \alpha, \overline{\alpha})\, h_1(s)\, ds & \leq \int_0^1 (\psi(t, s, \alpha, \overline{\alpha}))^r (\psi(t, s, \alpha, \overline{\alpha}))^{1-r} h_1(s)\, ds \\ & \leq \left(\int_0^1 (\psi(t, s, \alpha, \overline{\alpha}))^{rp} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (\psi(t, s, \alpha, \overline{\alpha}))^{(1-r)q} h_1^q(s)\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq M \left(\int_0^1 (\psi(t, s, \alpha, \overline{\alpha}))^{rp} ds \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

si nous posons $rp = 1$,on a:

$$\int_0^1 \psi(t; s, \alpha, \overline{\alpha}) h_1(s) ds = \left(\int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right|^{rp} ds \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds \right)^{r}$$

En vertu du théorème de la moyenne, on obtient, pour tout $1 < \alpha, \overline{\alpha} < 2$

où:

$$\varphi_1(\alpha)(s) = \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

En posant $x = t(1-s)$

elle s'écrit

$$\varphi_1(\alpha)(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

L'inégalité (3.6) devient:

$$(\|\varphi_1(\alpha)(s) - \varphi_1(\overline{\alpha})(s)\|_1)^r = \left(\int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds \right)^r$$
$$\leq c_{(1,\alpha)} |\alpha - \overline{\alpha}|^r$$

où $c_{(1,\alpha)} := c_1^r$

De même, si on pose $y = \dfrac{s}{t}$ il s'ensuit que:

$$\int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds = \int_0^t \left| \frac{\left(t\left(1-\frac{s}{t}\right)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\left(t\left(1-\frac{s}{t}\right)\right)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds$$

Alors,

$$\left(\int_0^1 \left| \frac{(t(1-x))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-x))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| dx \right)^r \leq c_{(2,\overline{\alpha})} |\alpha - \overline{\alpha}|^r$$

où: $c_{(2,\overline{\alpha})} := c_2^r$

D'où:

$$I_2 \leq M \left\{ c_{(1,\alpha)} + c_{(2,\overline{\alpha})} \right\} |\alpha - \overline{\alpha}|^r = K |\alpha - \overline{\alpha}|^r$$

Par suite

$$|u(t)-\overline{u}(t)| \leq K|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(K_{f}|v(s)-\overline{v}(s)|+L_{f}|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds$$
$$+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(K_{f}|v(s)-\overline{v}(s)|+L_{f}|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds$$

D'après (S_1), (S_2) et le fait que $0<(1-s)^{\nu}<1$, on aboutit à:

$$\begin{aligned}|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)| \leq{}& \int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s))|\right)ds\\
&+\int_{0}^{t}\left|\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}-\frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\overline{\alpha}-\nu)}\right||f(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s))|\,ds\\
&+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s))|\right)ds\\
&+\int_{0}^{1}\left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}-\frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\overline{\alpha}-\nu)}\right||f(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s))|\,ds\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)| \leq{}& K|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s))|\,ds\\
&+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}|f(s,v(s),D^{\mu}v(s))-f(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s))|\,ds\\
\leq{}& K|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(K_{f}|v(s)-\overline{v}(s)|+L_{f}|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds\\
&+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(K_{f}|v(s)-\overline{v}(s)|+L_{f}|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right)ds\end{aligned}$$

De la même manière, on peut trouver que:

$$\begin{aligned}|v(t)-\overline{v}(t)| \leq{}& K\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(K_{f}|u(s)-\overline{u}(s)|+L_{f}|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds\\
&+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(K_{f}|u(s)-\overline{u}(s)|+L_{f}|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|D^{\mu}v(t)-Dv(t)| \leq{}& K\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\left(K_{f}|u(s)-\overline{u}(s)|+L_{f}|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds\\
&+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\left(K_{f}|u(s)-\overline{u}(s)|+L_{f}|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds\end{aligned}$$

Enfin,

$$\max_{t\in[0,1]}\left[\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right|\right]\leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r}$$

$$+\max\left(K_f,L_f\right)\int_0^1\left(\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}+\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)}\right)\max_{s\in[0,1]}\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)ds$$

$$+\max\left(K_f,L_f\right)\int_0^t\left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)\right]ds$$

et

$$\max_{t\in[0,1]}\left(\left|v(t)-\overline{v}(t)\right|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|\right)\leq L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}$$

$$+\max\left(K_g,L_g\right)\int_0^1\left(\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}+\frac{\left(t\left(1-s\right)\right)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma\left(\beta-\mu\right)}\right)\max_{s\in[0,1]}\left(\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^{\nu}u(s)-D^{\nu}\overline{u}(s)\right|\right)ds$$

$$+\int_0^t\left[\left(\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}+\frac{(t-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\right)\max\left(K_g,L_g\right)\left(\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)\right|\right)\right]ds$$

On définit la fonction δ par:

$$\left|\delta(t)\right|=\delta(t):=\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right|+\left|v(t)-\overline{v}(t)\right|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|$$

D'après les hypothèses (S_3), (S_4) on obtient:

$$\left|\delta(t)\right|\leq\max_{t\in[0,1]}\left[\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right|\right]+\max_{t\in[0,1]}\left[\left|v(t)-\overline{v}(t)\right|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|\right]$$

$$\leq\ K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r}+L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}+\int_0^t\left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\max\left(K_f,L_f,K_g,L_g\right)\right.$$

$$\left.\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|+\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)\right|\right)\right]ds$$

$$+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right)\max\left(K_f,L_f\right)\max\left(\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\beta-\mu+1)}\right)\max\left(K_g,L_g\right)\max\left(\left|u(s)-\overline{u}(s)\right|+\left|D^{\nu}u(s)-D^{\nu}\overline{u}(s)\right|\right)$$

