

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

BADJI MOKHTAR-ANNABA

UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار

-عناية-

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques Année : 2023/2024

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

### Existence et unicité des solutions d'équations Différentielles fractionnaires non linéaires

Spécialité

Mathématiques appliquées

Par

Ridha DIDA

DIRECTEUR DE THÈSE : Yamina LASKRI Prof. ENSTI - Annaba

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : Hamid BOULARES Prof. U - Guelma

Devant le jury

PRESIDENT: Mohamed Lamine SAHARI M.C.A. U.B.M - Annaba

EXAMINATEUR : Badreddine MEFTAH M.C.A. U - Guelma

EXAMINATEUR : Kheireddine BELAKROUM M.C.A. U.F.M -Constantine 1

EXAMINATEUR: Abdourazek SOUABI M.C.A. U.B.M - Annaba

## ملخص

في هذه الرسالة، يكمن تركيزنا الأساسي في استكشاف الحلول الإيجابية والنتائج الأولية الناجمة عن وجودها ووحدايتها في سياق معادلة تفاضلية كسورية للبانوغراف. ودرسنا أيضاً استقرار الحل الصفري لنوع المعادلات التفاضلية الكسورية للبانوغراف في فضاء بناخ المثقل. تستخدم هذه المعادلة مشتقات كابوتو الكسورية مع نواة تعتمد على دالة متزايدة تماماً مشار إليها بـ  $\Psi$  (مختصرة باسم  $\Psi$ -كابوتو). تلك المشتقات الكسورية ذات النواة التي تعتمد على الدالة  $\Psi$  لديها القدرة على توحيد وتعميم أنواع متعددة من العوامل الكسورية، بما في ذلك ريمان ليوفيل وكابوتو وهادمار وغيرها. ونتيجة لذلك، الجوانب النوعية التي نبحث فيها في هذا العمل تهدف إلى تعميم ودمج العديد من النتائج التي تم توثيقها مسبقاً في بعض الأبحاث. لتأكيد وجود الحلول الإيجابية الرئيسة، نستخدم نظرية النقطة الثابتة لشودر بالاشتراك مع طريقة الحل العلوي والحل السفلي. بالإضافة إلى ذلك، من خلال استخدام نظرية النقطة الثابتة لباناخ، نستطيع أن نثبت وجود حل إيجابي وحيد. في الختام، نلخص نتائج أبحاثنا ونقدم مثلاً عددياً لتوضيح النتائج النظرية.

**كلمات مفتاحية:** المعادلات التفاضلية الكسورية، معادلة بانوغراف، نظرية النقطة الثابتة (شودار، بناخ، كراسنوسيلسكي)، الحلول الموجبة، استقرار الحل، فضاء بناخ المثقل، الاشتقاق الكسري  $\Psi$ -كابوتو.

# Abstract

In this thesis, our primary focus lies in the exploration of positive solutions and the initial implications stemming from their existence and uniqueness in the context of a fractional pantograph differential equation and we are also interested in studying the stability of a fractional pantograph problem. This equation employs Caputo fractional derivatives with a kernel that is contingent upon a strictly increasing function denoted as  $\Psi$  (abbreviated as  $\Psi$ -Caputo). These kernel fractional operators, which depend on the function  $\Psi$ , have the capacity to consolidate and generalize various types of fractional operators, including Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, and others.

As a result, the qualitative aspects we investigate in this work serve to generalize and amalgamate several previously established findings in the literature. To establish the existence of the positive solutions, we employ Schauder's fixed point theorem in conjunction with the upper and lower solution method. Additionally, by leveraging the Banach fixed point theorem, we can demonstrate the existence of a unique positive solution.

In conclusion, we summarize our research findings and provide a numerical example to elucidate the theoretical results.

**Keywords:** Fractional differential equations; Pantograph equation ; Fixed point theorem (Schauder, Banach, Krasnoselskii) ; Stability ; Weighted Banach space ; Positive solution;  $\Psi$ -Caputo fractional derivative.

# Résumé

Dans cette thèse, notre principal objectif réside dans l'exploration des solutions positives et des premières implications découlant de leur existence et de leur unicité dans le contexte d'une équation différentielle pantographe fractionnaire et nous nous intéressons également à l'étude de la stabilité d'un problème de pantographe fractionnaire. Cette équation fait usage de dérivées fractionnaires de Caputo avec un noyau dépendant d'une fonction strictement croissante désignée par  $\Psi$  (abrégée en  $\Psi$ -Caputo). Ces opérateurs fractionnaires à noyau dépendant de la fonction  $\Psi$  ont la capacité de regrouper et de généraliser divers types d'opérateurs fractionnaires, tels que Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, et d'autres.

En conséquence, les aspects qualitatifs que nous étudions dans ce travail visent à généraliser et à fusionner plusieurs résultats précédemment établis dans la littérature. Pour établir l'existence des solutions positives, nous utilisons le théorème du point fixe de Schauder en conjonction avec la méthode des solutions supérieure et inférieure. De plus, en tirant parti du théorème du point fixe de Banach, nous pouvons démontrer l'existence d'une solution positive unique.

En conclusion, nous résumons nos résultats de recherche et fournissons un exemple numérique pour élucider les résultats théoriques.

**Mots-clés** : Equations différentielles fractionnaires ; Equation de pantographe ; Théorème du point fixe (Schauder, Banach, Krasnoselskii) ; Stabilité ; Espace de Banach pondéré ; Solution positive ; dérivée fractionnaire  $\Psi$ -Caputo.

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette thèse. Ce parcours a été à la fois exigeant et enrichissant, et je suis redevable à de nombreuses personnes et institutions.

Tout d'abord, je suis profondément reconnaissant envers mes directeurs de thèse, **Yamina Laskri** et **Hamid Boulares**, pour leur soutien indéfectible, leurs conseils et leur mentorat tout au long de cette recherche. Leur expertise et leur engagement ont été inestimables pour donner forme à cette thèse.

J'exprime ma reconnaissance envers les membres de mon comité de thèse, [**Mohamed Lamine SAHARI**, **Badreddine MEFTA**, **Kheireddine BELAKROUM** et **Abdourazek SOUABI**], pour leurs commentaires éclairés, leurs critiques constructives et leurs encouragements. Leur expertise et leur dévouement ont amélioré la qualité de ce travail.

Je suis reconnaissant envers le corps professoral et le personnel de l'Université Badji Mokhtar - Annaba/ Mathématiques, qui ont créé un environnement propice à la recherche et à l'apprentissage. Leur soutien, tant sur le plan académique qu'administratif, a été essentiel pour la réussite de cette thèse.

Mes remerciements chaleureux vont à ma famille pour leur soutien constant et leurs encouragements. Leur amour et leur compréhension m'ont soutenu à travers les moments difficiles de ce parcours académique.

Je remercie également mes amis et collègues qui ont partagé leurs connaissances, leurs idées et leur soutien moral. Leur camaraderie a rendu cette entreprise académique plus agréable.

Enfin, mais non des moindres, j'exprime ma reconnaissance à tous les participants et individus qui ont contribué à la collecte de données et aux enquêtes menées au cours de cette recherche. Vos idées précieuses et votre temps ont été cruciaux pour la réussite de cette étude.

En conclusion, cette thèse est le résultat des efforts collectifs de nombreux contributeurs, et je suis reconnaissant à chacun d'entre vous. Votre soutien et vos contributions ont eu un impact significatif sur cette réalisation académique.

Merci à tous d'avoir fait partie de ce parcours.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contenu de la thèse . . . . .	1
<b>1 Préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1 Fonctions Spéciales . . . . .	7
1.1.1 Fonction d'Euler . . . . .	7
1.1.2 Fonctions intégrales . . . . .	13
1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires . . . . .	15
1.2.1 Intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville . . . . .	15
1.3 Dérivées fractionnaires de Caputo . . . . .	21
1.4 Dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard et $\Psi$ -Caputo . . . . .	22
1.5 Autres types de dérivées fractionnaires . . . . .	23
1.5.1 Dérivée fractionnaire de Canavati . . . . .	23
1.5.2 Dérivées fractionnaires de Marchaud . . . . .	23
1.6 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov . . . . .	24
1.7 Espaces fonctionnels fractionnaires . . . . .	25
1.8 Fonctions de contrôle inférieure et supérieure . . . . .	26
1.9 Préliminaires . . . . .	27
1.10 La $\nu$ -ième dérivée fractionnaire . . . . .	28
1.11 Entre l'EFD et l'équation intégrale . . . . .	31
<b>2 Théorèmes d'existence et d'unicité</b>	<b>33</b>
2.1 Théorie des points fixes . . . . .	33
2.1.1 Théorème des points fixes de Banach . . . . .	33
2.1.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii . . . . .	38

2.2	Stabilité et stabilité asymptotique . . . . .	42
2.2.1	Stabilité . . . . .	42
2.3	Pantographe . . . . .	44
2.3.1	Définitions générales . . . . .	44
2.3.2	Applications du problème de pantographe . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Sur les solutions positives des équations pantographe fractionnaires avec noyau dérivées <math>\Psi</math>- Caputo</b>	<b>46</b>
3.1	Introduction . . . . .	46
3.2	Résultats principaux . . . . .	50
3.3	Exemple . . . . .	58
3.4	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Stabilité asymptotique pour les équations différentielles fractionnaires de pantographe au sens Caputo-Hadamard</b>	<b>60</b>
4.1	Stabilité pour les EDFs de pantographe . . . . .	60
4.2	Exemple . . . . .	72
4.3	Stabilité asymptotique pour les équations différentielles fractionnaires de pantographe . . . . .	73
4.4	Stabilité asymptotique pour les EDFs de pantographe . . . . .	77
4.5	Remarques . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Existence de solutions pour les équations différentielles fractionnaires séquentielles <math>\psi</math>-Caputo</b>	<b>86</b>
5.1	Introduction . . . . .	86
5.2	Résultats principaux . . . . .	90
5.3	Exemple . . . . .	94
5.4	Commentaire . . . . .	95
	<b>Conclusions and perspectives</b>	<b>96</b>



# Introduction

## Contenu de la thèse

Le calcul fractionnaire gagne une importance croissante dans la modélisation mathématique, et il suscite une attention significative, notamment dans le domaine de la nanotechnologie. Cette discipline mathématique émergente trouve des applications dans divers problèmes du monde réel, notamment en biologie, sciences numériques, sciences physiques, systèmes dynamiques, économie, etc., comme en témoignent les références [62, 70].

Parmi les différents types d'équations différentielles fractionnaires, celles impliquant les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard sont particulièrement importantes et trouvent des applications dans un large éventail de domaines d'ingénierie et scientifiques. Ces applications englobent les sciences de l'ingénieur, la mécanique, la médecine, la biologie, la chimie, la physique, ainsi que l'étude de l'instabilité et de la stabilité des géodésiques sur les variétés Riemanniennes et des systèmes Hamiltoniens, entre autres [38, 66].

Les généralisations de l'équation pantographe à différents ensembles d'équations ont de diverses applications dans diverses disciplines scientifiques. On peut citer des applications notables en théorie des nombres [50], en électrodynamique [27], et dans l'étude de l'absorption d'énergie par le pantographe d'une locomotive électronique [34, 39, 44, 59].

L'investigation de l'existence et de l'unicité des solutions dans le domaine des équations différentielles fractionnaires non linéaires représente un sujet complexe et multifacette. Les équations différentielles fractionnaires (EDF) élargissent le champ des équations différentielles ordinaires (EDO) en permettant des dérivées d'ordres non entiers. L'introduction de la non-linéarité accroît encore la complexité de ce sujet. La détermination de l'existence et de l'unicité des solutions pour de telles équations dépend de divers facteurs, notamment la forme spécifique de l'équation, l'ordre fractionnaire impliqué, et l'imposition des conditions aux limites.

Voici quelques notions générales et méthodologies relatives à l'établissement de l'existence et de l'unicité des solutions dans le contexte des équations différentielles fractionnaires non linéaires :



**Existence des Solutions :** L'établissement des résultats d'existence pour les équations différentielles fractionnaires non linéaires repose fréquemment sur l'utilisation de théorèmes des points fixes et de techniques variationnelles. Une stratégie courante consiste à convertir l'équation fractionnaire en une équation intégrale, suivie de l'application de méthodes conventionnelles pour démontrer la présence de solutions. Il est à noter que le choix de l'opérateur de dérivation fractionnaire, qu'il s'agisse de l'opérateur de Caputo ou de Riemann-Liouville, peut influencer l'existence des solutions.



**L'unicité des solutions :** Établir l'unicité des solutions dans le contexte des équations différentielles fractionnaires non linéaires est généralement une tâche plus complexe que d'établir leur existence. L'unicité des solutions peut dépendre de la nature spécifique de la non-linéarité dans l'équation.

Pour aborder l'unicité sous certaines conditions, des méthodes telles que les fonctions de type Lyapunov et les inégalités de type Gronwall peuvent être avantageuses.

La régularité et la stabilité des solutions jouent un rôle central dans les résultats d'existence et d'unicité. Les solutions présentant une régularité plus élevée peuvent conduire à des résultats plus robustes. La caractérisation de la régularité des solutions peut être facilitée par l'utilisation d'espaces de Sobolev fractionnaires.

Dans le domaine des équations différentielles fractionnaires, le choix des conditions aux limites est d'une importance capitale, car il peut influencer à la fois l'existence et l'unicité des solutions. Il est pertinent de noter que les conditions aux limites fractionnaires non locales posent souvent des défis plus importants par rapport à leurs homologues locaux.



**Méthodes numériques :** Dans des applications pratiques, des techniques numériques telles que les méthodes aux différences finies, les méthodes aux éléments finis et les mé-

thodes spectrales sont fréquemment utilisées pour approximer les solutions des équations différentielles fractionnaires non linéaires. Ces méthodes computationnelles se révèlent précieuses en fournissant des approximations, notamment dans des situations où des solutions analytiques exactes sont difficiles à obtenir.



Dans des cas spécifiques :

L'existence et l'unicité des solutions peuvent présenter une variabilité significative, en fonction de la structure spécifique de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire. Certaines équations peuvent avoir des solutions connues, tandis que d'autres nécessitent l'utilisation de techniques spécialisées.

Il est impératif de souligner qu'il n'existe pas de solution universellement applicable pour aborder l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires non linéaires. Le choix des méthodes analytiques et des techniques est étroitement lié aux caractéristiques uniques de chaque équation et problème envisagé. Les chercheurs utilisent couramment une combinaison d'approches analytiques et numériques pour étudier ces équations et explorer leurs propriétés inhérentes. De plus, il est prudent de consulter les articles de recherche actuels et les textes autoritaires pour les avancées les plus récentes dans ce domaine.

Le choix d'un opérateur fractionnaire particulier pour modéliser des scénarios du monde réel captive constamment l'attention de nombreux chercheurs dans le domaine du calcul fractionnaire et de ses applications pratiques. Dans une étude récente (voir [61]), les auteurs ont illustré comment des formulations fractionnaires pertinentes peuvent être considérées comme des extensions des définitions conventionnelles d'ordre entier fréquemment utilisées en traitement du signal. De plus, des travaux de recherche récents (voir [4, 10, 18, 19, 25]) se sont penchés sur divers aspects théoriques et applications liés à différents types d'opérateurs fractionnaires. Par exemple, la référence [10] examine le cas  $\Psi$ -Hilfer, tandis que les articles [4, 25] se concentrent respectivement sur les opérateurs  $\Psi$ -Caputo et Caputo.

L'étude des solutions positives dans les équations différentielles revêt une importance

primordiale en raison de son applicabilité à la modélisation de scénarios du monde réel dans divers domaines tels que l'économie, la physique, l'ingénierie et la biologie. Le calcul fractionnaire, une extension du calcul dérivé traditionnel remontant à 1695 (comme noté dans [54, 55, 62]), a suscité de nombreuses études qui explorent les aspects qualitatifs des solutions positives dans les équations différentielles fractionnaires (EDF) (comme cité dans [11, 45]). Certaines de ces investigations visent principalement à déterminer l'existence de solutions, en utilisant à la fois les dérivées fractionnaires de Caputo et généralisées de Caputo (CFD), y compris les dérivées  $\Psi$ -Caputo ( $\Psi$ -CFD). Le cas du noyau logarithmique, communément appelé Hadamard (comme référencé dans [1, 12, 14, 40, 73]), revêt un intérêt particulier.

Un pantographe, qui comprend quatre barres de taille égale reliées par des charnières, est un système de liaison mécanique. Les équations régissant le mouvement d'un pantographe sont dérivées des principes de triangles similaires, déterminant le facteur d'échelle qui relie les longueurs des barres à la taille de l'image résultante. Ces équations englobent généralement la trigonométrie et l'algèbre vectorielle, en tenant compte des angles entre les barres et des longueurs des barres individuelles. L'objectif principal est de déterminer la trajectoire du stylet ou du point terminal de la quatrième barre, compte tenu du mouvement de l'objet d'origine qui est tracé (comme discuté dans [27, 34, 39, 44, 50, 59] et les références connexes).

La thèse est structurée comme suit :

Chapitre 1 : Le chapitre introductif passe en revue les définitions essentielles et les concepts fondamentaux.

Chapitre 2 : Ce chapitre offre une introduction à plusieurs fonctions distinctes avec des applications tout au long de la thèse. Il propose des explications approfondies sur ces fonctions.

Chapitre 3 : Dans des scénarios généraux impliquant des équations différentielles fractionnaires, il est nécessaire de rechercher une solution dans un espace fonctionnel approprié. Le problème est ensuite modifié, et l'un des théorèmes des points fixes est appliqué, souvent en conjonction avec des estimations utiles supplémentaires et des inégalités établies.

Cette approche est utilisée pour établir les résultats souhaités liés à l'existence, à l'unicité ou à la stabilité. Notre étude vise principalement à identifier les solutions positives de l'équation différentielle pantographique suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\ell^{\alpha;\Psi} \phi(\eta) = \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta\eta)) + \mathcal{D}_\ell^{\alpha-1;\Psi} \mathcal{G}(\eta, \phi(\ell + \vartheta\eta)), & \eta \in [\ell, \mathcal{T}], \\ \phi(\ell) = \mu_1 > 0, \quad \phi'(\ell) = \mu_2 > 0. \end{cases}$$

Dans le contexte donné, nous avons  $\vartheta \in \left(0, \frac{\mathcal{T}-\ell}{\mathcal{T}}\right)$ ,  $\phi(\ell(1 + \vartheta)) = \phi_0 > 0$ ,  $\mathcal{D}_\ell^{\alpha;\Psi}$  est la DF  $\Psi$ -Caputo d'ordre  $1 < \alpha \leq 2$ , De plus,  $\mathcal{G}$ , et  $\mathcal{F}$ , deux fonctions définies sur  $[\ell, \mathcal{T}] \times [0, \infty) \times [0, \infty)$  et se mappant vers  $[0, \infty)$ , sont des fonctions continues. Il est pertinent de noter que  $\mathcal{G}$  présente un comportement non décroissant par rapport à  $\phi$  et  $\mu_2 > \mathcal{G}(1, \phi_0)$ .

Chapitre 4 : Ce chapitre revisite une sélection de théorèmes des points fixes bien connus. Elle vise à fournir une couverture complète de ces théorèmes, y compris leurs variations, leurs démonstrations et leurs applications pratiques.

De manière plus précise, nous nous concentrons sur l'étude de la stabilité asymptotique de la solution nulle dans le cadre des équations différentielles fractionnaires de Caputo-Hadamard. Nous examinons l'équation suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1^\alpha \varkappa(t) - \mathcal{D}_1^{\alpha-1} \mathcal{G}(t, \varkappa(1 + \lambda t)) = \mathcal{F}(t, \varkappa(t), \varkappa(1 + \lambda t)), & t \geq 1, \\ \varkappa(1) = \varkappa_0, \quad \varkappa'(1) = \varkappa_1, \end{cases}$$

ici,  $\lambda$  est dans l'intervalle  $(0, 1)$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $\varkappa_0$  et  $\varkappa_1$  sont des nombres réels,  $\mathcal{D}_1^\alpha$  représente la dérivée standard dérivée fractionnaire de Caputo, et  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  sont des fonctions continues définies sur des domaines spécifiques. La solution de l'équation précédente est notée  $\varkappa(t)$ .

Chapitre 5 : Dans ce chapitre, nous examinons l'existence et l'unicité des solutions pour les EDF  $\Psi$ -Caputo liées au problème mentionnée ci-dessous. L'existence des solutions est établie par l'application du théorème de Krasnoselkii, et l'unicité des solutions est obtenue en utilisant le principe de la contraction. Nous considérons des EDF  $\Psi$ -Caputo

avec des conditions aux limites différentielles de  $\psi$ -Caputo (CLD  $\psi$ -Caputo) de la forme

$$\mathcal{D}^{\alpha_1;\psi}(\mathcal{D}^{\alpha_2;\psi}\kappa)(\zeta) = g(\zeta, \kappa(\zeta)) \quad \zeta \in \mathbf{J} := [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad 1 < \alpha_1, \alpha_2 < 2,$$

$$\kappa(\mathbf{a}) = 0, \quad \kappa \mathcal{D}^{\vartheta_1;\psi}\kappa(\mathbf{b}) + (1 - \kappa) \mathcal{D}^{\vartheta_2;\psi}\kappa(\mathbf{b}) = \vartheta_3, \quad \vartheta_3 \in \mathbb{R},$$

où  $\mathcal{D}^{\alpha_1;\psi}$ ,  $\mathcal{D}^{\alpha_2;\psi}$  sont les EDF  $\psi$ -Caputo d'ordres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\mathcal{D}^{\vartheta_1;\psi}$ ,  $\mathcal{D}^{\vartheta_2;\psi}$  sont les CLD  $\psi$ -Caputo d'ordres  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  respectivement.  $0 < \vartheta_1, \vartheta_2 < \alpha_1 - \alpha_2, 0 \leq \kappa \leq 1$  est une constante et une fonction continue  $g : \mathbf{J} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

# Préliminaires

## 1.1 Fonctions Spéciales

Ce chapitre offre une introduction concise à plusieurs fonctions distinctes qui trouvent des applications tout au long du livre. Des explications supplémentaires sur ces fonctions peuvent être trouvées dans les références [44, 46, 58, 62].

### 1.1.1 Fonction d'Euler

#### Fonction Gamma

Nous commençons par examiner la fonction Gamma, également connue sous le nom d'intégrale d'Euler d'ordre deux, notée  $\Gamma(\cdot)$ .

La fonction Gamma, notée  $\Gamma$ , est définie comme suit :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx. \quad (1.1)$$

**Théorème 1.1.** *La fonction  $\Gamma(n)$  converge pour  $n > 0$ .*

*Démonstration.* L'intégrale peut être écrite comme :

$$\Gamma(n) = \int_0^1 e^{-x} x^{n-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = I_1 + I_2,$$

où  $I_1 = \int_0^1 e^{-x} x^{n-1} dx$  converge. Puisque  $e^{-x}$  décroît sur l'intervalle  $[0, 1]$ , à partir de  $x = 0$ , nous avons :

$$\int_0^1 e^{-x} x^{n-1} dx < \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{p}.$$

De plus,  $I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$  converge également. Nous obtenons :

$$1 \leq x \Rightarrow e^{-x} x^{n-1} \leq e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x^{n-1} \leq e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{x^{n-1}}{e^{\frac{x}{2}}} \leq 1.$$

Parce que nous avons :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2e^{-\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale (1.1) converge pour  $p > 0$  et diverge pour  $p \leq 0$ .

□

Les propriétés de base de la fonction Gamma sont les suivantes :

1. La fonction  $\Gamma(p)$  est continue pour  $p > 0$ .
2. La fonction  $\Gamma(p)$  obéit à la propriété :

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

*Démonstration.*  $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^p dx = -[e^{-x} x^p]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = p\Gamma(p)$ .

□

3. Les relations suivantes sont également valides :

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1) \dots (p+1) \Gamma(p) \tag{1.2}$$

$$\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(p+1) = p!,$$

$$\Gamma(0) = +\infty.$$

4. Pour  $p = -n$ , on obtient :

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \frac{\Gamma(-n+2)}{(n(n-1))} = \frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)} = \dots = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = (-1)^n \infty.$$

5. En tenant compte du fait que la fonction  $\Gamma$  peut être écrite comme  $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ , on en déduit que la fonction  $\Gamma$  peut également être définie pour des valeurs négatives de  $p$ , dans l'intervalle  $-1 < p < 0$ . Si  $-n < p < -(n-1)$ , alors à partir de (1. 3), on obtient :

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)\dots(p+n-1)}.$$

En utilisant la substitution  $p+n = \alpha$ , on obtient après calculs :

$$\Gamma(\alpha - n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}.$$

6. En utilisant l'identité (1. 2), on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(1 + \left(m - \frac{1}{2}\right)\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

ou

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m!)}{m! 2^{2m}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

7. La fonction  $\Gamma$  s'écrit :

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{y}\right)^{p-1} dy.$$

8. Les valeurs spécifiques suivantes de la fonction Gamma ( $\Gamma$ ) peuvent s'avérer utiles à des fins de calcul :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad : \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2.678938, \quad : \Gamma\left(-\frac{2}{3}\right) = 1.354118,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3.625600, \quad : \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1.225417.$$

9.

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q+1)} = \binom{n}{k},$$

10. La formule de Gauss est :

$$\Gamma(p) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-1}.$$

*Démonstration.* Nous exprimons  $e^{-x}$  comme :

$$e^{-x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k.$$

Ensuite, nous obtenons :

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k x^{p-1} dx.$$

Pour  $x = tk \Rightarrow dx = kdt$ , on obtient :

$$\Gamma(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-t)^k t^{p-1} dt.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\frac{1}{p} \int_0^1 (1-t)^k dt^p = \frac{1}{p} [(1-t)^k t^p]_0^1 - \frac{1}{p} \int_0^1 t^p (1-t)^k = \frac{k}{p} \int_0^1 (1-t)^k t^p dt.$$

En répétant cette opération, on obtient :

$$\Gamma(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^p k!}{p(p+1) \dots (p+k)}.$$

Par contre,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^p}{k^p} = 1.$$

D'après :

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+p)(1+p/2) \dots (1+p/k)} \frac{2^p 3^p \dots (k+1)^p}{1^p 2^p \dots k^p},$$

on obtient :

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+p/k} \frac{(k+1)^p}{k^p} = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-1},$$

sauf pour les valeurs  $\operatorname{Re}(p) = 0, -1, -2, \dots$

□

## Fonction Bêta

Ici, nous considérons la fonction Bêta, notée B. La fonction Bêta, ou fonction d'Euler d'ordre un, peut être définie comme suit :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

où  $\operatorname{Re}(p) > 0$  et  $\operatorname{Re}(q) > 0$ . Dans ce qui suit, nous énumérerons les propriétés fondamentales de la fonction Bêta :

1. Pour chaque  $p > 0$  et  $q > 0$ , nous avons :

$$B(p, q) = B(q, p).$$

2. Pour chaque  $p > 0$  et  $q > 1$ , la fonction B satisfait la propriété :

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1).$$

*Démonstration.*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$x^p (1-x)^{q-2} = x^{p-1} (1-x)^{q-2} - x^{p-1} (1-x)^{q-1},$$

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} \frac{dx^p}{p} = \frac{x^p (1-x)^{q-1}}{p} \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx \\ &= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \\ &= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q). \end{aligned}$$

□

3. Pour chaque  $p > 0$  et  $q > 0$ , l'identité suivante est valable :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

*Démonstration.* Le produit  $\Gamma(p)\Gamma(q)$  peut être écrit comme :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{q-1} ds = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} t^{p-1} s^{q-1} dt ds,$$

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} t^{p-1} s^{q-1} dt ds.$$

Nous avons utilisé le changement de variable suivant  $t = xy$  et  $s = x(1-y)$ , alors  $s+t = x$  et  $\frac{t}{t+s} = y$ , pour  $0 < t < \infty$  et  $0 < s < \infty$ . Le Jacobien est  $\frac{D[t,s]}{D[x,y]} = -x$ , d'où :

$$dt ds = x dx dy,$$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x}(xy)^{p-1}x^{q-1}(1-y)^{q-1}xdxdy \\ &= \int_0^\infty e^{-x}x^{p+q+1}dx \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy,\end{aligned}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q).$$

□

4. Pour chaque  $p > 0$ , et pour le nombre naturel  $n$ , on peut prouver que

$$B(p, n) = B(n, p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{p(p+1) \dots (p+n)},$$

et aussi :

$$B(p, 1) = \frac{1}{p}.$$

Pour tous les nombres naturels  $m, n$  nous obtenons :

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

### 1.1.2 Fonctions intégrales

Dans cette section, nous introduisons les fonctions d'erreur, d'erreur imaginaire, complémentaire d'erreur et intégrale exponentielle, notées respectivement  $\operatorname{erf}(\cdot)$ ,  $\operatorname{erfi}(\cdot)$ ,  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  et  $\operatorname{Ei}(\cdot)$ .

