

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR –ANNABA



جامعة باجي مختار- عنابة

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

Année : 2007

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER

---

**ETUDE DE L'INFLUENCE DES DEFORMATIONS  
ELASTIQUES ET DES EFFETS THERMIQUES SUR LES  
CARACTERISTIQUES DU CONTACT DANS UN PALIER  
HYDRODYNAMIQUE LOURDEMENT CHARGE**

---

Option

Construction mécanique

Par

Youcef Amine MASMOUDI

**DIRECTEUR DE MEMOIRE :** A. HAIHEM M.C U. BADJI MOKHTAR

**DEVANT LE JURY :**

**PRESIDENT** B. MERZOUG Pr. U. BADJI MOKHTAR

**EXAMINATEURS** E. HADJADJ M.C U. BADJI MOKHTAR

L. LAOUAR M.C U. BADJI MOKHTAR

## **AVANT PROPOS**

*Ce travail a été effectué au laboratoire de mécanique industrielle (L.M.I) du département de Génie Mécanique, faculté des sciences de l'ingénieur, Université BADJI MOKHTAR Annaba.*

*Je tiens à remercier mon encadreur le Docteur Ammar HAIAHEM, Maître de Conférences pour son aide précieuse, ses idées et ses conseils judicieux qu'il m'a prodigués durant l'élaboration de ce travail.*

*Il m'est très agréable de remercier plus particulièrement le professeur Bachir MERZOUG pour l'intérêt qu'il n'a cessé de manifester dès la première année Magister, pour ses encouragements et conseils judicieux, et lui exprime toute ma reconnaissance pour avoir accepté de juger mon travail et de présider le jury.*

*Je remercie vivement le Docteur Elias HADJADJ, Maître de Conférences d'avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie du jury.*

*Je tiens également à remercier le Docteur Lakhdar LAOUAR, Maître de Conférences d'avoir accepté de juger mon travail et de faire partie du jury.*

*Enfin, je saurais gré à tous ceux qui n'ont ménagé aucun effort pour me faciliter la tâche durant l'élaboration de ce mémoire.*

## **Résumé**

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses, qui traite essentiellement des deux grandes parties : la première portant sur l'analyse de l'influence des déformations élastiques sur le comportement statique du palier, la deuxième ayant pour objectif d'analyser l'influence des effets thermiques sur la lubrification. On développe au préalable un modèle élastique semi-analytique basé sur la formulation du problème élasto-statique dans le plan complexe pour le calcul des champs de contraintes et de déplacements dans les milieux élastiques. Ceci permet de traiter les cas de solides de formes géométriques simples à utilisation fréquente tels que, les tubes et les secteurs cylindriques. Une fois validé ce modèle est intégré ensuite dans le procédé de calcul élasto-hydrodynamique (EHD), dont la résolution du problème est effectuée par la méthode des différences finies avec calcul itératif.

Dans la deuxième partie qui tient compte de l'influence des variations de la température sur la lubrification hydrodynamique des paliers lisses, on met au point un modèle numérique comportant essentiellement trois équations différentielles, régissant la distribution des pressions et des températures au sein des paliers. Ce modèle dit thermo-hydrodynamique (THD) contient un ensemble de procédés de calcul itératif basé sur la méthode de Gauss-Seidel. Finalement, on compare les résultats de calcul EHD avec ceux de THD en se référant au calcul hydrodynamique (HD) isotherme.

## **Mots clés**

Palier lisse hydrodynamique, Fortes charges, Déformation élastiques, Effets thermiques, Viscosité, Elasto-hydrodynamique, Thermo-hydrodynamique, Interaction fluide-structure Elasto-statique.

## **Title**

### **Study of the influence of the elastic strain and the heating effects on the behavior of a hydrodynamic smooth bearing heavily charged**

#### **Abstract**

In this dissertation, we are interested in the study of the hydrodynamic lubrication of the smooth bearings, which deals primarily with the two great parts: the first is about the analysis of the influence of the elastic strain on the static behaviour of the beings; the second is for objective of analyzing the influence of the heating effects on lubrication. We develop first a semi-analytical elastic model based on the formulation of the problem elasto-statics in the complex plan for the calculation of the displacement and stress fields in elastic scopes. This makes it possible to treat the cases of solids of simple geometrical forms with frequent use such as, the tubes and the cylindrical sectors. Once this confirmed this model is integrated later in the elasto-hydrodynamic process of calculation (EHD) that the resolution of its problem is carried out by the finite differences method with iterative calculation.

In the second part which takes into account the influence of the variations in the temperature on the hydrodynamic lubrication of the smooth bearings, we develop a digital model comprising primarily three differential equations, governing the distribution of the pressures and the temperatures within the bearings. This model called as thermo-hydrodynamic (THD) contains a whole of processes of iterative calculation based on the method of Gauss-Seidel. Finally, we compare the computation results EHD with those of THD in referencing to isothermal hydrodynamic calculation (HD).

#### Keywords

Hydrodynamic Journal Bearing, Lubrication, Viscosity, Elastic Strain, Heating effects, Elasto-hydrodynamic, Thermo-hydrodynamic, Interaction fluid-structure, Elasto-static

## دراسة التأثيرات الناتجة عن التشوهات المرنة والتغيرات الحرارية على خصائص التماس لمحمل أملس هيدروديناميكي معرض لقوى خارجية معتبرة

### ملخص

في هذه المذكرة نقوم بدراسة التزبييت الخاص بالمحمل الملساء, الشاملة على جزأين رئيسيين : الأول يمثل نموذج تحليلي لتأثيرات التشوهات المرنة على هيدروديناميكية المحامل الملساء في حالة التعرض لقوى ساكنة, أما الثاني فهدفه الرئيسي هو تحليل التأثيرات الناتجة عن التغيرات الحرارية على الحالة الحركية الهيدروديناميكية للمحمل. استناد إلى ما ذكرنا نقوم باقتراح نموذج نصف تحليلي مكون من معادلات و علاقات رياضية خاصة بالمرونة الساكنة في المستوي المركب و الذي و الذي يسمح بحساب الاجتهادات و التشوهات في الأوساط المرنة. هذا الأخير يمكننا من معالجة حالات الهياكل الصلبة ذات الشكل الهندسي البسيط و الاستعمال المتواتر, كالأنابيب و القطع الاسطوانية. بعد التحقق من صلاحية هذا النموذج, نعمل على إدماجه في برنامج الحساب الهيدروديناميكي-المرني مع العلم أن الحلول تتم بطريقة الفروق المنتهية باستعمال الحساب التكراري.

أما بالنسبة للجزء الثاني من المذكرة, والمخصص لدراسة التأثيرات الحرارية على هيدروديناميكية المحامل الملساء, نسعى لإنجاز نموذج رقمي يحوي ثلاث معادلات تفاضلية رئيسية تساهم في إيجاد توزيعات الاجتهادات و درجات الحرارة المتواجدة داخل المحامل. هذا الأخير و المسمى الهيدروديناميك-الحراري يشتمل على مجموعة الطرق الحسابية ذات الطابع التكراري و المعتمدة على أسلوب غوس-سايديل. اعتماد على هذه الدراسة, يمكننا مقارنة نتائج الحساب الهيدروديناميك-المرني مع الهيدروديناميك-الحراري معتبرين المرجع في هذه المقارنة الحساب الهيدروديناميكي.

# TABLE DES MATIERES

AVANT PROPS

RESUMES

INTRODUCTION GENERALE.....	Erreur ! Signet non défini.
CHAPITRE I.....	Erreur ! Signet non défini.
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....	Erreur ! Signet non défini.
1. Introduction .....	Erreur ! Signet non défini.
2. Lubrification hydrodynamique.....	Erreur ! Signet non défini.
3. Problème théorique élasto-hydrodynamique.....	Erreur ! Signet non défini.
4. Problème théorique thermo-hydrodynamique.....	Erreur ! Signet non défini.
5. Paliers lisses sous chargement statique .....	Erreur ! Signet non défini.
6. Paliers lisses hydrodynamiques.....	Erreur ! Signet non défini.
7. Conditions aux limites pour la frontière de rupture de film .....	Erreur ! Signet non défini.
7.1. Condition de Sommerfeld .....	Erreur ! Signet non défini.
7.2. Condition de Gumbel .....	Erreur ! Signet non défini.
7.3. Condition de Reynolds .....	Erreur ! Signet non défini.
8. Conclusion.....	Erreur ! Signet non défini.
CHAPITRE II.....	Erreur ! Signet non défini.
SOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROBLEMES ELASTIQUES POUR LES TUBES CYLINDRIQUES LONGS .....	Erreur ! Signet non défini.
1. Introduction .....	Erreur ! Signet non défini.
2. Méthode de Kolosov et Muskhelishvili.....	Erreur ! Signet non défini.
2.1. Equations du problème élasto-statique plan en coordonnées cartésiennes.....	Erreur ! Signet non défini.
2.2. Equations en variables complexes.....	Erreur ! Signet non défini.
2.3. Solutions générales des équations du problème plan .....	Erreur ! Signet non défini.
2.3.1. Solution en contraintes .....	Erreur ! Signet non défini.
2.3.2. Solution en déplacements.....	Erreur ! Signet non défini.
3. Solutions analytiques des problèmes élastiques dans les paliers lisses	Erreur ! Signet non défini.
4. Géométrie et notations.....	Erreur ! Signet non défini.
5. Expressions des contraintes et des déplacements : Méthode des séries	Erreur ! Signet non défini.
6. Solutions en contraintes et en déplacements des problèmes mixtes pour la couronne.....	Erreur ! Signet non défini.

7.	Contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
8.	Expressions des déplacements et des contraintes sur les frontières .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
9.	Calcul des champs de déplacement et de contraintes sur frontières.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
10.	Cas particuliers .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
11.	Modèle de la couche élastique mince .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
12.	Conclusion.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
	CHAPITRE III.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
	EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
	ET APPLICATIONS POUR PALIERS LISSES .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
1.	Introduction .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.	Equation des films minces visqueux généralisée .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.	Equation de l'énergie.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.	Equation de Reynolds.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
5.	Equation de transfert de chaleur .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
6.	Variation de la viscosité avec la température .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
7.	Lois de variation viscosité-pression .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
8.	Applications au cas d'un palier lisse .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
9.	Epaisseur du film lubrifiant.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
9.1.	Palier rigide .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
9.2.	Palier rigide mésaligné.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
9.3.	Palier déformable aligné.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
9.4.	Palier déformable mésaligné .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
10.	Performances statiques.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
10.1.	Composantes de la portance HD .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
10.2.	Angle de calage .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
11.	Conclusion.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
	CHAPITRE IV .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
	SOLUTION DU PROBLEME ELASTO-HYDRODYNAMIQUE (EHD)	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
1.	Introduction .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.	Résolution du problème hydrodynamique (HD).....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.1.	Méthode des différences finies.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.2.	Discrétisation numérique.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.3.	Procédé de résolution .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.	Solution du problème élasto-hydrodynamique pour un palier .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.1.	Géométrie et cinématique du palier.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.2.	Calcul du champ de pression dans le film lubrifiant .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>

3.3.	Conditions aux limites.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.4.	Résolution numérique.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.4.1.	Calcul du champ de déformation élastique.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.4.2.	Interaction structure-fluide .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.	Résultats et discussions .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.1.	Influence des déformations élastiques.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.2.	Influence des conditions de fonctionnement sur la pression .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.3.	Influence des conditions de fonctionnement sur le déplacement .	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.4.	Influence des conditions de fonctionnement sur l'épaisseur du film .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.5.	Angle de calage et portance HD.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
5.	Conclusion.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
	CHAPITRE V .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
	SOLUTION DU PROBLEME THERMO-HYDRODYNAMIQUE (THD)	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
1.	Introduction .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.	Résolution du problème thermo-hydrodynamique .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.1.	Formulation mathématique.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.2.	L'équation de Reynolds généralisée.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.3.	Equation de l'énergie.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.4.	L'équation de transfert de chaleur .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.	Méthode de résolution .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.1.	Maillage.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.2.	Discretisation de l'équation de Reynolds généralisée .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.3.	Discretisation de l'équation de l'énergie .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.4.	Discretisation de l'équation de transfert de chaleur .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.	Conditions aux limites.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.1.	Conditions aux limites pour le champ de pression (de Reynolds)	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.2.	Conditions aux limites pour le film fluide.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.3.	Conditions aux limites pour le coussinet.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
5.	Procédé de calcul.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
6.	Résultats et discussions .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
6.1.	Influence de la température sur le champ de pression.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
6.2.	Influence des conditions de fonctionnement sur la pression maximale ...	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
6.3.	Influence des conditions de fonctionnement sur l'épaisseur du film .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>

6.4. Influence des conditions de fonctionnement sur la température maximale.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
6.5. Angle de calage et portance hydrodynamique.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
7. Comparaison des résultats de calculs HD, EHD et THD .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
8. Conclusion.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
ANNEXE A.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
ANNEXE B.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
ANNEXE C.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
PRINCIPALES NOTATIONS.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
LISTE DES FIGURES.....	9
TABLE DES MATIERES.....	5

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : <i>Coussinets modernes</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure I.2 : <i>Section droite du palier lisse</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure I.3 : <i>Positions d'un arbre dans un palier lisse hydrodynamique</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure I.4 : <i>Conditions aux limites pour la rupture de film</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure II.1 : <i>Domaine borné multiplement connexe</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure II.2 : <i>Géométrie et notations</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure II.3 : <i>Conditions aux limites du premier problème mixte</i> ....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure II.4 : <i>Conditions aux limites du second problème mixte</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure II.5 : <i>Variation circonférentielle du déplacement radial pour revêtement compressible</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure II.6 : <i>Variation circonférentielle du déplacement radial pour revêtement quasi-incompressible</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure III.1: <i>Vitesses des surfaces lubrifiées 43]</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure III.2: <i>Section droite du palier</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure III.3 : <i>Schéma d'un palier mésaligné</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure III.4: <i>Schéma de projection de l'axe sur le plan <math>yOz</math></i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure IV.1 : <i>Palier lisse développé</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure IV.2 : <i>Schéma de discrétisation du palier</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure IV.3 : <i>Géométrie d'un palier cylindrique mono couche</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure IV.4 : <i>Algorithme de calcul EHD</i> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>

Figure V.1 : *Discrétisation globale des géométries étudiées* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.2 : *Algorithme de calcul THD* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.3 : *Champ de pression hydrodynamique au sein du palier* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.4 : *Pression circonférentielle du mi-plan du palier* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.5 : *Epaisseur du film circonférentielle du mi-plan du palier* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.6 : *Champ de température du film en fonction de  $\theta$  et  $h$*  **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.7 : *Température circonférentielle du mi-plan du palier* .. **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.8 : *Température maximale en fonction de l'excentricité relative* **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.9 : *Variation de l'angle de Calage en fonction de l'excentricité relative* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.10 : *Variation de la Portance hydrodynamique en fonction* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.11 : *Pression circonférentielle du mi-plan* ..... **Erreur ! Signet non défini.**  
Figure V.12 : *Epaisseur du film circonférentielle du mi-plan* ..... **Erreur ! Signet non défini.**

## INTRODUCTION GENERALE

Dans l'industrie, les machines tournantes sont constituées d'ensembles mécaniques très sollicitées, telles que, les turbines, les ventilateurs... Celles-ci comportent souvent des lignes d'arbre ayant des masses et géométries importantes, tournant à des vitesses très élevées. Les lignes d'arbre sont dans la plupart des cas portées sur des paliers fluides. La connaissance des comportements statique et dynamique de ces pièces mécaniques porteuses, est indispensable pour l'étude de ce type de contact. Les constructeurs utilisent pour les appuis lourdement chargés, des paliers hydrodynamiques qui s'avèrent plus simples et moins coûteux. Pour éviter tout contact solide-solide et pour minimiser les pertes par frottement, les constructeurs ont eu recours à la technologie utilisant des revêtements élastiques de surfaces. D'autre part, la lubrification des contacts mécaniques pour un chargement de plus en plus sévère et une vitesse de fonctionnement élevée, est implicitement affectée, car la viscosité du lubrifiant subit des changements en raison des variations de température d'écoulement.

Le travail mené dans le cadre de ce mémoire consiste à proposer des modèles de calcul permettant d'étudier le comportement statique d'un palier de longueur finie hydrodynamique, compte tenu de l'influence des déformations élastiques et des effets thermiques avec l'équation géométrique du film lubrifiant que crée le contact lubrifié. Ces modèles résument clairement toutes les démarches du processus de calcul numérique.

Le premier chapitre, présente une étude bibliographique qui consiste à expliquer les notions de la lubrification des contacts mécaniques concernant les paliers hydrodynamiques.

Dans ce contexte, nous nous intéressons aux travaux de recherche effectués dans ce domaine tout au long des dernières années.

Le deuxième chapitre présente les équations des problèmes élastiques qui servent à développer une approche semi-analytique donnant les solutions pour des tubes cylindriques longs. Cette approche utilise le plan complexe des équations de l'élasticité et permet de représenter l'état élastique à l'aide de deux potentiels complexes appelés fonction de Kolosov et Muskhelishvili. Les solutions en contrainte et en déplacement sont exprimées sous forme de séries de Fourier. Dans le cas où les couches élastiques sont minces, le calcul des contraintes et déplacements devient simple et rapide par une méthode dite « Couche mince ».