En prenant $\Lambda_{K,L} = \max\left(K_f, L_f, K_g, L_g\right)$, on obtient

$$|\delta(t)| \leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r} + L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}} + \Lambda_{K,L}\int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)$$

$$|v(s)-\overline{v}(s)| + |D^{\mu}v(s) - D^{\mu}\overline{v}(s)| + |u(s)-\overline{u}(s)| + |D^{\mu}u(s) - D^{\mu}\overline{u}(s)|\,ds$$

$$+\Delta\left[\max_{s\in[0,1]}\left(|v(s)-\overline{v}(s)| + |D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)|\right) + \max_{s\in[0,1]}\left(|u(s)-\overline{u}(s)| + |D^{\nu}u(s)-D^{\nu}\overline{u}(s)|\right)\right]$$

Alors:

$$(1-\Delta)\left[\max_{t\in[0,1]}\left(|v(t)-\overline{v}(t)| + |D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)|\right) + \max_{t\in[0,1]}\left(|u(t)-\overline{u}(t)| + |D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)|\right)\right]$$

$$\leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r} + L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}} + \Lambda_{K,L}\int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\left(|v(s)-\overline{v}(s)|\right.$$

$$\left.+|D^{\mu}v(s) - D^{\mu}\overline{v}(s)| + |u(s)-\overline{u}(s)| + |D^{\mu}u(s) - D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)ds$$

$$|\delta(t)| \leq \max_{t\in[0,1]}\left(|v(t)-\overline{v}(t)| + |D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)|\right) + \max_{t\in[0,1]}\left(|u(t)-\overline{u}(t)| + |D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)|\right)$$

$$\leq \frac{K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r}}{(1-\Delta)} + \frac{L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\tilde{r}}}{(1-\Delta)} + \frac{\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}\int_0^t \left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\right.$$

$$\left.\left(|v(s)-\overline{v}(s)| + |D^{\mu}v(s) - D^{\mu}\overline{v}(s)| + |u(s)-\overline{u}(s)| + |D^{\mu}u(s) - D^{\mu}\overline{u}(s)|\right)\right]ds$$

Donc

$$|\delta(t)| \leq \frac{K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r}}{(1-\Delta)} + \frac{L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}}{(1-\Delta)} + \frac{2\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}|\delta(s)|\,ds$$

si on pose:

$$c := \max\left(\frac{K}{1-\Delta}, \frac{L}{1-\Delta}\right) \text{ et } \lambda = \frac{2\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}.$$

D'où:

$$\delta(t) \leq c\left(|\alpha-\overline{\alpha}| + \left|\beta-\overline{\beta}\right|\right) + \lambda\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}|\delta(s)|\,ds,$$

ce qui implique que:

$$0 \leq \delta(t) \leq c\left(|\alpha-\overline{\alpha}| + \left|\beta-\overline{\beta}\right|\right)E_{\alpha-\nu}(\lambda) < \epsilon.$$

Enfin, d'après la définition 3.3.1, le système $(3.1)_{(\alpha,\beta)}$ et stable. ■

CHAPITRE 5

Conclusions

Conclusions

Dans cette thèse, notre objectif principal était l'étude de la stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires à multi-ordres.

D'abord, on a présenté des résultats sur l'existence de la solution de ce système lorsque la partie non linéaire est représentée par des fonctions bornées.

Notre premier résultat concernant la stabilité de la solution du système en question, s'appuie essentiellement sur l'inégalité de Gronwall de type fractionnaire.

D'autre part, on a déterminé des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité du même système, lorsque les données dans la partie non linéaire sont non bornées.

Annexe Copie de l'article publié

Global Journal of Pure and Applied Mathematics.
ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 4 (2016), pp. 3339-3355

http://www.ripublication.com/gjpam.htm

Stability analysis of a coupled system of nonlinear fractional differential equations

Sabah Yessaad Mokhtari and Lamine Nisse

Preparatory School of Economics and Management,
Laboratory of Applied Mathematics,
Badji Mokhtar University–Annaba, Algeria.
E-mail: yessadsabah@gmail.com, laminisse@gmail.com

Abstract

Our aim in this work is to study the stability of the solution of a boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations. By using the Gronwall inequality of fractional type, we can derive sufficient conditions for the stability which depends on orders of fractional derivatives.

AMS subject classification:
Keywords: Fractional derivative, Boundary value problem, Green's function, Schauder fixed-point theorem, Gronwall-type inequality.

1. Introduction

The fractional calculus is a field of mathematics, which studies the integral and derivative operators with the possibility that a differential operator be of a fractional order.

In recent years, fractional differential equations have attracted the attention of many researchers due to their various applications in several fields of science and engineering, for example: electromagnetics, viscoelasticity and acoustics, (see [1, 3, 4, 8, 11]).

In [14] X. Su has studied the following system,

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f\left(t, v(t), D^{\mu}v(t)\right), \quad 0 < t < 1 \\ D^{\beta}v(t) = g\left(t, u(t), D^{\nu}u(t)\right), \quad 0 < t < 1 \\ \qquad u(0) = u(1) = v(1) = v(0) = 0, \end{cases} \tag{$(1)_{(\alpha,\beta)}$}$$

where $1 < \alpha, \beta < 2, \alpha - \nu \geq 1, \beta - \mu \geq 1, \nu, \mu > 0, f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are given continuous functions and D^{α} is the standard Rieman–Liouville fractional derivative.

To show the existence of solutions by using the corresponding Green's function and the Schauder fixed point theorem, the author assume that f and g are bounded.

Motivated by the work of X. Su (see [14]), here we consider the system $(1)_{(\alpha,\beta)}$ with f and g unbounded.

First, in section 2, we deduct an integral equation of Fredholm type, equivalent to problem $(1)_{(\alpha,\beta)}$. Then, in section 3, by using the Schauder fixed point theorem we show the existence of solutions. Finally, in section 4, we consider the stability of solutions with respect to orders of fractional derivatives of the system $(1)_{(\alpha,\beta)}$.

2. Preliminaries

In this section, we present some necessary definitions and results of fractional calculus theory. Let $\alpha > 0$ and $n = [\alpha] + 1 = N + 1$, where N is the smallest integer less than or equal to α, Γ is the gamma function, $n \in \mathbb{N}$, and $x \in [a, b]$.