La fonction d'erreur ( $\operatorname{erf}$ ) est définie comme suit :

$$\operatorname{erf}(az) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-a^2 z^2} dz.$$

La fonction d'erreur imaginaire (**erfi**) est définie comme suit :

$$\operatorname{erfi}(az) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{a^2 z^2} dz = -i \operatorname{erf}(iaz).$$

La fonction complémentaire d'erreur (**erfc**) est définie comme suit :

$$\operatorname{erfc}(az) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-a^2 z^2} dz.$$

La fonction intégrale exponentielle (**Ei**) est définie comme suit :

$$\operatorname{Ei}(az) = \int_{-\infty}^z \frac{e^{az}}{z} dz.$$

### Fonction de Mittag-Leffler

Dans cette section, nous introduisons les fonctions de Mittag-Leffler à un et deux paramètres, notées respectivement  $\mathbf{E}_\alpha()$  et  $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}()$ .

La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre, fonction de Mittag-Leffler à un paramètre ( $\mathbf{E}_\alpha$ ), est définie comme suit :

$$\mathbf{E}_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres ( $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}$ ), est définie comme suit :

$$\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0, \beta \in \mathbb{C}.$$

Pour des valeurs particulières de  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$\mathbf{E}_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (1.3)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (1.4)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - z - 1}{z^2} \quad (1.5)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha,\alpha+\beta}(z). \quad (1.6)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha,\alpha+\beta}(z).$$

## 1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous présentons un aperçu des propriétés fondamentales associées aux intégrales et dérivées fractionnaires. Ces propriétés seront essentielles lorsque nous aborderons l'analyse de problèmes spécifiques. Les informations présentées ici proviennent de diverses sources, notamment des livres et des articles académiques.

### 1.2.1 Intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Il existe de nombreuses généralisations potentielles du concept de dérivée d'une fonction qui peuvent répondre à la question : "Qu'est-ce que  $\frac{d^n}{dx^n}y(x)$  lorsque  $n$  est un nombre réel?" Notre exploration commence avec la formule de Cauchy pour une primitive  $n$ -ième d'une fonction  $f$ , exprimée comme :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N},$$

où l'on suppose que  $f(t) = 0$  pour  $t < a$ . Remarquez que  $(n-1)! = \Gamma(n)$ , où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler.

**Définition 1.1.** *L'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$*

est formellement donnée par

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.7)$$

où  $t \in [a, b]$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  et  $\Gamma(z)$  est la fonction gamma.

Un calcul direct donne

$${}_a I_t^\alpha (t-a)^p = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p+\alpha)} (t-a)^{p+\alpha}.$$

Dans le cas particulier où  $\alpha$  est un réel positif et  $f \in L^1(a, b)$ , l'intégrale  ${}_a I_t^\alpha f$  existe pour presque tous les  $t \in [a, b]$ . De plus,  ${}_a I_t^\alpha f \in L^1(a, b)$  (voir [44]). Pour  $\alpha = 0$ , nous définissons  ${}_a I_t^0 f = f$ . Cette définition est motivée par le raisonnement suivant. Supposons que  $f \in C^1([a, b])$ . Alors, après intégration par parties, à partir de (1.7), nous avons

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^\alpha f^{(1)}(\tau) d\tau,$$

de sorte que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a I_t^\alpha f(t) = f(a) + \int_a^t f^{(1)}(\tau) d\tau = f(t).$$

**Définition 1.2.** *L'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  est formellement donnée par*

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.8)$$

L'existence est la même que dans le cas de l'intégrale fractionnaire de gauche de Riemann-Liouville donnée ci-dessus.

Dans le cas particulier où  $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$  et  $g(t) = (b-t)^{\beta-1}$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , nous avons

$${}_a I_t^\alpha (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \operatorname{Re} : \alpha > 0, \operatorname{Re} : \beta > 0,$$

$${}_t I_b^\alpha (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1}, \quad \text{Re} : \alpha > 0, \text{Re} : \beta > 0.$$

Les opérateurs  ${}_a I_t^\alpha$  et  ${}_t I_b^\alpha$  avec  $\text{Re} : \alpha > 0$  sont des opérateurs bornés de  $L^p(a, b)$  dans  $L^p(a, b)$ ,  $p \geq 1$ . Les estimations suivantes sont valables :

$$\|{}_a I_t^\alpha f\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{\text{Re} : \alpha}}{|\Gamma(\alpha)| \text{Re} : \alpha} \|f\|_{L^p(a,b)}, \quad \|{}_t I_b^\alpha f\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{\text{Re} : \alpha}}{|\Gamma(\alpha)| \text{Re} : \alpha} \|f\|_{L^p(a,b)},$$

voir [44]. Si  $\alpha \in (0, 1)$  et  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ , alors les opérateurs  ${}_0 I_t^\alpha$  et  ${}_a I_t^\alpha$  sont bornés de  $L^p(a, b)$  dans  $L^q(a, b)$  pour  $q = \frac{p}{1-\alpha p}$  (voir [44, 46]).

Introduisons la fonction

$$\|x\| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Nous concluons que l'intégrale (1.7) peut être écrite sous la forme d'une convolution comme

$${}_a I_t^\alpha y(t) = f_\alpha(t) * y(t) = \int_a^t f(t-\tau) y(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

**Définition 1.3.** Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville  ${}_a D_t^\alpha f$  et  ${}_t D_b^\alpha f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re} \alpha \geq 0$ ,  $n-1 \leq \text{Re} \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , avec les hypothèses appropriées sur  $f$  (voir ci-dessous), sont définies comme

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_a I_t^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t \in (a, b). \quad (1.11)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} ({}_t I_b^{n-\alpha} f(t)) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t \in (a, b). \quad (1.12)$$

Si  $f \in AC([a, b])$  et  $n-1 \leq \text{Re} \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , alors  ${}_a D_t^\alpha f$  et  ${}_t D_b^\alpha f$  existent presque partout

sur  $[a, b]$  et

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (1.13)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (b-t)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (1.14)$$

À partir des définitions, il découle que dans le cas particulier où  $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$ ,  $t > a$ , et  $f(t) = (b-t)^{\beta-1}$ ,  $t < b$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$ , nous avons

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \\ {}_t D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

De plus, à partir de (1.13) et (1.14), pour une fonction constante  $f = C$ , nous avons

$${}_a D_t^\alpha C = \frac{C}{(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \text{ et } {}_t D_b^\alpha C = \frac{C}{(1-\alpha)} (b-t)^{-\alpha}$$

Aussi,  ${}_a D_t^\alpha f(t) = 0$  et  ${}_t D_b^\alpha g(t) = 0$ ,  $n-1 \leq \operatorname{Re} \alpha < n$ , si et seulement si, respectivement,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k (t-a)^{\alpha-k} \quad \text{et} \quad g(t) = \sum_{k=1}^n d_k (b-t)^{\alpha-k} \quad (1.16)$$

où  $c_k$  et  $d_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sont des constantes arbitraires. Ainsi, les fonctions  $f$  et  $g$  dans (1.16) jouent le rôle de constantes pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite, respectivement.

Soit  $\alpha = k + \gamma$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\gamma \in [0, 1)$ . Alors,  ${}_0 D_t^\alpha$  et  ${}_t D_b^\alpha$  peuvent être écrits comme

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{(1-\gamma)} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau, \quad t > 0, \\ {}_tD_b^\alpha f(t) &= (-1)^{k+1} \frac{1}{(1-\gamma)} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^\gamma} d\tau, \quad t < b. \end{aligned}$$

Parfois, de manière concise, on écrit  ${}_aD_t^\alpha f = f^{(\alpha)}$ .

Soit  $\alpha \in [0, 1)$ . Alors, pour  $t > a$  et  $t < b$ , nous avons

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \\ {}_tD_b^\alpha f(t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} d\tau. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Dans le cas où  $\alpha$  est purement imaginaire, c'est-à-dire  $\alpha = i\theta$ , la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche est définie comme

$${}_aD_t^{i\theta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{i\theta}} d\tau, \quad t \geq a.$$

Considérons le problème de déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} {}_aD_t^\alpha f$ . Alors, nous avons la proposition suivante

**Proposition 1.1** ([44]). *Supposons que  $f \in C^1([0, T])$ . Alors,  $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} {}_aD_t^\alpha f = f^{(1)}$*

Nous posons  $\frac{d^n}{dt^n}(\cdot) = D^n(\cdot)$ . La règle des indices s'applique aux intégrales et dérivées d'ordre entier

$$\begin{aligned} ({}_aI_t^n {}_aI_t^m) f(t) &= ({}_aI_t^m {}_aI_t^n) f(t) = ({}_aI_t^{n+m}) f(t), \quad n, m \in \mathbb{N}_0 \\ ({}_aD_t^n {}_aD_t^m) f(t) &= ({}_aD_t^m {}_aD_t^n) f(t) = ({}_aD_t^{n+m}) f(t), \quad n, m \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

La propriété de semi-groupe s'applique uniquement aux intégrales fractionnaires.

**Proposition 1.2** ([44]). *L'intégrale fractionnaire  ${}_aI_t^\alpha$  en tant qu'application de  $L^1(a, b) \rightarrow$*

$L^1(a, b)$  forme un semi-groupe commutatif par rapport aux ordres des intégrales. L'opérateur d'identité  ${}_a I_t^0$  est l'élément neutre. Ainsi, si  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$

$$\begin{aligned}({}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\beta) f(t) &= ({}_a I_t^\beta {}_a I_t^\alpha) f(t) = ({}_a I_t^{\alpha+\beta}) f(t), \\({}_t D_b^\alpha {}_t D_b^\beta) f(t) &= ({}_t D_b^\beta {}_t D_b^\alpha) f(t) = ({}_t D_b^{\alpha+\beta}) f(t),\end{aligned}$$

s'applique pour presque tous les  $t \in [a, b]$  (presque partout (p. p.) dans  $[a, b]$ ) si  $f \in L^p(a, b)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$

Il peut également être démontré que pour  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ ,  $f \in L^p(a, b)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , la composition des dérivées fractionnaires et des intégrales fractionnaires est valable, pour presque tous les  $t \in (a, b)$  (voir [44, 46]),

$$({}_a D_t^\alpha {}_a I_t^\alpha) f(t) = f(t), \quad \text{et} \quad ({}_t D_b^\alpha {}_t I_b^\beta) f(t) = f(t).$$

Montrant que  ${}_a D_t^\alpha, {}_t D_b^\alpha$  sont les inverses gauches de  ${}_a I_t^\alpha, {}_t I_b^\beta$ , respectivement, en appliquant  ${}_a D_t^\alpha$  et  ${}_t D_b^\alpha$  à droite de  ${}_a I_t^\alpha$ , et  ${}_t I_b^\beta$ , nous avons une situation différente. Pour examiner les relations résultantes, nous définissons les espaces suivants :

$$\begin{aligned}{}_a I_t^\alpha(L^p) &= \{f | f = {}_a I_t^\beta \varphi, \varphi \in L^p(a, b)\} \text{ et} \\{}_t D_b^\alpha(L^p) &= \{g | g = {}_t I_b^\beta \psi, \psi \in L^p(a, b)\}.\end{aligned}\tag{1.19}$$

**Proposition 1.3.** *Soit  $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ ,  $n - 1 \leq \operatorname{Re} \alpha < n$ . Alors, les résultats suivants sont vérifiés :*

i) Si  $f \in {}_a I_t^\alpha(L^p)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , alors

$$({}_a I_t^\alpha {}_a D_t^\alpha) f(t) = f(t), \text{ p. p. dans } [a, b].\tag{1.20}$$

ii) Si  $f \in L^1(a, b)$ ,  ${}_a I_t^{n-\alpha} f \in AC([a, b])$ , alors

$$({}_a I_t^\alpha {}_a D_t^\alpha) f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^m \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left[ \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}} ({}_a I_t^{n-\alpha}) \right]_{t=a}. \quad (1.21)$$

est vrai pour presque tout  $t \in [a, b]$ .

### 1.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Nous présentons la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo [44] et Caputo et Mainardi [46]. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'une fonction d'ordre  $\alpha$ , notée  ${}_a^C D_t^\alpha f$ , est définie comme suit :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 \leq \alpha \leq n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n, \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (1.22)$$

De même, la dérivée de Caputo à droite est définie comme

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \begin{cases} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 \leq \alpha \leq n \\ (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n, \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (1.23)$$

Il est facile de voir que

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad \text{et} \quad {}_t^C D_b^\alpha f(t) = (-1)^n {}_t I_b^{n-\alpha} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right),$$

où  ${}_a I_t^{n-\alpha}$  et  ${}_t I_b^{n-\alpha}$  sont les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville respectivement.

Remarquez que (1.22) pour  $a = 0$  peut être écrit comme

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{t^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} * \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad t > 0, \quad n-1 \leq \operatorname{Re} \alpha < n. \quad (1.24)$$

Notez que la dérivée de Caputo d'une fonction constante est nulle

$${}^C_a D_t^\alpha C = 0 \quad \text{et} \quad {}^C_t D_b^\alpha C = 0. \quad (1.25)$$

## 1.4 Dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard et $\Psi$ -Caputo

**Définition 1.4** (Intégrale fractionnaire de type Hadamard). *Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens Hadamard de la fonction  $f$  est définie par :*

$$({}_H I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (1.26)$$

**Définition 1.5** (Dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard). *La dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard de la fonction  $f$  est définie par :*

$$({}_H D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (1.27)$$

**Définition 1.6** ([55, 62, 64]). *L'intégrale fractionnaire de type  $\Psi$ -Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  pour la fonction continue  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par*

$$\mathcal{I}_a^{\alpha; \Psi} \phi(t) = \int_a^t \frac{(\Psi(t) - \Psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Psi'(s) \phi(s) ds.$$

.

**Définition 1.7** ([55, 62, 64]). *Les dérivées fractionnaires de  $\Psi$ -Caputo pour la fonction continue  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par*

$$\mathcal{D}_a^{\alpha; \Psi} \phi(t) = \int_a^t \frac{(\Psi(t) - \Psi(s))^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \Psi'(s) \partial_\Psi^n \phi(s) ds, \quad t > a, \quad n-1 < \alpha < n,$$

où  $\partial_{\Psi}^n = \left( \frac{1}{\Psi(\eta)} \frac{d}{d\eta} \right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## 1.5 Autres types de dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous introduisons d'autres formes d'intégrales et dérivées fractionnaires. Pour une revue complète des définitions, veuillez vous référer à [46].

### 1.5.1 Dérivée fractionnaire de Canavati

Une définition alternative des dérivées fractionnaires, qui s'avère utile pour dériver des inégalités, est la dérivée fractionnaire de Canavati. Cette dérivée se situe entre la dérivée de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo. Lorsque  $n - 1 < \alpha < n$ , la dérivée de Canavati d'ordre  $\alpha$  est définie comme suit :

$${}_a^{\text{Can}}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f^{(n-1)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau. \quad (1.28)$$

La dérivée de Canavati [11, 64] est utilisée dans [44, 46] pour  $f \in C^\alpha([a, b])$  où

$$C^\alpha([a, b]) = \{f \in C^{n-1}([a, b]) \mid {}_a I_t^{(n-1)} f^{(n-1)} \in C^1([a, b])\}.$$

### 1.5.2 Dérivées fractionnaires de Marchaud

La dérivée fractionnaire de Marchaud à gauche d'ordre  $0 < \alpha < 1$  pour  $f \in \mathcal{H}^\lambda([a, b])$ ,  $\lambda > \alpha$  (voir section 1. 1) est définie comme

$${}_a^M D_t^\alpha f(t) = \frac{f(t)}{\Gamma(1 - \alpha)(t - a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{f(t) - f(\tau)}{(t - \tau)^{1 + \alpha}} d\tau, \quad t \in [a, b]. \quad (1.29)$$

La dérivée fractionnaire de Marchaud à droite est définie comme

$${}_t^M D_b^\alpha f(t) = \frac{f(t)}{\Gamma(1 - \alpha)(b - t)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_t^b \frac{f(t) - f(\tau)}{(\tau - t)^{1 + \alpha}} d\tau, \quad t \in [a, b]. \quad (1.30)$$

Les intégrales dans (1.29) et (1.30) sont supposées convergentes. Pour préciser, soit

$$\psi_\varepsilon(t) = \int_a^{t-\varepsilon} \frac{f(t) - f(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha}} d\tau, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.31)$$

Ensuite,

$${}^M D_t^\alpha f(t) = \frac{f(t)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(t). \quad (1.32)$$

Si  $f \in L^p(a, b)$ , alors la limite dans (1.32) est considérée dans la norme de  $L^p(a, b)$ . Pour les fonctions appartenant à  $C^1([a, b])$ , les dérivées de Marchaud coïncident avec les dérivées correspondantes de Riemann-Liouville.

## 1.6 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre  $\alpha$  est, selon [44, 46], formellement définie comme

$${}^G L_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j f(t-jh) \right), \quad t > a, \quad \alpha > 0. \quad (1.33)$$

De même, la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre  $\alpha$  est définie comme

$${}^G L_t D_b^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j f(t+jh) \right), \quad t > a, \quad \alpha > 0. \quad (1.34)$$

Il existe une connexion entre les dérivées fractionnaires de Marchaud et de Grünwald-Letnikov

**Proposition 1.4.** *Soit  $f \in L^p(a, b)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Alors, la limite (1.33) existe au sens de la convergence  $L^p(a, b)$ , si et seulement s'il existe la dérivée fractionnaire de Marchaud au sens de (1.32). Les deux limites, si elles existent, sont égales presque partout.*

## 1.7 Espaces fonctionnels fractionnaires

Avant d'explorer les solutions des équations différentielles, il est impératif d'identifier l'espace fonctionnel dans lequel réside la solution. Cette détermination facilite l'établissement de propriétés de régularité spécifiques. Les sujets abordés dans les sections suivantes font usage de divers espaces de Banach introduits dans cette sous-section ou construits sur la base des définitions fournies ci-dessous. Il est pertinent de reconnaître que la liste présentée ici n'est pas exhaustive. Pour une exploration plus approfondie de ce sujet, nous renvoyons les lecteurs à la littérature spécialisée dans ce domaine, comme documenté dans les références [20, 28].

**Définition 1.8.** *Nous désignons par  $AC(0, 1)$  l'espace des fonctions absolument continues définies sur  $[0, 1]$ . En fait,  $x \in AC(0, 1)$  si et seulement s'il existe  $\phi \in L^1((0, 1), \mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}$  tels que*

$$x(t) = c + \int_0^t \phi(s) ds \text{ pour } t \in (0, 1).$$

où  $L^1([0, 1], \mathbb{R})$  est l'espace de Banach des fonctions intégrables de Lebesgue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  avec la norme  $\|h\|_{L^1} = \int_0^1 |h(t)| dt$ . Également, nous définissons  $AC^{n-1}(0, 1)$  par

$$AC^{n-1}(0, 1) = \{x \in C^{n-2}, x^{(n-1)} \in AC(0, 1)\}.$$

**Théorème 1.2** ([63]). *Si  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en chaque point de  $[a, b]$  et  $\theta' \in L^1$  sur  $[a, b]$ , alors*

$$\theta(t) - \theta(a) = \int_a^t \theta'(\tau) d\tau.$$

**Théorème 1.3** ([26]). *Si  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i)  $\theta$  est absolument continue sur  $[a, b]$ .
- (ii)  $\theta(t) - \theta(a) = \int_a^t \phi(\tau) d\tau$  pour un certain  $\phi \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ .
- (iii)  $\theta$  est différentiable presque partout sur  $[a, b]$ ,  $\theta' \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ , et  $\theta(t) - \theta(a) = \int_a^t \theta'(\tau) d\tau$ .

## 1.8 Fonctions de contrôle inférieure et supérieure

Les outils de base présentés dans cette section peuvent être rappelés depuis [6, 7, 11, 12, 45, 47, 55, 62, 64, 65], où plus de détails peuvent être trouvés.

Soit  $\Psi : [\ell_1, \ell_2] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante avec  $\Psi'(\eta) > 0, \forall \eta$ . Le symbole  $Y = C([\ell, \mathcal{T}], \mathbb{R})$  représente l'espace de Banach des fonctions continues  $\phi : [\ell, \mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  avec la norme  $\|\phi\| = \sup\{|\phi(\eta)| : \eta \in [\ell, \mathcal{T}]\}$ .

Nous définissons  $\mathcal{A} = \{\phi \in Y : \phi(\eta) \geq 0, \eta \in [\ell, \mathcal{T}]\}$  comme un sous-ensemble de  $Y$  constitué de toutes les fonctions positives dans  $Y$ . Supposons  $\hbar_1, \hbar_2 \in \mathbb{R}^+$  avec  $\hbar_2 > \hbar_1$ . Pour toute  $\phi, \chi \in [\hbar_1, \hbar_2]$ , nous associons la fonction de contrôle inférieure

$$L(\eta, \phi, \chi) = \inf\{\mathcal{F}(\eta, \nu, \mu) : \phi \leq \nu \leq \hbar_2, \chi \leq \mu \leq \hbar_2\},$$

et la fonction de contrôle supérieure

$$U(\eta, \phi, \chi) = \sup\{\mathcal{F}(\eta, \nu, \mu) : \hbar_1 \leq \nu \leq \phi, \hbar_1 \leq \mu \leq \chi\}.$$

La fonction  $\mathcal{F}$  a été définie précédemment dans la Section 1. Sur les arguments  $\phi, \chi, L$  et  $U$  sont non-décroissantes et

$$L(\eta, \phi, \chi) \leq \mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) \leq U(\eta, \phi, \chi).$$

**Lemme 1.1** ([55]). *Supposons  $q, \ell > 0$ , et  $\phi \in C([\ell, \hbar], \mathbb{R})$ . Alors  $\forall \eta \in [\ell, \hbar]$  et en supposant  $F_\ell(\eta) = \Psi(\eta) - \Psi(\ell)$ , nous avons*

- $\mathcal{D}_\ell^{q;\Psi} \mathcal{I}_\ell^{q;\Psi} \phi(t) = \phi(t),$
- $\mathcal{I}_\ell^{q;\Psi} (F_\ell(\eta))^{\ell-1} = \frac{\Gamma(\ell)}{\Gamma(\ell+q)} (F_\ell(\eta))^{\ell+q-1},$
- $\mathcal{D}_\ell^{q;\Psi} (F_\ell(\eta))^{\ell-1} = \frac{\Gamma(\ell)}{\Gamma(\ell-q)} (F_\ell(\eta))^{\ell-q-1},$
- $\mathcal{D}_\ell^{q;\Psi} (F_\ell(\eta))^k = 0, k \in \{0, \dots, n-1\}, n \in \mathbb{N}, q \in (n-1, n].$

## 1.9 Préliminaires

Dans cette partie, nous présentons quelques techniques, définitions, lemmes et théorèmes importants. Pour plus de détails, voir [11, 15, 38, 39, 62, 64].

**Lemme 1.2** ([15, 62]). *Pour  $\alpha \in (n-1, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . L'égalité  $(\mathfrak{J}_1^\alpha \mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa)(t) = 0$  est vraie si et seulement si*

$$\varkappa(t) = \sum_{k=1}^n c_k (\log t)^{\alpha-k}$$

où  $c_k \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire pour  $k = 1, \dots, n$ .

**Lemme 1.3** ([15, 62]). *Soit  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $\varkappa \in C^{m-1}[1, \infty)$ . Alors*

$$\mathfrak{J}_1^\alpha [\mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa(t)] = \varkappa(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\delta^k \varkappa)(1)}{\Gamma(k+1)} (\log t)^k.$$

**Lemme 1.4** ([15, 62]). *Pour tout  $\rho > 0$  et  $\nu > -1$ ,*

$$\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_1^t (\log(t/\tau))^{\rho-1} (\log \tau)^\nu \frac{d\tau}{\tau} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\rho+\nu+1)} (\log t)^{\rho+\nu}.$$

**Lemme 1.5** ([15, 62]). *Soit  $\varkappa(t) = (\log t)^\rho$ , où  $\rho \geq 0$  et soit  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Alors*

$$\mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \\ \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\rho+\nu+1)} (\log t)^{\rho-\nu} & \text{si } \rho \in \mathbb{N}, \rho \geq m \text{ ou } \rho \notin \mathbb{N}, \rho > m-1. \end{cases}$$

**Remarque 1.1.** *Par les définitions 1.6, 1.7 et le lemme 1.3, il est évident de voir que*

(i) *Soit  $\Re(\alpha) > 0$ . Si  $\varkappa$  est continue sur  $[1, +\infty)$ , alors  $\mathfrak{D}_1^\alpha \mathfrak{J}_1^\alpha \varkappa(t) = \varkappa(t)$  pour tout  $[1, +\infty)$ .*

(ii) *Soit  $\varkappa(t) = c$ ,  $\mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa(t) = 0$ .*

Soit  $\mathcal{E} = \{\varkappa \in C([1, \infty)) : \sup_{t \geq 1} |\varkappa(t)| / \mathfrak{h}(\log t) < \infty\}$ , qui représente un lien important dans notre discussion. Soit  $\mathfrak{h} : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  une fonction croissante strictement avec

$\mathfrak{h}(0) = 1$ ,  $\mathfrak{h}(\log t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , et

$$\mathfrak{h}(\log \tau) \mathfrak{h}(\log(t/\tau)) \leq \mathfrak{h}(\log t) \text{ pour tout } 1 \leq \tau \leq t \leq \infty.$$

Alors  $\mathcal{E}$  est un espace de Banach équipé de  $\|\mathcal{X}\| = \sup_{t \geq 1} \frac{|\mathcal{X}(t)|}{\mathfrak{h}(\log t)}$ . Pour plus d'informations sur cet espace, voir [55]. De plus, soit

$$\|\Psi\|_t = \max \{ |\Psi(\tau)| : 1 \leq \tau \leq t \},$$

pour tout  $t \geq 1$ , donné  $\Psi \in C([1, \infty))$ , soit  $\mathfrak{B}(\varepsilon) = \{ \mathcal{X} \in \mathcal{E} : \|\mathcal{X}(t)\| \leq \varepsilon \text{ pour } t \in [1, \infty) \}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

## 1.10 La $\nu$ -ième dérivée fractionnaire

**Définition 1.9** ([22]). *Pour une fonction au moins  $n$ -fois différentiable  $\chi : [\mathfrak{a}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\nu$  est définie par*

$$\left({}^C \mathfrak{D}_0^\nu\right) \chi(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^\varsigma (\varsigma-s)^{n-\alpha_1-1} \chi^{(n)}(s) ds, \text{ pour } n-1 < \nu < n,$$

où  $n = [\nu] + 1$ .

**Définition 1.10** ([22]). *Le IFRL d'ordre  $\nu$  pour une fonction  $\chi : [\mathfrak{a}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est défini comme*

$$\left({}^{RL} \mathfrak{J}^\nu\right) \chi(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\mathfrak{a}}^\varsigma \frac{\chi(s)}{(\varsigma-s)^{1-\nu}} ds, \text{ pour } \nu > 0,$$

à condition que l'intégrale existe.

**Définition 1.11** ([22]). *La IFH d'ordre  $\nu$  est définie par*

$$\left({}^H \mathfrak{J}^\nu\right) \chi(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\mathfrak{b}}^\varsigma \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\nu-1} \frac{\chi(s)}{s} ds, \nu > 0.$$

sous réserve de l'existence de l'intégrale.

**Définition 1.12** ([22]). *Le DFCH est défini comme*

$${}^H\mathcal{D}^\nu \chi(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^\varsigma \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{n-\nu-1} \partial^n \frac{\chi(s)}{s} ds, n-1 < \nu < n, n = [\nu] + 1,$$

où  $\chi : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $n$ -fois différentiable et  $\partial^n = \left(\varsigma \frac{d}{d\varsigma}\right)^n$ .