Le troisième chapitre présente les équations de base de la lubrification hydrodynamique et celles de transfert de chaleur pour les écoulements des fluides ainsi que dans les solides. Nous citons également les défauts de forme et de mésalignement qui peuvent surgir lors du fonctionnement des paliers afin de décrire les formes d'équations adéquates. Les différentes relations permettant de calculer les performances statiques des paliers seront à leurs tours établies.

Le quatrième chapitre a pour objectif d'effectuer une analyse élasto-hydrodynamique, qui tient compte des déformations élastiques des surfaces de contact au sein des paliers. Nous utilisons à cet effet deux types de revêtements : compressible et quasi-incompressible. La méthode de résolution choisie est celle des différences finies avec un calcul itératif pour la convergence de processus élasto-hydrodynamique.

Dans le cinquième chapitre, l'objectif étant d'aboutir à une analyse thermo-hydrodynamique, qui prend en considération l'effet des variations de la température du lubrifiant. Là, précisément nous utilisons la méthode des différences finies avec un calcul itératif global pour la convergence de ce problème, en s'intéressant essentiellement à l'influence des conditions de fonctionnement à savoir : la charge appliquée et la vitesse de rotation.

## LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : <i>Coussinets modernes</i> .....	4
Figure I.2 : <i>Section droite du palier lisse</i> .....	10
Figure I.3 : <i>Positions d'un arbre dans un palier lisse hydrodynamique</i> .....	10
Figure I.4 : <i>Conditions aux limites pour la rupture de film</i> .....	11
Figure II.1 : <i>Domaine borné multiplement connexe</i> .....	19
Figure II.2 : <i>Géométrie et notations</i> .....	20
Figure II.3 : <i>Conditions aux limites du premier problème mixte</i> .....	23
Figure II.4 : <i>Conditions aux limites du second problème mixte</i> .....	23
Figure II.5 : <i>Variation circonférentielle du déplacement radial pour revêtement compressible</i> .....	36
Figure II.6 : <i>Variation circonférentielle du déplacement radial pour revêtement quasi-incompressible</i> .....	36
Figure III.1: <i>Vitesses des surfaces lubrifiées 43]</i> .....	40
Figure III.2: <i>Section droite du palier</i> .....	47
Figure III.3 : <i>Schéma d'un palier mésaligné</i> .....	50
Figure III.4: <i>Schéma de projection de l'axe sur le plan <math>yOz</math></i> .....	51
Figure IV.1 : <i>Palier lisse développé</i> .....	57
Figure IV.2 : <i>Schéma de discrétisation du palier</i> .....	58
Figure IV.3 : <i>Géométrie d'un palier cylindrique mono couche</i> .....	61
Figure IV.4 : <i>Algorithme de calcul EHD</i> .....	64
Figure V.1 : <i>Discrétisation globale des géométries étudiées</i> .....	85
Figure V.2 : <i>Algorithme de calcul THD</i> .....	91
Figure V.3 : <i>Champ de pression hydrodynamique au sein du palier</i> .....	93
Figure V.4 : <i>Pression circonférentielle du mi-plan du palier</i> .....	94

Figure V.5 : Epaisseur du film circonférentielle du mi-plan du palier .....	95
Figure V.6 : Champ de température du film en fonction de $\theta$ et $h$ .....	96
Figure V.7 : Température circonférentielle du mi-plan du palier .....	97
Figure V.8 : Température maximale en fonction de l'excentricité relative .....	98
Figure V.9 : Variation de l'angle de Calage en fonction de l'excentricité relative .....	98
Figure V.10 : Variation de la Portance hydrodynamique en fonction .....	99
Figure V.11 : Pression circonférentielle du mi-plan .....	100
Figure V.12 : Epaisseur du film circonférentielle du mi-plan .....	101

# TABLE DES MATIERES

## AVANT PROPS RESUMES

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I.....	3
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	3
1. Introduction .....	3
2. Lubrification hydrodynamique.....	3
3. Problème théorique élasto-hydrodynamique.....	5
4. Problème théorique thermo-hydrodynamique.....	6
5. Paliers lisses sous chargement statique .....	7
6. Paliers lisses hydrodynamiques.....	9
7. Conditions aux limites pour la frontière de rupture de film .....	9
7.1. Condition de Sommerfeld.....	9
7.2. Condition de Gumbel .....	10
7.3. Condition de Reynolds .....	11
8. Conclusion.....	11
CHAPITRE II.....	13
SOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROBLEMES ELASTIQUES POUR LES TUBES CYLINDRIQUES LONGS .....	13
1. Introduction .....	13
2. Méthode de Kolosov et Muskhelishvili.....	13
2.1. Equations du problème élasto-statique plan en coordonnées cartésiennes.....	14
2.2. Equations en variables complexes.....	14
2.3. Solutions générales des équations du problème plan .....	17
2.3.1. Solution en contraintes .....	17
2.3.2. Solution en déplacements .....	18
3. Solutions analytiques des problèmes élastiques dans les paliers lisses .....	20
4. Géométrie et notations.....	20
5. Expressions des contraintes et des déplacements : Méthode des séries .....	21

6.	Solutions en contraintes et en déplacements des problèmes mixtes pour la couronne.....	22
7.	Contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne .....	24
8.	Expressions des déplacements et des contraintes sur les frontières .....	26
9.	Calcul des champs de déplacement et de contraintes sur frontières.....	29
10.	Cas particuliers .....	32
11.	Modèle de la couche élastique mince .....	33
12.	Conclusion.....	37
	CHAPITRE III.....	38
	EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE.....	38
	ET APPLICATIONS POUR PALIERS LISSES .....	38
1.	Introduction .....	38
2.	Equation des films minces visqueux généralisée .....	38
3.	Equation de l'énergie.....	42
4.	Equation de Reynolds.....	43
5.	Equation de transfert de chaleur .....	44
6.	Variation de la viscosité avec la température .....	45
7.	Lois de variation viscosité-pression .....	45
8.	Applications au cas d'un palier lisse .....	46
9.	Epaisseur du film lubrifiant .....	48
9.1.	Palier rigide .....	48
9.2.	Palier rigide mésaligné .....	49
9.3.	Palier déformable aligné.....	51
9.4.	Palier déformable mésaligné .....	52
10.	Performances statiques .....	52
10.1.	Composantes de la portance HD .....	52
10.2.	Angle de calage .....	53
11.	Conclusion.....	54
	CHAPITRE IV .....	55
	SOLUTION DU PROBLEME ELASTO-HYDRODYNAMIQUE (EHD).....	55
1.	Introduction .....	55
2.	Résolution du problème hydrodynamique (HD) .....	56
2.1.	Méthode des différences finies.....	56
2.2.	Discrétisation numérique.....	57
2.3.	Procédé de résolution .....	59
3.	Solution du problème élasto-hydrodynamique pour un palier .....	61
3.1.	Géométrie et cinématique du palier.....	61

3.2.	Calcul du champ de pression dans le film lubrifiant .....	62
3.3.	Conditions aux limites .....	62
3.4.	Résolution numérique.....	63
3.4.1.	Calcul du champ de déformation élastique.....	63
3.4.2.	Interaction structure-fluide .....	63
4.	Résultats et discussions .....	65
4.1.	Influence des déformations élastiques.....	66
4.2.	Influence des conditions de fonctionnement sur la pression .....	69
4.3.	Influence des conditions de fonctionnement sur le déplacement .....	72
4.4.	Influence des conditions de fonctionnement sur l'épaisseur du film .....	73
4.5.	Angle de calage et portance HD .....	77
5.	Conclusion.....	79
	CHAPITRE V.....	80
	SOLUTION DU PROBLEME THERMO-HYDRODYNAMIQUE (THD) .....	80
1.	Introduction .....	80
2.	Résolution du problème thermo-hydrodynamique .....	81
2.1.	Formulation mathématique.....	81
2.2.	L'équation de Reynolds généralisée.....	81
2.3.	Equation de l'énergie.....	82
2.4.	L'équation de transfert de chaleur .....	83
3.	Méthode de résolution .....	83
3.1.	Maillage.....	83
3.2.	Discrétisation de l'équation de Reynolds généralisée .....	84
3.3.	Discrétisation de l'équation de l'énergie .....	86
3.4.	Discrétisation de l'équation de transfert de chaleur .....	86
4.	Conditions aux limites.....	87
4.1.	Conditions aux limites pour le champ de pression (de Reynolds).....	87
4.2.	Conditions aux limites pour le film fluide.....	88
4.3.	Conditions aux limites pour le coussinet.....	88
5.	Procédé de calcul.....	88
6.	Résultats et discussions .....	89
6.1.	Influence de la température sur le champ de pression.....	89
6.2.	Influence des conditions de fonctionnement sur la pression maximale .....	90
6.3.	Influence des conditions de fonctionnement sur l'épaisseur du film .....	93
6.4.	Influence des conditions de fonctionnement sur la température maximale.....	95
6.5.	Angle de calage et portance hydrodynamique.....	99

7. Comparaison des résultats de calculs HD, EHD et THD .....	99
8. Conclusion.....	101
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....	102
ANNEXE A.....	105
ANNEXE B.....	108
ANNEXE C.....	111
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	113
PRINCIPALES NOTATIONS.....	116

# CHAPITRE I

## ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1. Introduction

Les paliers hydrodynamiques sont des éléments fluides utilisés pour le guidage des arbres de machines tournantes et alternatives. Les plus simples sont constitués d'un arbre cylindrique tournant à l'intérieur d'un alésage en présence de lubrifiant. Dans certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs,...etc. La figure I.1 présente différents coussinets de paliers circulaires. Les paliers lisses sont de deux catégories : les paliers radiaux et les paliers axiaux appelés aussi paliers à butée.

Nous allons citer dans ce qui suit les travaux de recherche élaborés tout au long des dernières années, qui traitaient les problèmes de la lubrification hydrodynamique ainsi que les phénomènes élastiques et thermiques qui peuvent intervenir lors du fonctionnement des paliers hydrodynamiques.

### 2. Lubrification hydrodynamique

La lubrification hydrodynamique est un chapitre de la tribologie qui concerne les contacts pour lesquels un fluide visqueux est intercalé entre les surfaces en présence [3]. La tribologie qui est la science du frottement et de l'usure des matériaux, a pour objectif d'étudier les phénomènes de dégradation des surfaces, qui surgissent essentiellement dans les dispositifs industriels. Elle a ainsi connu un développement important depuis la révolution industrielle. La lubrification quant à elle contribue au contrôle de l'usure des matériaux en introduisant un film fluide qui sert à réduire le frottement entre les surfaces en contact et en mouvement relatif [1]. Ce fluide peut être un liquide pratiquement incompressible, tel que de l'huile, de l'eau ou bien un métal fondu : c'est le cas des paliers et des butées

hydrodynamiques, comme il peut aussi être un gaz compressible, le plus souvent de l'air : c'est le cas des paliers et des butées à gaz [3]. Plus précisément, la lubrification hydrodynamique concerne les mécanismes pour lesquels la forme et la vitesse relative de deux surfaces en regard engendrent la formation d'un film mince lubrifié continu sous une pression suffisamment élevée pour empêcher le contact [1]. Reynolds semble avoir été le premier à publier en 1886, l'article qui expliquait la théorie de la lubrification hydrodynamique. Dans son article, Reynolds aboutit à une équation qui porte son nom et qui constitue le socle des études traitant des écoulements de faible épaisseur.

La transition des équations de Navier-Stokes vers l'équation de Reynolds, proposée dès 1886, avait pour but d'utiliser la faible distance qui sépare les deux surfaces d'un contact lubrifié dans les conditions habituelles (quelques dizaines de microns) pour éliminer toutes les variations suivant la direction perpendiculaire aux deux surfaces. En 1904, Sommerfeld propose sa première solution pour l'équation de Reynolds dans le cas d'un mécanisme convergent- divergent qui traite le cas d'un palier infiniment long. En 1905, Michell trouve une solution de l'équation de Reynolds tenant compte des débits de fuite. En 1920 Hardy et Bircumshaw [2] se sont proposés d'étudier le mécanisme de la lubrification par film mince qui emploie essentiellement le terme de « lubrification limite ». D'un point de vue mathématique, des justifications partielles de cette approximation ont été publiées par Wannier en 1950 et par Elrod en 1959. Une autre justification mathématique a été obtenue par Cimatti et Menchi [31] en 1978 alors qu'une démonstration rigoureuse a été établie par Bayada et Chambat [32] en 1986, et par Nazarov [33] en 1990.



**Figure I.1 :** *Coussinets modernes*

### 3. Problème théorique élasto-hydrodynamique

La lubrification élasto-hydrodynamique (EHD) des paliers lisses, constitue un chapitre important dans la tribologie en raison des paramètres qui influent sur le comportement du film d'huile et sur les surfaces solides. Lors du fonctionnement cinématique ou dynamique de tels paliers, il doit y avoir génération d'un champ de pression à l'intérieur du film lubrifiant qui crée à son tour une déformation de surface du coussinet et de l'arbre. Cette déformation engendre également une modification de l'épaisseur du film fluide lubrifiant. En même temps, les conditions d'alimentation peuvent modifier la forme du champ de pression et donc celle du champ d'épaisseur. Des conditions assurant la conservation du débit doivent être aussi prises en compte pour une meilleure modélisation de la lubrification dans des conditions réelles de fonctionnement.

Vers la fin des années quarante, les chercheurs se sont intéressés au problème élasto-hydrodynamique. En 1949, Grubin et Vinogradova [4] ont montré l'importance des déformations élastiques et l'effet piézo-visqueux dans les contacts Hertiens. Ils ont établi que des pressions importantes provoquent des déformations élastiques des surfaces dans la zone de contact [6].

Dowson et Higginson (1959) ont développé une méthode itérative dite "inverse" pour le calcul d'un contact linéique lubrifié. Dans ce cas, l'équation de Reynolds est unidimensionnelle et son intégration analytique peut s'effectuer. Partant d'un profil de pression calculé initialement pour le cas rigide, ils calculent la déformation des surfaces. Par un processus itératif ils obtiennent le profil d'épaisseur en utilisant l'équation de l'élasticité et l'équation de Reynolds.

En 1962, Stephenson et Osterle appliquent une "méthode directe" itérative au cas d'un contact linéaire. En partant d'une excentricité donnée, ils obtiennent la pression par la résolution de l'équation de Reynolds. Avec ce champ de pression ils déduisent l'épaisseur du film. On déduit alors un nouveau champ de pression et les itérations sont continuées jusqu'à ce que le champ de pression converge. Egalement, si la charge obtenue par intégration du champ de pression correspond à la charge donnée, la solution est atteinte, sinon, l'excentricité est modifiée et les calculs sont repris.

Higginson (1965-66) [5] étudie les effets de la déformation élastique d'un coussinet sur les performances d'un palier infiniment long. Il obtient des résultats numériques qui

correspondent qualitativement mais non quantitativement avec ceux de ses propres études expérimentales.

#### **4. Problème théorique thermo-hydrodynamique**

L'analyse thermo-hydrodynamique explique l'influence des effets thermiques sur les caractéristiques du contact hydrodynamique. Au cours des dernières années, de nombreux auteurs ont étudié les effets thermiques. Parmi les études réalisées, on peut citer celle de Boncompain [7], qui a comparé des résultats expérimentaux avec ceux obtenus par une analyse thermo-élasto-hydrodynamique en tenant compte des déformations thermiques de l'arbre et du coussinet. Bouyer et Fillon [34] ont étudié l'influence des déformations élastiques et des effets thermiques dans un palier hydrodynamique fortement chargé, et résolu en même temps l'équation de Reynolds, l'équation d'énergie et l'équation de la chaleur par les méthodes itératives. Zienkiewicz [8] a tenu compte de la variation de la température à travers le film lubrifiant dans l'équation d'énergie. Dowson [9] a utilisé une équation généralisée d'énergie en considérant la variation de la viscosité à travers le film. Pierre [10,11] a présenté une étude THD tridimensionnelle complète incluant le mésalignement et une comparaison avec des résultats expérimentaux. Majumdar [12] a réalisé une analyse théorique pour l'estimation de la température et la pression d'un palier hydrodynamique en utilisant l'équation de Reynolds et l'équation d'énergie. Wang [13] a réalisé une étude théorique et expérimentale d'un palier hydrodynamique soumis à des conditions extrêmes en frottement mixte. Son modèle prend en considération des rugosités de surface, des contacts locaux au niveau des aspérités, des déformations thermiques, des effets thermo-visqueux et piezo-visqueux ainsi que du possible mésalignement d'arbre dans le palier. Ferron [14] a réalisé des études théoriques et expérimentales THD d'un coussinet de longueur finie. Il a résolu l'équation de Reynolds généralisées simultanément avec les équations tridimensionnelles de conduction de la chaleur et d'énergie, puis a validé les résultats par le travail expérimental. Banwait et Chandrawat [15] ont étudié les conditions aux limites thermiques d'un coussinet. Jang et Chang [16] ont analysé le fonctionnement d'un palier dans le moteur d'axe d'une commande de disque dur d'ordinateur considérant l'effet de la cavitation. Sawicki et Rao [17] ont calculé les caractéristiques dynamiques d'un palier hydrodynamique en considérant l'effet de cavitation.