Definition 2.1. ([8]) The Riemann–Liouville integral fractional of a function $f \in L^1[a, b]$ of order $\alpha \in \mathbb{R}^+$ is defined by

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (x - t)^{\alpha - 1} f(t)\, dt. \tag{2}$$

Definition 2.2. ([8]) The Riemann–Liouville fractional derivative of order of $\alpha \in (n - 1, n)$ of the function f is defined by

$$D_a^{\alpha} f(x) \ := D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t)\ dt\ . \tag{3}$$

Lemma 2.3. ([8]) Let $\alpha, \beta > 0$, $f \in C[a, b]$, and assume that the Riemann–Liouville fractional integral of f exists, then we have

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x).$$

Lemma 2.4. ([8]) Let $\alpha > \beta > 0$ and $f \in L^1[a, b]$, then almost everywhere in $[a, b]$, we have

$$D_a^{\beta} \left(I_a^{\alpha} f \right)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x). \tag{4}$$

Lemma 2.5. ([4]) (Gronwall inequality of fractional type) Let α, ϵ_1 and $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_+ (0 < t < 1)$, suppose that $\delta : [0, T] \to \mathbb{R}$ is a continuous function such that

$$|\delta(x)| \leq \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} |\delta(t)|\, dt; \forall x \in [0, T],$$

then

$$|\delta(x)| \leq \epsilon_1 E_{\alpha} \left(\epsilon_2 T^{\alpha} \right),$$

E_α is the Mittag-Leffler function:

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0).$$

Next, we define the space

$$X \times Y = \left\{ (u, v) : (u, v) \in (C[0, 1])^2 \text{ et } \|(u, v)\|_{X \times Y} = \max\{\|u\|_X, \|v\|_Y\} \right\}, \quad (5)$$

where,

$$\|u\|_X = \max_{t\in[0,1]} |u(t)| + \max_{t\in[0,1]} \left|D^\nu u(t)\right|,$$

$$\|v\|_Y = \max_{t\in[0,1]} |v(t)| + \max_{t\in[0,1]} \left|D^\mu v(t)\right|.$$

Lemma 2.6. ([10]) $\left(X \times Y, \|(u, v)\|_{X \times Y}\right)$ is a Banach space.

Lemma 2.7. ([10]) If $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous, then $(u, v) \in X \times Y$ is a solution of $(1)_{(\alpha,\beta)}$ if and only if $(u, v) \in X \times Y$ is a solution of the following system:

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^1 G_1(t, s) f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds, \\ v(t) = \int_0^1 G_2(t, s) g\left(s, u(s), D^\nu u(s)\right) ds, \end{cases} \quad (6)$$

where, for i=1, 2, $\sigma_1 = \alpha$ and $\sigma_2 = \beta$

$$G_i(t, s) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\sigma_i - 1} - [t(1-s)]^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)}, s \le t \\ \dfrac{-[t(1-s)]^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)}, t \le s \end{cases} \quad (7)$$

Here, (G_1, G_2) is the Green's function of the system $(1)_{(\alpha,\beta)}$.

3. Existence of the system

In the following theorem, we prove the exitence of solutions for the fractional boundary value problem $(1)_{(\alpha,\beta)}$.

Theorem 3.1. Let $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be two continuous functions, where,

$$\begin{aligned}
p, q, r, \overline{r} > 1, \psi_1 (s, \alpha, \nu) &= \frac{(1-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)},\\
\psi_2 (s, \beta, \mu) &= \frac{(1-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)},\\
c_a &= \max_{t\in I} \int_0^1 |G_1 (t, s)| \, a(t) \, ds,\\
c_b &= \max_{t\in I} \int_0^1 |G_2 (t, s)| \, b(t) \, ds,\\
c_{(\alpha,\nu)} &= \frac{1}{(\Gamma(\alpha-\nu+1))^r}
\end{aligned}$$

and

$$c_{(\beta,\mu)} = \frac{1}{(\Gamma(\beta-\mu+1))^{\overline{r}}},$$

Such that, (H_1) There exists $a(t), b(t)$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ such that,

$$\begin{aligned}
|f (t, x, y)| &\le a(t) (|x| + |y|),\\
|g (t, x, y)| &\le b(t) (|x| + |y|),
\end{aligned}$$

(H_2) There exists positive constants m, n such that, (H_3)

$$\max \left(c_a + 2mc_{(\alpha,\nu)}, c_b + 2nc_{(\beta,\mu)} \right) \le 1,$$

Then, the system $(1)_{(\alpha,\beta)}$ has a solution.

Proof. We use the Schauder fixed-point theorem, to prove this result, let us consider the space

$$U = \left\{ (u, v) \setminus (u, v) \in X \times Y, \|(u, v)\|_{X\times Y} \le R \right\},$$

where $X \times Y$ is the space defined by (5) and $R > 0$.

Let $T : X \times Y \to X \times Y$ be the operator defined as

$$\begin{aligned}
T (u, v) (t) &= \left(\int_0^1 G_1 (t, s) f \left(s, v(s), D^{\mu} v(s)\right) ds, \int_0^1 G_2 (t, s) f \left(s, u(s), D^{\nu} u(s)\right) ds \right)\\
&=: (T_1 v(t), T_2 u(t)).
\end{aligned}$$

We prove that $T : U \to U$ $(U \subset X \times Y)$ is bounded for any $(u, v) \in U$. Using (4),