Soit  $\psi : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , croissante par  $\psi'(\varsigma) \neq 0, \forall \varsigma$ . Nous commençons cette partie par définir les intégrales et dérivées fractionnaires par rapport à  $\psi$ . Dans toutes les notations de cette section, nous posons

$$\partial_\psi = \frac{1}{\psi'(\varsigma)} \frac{d}{d\varsigma}.$$

**Définition 1.13** ([7, 46]). *La  $\nu$ -ième  $\psi$ -intégrale pour une fonction intégrable  $\chi : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$  par rapport à  $\psi$  est illustrée comme suit :*

$$\mathcal{I}_{\tau_1^+}^{\nu; \psi} \chi(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\tau_1}^\varsigma (\psi(\varsigma) - \psi(\xi))^{\nu-1} \psi'(\xi) \chi(\xi) d\xi, \quad (1.35)$$

où

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-\varsigma} \varsigma^{\nu-1} d\varsigma, \nu > 0.$$

**Définition 1.14** ([7, 46]). *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\nu \in C^n[\tau_1, \tau_2]$  tel que  $\psi$  possède les mêmes propriétés mentionnées ci-dessus. La  $\nu$ -ième dérivée fractionnaire  $\psi$  de  $\chi$  est définie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{\nu; \psi} \chi(\varsigma) &= \partial_\psi^{(n)} \mathcal{I}_{\tau_1^+}^{n-\nu; \psi} \chi(\varsigma) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \partial_\psi^{(n)} \int_{\tau_1}^\varsigma (\psi(\varsigma) - \psi(\xi))^{n-\nu-1} \psi'(\xi) \chi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

dans lequel  $n = [\nu] + 1$ . La  $\nu$ -ième dérivée de Caputo  $\psi$  de  $\chi$  est définie par

$${}^C\mathcal{D}_{\tau_1^+}^{\nu; \psi} \chi(\varsigma) = \mathcal{I}_{\tau_1^+}^{n-\nu; \psi} \partial_\psi^n \chi(\varsigma),$$

dans lequel  $n = [\nu] + 1$  pour  $\nu \notin \mathbb{N}$ ,  $n = \nu$  pour  $\nu \in \mathbb{N}$ . La  $\nu$ -ième dérivée de Caputo  $\psi$  de

$\chi$  est définie par

$${}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{v;\psi} \chi(\varsigma) = \begin{cases} \partial_{\psi}^n \chi(\varsigma) & v \in \mathbb{N}, \\ \int_{\tau_1}^{\varsigma} \frac{\psi'(\xi)(\psi(\varsigma)-\psi(\xi))^{n-v-1}}{\Gamma(n-v)} \partial_{\psi}^n \chi(\xi) d\xi, & v \notin \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.36)$$

Cette dérivée donne la dérivée de Caputo-Hadamard et la dérivée de Caputo lorsque  $\psi(\varsigma) = \ln \varsigma$  et  $\psi(\varsigma) = \varsigma$ , respectivement. La  $v$ -ième dérivée de Caputo  $\psi$  de la fonction  $\chi$  est spécifiée comme ([46], Théorème 3)

$${}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{v;\psi} \chi(\varsigma) = \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{v;\psi} \left( \chi(\varsigma) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial_{\psi}^k \chi(\tau_1)}{k!} (\psi(\varsigma) - \psi(\tau_1))^k \right).$$

On peut utiliser les règles de configuration pour les opérateurs  $\psi$  ci-dessus.

**Lemme 1.6** ([7, 46]). *Soit  $n-1 < v < n$  et  $\chi \in C^n[\tau_1, \tau_2]$ . Alors ce qui suit est vrai :*

$$\mathcal{I}_{\tau_1^+}^{q;\psi} \left( {}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{q;\psi} \chi(\varsigma) \right) = \chi(\varsigma) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial_{\psi}^k \chi(\tau_1)}{k!} [\psi(\varsigma) - \psi(\tau_1)]^k,$$

pour tout  $\varsigma \in [\tau_1, \tau_2]$ . De plus, si  $m \in \mathbb{N}$  et  $\chi \in C^{n+m}[\tau_1, \tau_2]$ , alors nous obtenons

$$\partial_{\psi}^m \left( {}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{v;\psi} \chi(\varsigma) \right) (\varsigma) = {}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{v+m;\psi} \chi(\varsigma) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[\psi(\varsigma) - \psi(\tau_1)]^{k+n-v-m}}{\Gamma(k+n-v-m+1)} \partial_{\psi}^{k+m} \chi(\tau_1).$$

Notez que si  $\partial_{\psi}^k \chi(\tau_1) = 0, \forall k = n, n+1, \dots, n+m-1$ , nous concluons cette relation :

$$\partial_{\psi}^m \left( {}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{v;\psi} \chi(\varsigma) \right) (\varsigma) = {}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{v+m;\psi} \chi(\varsigma), \quad \varsigma \in [\tau_1, \tau_2].$$

**Lemme 1.7** ([7, 46]). *Soit  $q, q' > 0$  et  $\chi \in C[\tau_1, \tau_2]$ . Alors,  $\forall \varsigma \in [\tau_1, \tau_2]$  en supposant  $F_{\tau_1}(\varsigma) = \psi(\varsigma) - \psi(\tau_1)$ , nous avons*

1.  $\mathcal{I}_{\tau_1^+}^{q;\psi} \mathcal{I}_{\tau_1^+}^{q';\psi} \chi(\varsigma) = \mathcal{I}_{\tau_1^+}^{q+q';\psi} \chi(\varsigma);$
2.  ${}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{q;\psi} \mathcal{I}_{\tau_1^+}^{q;\psi} \chi(\varsigma) = \chi(\varsigma);$

3.  $\mathcal{I}_{\tau_1^+}^{q;\Psi} (\chi(\zeta))^{q'-1} = \frac{\Gamma(q')}{\Gamma(q'+q)} (F_{\tau_1}(\zeta))^{q'+q-1};$
4.  ${}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{q;\Psi} (F_{\tau_1}(\zeta))^{q'-1} = \frac{\Gamma(q')}{\Gamma(q'-q)} (F_{\tau_1}(\zeta))^{q'-q-1}$
5.  ${}^C \mathcal{D}_{\tau_1^+}^{q;\Psi} (F_{\tau_1}(\zeta))^k = 0, (k = 0, \dots, n-1), n \in \mathbb{N}, q \in (n-1, n].$

## 1.11 Entre l'EFD et l'équation intégrale

L'objectif principal de cette sous-section est de dériver des résultats généraux qui sont parallèles aux résultats standards classiques dans les domaines du calcul différentiel et intégral.

**Théorème 1.4** (Théorème fondamental du calcul classique). *Soit  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par*

$$X(t) = \int_a^t x(s) ds.$$

Alors,  $X$  est dérivable et  $X' = x$ .

**Lemme 1.8** ([55]). *Supposons que  $u \in C(0, 1) \cap L^1(0, 1)$  avec une dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  qui appartient à  $u \in C(0, 1) \cap L^1(0, 1)$ , alors*

$$I_{0+}^\alpha D_0^\alpha u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n},$$

pour certains  $C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Lemme 1.9** ([55]). *Pour  $\alpha > 0$ , la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire  $D_{0+}^\alpha u(t) = 0$  est donnée par*

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n},$$

où  $C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ , et  $n = [\alpha] + 1$ .

**Lemme 1.10.** Soit  $v \in L^1((0,1),\mathbb{R})$ , alors

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds,$$

est la solution continue unique sur  $[0,1]$  de l'équation

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = v(t), \quad (1.37)$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$u(+) = 0, \quad D^{(\alpha-i)} u(0) = 0, \quad i = 1, \dots, [\alpha]. \quad (1.38)$$

*Démonstration.* En effet, nous pouvons appliquer le Lemme 1.9 pour réduire l'équation (1.37) à une équation intégrale équivalente

$$u(t) = I_{0+}^{\alpha} v(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n},$$

pour certains  $C_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . En utilisant les conditions initiales  $u(0) = 0$ ,  $D(\alpha - i)u(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, [q]$ , nous obtenons  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ . En substituant ces valeurs dans la dernière formule, nous obtenons l'expression de la solution unique de (1.37) sous réserve des conditions (1.38) on a  $u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds$  □

# Théorèmes d'existence et d'unicité

Dans des scénarios généraux, lors de l'approche d'une équation différentielle fractionnaire, il devient nécessaire de chercher une solution dans un espace fonctionnel approprié. Ensuite, le problème est modifié de manière appropriée, et l'un des théorèmes des points fixes est appliqué, souvent en conjonction avec des estimations utiles supplémentaires et des inégalités établies. Cette approche est utilisée pour établir les résultats souhaités concernant l'existence, l'unicité ou la stabilité.

## 2.1 Théorie des points fixes

### 2.1.1 Théorème des points fixes de Banach

Rappelons qu'un problème de valeur initiale

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

peut être exprimé comme une équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (2.2)$$

à partir de laquelle une séquence de fonctions  $\{x_n\}$  peut être définie par induction

$$x_0(t) = x_0, \quad x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds,$$

et, en général,

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds. \quad (2.3)$$

Cela s'appelle la méthode des approximations successives de Picard et, sous des conditions générales sur  $f$ , on peut montrer que  $\{x_n\}$  converge uniformément sur un intervalle  $|t - t_0| \leq k$  vers une fonction continue, disons  $x$ . En prenant la limite dans l'équation définissante  $x_{n+1}$ , on passe la limite à travers l'intégrale et on obtient

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

de sorte que  $x(t_0) = x_0$  et, après différenciation, on obtient  $x'(t) = f(t, x(t))$ . Ainsi,  $x$  est une solution du problème de valeur initiale.

Banach a réalisé que c'était en fait un théorème des points fixes avec une large application. En définissant un opérateur  $B$  sur un espace métrique complet  $C([t_0, t_0 + k], \mathbb{R})$  avec la norme du supremum  $\|\cdot\|$  pour  $x \in C$  implique

$$(Bx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2.4)$$

Si un point fixe de l'opérateur  $B$ , noté comme  $B\phi = \phi$ , est trouvé, cela correspond à une solution du problème de valeur initiale. Cette approche avait deux caractéristiques remarquables. Premièrement, elle a trouvé des applications dans des problèmes à travers un large éventail de disciplines mathématiques impliquant des espaces métriques complets. Deuxièmement, elle introduisait un niveau de clarté et de rigueur. Par exemple, les démonstrations souvent complexes et incertaines des théorèmes des fonctions implicites ont été simplifiées et renforcées par l'application de la théorie des points fixes. Dans ce contexte, nous utiliserons cette théorie pour démontrer l'existence de solutions pour divers types d'équations différentielles.

**Définition 2.1.** Soit  $(E, \rho)$  un espace métrique complet et  $B : E \rightarrow E$ . L'opérateur  $B$  est un opérateur contractant s'il existe un  $\lambda \in (0, 1)$  tel que  $x, y \in E$  implique

$$\rho(Bx, By) \leq \lambda \rho(x, y).$$

**Théorème 2.1** (Principe de la contraction). *Soit  $(E, \rho)$  un espace métrique complet et  $B : E \rightarrow E$  un opérateur contractant. Alors, il existe un unique  $x \in E$  tel que  $Bx = x$ . De plus, si  $y \in E$  et si  $\{y_n\}$  est définie de manière inductive par  $y_1 = By_0$  et  $y_{n+1} = By_n$ , alors  $y_n \rightarrow x$ , le point fixe unique. En particulier, l'équation  $Bx = x$  a une et une seule solution.*

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in E$  et définissons une séquence  $\{x_n\}$  dans  $E$  par  $x_1 = Bx_0$ ,  $x_2 = Bx_1 = B^2x_0, \dots, x_n = Bx_{n-1} = B^n x_0$ . Pour voir que  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy, notons que si  $m > n$ , alors

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(B^n x_0, B^m x_0) \\ &\leq \lambda \rho(B^{n-1} x_0, B^{m-1} x_0) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^n \rho(x_0, x_{m-n}) \\ &\leq \lambda^n \{ \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \} \\ &\leq \lambda^n \{ \rho(x_0, x_1) + \lambda \rho(x_0, x_1) + \dots + \lambda^{m-n-1} \rho(x_0, x_1) \} \\ &= \lambda^n \rho(x_0, x_1) \{ 1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-n-1} \} \\ &\leq \lambda^n \rho(x_0, x_1) \left\{ \frac{1}{1 - \lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $\lambda < 1$ , le côté droit tend vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi,  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy et  $(E, \rho)$  est complet, donc elle a une limite  $x \in E$ . Maintenant,  $B$  est certainement continu, donc

$$Bx = B \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Bx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

et  $x$  est un point fixe. Pour voir que  $x$  est le point fixe unique, supposons que  $Bx = x$  et  $By = y$ . Alors

$$\rho(x, y) = \rho(Bx, By) \leq \lambda \rho(x, y),$$

et, parce que  $\lambda < 1$ , nous concluons que  $\rho(x, y) = 0$ , de sorte que  $x = y$ . Cela complète la démonstration.

En appliquant ce résultat à (2.1), un événement dérangentant s'est produit que nous décrivons brièvement. Supposons que  $f$  soit continue et satisfasse une condition de Lipschitz globale en  $x$ , disons

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ . Alors, par (2.4), nous obtenons (pour  $t \geq t_0$ )

$$\begin{aligned} |Bx_1(t) - Bx_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t L|x_1(s) - x_2(s)| ds, \end{aligned}$$

de sorte que si  $\|\cdot\|$  est la norme sup sur les fonctions continues sur  $[t_0, t_0 + k]$ , alors

$$\|Bx_1 - Bx_2\| \leq Lk\|x_1 - x_2\|.$$

C'est une contraction si  $Lk = \lambda < 1$ . Maintenant,  $L$  est fixé et nous prenons  $k$  assez petit pour que  $Lk < 1$ . Cela donne un point fixe qui est une solution de (2.1) sur  $[t_0, t_0 + k]$ .  $\square$

Cependant, l'aspect préoccupant est que cet intervalle est plus court que celui fourni par les résultats des approximations successives de Picard. Bien que cette disparité puisse être adéquatement résolue dans de nombreux cas significatifs, elle reste déconcertante. Heureusement, deux remèdes sont disponibles. Hale [35] propose une métrique alternative qui résout cette disparité. Une autre approche implique l'utilisation de théorèmes des points fixes asymptotiques. En plus de celui discuté, nous explorerons deux autres théorèmes des points fixes asymptotiques, à savoir ceux de Browder et de Horn.

**Théorème 2.2.** *Soit  $(E, \rho)$  un espace métrique complet et supposons que  $B : E \rightarrow E$  tel que  $B^m$  est une contraction pour un entier positif fixe  $m$ . Alors,  $B$  a un point fixe dans  $E$ .*

*Démonstration.* Soit  $x$  le point fixe unique de  $B^m$ ,  $B^m x = x$ . Alors  $BB^m x = Bx$  et  $BB^m x = B^m Bx$  donc  $B^m Bx = Bx$ . Ainsi,  $Bx$  est également un point fixe de  $B^m$  et donc, par unicité,

$Bx = x$ . Ainsi,  $x$  est un point fixe de  $B$ . De plus, il est unique car si  $By = y$ , alors  $B^m y = y$  donc  $x = y$ . Cela complète la preuve.  $\square$

Le terme "contraction" est utilisé de différentes manières dans la littérature. Notre utilisation est parfois notée "contraction stricte". La propriété  $\rho(Bx, By) \leq \rho(x, y)$  est parfois appelée "contraction" mais elle a une utilisation limitée dans la théorie des points fixes. Un concept entre ces deux, qui est fréquemment utile, est décrit dans le résultat suivant.

**Théorème 2.3.** *Soit  $(E, \rho)$  un espace métrique compact non vide,*

$$B : E \rightarrow E \text{ et } \rho(Bx, By) < \rho(x, y),$$

*pour  $x \neq y$ . Alors  $B$  a un point fixe unique.*

*Démonstration.* Nous avons

$$\rho(x, Bx) \leq \rho(x, y) + \rho(y, Bx) \leq \rho(x, y) + \rho(y, By) + \rho(By, Bx),$$

et comme  $\rho(By, Bx) \leq \rho(x, y)$ , nous concluons

$$\rho(x, Bx) - \rho(y, By) \leq 2\rho(x, y).$$

La permutation de  $x$  et  $y$  donne

$$|\rho(x, Bx) - \rho(y, By)| \leq 2\rho(x, y).$$

Ainsi, la fonction  $\vartheta : E \rightarrow [0, \infty)$  définie par  $\vartheta(x) = \rho(x, Bx)$  est continue sur  $E$ . La compacité de  $E$  donne  $z \in E$  avec  $\rho(z, Bz) = \rho(Bz, z) = \inf_{x \in E} \rho(x, Bx)$ . Si  $\rho(Bz, z) \neq 0$ , alors  $0 \leq \rho(B(Bz), Bz) < \rho(Bz, z)$ , ce qui contredit la propriété de l'infimum. Ainsi,  $\rho(Bz, z) = 0$  et  $Bz = z$ . S'il existe un autre point fixe distinct, disons  $By = y$ , alors  $\rho(y, z) = \rho(By, Bz) < \rho(y, z)$ , une contradiction pour  $y \neq z$ . Cela complète la preuve.  $\square$

Remarquez que les approximations successives sont constructives dans l'esprit. Au moins en théorie, on peut commencer avec  $x_0 \in E$ , calculer  $x_1, \dots, x_n$ . Souvent, on s'intéresse à déterminer à quel point  $x_0$  et  $x_n$  sont proches du point fixe unique  $x$ . Le résultat suivant donne une approximation.

**Théorème 2.4.** *Si  $(E, \rho)$  est un espace métrique complet et  $B : E \rightarrow E$  est un opérateur de contraction avec le point fixe  $x$ , alors pour tout  $y \in E$  nous avons*

$$(a) \rho(x, y) \leq \rho(By, y)/(1 - \lambda)$$

et

$$(b) \rho(B^n y, x) \leq \lambda^n \rho(By, y)/(1 - \lambda).$$

*Démonstration.* Pour prouver (a), nous notons que

$$\rho(y, x) \leq \rho(y, By) + \rho(By, Bx) \leq \rho(y, By) + \lambda \rho(y, x),$$

de sorte que

$$\rho(y, x)(1 - \lambda) \leq \rho(y, By).$$

Pour (b), rappelez-vous que dans la preuve du Théorème 2.3 nous avons

$$\rho(B^n y, B^m y) \leq \lambda^n \rho(By, y)/(1 - \lambda).$$

Comme  $m \rightarrow \infty, B^m y \rightarrow x$  de sorte que

$$\rho(B^n y, x) \leq \lambda^n \rho(y, By)/(1 - \lambda).$$

Cela complète la preuve. □

### 2.1.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

**Définition 2.2.** *Soit  $\mathcal{M}$  un sous-ensemble d'un espace de Banach et  $A : \mathcal{M} \rightarrow E$  une application. Si  $A$  est continue et que  $A\mathcal{M}$  est contenu dans un ensemble compact de*

$E$ , alors nous disons que  $A$  est une application compacte (nous disons aussi que  $A$  est complètement continue).

**Théorème 2.5** (Schauder, [47, 56, 65]). *Soit  $\mathcal{M}$  un ensemble convexe dans un espace de Banach  $E$  et  $A : \mathcal{M} \rightarrow E$  une application compacte. Alors  $A$  a un point fixe.*

En 1955, Krasnoselskii (voir [56, 65]) a observé que dans bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé donne lieu à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il déclare alors,

**Principe : l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé peut produire une somme de deux applications, une contraction et un opérateur compact.**

Pour mieux comprendre cette observation de Krasnoselskii, considérons l'équation différentielle suivante.

$$x'(t) = -a(t)x(t) - g(t, x). \quad (2.5)$$

Nous pouvons transformer cette équation sous une autre forme en écrivant, de manière formelle

$$x'(t) e^{-\int_0^t a(s) ds} = -a(t) e^{-\int_0^t a(s) ds} x(t) - g(t, x) e^{-\int_0^t a(s) ds},$$

ainsi

$$x'(t) e^{-\int_0^t a(s) ds} + a(t) e^{-\int_0^t a(s) ds} x(t) = -g(t, x) e^{-\int_0^t a(s) ds},$$

ou

$$\left( x(t) e^{-\int_0^t a(s) ds} \right)' = -g(t, x) e^{-\int_0^t a(s) ds},$$

puis en intégrant de  $t - T$  à  $t$ , nous obtenons

$$\int_{t-T}^t \left( x(u) e^{-\int_0^u a(s) ds} \right)' du = - \int_{t-T}^t g(u, x) e^{-\int_0^u a(s) ds} du,$$

ce qui donne

$$x(t) e^{-\int_0^t a(s) ds} - x(T-t) e^{-\int_0^{T-t} a(s) ds} = - \int_{t-T}^t g(u, x) e^{-\int_0^u a(s) ds} du,$$

ou

$$x(t) = x(T-t) e^{-\int_{T-t}^t a(s) ds} - \int_{t-T}^t g(u, x) e^{-\int_t^u a(s) ds} du. \quad (2.6)$$

Si nous supposons que  $e^{-\int_{T-t}^t a(s) ds} := \lambda$  et si  $(E, \|\cdot\|)$  est l'espace de Banach des fonctions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow E$  continues, alors l'équation (2.6) peut être écrite comme

$$\varphi(t) = (B\varphi)(t) + (A\varphi)(t) := (P\varphi)(t).$$

où  $B$  est une contraction à condition que la constante  $\lambda < 1$  et  $A$  est une application compacte.

Cet exemple montre la naissance de l'application  $P\varphi := B\varphi + A\varphi$  qui est identifiée comme la somme d'une contraction et d'une application compacte.

Ainsi, la recherche de la solution pour (2.6) nécessite un théorème approprié qui s'applique à cet opérateur hybride  $P$  et qui peut conclure à l'existence d'un point fixe qui sera, à son tour, solution de l'équation initiale (2.5). Krasnoselskii a trouvé la solution en combinant les deux théorèmes de Banach et celui de Schauder dans un seul théorème hybride qui porte son nom. En substance, il établit le résultat suivant [65].

**Théorème 2.6** (Krasnoselskii [65]). *Soit  $\mathcal{M}$  un sous-ensemble convexe non vide et fermé d'un espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$ . Supposons que  $A$  et  $B$  sont des applications de  $\mathcal{M}$  dans  $E$  telles que*

- (i)  $Ax + By \in \mathcal{M}$  pour tous  $x, y \in \mathcal{M}$ ,
- (ii)  $A$  est continue et  $A\mathcal{M}$  est contenu dans un ensemble compact de  $E$ ,
- (iii)  $B$  est une contraction avec une constante  $\lambda < 1$ .

Alors, il existe un  $x \in \mathcal{M}$  tel que  $Ax + Bx = x$ .

Notez que si  $A = 0$ , le théorème devient le théorème de Banach. Si  $B = 0$ , alors le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

*Démonstration.* Selon la condition (iii), nous avons

$$\|(I - B)x - (I - B)y\| = \|(x - y) - (Bx - By)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x - y\| + \|Bx - By\| \\
&\leq \|x - y\| + \lambda \|x - y\| \\
&= (1 + \lambda) \|x - y\|,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|(x - y) - (Bx - By)\| \\
&\geq \|x - y\| - \|Bx - By\| \\
&\geq \|x - y\| - \lambda \|x - y\| \\
&= (1 - \lambda) \|x - y\|.
\end{aligned}$$

En résumé

$$(1 - \lambda) \|x - y\| \leq \|(I - B)x - (I - B)y\| \leq (1 + \lambda) \|x - y\|.$$

Cette inégalité montre que  $(I - B) : \mathcal{M} \rightarrow (I - B)\mathcal{M}$  est continue et bijective. Ainsi,  $(I - B)^{-1}$  existe et est continue. Posons  $U := (I - B)^{-1}A$ . Il est clair que  $U$  est une application compacte, car  $U$  est une composition d'une application continue avec une compacte. Selon le théorème de Schauder,  $U$  a un point fixe, c'est-à-dire

$$\exists z \in \mathcal{M} \text{ tel que } (I - B)^{-1}Az = z.$$

Cela équivaut à  $z = Az + Bz$ . □

**Lemme 2.1** (Théorème d'Arzelà-Ascoli). *Soit  $X$  un espace métrique compact et  $Y$  un espace métrique quelconque. Un sous-ensemble  $\Phi$  de l'espace  $C(X, Y)$  des applications continues de  $X$  dans  $Y$  est totalement borné dans la métrique de convergence uniforme si et seulement si  $\Phi$  est équicontinu sur  $X$  et  $\Phi(x) = \{\phi(x) : \phi \in \Phi\}$  est un sous-ensemble totalement borné de  $Y$  pour chaque  $x \in X$ .*

## 2.2 Stabilité et stabilité asymptotique

La stabilité et la stabilité asymptotique sont deux concepts essentiels dans le domaine des systèmes de contrôle et des systèmes dynamiques.

La stabilité désigne la capacité d'un système à maintenir son comportement dans le temps, malgré de légères perturbations ou des altérations des conditions initiales du système. Un système stable reviendra finalement à son état d'équilibre après une perturbation, la magnitude de sa réponse diminuant avec le temps. En essence, un système stable ne présentera pas de croissance non bornée.

La stabilité asymptotique représente une forme plus stricte de stabilité. En plus de satisfaire les critères de stabilité, un système asymptotiquement stable approchera son état d'équilibre à mesure que le temps tend vers l'infini. Cela signifie que le système revient non seulement à son état d'équilibre après une perturbation, mais le fait de manière à ce que la réponse approche zéro au fil du temps.

En résumé, la stabilité concerne la capacité d'un système à revenir à son état d'équilibre après une perturbation, tandis que la stabilité asymptotique exige que le système revienne non seulement à son état d'équilibre, mais démontre également une réponse approchant zéro à mesure que le temps s'étend à l'infini.

### 2.2.1 Stabilité

**Définition 2.3.** *La solution triviale de (2.5) est dite stable si, pour chaque  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0$ , il existe une fonction positive  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ , continue en  $t_0$  pour chaque  $\varepsilon$ , telle que, lorsque*

$$\|\phi_0\| \leq \delta, \quad (2.7)$$

nous avons

$$\|x(t_0, \phi_0)(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0. \quad (2.8)$$

**Définition 2.4.** *La solution  $x = 0$  est dite uniformément stable si le nombre  $\delta$  dans la définition précédente est indépendant de  $t_0$ .*

**Théorème 2.7.** *Supposons qu'il existe une fonction  $V(t, x)$  satisfaisant les conditions suivantes :*

(i)  $V \in C([-\tau, \infty) \times S_\rho, \mathbb{R}^+)$ ,  $V(t, x)$  est positive, décroissante et localement Lipschitzienne en  $x$  ;

(ii) pour  $t > t_0, \phi \in \Omega_0$ ,

$${}^c D_+^\alpha V(t, \phi(0), \phi) \leq 0. \quad (2.9)$$

Alors, la solution triviale de (2.5) est uniformément stable.

*Démonstration.* Étant donné que  $V$  est définie positive et décroissante, il existe des fonctions  $a, b \in \mathfrak{K}$  satisfaisantes

$$b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a(\|x\|), \quad (t, x) \in [t_0, \infty) \times S_\rho. \quad (2.10)$$

Choisissons  $0 < \varepsilon < \rho$  et  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ . Sélectionnons  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que

$$a(\delta) < b(\varepsilon). \quad (2.11)$$

Affirmons que si  $\|\phi_0\| \leq \delta$ , alors  $\|x(t_0, \phi_0)\| < \varepsilon$  pour  $t \geq t_0$ . Supposons que cela ne soit pas vrai. Alors, il existe une solution  $x(t_0, \phi_0)$  de (2.5) avec  $\|\phi_0\|_0 \leq \delta$  telle que

$$\|x(t_0, \phi_0)(t_2)\| = \varepsilon, \quad (2.12)$$

et

$$\|x(t_0, \phi_0)(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_2], \quad (2.13)$$

de sorte que

$$V(t_2, x(t_0, \phi_0)(t_2)) \geq b(\varepsilon), \quad (2.14)$$

à cause de (2.10). De plus, cela signifie que  $x(t_0, \phi_0)(t_2) \in S_\rho$ ,  $t \in [t_0, t_2]$ . Ainsi, le choix

$u_0 = a(\|\phi_0\|_0)$  et la condition

$${}^c D_-^\alpha V(t, \phi(0), \phi) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_2], \quad \phi \in \Omega_0, \quad (2.15)$$

donnent l'estimation

$$V(t, x(t_0, \phi_0)(t)) \leq a(\|\phi_0\|_0), \quad t \in [t_0, t_2], \quad (2.16)$$

Maintenant, les relations (2.14), (2.16), et (2.11) conduisent à la contradiction

$$b(\varepsilon) \leq V(t_2, x(t_0, \phi_0)(t_2)) \leq a(\|\phi_0\|_0) \leq a(\delta) < b(\varepsilon). \quad (2.17)$$

Cela prouve que la solution triviale de (2.5) est uniformément stable.  $\square$

## 2.3 Pantographe

### 2.3.1 Définitions générales

Un pantographe est un mécanisme utilisé pour la reproduction ou l'amplification du mouvement. Il se compose d'une série de tiges ou de bras interconnectés, avec un point pivot fixe à une extrémité et un point pivot mobile à l'autre extrémité. Le mouvement du point pivot mobile est directement proportionnel au mouvement du point pivot fixe, et cette corrélation est décrite par un ensemble d'équations de pantographe.