## 5. Paliers lisses sous chargement statique

L'étude de l'influence des déformations élastiques sur les caractéristiques statiques d'un palier, soumis à une charge statique, a fait l'objet de nombreux travaux tant théorique qu'expérimentaux. Les premières constatations ont été établies en 1964 par Carl [18].

Le progrès scientifiques de calcul a permis de résoudre les problèmes de lubrification par la voie numérique. Vers la fin des années soixante, les méthodes numériques étaient mises en évidence et les premiers codes de calcul ont vu le jour [6].

Reddy, Arghyris et Scharpe [19] ont utilisé les travaux de Zienkiewicz, Cheung et Visser (1965) pour trouver une solution numérique en appliquant la méthode des éléments finis à un problème de lubrification. Ce sont les premiers auteurs qui introduisirent la méthode des éléments finis dans la lubrification.

Herrebrugh [20] a utilisé la méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution du problème d'un contact linéique isotherme incompressible. Taylor et O'Callaghan (1972) ont utilisé ces travaux pour résoudre le problème du contact linéique isotherme piézo-visqueux, en se servant des éléments iso-paramétriques à 12 nœuds pour la discrétisation du domaine et l'approche de Galerkin. D'autre part, il a établi une intégration par parties pour l'obtention d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre uniquement.

Nicolas [21] à son tour, utilise la méthode des éléments finis pour l'étude d'un palier soumis à un chargement quelconque. Nicolas et Frêne [22] font une comparaison entre ces résultats théoriques et des résultats expérimentaux.

Oh et Huebner [23], prennent en considération pour la première fois l'élasticité des structures. Ils utilisent la méthode des éléments finis pour la résolution du problème de lubrification EHD d'un palier sous chargement constant. Les déformations sont calculées dans toute la structure et non pas seulement à l'endroit où est localisé le champ de pression. Ils utilisent les travaux de Zienkiewicz (1965) pour le calcul des structures et ils expriment les forces appliquées  $\{F\}$  en fonction de la déformée  $\{\delta\}$  par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité  $[K]$  :

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

Les forces appliquées doivent être définies par intégration du champ de pression hydrodynamique. Ainsi, Les pressions négatives doivent être négligées (conditions aux limites de Gumbel). Ils utilisent un schéma itératif direct modifié pour la résolution, qui diverge rapidement pour des excentricités importantes  $\geq (0.5)$ , ou lorsque les déformations radiales deviennent plus importantes par rapport au jeu radial.

Wechsler [24], applique la méthode des différences finies pour la discrétisation et la méthode de Gauss-Seidel avec sur-relaxation pour la résolution rapide du système obtenu par discrétisation de l'équation de Reynolds sur le domaine. Il utilise les séries de Fourier pour le calcul des déformations élastiques.

Rhode et Oh [25,26] , aboutissent à partir de ces travaux à une nouvelle méthode dans laquelle ils expriment l'épaisseur du film lubrifiant dans un contact linéique par la relation  $h = h_0 + L P$  où  $h_0$  est l'épaisseur nominale,  $P$  la pression du film et  $L$  un opérateur matriciel défini pour un chargement unitaire appliqué perpendiculairement à la surface déformable. Ainsi, ils arrivent à coupler l'équation de l'écoulement hydrodynamique à celle régissant la déformation des structures. La résolution est effectuée par la méthode de Newton-Raphson.

Conway et Lee [27], considèrent le cas d'un palier infiniment long et résolvent le problème de la lubrification isotherme et isovisqueuse. L'équation de Reynolds devenue ainsi unidimensionnelle est intégrée analytiquement. Le coussinet est considéré en tant que tube mince dans un logement rigide. En 1977 [28] les mêmes auteurs présentent les résultats dans le cas du palier court en considérant une distribution parabolique de la pression dans la direction axiale.

Fantino, Frêne et Du Parquet [29] étudient pour la première fois le comportement d'un palier de bielle élastique soumise à un chargement statique dans l'hypothèse de la piézoviscosité. L'équation de Reynolds est alors résolue par la méthode des différences finies utilisant la méthode itérative de Gauss-Seidel avec sous-relaxation. Considérant le palier comme étant de longueur finie, les résultats de leurs calculs montrent l'existence d'un pic de pression dû au pincement du film d'huile.

En 1983, Pierre-Eugène, Frêne et Fantino, Roussel et du Parquet [30] comparent les résultats théoriques et expérimentaux dans des conditions de fonctionnement statiques. Les calculs réalisés par Fantino concordent bien avec les expérimentations de Pierre-Eugène.

## 6. Paliers lisses hydrodynamiques

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre généralement en acier de rayon  $R_a$  et le coussinet en bronze ou en acier régulé de rayon intérieur  $R_c$  et de longueur  $L$ . Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs : le jeu radial  $C = R_c - R_a$ , le rapport  $C/R$  (ou jeu relatif de l'ordre de  $10^{-3}$ ) et le rapport  $L/D$  de la longueur au diamètre du palier (figure I.2). La figure I.3 présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en route d'un palier sous charge. Les points  $O_a$  et  $O_c$  représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet et  $W$  désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre.

Au repos, figure I.3.a, l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance  $O_a O_c$  est égale au jeu radial  $C$ . Au démarrage (figure I.3.b), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime de lubrification est dit mixte, le lubrifiant étant entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge (figure I.3.c). Pour une vitesse de rotation stable, et une charge  $W$  constante, le centre de l'arbre  $O_a$  occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet. Si le torseur des forces extérieures se réduit à une force unique  $W$  qui agit dans le plan de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles. Deux paramètres sont alors nécessaires pour positionner  $O_a$  par rapport à  $O_c$ . On utilise habituellement la distance  $|O_a O_c|$  appelée excentricité  $e$  et l'angle que fait la direction de la charge  $W$  avec la ligne des centres  $O_a O_c$  dit angle de calage  $\varphi$ .

## 7. Conditions aux limites pour la frontière de rupture de film

La résolution de l'équation de Reynolds comporte divers niveaux de sophistication. La finesse du modèle utilisé dépend des objectifs poursuivis et de la précision désirée. Le choix des conditions aux limites fait partie intégrante de la qualité du modèle. Les conditions aux limites les plus usuelles sont présentées dans ce qui suit (figure I.4) [6].

### 7.1. Condition de Sommerfeld

Sommerfeld suppose que le film lubrifiant est continu. Cette condition est acceptable seulement pour des paliers ayant des pressions d'alimentation ou environnantes très élevées ou

pour des paliers tournant à faible vitesse, car les pressions dans le film peuvent devenir négatives (voir figure).

### 7.2. Condition de Gümbel

Cette condition (appelée aussi demi-Sommerfeld) prend en compte la rupture de film lubrifiant et consiste à négliger les pressions négatives dans le film. C'est une condition qui ne respecte pas la continuité du débit aux travers de la frontière de rupture.

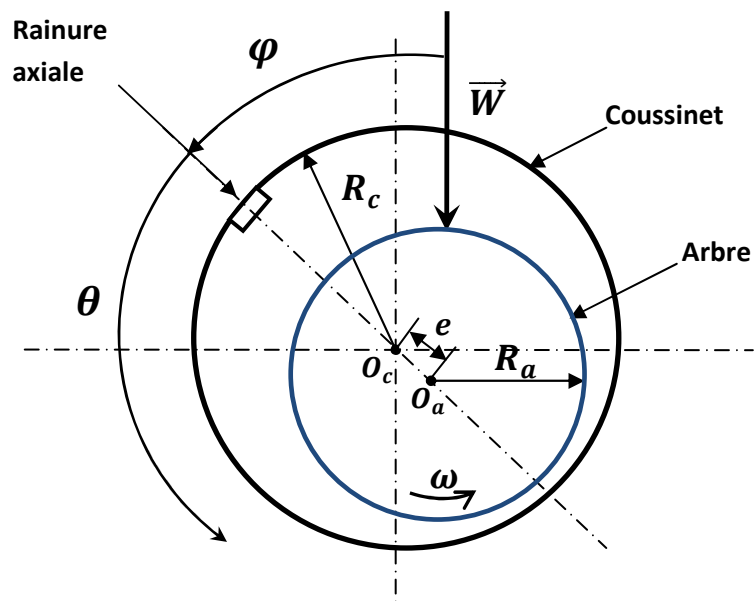


Figure I.2: Section droite du palier lisse

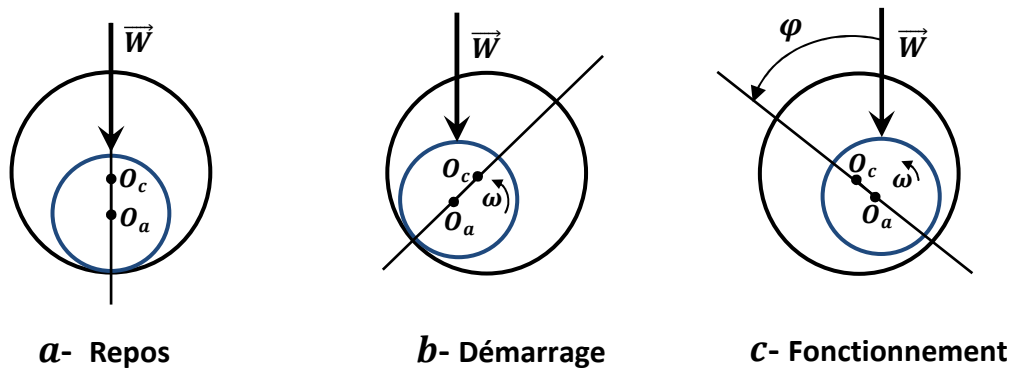


Figure I.3 : Positions d'un arbre dans un palier lisse hydrodynamique

### 7.3. Condition de Reynolds

La condition de conservation du débit aux travers de la frontière de rupture est satisfaite grâce aux conditions aux limites introduites par Swift [41] et Stieber [42]. Ces conditions s'écrivent :

$$P = P_0 \quad \text{et} \quad \partial P / \partial n = 0$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la frontière et  $P_0$  la pression dans la zone où le film est rompu.

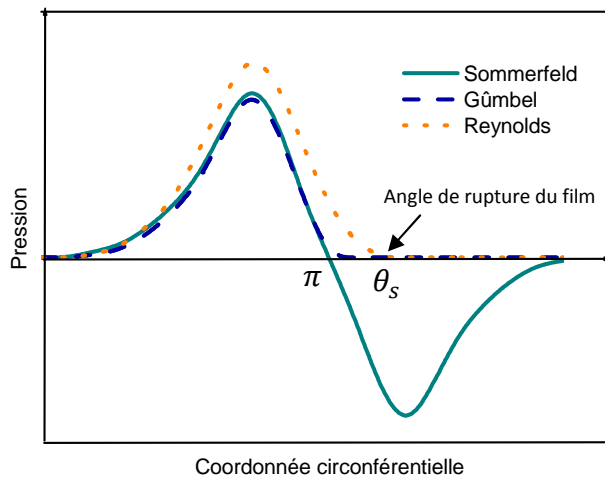


Figure I.4 : Conditions aux limites de rupture du film [6]

## 8. Conclusion

Les problèmes théoriques de la lubrification hydrodynamique sont basés sur la résolution de l'équation de Reynolds. Les méthodes de résolution qui s'y appliquent souvent, sont la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Pour des raisons de simplification, l'équation de Reynolds est devenue plus facile à résoudre même par la voie analytique, sauf que les résultats obtenus sont moins précis.

L'étude EHD qui prend en compte les déformations élastiques dues au champ de pression dans un contact lubrifié rend l'équation de Reynolds fortement non linéaire ce qui complique sa résolution. L'analyse EHD a fait l'objet de nombreuses études depuis le début du vingtième siècle et de manière continue.

L'analyse THD qui fait intervenir les effets thermiques dans le contact lubrifié conduit à la résolution de l'équation de Reynolds dite généralisée, dont sa résolution est trop compliquée. Cette résolution peut être faite simultanément avec l'équation de l'énergie et l'équation de conduction de la chaleur. D'autre part, des études thermo-élasto-hydrodynamiques (TEHD) et celles qui incluent l'effet de mésalignement des arbres dans les paliers lisses, ont aussi vu le jour.

## CHAPITRE II

### SOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROBLEMES ELASTIQUES POUR LES TUBES CYLINDRIQUES LONGS

#### 1. Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude des déformations élastiques locales des surfaces de contact au sein des paliers hydrodynamiques. En effet, les paliers sont constitués des revêtements élastiques de surface qui sont situés dans les coussinets. L'arbre peut être considéré rigide. Nous pouvons alors schématiser le coussinet par un cylindre ayant une couche élastique fixée dans un support rigide. Le problème d'élasticité concernant les paliers lisses doit être résolu numériquement, par éléments finis en manière itérative et ceci demanderait un temps de calcul élevé. Ces considérations nous amènent à utiliser des approches semi-analytiques plus performantes ne nécessitant pas une discrétisation du milieu étudié [5]. Nous avons aussi à présenter dans ce chapitre, une approche semi-analytique bidimensionnelle en l'élasticité linéaire plane, ainsi qu'un modèle simplifié dit « couche mince » dans le cas où l'épaisseur du revêtement est très faible devant le Rayon du palier. Celui-ci permet d'étendre cette approche au cas d'un palier de longueur finie là où l'écoulement est bidimensionnel [5].

#### 2. Méthode de Kolosov et Muskhelishvili

Kolosov [35] et Muskhelishvili [36] étaient les premiers à développer la méthode de résolution basée sur la formulation dans un plan complexe des équations de l'élasticité (2D). L. Solomon [37] se propose de transformer les équations de l'élasticité plane en un système permettant d'obtenir des solutions générales en contraintes et en déplacement. Ces solutions s'expriment par deux fonctions  $\Phi(Z)$  et  $\Psi(Z)$  appelées potentiels de Kolosov et Muskhelishvili.

## 2.1. Equations du problème élasto-statique plan en coordonnées cartésiennes

Les équations de l'élasto-statique plane sont présentées pour un milieu solide supposé élastique homogène et isotrope.

Les deux équations d'équilibre sont [39]:

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \quad (\text{II-1})$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \quad (\text{II-2})$$

Les équations de compatibilité sont :

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + S_{0,xx} = 0 \quad (\text{II-3})$$

$$\nabla^2 \sigma_{yy} + S_{0,yy} = 0 \quad (\text{II-4})$$

$$\nabla^2 \sigma_{xy} + S_{0,xy} = 0 \quad (\text{II-5})$$

où  $S_0 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$  étant la pression hydrostatique moyenne en un point.

Si des tensions nulles correspondent à l'état de non déformation, la loi de Hooke devient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda \Theta + 2 \mu \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda \Theta + 2 \mu \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2 \mu \varepsilon_{xy} = \mu \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

où  $\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$  et  $\lambda, \mu$  sont les constantes de Lamé.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{en déformations planes}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{en contraintes moyennes planes}$$

Les relations déformations-déplacements avec l'hypothèse de petites déformations est :

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x}, \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} \quad \text{et} \quad \gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = u_{,x} + v_{,y} \quad (\text{II-7})$$

## 2.2. Equations en variables complexes

Les équations précédentes vont, d'après Solomon [37], s'exprimer uniquement par deux variables complexes. Les fonctions dépendant des variables  $x$  et  $y$  deviennent des complexes  $z$  et  $\bar{z}$  indépendantes [39]:

$$z = x + i y, \quad \bar{z} = x - i y = \text{conjugué}(z) \quad (\text{II-8})$$

Le déplacement complexe se définit alors par :

$$U(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{II-9})$$

Les opérateurs différentiels sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

On peut donc écrire, d'après (II-8) :

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ et } y = -i(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad , \text{ il vient alors :}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

qui nous permet de tirer :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

et 
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = i \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (\text{II-13})$$

Les équations de compatibilité deviennent :

$$S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-14})$$

$$S_{,zz} - S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-15})$$

avec : 
$$S(z, \bar{z}) = \sigma_{yy}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y) + 2 i \sigma_{xy}(x, y)$$

Ainsi, le système d'équations d'équilibre (II-1) et (II-2) devient :

$$S_{,z} - S_{0,z} = 0 \quad (\text{II-16})$$

Le système obtenu par l'ensemble des équations d'équilibre (II-1) à (II-2) et les équations de compatibilité (II-3) et (II-5) est écrit sous forme d'un système exprimé par deux fonctions de contraintes  $S_0$  et  $S$ .

$$S_{,z} - S_{0,z} = 0 \quad (\text{II-17})$$

$$S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-18})$$

$$S_{,zz} - S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-19})$$

Les relations déformations-déplacements (II-7) et l'expression des contraintes seront fonction de  $S_0$  et  $S$ .

$$\begin{aligned} u_{,x} + v_{,y} &= \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{E} S_0 \\ u_{,x} - v_{,y} &= \frac{(1+\nu)}{E} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = -\frac{(1+\nu)}{E} \text{R\u00e9el}(S) \\ u_{,y} - v_{,x} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E} \text{Imaginaire}(S) \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

Soit :

$$\begin{aligned} U_{,z} &= \frac{\partial}{\partial z} (u + i v) = \frac{1}{2} [(u_{,x} + v_{,y}) + i(u_{,x} - v_{,y})] \\ \bar{U}_{,z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + i v) = \frac{1}{2} [(u_{,x} - v_{,y}) + i(v_{,x} + u_{,y})] \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

De (II-20), on aura :

$$U_{,z} = -\frac{1}{4\mu} \bar{S} \quad (\text{II-22})$$

$$U_{,z} + \bar{U}_{,z} = \left( \frac{1-2\nu}{2\mu} \right) S_0 \quad (\text{II-23})$$

## 2.3. Solutions générales des équations du problème plan

### 2.3.1. Solution en contraintes

Soit le système homogène :

$$\begin{aligned} S_{,z} - S_{0,z} &= 0 \\ S_{0,zz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

Si on intègre la deuxième équation par rapport à  $\bar{z}$  puis  $z$ , il vient :

$$S_0 = \int S_1(z) dz + \overline{S_2(z)} \quad (\text{II-25})$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont des fonctions arbitraires.  $S_0$  étant une fonction réelle, on peut écrire :

$$2 \Phi(z) = \int S_1(z) dz \quad (\text{II-26})$$

et (II-25) devient :

$$S_0 = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \quad (\text{II-27})$$

En substituant (II-27) dans la première équation du système homogène, on trouve :

$$S_{,z} = 2 \Phi'(z) \quad (\text{II-28})$$

D'où, après intégration par rapport à  $\bar{z}$  :

$$S = 2[\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (\text{II-29})$$

où  $\Psi(z)$  est une fonction arbitraire.  $\Phi(z)$  et  $\Psi(z)$  sont des fonctions de  $z$  dans  $D$ .