(H_1) and $D^{\nu}t^{\alpha-1}=\dfrac{\Gamma(\alpha)\,t^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}$, we obtain,

$$\begin{aligned}
|T_1 v(t)| &= \left|\int_0^1 G_1(t,s)\, f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) ds\right| \\
&\leq \int_0^1 |G_1(t,s)| \left|f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right)\right| ds \\
&\leq \int_0^1 |G_1(t,s)|\, a(s)\left(|v(s)| + \left|D^{\mu}v(s)\right|\right) ds \\
&\leq \int_0^1 |G_1(t,s)|\, a(s)\left(\max_{s\in[0,1]}|v(s)| + \max_{s\in[0,1]}\left|D^{\mu}v(s)\right|\right) ds \\
&\leq R\int_0^1 |G_1(t,s)|\, a(s)\, ds,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left|D^{\nu}T_1 v(t)\right| &= \left|D^{\nu}I^{\alpha} f\left(t, v(t), D^{\mu}v(t)\right) - D^{\nu}t^{\alpha-1}I^{\alpha}\left(f\left(t, v(t), D^{\mu}v(t)\right)\right)_{t=1}\right| \\
&= \Big|I^{\alpha-\nu} f\left(t, v(t), D^{\mu}v(t)\right) \\
&\quad -\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)}t^{\alpha-\nu-1}I^{\alpha}\left(f\left(t, v(t), D^{\mu}v(t)\right)\right)_{t=1}\Big| \\
&= \Big|\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) ds \\
&\quad -t^{\alpha-\nu-1}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) ds\Big| \\
&\leq R\left\{\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}a(s)\, ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}a(s)\, ds\right\} \\
&\leq 2R\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}a(s)\, ds \\
&= 2R\int_0^1 \psi_1(s,\alpha,\nu)\, a(s)\, ds,
\end{aligned}$$

we use the Minkowiski's inequality for $p, q > 1$ and (H_2), we have

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_1(s,\alpha,\nu)\, a(s)\, ds &= \int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{r} (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{1-r} a(s)\, ds \\
&\leq \left(\int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{rp} ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (\psi_1(s,\alpha,\nu))^{(1-r)q} a^{q}(s)\, ds\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\leq m\left(\int_0^1 \left(\psi_1\left(s,\alpha,\nu\right)\right)^{rp} ds\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= m\left(\int_0^1 \left(\psi_1\left(s,\alpha,\nu\right)\right)^{rp} ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

if we set, $rp = 1$, we have

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_1\left(s,\alpha,\nu\right) a\left(s\right) ds &\leq m\left(\int_0^1 \left(\psi_1\left(s,\alpha,\nu\right)\right)^{rp} ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= m\left(\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma\left(\alpha-\nu\right)} ds\right)^{r} \\ &= m\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\nu+1\right)}\right)^{r}.\end{aligned}$$

Then,

$$\left|D^{\nu} T_1 v\left(t\right)\right| \leq 2Rm\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\nu+1\right)}\right)^{r}.$$

Thus,

$$\begin{aligned}\|T_1 v\|_X &= \max_{t\in[0,1]} \left|T_1 v\left(t\right)\right| + \max_{t\in[0,1]} \left|D^{\mu} T_1 v\left(t\right)\right| \\ &\leq R\left(\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|G_1\left(t,s\right)\right| a\left(t\right) ds + 2m\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\nu+1\right)}\right)^{r}\right), \qquad (8)\end{aligned}$$

similary, we can prove that

$$\|T_2 u\|_Y \leq R\left(\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|G_2\left(t,s\right)\right| b\left(t\right) ds + 2n\left(\frac{1}{\Gamma\left(\beta-\mu+1\right)}\right)^{\overline{r}}\right).$$

Finally, according to (8), (9) and (H_3), we obtain

$$\|T\left(u,v\right)\|_{X\times Y} \leq R \max\left(c_a + 2mc_{(\alpha,\nu)}, c_b + 2nc_{(\beta,\mu)}\right) \leq R.$$

Now, we show that T is a completely continuous operator. Let $t,\tau \in [0,1]$ $(t<\tau)$, then, by using (7) and (H_1) , we have

$$\begin{aligned}
|T_1 v(\tau) - T_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 (G_1(\tau,s) - G_1(t,s)) f\left(s, v(s), D^{\mu} v(s)\right) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |G_1(\tau,s) - G_1(t,s)| \left| f\left(s, v(s), D^{\mu} v(s)\right)\right| ds \\
&= C \left[\int_0^t |G_1(\tau,s) - G_1(t,s)| \, a(s) \, ds \right. \\
&\quad + \int_t^{\tau} |G_1(t,s) - G_1(\tau,s)| \, a(s) \, ds \\
&\quad \left. + \int_{\tau}^1 |G_1(\tau,s) - G_1(t,s)| \, a(s) \, ds \right] \\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left((\tau - s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} + (\tau(1-s))^{\alpha-1} \right. \right. \\
&\quad \left. - (t(1-s))^{\alpha-1} a(s) \, ds \right) \\
&\quad + \int_t^{\tau} \left((\tau - s)^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1} + (\tau(1-s))^{\alpha-1} \right) a(s) \, ds \\
&\quad \left. \int_{\tau}^1 \left((\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1} \right) a(s) \, ds \right] \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right) a(s) \, ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\tau} (\tau - s)^{\alpha-1} a(s) \, ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) \, ds \right] \\
&\leq C \left\{ \frac{m}{(\Gamma(\alpha+1))^r} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right) + \frac{m}{(\Gamma(\alpha+1))^r} \left(\tau^{\alpha} - t^{\alpha} \right) \right\} \\
&= \frac{Cm}{(\Gamma(\alpha+1))^r} \left(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} + \tau^{\alpha} - t^{\alpha} \right).
\end{aligned}$$