Les équations de pantographe représentent un système d'équations linéaires qui expliquent la relation entre les positions des points pivots fixes et mobiles.

La forme spécifique des équations de pantographe peut varier en fonction de la configuration du mécanisme de pantographe. Dans un contexte général, ces équations peuvent être exprimées en termes des longueurs des bras du pantographe, des angles entre les bras et des positions des points pivots fixes et mobiles. Ces équations sont des outils précieux pour la conception et l'analyse des mécanismes de pantographe, permettant de comprendre l'interaction entre le mouvement d'entrée et de sortie dans le mécanisme.

### 2.3.2 Applications du problème de pantographe

Les applications du problème de pantographe sont vastes et se trouvent dans divers domaines, notamment :

**Ingénierie mécanique :** Les pantographes sont utilisés dans les machines où une amplification précise du mouvement est nécessaire, comme les machines-outils, les robots industriels et les dispositifs de gravure.

**Transport ferroviaire :** Les pantographes sont utilisés dans les locomotives électriques pour collecter l'énergie des lignes aériennes et la transmettre aux moteurs.

**Arts et métiers :** Les artistes et artisans utilisent parfois des pantographes pour agrandir ou réduire des dessins avec précision.

**Technologie médicale :** Les pantographes peuvent être utilisés dans la conception de dispositifs médicaux nécessitant une reproduction précise de mouvement, tels que les prothèses et les instruments chirurgicaux.

**Fabrication de moules et matrices :** Les pantographes sont utilisés dans l'industrie de la fabrication pour la création de moules et de matrices nécessaires à la production en série de pièces.

**Industrie automobile :** Les pantographes peuvent être utilisés dans la conception et la fabrication de prototypes automobiles pour reproduire des formes et des mouvements avec précision.

**Aérospatiale :** Les pantographes peuvent être utilisés dans la fabrication de pièces aérospatiales nécessitant des mouvements complexes et précis.

En résumé, le problème de pantographe trouve des applications dans de nombreux domaines où une reproduction précise du mouvement est essentielle.

# Sur les solutions positives des équations pantographe fractionnaires avec noyau dérivées $\Psi$ - Caputo

## 3.1 Introduction

L'étude des solutions positives des équations différentielles revêt une importance capitale, car elles émergent naturellement lors de la modélisation de phénomènes du monde réel dans des domaines tels que l'économie, la physique, l'ingénierie et la biologie. En tant qu'extension du calcul des dérivées ordinaires, le domaine du calcul fractionnaire est en développement depuis 1695 (comme référencé dans [54, 55, 62]). Au fil du temps, de nombreux chercheurs ont rédigé de nombreuses œuvres visant à explorer qualitativement les propriétés positives des solutions des équations différentielles fractionnaires (comme discuté dans [11, 45]). Certaines de ces investigations se sont particulièrement concentrées sur la quête de solutions en utilisant les dérivées fractionnaires de Caputo et généralisées de Caputo. Dans ce contexte, une attention particulière a été accordée au cas du noyau logarithmique, communément appelé la dérivée de Hadamard (comme documenté dans [1, 12, 14, 40, 73]).

Un pantographe, à son tour, représente un système de liaison mécanique composé de quatre barres de taille égale articulées à leurs extrémités. Les équations régissant le mouvement d'un pantographe sont fondées sur les principes des triangles similaires. Ces équations sont conçues pour déterminer le facteur d'échelle ou la corrélation entre les longueurs des barres et la taille de l'image résultante. En général, ces équations sont

dérivées en utilisant la trigonométrie et l'algèbre vectorielle, en tenant compte des angles formés entre les barres et des longueurs de chaque barre individuelle. Leur objectif ultime est de déterminer le trajet du stylet ou le point final de la quatrième barre, en fonction du mouvement de l'objet original en cours de traçage (comme discuté dans [27, 34, 39, 44, 50, 59], ainsi que les références associées).

Particulièrement remarquable, dans [52], pour le cas  $1 < \alpha \leq 2$  et  ${}^C D^\alpha$  désignant la CFD conventionnelle, les auteurs se penchent sur l'investigation de l'existence et de l'unicité de solutions positives pour l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha z(t) = f(t, z(t)), & 0 < t \leq 1, \\ z(0) = 0, \quad z'(0) = \theta > 0. \end{cases}$$

L'équation implique  $f \in C([0, 1] \times [0, \infty), [0, \infty))$ . Dans le travail documenté dans [14], les auteurs ont obtenu avec succès des résultats positifs en utilisant la technique de Solution Supérieure et Inférieure en conjonction avec des Théorèmes de Point Fixe. Ce qui distingue ce travail est son aspiration à étendre et généraliser les résultats de [14] en incorporant l'utilisation de ce qui est appelé la  $\Psi$ -Caputo fractionnaire dérivée. Il est à noter que les dérivées fractionnaires Caputo Hadamard appartiennent à cette catégorie lorsque la fonction du noyau  $\Psi(t)$  est définie comme  $\ln t$ . Par conséquent, la pertinence du concept de pantographe est considérée dans un contexte plus large. En effet, l'objectif principal de cet article est de traiter des problèmes liés aux solutions positives dans les équations différentielles fractionnaires pantographiques.

De plus, il est important de reconnaître que les travaux mentionnés ci-dessus ont été stimulés et influencés par les articles de recherche [6, 7, 9, 12, 16, 21, 36, 47, 56, 57, 67, 72].

Notre principal objectif dans ce travail est centré sur la détermination des solutions positive pour l'équation différentielle pantographique suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\ell^{\alpha; \Psi} \phi(\eta) = \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta \eta)) + \mathcal{D}_\ell^{\alpha-1; \Psi} \mathcal{G}(\eta, \phi(\ell + \vartheta \eta)), & \eta \in [\ell, \mathcal{T}], \\ \phi(\ell) = \mu_1 > 0, \quad \phi'(\ell) = \mu_2 > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans le contexte donné, nous avons  $\vartheta \in \left(0, \frac{\mathcal{T}-\ell}{\mathcal{T}}\right)$ ,  $\phi(\ell(1+\vartheta)) = \phi_0 > 0$ ,  $\mathcal{D}_\ell^{\alpha;\Psi}$  est la DF  $\Psi$ -Caputo d'ordre  $1 < \alpha \leq 2$ , De plus,  $\mathcal{G}$ , et  $\mathcal{F}$ , deux fonctions définies sur  $[\ell, \mathcal{T}] \times [0, \infty) \times [0, \infty)$  et se mappant vers  $[0, \infty)$ , sont des fonctions continues. Il est pertinent de noter que  $\mathcal{G}$  présente un comportement non décroissant par rapport à  $\phi$  et  $\mu_2 > \mathcal{G}(1, \phi_0)$ . Pour résoudre le problème, nous effectuons une transformation de l'équation (3.1) en utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville par rapport à la fonction  $\Psi$ . Cette transformation conduit à une équation intégrale équivalente, sur laquelle nous appliquerons la technique de Solution Supérieure et Inférieure (SSI), ainsi que le théorème du Point Fixe de Schauder et le théorème du point fixe de Banach, pour établir à la fois l'existence et l'unicité des solutions positives.

Le chapitre est structuré comme suit :

La Section 2 englobe des concepts essentiels, des définitions, des lemmes et des théories qui serviront de base pour prouver nos principaux résultats.

La Section 3 est consacrée à la présentation de nos principales conclusions théoriques, qui étendent et généralisent celles obtenues dans [52] et [14].

Dans la Section 4, nous fournissons un exemple illustratif.

La Section 5 contient nos remarques conclusives.

**Lemme 3.1** ([7, 55]). *Soit  $n-1 < \alpha_1 \leq n, \alpha_2 > 0, \ell > 0, \phi \in \mathbb{L}(\ell, \mathcal{T}), \mathcal{D}_\ell^{\alpha_1;\Psi} \phi \in \mathbb{L}(\ell, \mathcal{T})$ . Alors l'équation différentielle*

$$\mathcal{D}_\ell^{\alpha_1;\Psi} \phi = 0$$

*admet l'unique solution*

$$\phi(\eta) = w_0 + w_1 (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + w_2 (\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^2 + \dots + w_{n-1} (\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^{n-1},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\ell^{\alpha_1;\Psi} \mathcal{D}_\ell^{\alpha_1;\Psi} \phi(\eta) &= \phi(\eta) + w_0 + w_1 (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + w_2 (\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^2 \\ &+ \dots + w_{n-1} (\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^{n-1}, \end{aligned}$$

avec  $w_\ell \in \mathbb{R}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ . De plus,

$$\mathcal{D}_\ell^{\alpha_2; \Psi} \mathcal{I}_\ell^{\alpha_1; \Psi} \phi(\eta) = \phi(\eta),$$

et

$$\mathcal{I}_\ell^{\alpha_1; \Psi} \mathcal{I}_\ell^{\alpha_2; \Psi} \phi(\eta) = \mathcal{I}_\ell^{\alpha_2; \Psi} \mathcal{I}_\ell^{\alpha_1; \Psi} \phi(\eta) = \mathcal{I}_\ell^{\alpha_1 + \alpha_2; \Psi} \phi(\eta).$$

**Lemme 3.2.** Soit  $\phi \in C^1([l, \mathcal{T}])$ ,  $\phi^{(2)}$  et  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta}$  existent, alors  $\phi$  est une solution de (3.1) si et seulement si

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(l, \phi_0))(\Psi(\eta) - \Psi(l)) + \int_l^\eta \mathcal{G}(s, \phi(l + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_l^\eta (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{F}(s, \phi(s), \phi(l + \vartheta s)) \Psi'(s) ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

*Démonstration.* Soit  $\phi$  une solution de (3.1). Pour commencer, nous pouvons écrire par

$$\mathcal{I}_\ell^{\alpha; \Psi} \mathcal{D}_\ell^{\alpha; \Psi} \phi(\eta) = \mathcal{I}_\ell^{\alpha; \Psi} \left( \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(l + \vartheta \eta)) + \mathcal{D}_\ell^{\alpha-1; \Psi} \mathcal{G}(\eta, \phi(l + \vartheta \eta)) \right), \quad l < \eta \leq \mathcal{T}. \quad (3.3)$$

Du Lemme 3.1, on à

$$\begin{aligned} &\phi(\eta) - \phi(l) - \phi'(l)(\Psi(\eta) - \Psi(l)) \\ &= \mathcal{I}_\ell^{\alpha; \Psi} \mathcal{D}_\ell^{\alpha-1; \Psi} \mathcal{G}(\eta, \phi(l + \vartheta \eta)) + \mathcal{I}_\ell^{\alpha; \Psi} \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(l + \vartheta \eta)) \\ &= \mathcal{I}_\ell \mathcal{I}_\ell^{\alpha-1; \Psi} \mathcal{D}_\ell^{\alpha-1; \Psi} \mathcal{G}(\eta, \phi(l + \vartheta \eta)) + \mathcal{I}_\ell^{\alpha; \Psi} \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(l + \vartheta \eta)) \\ &= \mathcal{I}_\ell (\mathcal{G}(\eta, \phi(l + \vartheta \eta)) - \mathcal{G}(l, \phi_0)) + \mathcal{I}_\ell^{\alpha; \Psi} \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(l + \vartheta \eta)) \\ &= \int_l^\eta \mathcal{G}(s, \phi(l + \vartheta s)) \Psi'(s) ds - \mathcal{G}(l, \phi_0) (\Psi(\eta) - \Psi(l)) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_l^\eta (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{F}(s, \phi(s), \phi(l + \vartheta s)) \Psi'(s) ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

On peut démontrer de manière directe la réciproque également.  $\square$

Dans ce qui suit, nous rappelons les théorèmes du point fixes qui seront utilisés pour prouver l'existence et l'unicité de solutions de l'équation (3.1).

## 3.2 Résultats principaux

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'existence de l'Équation Différentielle Fractionnaire (3.1). Nous donnons également les hypothèses nécessaires pour l'unicité de (3.1).

Nous définissons l'opérateur  $\Theta : \mathcal{A} \rightarrow Y$  par l'inversion de l'équation (3.2) et appliquons ensuite théorème du point fixe de Schauder.

$$\begin{aligned} (\Theta\phi)(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(\mathfrak{s}, \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s}))\Psi'(\mathfrak{s})d\mathfrak{s} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{F}(\mathfrak{s}, \phi(\mathfrak{s}), \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s}))\Psi'(\mathfrak{s})d\mathfrak{s}, \quad \eta \in [\ell, \mathcal{T}], \end{aligned} \quad (3.5)$$

où le point fixe est nécessaire pour satisfaire l'équation de l'opérateur identité  $\Theta\phi = \phi$ .

Pour la prochaine étape de nos résultats principaux, les formes suivantes sont adoptées.

( $\Sigma 1$ ) Soient  $\phi_*, \phi^* \in \mathcal{A}$ , ainsi que  $\hbar_1 \leq \phi_*(\eta) \leq \phi^*(\eta) \leq \hbar_2$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha;\Psi}\phi^*(\eta) - \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha-1;\Psi}\mathcal{G}(\eta, \phi^*(\ell + \vartheta\eta)) \geq U(\eta, \phi^*(\eta), \phi^*(\ell + \vartheta\eta)), \\ \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha;\Psi}\phi_*(\eta) - \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha-1;\Psi}\mathcal{G}(\eta, \phi_*(\ell + \vartheta\eta)) \leq L(\eta, \phi_*(\eta), \phi_*(\ell + \vartheta\eta)), \end{cases} \quad (3.6)$$

pour tout  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ .

( $\Sigma 2$ ) Pour  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$  et  $\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2 \in Y$ , il existe  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$  tels que

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}(\eta, \chi_1) - \mathcal{G}(\eta, \phi_1)| &\leq \beta_1 \|\chi_1 - \phi_1\|, \\ |\mathcal{F}(\eta, \chi_1, \chi_2) - \mathcal{F}(\eta, \phi_1, \phi_2)| &\leq \beta_2 \|\chi_1 - \phi_1\| + \beta_3 \|\chi_2 - \phi_2\|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour (3.1), les fonctions  $\phi^*$  et  $\phi_*$  sont appelées respectivement "solutions supérieures" et "solutions inférieures".

**Théorème 3.1.** *Si ( $\Sigma 1$ ) est satisfaite, alors l'EDF (3.1) possède au moins une solution  $\phi \in Y$  et satisfait  $\phi_*(\eta) \leq \phi(\eta) \leq \phi^*(\eta)$ , pour tout  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Omega = \{\phi \in \mathcal{A} : \phi_*(\eta) \leq \phi(\eta) \leq \phi^*(\eta), \eta \in [\ell, \mathcal{T}]\}$ . Si nous utilisons la norme  $\|\phi\| = \max_{\eta \in [\ell, \mathcal{T}]} |\phi(\eta)|$ , alors nous constatons que  $\|\phi\| \leq \hbar_2$ . Ainsi, nous déduisons que  $\Omega$  est convexe, fermé et borné dans  $Y$ . De plus, les fonctions  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  étant continues, cela implique que  $\Theta$ , défini par (3.5), est continu sur  $\Omega$ . Si  $\phi \in \Omega$ , il existe des constantes  $c_{\mathcal{F}}, c_{\mathcal{G}} > 0$  telles que

$$\max\{\mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta\eta)) : \eta \in [\ell, \mathcal{T}], \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta\eta) \leq \hbar_2\} < c_{\mathcal{F}}, \quad (3.8)$$

et

$$\max\{\mathcal{G}(\eta, \phi(\ell + \vartheta\eta)) : \eta \in [\ell, \mathcal{T}], \phi(\ell + \vartheta\eta) \leq \hbar_2\} < c_{\mathcal{G}}. \quad (3.9)$$

Alors

$$\begin{aligned} |(\Theta\phi)(\eta)| &\leq |\mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell))| + \int_{\ell}^{\eta} |\mathcal{G}(\mathfrak{s}, \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s}))| \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(\mathfrak{s}))^{\alpha-1} |\mathcal{F}(\mathfrak{s}, \phi(\mathfrak{s}), \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s}))| \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\ &\leq \mu_1 + (\mu_2 + c_0 + c_{\mathcal{G}})(\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell)) + \frac{c_{\mathcal{F}}(\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $|\mathcal{G}(\ell, \phi_0)| = c_0$ . Ainsi,

$$\|\Theta\phi\| \leq \mu_1 + (\mu_2 + c_0 + c_{\mathcal{G}})(\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell)) + \frac{c_{\mathcal{F}}(\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3.11)$$

Il s'ensuit que  $\Theta(\Omega)$  est uniformément borné. L'équicontinuité de  $\Theta(\Omega)$  peut alors être traitée. Soit  $\phi \in \Omega$  et  $\ell \leq \eta_1 < \eta_2 \leq \mathcal{T}$ , alors

$$\begin{aligned} &|(\Theta\phi)(\eta_1) - (\Theta\phi)(\eta_2)| \\ &\leq (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0))(\Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1)) \\ &\quad + \left| \int_{\ell}^{\eta_1} \mathcal{G}(\mathfrak{s}, \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s})) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} - \int_{\ell}^{\eta_2} \mathcal{G}(\mathfrak{s}, \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s})) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta_1} (\Psi(\eta_1) - \Psi(\mathfrak{s}))^{\alpha-1} \mathcal{F}(\mathfrak{s}, \phi(\mathfrak{s}), \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s})) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta_2} (\Psi(\eta_2) - \Psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{F}(s, \phi(s), \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \right| \\
& \leq (\mu_2 + c_0) (\Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1)) + \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathcal{G}(s, \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \right| \\
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta_1} \left( (\Psi(\eta_1) - \Psi(s))^{\alpha-1} - (\Psi(\eta_2) - \Psi(s))^{\alpha-1} \right) \right. \\
& \quad \left. \times \mathcal{F}(s, \phi(s), \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \right| \\
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\Psi(\eta_2) - \Psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{F}(s, \phi(s), \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \right| \\
& \leq (\mu_2 + c_0 + c_{\mathcal{G}}) (\Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1)) \\
& + \frac{c_{\mathcal{F}}}{\Gamma(\alpha + 1)} [(\Psi(\eta_2) - \Psi(\ell))^{\alpha} - (\Psi(\eta_1) - \Psi(\ell))^{\alpha}]. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro lorsque  $\eta_1 \rightarrow \eta_2$ . Ainsi la compacité,  $\Theta(\Omega)$  est équicontinu. Par conséquent, la compacité de  $\Theta : \Omega \rightarrow Y$  découle du théorème d'Arzelè-Ascoli. Enfin, pour utiliser le théorème du point fixe de Schauder, nous devons prouver que  $\Theta(\Omega) \subseteq \Omega$ . Soit  $\phi \in \Omega$ , alors

$$\begin{aligned}
(\Theta\phi)(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0)) (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(s, \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{F}(s, \phi(s), \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\
& \leq \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0)) (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(s, \phi^*(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} U(s, \phi(s), \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\
& \leq \phi^*(\eta), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\Theta\phi)(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0)) (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(s, \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{F}(s, \phi(s), \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\
& \geq \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0)) (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(s, x_*(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(\mathfrak{s}))^{\alpha-1} L(\eta, \phi(\mathfrak{s}), \phi(\ell + \vartheta \mathfrak{s})) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\
& \geq \phi_*(\eta).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Par conséquent,  $\phi_*(\eta) \leq (\Theta\phi)(\eta) \leq \phi^*(\eta)$ ,  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ , c'est-à-dire,  $\Theta(\Omega) \subseteq \Omega$ . En outre, le théorème du point fixe de Schauder assure que la fonction  $\Theta$  a au moins un point fixe  $\phi \in \Omega$ . Cela signifie que EDF (3.1) admet au moins une solution positive  $\phi \in Y$ , et  $\phi_*(\eta) \leq \phi(\eta) \leq \phi^*(\eta)$ ,  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ .  $\square$

Ensuite, nous adoptons et proposons un ensemble différent d'utilisations pour le théorème ci-dessus.

**Corollaire 3.1.** *Supposons que les fonctions de forme  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$  existent, de sorte que*

$$\begin{aligned}
0 < \varphi_1(\eta) \leq \mathcal{G}(\eta, \phi(\ell + \vartheta \eta)) \leq \varphi_2(\eta) < \infty, \quad (\eta, \phi(\ell + \vartheta \eta)) \in [\ell, \mathcal{T}] \times [0, +\infty), \\
\mu_2 \geq \varphi_1(\ell), \quad \mu_2 \geq \varphi_2(\ell),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

et

$$0 < \varphi_3(\eta) \leq \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta \eta)) \leq \varphi_4(\eta) < \infty, \quad (\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta \eta)) \in [\ell, \mathcal{T}] \times ([0, +\infty))^2. \tag{3.16}$$

Alors, l'EDF (3.1) doit avoir au moins une solution positive  $\phi \in Y$ . De plus,

$$\begin{aligned}
& \mu_1 + (\mu_2 - \varphi_1(\ell)) (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \varphi_1(\mathfrak{s}) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} + \mathcal{I}_{\ell}^{\alpha; \Psi} \varphi_3(\eta) \\
& \leq \phi(\eta) \\
& \leq \mu_1 + (\mu_2 - \varphi_2(\ell)) (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \varphi_2(\mathfrak{s}) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} + \mathcal{I}_{\ell}^{\alpha; \Psi} \varphi_4(\eta).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

*Démonstration.* À partir de la formule (3.16) et de la fonction de contrôle, nous obtenons  $\varphi_3(\eta) \leq L(\eta, \phi, \chi) \leq U(\eta, \phi, \chi) \leq \varphi_4(\eta)$ ,  $(\eta, \phi(\eta), \chi(\eta)) \in [\ell, \mathcal{T}] \times [\hbar_1, \hbar_2] \times [\hbar_1, \hbar_2]$ . Nous

considérons les équations

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\ell^{\alpha;\Psi} \phi(\eta) = \varphi_3(\eta) + \mathcal{D}_\ell^{\alpha-1;\Psi} \varphi_1(\eta), & \phi(\ell) = \mu_1, \phi'(\ell) = \mu_2, \\ \mathcal{D}_\ell^{\alpha;\Psi} \phi(\eta) = \varphi_4(\eta) + \mathcal{D}_\ell^{\alpha-1;\Psi} \varphi_2(\eta), & \phi(\ell) = \mu_1, \phi'(\ell) = \mu_2. \end{cases} \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) est manifestement équivalente à

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \varphi_1(\ell))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_\ell^\eta \varphi_1(s) \Psi'(s) ds + \mathcal{I}_\ell^{\alpha;\Psi} \varphi_3(\eta), \\ \phi(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \varphi_2(\ell))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_\ell^\eta \varphi_2(s) \Psi'(s) ds + \mathcal{I}_\ell^{\alpha;\Psi} \varphi_4(\eta). \end{aligned}$$

Ainsi, la première partie de (3.18) implique

$$\begin{aligned} \phi(\eta) - \mu_1 - (\mu_2 - \varphi_1(\ell))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) - \int_\ell^\eta \varphi_1(s) \Psi'(s) ds \\ = \mathcal{I}_\ell^{\alpha;\Psi} \varphi_3(\eta) \leq \mathcal{I}_\ell^{\alpha;\Psi} (L(\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta\eta))), \end{aligned} \quad (3.19)$$

et la deuxième partie de (3.18) suggère

$$\begin{aligned} \phi(\eta) - \mu_1 - (\mu_2 - \varphi_2(\ell))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) - \int_\ell^\eta \varphi_2(s) \Psi'(s) ds \\ = \mathcal{I}_\ell^{\alpha;\Psi} \varphi_4(\eta) \geq \mathcal{I}_\ell^{\alpha;\Psi} (U(\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta\eta))). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ainsi, les deux équations de (3.18) ont toutes deux solutions supérieures et inférieures.

Par conséquent, l'EDF (3.1) a au moins une solution  $\phi \in Y$  qui satisfait (3.17), lorsque le

Théorème 3.1 est appliqué.  $\square$

**Corollaire 3.2.** *Supposons que (3.15), soit satisfaite et que*

$$0 < \sigma < \varphi(\eta) = \lim_{\phi, \chi \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) < \infty,$$

pour  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ . L'EDF (3.18) doit posséder au moins une solution positive,  $\phi \in Y$ .

*Démonstration.* Si  $\phi, \chi > \rho > 0$ , alors  $0 \leq |\mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) - \varphi(\eta)| < \sigma$  pour tous  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ .

D'ou,  $0 < \varphi(\eta) - \sigma \leq \mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) \leq \varphi(\eta) + \sigma$  pour  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$  et  $\rho < \phi, \chi < +\infty$ . Si  $\max\{\mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) : \eta \in [\ell, \mathcal{T}], \phi, \chi \leq \rho\} \leq \nu$ , alors  $\varphi(\eta) - \sigma \leq \mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) \leq \varphi(\eta) + \sigma + \nu$  pour  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ , et  $0 < \phi, \chi < +\infty$ . D'après le corollaire 3.1, L'EDF (3.1) admet au moins une solution positive  $\phi \in Y$  avec

$$\begin{aligned}
& \mu_1 + (\mu_2 - \varphi_1(\ell))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \varphi_1(s)\Psi'(s)ds + \mathcal{I}_{\ell}^{\alpha; \Psi} \varphi(\eta) \\
& - \frac{\sigma(\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
& \leq \phi(\eta) \\
& \leq \mu_1 + (\mu_2 - \varphi_2(\ell))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \varphi_2(s)\Psi'(s)ds + \mathcal{I}_{\ell}^{\alpha; \Psi} \varphi(\eta) \\
& + \frac{(\sigma + \nu)(\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.3.** *Supposons que  $0 < \sigma < \mathcal{F}(\eta, \phi(\eta), \phi(\ell + \vartheta\eta)) \leq \gamma_1\phi(\eta) + \gamma_2\phi(\ell + \vartheta\eta) + \eta < \infty$  pour  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$ , et  $\sigma, \eta, \gamma_1$  et  $\gamma_2 > 0$  constantes. Alors, l'EDF (3.1) admet au moins une solution positive  $\phi \in C([\ell, \delta])$ , où  $\delta > \ell$ .*

*Démonstration.* Considérons l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha; \Psi} \phi(\eta) - \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha-1; \Psi} \mathcal{G}(\eta, \phi(\ell + \vartheta\eta)) = \gamma_1\phi(\eta) + \gamma_2\phi(\ell + \vartheta\eta) + \eta, & \ell < \eta \leq \mathcal{T}, \\ \phi(\ell) = \mu_1 > 0, \phi'(\ell) = \mu_2 > 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

où  $\phi(\ell(1 + \vartheta)) = \phi_0 > 0$ . L'équation (3.22) a une solution de la forme :

$$\begin{aligned}
\phi(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(s, \phi(\ell + \vartheta s))\Psi'(s)ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} (\gamma_1\phi(\eta) + \gamma_2\phi(\ell + \vartheta\eta))\Psi'(s)ds \\
& = \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(s, \phi(s), \phi(\ell + \vartheta s))\Psi'(s)ds \\
& + \frac{\eta(\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \phi(s)\Psi'(s)ds
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma_2}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \phi(\ell + \vartheta s) \Psi'(s) ds. \quad (3.23)$$

Pour  $\omega$  une constante positive, et  $\varpi \in (0, 1)$ , il existe  $\delta > \ell$  tel que  $0 < \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\Psi(\delta) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < \varpi < 1$  et

$$\omega > (1 - \varpi)^{-1} \left( \mu_1 + (\mu_2 + c_0 + c_{\mathcal{G}}) (\Psi(\delta) - \Psi(\ell)) + \frac{\eta (\Psi(\delta) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right). \quad (3.24)$$

Ensuite, si  $\ell \leq \eta \leq \delta$ , l'ensemble  $\mathfrak{B}_\omega = \{\phi \in Y : |\phi(\eta)| \leq \omega, \ell \leq \eta \leq \delta\}$  est fermé, convexe et borné dans  $C([\ell, \delta])$ . L'application  $\Theta : \mathfrak{B}_\omega \rightarrow \mathfrak{B}_\omega$  définie comme

$$\begin{aligned} (\Theta\phi)(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0)) (\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(s, \phi(\ell + \vartheta s)) \Psi'(s) ds \\ &+ \frac{\eta (\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \phi(s) \Psi'(s) ds \\ &+ \frac{\gamma_2}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} \phi(\ell + \vartheta s) \Psi'(s) ds, \end{aligned} \quad (3.25)$$

est compacte avec la même approche que dans la démonstration du Théorème 3.1. De la même manière,

$$\begin{aligned} |(\Theta\phi)(\eta)| &\leq \mu_1 + (\mu_2 + c_0 + c_{\mathcal{G}}) (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell)) + \frac{\eta (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &+ \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|\phi\|. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Maintenant, pour  $\phi \in \mathfrak{B}_\omega$ , nous avons

$$|(\Theta\phi)(\eta)| \leq (1 - \varpi) \omega + \varpi \omega = \omega,$$

et donc  $\|\Theta\phi\| \leq \omega$ . Nous en concluons que théorème du point fixe de Schauder souligne que  $\Theta$  possède au moins un point fixe dans  $\mathfrak{B}_\omega$ , et donc l'équation (3.18) a au moins une

solution positive  $\phi^*(\eta)$ , où  $\ell < \eta < \delta$ . Ainsi, si  $\eta \in [\ell, \mathcal{T}]$  on peut affirmer que

$$\begin{aligned} \phi^*(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(\mathfrak{s}, \phi^*(\ell + \vartheta \mathfrak{s})) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\ &\quad + \frac{\eta(\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(\mathfrak{s}))^{\alpha-1} \phi^*(\mathfrak{s}) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\ &\quad + \frac{\gamma_2}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(\mathfrak{s}))^{\alpha-1} \phi^*(\ell + \vartheta \mathfrak{s}) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La fonction de contrôle de terme

$$\begin{aligned} U(\eta, \phi^*(\eta), \phi^*(\ell + \vartheta \eta)) &\leq \gamma_1 \phi^*(\eta) + \gamma_2 \phi^*(\ell + \vartheta \eta) + \eta \\ &= \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha; \Psi} \phi^*(\eta) - \mathcal{D}_{\ell}^{\alpha-1; \Psi} \mathcal{G}(\eta, \phi^*(\ell + \vartheta \eta)), \end{aligned} \quad (3.28)$$

ainsi  $\phi^*$  est une solution positive supérieure de l'EDF (3.1). Deuxièmement, on peut prendre

$$\begin{aligned} \phi_*(\eta) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mathcal{G}(\ell, \phi_0))(\Psi(\eta) - \Psi(\ell)) + \int_{\ell}^{\eta} \mathcal{G}(\mathfrak{s}, \phi_*(\ell + \vartheta \mathfrak{s})) \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\ &\quad + \frac{\sigma(\Psi(\eta) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

comme une solution positive inférieure de (3.1). Par le théorème 3.1, l'EDF (3.1) a au moins une solution positive  $\phi \in C([\ell, \delta])$ , où  $\delta > \ell$  et  $\phi_*(\eta) \leq \phi(\eta) \leq \phi^*(\eta)$ .  $\square$

Le résultat final est l'unicité de la solution particulière de (3.1) en adoptant le Théorème 3.1.