On suppose deux fonctions  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  définies dans  $D$ . Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= \Phi(z) \\ \psi'(z) &= \Psi(z) \end{aligned} \quad (\text{II-30})$$

On peut aussi écrire (II-27) et (II-29) sous la forme finale :

$$\begin{aligned} S_0 &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ S &= 2[\bar{z} \phi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \quad (\text{II-31})$$

Pour toutes fonctions  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$ , les fonctions (II-31) vérifient (II-24).

### 2.3.2. Solution en déplacements

En portant l'équation (II-31) en (II-22) et (II-23), on aboutit au système :

$$\begin{aligned} U_{,\bar{z}} &= -\frac{1}{2\mu} [\bar{z} \overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] \\ U_{,z} + \bar{U}_{,\bar{z}} &= \left(\frac{1-2\nu}{\mu}\right) [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \end{aligned} \quad (\text{II-32})$$

En intégrant la première équation par rapport à  $\bar{z}$ , on aura :

$$U = -\frac{1}{2\mu} [\bar{z} \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}] + U_1(z) \quad (\text{II-33})$$

où  $U_1(z)$  est une fonction pour l'instant inconnue.

En remplaçant (II-33) dans (II-32), on trouvera :

$$U_1(z) = \frac{3-4\nu}{2\mu} \phi(z)$$

Par conséquent, (II-33) deviendra :

$$2\mu U(z, \bar{z}) = \chi \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (\text{II-34})$$

où  $\chi = 3 - 4\nu$  dans l'état de déformation plane,  $1 < \chi < 3$

$\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  dans l'état de contrainte moyenne plane,  $5/3 < \chi < 3$

Les relations (II-31) et (II-34) donnent la solution du problème plan par l'intermédiaire des potentiels  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$ . Ceux-ci ont été utilisés par Kolosov [35] et Muskhelishvili [36].  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  sont appelées les fonctions de Kolosov et Muskhelishvili.

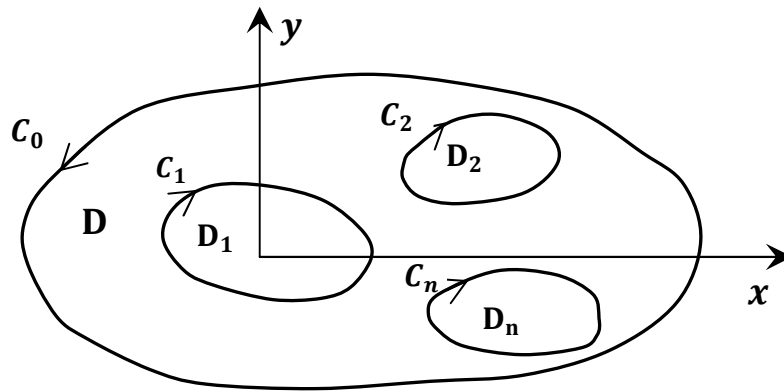
Dans un domaine multiplement connexe et en l'absence des forces volumiques (figure II-1), les solutions du problème élastique plan sont comme suit :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}\end{aligned}\tag{II-35}$$

- En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \\ 2\mu(u_r + iu_\theta) &= [\chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}]e^{-i\theta}\end{aligned}\tag{II-36}$$



**Figure II.1 :** *Domaine borné multiplément connexe*

Les deux potentiels complexes s'expriment par :

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \log(z - z_j) + \phi_0(z)\tag{II-37}$$

$$\psi(z) = -\chi \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \log(z - z_j) + \psi_0(z)$$

où

$$\gamma_j = \frac{R_j}{2\pi(1 + \chi)}\tag{II-38}$$

$\phi_0$  et  $\psi_0$  sont deux fonctions holomorphes arbitraires,  $m$  étant le nombre de contours intérieurs.

Cette méthode est fortement utilisée surtout pour les domaines circulaires et particulièrement pour les couronnes concentriques.

### 3. Solutions analytiques des problèmes élastiques dans les paliers lisses

Les revêtements utilisés dans les paliers lisses peuvent être convenablement schématisés par des tubes cylindriques dont les sections droites transversales sont des couronnes circulaires. Bien que les couronnes circulaires soient des domaines bidimensionnels doublement connexes, on peut appliquer les solutions générales des problèmes plans données par (II-36).

### 4. Géométrie et notations

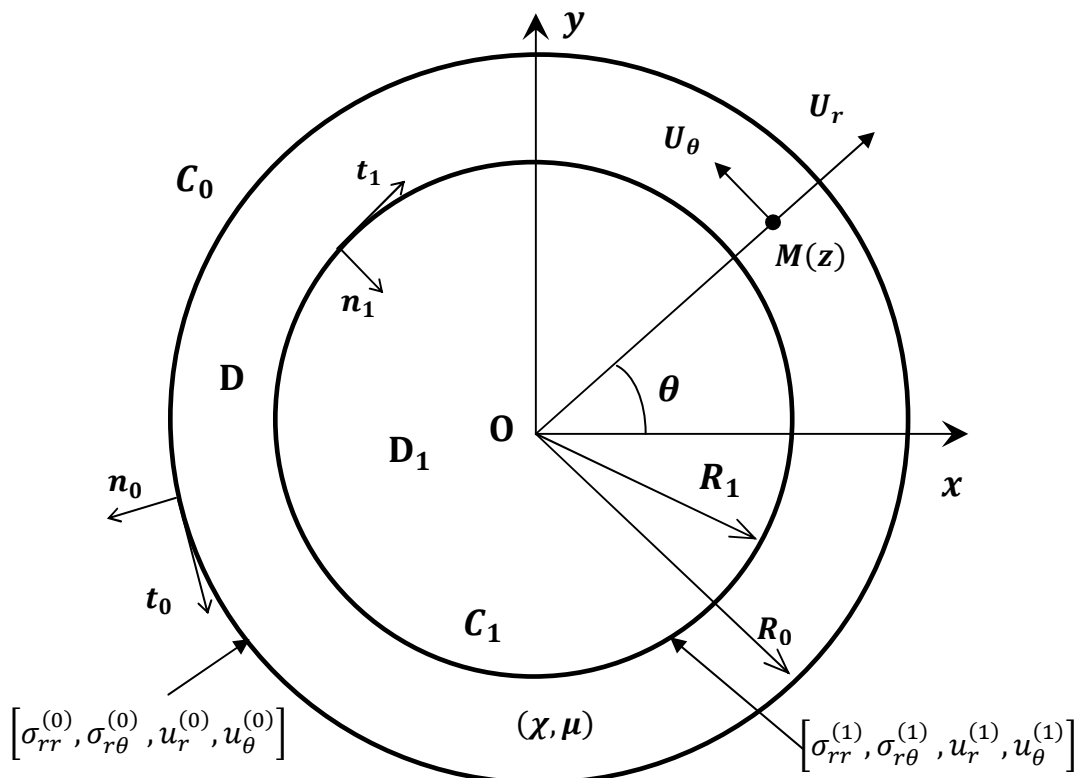


Figure II.2 : Géométrie et notations

Le domaine D est une couronne circulaire centrée à l'origine des axes  $ox$  et  $oy$  et de rayon  $R_1 < R_0$  figure (II-2).

On notera  $H$  le rapport  $R_0/R_1$  et  $\ell$  le rapport  $r/R_1$  tel que ( $1 \leq \ell \leq H$ ).

Dans le plan complexe, un point  $M$  du domaine est défini par le nombre complexe  $z = r e^{i\theta}$

On aura :  $M \in (D) \Leftrightarrow \ell \in [1, H]$ .

Les normales du domaine D sont orientées vers l'extérieur. Ainsi, la tension  $\sigma_n = (M)$  pour  $M$  appartenant à un des cercles limites représentera l'action du milieu extérieur sur la couronne. Les tangentes définies sur les cercles limites se déduisent des normales par rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe  $z$ . Sur les cercles limites on adoptera la notation suivante pour les contraintes et les déplacements :

Pour  $r = R_0(\ell = H)$  :  $\sigma_{rr}^{(0)}$ ,  $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ ,  $u_r^{(0)}$ ,  $u_\theta^{(0)}$

Pour  $r = R_1(\ell = 1)$  :  $\sigma_{rr}^{(1)}$ ,  $\sigma_{r\theta}^{(1)}$ ,  $u_r^{(1)}$ ,  $u_\theta^{(1)}$

Les constantes élastiques du matériau homogène et isotrope, seront notées  $\mu$  et  $\chi$ .  $\mu$  étant le module de Coulomb.

### 5. Expressions des contraintes et des déplacements : Méthode des séries

Le domaine D étant doublement connexe ( $m = 1$ ), les potentiels (II-37) se réduisent à [39]:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \gamma_1 \log(z - z_1) + \phi_0(z) \\ \psi(z) &= -\chi \bar{\gamma}_1 \log(z - z_1) + \psi_0(z) \end{aligned} \tag{II-39}$$

où  $z \in D$ ,  $z_1 \in D_1$  et  $\gamma_1 \in \mathbb{C}$ .

Si l'on choisit  $z_1 = 0$  (l'origine des axes), on aura :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \gamma \log(z) + \phi_0(z) \\ \psi(z) &= -\chi \bar{\gamma} \log(z) + \psi_0(z) \end{aligned} \tag{II-40}$$

où  $\gamma = \gamma_1$  et  $z = r e^{i\theta}$ .

Les deux fonctions holomorphes sont écrites sous forme de deux séries de Laurent au voisinage de  $z = 0$  [38]. On pourra donc écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\ell) e^{ik\theta} \\ \sigma_{rr}(r, \theta) - i \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k(\ell) e^{ik\theta} \\ \frac{2\mu}{r} [u_r(r, \theta) + i u_\theta(r, \theta)] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k(\ell) e^{ik\theta} \end{aligned} \quad (\text{II-41})$$

avec :

$$\begin{aligned} V_k(\ell) &= 2(a_k \ell^k + \bar{a}_{-k} \ell^{-k}) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sigma_k(\ell) &= (1 - k)a_k \ell^k + \bar{a}_{-k} \ell^{-k} - a'_{k-2} \ell^{k-2} \quad , \quad \forall k \in \{\mathbb{Z} - \{1\}\} \\ \sigma_1(\ell) &= (1 - \chi) \ell^{-1} \bar{a}_{-1} \\ U_k(\ell) &= \frac{\chi}{1+k} a_k \ell^k - \bar{a}_{-k} \ell^{-k} + \frac{\bar{a}'_{-2-k}}{1+k} \ell^{-2-k} \quad , \quad \forall k \in \{\mathbb{Z} - \{1\}\} \\ U_{-1}(\ell) &= 2 a_{-1} \chi \ell^{-1} \log r + \frac{\alpha\chi - \bar{\beta}}{r} - \bar{a}_1 \ell \end{aligned} \quad (\text{II-42})$$

A partir de ces expressions, on peut écrire les relations sur les cercles limites ( $r = R_0$  et  $r = R_1$ ).

## 6. Solutions en contraintes et en déplacements des problèmes mixtes pour la couronne

Les problèmes aux limites de l'élasticité plane assurent l'existence et l'unicité des solutions en contraintes et en déplacements. On a maintenant deux types de problèmes afin d'obtenir des solutions à ce problème :

- Premier problème : les contraintes sont connues sur ( $r = R_0$ ), les déplacements sont donnés sur ( $r = R_1$ ).
- Second problème : les contraintes sont connues sur ( $r = R_1$ ), les déplacements sont donnés sur ( $r = R_0$ ).

Le problème mixte peut correspondre à deux situations qui se déduisent l'une de l'autre en changeant  $H$  en  $H^{-1}$ . Les figures (II-3) et (II-4) indiquent bien les conditions aux limites des problèmes mixtes.

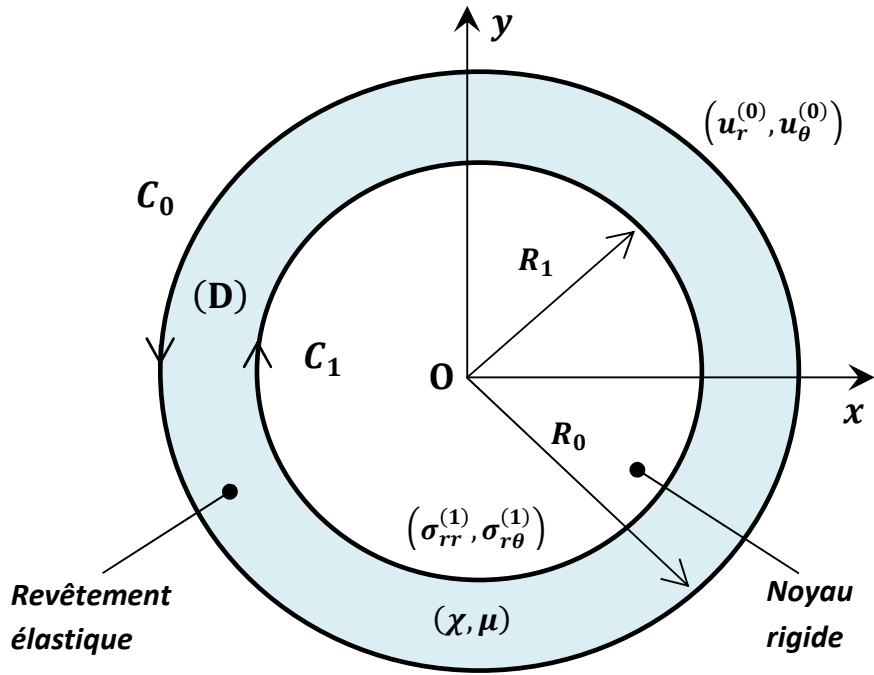


Figure II.3 : Conditions aux limites du premier problème mixte

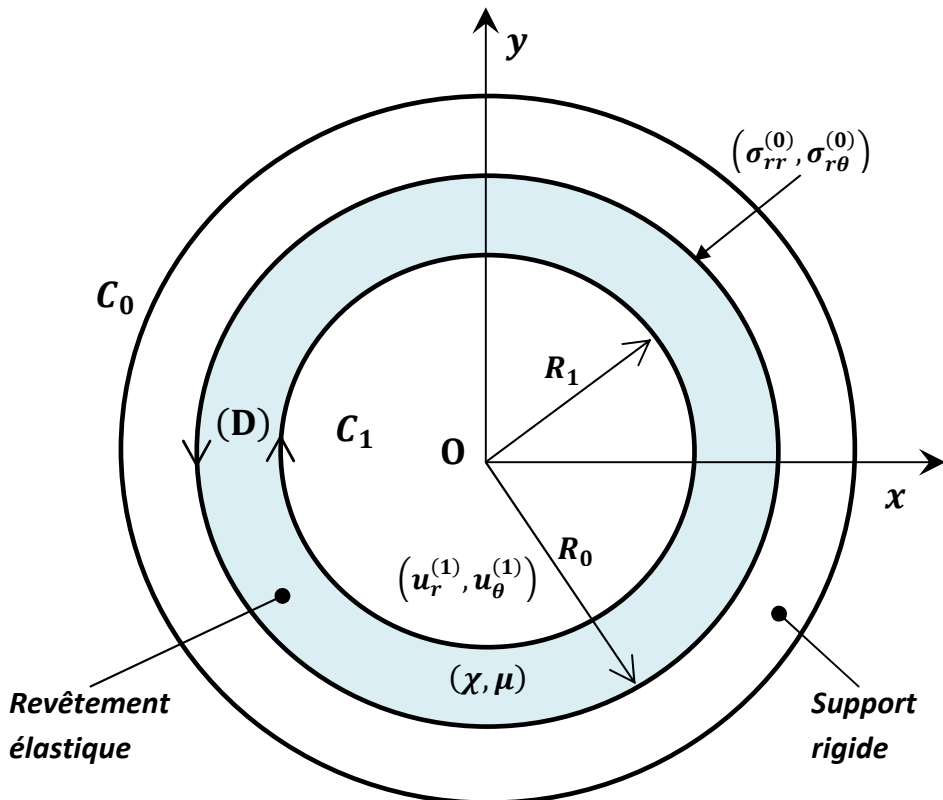


Figure II.4 : Conditions aux limites du second problème mixte

## 7. Contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne

*Premier problème mixte*

En utilisant la notation matricielle :

$$S_k^{(j)} = \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(j)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(j)} \end{Bmatrix} \text{ et } D_k^{(j)} = \begin{Bmatrix} U_k^{(j)} \\ \bar{U}_{-k}^{(j)} \end{Bmatrix}, \quad k \in z \quad \forall j = 0,1$$