Furthermore by (H_1) and (H_2), we have

$$\begin{aligned}
\left| D^{\nu} T_1 v(\tau) - D^{\nu} T_1 v(t) \right| \;\; = \;\; & \left| I^{\alpha-\nu} \left(\tau, v(\tau), D^{\mu} v(\tau) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} \tau^{\alpha-\nu-1} I^{\alpha} f\left(\tau, v(\tau), D^{\mu} v(\tau) \right) \right|_{\tau=1} \\
& \left| - I^{\alpha-\nu} f\left(t, v(t), D^{\mu} v(t) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\nu)} t^{\alpha-\nu-1} I^{\alpha} \; f\left(t, v(t), D^{\mu} v(t) \right) \Big|_{t=1} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left[\int_0^\tau \left|(\tau-s)^{\alpha-\nu-1} f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds\right.\right.\\
&\quad \left.\left.-\int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds\right|\right]\\
&\quad +\frac{\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right)\right| ds\\
&\quad +\frac{\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right)\right| ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left[\left|\int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-\nu-1} f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds\right.\right.\\
&\quad \left.-\int_0^\tau (t-s)^{\alpha-\nu-1} f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds\right|\\
&\quad +\left|\int_0^\tau (t-s)^{\alpha-\nu-1} f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds\right.\\
&\quad \left.\left.-\int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds\right|\right]\\
&\quad +\frac{\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right)\right| ds\\
&\le \frac{C}{\Gamma(\alpha-\nu)}\int_0^\tau \left((\tau-s)^{\alpha-\nu-1}-(t-s)^{\alpha-\nu-1}\right) a(s)\, ds\\
&\quad +\int_t^\tau (t-s)^{\alpha-\nu-1} a(s)\, ds+\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s)\, ds\\
&= \frac{R}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{\int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-\nu-1} a(s)\, ds-\int_0^t (t-s)^{\alpha-\nu-1} a(s)\, ds\right.\\
&\quad \left.+\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s)\, ds\right\}\\
&\le \frac{C}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left\{\frac{m}{(\alpha-\nu)^r}\left(\tau^{\alpha-\nu}-t^{\alpha-\nu}\right)+\frac{m}{\alpha^r}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right)\right\}\\
&= \frac{Cm}{(\alpha-\nu)^r\,\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu}-t^{\alpha-\nu}\right)+\frac{Cm}{\alpha^r\,\Gamma(\alpha-\nu)}\left(\tau^{\alpha-\nu-1}-t^{\alpha-\nu-1}\right),
\end{aligned}$$

similary, we can prove that

$$\left|T_2u(\tau)-T_2u(t)\right| \le \frac{C}{\Gamma(\beta-\mu)}\left\{\frac{n}{(\beta-\mu)^{\bar{r}}}\left(\tau^{\beta-1}-t^{\beta-1}\right)+\frac{n}{\beta^r}\left(\tau^\beta-t^\beta\right)\right\},$$

$$\begin{aligned}
\left|D^\mu T_2u(\tau)-D^\mu T_2u(t)\right| &\le \frac{Cn}{(\beta-\mu)^{\bar{r}}\,\Gamma(\beta-\mu)}\left(\tau^{\beta-\mu}-t^{\beta-\mu}\right)\\
&\quad +\frac{nC}{\beta^{\bar{r}}\Gamma(\beta-\mu)}\left(\tau^{\beta-\mu-1}-t^{\beta-\mu-1}\right),
\end{aligned}$$

since the functions $t^{\alpha}, t^{\alpha-1}, t^{\alpha-\nu}, t^{\alpha-\nu-1}, t^{\beta}, t^{\beta-1}, t^{\beta-\mu}, t^{\beta-\mu-1}$ are uniformly continuous on $[0, 1]$, the family of functions TU is equicontinuous. Thus, we conclude that T is a completely continuous operator. Hence, according to the Schauder fixed point theorem, there exists a solution of $(1)_{(\alpha,\beta)}$. ∎

4. Stability

In this section, we study the stability of the system of coupled equations given by $(1)_{(\alpha,\beta)}$.

Definition 4.1. The system $(1)_{(\alpha,\beta)}$ is stable (with respect to the orders of derivatives) if and only if

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists K > 0,\ |\alpha - \overline{\alpha}|^{r} + \left|\beta - \overline{\beta}\right|^{\overline{r}} < K$$
$$\Rightarrow$$
$$|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}| < \epsilon,$$

where (u, v) et $(\overline{u}, \overline{v})$ are respectively the solutions of $(1)_{(\alpha,\beta)}$ and $(1)_{(\overline{\alpha},\overline{\beta})}$.

Theorem 4.2. If f, g are continuous functions on $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, where, $p, q, r, \overline{r} > 1$, for $i = 1, 2$

$$(\rho_1 = \alpha, \rho_2 = \beta),\ \Psi(t, s, \rho_i, \overline{\rho_i}) = \left| \frac{(t(1-s))^{\rho_i - 1}}{\Gamma(\rho_i)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\rho_i} - 1}}{\Gamma(\overline{\rho_i})} \right|,$$

$$\psi_{(\alpha,\nu)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - \nu + 1)}$$

and

$$\psi_{(\beta,\mu)} = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta - \mu + 1)}$$

satisfy:

(S_1) There exists K_f, K_g, L_f and L_g positive constants such that:

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| &\leq K_f |x_1 - x_2| + L_f |y_1 - y_2| \\ \left|g\left(t, x_1', y_1'\right) - g\left(t, x_2', y_2'\right)\right| &\leq K_g \left|x_1' - x_2'\right| + L_g \left|y_1' - y_2'\right|, \end{aligned}$$

(S_2) There exists $h_1(t), h_2(t) : [0, 1] \to \mathbb{R}^{+}$, satisfy

$$|f(t, x, y)| \leq h_1(t)(|x| + |y|),\ \left|g\left(t, x', y'\right)\right| \leq h_2(t)\left(\left|x'\right| + \left|y'\right|\right),$$

where $x, y \in \mathbb{R}$, and there exists positive constants M , N such that:

$$\left(\int_0^1 \Psi(t, s, \alpha, \overline{\alpha})^{(1-r)q} h_1^q(s)\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq M,$$

$$\left(\int_0^1 \Psi\left(t, s, \beta, \overline{\beta}\right)^{(1-\overline{r})q} h_2^q(s)\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq N,$$

(S_3) $\alpha \leq \beta$, $\mu \leq \nu$, and $\alpha - \nu \leq \beta - \mu$

(S_4) $\Delta = \max\left(K_f, L_f, K_g, L_g\right) \max\left\{\psi_{(\alpha,\nu)}, \psi_{(\beta,\mu)}\right\} < 1$,
Then the system $(1)_{(\alpha,\beta)}$ is stable.