**Théorème 3.2.** *Sous la satisfaction des conditions des investigateurs (Σ1) et (Σ2) et que*

$$\beta_1 (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell)) + \frac{(\beta_2 + \beta_3) (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1. \quad (3.30)$$

*L'équation différentielle fractionnaire (3.1) a une unique solution positive  $\phi \in \Omega$ .*

*Démonstration.* L'EDF (3.1) possède au moins une solution positive dans  $\Omega$  d'après le Théorème 3.1. L'application spécifiée dans (3.5) est une contraction sur  $Y$ . En effet, pour

tout  $\phi, \chi \in Y$ , on a

$$\begin{aligned}
& |(\Theta\phi)(\eta) - (\Theta\chi)(\eta)| \\
& \leq \int_{\ell}^{\eta} |\mathcal{G}(\mathfrak{s}, \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s})) - \mathcal{G}(\mathfrak{s}, \chi(\ell + \vartheta\mathfrak{s}))| \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\ell}^{\eta} (\Psi(\eta) - \Psi(\mathfrak{s}))^{\alpha-1} |\mathcal{F}(\mathfrak{s}, \phi(\mathfrak{s}), \phi(\ell + \vartheta\mathfrak{s})) - \mathcal{F}(\mathfrak{s}, \chi(\mathfrak{s}), \chi(\ell + \vartheta\mathfrak{s}))| \Psi'(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} \\
& \leq \left( \beta_1 (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell)) + \frac{(\beta_2 + \beta_3) (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \|\phi - \chi\|. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

À la lumière de (3.30), l'application  $\Theta$  est une contraction, et donc l'EDF (3.1) a une unique solution positive  $\phi \in \Omega$ .  $\square$

### 3.3 Exemple

Soit  $\Psi(\eta) = \ln \eta$ . Nous explorons l'équation différentielle fractionnaire de pantographe (dérivée fractionnaire de Caputo Hadamard) dans le cas.

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1^{\frac{5}{2}; \Psi} \phi(\eta) - \mathcal{D}_1^{\frac{1}{2}; \Psi} \frac{\pi + \arctan(\phi(\eta))}{5} = \frac{1}{1+e+\eta} (1 + e + \eta \sin(\phi(\eta) + \chi(\eta))), & 1 < \eta \leq e, \\ \phi(\ell) = 1, \quad \phi'(\ell) = \mu_2 \geq 1, \end{cases} \tag{3.32}$$

où  $\mu_1 = 1$ ,  $\ell = 1$ ,  $\phi(1 + \vartheta) = \phi_0 > 0$ ,  $\mathcal{T} = e$ ,  $\mathcal{G}(\eta, \phi) = \pi + \arctan(\phi)$  et  $\mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) = \frac{1}{1+e+\eta} (1 + e + \eta \sin(\phi + \chi))$ . Comme  $\mathcal{G}$  est non décroissante sur  $\phi$ ,

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{\pi + \arctan(\phi)}{5} = \frac{3\pi}{10},$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{10} & \leq \mathcal{G}(\eta, \phi) \leq \frac{3\pi}{10}, \\
\frac{1}{1+2e} & \leq \mathcal{F}(\eta, \phi, \chi) \leq 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons que l'équation (3.22) a une solution positive proportionnelle à tous les résultats naturels mentionnés ci-dessus. Nous avons

$$\beta_1 (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell)) + \frac{(\beta_2 + \beta_3) (\Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\ell))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \simeq 0.96660 < 1.$$

Par conséquent, en utilisant le Théorème 3.2, nous concluons que l'équation (3.22) possède une unique solution positive.

### 3.4 Conclusion

Nous avons mené une enquête approfondie pour confirmer l'existence et l'unicité des solutions positives de l'équation de pantographe différentiel fractionnaire (3.1) dans le contexte de la dérivée de Caputo  $\Psi$ . Notre approche a impliqué la mise en œuvre de la méthode des solutions supérieure et inférieure tout en imposant des conditions préalables spécifiques pour démontrer l'existence et l'unicité de notre solution positive. De plus, nous avons utilisé le théorème du point fixe de Schauder et le théorème du point fixe de Banach pour obtenir une solution positive pour (3.1).

# Stabilité asymptotique pour les équations différentielles fractionnaires de pantographe au sens Caputo-Hadamard

## 4.1 Stabilité pour les EDFs de pantographe

Notre objectif dans cette étude est la stabilité asymptotique des équations différentielles fractionnaires (EDF) non linéaires suivantes

$${}^C D_{0+}^{\alpha} \varkappa(t) = \mathcal{F}(t, \varkappa(\lambda t)) \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

$$\varkappa(0) = \theta_0, \quad \varkappa'(0) = \theta_1, \quad (4.2)$$

où  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $1 < \alpha < 2$ ,  $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $\mathcal{F}(t, 0) \equiv 0$ ,  ${}^C D_{0+}^{\alpha}$  est la dérivée fractionnaire de Caputo du système (4.1) et (4.2).

Pour répondre aux besoins des applications modernes et à grande échelle des EDF, le sujet du calcul partiel a émergé comme une nouvelle branche des mathématiques appliquées et a également été appliqué à un grand nombre de modèles mathématiques dans divers domaines de la science et de l'ingénierie au cours des trois dernières décennies. La théorie des EDF a été largement étudiée par de nombreux auteurs [46, 57, 60, 62]. Cependant, à notre connaissance, l'étude de la théorie de la stabilité des EDF non linéaires

en est encore à ses débuts, et il reste beaucoup de travail à faire. Récemment, plusieurs méthodes ont été étudiées pour examiner la stabilité des EDF non linéaires. Par exemple, l'inégalité généralisée de Gronwall-Bellman est utilisée dans [58] pour étudier la stabilité des EDF non linéaires, et le principe de comparaison dans l'ordre partiel dans [48] est utilisé. De plus, dans [37, 41], les stabilités de Mittag-Leffler des EDF non linéaires du premier ordre ( $0 < \alpha < 1$ ) sont introduites. De plus, en utilisant les inégalités généralisées de Gronwall singulières, la stabilité d'Ulam pour les EDF impulsives est discutée dans [9, 71]. Cependant, ces méthodes introduites ci-dessus sont principalement mises en œuvre pour l'analyse de stabilité des EDF, et il n'est pas facile de les utiliser pour discuter de la stabilité des EDF non linéaires d'ordre ( $1 < \alpha < 2$ ). Pour cette raison, en tant que tentative significative, l'objectif de cet article est de trouver une autre méthode efficace pour étudier la stabilité des EDF non linéaires d'ordre ( $1 < \alpha < 2$ ).

Comme on le sait, les théories des points fixes ont été utilisées pour étudier la stabilité des systèmes différentiels dans le bon ordre par de nombreux auteurs, notamment Burton [5, 22, 31, 43, 49] et Becker [42, 69]. De plus, il existe des contributions à l'étude de la stabilité des EDF par les théories des points fixes. Dans [5], l'auteur a dérivé le critère de stabilité pour l'équation de Volterra qui est basée sur le principe de la contraction et la théorie de la forme du solvant de Baker. Burton et Zhang considèrent la stabilité des EDF de type Caputo du système dans [43, 56] où la stabilité des EDF dans l'espace pondéré de Banach est étudiée à travers la théorie du solvant et les théories des points fixes.

Dans ce chapitre, inspirés par ces contributions précieuses mentionnées ci-dessus, nous discutons principalement de la stabilité des EDF non linéaires pour l'ordre ( $1 < \alpha < 2$ ). Pour ce faire, nous suivons d'abord la conversion de l'équation différentielle fractionnaire en une équation différentielle ordinaire du premier ordre avec un désordre fractionnaire intégratif, à partir de laquelle nous obtenons les équations intégratives équivalentes (4.1) et (4.2) par différentes constantes de formule et certaines compétences analytiques. De plus, par le théorème du point fixe de Krasnoselskii, nous étudions la stabilité des deux problèmes (4.1) et (4.2) sans considérer la théorie du solvant, et les résultats sont présentés

de manière simplifiée.

**Lemme 4.1** ([46, 60]). Soit  $\Re(\alpha) > 0$ . Supposons  $\varkappa(t) \in C^{n-1}[0, +\infty)$  et  $\varkappa^{(n)}$  existe presque partout sur tout intervalle borné de  $\mathbb{R}^+$ . Alors

$$\left(I_{0+}^{\alpha} {}^C D_{0+}^{\alpha} \varkappa\right)(t) = \varkappa(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varkappa^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

En particulier, lorsque  $0 < \Re(\alpha) < 1$ ,  $(I_{0+}^{\alpha} {}^C D_{0+}^{\alpha} \varkappa)(t) = \varkappa(t) - \varkappa(0)$ .

**Remarque 4.1.** À partir de la Définition 1.9, 1.10 et du Lemme 4.1, il est facile de voir que

(1) Soit  $\Re(\alpha) > 0$ . Si  $\varkappa(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , alors  $D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} \varkappa(t) = \varkappa(t)$  vaut pour tous  $t \in \mathbb{R}^+$ .

(2) La dérivée de Caputo d'une constante est égale à zéro.

L'espace de Banach suivant joue un rôle fondamental dans notre discussion.

Soit  $\bar{\omega} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty)$  soit une fonction strictement croissante continue avec

$$\bar{\omega}(0) = 1, \bar{\omega}(t) \rightarrow \infty \text{ qd } t \rightarrow \infty, \bar{\omega}(s)\bar{\omega}(t-s) \leq \bar{\omega}(t)$$

pour tout  $0 \leq s \leq t \leq \infty$ . Soit

$$E = \left\{ \varkappa(t) \in C[0, +\infty) : \sup_{t \geq 0} |\varkappa(t)| / \bar{\omega}(t) < \infty \right\}.$$

Alors  $E$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|\varkappa\| = \sup_{t \geq 0} \frac{|\varkappa(t)|}{\bar{\omega}(t)}$ . Pour plus de propriétés de cet espace de Banach, voir [49, 62]. De plus, soit

$$\|\varphi\|_t = \max \{ |\varphi(s)| : 0 \leq s \leq t \},$$

pour tout  $t \geq 0$ , n'importe quel  $\varphi \in C(\mathbb{R}^+)$  et soit  $\mathfrak{S}(\varepsilon) = \{ \varkappa : \varkappa \in E, \|\varkappa\| \leq \varepsilon \}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Lemme 4.2.** Soit  $\mathcal{W}(t) \in C[0, +\infty)$ . Alors  $\varkappa(t) \in C[0, +\infty)$  est une solution du type problème de Cauchy

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} \varkappa(t) = \mathcal{W}(t), & t \in \mathbb{R}^+, \quad 1 < \alpha < 2, \\ \varkappa(0) = \theta_0, \quad \varkappa'(0) = \theta_1, \end{cases} \quad (4.3)$$

si et seulement si  $\varkappa(t)$  est une solution du problème de type Cauchy

$$\begin{cases} \varkappa(t) = I_{0+}^{\alpha-1} \mathcal{W}(t) + \theta_1 \\ \varkappa(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

*Démonstration.* Pour commencer, nous prétendons que pour tout  $0 < \gamma < 1$ , if  $\psi \in C[0, +\infty)$ , then  $(I_{0+}^{\gamma} \psi)(0) = 0$ . En fait, puisque

$$I_{0+}^{\gamma} \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \psi(s) ds,$$

nous pouvons conclure que

$$|I_{0+}^{\gamma} \psi(t)| = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left| \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \psi(s) ds \right| \leq \frac{\|\psi\|_t}{\Gamma(\gamma+1)} t^{\gamma} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0.$$

1. soit  $\varkappa \in C[0, +\infty)$  une solution du problème (4.3), alors pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , La Définition 1.10 montre que

$${}^c D_{0+}^{\alpha} \varkappa(t) = \left( {}^c D_{0+}^{\alpha-1} D^1 \varkappa \right)(t) = \mathcal{W}(t).$$

Selon le Lemme 4.1, nous avons

$$\varkappa'(t) = \varkappa'(0) + I_{0+}^{\alpha-1} \mathcal{W}(t) = I_{0+}^{\alpha-1} \mathcal{W}(t) + \theta_1,$$

ce qui signifie que  $\varkappa(t)$  est une solution du problème (4.4).

2. Soit  $\varkappa(t)$  une solution du problème (4.4).

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , d'après la Remarque 4.1, il est facile de voir que

$${}^C D_{0+}^{\alpha} \varkappa(t) = {}^C D_{0+}^{\alpha-1} \varkappa'(t) = \left( {}^C D_{0+}^{\alpha-1} I_{0+}^{\alpha-1} \mathscr{W} \right) (t) + {}^C D_{0+}^{\alpha-1} \theta_1 = \mathscr{W}(t).$$

En outre, notez que  $\mathscr{W}(t) \in C[0, +\infty)$ , on à  $\varkappa'(0) = I_{0+}^{\alpha-1} \mathscr{W}(0) + \theta_1 = \theta_1$ .

□

**Lemme 4.3.** *Le système (4.1) et (4.2) est équivalent au système*

$$\begin{aligned} \varkappa'(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathscr{F}(s, \varkappa(\lambda s)) ds + \theta_1, \\ \varkappa(0) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour plus de commodité, pour  $0 \leq s \leq t < +\infty$ , où  $k \in \mathbb{R}$  satisfait qu'il existe une constante  $\beta_1 \in (0, 1)$  telle que

$$e^{-kt}/\overline{\omega}(t) \in BC[0, +\infty) \cap L^1[0, +\infty), \quad |k| \int_0^t e^{-ks}/\overline{\omega}(s) ds \leq \beta_1 < 1. \quad (4.6)$$

Alors (4.5) peut être écrite de manière équivalente comme

$$\begin{aligned} \varkappa'(t) &= -k\varkappa(t) + k\varkappa(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathscr{F}(s, \varkappa(\lambda s)) ds + \theta_1, \\ \varkappa(0) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Par la formule de variation des constantes, nous avons

$$\varkappa'(t) + k\varkappa(t) = k\varkappa(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathscr{F}(s, \varkappa(\lambda s)) ds + \theta_1,$$

de manière équivalente

$$(\varkappa'(t) + k\varkappa(t)) e^{kt} = k e^{kt} \varkappa(t) + \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathscr{F}(s, \varkappa(\lambda s)) ds + e^{kt} \theta_1,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^t \left( e^{ks} \varkappa(s) \right)' ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t \int_0^s e^{ks} (s-u)^{\alpha-2} \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du ds + \int_0^t e^{ks} \theta_1 ds \\ &= \frac{e^{kt} - 1}{k} \theta_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t \int_u^t e^{ks} (s-u)^{\alpha-2} ds \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \varkappa(t) &= \theta_0 e^{-kt} + \frac{1 - e^{-kt}}{k} \theta_1 + k \int_0^t e^{-k(t-s)} \varkappa(\lambda u) du \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t \int_u^t e^{-k(t-s)} (s-u)^{\alpha-2} ds \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si cela est vrai, nous avons  $\varkappa(0) = \theta_0$ . En se basant sur l'argument ci-dessus, nous obtenons que le système (4.1) et (4.2) peuvent être écrits de manière équivalente comme (4.8). Ensuite, notre étude suivante se concentrera sur le système (4.8).

**Définition 4.1.** *La solution triviale  $\varkappa \equiv 0$  de (4.1) et (4.2) est dite stable dans l'espace de Banach  $E$  selon la condition*

- (i) *Si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que  $|\theta_0| + |\theta_1| \leq \delta$  implique que la solution  $\varkappa(t) = \varkappa(t, \theta_0, \theta_1)$  existe pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\|\varkappa\| \leq \varepsilon$ .*
- (ii) *Elle est asymptotiquement stable si elle est stable dans l'espace de Banach  $E$  et s'il existe un nombre  $\sigma > 0$  tel que  $|\theta_0| + |\theta_1| \leq \sigma$  implique  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varkappa(t)\| = 0$ .*

Pour prouver nos résultats principaux, le critère de compacité modifié suivant est nécessaire.

**Lemme 4.4.** [62]. *Let  $\mathfrak{K}$  Soit  $\mathfrak{K}$  un sous-ensemble de l'espace de Banach  $E$ . Alors  $\mathfrak{K}$  est relativement compact dans  $E$  si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i)  $\{\varkappa(t)/\overline{\omega}(t) : \varkappa(t) \in \mathfrak{K}\}$  est uniformément borné,
- (ii)  $\{\varkappa(t)/\overline{\omega}(t) : \varkappa(t) \in \mathfrak{K}\}$  est équicontinu sur tout intervalle compact de  $\mathbb{R}^+$ ;

(iii)  $\{\varkappa(t)/\overline{\omega}(t) : \varkappa(t) \in \mathfrak{X}\}$  est équiconvergent à l'infini, c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $\varkappa \in \mathfrak{X}$  et  $t_1, t_2 > T_0$ , si on a :

$$|\varkappa(t_2)/\overline{\omega}(t_2) - \varkappa(t_1)/\overline{\omega}(t_1)| < \varepsilon.$$

**Théorème 4.1.** Supposons que (4.6) soit vérifié et qu'il existe des constantes  $\eta > 0$ ,  $\beta_2 \in (0, 1 - \beta_1)$  et une fonction continue  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times (0, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$\frac{|\mathcal{F}(t, v\overline{\omega}(t))|}{g(t)} \leq \mathcal{F}(t, |v|), \quad (4.9)$$

valide pour tout  $t \geq 0$ ,  $0 < |v| \leq \eta$  et

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\overline{\omega}(t-u)} \frac{\mathcal{F}(t, r)}{\eta} du \leq \beta_2 < 1 - \beta_1, \quad (4.10)$$

est valide pour tout  $0 < r \leq \eta$ , où  $\beta_1$  est défini dans (4.6),  $\mathcal{F}(t, r)$  est non décroissante en  $r$  pour  $t$  fixé et  $\mathcal{F}(t, r) \in L^1[0, +\infty)$  en  $t$  pour  $r$  fixé, et

$$\mathcal{N}(t-u) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_u^t e^{-k(t-s)} (s-u)^{\alpha-2} ds, & t-u \geq 0, \\ 0, & t-u < 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Alors, la solution triviale  $\varkappa \equiv 0$  de (4.1) et (4.2) est stable dans l'espace de Banach  $E$ .

*Démonstration.* Pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, nous commençons par prouver l'existence de  $\delta > 0$  tel que

$$|\theta_0| + |\theta_1| < \delta \text{ implique } \|\varkappa\| \leq \varepsilon.$$

En effet, selon (4.6), il existe une constante  $M_1 > 0$  telle que

$$\frac{e^{-kt}}{\overline{\omega}(t)} \leq M_1. \quad (4.12)$$

Soit  $0 < \delta \leq \frac{(1-\beta_1-\beta_2)|k|}{|k|M_1+1+M_1} \varepsilon$ . Considérons le sous-ensemble convexe fermé non vide  $\mathfrak{S}(\varepsilon) \subseteq E$ ,

pour  $t \geq 0$ , définissons deux applications  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  sur  $\mathfrak{S}(\varepsilon)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\varkappa(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t \int_u^t e^{-k(t-s)} (s-u)^{\alpha-2} ds \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du \\ &= \int_0^t \mathcal{N}(t-u) \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{Q}\varkappa(t) = e^{-kt} \theta_0 + \frac{1-e^{-kt}}{k} \theta_1 + k \int_0^t e^{-k(t-s)} \varkappa(u) du. \quad (4.14)$$

Évidemment, pour  $\varkappa \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ , les fonctions  $\mathcal{P}\varkappa$  et  $\mathcal{Q}\varkappa$  sont continues sur  $\mathbb{R}^+$ . De plus, pour  $\varkappa \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ , selon (4.6), (4.9), (4.10) pour tout  $t \geq 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{P}\varkappa(t)|}{\bar{\omega}(t)} &\leq \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t-u)} \left| \mathcal{F}\left(u, \frac{\varkappa(\lambda u)}{\bar{\omega}(u)}\right) \right| du \\ &\leq \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t-u)} \mathcal{F}\left(u, \frac{|\varkappa(\lambda u)|}{\bar{\omega}(u)}\right) du \\ &\leq \beta_2 \|\varkappa\| \leq \beta_2 \varepsilon < \infty, \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{Q}\varkappa(t)|}{\bar{\omega}(t)} &= \left| \frac{e^{-kt}}{\bar{\omega}(t)} \theta_0 + \frac{1-e^{-kt}}{k\bar{\omega}(t)} \theta_1 + k \int_0^t \frac{e^{-k(t-s)}}{\bar{\omega}(t)} \varkappa(s) ds \right| \\ &\leq M_1 |\theta_0| + \frac{1+M_1}{|k|} |\theta_1| + |k| \int_0^\infty \frac{e^{-ku}}{\bar{\omega}(u)} du \|\varkappa\| \\ &\leq M_1 |\theta_0| + \frac{1+M_1}{|k|} |\theta_1| + \beta_1 \varepsilon < \infty. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Alors  $\mathcal{P}\mathfrak{S}(\varepsilon) \subseteq E$ , et  $\mathcal{Q}\mathfrak{S}(\varepsilon) \subseteq E$ . Ensuite, nous utiliserons le Lemme 4.4 pour prouver qu'il existe au moins un point fixe de l'opérateur  $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$  dans  $\mathfrak{S}(\varepsilon)$ . Ici, nous divisons la preuve en trois étapes.

Étape 1. Nous prouvons que  $\mathcal{P}\varkappa + \mathcal{Q}y \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$  pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ .

Pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ , selon (4.15) et (4.16), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \frac{|\mathcal{P}\varkappa + \mathcal{Q}y|}{\bar{\omega}(t)} &= \sup_{t \geq 0} \left\{ \left| \frac{e^{-kt}}{\bar{\omega}(t)} \theta_0 + \frac{1 - e^{-kt}}{k\bar{\omega}(t)} \theta_1 + k \int_0^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\bar{\omega}(t)} y(\lambda s) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t)} \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du \right| \right\} \\ &\leq M_1 |\theta_0| + \frac{1 + M_1}{|k|} |\theta_1| + |k| \int_0^\infty \frac{e^{-ku}}{\bar{\omega}(u)} du \|y\| + \beta_2 \|\varkappa\| \\ &\leq \frac{M_1 |k| + 1 + M_1}{|k|} \delta + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\mathcal{P}\varkappa + \mathcal{Q}y \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$  pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ .

Étape 2. Il est facile de voir que  $\mathcal{P}$  est continue. Maintenant, nous prouvons seulement que  $\mathcal{P}\mathfrak{S}(\varepsilon)$  est relativement compact dans  $E$ . En fait, à partir de (4.15), nous obtenons que  $\{\varkappa(t)/\bar{\omega}(t) : \varkappa(t) \in \mathfrak{S}(\varepsilon)\}$  est uniformément borné dans  $E$ . De plus, un théorème classique affirme que la convolution d'une fonction  $L^1$  avec une fonction tendant vers zéro. Ensuite, nous concluons que pour  $t - u \geq 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t-u)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_u^t \frac{e^{-k(t-s)}}{\bar{\omega}(t-u)} \frac{(s-u)^{\alpha-2}}{\bar{\omega}(s-u)} ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t \frac{e^{-k(t-u-s)}}{\bar{\omega}(t-u-s)} \frac{s^{\alpha-2}}{\bar{\omega}(s)} ds = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

en raison du fait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\alpha-2}}{\bar{\omega}(t)} = 0$ . Avec la continuité de  $\mathcal{N}(t)$  et  $\bar{\omega}(t)$ , nous obtenons qu'il existe une constante  $M_2 > 0$  telle que

$$\left| \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t-u)} \right| \leq M_2, \quad (4.18)$$

et pour tout  $T_0 \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $\mathcal{N}(t-u)\bar{\omega}(u)/\bar{\omega}(t)$  est uniformément continue sur  $\{(t, u) : 0 \leq u \leq t \leq T_0\}$ . Pour tout  $t_1, t_2 \in [0, T_0], t_1 < t_2$ , nous avons

$$\left| \frac{\mathcal{P}\varkappa(t_2)}{\bar{\omega}(t_2)} - \frac{\mathcal{P}\varkappa(t_1)}{\bar{\omega}(t_1)} \right| = \left| \int_0^{t_2} \frac{\mathcal{N}(t_2-u)}{\bar{\omega}(t_2)} \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{t_1} \frac{\mathcal{N}(t_1 - u)}{\overline{\omega}(t_1)} \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du \Big| \\
& \leq \int_0^{t_1} \left| \frac{\mathcal{N}(t_2 - u)}{\overline{\omega}(t_2)} - \frac{\mathcal{N}(t_1 - u)}{\overline{\omega}(t_1)} \right| |\mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u))| du \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathcal{N}(t_2 - u)}{\overline{\omega}(t_2 - u)} \mathcal{F}(u, \varepsilon) du \\
& \leq \int_0^{t_1} \left| \frac{\mathcal{N}(t_2 - u)\overline{\omega}(u)}{\overline{\omega}(t_2)} - \frac{\mathcal{N}(t_1 - u)\overline{\omega}(u)}{\overline{\omega}(t_1)} \right| \mathcal{F}(u, \varepsilon) du \\
& + M_2 \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(u, \varepsilon) du \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

lorsque  $t_2 \rightarrow t_1$ , ce qui signifie que  $\{\varkappa(t)/\overline{\omega}(t) : \varkappa(t) \in \mathfrak{S}(\varepsilon)\}$  est équicontinu sur tout intervalle compact de  $\mathbb{R}^+$ . Par le Lemme 4.4, afin de montrer que  $\mathcal{P}\mathfrak{S}(\varepsilon)$  est un ensemble relativement compact de  $E$ , nous avons seulement besoin de prouver que  $\{\varkappa(t)/\overline{\omega}(t) : \varkappa(t) \in \mathfrak{S}(\varepsilon)\}$  est équi-convergent à l'infini. En fait, pour tout  $\varepsilon_1 > 0$ , il existe un  $L > 0$  tel que

$$M_2 \int_L^\infty \mathcal{F}(u, \varepsilon) du \leq \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Selon (4.17), nous obtenons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, L]} \frac{\mathcal{N}(t - u)}{\overline{\omega}(t - u)} \leq \max \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(t - L)}{\overline{\omega}(t - L)}, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(t)}{\overline{\omega}(t)} \right\} = 0.$$

Ainsi, il existe  $T < L$  tel que  $t_1, t_2 \geq T$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{s \in [0, L]} \left| \frac{\mathcal{N}(t_2 - u)\overline{\omega}(u)}{\overline{\omega}(t_2)} - \frac{\mathcal{N}(t_1 - u)\overline{\omega}(u)}{\overline{\omega}(t_1)} \right| & \leq \sup_{s \in [0, L]} \left| \frac{\mathcal{N}(t_2 - u)}{\overline{\omega}(t_2 - u)} \right| + \sup_{s \in [0, L]} \left| \frac{\mathcal{N}(t_1 - u)}{\overline{\omega}(t_1 - u)} \right| \\
& \leq \frac{\varepsilon_1}{3} \left( \int_0^\infty \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) du \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour  $t_1, t_2 \geq T$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mathcal{P}\varkappa(t_2)}{\overline{\omega}(t_2)} - \frac{\mathcal{P}\varkappa(t_1)}{\overline{\omega}(t_1)} \right| & = \left| \int_0^{t_2} \frac{\mathcal{N}(t_2 - u)}{\overline{\omega}(t_2)} \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t_1} \frac{\mathcal{N}(t_1 - u)}{\overline{\omega}(t_1)} \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^L \left| \frac{\mathcal{N}(t_2-u)\overline{\omega}(u)}{\overline{\omega}(t_2)} - \frac{\mathcal{N}(t_1-u)\overline{\omega}(u)}{\overline{\omega}(t_1)} \right| \mathcal{F}(u, \varepsilon) du \\
 &+ \int_L^{t_2} \frac{\mathcal{N}(t_2-u)}{\overline{\omega}(t_2-u)} \mathcal{F}(u, \varepsilon) du + \int_L^{t_1} \frac{\mathcal{N}(t_1-u)}{\overline{\omega}(t_1-u)} \mathcal{F}(u, \varepsilon) du \\
 &\leq \frac{\varepsilon_1}{3} + 2M_2 \int_L^\infty \mathcal{F}(u, \varepsilon) du \leq \varepsilon_1.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la conclusion requise est vraie.