Pour  $k = 1$

$$\begin{Bmatrix} S_1^{(1)} \\ D_1^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{2,1} \\ G_{1,1} & G_{2,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1^{(0)} \\ D_1^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-43})$$

Pour  $k \in \{z - \{1\}\}$

$$\begin{Bmatrix} S_k^{(1)} \\ D_k^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,k} & F_{2,k} \\ G_{1,k} & G_{2,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_k^{(0)} \\ D_k^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-44})$$

Lorsque le cercle intérieur ( $C_1$ ) est rigide :  $D_k^{(1)} = 0 \quad \forall k \in N$

$$F_{1,1} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ \frac{2H(1-H^2)}{\chi+H^4} & \frac{H^3(1+\chi)}{\chi+H^4} \end{bmatrix}$$

$$F_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2(1-H^4)}{\chi+H^4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{1,1} = \begin{bmatrix} \frac{H^2(1-H^2)}{\chi+H^4} & \frac{\chi(H^4-1)}{2(\chi+H^4)} \\ \frac{2}{(1+\chi)} \left( \chi \log H + \frac{(1-H^2)^2}{\chi+H^4} \right) & \frac{H^2(1-H^2)}{\chi+H^4} \end{bmatrix}$$

$$G_{2,1} = \begin{bmatrix} \frac{H(1+\chi)}{\chi+H^4} & 0 \\ \frac{2(1-H^2)}{H(\chi+H^4)} & \frac{1}{H} \end{bmatrix}$$

$$F_{1,k} = \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1+\chi)(\chi + H^{2+2k})H^{2-k} & (1-k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2+k} \\ (1-k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2-k} & -(1+\chi)(\chi + H^{2+2k})H^{2+k} \end{bmatrix}$$

$$F_{2,k} = \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} (1+\chi)(1-k^2)(H^2-1) & (1-k) \begin{pmatrix} (H^{2-2k}-1)(\chi + H^{2+2k}) \\ -(1-k^2)(H^2-1)^2 \end{pmatrix} \\ (1+k) \begin{pmatrix} (H^{2+2k}-1)(\chi + H^{2-2k}) \\ -(1-k^2)(H^2-1) \end{pmatrix} & (1+\chi)(1-k^2)(H^2-1) \end{bmatrix}$$

$$G_{1,k} = \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} (1+\chi)(H^2-1)H^2 & \frac{-1}{1+k} \begin{pmatrix} \chi(H^{2+2k}-1)(\chi + H^{2-2k}) \\ +(1-k^2)(H^2-1)^2 \end{pmatrix} \\ \frac{-1}{1-k} \begin{pmatrix} \chi(H^{2-2k}-1)(\chi + H^{2+2k}) \\ +(1-k^2)(H^2-1)^2 \end{pmatrix} & (1+\chi)(H^2-1)H^2 \end{bmatrix}$$

$$G_{1,k} = \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1+\chi)(\chi + H^{2-2k})H^k & (1-k)(H^2-1)(1+\chi)H^k \\ (1+k)(H^2-1)(1+\chi)H^{-k} & -(1+\chi)(\chi + H^{2+2k})H^{-k} \end{bmatrix}$$

*Deuxième problème mixte*

Pour  $k = 1$

$$\begin{Bmatrix} S_1^{(0)} \\ D_1^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{2,1} \\ G_{1,1} & G_{2,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1^{(1)} \\ D_1^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-45})$$

Pour  $k \in \{z - \{1\}\}$

$$\begin{Bmatrix} S_k^{(0)} \\ D_k^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,k} & F_{2,k} \\ G_{1,k} & G_{2,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_k^{(1)} \\ D_k^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-46})$$

Lorsque le cercle extérieur ( $C_0$ ) est rigide :  $D_k^{(0)} = 0 \quad \forall k \in N$

$$F_{1,1} = \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ \frac{2H(H^2-1)}{1+\chi H^4} & \frac{H(1+\chi)}{1+\chi H^4} \end{bmatrix}$$

$$F_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2(H^4-1)}{1+\chi H^4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{1,1} = \begin{bmatrix} \frac{(H^2 - 1)}{1 + \chi H^4} & \frac{\chi(1 - H^4)}{2(1 + \chi H^4)} \\ \frac{2}{(1 + \chi)} \left( \frac{(1 - H^2)^2}{1 + \chi H^4} - \chi \log H \right) & \frac{(H^2 - 1)}{1 + \chi H^4} \end{bmatrix}$$

$$G_{2,1} = \begin{bmatrix} \frac{H^3(1 + \chi)}{1 + \chi H^4} & 0 \\ \frac{2H^3(H^2 - 1)}{H(\chi + H^4)} & H \end{bmatrix}$$

$$F_{1,k} = \frac{1}{\Delta M'_k} \begin{bmatrix} -(1 + \chi)(1 + \chi H^{2+2k})H^{-k} & (1 - k)(1 - H^2)(1 + \chi)H^{-k} \\ (1 + k)(1 - H^2)(1 + \chi)H^k & -(1 + \chi)(1 + \chi H^{2-2k})H^k \end{bmatrix}$$

$$F_{2,k} = \frac{1}{\Delta M'_k} \begin{bmatrix} (1 + \chi)(1 - k^2)(1 - H^2)H^2 & (1 - k) \begin{pmatrix} (1 + \chi H^{2+2k})(1 - H^{2-2k}) \\ -(1 - k^2)(1 - H^2)^2 \end{pmatrix} \\ (1 + k) \begin{pmatrix} (1 + \chi H^{2-2k})(1 - H^{2+2k}) \\ -(1 - k^2)(1 - H^2)^2 \end{pmatrix} & (1 + \chi)(1 - k^2)(1 - H^2)H^2 \end{bmatrix}$$

$$G_{1,k} = \frac{1}{\Delta M'_k} \begin{bmatrix} (1 + \chi)(1 - H^2) & \frac{-1}{1 + k} \begin{pmatrix} \chi(1 - H^{2+2k})(1 + \chi H^{2-2k}) \\ +(1 - k^2)(1 - H^2)^2 \end{pmatrix} \\ \frac{-1}{1 - k} \begin{pmatrix} \chi(1 - H^{2-2k})(\chi + H^{2+2k}) \\ +(1 - k^2)(1 - H^2)^2 \end{pmatrix} & (1 + \chi)(1 - H^2) \end{bmatrix}$$

$$G_{1,k} = \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1 + \chi)(1 + \chi H^{2-2k})H^{2+k} & (1 - k)(1 - H^2)(1 + \chi)H^{2-k} \\ (1 + k)(1 - H^2)(1 + \chi)H^{2+k} & -(1 + \chi)(1 + \chi H^{2+2k})H^{2-k} \end{bmatrix}$$

## 8. Expressions des déplacements et des contraintes sur les frontières

Les développements en séries de Fourier complexes s'écrivent :

*Premier problème mixte :*

$$u_r^{(0)}(\theta) + i u_\theta^{(0)}(\theta) = \frac{R_0}{2\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k^{(0)} e^{ik\theta} = \frac{R_0}{2\mu} \left[ U_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} (U_k^{(0)} e^{ik\theta} + U_{-k}^{(0)} e^{-ik\theta}) \right] \quad (\text{II-47})$$

$$u_r^{(1)}(\theta) + i u_\theta^{(1)}(\theta) = 0 \quad (\text{II-48})$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(\theta) - i \sigma_{r\theta}^{(1)}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(1)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{II-49})$$

$$\sigma_{rr}^{(0)}(\theta) - i \sigma_{r\theta}^{(0)}(\theta) = -P + i \tau = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(0)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{II-50})$$

où  $P$  et  $\tau$  sont respectivement la pression et la contrainte de cisaillement visqueuse qu'exerce le fluide sur la surface externe du revêtement. Les coefficients de Fourier complexes se calculent par :

$$\sigma_k^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^{(0)} - i \sigma_{r\theta}^{(0)}) e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{II-51})$$

$$\bar{\sigma}_{-k}^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^{(0)} + i \sigma_{r\theta}^{(0)}) e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{II-52})$$

Si  $\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$ ,  $\sigma_k^{(0)} = \bar{\sigma}_{-k}^{(0)}$ .

*Deuxième problème mixte :*

$$u_r^{(1)}(\theta) + i u_\theta^{(1)}(\theta) = \frac{R_0}{2\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k^{(1)} e^{ik\theta} = \frac{R_1}{2\mu} \left[ U_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (U_k^{(1)} e^{ik\theta} + U_{-k}^{(1)} e^{-ik\theta}) \right] \quad (\text{II-53})$$

$$u_r^{(0)}(\theta) + i u_\theta^{(0)}(\theta) = 0 \quad (\text{II-54})$$

$$\sigma_{rr}^{(0)}(\theta) - i \sigma_{r\theta}^{(0)}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(0)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{II-55})$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(\theta) - i \sigma_{r\theta}^{(1)}(\theta) = -P + i \tau = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(1)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{II-56})$$

où  $P$  et  $\tau$  sont respectivement la pression et la contrainte de cisaillement visqueuse qu'exerce le fluide sur la surface interne du revêtement. Les coefficients de Fourier complexes se calculent par :

$$\sigma_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^{(1)} - i \sigma_{r\theta}^{(1)}) e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{II-57})$$

$$\bar{\sigma}_{-k}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^{(1)} + i \sigma_{r\theta}^{(1)}) e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{II-58})$$

si  $\sigma_{r\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_k^{(1)} = \bar{\sigma}_{-k}^{(1)}$ .

Le développement en série de Fourier réelles des contraintes radiales et tangentielles conduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(j)}(\theta) &= \frac{\alpha'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha'_k \cos k\theta + \beta'_k \sin k\theta) \\ \sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) &= \frac{\alpha''_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha''_k \cos k\theta + \beta''_k \sin k\theta) \end{aligned} \quad (\text{II-59})$$

$$\alpha'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^{(j)}(\theta) \cos(k\theta) d\theta \quad ; \quad \alpha''_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) \cos(k\theta) d\theta$$

$$\beta'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^{(j)}(\theta) \sin(k\theta) d\theta \quad ; \quad \beta''_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) \sin(k\theta) d\theta$$

Les relations (II-50) et (II-56) peuvent s'écrire :

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\theta) - i \sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(j)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(j)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(j)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(j)} e^{-ik\theta})$$

$$\sigma_k^{(j)} = \frac{1}{2} [(\alpha'_k - \beta''_k) + i(\beta'_k + \alpha''_k)] \quad , \quad \bar{\sigma}_{-k}^{(j)} = \frac{1}{2} [(\alpha'_k + \beta''_k) - i(\beta'_k - \alpha''_k)] \quad (\text{II-60})$$

ou bien :  $\sigma_k^{(j)} = R_k^{(j)} + i I_k^{(j)}$  ,  $\bar{\sigma}_{-k}^{(j)} = R_{-k}^{(j)} - i I_{-k}^{(j)}$  ,  $j = 0,1$

### 9. Calcul des champs de déplacement et de contraintes sur frontières

Nous allons d'abord déterminer les coefficients de Fourier  $U_k^{(j)}, U_{-k}^{(j)}, \sigma_k^{(j)} \text{ et } \bar{\sigma}_{-k}^{(j)}$ .

*Premier problème mixte :*

$$\begin{Bmatrix} U_k^{(0)} \\ U_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix} = [G_{1,k}] \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_k & G_k \\ G_{-k} & H_{-k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad k \in N \quad (\text{II-61})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{Bmatrix} = [F_{1,k}] \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_k & G'_k \\ G'_{-k} & H'_{-k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad k \in N \quad (\text{II-62})$$

Pour  $k = 1$

$$H_1 = H_{-1} = \frac{(1 - H^2)H^2}{\chi + H^4}$$

$$G_1 = \frac{\chi(H^4 - 1)}{2(\chi + H^4)}$$

$$G_{-1} = \frac{2}{(1 + \chi)} \left[ \chi \log H + \frac{(1 - H^2)^2}{\chi + H^4} \right]$$

$$H'_1 = H$$

$$H'_{-1} = \frac{(1 + \chi)H^3}{\chi + H^4}$$

$$G'_1 = 0$$

$$G'_{-1} = \frac{2H(1 - H^2)}{\chi + H^4}$$

Pour  $k \neq 1$

$$H_k = H_{-k} = \frac{1}{\Delta M_k} (1 + \chi)(H^2 - 1)H^2$$

$$G_k = -\frac{1}{(1 + k)} \frac{(1 - k^2)(H^2 - 1)^2 + \chi(H^{2+2k} - 1)(\chi + H^{2-2k})}{\Delta M_k}$$

$$G_{-k} = -\frac{1}{(1-k)} \frac{(1-k^2)(H^2-1)^2 + \chi(H^{2-2k}-1)(\chi+H^{2+2k})}{\Delta M_k}$$

$$H'_k = -\frac{(1+\chi)(\chi+H^{2+2k})H^{2-k}}{\Delta M_k}$$

$$H'_{-k} = -\frac{(1+\chi)(\chi+H^{2-2k})H^{2+k}}{\Delta M_k}$$

$$G'_k = \frac{(1-k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2+k}}{\Delta M_k}$$

$$G'_{-k} = \frac{(1+k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2-k}}{\Delta M_k}$$

Deuxième problème mixte :

$$\begin{cases} U_k^{(1)} \\ U_{-k}^{(1)} \end{cases} = [G_{1,k}] \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} H_k & G_k \\ G_{-k} & H_{-k} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases}, \quad k \in N \quad (\text{II-63})$$

$$\begin{cases} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{cases} = [F_{1,k}] \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} H'_k & G'_k \\ G'_{-k} & H'_{-k} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases}, \quad k \in N \quad (\text{II-64})$$

Pour  $k = 1$

$$H_1 = H_{-1} = \frac{(H^2-1)}{1+\chi H^4}$$

$$G_1 = \frac{\chi(1-H^4)}{2(1+\chi H^4)}$$

$$G_{-1} = \frac{2}{(1+\chi)} \left[ \frac{(1-H^2)^2}{1+\chi H^4} - \chi \log H \right]$$

$$H'_1 = H^{-1}$$

$$H'_{-1} = \frac{(1+\chi)H}{1+\chi H^4}$$

$$G'_1 = 0$$

$$G'_{-1} = \frac{2H(H^2 - 1)}{1 + \chi H^4}$$

Pour  $k \neq 1$

$$H_k = H_{-k} = \frac{1}{\Delta M'_k} (1 + \chi)(1 - H^2)$$

$$G_k = -\frac{1}{(1+k)} \frac{(1-k^2)(H^2-1)^2 + \chi(1-H^{2+2k})(1+\chi H^{2-2k})}{\Delta M'_k}$$

$$G_{-k} = -\frac{1}{(1-k)} \frac{(1-k^2)(H^2-1)^2 + \chi(1-H^{2-2k})(1+\chi H^{2+2k})}{\Delta M'_k}$$

$$H'_k = -\frac{(1+\chi)(1+\chi H^{2+2k})H^{-k}}{\Delta M'_k}$$

$$H'_{-k} = -\frac{(1+\chi)(1+\chi H^{2-2k})H^k}{\Delta M'_k}$$

$$G'_k = \frac{(1-k)(1-H^2)(1+\chi)H^{-k}}{\Delta M'_k}$$

$$G'_{-k} = \frac{(1+k)(1-H^2)(1+\chi)H^k}{\Delta M'_k}$$

Finalement, les déplacements et les contraintes peuvent s'exprimer :

*Premier problème mixte :*

$$\frac{2\mu}{R_0} (u_r^{(0)} + iu_\theta^{(0)}) = H_0 \sigma_0^{(0)} + G_0 \bar{\sigma}_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} [(H_k \sigma_k^{(0)} + G_k \bar{\sigma}_{-k}^{(0)}) e^{ik\theta} + (G_{-k} \bar{\sigma}_k^{(0)} + H_{-k} \sigma_{-k}^{(0)}) e^{-ik\theta}] \quad (\text{II-65})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} - i \sigma_{r\theta}^{(1)} &= H'_0 \sigma_0^{(0)} + G'_0 \bar{\sigma}_0^{(0)} + \\ &\sum_{k \geq 1} \left[ \left( H'_k \sigma_k^{(0)} + G'_k \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \right) e^{ik\theta} + \left( G'_{-k} \bar{\sigma}_k^{(0)} + H'_{-k} \sigma_{-k}^{(0)} \right) e^{-ik\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-66})$$

Deuxième problème mixte :