Proof. Lemma 5 implies that

$$\begin{aligned} u(t) - \overline{u}(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right] ds \\ &- \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right] f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) ds \\ &- \int_0^1 \left[\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right] f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right) ds \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} |u(t) - \overline{u}(t)| \leq & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right| ds \\ &+ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right| ds \\ &+ \int_0^t \left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right)\right| ds \\ &+ \int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right| ds \\ = & I_1 + I_2, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right| ds \\ &+ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right| ds, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_0^t \left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f\left(s, v(s), D^{\mu}v(s)\right)\right| ds \\ &+ \int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| \left|f\left(s, \overline{v}(s), D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right| ds. \end{aligned}$$

According to (S_1) , we can have

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f \left|v(s)-\overline{v}(s)\right| + L_f \left|D^{\mu}v(s) - D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right) ds \\ & \int_0^t \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f \left|v(s)-\overline{v}(s)\right| + L_f \left|D^{\mu}v(s) - D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right) ds. \end{aligned}$$

Now, by using (S_2), we can write

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^t \left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| h_1(s) \left(\left|v(s)\right| + \left|D^{\mu}v(s)\right|\right) ds \\ &+ \int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| h_1(s) \left(\left|v(s)\right| + \left|D^{\mu}v(s)\right|\right) ds \\ &\leq C \left\{\int_0^t \left|\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| h_1(s)\, ds \right. \\ &\left. + \int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| h_1(s)\, ds \right\}, \end{aligned}$$

by Minkowski's inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(t,s,\alpha,\overline{\alpha})\, h(s)\, ds &\leq \int_0^1 \left(\Psi(t,s,\alpha,\overline{\alpha})\right)^r \left(\Psi(t,s,\alpha,\overline{\alpha})\right)^{1-r} h(s)\, ds \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\Psi(t,s,\alpha,\overline{\alpha})\right)^{rp}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\Psi(t,s,\alpha,\overline{\alpha})\right)^{(1-r)q} h_1^q(s)\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq M \left(\int_0^1 \left(\Psi(t,s,\alpha,\overline{\alpha})\right)^{rp} ds\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

if we set $rp = 1$, then

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(t;s,\alpha,\overline{\alpha})\, h(s)\, ds &= M \left(\int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right|^{rp} ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= M \left(\int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| ds\right)^{r}. \end{aligned}$$

Now, we use the mean value theorem. For this, we use

$$\left\|\varphi_1(\alpha)(s) - \varphi_1(\overline{\alpha})(s)\right\|_1 \leq \sup_{1<\alpha<2} \left\|\varphi_1'(\alpha)(s)\right\|_1 . \left|\alpha - \overline{\alpha}\right|, \tag{10}$$

where,

$$\varphi_1(\alpha)(s) = \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

if we put $x = t(1-s)$, then

$$\varphi_1(\alpha)(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

therefore,

$$\varphi_1'(\alpha)(x) = \frac{x^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\ln x - \psi(\alpha)\Gamma(\alpha)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)^2}$$

(where, $\psi(\xi) = \frac{d}{d\xi}(\log\Gamma(\xi))$: diagamma function)

$$= \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_1'(\alpha)(s)\right\|_1 &= \int_0^1 \left|\varphi_1'(\alpha)(s)\right| ds \\
&= \int_0^1 \left\{-\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\psi(\alpha)(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(k_1 + k_2),
\end{aligned}$$

now, integrating by parts, we obtain

$$k_1 = -\int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}\ln(t(1-s))}{\Gamma(\alpha)} ds = -\frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\alpha} + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2},$$

and

$$k_2 = \psi(\alpha)\int_0^1 (t(1-s))^{\alpha-1} ds = \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha}\psi(\alpha).$$

So,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1{}'(\alpha)(s)\|_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{-\frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\alpha} + \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha^2} + \frac{\psi(\alpha)t^{\alpha-1}}{\alpha}\right\} \\
&\leq c_1 \quad (c_1 := c_{(1,\alpha)})
\end{aligned}$$

The inequality (10) becomes:

$$\begin{aligned}
(\|\varphi_1(\alpha)(s) - \varphi_1(\overline{\alpha})(s)\|_1)^r &= \left(\int_0^1 \left|\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})}\right| ds\right)^r \\
&\leq c_{(1,\alpha)} |\alpha - \overline{\alpha}|^r \quad \left(c_{(1,\alpha)} := c_1^r\right)
\end{aligned}$$

Simillary, we put $x = \dfrac{s}{t}$ as follows,

$$\int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds = \int_0^t \left| \frac{\left(t\left(1-\frac{s}{t}\right)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\left(t\left(1-\frac{s}{t}\right)\right)^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| ds$$

and

$$\left(\int_0^1 \left| \frac{(t(1-x))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t(1-x))^{\overline{\alpha}-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})} \right| dx \right)^r \leq c_{(2,\overline{\alpha})} |\alpha - \overline{\alpha}|^r, \ \left(c_{(2,\overline{\alpha})} := c_2^r\right)$$

this implies that,

$$I_2 \leq M \left\{ c_{(1,\alpha)} + c_{(2,\overline{\alpha})} \right\} |\alpha - \overline{\alpha}|^r = K |\alpha - \overline{\alpha}|^r.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} |u(t) - \overline{u}(t)| \leq K |\alpha - \overline{\alpha}|^r &+ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f |v(s) - \overline{v}(s)| + L_f \left|D^\mu v(s) - D^\mu \overline{v}(s)\right|\right) ds \\ &+ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_f |v(s) - \overline{v}(s)| + L_f \left|D^\mu v(s) - D^\mu \overline{v}(s)\right|\right) ds. \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned} D^\nu u(t) &= D^\nu (I^\alpha f\left(t, v(t), D^\mu v(t)\right) - t^{\alpha-1} I^\alpha \ f\left(t, v(t), D^\mu v(t)\right)\big|_{t=1} \\ &= I^{\alpha-\nu} f\left(t, v(t), D^\mu v(t)\right) - I^\alpha \ f\left(1, v(1), D^\mu v(1)\right)\big|_{t=1} D^\nu t^{\alpha-1} \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds \\ &- \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} (1-s)^\nu f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) ds. \end{aligned}$$