Étape 3. Nous affirmons que  $\mathbb{Q} : \mathfrak{S}(\varepsilon) \rightarrow E$  est une application de contraction.

En fait, pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ , à partir de (4.6), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \geq 0} \left| \frac{\mathbb{Q}\varkappa(t)}{\overline{\omega}(t)} - \frac{\mathbb{Q}y(t)}{\overline{\omega}(t)} \right| &= \sup_{t \geq 0} \left| k \int_0^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\overline{\omega}(t)} \varkappa(u) du - k \int_0^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\overline{\omega}(t)} y(u) du \right| \\
 &\leq \sup_{t \geq 0} |k| \int_0^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\overline{\omega}(t-u)} \frac{|\varkappa(u) - y(u)|}{\overline{\omega}(u)} du \\
 &\leq |k| \int_0^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\overline{\omega}(t-u)} du \|\varkappa - y\| \\
 &\leq \beta_1 \|\varkappa - y\| < \|\varkappa - y\|.
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 4.4, nous savons qu'il existe au moins un point de l'opérateur  $\mathcal{P} + \mathbb{Q}$  dans  $\mathfrak{S}(\varepsilon)$ . Enfin, pour tout  $\varepsilon_2$ , si  $0 < \delta_1 \leq \frac{(1-\beta_1-\beta_2)|k|}{|k|M_1+1+M_1} \varepsilon_2$ , alors  $|\theta_0| + |\theta_1| \leq \delta_1$  implique que

$$\begin{aligned}
 \|\varkappa\| &= \sup_{t \geq 0} \left\{ \left| \theta_0 \frac{e^{-kt}}{\overline{\omega}(t)} + \frac{1-e^{-kt}}{k\overline{\omega}(t)} \theta_1 + k \int_0^t \frac{e^{-k(t-s)}}{\overline{\omega}(t)} \varkappa(u) du \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\overline{\omega}(t)} \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du \right| \right\} \\
 &\leq \sup_{t \geq 0} \left\{ \frac{e^{-kt}}{\overline{\omega}(t)} |\theta_0| + \frac{|1-e^{-kt}|}{|k|\overline{\omega}(t)} |\theta_1| \right. \\
 &\quad \left. + |k| \int_0^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\overline{\omega}(t-u)} \frac{|\varkappa(u)|}{\overline{\omega}(u)} du + \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\overline{\omega}(t-u)} \frac{|\mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u))|}{\overline{\omega}(u)} du \right\} \\
 &\leq M_1 \delta_1 + \frac{1+M_1}{|k|} \delta_1 + \beta_1 \|\varkappa\| + \beta_2 \|\varkappa\| \\
 &\leq \frac{M_1|k| + 1 + M_1}{(1-\beta_1-\beta_2)|k|} \delta_1 \leq \varepsilon_2.
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous savons que la solution triviale du système (4.1) et (4.2) est stable dans l'espace de Banach  $E$ .  $\square$

**Théorème 4.2.** *Supposons que toutes les conditions du Théorème 4.1 soient satisfaites*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-kt}}{\bar{\omega}(t)} = 0, \quad (4.19)$$

et pour tout  $r > 0$ , il existe une fonction  $\varphi_r(t) \in L^1[0, +\infty)$ ,  $\varphi_r(t) > 0$  telle que  $|u| \leq r$  implique

$$\frac{|\mathcal{F}(t, u)|}{\bar{\omega}(t)} \leq \varphi_r(t), \text{ p. p. } t \in [0, +\infty). \quad (4.20)$$

Alors, la solution triviale de (4.1) et (4.2) est asymptotiquement stable.

*Démonstration.* Tout d'abord, il découle du Théorème 4.1 que la solution triviale de (4.1) et (4.2) est stable dans l'espace de Banach  $E$ . Ensuite, nous montrerons qu'elle est attractive. Pour tout  $r > 0$ , en définissant

$$\mathfrak{S}_*(r) = \left\{ \varkappa : \varkappa \in \mathfrak{S}(r), \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varkappa(t)}{\bar{\omega}(t)} = 0 \right\}.$$

Nous devons seulement prouver que  $\mathcal{P}\varkappa + \mathcal{Q}y \in \mathfrak{S}_*(r)$  pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{S}_*(r)$ , c'est-à-dire

$$\frac{\mathcal{P}\varkappa(t) + \mathcal{Q}y(t)}{\bar{\omega}(t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\varkappa + \mathcal{Q}y &= \theta_0 e^{-kt} + \frac{1 - e^{-kt}}{k} \theta_1 \\ &+ k \int_0^t e^{-k(t-s)} y(u) du + \int_0^t \mathcal{N}(t-u) \mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u)) du. \end{aligned}$$

En fait, pour  $\varkappa, y \in \mathfrak{S}_*(r)$ , en se basant sur le fait utilisé dans la démonstration du

Théorème 4.1 (Étape 2), il découle de (4.6) et (4.19) que

$$\int_0^t \frac{e^{-k(t-u)} y(u)}{\bar{\omega}(t-u) \bar{\omega}(u)} du \rightarrow 0 \text{ et } \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t-u)} = \frac{\int_u^t \frac{e^{-k(t-s)} (s-u)^{\alpha-2} ds}{\bar{\omega}(t-u)}}{\Gamma(\alpha-1)} \rightarrow 0,$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ . En conjonction avec l'hypothèse  $\varphi_r(t) \in L^1[0, +\infty)$ , nous obtenons que

$$\int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t-u)} \frac{|\mathcal{F}(u, \varkappa(\lambda u))|}{\bar{\omega}(u)} du \leq \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\bar{\omega}(t-u)} \varphi_r(u) du \rightarrow 0$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Ainsi, nous obtenons la conclusion. □

## 4.2 Exemple

Nous formulons une hypothèse d'application théorique dans le problème de valeur initiale non linéaire fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\frac{3}{2}} \varkappa(t) = \mu \left( \frac{t^2 (\lambda \varkappa)^2}{e^{(\vartheta+1)t}} + \frac{(\lambda \varkappa)^{3/2}}{(1+t^2) e^{\vartheta t/2}} \right), \\ \varkappa(0) = \theta_0, \varkappa'(0) = \theta_1, \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $\vartheta > 1, \mu > 0$ . Supposons que  $0 < |k| \leq \frac{\vartheta-1}{2}$ , soit  $\bar{\omega}(t) = e^{\vartheta t}, \beta_1 = \frac{|k|}{\vartheta+k}$ , alors (4.2) est satisfaite et l'espace de Banach est

$$E^* = \left\{ \varkappa(t) \in C[0, +\infty) : \sup_{t \geq 0} \frac{|\varkappa(t)|}{e^{\vartheta t}} < \infty \right\},$$

muni de la norme  $\|\varkappa\| = \sup_{t \geq 0} \frac{|\varkappa(t)|}{e^{\vartheta t}}$ , et en prenant  $\lambda = 1$ . Soit  $\mathcal{F}(t, r) = \mu(r^2 t^2 e^{-t} + \frac{r^{3/2}}{1+t^2})$ .

Alors (4.9) est satisfaite et  $\mathcal{F}(t, r) \in L^1[0, +\infty)$  en  $t$  pour  $r$  fixé. Remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}(t-u)}{e^{\vartheta(t-u)}} &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_u^t \frac{1}{e^{(\vartheta+k)(t-s)}} \frac{(s-u)^{-1/2}}{e^{\vartheta(s-u)}} ds \\ &\leq \frac{\int_u^t \frac{(s-u)^{-1/2}}{e^{\vartheta(s-u)}} ds}{\Gamma(1/2)} = \frac{\int_0^{t-u} \frac{\omega^{-1/2}}{e^{\vartheta \omega}} d\omega}{\Gamma(1/2)} \leq \vartheta^{1/2}, \end{aligned}$$

### 4.3 Stabilité asymptotique pour les équations différentielles fractionnaires de pantographe 13

pour tout  $t \geq 0$ , s'il existe  $\eta \geq 0$  tel que

$$\mu \leq \frac{1}{2(2\eta + \frac{\pi}{2}\eta^{1/2})(\vartheta + k)\vartheta^{1/2} + 1}, \quad (4.22)$$

alors

$$\int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\overline{\omega}(t-u)} \frac{\mathcal{F}(u,r)}{r} du = \mu \int_0^t \frac{\mathcal{N}(t-u)}{\overline{\omega}(t-u)} (rt^2 e^{-t} + \frac{r^{1/2}}{1+t^2}) du \leq \frac{1/2}{\vartheta + k} < 1 - \beta_1,$$

pour tout  $t \geq 0, 0 \leq r \leq \eta$ . Ainsi, la solution triviale de (4.21) est stable dans  $E^*$ , ce qui découle du Théorème 4.1.

De plus, soit  $\varphi_r(t) = \mu \left( \frac{t^2 r^2}{e^{(\vartheta+1)t}} + \frac{r^{3/2}}{(1+t^2)e^{\vartheta t/2}} \right) \in L^1[0, +\infty)$ . Pour tout  $r$  borné  $r > 0$ , on obtient  $|\mathcal{F}(t, u)| \leq \varphi_r(t)$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} / \overline{\omega}(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{\vartheta t}{2}} = 0.$$

Ensuite, par le Théorème 4.2, on conclut que la solution triviale de (4.21) est asymptotiquement stable.

## 4.3 Stabilité asymptotique pour les équations différentielles fractionnaires de pantographe

Dans un travail récent d'Agarwal et al. [6], l'existence de solutions a été étudiée pour une équation différentielle fractionnaire neutre avec un retard borné. Cette étude a utilisé le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour établir des résultats. Dans leurs recherches, Ge et Kou [30] ont considéré l'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha (\varkappa(t) - g(t, \varkappa_t)) = f(t, \varkappa_t), & t \geq t_0, \\ \varkappa_{t_0} = \varkappa, \end{cases}$$

où  $0 < \alpha < 1$ , et  ${}^C D_{0+}^\alpha$  représente la dérivée fractionnaire de Caputo standard. Ils ont appliqué le théorème du point fixe de Krasnoselskii dans un espace de Banach pondéré pour étudier la stabilité asymptotique de la solution nulle pour cette équation

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha \varkappa(t) = f(t, \varkappa(t)), & t \geq 0, \\ \varkappa(0) = \varkappa_0, \quad \varkappa'(0) = \varkappa_1, \end{cases}$$

où  $1 < \alpha < 2$ .

Dans ce chapitre, nous nous appuyons sur divers travaux antérieurs, y compris des publications telles que [1, 12, 14, 16–18, 29], pour analyser la théorie qualitative des problèmes de stabilité asymptotique liés à la solution nulle des équations différentielles fractionnaires. Plus précisément, notre attention se porte sur l'investigation de la stabilité asymptotique de la solution nulle dans le contexte des équations différentielles fractionnaires de Caputo-Hadamard. L'équation (4.23) que nous considérons est la suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa(t) - \mathfrak{D}_1^{\alpha-1} \mathcal{G}(t, \varkappa(1 + \lambda t)) = \mathcal{F}(t, \varkappa(t), \varkappa(1 + \lambda t)), & t \geq 1, \\ \varkappa(1) = \varkappa_0, \quad \varkappa'(1) = \varkappa_1, \end{cases} \quad (4.23)$$

ici,  $\lambda$  est dans l'intervalle  $(0, 1)$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $\varkappa_0$  et  $\varkappa_1$  sont des nombres réels,  $\mathfrak{D}_1^\alpha$  représente la dérivée standard dérivée fractionnaire de Caputo, et  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  sont des fonctions continues définies sur des domaines spécifiques. La solution de l'équation (4.23) est notée  $\varkappa(t)$ . Pour établir la stabilité asymptotique de la solution nulle, nous appliquons le théorème du point fixe de Krasnoselskii et transformons l'équation (4.23) en une équation intégrale. Cette équation intégrale est une combinaison de deux applications, dont l'une est compacte, et l'autre est une application de contraction.

Nous introduisons les notations essentielles, les lemmes, les résultats préliminaires et l'inversion de l'équation (4.23). Nous présentons également le théorème du point fixe de Krasnoselskii. En suite, nous sommes dédiée à la présentation de nos principaux résultats concernant la stabilité.

**Lemme 4.5.** *Soit  $\mathcal{W}(t) \in C([1, +\infty))$ . Alors  $\varkappa \in C([1, +\infty))$  est une solution du problème*

de Cauchy

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa(t) = \mathscr{W}(t), & t \geq 1, & 1 < \alpha < 2, \\ \varkappa(1) = \varkappa_0, & \varkappa'(1) = \varkappa_1, \end{cases} \quad (4.24)$$

si et seulement si  $\varkappa$  est une solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} t \varkappa'(t) = \mathfrak{J}_1^{\alpha-1} \mathscr{W}(t) + \varkappa_1, & t \geq 1, \\ \varkappa(1) = \varkappa_0. \end{cases} \quad (4.25)$$

*Démonstration.* Tout d'abord, nous suggérons que pour tout  $0 < \gamma < 1$ , si  $\psi \in C[1, +\infty)$ , alors  $(\mathfrak{J}_1^\gamma \psi)(1) = 0$ . En effet, puisque

$$\mathfrak{J}_1^\gamma \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^t (\log \frac{t}{\tau})^{\gamma-1} \psi(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

nous pouvons conclure que

$$|\mathfrak{J}_1^\gamma \psi(t)| = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left| \int_1^t (\log \frac{t}{\tau})^{\gamma-1} \psi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right| \leq \frac{\|\psi\|_t}{\Gamma(\gamma+1)} (\log t)^\gamma \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow 1.$$

(1) Soit  $\varkappa \in C[1, +\infty)$  une solution du problème (4.24).

Pour tout  $t \geq 1$ , la Définition 1.7 montre que

$$\mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa(t) = (\mathfrak{D}_1^{\alpha-1} \mathfrak{D}_1^1 \varkappa)(t) = \mathscr{W}(t).$$

En raison du Lemme 5.1, nous avons

$$t \varkappa'(t) = \varkappa'(1) + \mathfrak{J}_1^{\alpha-1} \mathscr{W}(t) = \mathfrak{J}_1^{\alpha-1} \mathscr{W}(t) + \varkappa_1.$$

Cela indique que  $\varkappa(t)$  est une solution de l'équation (4.25).

(2) Supposons que  $\varkappa(t)$  soit une solution de (4.25).

Pour tout  $t \geq 1$ , on voit facilement que

$$\mathfrak{D}_1^\alpha \varkappa(t) = \mathfrak{D}_1^{\alpha-1} (t \varkappa'(t)) = (\mathfrak{D}_1^{\alpha-1} \mathfrak{J}_1^{\alpha-1} \mathscr{W})(t) + \mathfrak{D}_1^{\alpha-1} \varkappa_1 = \mathscr{W}(t).$$

De plus, notez que  $\mathcal{W}(t) \in C[1, +\infty)$ , nous avons  $\mathcal{X}'(1) = \mathfrak{I}_1^{\alpha-1} \mathcal{W}(1) + \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1$ .  $\square$

**Lemme 4.6.** Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Alors,  $\mathcal{X} \in C([1, +\infty))$  est une solution de (4.23) si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \mathcal{X}_0 e^{-kt} + (\mathcal{X}_1 - \mathcal{G}(1, \mathcal{X}(1 + \lambda))) \int_1^t e^{-k(t-\tau)} \frac{d\tau}{\tau} \\ &\quad + \int_1^t e^{-k(t-\tau)} (k\tau \mathcal{X}(\tau) + \mathcal{G}(\tau, \mathcal{X}(1 + \lambda\tau))) \frac{d\tau}{\tau} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^t \int_u^t e^{-k(t-\tau)} \left(\log \frac{t}{u}\right)^{\alpha-2} \frac{d\tau}{\tau} \mathcal{F}(u, \mathcal{X}(u), \mathcal{X}(1 + \lambda u)) \frac{du}{u}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{X} \in C([1, +\infty))$  une solution de (4.23). Par le Lemme 4.5, on obtient

$$\begin{cases} t\mathcal{X}'(t) = \mathfrak{I}_1^{\alpha-1} [\mathcal{F}(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{X}(1 + \lambda t)) + \mathfrak{D}_1^{\alpha-1} \mathcal{G}(t, \mathcal{X}(1 + \lambda t))] + \mathcal{X}_1, & t \geq 1, \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0. \end{cases}$$

Ensuite,

$$\begin{cases} t\mathcal{X}'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-2} \mathcal{F}(\tau, \mathcal{X}(\tau), \mathcal{X}(1 + \lambda\tau)) \frac{d\tau}{\tau} \\ \quad + \mathcal{G}(t, \mathcal{X}(1 + \lambda t)) - \mathcal{G}(1, \mathcal{X}(1 + \lambda)) + \mathcal{X}_1, & t \geq 1, \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Réécrivons (4.27) comme

$$\begin{cases} \mathcal{X}'(t) + k\mathcal{X}(t) = k\mathcal{X}(t) + \frac{1}{t} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-2} \mathcal{F}(\tau, \mathcal{X}(\tau), \mathcal{X}(1 + \lambda\tau)) \frac{d\tau}{\tau} \\ \quad + \frac{1}{t} \mathcal{G}(t, \mathcal{X}(1 + \lambda t)) - \frac{1}{t} \mathcal{G}(1, \mathcal{X}(1 + \lambda)) + \frac{1}{t} \mathcal{X}_1, & t \geq 1, \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0. \end{cases}$$

Nous obtenons (4.26) à partir de la formule de variation des constantes. La réciproque découle facilement. Ainsi, la démonstration est complète.  $\square$

**Définition 4.2.** La solution triviale  $\mathcal{X} = 0$  de (4.23) est

(i) stable dans  $\mathcal{E}$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que  $|\mathcal{X}_0| + |\mathcal{X}_1| \leq \delta$  implique que la solution  $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$  existe pour tout  $t \geq 1$  et satisfait  $\|\mathcal{X}\| \leq \varepsilon$ .

(ii) asymptotiquement stable, si (i) est vérifié et s'il existe un nombre  $\sigma > 0$  tel que  $|\varkappa_0| + |\varkappa_1| \leq \sigma$  implique  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varkappa(t)\| = 0$ .

Maintenant, le théorème du point fixe de Krasnoselskii sera présenté afin de démontrer la stabilité asymptotique de la solution nulle de (4.23). Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [64].

Pour un survol (ii), la norme de Hoarding standard modifiée suivante est nécessaire.

**Théorème 4.3** ([55]). *Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Banach et  $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}$ . Alors  $\mathfrak{X}$  est relativement compact dans  $\mathcal{E}$  si les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(i)  $\{\varkappa(t)/\mathfrak{h}(\log t) : \varkappa \in \mathfrak{X}\}$  est uniformément borné,

(ii) sur n'importe quel intervalle compact de  $[1, +\infty)$ , l'ensemble  $\{\varkappa(t)/\mathfrak{h}(\log t) : \varkappa \in \mathfrak{X}\}$  est équicontinu,

(iii)  $\{\varkappa(t)/\mathfrak{h}(\log t) : \varkappa \in \mathfrak{X}\}$  est équiconvergent à l'infini, c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $T_0 > 1$  telle que pour tous  $\varkappa \in \mathfrak{X}$  et  $t_1, t_2 > T_0$ , si l'on a

$$|\varkappa(t_2)/\mathfrak{h}(\log t_2) - \varkappa(t_1)/\mathfrak{h}(\log t_1)| < \varepsilon.$$

## 4.4 Stabilité asymptotique pour les EDFs de pantographe

Ci-dessous, nous présentons les conditions avant de mentionner et de prouver les résultats matériels.

(A1) Les fonctions  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  sont des fonctions continues et  $\mathcal{G}(t, 0) = \mathcal{F}(t, 0, 0) = 0$ . On suppose que  $\mathcal{G}$  est localement Lipschitz continue en  $\varkappa$ . C'est-à-dire, il existe un  $L_{\mathcal{G}} > 0$  tel que si  $|\varkappa|, |y| \leq l$  alors

$$|\mathcal{G}(t, \varkappa) - \mathcal{G}(t, y)| \leq L_{\mathcal{G}} \|\varkappa - y\|.$$

( $\Lambda 2$ ) Il existe un  $\beta_1 \in (0, 1)$  tel que

$$\beta_1 \left( 1 + \frac{Lg}{|k|} \right) < 1, \quad (4.28)$$

et

$$e^{-kt}/\mathfrak{h}(\log t) \in BC([1, +\infty)) \cap L^1([1, +\infty)), \text{ Ainsi } |k| \int_1^t e^{-ku}/\mathfrak{h}(\log u) du \leq \beta_1 < 1. \quad (4.29)$$

( $\Lambda 3$ ) Il existe des constantes  $\eta > 0$ ,  $\beta_2 \in (0, 1 - \beta_1)$  et une fonction continue  $\mathcal{F} : [1, \infty) \times (0, \eta] \times (0, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$\frac{|\mathcal{F}(t, v_1 \mathfrak{h}(\log t), v_2 \mathfrak{h}(\log(1 + \lambda t)))|}{\mathfrak{h}(\log t)} \leq \mathcal{F}(t, |v_1|, |v_2|), \quad (4.30)$$

tiennent pour tout  $t \geq 1$ ,  $0 < |v_1|, |v_2| \leq \eta$  et

$$\sup_{t \geq 1} \int_1^t \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{\mathcal{F}(u, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)}{\eta} \frac{du}{u} \leq \beta_2 < 1 - \beta_1, \quad (4.31)$$

tient pour chaque  $0 < \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \leq \eta$ , où  $\mathcal{F}(t, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$  est non décroissante en  $\mathfrak{r}_1$  et  $\mathfrak{r}_2$  pour  $t$  fixé,  $\mathcal{F}(t, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \in L^1([1, +\infty))$  en  $t$  pour  $\mathfrak{r}_1$  et  $\mathfrak{r}_2$  fixés, et

$$\varpi(\log \frac{t}{u}) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_u^t e^{-k(t-\tau)} (\log \frac{\tau}{u})^{\alpha-2} \frac{d\tau}{\tau}, & \frac{t}{u} \geq 1, \\ 0, & \frac{t}{u} < 1. \end{cases} \quad (4.32)$$

**Théorème 4.4.** *Supposons que ( $\Lambda 1$ ) – ( $\Lambda 3$ ) soient vérifiées. Alors  $\varkappa = 0$  de (4.23) est stable dans  $\mathcal{E}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, nous montrons l'existence de  $\delta > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, tel que

$$|\varkappa_0| + |\varkappa_1| < \delta \text{ implique } \|\varkappa\| \leq \varepsilon.$$

En raison de (4.29), il existe une constante  $M_1 > 0$  telle que

$$\frac{e^{-kt}}{\mathfrak{h}(\log t)} \leq M_1. \quad (4.33)$$

Soit  $0 < \delta \leq \frac{(1-\beta_1(1+\frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|})-\beta_2)|k|}{M_1|k|+(1+M_1)(1+L_{\mathcal{G}})}\varepsilon$ . Proposons l'ensemble convexe fermé non vide  $\mathfrak{B}(\varepsilon) \subseteq \mathcal{E}$ , pour  $t \geq 1$ , notons deux applications  $P$  et  $Q$  sur  $\mathfrak{B}(\varepsilon)$  comme suit :

$$\begin{aligned} P\mathcal{X}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^t \int_u^t e^{-k(t-\tau)} \left(\log \frac{\tau}{u}\right)^{\alpha-2} d\tau \mathcal{F}(u, \mathcal{X}(u), \mathcal{X}(1+\lambda u)) \frac{du}{u} \\ &= \int_1^t \mathfrak{w}(\log \frac{t}{u}) \mathcal{F}(u, \mathcal{X}(u), \mathcal{X}(1+\lambda u)) \frac{du}{u}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

et

$$\begin{aligned} Q\mathcal{X}(t) &= \mathcal{X}_0 e^{-kt} + (\mathcal{X}_1 - \mathcal{G}(1, \mathcal{X}(1+\lambda))) \int_1^t e^{-k(t-\tau)} \frac{d\tau}{\tau} \\ &\quad + \int_1^t e^{-k(t-\tau)} (k\tau \mathcal{X}(\tau) + \mathcal{G}(\tau, \mathcal{X}(1+\lambda\tau))) \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Clairement, pour  $\mathcal{X} \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ ,  $P\mathcal{X}$  et  $Q\mathcal{X}$  sont des fonctions continues sur  $[1, +\infty)$ . De plus, pour  $\mathcal{X} \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ , en utilisant (4.30)-(4.31) pour tout  $t \geq 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{|P\mathcal{X}(t)|}{\mathfrak{h}(\log t)} &\leq \int_1^t \frac{\mathfrak{w}(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{|\mathcal{F}(u, \mathcal{X}(u), \mathcal{X}(1+\lambda u))|}{\mathfrak{h}(\log u)} \frac{du}{u} \\ &\leq \int_1^t \frac{\mathfrak{w}(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \mathcal{F} \left( u, \frac{|\mathcal{X}(u)|}{\mathfrak{h}(\log u)}, \frac{|\mathcal{X}(1+\lambda u)|}{\mathfrak{h}(\log(1+\lambda u))} \right) \frac{du}{u} \\ &\leq \beta_2 \|\mathcal{X}\| \leq \beta_2 \varepsilon < \infty, \end{aligned} \quad (4.36)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{|Q\mathcal{X}(t)|}{\mathfrak{h}(\log t)} &= \left| \mathcal{X}_0 \frac{e^{-kt}}{\mathfrak{h}(\log t)} + (\mathcal{X}_1 - \mathcal{G}(1, \mathcal{X}(1+\lambda))) \frac{\int_1^t e^{-k(t-\tau)} \frac{d\tau}{\tau}}{\mathfrak{h}(\log t)} \right. \\ &\quad \left. + \int_1^t \frac{e^{-k(t-\tau)}}{\mathfrak{h}(\log t)} (k\tau \mathcal{X}(\tau) + \mathcal{G}(\tau, \mathcal{X}(1+\lambda\tau))) \frac{d\tau}{\tau} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq M_1 |\varkappa_0| + \frac{1+M_1}{|k|} (|\varkappa_1| + |\mathcal{G}(1, \varkappa(1+\lambda))|) + |k| \int_1^\infty \frac{e^{-ku}}{\mathfrak{h}(\log u)} du \left(1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|}\right) \|\varkappa\| \\
 &\leq M_1 |\varkappa_0| + \frac{1+M_1}{|k|} (|\varkappa_1| + L_{\mathcal{G}} \|\varkappa(t)\|) + \beta_1 \left(1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|}\right) \varepsilon < \infty.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ainsi,  $P\mathfrak{B}(\varepsilon) \subseteq \mathcal{E}$  et  $Q\mathfrak{B}(\varepsilon) \subseteq \mathcal{E}$ . Ensuite, nous utilisons le théorème 4.4 pour démontrer qu'il existe au moins un point fixe de l'opérateur  $P + Q$  dans  $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ . Ici, nous présentons la preuve en trois étapes.