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_1} \left( u_r^{(1)} + i u_\theta^{(1)} \right) &= H_0 \sigma_0^{(1)} + G_0 \bar{\sigma}_0^{(1)} + \\ &\sum_{k \geq 1} \left[ \left( H_k \sigma_k^{(1)} + G_k \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \right) e^{ik\theta} + \left( G_{-k} \bar{\sigma}_k^{(1)} + H_{-k} \sigma_{-k}^{(1)} \right) e^{-ik\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-67})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} - i \sigma_{r\theta}^{(0)} &= H'_0 \sigma_0^{(1)} + G'_0 \bar{\sigma}_0^{(1)} + \\ &\sum_{k \geq 1} \left[ \left( H'_k \sigma_k^{(1)} + G'_k \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \right) e^{ik\theta} + \left( G'_{-k} \bar{\sigma}_k^{(1)} + H'_{-k} \sigma_{-k}^{(1)} \right) e^{-ik\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-68})$$

## 10. Cas particuliers

Si la contrainte tangentielle sur un cercle limite de la couronne est négligeable devant la contrainte radiale, on a :  $\alpha'_k = \beta'_k = 0$  pour  $k \in N$  et l'expression (II-60) devient :

$$\sigma_k = \bar{\sigma}_{-k} = \frac{1}{2} (\alpha'_k - i \beta'_k) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_k = \sigma_{-k} \quad (\text{II-69})$$

Les expressions (II-65), (II-66), (II-67) et (II-68) deviennent :

Premier problème mixte :

$$\begin{aligned} u_r^{(0)}(\theta) &= \frac{R_0}{2\mu} \text{Réel} \left\{ (H_0 + G_0) \sigma_0^{(0)} + \right. \\ &\left. \sum_{k \geq 1} (H_k + G_k) \sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k}) \bar{\sigma}_k^{(0)} e^{-ik\theta} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-70})$$

$$u_{\theta}^{(0)}(\theta) = \frac{R_0}{2\mu} \text{Imaginaire} \left\{ (H_0 + G_0)\sigma_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} (H_k + G_k)\sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k})\bar{\sigma}_k^{(0)} e^{-ik\theta} \right\} \quad (\text{II-71})$$

Deuxième problème mixte :

$$u_r^{(1)}(\theta) = \frac{R_1}{2\mu} \text{Réel} \left\{ (H_0 + G_0)\sigma_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (H_k + G_k)\sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k})\bar{\sigma}_k^{(1)} e^{-ik\theta} \right\} \quad (\text{II-72})$$

$$u_{\theta}^{(1)}(\theta) = \frac{R_1}{2\mu} \text{Imaginaire} \left\{ (H_0 + G_0)\sigma_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (H_k + G_k)\sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k})\bar{\sigma}_k^{(1)} e^{-ik\theta} \right\} \quad (\text{II-73})$$

Si la charge radiale est symétrique, on aura :

$$\alpha_k'' = \beta_k'' = \beta_k' = 0$$

$$\sigma_k^{(j)} = \sigma_{-k}^{(j)} = \bar{\sigma}_{-k}^{(j)} = \frac{\alpha_k'}{2} \in R, \quad \forall k \in N \quad (\text{II-74})$$

$$\frac{2\mu}{R_j} u_r^{(j)}(\theta) = (H_0 + G_0) \frac{\alpha_0'}{2} + \sum_{k \geq 1} (2H_k + G_k + G_{-k}) \frac{\alpha_k'}{2} \cos k\theta \quad (\text{II-75})$$

$$\frac{2\mu}{R_j} u_{\theta}^{(j)}(\theta) = \sum_{k \geq 1} (G_k - G_{-k}) \frac{\alpha_k'}{2} \sin k\theta \quad j = 0, 1$$

## 11. Modèle de la couche élastique mince

Si l'épaisseur de la couche élastique est très faible par rapport au rayon de l'arbre, le modèle de la couche mince peut être utilisé. On peut écrire :

$$H = \frac{R_0}{R_1} = \frac{R_1 + t_h}{R_1} = 1 + \varepsilon_0 \quad (\text{II-76})$$

avec  $\varepsilon_0 = t_h/R_1 \ll 1$  au  $t_h$  est l'épaisseur de la couche élastique.

Nous allons voir le comportement des coefficients  $H_k$  et  $G_k$  lorsque le rapport  $H$  tend vers 1 :  $R_0 \approx R_1$  avec  $R_0 > R_1$ .

*Premier problème mixte*

Lorsque  $H = 1 + \varepsilon$ , on aura :

Pour  $k = 1$

$$\begin{cases} H_1 = H_{-1} \approx \frac{-2\varepsilon}{1+\chi} \\ G_1 = G_{-1} \approx \frac{2\chi\varepsilon}{1+\chi} \end{cases}$$

Pour  $k \neq 1$

$$\begin{cases} H_k = H_{-k} \approx \frac{2\varepsilon}{1+\chi} \\ G_k = G_{-k} \approx \frac{2\chi\varepsilon}{1+\chi} \end{cases}$$

Les déplacements radiaux et tangentiels sur le cercle limite de rayon  $R_0$  sont :

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_0} u_r^{(0)}(\theta) = 2\varepsilon \text{ Réel} \left\{ \sigma_0^{(0)} + \frac{2\chi-1}{1+\chi} (\sigma_1^{(0)} e^{i\theta} + \bar{\sigma}_1^{(0)} e^{-i\theta}) + \right. \\ \left. \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(0)} e^{i\theta} + \bar{\sigma}_k^{(0)} e^{-i\theta}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-77})$$

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_0} u_\theta^{(0)}(\theta) = 2\varepsilon \text{ Imaginaire} \left\{ \sigma_0^{(0)} + \frac{2\chi-1}{1+\chi} (\sigma_1^{(0)} e^{i\theta} + \bar{\sigma}_1^{(0)} e^{-i\theta}) + \right. \\ \left. \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(0)} e^{i\theta} + \bar{\sigma}_k^{(0)} e^{-i\theta}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-78})$$

*Deuxième problème mixte*

Les nouvelles expressions de  $H_k$  et  $G_k$  sont :

$$\begin{cases} H_k = H_{-k} \approx \frac{2\varepsilon}{1+\chi} \\ G_k = G_{-k} \approx \frac{-2\chi\varepsilon}{1+\chi} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les déplacements radiaux et tangentiels sur le cercle limite de rayon  $R_1$  sont :

*Déplacement radial*

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_1} u_r^{(1)}(\theta) &= -\frac{2(1-\chi)}{1+\chi} \varepsilon \left[ \frac{\alpha'_0}{2} + \sum_{k>1} (\alpha'_k \cos k\theta + \beta'_k \sin k\theta) \right] \\ &= \frac{2(1-\chi)}{1+\chi} \varepsilon \sigma_{rr}^{(1)}(\theta) \end{aligned} \quad (\text{II-79})$$

ou bien :

$$u_r^{(1)}(\theta) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{t_h}{E} P(\theta) \quad \text{en déformations planes} \quad (\text{II-80})$$

$$u_r^{(1)}(\theta) = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} t_h P(\theta) \quad \text{en contraintes planes} \quad (\text{II-81})$$

*Déplacement tangentielle*

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_1} u_\theta^{(1)}(\theta) &= 2 \varepsilon \left[ \frac{\alpha''_0}{2} + \sum_{k>1} (\alpha''_k \cos k\theta + \beta''_k \sin k\theta) \right] \\ &= 2 \sigma_{r\theta}^{(1)}(\theta) \end{aligned}$$

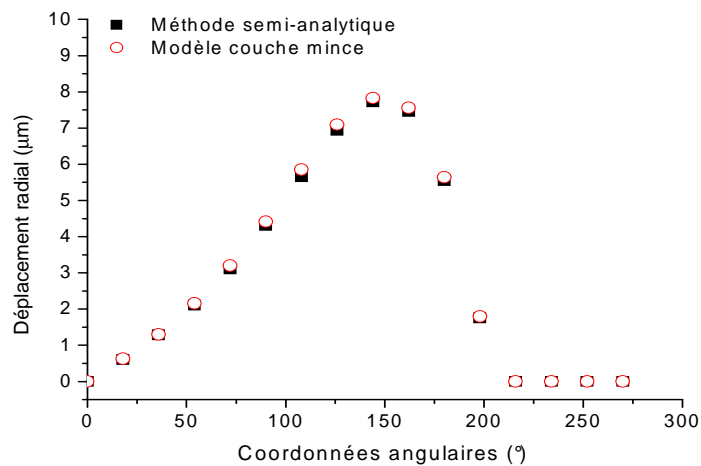
ou bien :

$$u_\theta^{(1)}(\theta) = -\frac{t_h}{\mu} \tau(\theta) = \frac{2(1+\nu)}{E} t_h \tau(\theta) \quad (\text{II-82})$$

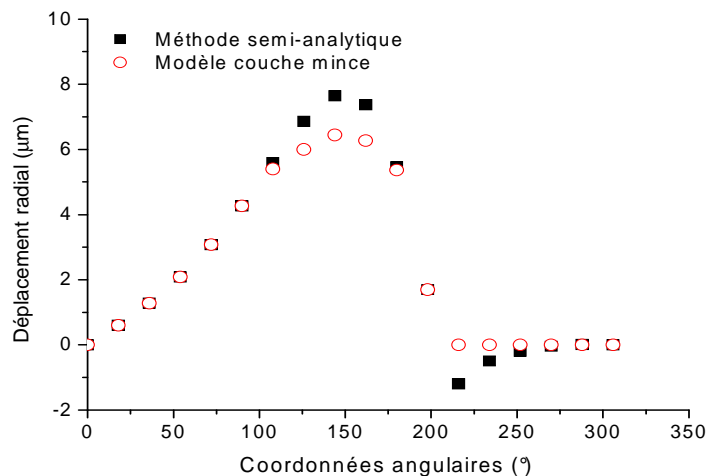
On constate que dans les expressions (II-80) et (II-82), les champs de déplacement radial et tangentiel sont proportionnels aux contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  et tangentiels  $\sigma_{r\theta}$ .

A partir de la relation (II-80), on peut également constater que le déplacement radial d'un point appartenant à la surface interne du coussinet est proportionnel à la pression existant en ce point et est indépendant des actions exercées sur son voisinage. Une comparaison entre la méthode semi-analytique et celle dite « couche mince », nous permet de vérifier la validité de cette dernière. Sur la surface interne de la couronne s'exerce un champ de pression assimilé au cas d'un palier lisse infiniment long ayant une excentricité relative  $\varepsilon = 0.65$ .

Les résultats obtenus par cette méthode nous amènent à conclure que pour une couche mince  $t_h = 8 \text{ mm}$  constituée d'un matériau compressible ( $\nu \approx 0,3$ ), les valeurs de déplacements radiaux sont en bonne concordance avec celles déterminées par la méthode semi-analytique (figure II.5). En revanche, pour une couche mince d'un matériau quasi-incompressible de  $1 \text{ mm}$  d'épaisseur ( $\nu \approx 0,49$ ), les valeurs de déplacement sont sous-estimées du fait que le modèle couche mince n'introduit pas l'effet de l'incompressibilité du matériau caractérisé par la présence d'un « bourrelet » à la sortie du film (figure II.6).



**Figure II.5 :** Variation circumférentielle du déplacement radial pour revêtement compressible



**Figure II.6 :** Variation circumférentielle du déplacement radial pour revêtement quasi-incompressible

## 12. Conclusion

La résolution des problèmes élastiques dans les paliers revêtus peut être effectuée par une approche semi-analytique. Cette approche fait intervenir les équations de l'élasto-statique linéaire dans le plan complexe pour la couronne circulaire. Les solutions en contrainte et en déplacements s'expriment à l'aide de deux fonctions holomorphes dites potentiels de Kolosov et Muskhelishvili. Il est intéressant de dire que cette approche est précises et ne nécessite pas une discrétisation spatiale dans le milieu étudié.

L'hypothèse d'une couche élastique mince nous a permis de déduire un modèle de calcul rapide pour des champs de déplacements radiaux et tangentiels. Ce modèle dit « couche mince » rend les champs de déplacements radiaux et tangentiels proportionnels à la pression (contrainte normale) et à la contrainte de cisaillement visqueuse (contrainte tangentielle).

## CHAPITRE III

### EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

#### ET APPLICATIONS POUR PALIERS LISSES

##### 1. Introduction

Dans ce chapitre nous mettons l'accent sur la présentation des équations de base spécifiques liées à l'étude de la lubrification hydrodynamique et celles qui gèrent l'état thermique des fluides et solides. En effet, il est intéressant de voir quelques applications concernant la lubrification au sein des paliers lisses hydrodynamiques traitant plusieurs cas dans la pratique tels que : palier à coussinet rigide, palier à coussinet déformable et palier mésaligné. D'autre part, les performances statiques telles que les composantes de la charge portante et la position que prend l'arbre dans le coussinet, seront présentées.

##### 2. Equation des films minces visqueux généralisée

L'équation de base utilisée en lubrification est l'équation des films minces visqueux. Celle-ci est déduite de la théorie des milieux continus en tenant compte de quelques hypothèses propres aux problèmes de lubrification. Les hypothèses de départ sont:

- le milieu fluide est supposé continu
- le fluide est supposé Newtonien.

La conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho V_i) = 0 \quad (\text{III-1})$$

La loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{III-2})$$

La loi de comportement rhéologique du fluide newtonien:

$$\sigma_{ij} = \left( -P + \lambda_L \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III-3})$$

La combinaison des équations (III-2) et (III-3) nous fournit l'équation de Navier – Stokes, soit:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \lambda_L \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \\ + \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_L}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

Si on suppose que le coefficient  $\mu$  est constant, comme le fluide est incompressible ( $2 \lambda_L + 3 \mu = 0$ ), on obtient alors sous forme symbolique une équation plus habituelle, à savoir:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho f + \mu \Delta V \quad (\text{III-5})$$

Les variables  $V, f$  sont des vecteurs,  $D/Dt$  une dérivée particulaire, soit:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V \quad (\text{III-6})$$

L'étape suivante de la mise en équation consiste à utiliser des variables adimensionnelles et à faire une mise en facteur de variable  $\varepsilon_d = H/L$  ( $H$  : la hauteur du film et  $L$  : longueur du palier ou des surfaces lubrifiées).

On néglige ensuite les termes de forces volumiques et les termes ayant pour facteur  $\varepsilon_d^2$ .

Soit les changements suivants [42]:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{H}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t V}{L} \\ \bar{V}_1 = \frac{V_1}{V}, \quad \bar{V}_2 = \frac{V_1 L}{V H}, \quad \bar{V}_3 = \frac{V_3}{V}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda_L}{\lambda_0} \end{aligned}$$

où  $L$  et  $V$  sont respectivement la dimension et la vitesse, caractéristiques du système lubrifié suivant les axes  $(O, x_1)$  et  $(O, x_2)$ .

En négligeant les termes  $\varepsilon_d^2$ , l'équation (III-4) prend la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} = -\varepsilon_d Re \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_j} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} = 0. \end{cases} \quad (i = 1 \text{ et } 3; j = 1, 3) \quad (\text{III-7})$$

avec  $Re$  nombre de Reynolds :  $Re = \rho \frac{VH}{\mu_0}$  et  $\bar{P} = \frac{PH^2}{\mu_0VL}$

Si on suppose que les forces d'inertie sont négligeables, le système d'équation (III-7) en variables dimensionnées s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} = \bar{V}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \mu \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_2} \right) \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} = 0. \end{cases} \quad (i = 1 \text{ et } 3) \quad (\text{III-8})$$

Il est intéressant de connaître les vitesses des parois (figure III.1) et d'utiliser l'équation de conservation de la matière (III-1). On intègre ensuite cette dernière et le système d'équation (III-8) suivant  $Ox_2$ .