By the use of (S_1), (S_2) and the fact that $0 < (1-s)^\nu < 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \left|D^\nu u(t) - D^\nu \overline{u}(t)\right| \leq &\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left(\left|f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^\mu \overline{v}(s)\right)\right|\right) ds \\ &+ \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} - \frac{(t-s)^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\overline{\alpha}-\nu)} \right| \left|f\left(s, \overline{v}(s), D^\mu \overline{v}(s)\right)\right| ds \\ &+ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} \left(\left|f\left(s, v(s), D^\mu v(s)\right) - f\left(s, \overline{v}(s), D^\mu \overline{v}(s)\right)\right|\right) ds \\ &+ \int_0^1 \left| \frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} - \frac{(t(1-s))^{\overline{\alpha}-\nu-1}}{\Gamma(\overline{\alpha}-\nu)} \right| \left|f\left(s, \overline{v}(s), D^\mu \overline{v}(s)\right)\right| ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right| \\
&\quad\leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r}+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left|f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)-f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right|ds \\
&\qquad+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left|f\left(s,v(s),D^{\mu}v(s)\right)-f\left(s,\overline{v}(s),D^{\mu}\overline{v}(s)\right)\right|ds \\
&\quad\leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r}+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(K_{f}\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+L_{f}\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)ds \\
&\qquad+\int_{0}^{1}\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\left(K_{f}\left|v(s)-\overline{v}(s)\right|+L_{f}\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)ds.
\end{aligned}$$

In the same way, we can bound $|v(t)-\overline{v}(t)|$ and $\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|$.

Now, we apply the Gronwall theorem, and we obtain,

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,1]}\left[|u(t)-\overline{u}(t)|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right|\right]\leq K\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^{r} \\
&\quad+\max\left(K_{f},L_{f}\right)\int_{0}^{1}\left(\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t(1-s))^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right) \\
&\quad\times\max_{s\in[0,1]}\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)ds \\
&\quad+\max\left(K_{f},L_{f}\right)\int_{0}^{t}\left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)(|v(s)-\overline{v}(s)|\right. \\
&\quad\left.\left.+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)\right]ds,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,1]}\left(|v(t)-\overline{v}(t)|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|\right)\leq L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}} \\
&\quad+\max\left(K_{g},L_{g}\right)\int_{0}^{1}\left(\frac{(t(1-s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}+\frac{(t(1-s))^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\right) \\
&\quad\times\max_{s\in[0,1]}\left(|u(s)-\overline{u}(s)|+\left|D^{\nu}u(s)-D^{\nu}\overline{u}(s)\right|\right)ds \\
&\quad+\int_{0}^{t}\left[\left(\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}+\frac{(t-s)^{\beta-\mu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)}\right)\right. \\
&\quad\left.\times\max\left(K_{g},L_{g}\right)\left(|u(s)-\overline{u}(s)|+\left|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)\right|\right)\right]ds.
\end{aligned}$$

Let us define the function δ by

$$\begin{aligned}
|\delta(t)|=\delta(t):=&\,|u(t)-\overline{u}(t)|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right| \\
&+|v(t)-\overline{v}(t)|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|.
\end{aligned}$$

According to (S_3) and (S_4), we have

$$\begin{aligned}
|\delta(t)| &\leq \max_{t\in[0,1]}\left[|u(t)-\overline{u}(t)|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right|\right]+\max_{t\in[0,1]}\left[|v(t)-\overline{v}(t)|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|\right]\\
&\leq K|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}+L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}+\int_0^t\left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\max\left(K_f,L_f,K_g,L_g\right)\right.\\
&\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|+|u(s)-\overline{u}(s)|+\left|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)\right|\right)\Big]ds\\
&\quad+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}\right)\max\left(K_f,L_f\right)\max\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\beta-\mu+1)}\right)\max\left(K_g,L_g\right)\max\left(|u(s)-\overline{u}(s)|+\left|D^{\nu}u(s)-D^{\nu}\overline{u}(s)\right|\right),
\end{aligned}$$

setting $\Lambda_{K,L}=\max\left(K_f,L_f,K_g,L_g\right)$, we obtain,

$$\begin{aligned}
|\delta(t)| \leq\ & K|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}+L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}+\Lambda_{K,L}\int_0^t\left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\right.\\
&\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|+|u(s)-\overline{u}(s)|\right.\\
&\quad\left.+\left|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)\right|\right)\Big]ds\\
&+\Delta\left[\max_{s\in[0,1]}\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|\right)\right.\\
&\quad\left.+\max_{s\in[0,1]}\left(|u(s)-\overline{u}(s)|+\left|D^{\nu}u(s)-D^{\nu}\overline{u}(s)\right|\right)\right]
\end{aligned}$$

Then, we have

$$\begin{aligned}
&(1-\Delta)\left[\max_{t\in[0,1]}\left(|v(t)-\overline{v}(t)|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|\right)\right.\\
&\quad\left.+\max_{t\in[0,1]}\left(|u(t)-\overline{u}(t)|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right|\right)\right]\\
&\leq K|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}+L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}+\Lambda_{K,L}\int_0^t\left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\right.\\
&\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|+|u(s)-\overline{u}(s)|+\left|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)\right|\right)\Big]ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\delta(t)| &\leq \max_{t\in[0,1]}\left(|v(t)-\overline{v}(t)|+\left|D^{\mu}v(t)-D^{\mu}\overline{v}(t)\right|\right)\\
&\quad+\max_{t\in[0,1]}\left(|u(t)-\overline{u}(t)|+\left|D^{\nu}u(t)-D^{\nu}\overline{u}(t)\right|\right)\\
&\leq\frac{K|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}}{(1-\Delta)}+\frac{L\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\widetilde{r}}}{(1-\Delta)}+\frac{\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}\int_0^t\left[\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right)\right.\\
&\left(|v(s)-\overline{v}(s)|+\left|D^{\mu}v(s)-D^{\mu}\overline{v}(s)\right|+|u(s)-\overline{u}(s)|+\left|D^{\mu}u(s)-D^{\mu}\overline{u}(s)\right|\right)\Big]ds.
\end{aligned}$$