**Étape 1.** Nous montrons que  $P\varkappa + Qy \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$  pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ .

Pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ , en utilisant (4.36) et (4.37), nous avons

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \geq 1} \frac{|P\varkappa(t) + Qy(t)|}{\mathfrak{h}(\log t)} &= \sup_{t \geq 1} \left\{ \left| \varkappa_0 \frac{e^{-kt}}{\mathfrak{h}(\log t)} + (\varkappa_1 - \mathcal{G}(1, y(1+\lambda))) \frac{\int_1^t e^{-k(t-\tau)} \frac{d\tau}{\mathfrak{h}(\log t)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_1^t \frac{e^{-k(t-\tau)}}{\mathfrak{h}(\log t)} (k\tau y(\tau) + \mathcal{G}(\tau, y(1+\lambda\tau))) \frac{d\tau}{\tau} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_1^t \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log t)} \mathcal{F}(u, \varkappa(u), \varkappa(1+\lambda u)) \frac{du}{u} \right\} \\
 &\leq M_1 |\varkappa_0| + \frac{1+M_1}{|k|} (|\varkappa_1| + L_{\mathcal{G}} \delta) \\
 &\quad + |k| \int_1^\infty \frac{e^{-ku}}{\mathfrak{h}(\log u)} du \left(1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|}\right) \|y\| + \beta_2 \|\varkappa\| \\
 &\leq \frac{M_1 |k| + (1+M_1)(1+L_{\mathcal{G}})}{|k|} \delta + \beta_1 \left(1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|}\right) \varepsilon + \beta_2 \varepsilon \leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

ce qui conclut que  $P\varkappa + Qy \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$  pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ .

**Étape 2.** Maintenant, nous montrons simplement que  $P\mathfrak{B}(\varepsilon)$  est relativement compact dans  $\mathcal{E}$ , pour montrer que  $P$  est continue. En fait, à partir de (4.36), nous obtenons que  $\{\varkappa(t)/\mathfrak{h}(\log t) : \varkappa \in \mathfrak{B}(\varepsilon)\}$  est uniformément borné dans  $\mathcal{E}$ . De plus, la théorie habituelle dit que la convolution d'une fonction  $L^1$  avec une fonction tendant vers zéro tend également vers zéro. Ensuite, nous pouvons conclure que pour  $\frac{t}{u} \geq 1$ , on a

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_u^t \frac{e^{-k(t-\tau)}}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{(\log \frac{\tau}{u})^{\alpha-2}}{\mathfrak{h}(\log \frac{\tau}{u})} \frac{d\tau}{\tau}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_1^t \frac{e^{-k(t-u\tau)} (\log \tau)^{\alpha-2} d\tau}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u\tau}) \mathfrak{h}(\log \tau) \tau} = 0, \quad (4.38)$$

en raison du fait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\log t)^{\alpha-2}}{\mathfrak{h}(\log t)} = 0$ . Avec la continuité de  $\varpi$  et  $\mathfrak{h}$ , nous concluons qu'il existe une constante  $M_2 > 0$  telle que

$$\left| \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \right| \leq M_2, \quad (4.39)$$

et pour tout  $T_0 \in [1, \infty)$ , la fonction  $\varpi(\log \frac{t}{u})\mathfrak{h}(\log u)/\mathfrak{h}(\log t)$  est uniformément continue sur  $\{(t, u) : 1 \leq u \leq t \leq T_0\}$ . Pour tout  $t_1, t_2 \in [1, T_0]$ ,  $t_1 < t_2$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{P\mathfrak{x}(t_2)}{\mathfrak{h}(\log t_2)} - \frac{P\mathfrak{x}(t_1)}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \right| &= \left| \int_1^{t_2} \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u})}{\mathfrak{h}(\log t_2)} \mathcal{F}(u, \mathfrak{x}(u), \mathfrak{x}(1 + \lambda u)) \frac{du}{u} \right. \\ &\quad \left. - \int_1^{t_1} \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u})}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \mathcal{F}(u, \mathfrak{x}(u), \mathfrak{x}(1 + \lambda u)) \frac{du}{u} \right| \\ &\leq \int_1^{t_1} \left| \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u})}{\mathfrak{h}(\log t_2)} - \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u})}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \right| |\mathcal{F}(u, \mathfrak{x}(u), \mathfrak{x}(1 + \lambda u))| \frac{du}{u} \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t_2}{u})} \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \\ &\leq \int_1^{t_1} \left| \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u})\mathfrak{h}(\log u)}{\mathfrak{h}(\log t_2)} - \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u})\mathfrak{h}(\log u)}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \right| \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \\ &\quad + M_2 \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

à mesure que  $t_2 \rightarrow t_1$ , ce qui signifie que  $\{\mathfrak{x}(t)/\mathfrak{h}(\log t) : \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}(\varepsilon)\}$  est équicontinu sur tout intervalle compact de  $[1, \infty)$ . Par le théorème 4.3, pour prouver que  $P\mathfrak{B}(\varepsilon)$  est un ensemble relativement compact de  $\mathcal{E}$ , nous devons simplement démontrer que  $\{\mathfrak{x}(t)/\mathfrak{h}(\log t) : \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}(\varepsilon)\}$  converge uniformément vers zéro. En fait, pour tout  $\varepsilon_1 > 0$ , il existe un  $L > 1$  tel que

$$M_2 \int_L^\infty \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \leq \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

À partir de (4.38), nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{u \in [1, L]} \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \leq \max \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varpi(\log \frac{t}{L})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{L})}, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varpi(\log t)}{\mathfrak{h}(\log t)} \right\} = 0.$$

$$\begin{aligned} \sup_{u \in [1, L]} \left| \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u}) \mathfrak{h}(\log u)}{\mathfrak{h}(\log t_2)} - \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u}) \mathfrak{h}(\log u)}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \right| &\leq \sup_{u \in [1, L]} \left| \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t_2}{u})} \right| + \sup_{u \in [1, L]} \left| \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t_1}{u})} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{3} \left( \int_1^\infty \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

En conséquence, pour  $t_1, t_2 \geq T$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{P\mathcal{X}(t_2)}{\mathfrak{h}(\log t_2)} - \frac{P\mathcal{X}(t_1)}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \right| &= \left| \int_1^{t_2} \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u})}{\mathfrak{h}(\log t_2)} \mathcal{F}(u, \mathcal{X}(u), \mathcal{X}(1 + \lambda u)) \frac{du}{u} \right. \\ &\quad \left. - \int_1^{t_1} \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u})}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \mathcal{F}(u, \mathcal{X}(u), \mathcal{X}(1 + \lambda u)) \frac{du}{u} \right| \\ &\leq \int_1^L \left| \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u}) \mathfrak{h}(\log u)}{\mathfrak{h}(\log t_2)} - \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u}) \mathfrak{h}(\log u)}{\mathfrak{h}(\log t_1)} \right| \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \\ &\quad + \int_L^{t_2} \frac{\varpi(\log \frac{t_2}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t_2}{u})} \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} + \int_L^{t_1} \frac{\varpi(\log \frac{t_1}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t_1}{u})} \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{3} + 2M_2 \int_L^\infty \mathcal{F}(u, \varepsilon, \varepsilon) \frac{du}{u} \leq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Ainsi, la conclusion nécessaire est obtenue.

**Étape 3.** Supposons que  $Q : \mathfrak{B}(\varepsilon) \rightarrow \mathcal{E}$  soit une application de contraction.

En fait, pour tout  $\mathcal{X}, y \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ , à partir de (4.29), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 1} \left| \frac{Q\mathcal{X}(t)}{\mathfrak{h}(\log t)} - \frac{Qy(t)}{\mathfrak{h}(\log t)} \right| &= \sup_{t \geq 1} \left\{ \left| \int_1^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\mathfrak{h}(\log t)} (k\mathcal{X}(u) + \mathcal{G}(u, \mathcal{X}(1 + \lambda u))) \frac{du}{u} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_1^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\mathfrak{h}(\log t)} (ky(u) + \mathcal{G}(u, y(1 + \lambda u))) \frac{du}{u} \right| \right\} \\ &\leq \sup_{t \geq 1} |k| \int_1^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{u |\mathcal{X}(u) - y(u)|}{\mathfrak{h}(\log u)} \frac{du}{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{t \geq 1} \int_1^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{|\mathcal{G}(u, \varkappa(1 + \lambda u)) - \mathcal{G}(u, y(1 + \lambda u))|}{\mathfrak{h}(\log u)} \frac{du}{u} \\
& \leq |k| \int_1^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} du \left( 1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|} \right) \|\varkappa - y\| \\
& \leq \beta_1 \left( 1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|} \right) \|\varkappa - y\|.
\end{aligned}$$

Selon le théorème 2.6, nous savons que l'opérateur  $P + Q$  a au moins un point fixe dans  $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ . Enfin, pour tout  $\varepsilon_2 > 0$ , si  $0 < \delta_1 \leq \frac{(1 - \beta_1 (1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|}) - \beta_2) |k|}{|k| M_1 + (1 + M_1)(1 + L_{\mathcal{G}})} \varepsilon_2$ , alors  $|\varkappa_0| + |\varkappa_1| \leq \delta_1$  implique que

$$\begin{aligned}
\|\varkappa\| & = \sup_{t \geq 1} \left| \varkappa_0 \frac{e^{-kt}}{\mathfrak{h}(\log t)} + (\varkappa_1 - \mathcal{G}(1, \varkappa(1 + \lambda))) \frac{\int_1^t e^{-k(t-\tau)} \frac{d\tau}{\mathfrak{h}(\log t)} \right. \\
& \quad + \int_1^t \frac{e^{-k(t-\tau)}}{\mathfrak{h}(\log t)} (k u \varkappa(u) + \mathcal{G}(u, \varkappa(1 + \lambda u))) \frac{du}{u} \\
& \quad \left. + \int_1^t \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log t)} \mathcal{F}(u, \varkappa(u), \varkappa(1 + \lambda u)) \frac{du}{u} \right| \\
& \leq \sup_{t \geq 1} \left\{ \frac{e^{-kt}}{\mathfrak{h}(\log t)} \varkappa_0 + \frac{|1 - e^{-kt}|}{|k| \mathfrak{h}(\log t)} (|\varkappa_1| + L_{\mathcal{G}} |\varkappa(1 + \lambda)|) \right. \\
& \quad + |k| \int_1^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u}) \mathfrak{h}(\log u)} \left( u |\varkappa(u)| + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|} |\varkappa(u)| \right) \frac{du}{u} \\
& \quad \left. + \int_1^t \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{|\mathcal{F}(u, \varkappa(u), \varkappa(1 + \lambda u))|}{\mathfrak{h}(\log u)} \frac{du}{u} \right\} \\
& \leq M_1 \delta_1 + \frac{1 + M_1}{|k|} (\delta_1 + L_{\mathcal{G}} \delta_1) + \beta_1 \left( 1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|} \right) \|\varkappa\| + \beta_2 \|\varkappa\| \\
& \leq \frac{|k| M_1 + (1 + M_1)(1 + L_{\mathcal{G}})}{(1 - \beta_1 (1 + \frac{L_{\mathcal{G}}}{|k|}) - \beta_2) |k|} \delta_1 \leq \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous affirmons que la solution triviale de (4.23) est stable dans  $\mathcal{E}$ .  $\square$

**Théorème 4.5.** *Supposons que toutes les conditions du théorème 4.4 sont satisfaites,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} / \mathfrak{h}(\log t) = 0, \quad (4.40)$$

et pour tout  $\mathfrak{r} > 0$ , il existe une fonction  $\psi_{\mathfrak{r}}(t) \in L^1([1, +\infty))$ ,  $\psi_{\mathfrak{r}}(t) > 0$  telle que  $|u|, |v| \leq \mathfrak{r}$  implique

$$|\mathcal{F}(t, u, v)| / \mathfrak{h}(\log t) \leq \psi_{\mathfrak{r}}(t), \text{ p. p. } t \in [1, +\infty). \quad (4.41)$$

Ainsi, la solution triviale de (4.23) est AS (asymptotiquement stable).

*Démonstration.* Tout d'abord, nous constatons que la solution triviale de (4.23) est stable dans  $\mathcal{E}$  d'après le théorème 4.4. Ensuite, nous démontrons que la solution triviale  $\varkappa = 0$  de (4.23) est attractive.

Pour tout  $\mathfrak{r} > 0$ , en définissant

$$\mathfrak{B}_*(\mathfrak{r}) = \left\{ \varkappa \in \mathfrak{B}(\mathfrak{r}), \lim_{t \rightarrow \infty} \varkappa(t) / \mathfrak{h}(\log t) = 0 \right\}.$$

Nous devons prouver que  $P\varkappa + Qy \in \mathfrak{B}_*(\mathfrak{r})$  pour tout  $\varkappa, y \in \mathfrak{B}_*(\mathfrak{r})$ , c'est-à-dire

$$\frac{P\varkappa(t) + Qy(t)}{\mathfrak{h}(\log t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty,$$

où

$$\begin{aligned} P\varkappa(t) + Qy(t) &= \varkappa_0 e^{-kt} + (\varkappa_1 - \mathcal{G}(1, y(1 + \lambda))) \frac{\int_1^t e^{-k(t-\tau)} \frac{d\tau}{\tau}}{\mathfrak{h}(\log t)} \\ &\quad + \int_1^t e^{-k(t-\tau)} (kuy(u) + \mathcal{G}(u, y(1 + \lambda u))) \frac{du}{u} \\ &\quad + \int_1^t \varpi(\log \frac{t}{u}) \mathcal{F}(u, \varkappa(u), \varkappa(1 + \lambda u)) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Réaliste, pour  $\varkappa, y \in \mathfrak{B}_*(\mathfrak{r})$ , afin de prouver le Théorème 4.4 (Étape 2), il découle de (4.29) et (4.40) que

$$\int_1^t \frac{e^{-k(t-u)}}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{(kuy(u) + \mathcal{G}(u, y(1 + \lambda u))) du}{\mathfrak{h}(\log u) u} \rightarrow 0,$$

et

$$\frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} = \frac{\int_u^t \frac{e^{-k(t-\tau)}}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} (\log \frac{\tau}{u})^{\alpha-2} \frac{d\tau}{\tau}}{\Gamma(\alpha-1)} \rightarrow 0,$$

quand  $t \rightarrow \infty$ . Avec l'hypothèse  $\psi_\tau(t) \in L^1([1, +\infty))$ , nous obtenons que

$$\int_1^t \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \frac{|\mathcal{F}(u, \varkappa(u), \varkappa(1 + \lambda u))|}{\mathfrak{h}(\log u)} \frac{du}{u} \leq \int_1^t \frac{\varpi(\log \frac{t}{u})}{\mathfrak{h}(\log \frac{t}{u})} \psi_\tau(u) \frac{du}{u} \rightarrow 0,$$

à mesure que  $t \rightarrow \infty$ . Nous obtenons la conclusion.  $\square$

## 4.5 Remarques

Dans ce chapitre, on fournit des conditions suffisantes pour garantir la stabilité asymptotique de la solution nulle pour les équations différentielles fractionnaires de type pantographe utilisant Caputo-Hadamard, telles que données dans l'équation (4.23). En appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselskii dans un espace de Banach pondéré, nous établissons des résultats novateurs concernant la solution nulle asymptotiquement stable, sous la condition que  $\mathcal{G}(t, 0) = \mathcal{F}(t, 0, 0) = 0$ .

# Existence de solutions pour les équations différentielles fractionnaires séquentielles $\psi$ -Caputo

## 5.1 Introduction

Le concept de calcul fractionnaire a une histoire riche, remontant à de nombreuses années. L'idée d'une dérivée d'ordre demi a été introduite par Leibniz et L'Hospital, suscitant un intérêt pour le calcul à ordre fractionnaire (voir, par exemple, [22]). Au fil des ans, les équations différentielles fractionnaires (EDF) ont gagné une popularité significative et ont été appliquées à un large éventail de domaines, notamment les matériaux polymères, la physique fractionnaire, la théorie du contrôle de la diffusion anormale et les processus stochastiques (voir, par exemple, [43]).

La théorie des points fixes (TPF) a été un sujet central dans l'analyse mathématique depuis les 150 dernières années, trouvant des applications dans divers domaines scientifiques, y compris la physique mathématique, la topologie et la théorie de l'approximation. L'étude de la TPF a commencé avec les travaux de Poincaré au XIXe siècle. En 1922, le travail novateur de Banach a établi l'existence et l'unicité des solutions pour la théorie des points fixes classique, couvrant à la fois les équations différentielles et intégrales. Cette réalisation a marqué une étape importante dans le développement de la TPF. Par la suite, en 1930, Schauder a étendu la théorie aux espaces de Banach de dimension infinie,

conduisant à la création du théorème du point fixe de Schauder et élargissant la portée de ses applications pratiques dans divers domaines, tels que la théorie des jeux, l'économie et l'ingénierie (voir, par exemple, [41, 48]).

Les EDF ont émergé comme un puissant outil mathématique pour modéliser divers phénomènes dans des domaines variés, y compris des applications en thérapie contre le cancer, en médecine, en traitement du signal, et plus encore (voir, par exemple, [5, 31, 37, 42, 49, 60, 62, 71]).

Des recherches récentes se sont concentrées sur les équations différentielles fractionnaires  $\psi$ -Caputo (EDF  $\psi$ -Caputo) et les équations différentielles fractionnaires de Caputo-Hadamard (EDFCH). Ces définitions généralisent les intégrales fractionnaires de Caputo et Riemann-Liouville (IFRL) et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (DFRL). L'existence de solutions a été étudiée dans plusieurs travaux, dont [2, 3, 8, 9, 14, 36, 56, 57, 69], où les conditions de bande et la théorie des points fixes (TPF) jouent un rôle central.

De nombreux auteurs et chercheurs ont consacré leurs travaux à explorer la théorie des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité asymptotique, utilisant principalement les dérivées fractionnaires de Caputo et Riemann-Liouville, ainsi que les équations fractionnaires de Caputo-Hadamard (voir, par exemple, [32, 68]).

La structure de ce chapitre est organisée comme suit : la prochaine section couvre les définitions et théories nécessaires qui servent de base à notre travail ultérieur. La Section 3 présente les résultats clés que nous avons déduits, tandis que la Section 4 propose un exemple numérique pour illustrer les applications pratiques de nos découvertes théoriques. La dernière section conclut notre étude.

M. Matar et ses collègues, dans leur étude rapportée dans [53], se sont plongés dans l'investigation de l'existence et de l'unicité des solutions pour les équations différentielles fractionnaires séquentielles de Hadamard.

$$\begin{cases} (\mathcal{D}_a^\alpha + \gamma \mathcal{D}_a^{\alpha-1}) \varkappa(t) = f(t, \varkappa(t)), & 1 < \alpha < 2, \\ \varkappa(a) = \varkappa'(a) = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \left( \mathcal{D}_a^\alpha + \gamma \mathcal{D}_a^{\alpha-1} + \frac{\lambda^2-1}{4} \mathcal{D}_a^{\alpha-2} \right) \varkappa(t) = g(t, \varkappa(t)), \\ \varkappa(a) = \varkappa'(a) = \varkappa''(a) = 0, \end{cases}$$

où  $2 < \alpha < 3$ ,  $t \in [a, T]$ ,  $1 \leq a < T$ ,  $f, g : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues données, et  $\gamma$  et  $\lambda$  sont des nombres réels. Dans [51], les auteurs ont pris en compte le système infini d'EDs du deuxième ordre

$$\begin{cases} t \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \frac{du_i}{dt} = f_j(t, u(t)), \quad t \in J := [1, q] \\ u_j(1) = u_j(q) = 0, \end{cases}$$

où  $u(t) = \{u_j(t)\}_{j=1}^\infty$ , dans l'espace de séquence de Banach  $l^p$ ,  $p \geq 1$ .

Inspirés par le TPF ci-dessus et des travaux cités, nous considérons des EDF  $\psi$ -Caputo avec des conditions aux limites différentielles de  $\psi$ -Caputo (CLD  $\psi$ -Caputo) de la forme

$$\mathcal{D}^{\alpha_1; \psi} (\mathcal{D}^{\alpha_2; \psi} \varkappa)(\zeta) = g(\zeta, \varkappa(\zeta)) \quad \zeta \in J := [a, b], \quad 1 < \alpha_1, \alpha_2 < 2 \quad (5.1)$$

$$\varkappa(a) = 0, \quad \kappa \mathcal{D}^{\vartheta_1; \psi} \varkappa(b) + (1 - \kappa) \mathcal{D}^{\vartheta_2; \psi} \varkappa(b) = \vartheta_3, \quad \vartheta_3 \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

où  $\mathcal{D}^{\alpha_1; \psi}$ ,  $\mathcal{D}^{\alpha_2; \psi}$  sont les EDF  $\psi$ -Caputo d'ordres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\mathcal{D}^{\vartheta_1; \psi}$ ,  $\mathcal{D}^{\vartheta_2; \psi}$  sont les CLD  $\psi$ -Caputo d'ordres  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  respectivement.  $0 < \vartheta_1, \vartheta_2 < \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $0 \leq \kappa \leq 1$  est une constante et une fonction continue  $g : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nous utilisons les hypothèses suivantes pour démontrer les résultats de EDF  $\psi$ -Caputo utilisant CLD  $\psi$ -Caputo.

( $\Omega_1$ )  $g : J = [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est fonction continue.

( $\Omega_2$ ) Il existe des fonctions croissantes  $\phi_g(\zeta) \in C([a, b], \mathbb{R}^+)$  :

$$|g(\zeta, \varkappa)| \leq \phi_g(\zeta), \quad \text{pour tout } \varkappa \in \mathbb{R}$$

( $\Omega_3$ ) Il existe la fonction  $\Upsilon_g(\zeta) \in C([a, b], \mathbb{R}^+)$  :

$$|g(\zeta, \varkappa) - g(\zeta, \varkappa_1)| \leq \Upsilon_g(\zeta) |\varkappa - \varkappa_1|, \quad \text{for any } \varkappa, \varkappa_1 \in \mathbb{R}.$$

Les concepts bien connus liés au problème (5.1)-(5.2) et le lemme associé peuvent être trouvés dans les références [5, 53, 60, 62].

**Lemme 5.1.** *Les CLDs  $\psi$ -Caputo*

$$\mathcal{D}^{\alpha_1; \psi}(\mathcal{D}^{\alpha_2; \psi} \varkappa)(\varsigma) = \varphi(\varsigma), \quad \varsigma \in \mathbf{J} := [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad 1 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 2, \quad (5.3)$$

$$\kappa \mathcal{D}^{\vartheta_1; \psi} \varkappa(\mathbf{b}) + (1 - \kappa) \mathcal{D}^{\vartheta_2; \psi} \varkappa(\mathbf{b}) = \vartheta_3, \quad \varkappa(\mathbf{a}) = 0. \quad (5.4)$$

Le problème (5.3) et (5.4) est équivalent à :

$$\begin{aligned} \varkappa(\varsigma) = & \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi} \varphi)(\varsigma) + \frac{(\psi(\varsigma) - \psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2}}{\lambda_1 \Gamma(\alpha_2 + 1)} (\vartheta_3 - \kappa \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi} \varphi)(\mathbf{b}) \\ & - (1 - \kappa) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi} \varphi)(\mathbf{b})), \quad \varsigma \in \mathbf{J} := [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \end{aligned} \quad (5.5)$$

où

$$\lambda_1 = \frac{\kappa(\psi(\mathbf{b}) - \psi(\mathbf{a}))^{1 - \vartheta_1}}{\Gamma(2 - \vartheta_1)} + \frac{(1 - \kappa)(\psi(\mathbf{b}) - \psi(\mathbf{a}))^{1 - \vartheta_2}}{\Gamma(2 - \vartheta_2)} \neq 0. \quad (5.6)$$

**Lemme 5.2** ([7, 46]). *Soit  $n - 1 < \alpha_1 \leq n, \alpha_2 > 0, \mathbf{a} > 0, \chi \in \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathcal{I}), \mathcal{D}_{\mathbf{a}^+}^{\alpha_1; \psi} \chi \in \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathcal{I})$ .*

*Alors l'équation différentielle*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}}^{\alpha_1; \psi} \chi = 0$$

*a pour solution unique*

$$\chi(\varsigma) = w_0 + w_1 (\psi(\varsigma) - \psi(\mathbf{a})) + w_2 (\psi(\varsigma) - \psi(\mathbf{a}))^2 + \cdots + w_{n-1} (\psi(\varsigma) - \psi(\mathbf{a}))^{n-1},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbf{a}}^{\alpha_1; \psi} \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^{\alpha_1; \psi} \chi(\varsigma) = & \chi(\varsigma) + w_0 + w_1 (\psi(\varsigma) - \psi(\mathbf{a})) + w_2 (\psi(\varsigma) - \psi(\mathbf{a}))^2 \\ & + \cdots + w_{n-1} (\psi(\varsigma) - \psi(\mathbf{a}))^{n-1}, \end{aligned}$$

avec  $w_\ell \in \mathbb{R}, \ell = 0, 1, \dots, n - 1$ .

De plus,

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}}^{\alpha_1; \psi} \mathcal{I}_{\mathbf{a}}^{\alpha_1; \psi} \chi(\varsigma) = \chi(\varsigma),$$

et

$$\mathcal{I}_a^{\alpha_1; \psi} \mathcal{I}_a^{\alpha_2; \psi} \chi(\varsigma) = \mathcal{I}_a^{\alpha_2; \psi} \mathcal{I}_a^{\alpha_1; \psi} \chi(\varsigma) = \mathcal{I}_a^{\alpha_1 + \alpha_2; \psi} \chi(\varsigma).$$

*Démonstration.* En prenant l'intégrale ψ-ième de la Définition 1.13 dans l'équation (5.3), nous obtenons

$$\varkappa(\varsigma) = \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi} \varphi)(\varsigma) + c_1 + c_2 \frac{(\psi(\varsigma) - \psi(a))^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)}, \quad (5.7)$$

La première condition limite de (5.4) ⇒ c<sub>1</sub> = 0 et la 2ème condition limite de (5.4), l'équation (5.7) nous obtenons

$$\begin{aligned} \vartheta_3 &= \kappa \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi} \varphi)(b) + c_2 \kappa \frac{(\psi(b) - \psi(a))^{1-\vartheta_1}}{\Gamma(2 - \vartheta_1)} \\ &+ (1 - \kappa) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi} \varphi)(b) + c_2 (1 - \kappa) \frac{(\psi(b) - \psi(a))^{1-\vartheta_2}}{\Gamma(2 - \vartheta_2)}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$c_2 = \frac{1}{\lambda_1} (\vartheta_3 - \kappa \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi} \varphi)(b) - (1 - \kappa) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi} \varphi)(b)). \quad (5.9)$$

En substituant la constante c<sub>2</sub> dans (5.7), nous obtenons l'équation (5.5). Fin de la preuve. □

## 5.2 Résultats principaux

Nous commençons par définir ζ = C([a, b], ℝ<sup>+</sup>) comme l'espace de Banach de toutes les fonctions continues avec la norme ||z|| = sup { |z(ς)|, ς ∈ [a, b] }. Maintenant, définissons l'application Φ ∈ ζ par

$$\begin{aligned} \Phi z(\varsigma) &= \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi}(g_z))(\varsigma) + \frac{(\psi(\varsigma) - \psi(a))^{\alpha_2}}{\lambda_1 \Gamma(\alpha_2 + 1)} (\vartheta_3 - \kappa \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi}(g_z))(b) \\ &- (1 - \kappa) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi}(g_z))(b)), \quad \varsigma \in J = [a, b], \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nous résumons  $g(\zeta, \varkappa(\zeta))$  par  $g_\varkappa(\zeta)$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi}(g_\varkappa))(\zeta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\zeta \int_a^s (\Psi(\zeta) - \Psi(s))^{\alpha_2} (\Psi(s) - \Psi(\sigma))^{\alpha_1-1} \\ &\quad \times g(\sigma, \varkappa(\sigma)) \Psi'(\sigma) d\sigma \Psi'(s) ds. \end{aligned}$$

Nous choisissons ici le TPF qui nous garantit de nombreux résultats récents, voir, par exemple, [13, 23, 24].