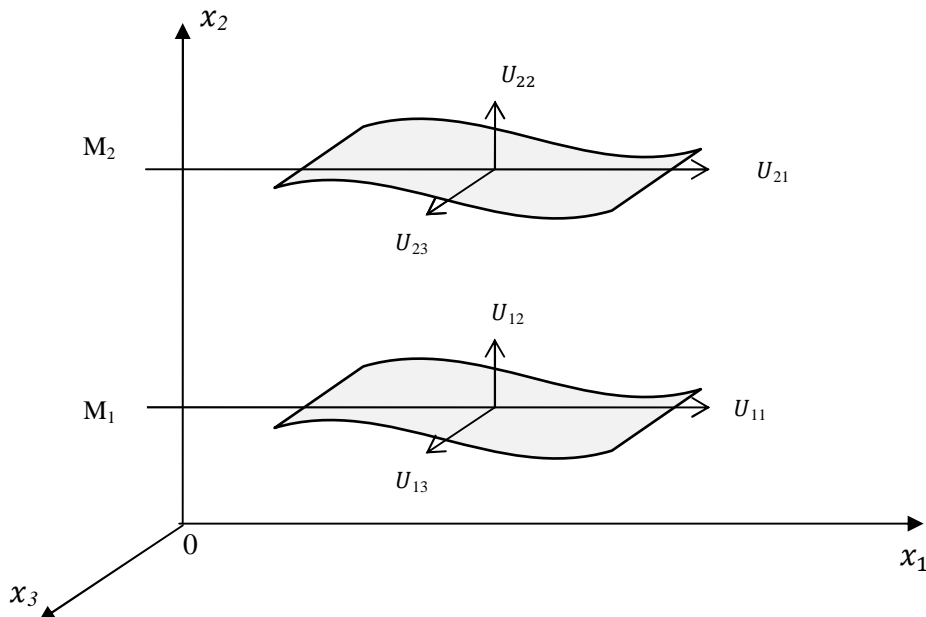


Figure III.1: Vitesses des surfaces lubrifiées [43]

L'équation (III-1) de la conservation de la masse devient:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho V_i) dx_2 + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 = 0 \quad (i = 1 \text{ à } 3) \quad (\text{III-9})$$

Le système (III-8) prend la forme [42] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( G \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} [V_{2i}(R_2 - F) + V_{1i}] + L + \rho_1 U_{1i} \frac{\partial H_1}{\partial x_i} - \\ - \rho_2 U_{2i} \frac{\partial H_2}{\partial x_i} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (i = 1 \text{ à } 3) \end{aligned} \quad (\text{III-10})$$

avec:

$$G = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R^* x_2}{\mu} dx_2 - I_2 F$$

$$R^* = \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi$$

$$R_2 = \int_{H_1}^{H_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi$$

$$I = \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi$$

$$I_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{x_2}{\mu(x_i, t)} dx_2$$

$$F = \frac{1}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R^*}{\mu} dx_2$$

$$J = \int_{H_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)}$$

$$L = \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_2) dx_2$$

$$J_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dx_2}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)}$$

Les composantes de la vitesse du fluide  $V_1$  et  $V_2$ , à une position  $x_2$  quelconque dans l'épaisseur du film s'écrivent:

$$V_1 = \frac{\partial P}{\partial x_1} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{V_{21} - V_{11}}{J_2} J + V_{11}$$

(III-11)

$$V_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{V_{23} - V_{13}}{J_2} J + V_{13}$$

Les critères d'écoulement de matières intégrées suivant l'épaisseur du film ont pour expression:

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho V_i dx_2 = R_2 V_{2i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} G - (V_{2i} - V_{1i}) F \quad (\text{III-12})$$

(i = 1 et 3)

Les contraintes de cisaillement sont:

$$\sigma_{i2} = \left( x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{V_{2i} - V_{1i}}{J_2} \quad (\text{III-13})$$

Les hypothèses qui ont servi à cette mise en équation ont été:

- le milieu continu
- le fluide Newtonien
- l'écoulement laminaire
- les forces massiques et les forces d'inertie négligeables
- la courbure négligée
- l'épaisseur de film d'huile faible devant les autres dimensions du palier ( $\varepsilon_d \ll 1$ ).
- le fluide adhère parfaitement aux parois.

### 3. Equation de l'énergie

L'équation qui régit l'évolution de la température au sein d'un fluide nécessite une approche énergétique. Pour ce faire, on utilise la loi de la conservation de l'énergie qui s'écrit, pour un milieu continu  $A(t)$  fonction du temps:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)} \rho \left( U_e + \frac{1}{2} V_i V_i \right) dV = \int_{A(t)} f_i V_i dV + \int_{A(t)} (T_i V_i + q) dS \quad (\text{III-14})$$

L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique et de la loi de Fourier en conduction, à savoir respectivement:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)} \frac{1}{2} V_i V_i dV = \int_{A(t)} \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} dV + \int_{A(t)} f_i V_i dV + \int_{A(t)} T_i V_i dS \quad (\text{III-15})$$

$$q = -q_i n_i = \frac{\partial(k_f T)}{\partial x_i} n_i \quad (\text{III-16})$$

permettent, par combinaison et l'utilisation de la formule de Green, d'aboutir à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)} \rho U_e dV = \int_{A(t)} \left[ \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (k_f T) \right] dV \quad (\text{III-17})$$

avec:  $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  le tenseur des taux de vitesses de déformation.

Après l'utilisation de condition de régularité sur la quantité  $\rho V_i V_i$  et sur le domaine  $A(t)$  pour effectuer le passage de la dérivation sous le signe somme et l'emploi de l'hypothèse de la continuité des intégrantes, l'équation (III-17) devient [42] :

$$\rho \frac{dU_e}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (k_f T) \quad (\text{III-18})$$

Dans le cas d'un fluide Newtonien, on a pour loi rhéologique:

$$\sigma_{ij} = (-P + \lambda_L \text{tr} \dot{\gamma}_{ij}) \delta_{ij} + 2 \mu \dot{\gamma}_{ij} \quad (\text{III-19})$$

où:  $\text{tr} \dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{11} + \dot{\gamma}_{22} + \dot{\gamma}_{33}$

Cette équation introduite dans l'expression de (III-18) nous conduit à l'équation:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_d T \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial k_f}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda_L \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III-20})$$

(i, j = 1 à 3)

Lorsque l'on considère cette équation dans le cas d'un film d'huile, où l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions, celle-ci s'écrit:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \alpha_d T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + V_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k_f \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \mu \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \quad (\text{III-21})$$

(i = 1 et 3)

#### 4. Equation de Reynolds

On suppose maintenant que:

- la température ne varie pas suivant l'épaisseur du film
- la masse volumique et la viscosité ne varient pas suivant l'épaisseur du film et ne sont fonction que de la température et de la pression
- la vitesse du fluide est tangente en tout point aux parois

- en plaçant l'origine des systèmes d'axes sur l'une des parois tels que  $H_1 = 0$  et  $H_2 = h$ .

L'équation (III-10) prend la forme:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = 6 \rho (V_{1i} - V_{2i}) \frac{\partial h}{\partial x_i} + 6 h \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho(V_{1i} + V_{2i})] + 12 \rho V_{22} + 12 h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{III-22})$$

(i=1 ou 3)

Les composantes des vitesses du fluide (III-11) deviennent :

$$V_i = \frac{1}{2 \mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} x_2 (x_2 - h) + \frac{h - x_2}{h} V_{1i} + \frac{x_2}{h} V_{2i} \quad (\text{III-23})$$

(i=1 ou 3)

Les composantes des contraintes (III-13) deviennent aussi :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_i} (2 x_2 - h) + (V_{2i} - V_{1i}) \frac{\mu}{h} \quad (\text{III-24})$$

(i=1 ou 3)

Dans l'équation (III-22) :

$6 \rho (V_{1i} - V_{2i}) \partial h / \partial x_i$  représente l'effet de l'inclinaison des parois suivant la direction  $x_i$ .

Cette effet se traduit par une variation de débit massique ;

$6 h \partial[\rho(V_{1i} + V_{2i})] / \partial x_i$  représente la variation de débit massique suivant la direction  $x_i$ .

## 5. Equation de transfert de chaleur

L'équation qui régit la transmission de la chaleur par conduction thermique en régime transitoire dans un milieu solide, s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{sx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{sy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{sz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho_s C_{Ps} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III-25})$$

Elle s'écrit aussi en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k_{sr} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k_{s\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{sz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho_s C_{Ps} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III-26})$$

où  $k_{sxyz}$  et  $k_{sr\theta z}$  représentent la conductivité thermique du solide.

## 6. Variation de la viscosité avec la température

Assez souvent, les fabricants d'huile définissent la viscosité cinématique et la masse volumique de leurs fluides par des mesures à deux températures (en général 40 °C et 100 °C). Soit par exemple une relation du type :

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \quad (\text{III-27})$$

Cette relation ne reste valable que localement près des points d'identification des paramètres de cette expression. Initialement cette relation a été proposée par Reynolds sous la forme :

$$\mu = \mu_0 e^{-aT} \quad (\text{III-28})$$

où  $a$  est une constante de thermo-viscosité.

On cite aussi l'approche de Groff qui consiste à employer une relation du type :

$$\mu = \mu_0 e^{(-E/T)} \quad (\text{III-29})$$

avec  $E = a + bT + cT^2$  ainsi,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes définies [42].

## 7. Lois de variation viscosité-pression

Les huiles lubrifiantes, dans leur majorité, sont piézovisqueuses, c'est à dire que leur viscosité monte avec la pression. Dans le cas des paliers, la pression peut dépasser 200 MPa, ce qui peut avoir des influences non-négligeables sur la viscosité. La viscosité peut varier en fonction de la pression selon une relation exponentielle ou même polynomiale. En 1893, Barus décrit la loi exponentielle :

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha_p P} \quad (\text{III-30})$$

où  $P$  étant la pression,  $\mu_0$  étant la viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique et  $\alpha_p$  étant le coefficient de piézoviscosité qui dépend de l'huile et qui est compris généralement entre 5 et 40  $GPa^{-1}$ .

La loi polynomiale peut s'écrire :

$$\mu = \mu_0 (1 + c_2 P)^{c_1} \quad (\text{III-31})$$

avec  $c_1, c_2$  des coefficients caractéristiques du lubrifiant [42].

$$\log_{10}[\log_{10}(\nu + a)] = -m \log_{10} T + a \quad (\text{III-32})$$

La relation (III-32) a été proposée par Mac Coull et Walther.  $\nu$  étant la viscosité cinématique,  $a, m$  et  $n$  étant des constantes qui dépendent du lubrifiant et  $T$  étant la température absolue en degrés kalvin ( $K$ ).

### 8. Applications au cas d'un palier lisse

Dans le cas d'un palier lisse, la surface du coussinet est prise comme système de référence. L'origine étant confondue avec le point d'épaisseur maximale du film dans la section médiane du palier. L'axe  $Ox$  doit être tangent en l'origine  $O$  au coussinet, l'axe  $Oy$  étant colinéaire à la ligne des centres (figure III.2). En prenant pour hypothèses un régime isotherme, un lubrifiant incompressible et une viscosité ne variant pas selon l'épaisseur du film, l'équation de Reynolds généralisée se réduit alors à l'équation de Reynolds simplifiée qui, dans un repère cartésien, prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \left[ (U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2V_2 \right] \quad (\text{III-33})$$

où  $U_2$  et  $V_2$  sont respectivement les vitesses de l'arbre suivant  $x$  et  $y$  et  $U_1$  la vitesse du coussinet suivant  $x$  tels que :

$$U_2 = R_a \omega_a, \quad U_1 = R_c \omega_c, \quad V_2 = U_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

Si le coussinet est fixe, l'équation (III-33) devient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \omega_a \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{III-34})$$

où :  $\theta = x/R$  coordonnée angulaire et  $R \approx R_a \approx R_c$ .

Après avoir abouti à cette forme réduite de l'équation de Reynolds qui régit le comportement hydrodynamique du palier en régime laminaire, il est aussi intéressant de dire que l'équation (III-34) pourrait être généralisée en prenant les mêmes hypothèses citées ci-dessus, si nous avons le cas des vitesses de rotation très importantes. Ceci implique en fait, un nombre de Reynolds important nécessitant un régime d'écoulement turbulent. Dans ce cas, l'équation de Reynolds devient [40]:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \omega_a \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{III-35})$$

avec :  $k_x$  et  $k_z$  étant des coefficients qui dépendent du nombre de Reynolds  $Re_L$  [40]:

$$\begin{cases} k_x = 12 + 0.0136 Re_L^{0.9} \\ k_z = 12 + 0.0043 Re_L^{0.96} \end{cases}$$

avec :  $Re_L = \rho \omega_a R h / \mu$

En régime laminaire, nous avons :  $k_x = k_z = 12$

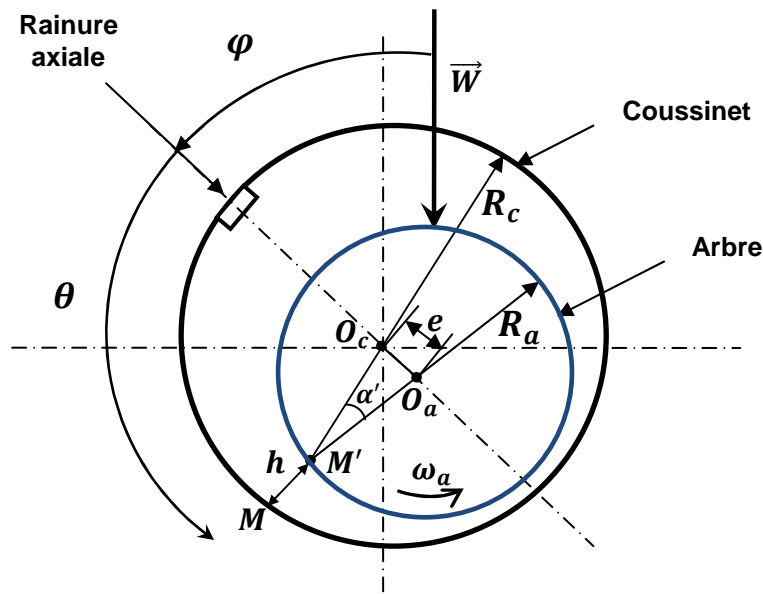


Figure III.2: Section droite du palier

## 9. Epaisseur du film lubrifiant

### 9.1. Palier rigide

Nous allons maintenant développer l'expression de l'épaisseur du film lubrifiant pour un palier aligné. A partir de la figure III-2, cette épaisseur est [40]:

$$h = O_c M - O_c M' = R_c - O_c M' = R_a + C - O_c M'$$

On peut aussi écrire :

$$\frac{e}{\sin \alpha_1} = \frac{R_a}{\sin (M' O_a O_c)} = \frac{R_a}{\sin (\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta}$$

d'où  $\sin \alpha_1 = \frac{e}{R_a} \sin \theta$  et  $O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin (\theta - \alpha_1)$

or

$$\theta - \alpha_1 = \theta - \arcsin \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)$$

$$O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin \left[ \theta - \arcsin \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right]$$

En développant le sinus, on obtient :

$$O_c M' = R_a \sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2} - e \cos \theta$$

On constate que la quantité  $e/R_a$  est très petite devant  $10^{-3}$ , il se peut donc que le terme  $(e \sin \theta / R_a)^2$  soit négligeable devant 1. L'épaisseur du film s'écrit alors :

$$h = C (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\text{III-36})$$

où l'excentricité relative :  $\varepsilon = e/C$  comprise entre 0 et 1 ( $0 < \varepsilon < 1$ ). Il faut signaler que cette relation n'est valable que lorsque  $C/R \ll 1$ .

## 9.2. Palier rigide mésaligné

Dans un palier lisse, les axes du coussinet et de l'arbre ne sont pas toujours parallèles (figure III.3). Pratiquement, il existe souvent un mésalignement à cause de mauvais alignement des paliers, déformation élastique ou thermique de l'arbre ou couples extérieurs.

Nous avons vu ci-dessus que dans le cas d'un palier aligné, l'épaisseur du film lubrifiant se caractérise par un seul paramètre : l'excentricité relative  $\varepsilon = e/C$ , en revanche pour un palier mésaligné, il est nécessaire d'utiliser trois paramètres [40] :

- l'excentricité relative  $\varepsilon$  dans le plan médian
- le module de la projection de la ligne des centres de l'arbre sur le plan défini par la section médiane  $d_m$  (figure III.4)
- l'angle  $\psi$  que fait la projection de la ligne des centres de l'arbre avec la ligne des centres de la section médiane (figure III.3).

Généralement, le torseur de forces extérieures agissant sur le coussinet peut être réduit à une charge verticale agissant dans le plan médian du coussinet.

Nous pouvons aisément repérer la position de l'axe de l'arbre par rapport à celle du coussinet par l'intermédiaire de deux angles  $\alpha_1$  et  $\gamma_1$  et de la distance  $O_c C_0 = e_0$ .  $\gamma_1$  est l'angle que fait la droite  $(C_1 C_0 C_2)$  avec sa projection sur le plan  $yo_z$ ,  $\alpha_1$  est l'angle que fait cette projection avec l'axe  $Oz$  et  $e_0$  est l'excentricité dans la section médiane  $e_0 = |O_c C_0|$ .

On sait bien que  $\alpha_1$  et  $\gamma_1$  sont très petits (de l'ordre  $10^{-4}$  radians), nous préférons utiliser d'autres paramètres de mésalignement.  $\psi$  étant l'angle que fait la projection de la ligne des centres de l'arbre sur le plan  $xoz$  et  $d_m$  étant appelé amplitude de mésalignement  $d = |C_1 C_2|$ . Nous pouvons aussi poser  $\delta = d_m/C$  qui est le mésalignement relatif.

Les paramètres  $\alpha_1$ ,  $\psi$ ,  $\gamma_1$  et  $d_m$  sont liés par les relations :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{d_m}{C} \cos \psi \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{d_m \sin \psi}{\sqrt{L^2 + d_m^2 \cos^2 \psi}}$$

où  $L = |O_1 O_2|$

L'amplitude maximale de  $d_m$  est fonction de  $C$ ,  $e_0$  et  $\psi$

$$\delta_{max} = \frac{d_{max}}{C} = 2 \left( \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \psi} - \varepsilon |\cos \psi| \right) \quad (\text{III-37})$$

où  $0 < \varepsilon < 1$

$$-180^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$$

$$0 \leq \delta \leq \delta_{max}$$

Lorsqu'il y a une symétrie par rapport au mi-plan défini par la section médiane, l'intervalle de variation peut être réduit à  $\mp 90^\circ$ .