Thus,

$$|\delta(t)| \leq \frac{K\,|\alpha-\overline{\alpha}|^{r}}{(1-\Delta)} + \frac{L\,\left|\beta-\overline{\beta}\right|^{\overline{r}}}{(1-\Delta)} + \frac{2\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\,|\delta(s)|\,ds,$$

we set,

$$c := \max\left(\frac{K}{1-\Delta}, \frac{L}{1-\Delta}\right) \text{ and } \lambda = \frac{2\Lambda_{K,L}}{(1-\Delta)}.$$

So,

$$\delta(t) \leq c\left(|\alpha-\overline{\alpha}| + \left|\beta-\overline{\beta}\right|\right) + \lambda\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)}\,|\delta(s)|\,ds,$$

which means that,

$$0 \leq \delta(t) \leq c\left(|\alpha-\overline{\alpha}| + \left|\beta-\overline{\beta}\right|\right) E_{\alpha-\nu}(\lambda) < \epsilon.$$

Finally, the defintion 9 implies the stability of solutions to the system $(1)_{(\alpha,\beta)}$. ■

References

[1] Agarwal, R, P, Meehan, M and O'Regan, D., 2001, "Fixed point theory and application", Cambrindge. Univ. Press.

[2] Alikhan, R, Rehaman and J, Henderson, 2011, "Fractional differential equations", Vol 1, Number 1, pp. 29–43.

[3] Bai, Z, and Lü, H., 2005, "Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation", J. Math. Anal. Appl., pp. 495–505.

[4] Diethelm, K., and Freed, A.D., 2004, "Multi-order fractional differential equation and their numerical solution", Appl. Math. Comput, pp. 621–640.

[5] Das, S., 2008, "Functional fractional calculus for system identification and controls", Springer-Berlin Herdelberg.

[6] Mainardi, F., 2005, "Fractional calculus and waver in linear vixoelasticity", Co. Pte. Ltd. Univ Bologna. Italy.

[7] Oldam, K, B and Spanier, J., 1974, "The fractional calculus", Academic Press. Inc.

[8] Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006, "Theory and applications of fractional differential Equations", North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam.

[9] Podlubny, I., 1999, "Fractional Differential Equations", Academic Press, San Diego.

[10] Su, X., 2009, "Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations", Appl. Math. Letters, pp. 64–69.

[11] Wang, J, Xiang, H, and Liu., 2010, “Position solution to nonzero boundary values problem for a couped system of nonlinear fractional differential equations”, Volume, pp. 1–12.

[12] Wellbeer, M., 2010, “Efficient numerical methods for fractional differential equations and their”, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig.

[13] Zeidler, E., 1986, “Nonlinear funcional analysis and its applications: Fixed-Point thoerems”, Springer-Verlag.

[14] Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., 1993, “Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications,” Gordon and Breach, Yverdon.

Bibliographie

[1] G. M. Mittag-Leffler.Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. C. R. Académie des Sciences. 137,554–558 (1903).

[2] H.Bateman, Higher Transcendental Functions, vol 1. Copyright (1953).a

[3] K. B. Oldam, J. Spanier, The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[4] B. Ross. Fractional Calculus and its Applications, volume 457 of LectureNotes in Mathematics, Springer-Verlag, NewYork, (1975).

[5] J, Hale, Theory of functional differential equations, Springer Verlag, NY, (1977).

[6] R.L. Bagley. Application of Generalized Derivatives to Viscoelasticity. PhD thesis, Air Force Institute of Technologie, (1979).

[7] E. Zeidler, Nonlinear funcional analysis and its applications: Fixed-Point thoerems, Springer-Verlag (1986).

[8] K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley and Sons. Inc (1993).

[9] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[10] I. Podlubng, Fractional differential equations, Vol 197, Academic Press, (1999).

[11] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).

[12] D. G. Duffy, Chapman and Hall, Green's functions with application, Crc, New York, (2001).

[13] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, Fixed point theory and application, Cambrindge. Univ. Press, (2001).

[14] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[15] K. Diethelm, N. J. Ford, Multi-order fractional differential equation and their numerical solution, Appl. Math. Comput. (2004) 621-640.

[16] J. Munkhammar, Riemann - Liouville Fractional Derivatives and the Taylor - Riemann Series, U. U. D. M. Project report 2004:7

[17] F. Mainardi, Fractional calculus and waver in linear vixoelasticity, Co. Pte. Ltd. Univ Bologna. Italy, (2005).

[18] J. D. Munkhamman, Fractional calculus and the taylor-Rimann series, (2005), 1-19.

[19] Z. Bai, H. Lü, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. (2005) 495-505.

[20] Zhanbing Bai, Haishen L¨u, Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311, 495-505, 2005.

[21] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).

[22] M. GÖkçen, Non integer order derivatives, Univ İzmir (2007).

[23] S. Das, Functional fractional calculus for system identification and controls, Springer-Berlin Herdelberg (2008).

[24] X. Su, Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, Appl. Math. Letters

(2009), 64-69.

[25] Z. Denton, A.S. Vatsala, Fractional integral inequalities and applications. Computers and Mathematics with Applications, 59, 1087-1094, (2010).

[26] J. Wang, H. Xiang, and Z. Liu, Position solution to nonzero boundary values problem for a couped system of nonlinear fractional differential equations, Volume 2010, 1-12.

[27] M. Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, (2010).

[28] Alikhan, M. Rehaman and J. Henderson, Fractional differential equations, Vol 1, Number1(2011), 29-43.

[29] Jim Emery, Green's Functions (2011), 1-7.

[30] Z. Gao, L. Yang and Z. Luo, Stability of the solutions for nonlinear fractional differential equations with delays and integral boundary conditions, Advances in Difference Equations, (2013), 1-8.

[31] S. Yessaad Mokhtari and L. Nisse, Stability analysis of a coupled system of nonlinear fractional differential equations, vol 12, (2016), 3339-3355.