**Théorème 5.1** (Principe du Contraction). *Supposons que  $(\Omega_1), (\Omega_3)$  sont vérifiées. Si  $\lambda_2 \Upsilon_g^* < 1$ , où*

$$\Upsilon_g^* = \sup\{\Upsilon_g(\zeta) : \zeta \in [a, b]\}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi}(1))(b) + \frac{|(\Psi(\zeta) - \Psi(a))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} \\ &\quad \times (|\vartheta_3| - |\kappa| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \Psi}(1))(b) - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \Psi}(1))(b)). \end{aligned}$$

Ainsi, le problème (5.1) et (5.2) ont une solution unique sur  $\zeta$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{B}_r = \{\varkappa \in C : \|\varkappa\| \leq r\}$  un ensemble borné, convexe et fermé de  $C$ , où la constante fixe  $r$  satisfait

$$r \geq \frac{p\lambda_2}{1 - \Upsilon_g^* \lambda_2}, \quad (5.11)$$

où  $p = \sup\{g(t, 0) : t \in [a, b]\}$ . Nous montrons que  $\Phi \mathfrak{B}_r \subset \mathfrak{B}_r$  et en utilisant l'inégalité triangulaire  $|g_\varkappa| \leq |g_\varkappa - g_0| + |g_0|$ , nous avons

$$\begin{aligned} |\Phi \varkappa(\zeta)| &\leq \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi}(|g_\varkappa|))(\zeta) + \frac{|(\Psi(\zeta) - \Psi(a))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} (|\vartheta_3| - |\kappa| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \Psi}(|g_\varkappa|))(b) \\ &\quad - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \Psi}(|g_\varkappa|))(b)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Phi \varkappa(\zeta)| &\leq \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi}(|g_\varkappa - g_0| + |g_0|))(\zeta) + \frac{|(\Psi(\zeta) - \Psi(a))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} \\ &\quad \times (|\vartheta_3| - |\kappa| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \Psi}(|g_\varkappa - g_0| + |g_0|))(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \Psi} (|g_{\varkappa} - g_0| + |g_0|))(\mathbf{b}), \\
 & \leq \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi} (\Upsilon_g^* + p))(\zeta) + \frac{|(\Psi(\zeta) - \Psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} \\
 & \times (|\vartheta_3| - |\kappa| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \Psi} (\Upsilon_g^* + p))(\mathbf{b})) \\
 & - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \Psi} (\Upsilon_g^* + p))(\mathbf{b}), \\
 & = \Upsilon_g^* r \lambda_2 + p \lambda_2 \\
 & \leq r.
 \end{aligned}$$

De plus,  $\Phi \mathfrak{B}_r \subset \mathfrak{B}_r$ . Soient  $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathfrak{B}_r$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |\Phi \varkappa_1(\zeta) - \Phi \varkappa_2(\zeta)| & \leq \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi} (|g_{\varkappa_1} - g_{\varkappa_2}|))(\zeta) \\
 & + \frac{|(\Psi(\zeta) - \Psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} (|\vartheta_3| - |\kappa| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \Psi} (|g_{\varkappa_1} - g_{\varkappa_2}|))(\mathbf{b})) \\
 & - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \Psi} (|g_{\varkappa_1} - g_{\varkappa_2}|))(\mathbf{b}), \\
 & \leq \Upsilon_g^* \|\varkappa_1 - \varkappa_2\| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi} (1))(\zeta) + \frac{|(\Psi(\zeta) - \Psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} \\
 & \times (|\vartheta_3| - |\kappa| \Upsilon_g^* \|\varkappa_1 - \varkappa_2\| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \Psi} (1))(\mathbf{b})) \\
 & - (|1 - \kappa|) \Upsilon_g^* \|\varkappa_1 - \varkappa_2\| \mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \Psi} (1))(\mathbf{b}), \\
 & = \Upsilon_g^* \lambda_2 \|\varkappa_1 - \varkappa_2\|,
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\Phi \varkappa_1(\zeta) - \Phi \varkappa_2(\zeta)| \leq \Upsilon_g^* \lambda_2 \|\varkappa_1 - \varkappa_2\|$ . Comme  $\Upsilon_g^* \lambda_2 < 1$ , alors l'application  $\Phi$  est une contraction. Maintenant,  $\Phi$  a un unique point fixe, démontrant que le problème (5.1)-(5.2) a une solution unique sur  $\mathbf{J} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . □

**Théorème 5.2.** *Supposons que  $(\Omega_1)$ ,  $(\Omega_2)$  sont satisfaites. Si*

$$\Upsilon_g^* [\mathcal{I}^{\alpha_2; \Psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1; \Psi} (1))(\mathbf{b})] < 1, \tag{5.12}$$

alors le problème (5.1) et (5.2) a au moins une solution sur  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{B}_\sigma = \{\varkappa \in C([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbb{R}) : \|\varkappa\| \leq \sigma\}$  où une constante  $\sigma$  satisfait  $\sigma \geq$

$\phi_g^* \lambda_2$  et  $\phi_g^* = \sup \{ \phi_g(\zeta) : \zeta \in [a, b] \}$ . Divisons l'opérateur  $\Phi$  en deux opérateurs  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sur  $\mathfrak{B}_\sigma$  avec

$$\Phi_1 \varkappa(\zeta) = \frac{(\psi(\zeta) - \psi(a))^{\alpha_2}}{\lambda_1 \Gamma(\alpha_2 + 1)} (\vartheta_3 - \kappa \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi}(g_\varkappa))(\mathbf{b}) - (1 - \kappa) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi}(g_\varkappa))(\mathbf{b})),$$

et

$$\Phi_2 \varkappa(\zeta) = \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi}(g_\varkappa))(\zeta).$$

La boule  $\mathfrak{B}_\sigma$  est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach  $C([a, b], \mathbb{R})$ .

Ici, nous prouvons que  $\Phi_1 \varkappa + \Phi_2 y \in \mathfrak{B}_\sigma$ . Soient  $\varkappa, y \in \mathfrak{B}_\sigma$ , alors, nous avons

$$\begin{aligned} |\Phi_1 \varkappa(\zeta) + \Phi_2 y(\zeta)| &\leq \frac{|(\psi(\zeta) - \psi(a))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} (|\vartheta_3| - |\kappa| \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi}(|g_\varkappa|))(\mathbf{b}) \\ &\quad - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi}(|g_\varkappa|)(\mathbf{b})) + \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi}(gy))(t) \\ &\leq \frac{|(\psi(\zeta) - \psi(a))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} (|\vartheta_3| - |\kappa| \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi} \phi_g^* (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi}(1))(\mathbf{b})) \\ &\quad - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi} \phi_g^* (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi}(1))(\mathbf{b})) + \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi} \Psi^*(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi}(1))(\zeta) \\ &= \phi_g^* \lambda_2 \\ &\leq \sigma, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\Phi_1 \varkappa + \Phi_2 y \in \mathfrak{B}_\sigma$ . Ensuite, pour montrer que  $\Phi_2$  est une application de contraction, pour  $\varkappa, y \in \mathfrak{B}_\sigma$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\Phi_2 \varkappa - \Phi_2 y\| &\leq \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi}(|g_\varkappa - gy|))(\mathbf{b}) \\ &\leq \Upsilon_g^* \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi}(\mathcal{I}^{\alpha_1; \psi}(1))(\mathbf{b}) \|\varkappa - y\|, \end{aligned}$$

par  $(\Omega_3)$ , ce qui est une contraction par (5.12).

Ensuite, nous démontrons que  $\Phi_1$  est continue et compacte. Comme  $g$  est continue sur  $[a, b] \times \mathbb{R}$ , nous pouvons déduire que  $\Phi_1$  est continue. Pour  $\varkappa \in \mathfrak{B}_\sigma$ ,

$$\|\Phi_1 \varkappa\| \leq \phi_g^* \lambda_3,$$

où

$$\lambda_3 = \frac{|(\psi(\zeta) - \psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} (|\vartheta_3| - |\kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi}(1))(\mathbf{b}) - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi}(1))(\mathbf{b}).$$

Cela indique que  $\Phi_1 \mathfrak{B}_\sigma$  est uniformément borné. Maintenant, nous démontrons que  $\Phi_1 \mathfrak{B}_\sigma$  est équicontinu. Pour  $\zeta_1, \zeta_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] : \zeta_1 < \zeta_2$  et pour  $\varkappa \in \mathfrak{B}_\sigma$ , nous avons

$$\begin{aligned} & | |\Phi_1 \varkappa(\zeta_1) - \Phi_1 \varkappa(\zeta_2)| \\ & \leq \frac{|(\psi(\zeta_2) - \psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2} - (\psi(\zeta_1) - \psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2}|}{|\lambda_1| \Gamma(\alpha_2 + 1)} \\ & \times (|\vartheta_3| - |\kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_1; \psi}(|g_\varkappa|))(\mathbf{b}) - (|1 - \kappa|) \mathcal{I}^{\alpha_2; \psi} (\mathcal{I}^{\alpha_1 - \vartheta_2; \psi}(|g_\varkappa|))(\mathbf{b}) \\ & \leq \phi_g^* \lambda_3 |(\psi(\zeta_2) - \psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2} - (\psi(\zeta_1) - \psi(\mathbf{a}))^{\alpha_2}|. \end{aligned}$$

Il est évident que l'expression ci-dessus est indépendante de  $\varkappa$  et tend également vers zéro lorsque  $\zeta_1 \rightarrow \zeta_2$ . Par conséquent,  $\Phi_1 \mathfrak{B}_\sigma$  est équicontinu. Ainsi  $\Phi_1 \mathfrak{B}_\sigma$  est relativement compact. Maintenant, en appliquant le théorème d'Arzelà-Ascoli (voir, par exemple, [33]), l'opérateur  $\Phi_1$  est compact sur  $\mathfrak{B}_\sigma$ . Ainsi,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  satisfont les hypothèses du Théorème 5.1. Par le Théorème 5.1, nous confirmons que le problème (5.1) et (5.2) a au moins une solution sur  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .  $\square$

### 5.3 Exemple

Considérons les EDF  $\psi$ -Caputo avec les CLD  $\psi$ -Caputo, soit  $\psi(\zeta) = \log \zeta$

$$\mathcal{D}^{\frac{7}{4}; \psi} (\mathcal{D}^{\alpha_2; \psi} \varkappa)(\zeta) = g(\zeta, \varkappa(\zeta)), \quad \zeta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right), \quad (5.13)$$

$$\varkappa\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \frac{1}{7}\mathcal{D}^{\frac{7}{3},\Psi}\varkappa\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{6}{7}\mathcal{D}^{\frac{1}{3},\Psi}\varkappa\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{8}{3}, \quad (5.14)$$

où  $\alpha_1 = \frac{7}{4}, \alpha_2 = \frac{4}{3}, \mathbf{a} = \frac{1}{3}, \mathbf{b} = \frac{7}{3}, \vartheta_1 = \frac{1}{2}, \vartheta_2 = \frac{1}{4}, \vartheta_3 = \frac{1}{4}$  et  $\kappa = \frac{1}{8}, \lambda_1 = 1.00201235$ ,  ${}^H J^{\frac{4}{3}}\left({}^H J^{\frac{7}{4}}(1)\right)\left(\frac{7}{3}\right) = 0.026579, {}^H J^{\frac{4}{3}}\left({}^H J^1(1)\right)\left(\frac{7}{3}\right) = 0.9021586$

${}^H J^{\frac{4}{3}}\left({}^H J^{\frac{7}{4}}(1)\right)\left(\frac{7}{3}\right) = 0.062785, \frac{(\log 5)^{\frac{4}{3}}}{\lambda_1 \Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} = 0.482569$ , et soit  $g : \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec

$$g(\zeta, \varkappa(\zeta)) = \frac{1}{2} \frac{\arctan \zeta}{(2\zeta + 1)} (\varkappa^2 + 1)$$

telle que,  $|g(\zeta, \varkappa(\zeta)) - g(\zeta, y(\zeta))| \leq \Upsilon_g^* |\varkappa - y|$  et  $\Upsilon_g^* = \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $\Upsilon_g^* \lambda_2 = 0.862487 < 1$ .

Alors, par le Théorème 5.2, le problème (5.13) et (5.14) avec  $g(\zeta, \varkappa(\zeta))$  a une solution unique sur  $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ .

## 5.4 **Commentaire**

Dans ce chapitre, nous avons exploré l'existence et l'unicité des solutions pour les EDF  $\psi$ -Caputo avec les CLD  $\psi$ -Caputo concernant le problème (5.1)-(5.2). Nous avons établi l'existence de solutions grâce à l'application du Théorème de Krasnoselkii, tandis que l'unicité des solutions a été obtenue en utilisant le principe de la contraction. De plus, nous avons fourni un exemple numérique pour illustrer les implications pratiques de nos résultats théoriques.

# Conclusions and perspectives

Dans notre thèse, nous avons abordé ce sujet en fournissant une introduction générale au calcul de la différentiation avec des exposants fractionnaires. Cela inclut l'intégrale de Riemann Liouville et la dérivation fractionnaire de Caputo, ainsi que les concepts de sens Intégral de Hadamard et de Caputo-Hadamard, ainsi que la dérivée de  $\psi$ -Caputo.

Nous avons également examiné l'émergence de la théorie des points fixes, incluant ceux de Cheafer, Schauder, Banach, Krasnoselskii, entre autres. De plus, nous avons abordé les définitions et les applications des équations de pantographe. En outre, nous avons fourni des notions et des définitions sur la stabilité et la stabilité asymptotique.

Dans le chapitre trois, Nous étudions le premier problème en étudiant la positivité de la solution en utilisant les théories de Schauder et Banach des points fixes. Nous appliquons également la technique de "solution supérieure et inférieure" pour illustrer notre théorie par un exemple numérique.

Notre deuxième étude, dans le chapitre quatre, porte sur la stabilité d'un problème fractionnaire de type pantographe en utilisant la dérivée de  $\psi$ -Caputo. Avec le théorème du point fixe de Krasnoselskii, nous concluons que notre objectif, la solution nulle de notre problème, est stable.

Enfin, nous proposons deux pistes de recherche pour notre étude dans le futur, en envisageant l'application de nouvelles approches, notamment :

1- En appliquant cette nouvelle notion dans les deux problèmes, nous introduisons la notion de multi-ordre fractionnaire, également connue sous le terme de multi-termes ?

$$D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n}.$$

2- En appliquant cette nouvelle notion dans les deux problèmes, nous introduisons la

---

notion de variable-ordre fractionnaire, également connue sous le terme de variable ordre ?

$$D^{\alpha(t)}, t \in [a, T].$$

# Bibliographie

- [1] S. ABBAS, *Existence of solutions to fractional order ordinary and delay differential equations and applications*, Electron. J. Differential Equations, (2011), pp. No. 9, 11.
- [2] S. ABBAS, M. BENCHOHRA, N. HAMIDI, AND J. HENDERSON, *Caputo-Hadamard fractional differential equations in Banach spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal., 21 (2018), pp. 1027–1045.
- [3] S. ABBAS, M. BENCHOHRA, J.-E. LAZREG, AND Y. ZHOU, *A survey on Hadamard and Hilfer fractional differential equations : analysis and stability*, Chaos Solitons Fractals, 102 (2017), pp. 47–71.
- [4] M. S. ABDO, W. SHAMMAKH, H. Z. ALZUMI, N. ALGHAMD, AND M. D. ALBALWI, *Nonlinear piecewise caputo fractional pantograph system with respect to another function*, Fractal and Fractional, 7 (2023), p. 162.
- [5] Y. ADJABI, F. JARAD, D. BALEANU, AND T. ABDELJAWAD, *On Cauchy problems with Caputo Hadamard fractional derivatives*, J. Comput. Anal. Appl., 21 (2016), pp. 661–681.
- [6] R. P. AGARWAL, Y. ZHOU, AND Y. HE, *Existence of fractional neutral functional differential equations*, Comput. Math. Appl., 59 (2010), pp. 1095–1100.
- [7] R. ALMEIDA, A. B. MALINOWSKA, AND M. T. T. MONTEIRO, *Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications*, Math. Methods Appl. Sci., 41 (2018), pp. 336–352.
- [8] A. ARDJOUNI, H. BOULARES, AND A. DJOUDI, *Stability of nonlinear neutral nabla fractional difference equations*, Commun. Optim. Theory, 2018 (2018), pp. 1–10.

- 
- [9] A. ARDJOUNI, H. BOULARES, AND Y. LASKRI, *Stability in higher-order nonlinear fractional differential equations*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math., 22 (2018), pp. 37–47.
- [10] ASMA, J. F. GÓMEZ-AGUILAR, G. UR RAHMAN, AND M. JAVED, *Stability analysis for fractional order implicit  $\Psi$ -Hilfer differential equations*, Math. Methods Appl. Sci., 45 (2022), pp. 2701–2712.
- [11] Z. BAI AND H. LÜ, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, J. Math. Anal. Appl., 311 (2005), pp. 495–505.
- [12] Z. BAI AND T. QIU, *Existence of positive solution for singular fractional differential equation*, Appl. Math. Comput., 215 (2009), pp. 2761–2767.
- [13] A. BEN MAKHLOUF AND E.-S. EL-HADY, *Novel stability results for Caputo fractional differential equations*, Math. Probl. Eng., (2021), pp. Art. ID 9817668, 6.
- [14] H. BOULARES, A. ARDJOUNI, AND Y. LASKRI, *Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional nabla difference systems with initial conditions*, Fract. Differ. Calc., 7 (2017), pp. 247–263.
- [15] H. BOULARES, B. MEFTAH, A. MOUMEN, R. SHAFQAT, H. SABER, T. ALRAQAD, AND E. E. ALI, *Fractional multiplicative bullen-type inequalities for multiplicative differentiable functions*, Symmetry, 15 (2023), p. 451.
- [16] T. A. BURTON, *Stability and periodic solutions of ordinary and functional-differential equations*, vol. 178 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985.
- [17] —, *Stability by fixed point theory for functional differential equations*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.
- [18] F. CHEN, J. J. NIETO, AND Y. ZHOU, *Global attractivity for nonlinear fractional differential equations*, Nonlinear Anal. Real World Appl., 13 (2012), pp. 287–298.

- 
- [19] S. A. DAVID, C. A. VALENTIM, AND A. DEBBOUCHE, *Fractional modeling applied to the dynamics of the action potential in cardiac tissue*, *Fractal and Fractional*, 6 (2022), p. 149.
- [20] K. DEIMLING, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [21] D. DELBOSCO AND L. RODINO, *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation*, *J. Math. Anal. Appl.*, 204 (1996), pp. 609–625.
- [22] M. D’OVIDIO, *Fractional boundary value problems*, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 25 (2022), pp. 29–59.
- [23] E.-S. EL-HADY AND A. BEN MAKHLOUF, *A novel stability analysis for the Darboux problem of partial differential equations via fixed point theory*, *AIMS Math.*, 6 (2021), pp. 12894–12901.
- [24] E.-S. EL-HADY, A. BEN MAKHLOUF, S. BOULAARAS, AND L. MCHIRI, *Ulam-Hyers-Rassias stability of nonlinear differential equations with Riemann-Liouville fractional derivative*, *J. Funct. Spaces*, (2022), pp. Art. ID 7827579, 6.
- [25] F. R. EVIRGEN, *Transmission of Nipah virus dynamics under Caputo fractional derivative*, *J. Comput. Appl. Math.*, 418 (2023), pp. Paper No. 114654, 16.
- [26] G. B. FOLLAND, *A guide to advanced real analysis*, vol. 37 of The Dolciani Mathematical Expositions, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2009. MAA Guides, 2.
- [27] L. FOX, D. F. MAYERS, J. R. OCKENDON, AND A. B. TAYLER, *On a functional differential equation*, *J. Inst. Math. Appl.*, 8 (1971), pp. 271–307.
- [28] J. N. FRANKLIN, *Methods of mathematical economics*, vol. 37 of Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Linear and nonlinear programming, fixed-point theorems, Reprint of the 1980 original.

- 
- [29] G. FUDONG AND K. CHUNHAI, *Asymptotic stability of solutions of nonlinear fractional differential equations of order  $1 < \alpha < 2$* , Journal of Shanghai Normal University, 44 (2015), pp. 284–290.
- [30] F. GE AND C. KOU, *Stability analysis by Krasnoselskii's fixed point theorem for nonlinear fractional differential equations*, Appl. Math. Comput., 257 (2015), pp. 308–316.
- [31] M. GOHAR, C. LI, AND C. YIN, *On Caputo-Hadamard fractional differential equations*, Int. J. Comput. Math., 97 (2020), pp. 1459–1483.
- [32] J. R. GRAEF, S. R. GRACE, AND E. TUNÇ, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear fractional differential equations with Caputo-type Hadamard derivatives*, Fract. Calc. Appl. Anal., 20 (2017), pp. 71–87.
- [33] J. W. GREEN AND F. A. VALENTINE, *On the Arzelà-Ascoli theorem*, Math. Mag., 34 (1960/61), pp. 199–202.
- [34] J. HALE, *Theory of functional differential equations*, vol. Vol. 3 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, second ed., 1977.
- [35] J. K. HALE, *Retarded functional differential equations : basic theory*, Springer New York, 1977, p. 36–56.
- [36] A. HALLACI, H. BOULARES, A. ARDJOUNI, AND A. CHAOUI, *On the study of fractional differential equations in a weighed Sobolev space*, Bull. Int. Math. Virtual Inst., 9 (2019), pp. 333–343.
- [37] R. HILFER, ed., *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000.
- [38] S. IDREES AND U. SAEED, *Generalized sine-cosine wavelet method for Caputo-Hadamard fractional differential equations*, Math. Methods Appl. Sci., 45 (2022), pp. 9602–9621.

- 
- [39] A. ISERLES, *On the generalized pantograph functional-differential equation*, European J. Appl. Math., 4 (1993), pp. 1–38.
- [40] F. JARAD AND T. ABDELJAWAD, *Generalized fractional derivatives and Laplace transform*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 13 (2020), pp. 709–722.
- [41] R. KANNAN, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., 60 (1968), pp. 71–76.
- [42] P. KARTHIKEYAN AND R. ARUL, *Uniqueness and stability results for non-local impulsive implicit Hadamard fractional differential equations*, J. Appl. Nonlinear Dyn., 9 (2020), pp. 23–29.
- [43] ———, *Integral boundary value problems for implicit fractional differential equations involving Hadamard and Caputo-Hadamard fractional derivatives*, Kragujevac J. Math., 45 (2021), pp. 331–341.
- [44] T. KATO, *Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation  $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$* , in Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972), Academic Press, New York-London, 1972, pp. 197–217.
- [45] E. R. KAUFMANN AND E. MBOUMI, *Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., (2008), pp. No. 3, 11.
- [46] A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA, AND J. J. TRUJILLO, *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [47] M. A. KRASNOSEL' SKIĬ, *Some problems of nonlinear analysis*, in American Mathematical Society Translations, Ser. 2, Vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1958, pp. 345–409.

- 
- [48] S. KURAKULA, V. SANKAR RAO, AND R. MANKENA, *The development of fixed point theory-review*, Int. J. Adv. Eng. Res. Dev, 5 (2018), pp. 1–3.
- [49] J. LIANG, Z. LIU, AND X. WANG, *Solvability for a couple system of nonlinear fractional differential equations in a Banach space*, Fract. Calc. Appl. Anal., 16 (2013), pp. 51–63.
- [50] K. MAHLER, *On a special functional equation*, J. London Math. Soc., 15 (1940), pp. 115–123.
- [51] I. A. MALIK AND T. JALAL, *Application of measure of noncompactness to infinite systems of differential equations in  $\ell_p$  spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 69 (2020), pp. 381–392.
- [52] M. M. MATAR, *On existence of positive solution for initial value problem of nonlinear fractional differential equations of order  $1 < \alpha \leq 2$* , Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.), 84 (2015), pp. 51–57.
- [53] M. M. MATAR AND O. A. AL-SALMY, *Existence and uniqueness of solution for hadamard fractional sequential differential equations*, IUG Journal of Natural Studies, 2017 (2017), pp. 141–147.
- [54] K. S. MILLER AND B. ROSS, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [55] A. MOUMEN, H. BOULARES, B. MEFTAH, R. SHAFQAT, T. ALRAQAD, E. E. ALI, AND Z. KHALED, *Multiplicatively simpson type inequalities via fractional integral*, Symmetry, 15 (2023).
- [56] A. MOUMEN, R. SHAFQAT, A. ALSINAI, H. BOULARES, M. CANCAN, AND M. B. JEELANI, *Analysis of fractional stochastic evolution equations by using Hilfer derivative of finite approximate controllability*, AIMS Math., 8 (2023), pp. 16094–16114.

- 
- [57] M. MOUY, H. BOULARES, S. ALSHAMMARI, M. ALSHAMMARI, Y. LASKRI, AND W. W. MOHAMMED, *On averaging principle for caputo–hadamard fractional stochastic differential pantograph equation*, *Fractal and Fractional*, 7 (2022), p. 31.
- [58] I. N’DOYE, M. ZASADZINSKI, M. DAROUACH, AND N.-E. RADHY, *Observer-based control for fractional-order continuous-time systems*, in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, IEEE, 2009, pp. 1932–1937.
- [59] J. R. OCKENDON AND A. B. TAYLER, *The dynamics of a current collection system for an electric locomotive*, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 322 (1971), p. 447–468.
- [60] K. B. OLDHAM AND J. SPANIER, *The fractional calculus*, vol. Vol. 111 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, With an annotated chronological bibliography by Bertram Ross.
- [61] M. ORTIGUEIRA AND J. MACHADO, *Which derivative ?*, *Fractal and Fractional*, 1 (2017), p. 3.
- [62] I. PODLUBNY, *Fractional differential equations*, vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.
- [63] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, third ed., 1987.
- [64] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS, AND O. I. MARICHEV, *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993. Theory and

- 
- applications, Edited and with a foreword by S. M. Nikol'skiĭ, Translated from the 1987 Russian original, Revised by the authors.
- [65] D. R. SMART, *Fixed point theorems*, vol. No. 66 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, London-New York, 1974.
- [66] Y. T. TOH, C. PHANG, AND Y. X. NG, *Temporal discretization for Caputo-Hadamard fractional derivative with incomplete gamma function via Whittaker function*, *Comput. Appl. Math.*, 40 (2021), pp. Paper No. 285, 19.
- [67] C. WANG, R. WANG, S. WANG, AND C. YANG, *Positive solution of singular boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation*, *Bound. Value Probl.*, (2011), pp. Art. ID 297026, 12.
- [68] G. WANG, K. PEI, AND Y. CHEN, *Stability analysis of nonlinear Hadamard fractional differential system*, *J. Franklin Inst.*, 356 (2019), pp. 6538–6546.
- [69] G. WANG AND T. WANG, *On a nonlinear Hadamard type fractional differential equation with  $p$ -Laplacian operator and strip condition*, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9 (2016), pp. 5073–5081.
- [70] J. WANG, Y. ZHOU, AND M. FEČKAN, *Nonlinear impulsive problems for fractional differential equations and Ulam stability*, *Comput. Math. Appl.*, 64 (2012), pp. 3389–3405.
- [71] X. WANG, L. LU, AND J. LIANG, *Multiple solutions of nonlinear fractional impulsive integro-differential equations with nonlinear boundary conditions*, *Math. Slovaca*, 66 (2016), pp. 1105–1114.
- [72] S. ZHANG, *The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation*, *J. Math. Anal. Appl.*, 252 (2000), pp. 804–812.
- [73] S. ZHANG, S. LI, AND L. HU, *The existeness and uniqueness result of solutions to initial value problems of nonlinear diffusion equations involving with the conformable*

---

*variable derivative*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, 113 (2019), pp. 1601–1623.