Le rapport  $\delta/\delta_{max} = D_m$  représente le degré de mésalignement ( $0 < D_m < 1$ )

En fin, l'épaisseur du film lubrifiant s'exprime par [42] :

$$h(\theta, z) = C[1 + \varepsilon \cos \theta + \delta z^* \cos(\theta - \psi)] \quad (\text{III-38})$$

Avec  $z^* = z/L$

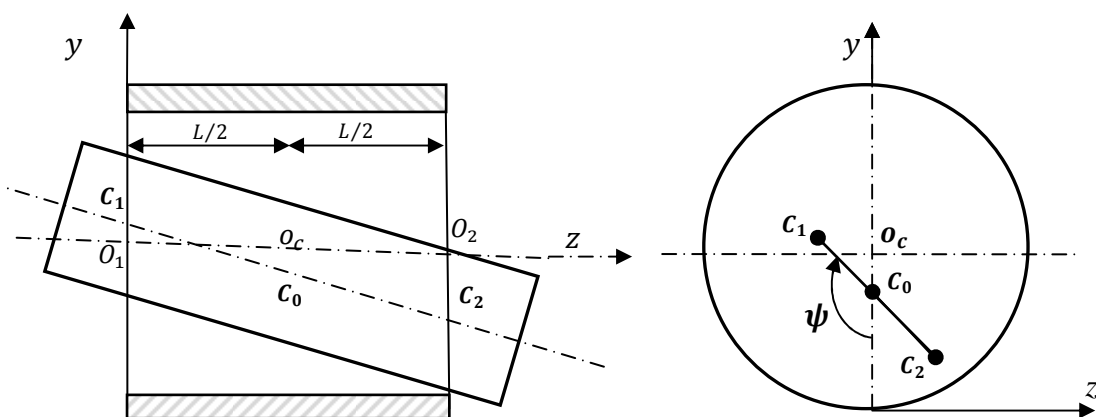


Figure III.3 : Schéma d'un palier mésaligné

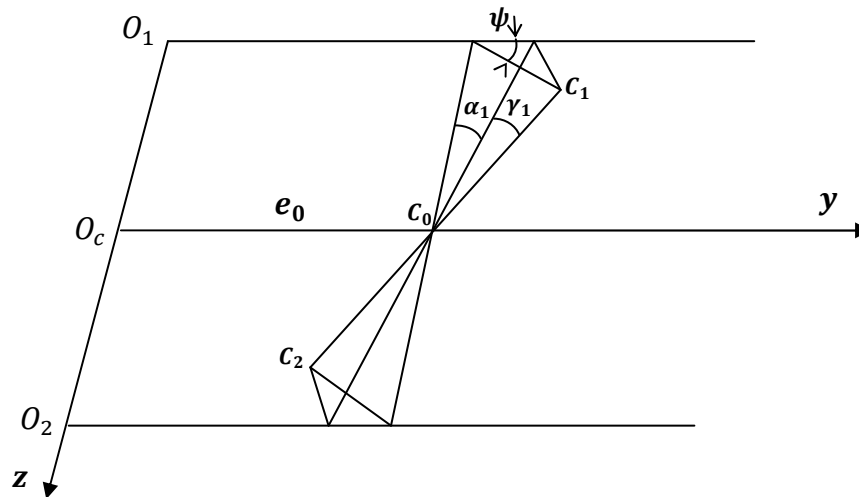


Figure III.4: Schéma de projection de l'axe sur le plan  $yOz$

### 9.3. Palier déformable aligné

Les coussinets sont pratiquement constitués de revêtements élastiques qui peuvent être métalliques (alliage antifriction) ou en élastomère (caoutchouc). L'arbre est souvent supposé rigide (indéformable). Le champ de pression hydrodynamique engendré dans le film d'huile par la rotation de l'arbre, peut provoquer des déformations élastiques qui sont de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du film.

Pour des pressions importantes, les surfaces ne sont plus rigides et les paliers peuvent être considérés élastiques. Pour un palier élastique l'épaisseur du film tient compte de la déformation des surfaces sous l'effet de la pression hydrodynamique. L'épaisseur totale du film s'écrit dans ce cas [34] :

$$h(\theta, z) = h_0(\theta, z) + h_e(\theta, z) \tag{III-39}$$

L'épaisseur élastique  $h_e(\theta, z)$  est fonction de la pression dans tout le film. C'est pour cela que  $h_e(\theta, z)$  dépend de la coordonnée axiale.

La relation (III-39) s'écrit aussi :

$$h(\theta, z) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) + U_r(\theta, z) \tag{III-40}$$

où :  $U_r$  étant le déplacement radial du coussinet. Si le rapport de l'épaisseur du revêtement au rayon du palier  $t_h/R$  est très faible devant 1 ( $t_h/R \ll 1$ ), les déformations radiales sont [39] :

$$U_r(\theta, z) = \left[ \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \right] \frac{t_h}{E} P(\theta, z) \quad (\text{III-41})$$

où  $\nu$ ,  $E$  et  $P$  étant respectivement le coefficient de Poisson, le module de Young du matériau et la pression hydrodynamique.

#### 9.4. Palier déformable mésaligné

Dans le cas d'un palier mésaligné ayant un coussinet élastique ou déformable, l'expression de l'épaisseur du film s'écrit [40]:

$$h(\theta, z) = C[1 + \varepsilon \cos \theta + \delta z^* \cos(\theta - \psi)] + U_r(\theta, z) \quad (\text{III-42})$$

### 10. Performances statiques

#### 10.1. Composantes de la portance HD

Notre système doit être en équilibre à chaque moment du cycle. Cet équilibre peut s'écrire vectoriellement en prenant en compte les forces extérieures agissant sur le palier et la force résultante des actions de la pression hydrodynamique.

Les composantes du vecteur contrainte  $t_v(M_2, n_2)$  dans le repère  $(x, y, z)$  dont les vecteurs de base  $(i, j, k)$  (figure III.2) sont :

$$\begin{aligned} t_v(M_2, n_2) &= [\sigma] \begin{Bmatrix} \sin \alpha' \\ -\cos \alpha' \end{Bmatrix} \\ &= \left( -P \sin \alpha' - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha' \right) i + \left( P \cos \alpha' + \sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha' \right) j \end{aligned}$$

où

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha' & \cos \alpha' \\ -\cos \alpha' & \sin \alpha' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}$$

et à partir de la figure III.2, on peut tirer :

$$\begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha' & \cos \alpha' \\ -\cos \alpha' & \sin \alpha' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Après de nombreuses manipulations et compte tenu de  $\alpha' \ll 1$ , on aura :

$$t_v(M_2, n_2) = \begin{Bmatrix} P \cos \theta \\ P \sin \theta \end{Bmatrix}_{\varepsilon, \varphi} \quad (\text{III-43})$$

Les composantes de la portance hydrodynamique dans le repère  $(\varepsilon, \varphi)$  peuvent être données par l'intégration du champ de pression :

$$F_\varepsilon = -R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) \cos \theta \, d\theta \, dz \quad (\text{III-44})$$

$$F_\varphi = R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) \sin \theta \, d\theta \, dz \quad (\text{III-45})$$

ce qui permet de calculer la résultante  $W_r$  :

$$W_r = \sqrt{F_\varepsilon^2 + F_\varphi^2} \quad (\text{III-46})$$

## 10.2. Angle de calage

L'angle de calage du palier, qui donne la position de l'arbre dans le coussinet (figure III.2), peut être déterminé par :

$$\varphi = \tan^{-1} \left( -\frac{F_\varphi}{F_\varepsilon} \right) \quad (\text{III-47})$$

## **11. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations de base qui peuvent être utilisées en tribologie au sein des paliers lisses, telles que l'équation des films minces visqueux, l'équation de l'énergie et l'équation de la conservation de la masse, ainsi que l'équation de la chaleur qui régit l'évolution de la température dans les solides. Ces équations vont être intégrées par la suite pour calculer la répartition de pression et de température au sein des paliers.

Nous avons mis en évidence certaines applications pour paliers lisses, telles que palier rigide, palier à coussinet déformable, palier rigide mésaligné et palier déformable mésaligné. Celles-ci rendent l'équation de Reynolds plus simplifiée et permettent en fait, d'analyser le comportement statique d'un palier hydrodynamique soumis à de conditions sévères.

## CHAPITRE IV

### SOLUTION DU PROBLEME ELASTO-HYDRODYNAMIQUE (EHD)

#### 1. Introduction

Nous examinons dans ce chapitre, l'influence des défauts de forme dus aux déformations élastiques sur les performances statiques d'un palier lisse de longueur finie très chargé radialement. Nous considérons que le coussinet est déformable à cause d'un revêtement élastique mince qui est placé sur la surface interne du coussinet, par contre l'arbre est supposé rigide. Lorsque les pressions engendrées dans le film sont très étendues, nous sommes en présence d'un contact lourdement chargé qui peut lui-même provoquer des modifications non négligeables dans la géométrie du contact. La détermination du champ de pression existant à l'intérieur du film fluide conduit à la résolution simultanée de :

- L'équation hydrodynamique de Reynolds qui définit le comportement du fluide
- L'équation géométrique qui définit l'épaisseur du film lubrifiant.

Nous calculons dans un premier temps, la répartition de la pression hydrodynamique dans le palier pour une géométrie non déformée (palier parfaitement cylindrique), puis nous déterminons par l'utilisation du modèle « couche mince », les déplacements élastiques du revêtement de surface dus aux pressions hydrodynamiques. Ces déplacements permettent de recalculer une nouvelle géométrie puis un nouveau champ de pression. Ce processus itératif ainsi défini ne converge généralement pas. Pour assurer la convergence, nous ne devons prendre en compte qu'une petite partie de déplacements calculés, ce qui peut être analogue aux méthodes itératives de relaxation.

Pour trouver la solution d'un problème EHD isotherme, il est nécessaire de déterminer, d'une part le champ de pression du film lubrifiant et le champ de déplacements radiaux d'autre part. Afin que nous puissions assurer une convergence rapide, nous devons résoudre au préalable le problème hydrodynamique isotherme sans tenir compte des déformations élastiques et des effets thermiques dans le contact.

## 2. Résolution du problème hydrodynamique (HD)

Dans ce paragraphe, la procédure de résolution du problème HD par la méthode des différences finies est présentée. Comme il a été indiqué dans le chapitre (III), les hypothèses essentielles seront :

- la température ne varie pas suivant l'épaisseur du film ;
- la masse volumique et la viscosité ne varient pas suivant l'épaisseur du film et ne sont fonction que de la température et de la pression ;
- la vitesse du fluide est tangente en tout point aux parois en plaçant l'origine des systèmes d'axes sur le coussinet.

### 2.1. Méthode des différences finies

Pour des raisons de discrétisation de l'équation aux dérivées partielles de Reynolds, il est intéressant de modifier celle-ci. Pour un palier de longueur finie tournant à vitesse constante l'équation de Reynolds, pour un fluide iso-visqueux et de masse volumique constante s'écrit [42]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 12 \mu \pi r N \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{IV-1})$$

Les variables utilisées sont décrites sur la figure IV.1.

Posons :

$$x = R \theta, \quad z = R \eta, \quad \varepsilon = \frac{e}{C_R}, \quad \theta \text{ variant de } 0 \text{ à } 2\pi \text{ et } \eta \text{ variant de } 0 \text{ à } \frac{L}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (1 + \varepsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 + \varepsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] = 12 \pi \mu N \left( \frac{R}{C_R} \right)^2 \frac{d(1 + \varepsilon \cos \theta)}{d\theta}$$

Posons :

$$\bar{P} = \frac{P}{\mu N} \left( \frac{C_R}{R} \right)^2$$

L'équation devient en développant les dérivées et compte tenu du fait que pour un palier rigide  $\partial(1 + \varepsilon \cos \theta)^3 / \partial \eta = 0$  :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \eta^2} - \frac{3 \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \frac{12 \pi \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

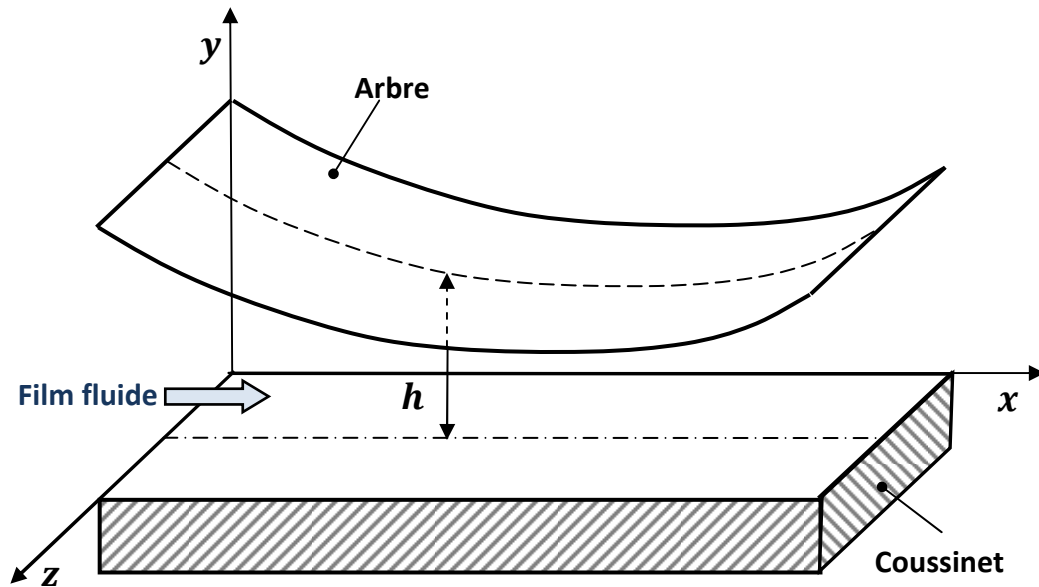


Figure IV.1 : Palier lisse développé

## 2.2. Discrétisation numérique

La résolution numérique de l'équation (IV-2) par la méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées exactes par des différences finies approchées en utilisant un certain pas de calcul. Ces différences sont construites à partir du développement de Taylor en  $x$  et en  $z$  de la fonction  $\bar{P}(x, z)$ . Soit donc pour la fonction  $\bar{P}(x, z)$  :

$$\bar{P}(x + \Delta x, z) = \bar{P}(x, z) + \Delta x \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} + \dots$$

La dérivation de  $\bar{P}$  peut, en relation avec cette formule, s'exprimer par :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\bar{P}(x + \Delta x, z) - \bar{P}(x, z)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} + \dots$$

qui peut s'écrire : 
$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\bar{P}(x + \Delta x, z) - \bar{P}(x, z)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

ou bien : 
$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\bar{P}(x, z) - \bar{P}(x - \Delta x, z)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Dans le cas d'un schéma centré, la dérivée discrétisée vaut :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \approx \frac{\bar{P}(x + \Delta x, z) - \bar{P}(x - \Delta x, z)}{2 \Delta x}$$

et : 
$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} \approx \frac{\bar{P}(x + \Delta x, z) - 2\bar{P}(x, z) + \bar{P}(x - \Delta x, z)}{(\Delta x)^2}$$

La discrétisation de l'équation aux dérivées partielles nécessite de construire sur le domaine d'intégration un quadrillage de points sur lesquels on appliquera la formule de Taylor. Dans le cas du coussinet, le domaine est un rectangle de dimension :

$$2 \pi R, \quad \frac{L}{2}$$

La discrétisation est alors effectuée suivant le schéma ci-dessous (figure IV.2) où un point est désigné par ses coordonnées  $i b$  et  $j c$ . La valeur  $\bar{P}$  au point A sera exprimée par  $\bar{P}_A = \bar{P}(i, j)$ . Les termes  $b$  et  $c$  correspondent à :  $b = \Delta \theta$  et  $c = \Delta \eta$ .

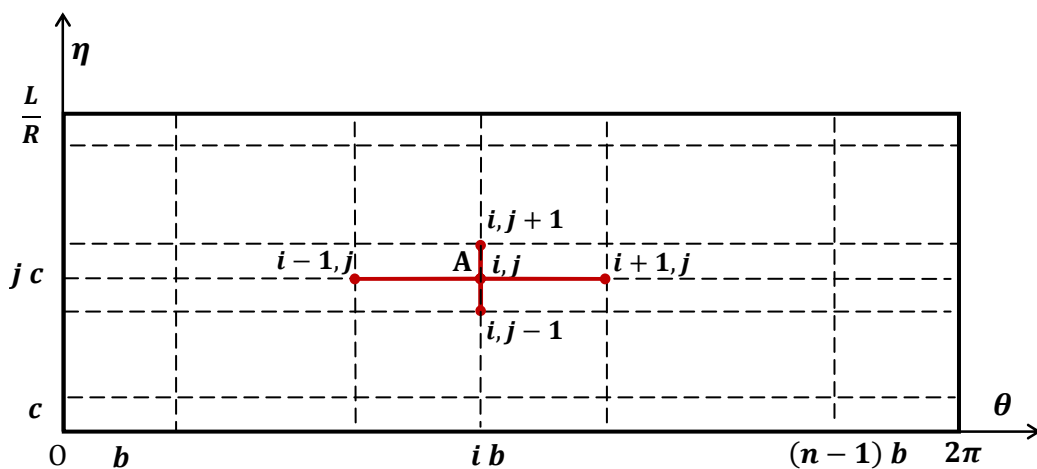


Figure IV.2 : Schéma de discrétisation du palier

En posant :

$$f(i) = \frac{3 \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)}$$

et :

$$g(i) = \frac{12 \pi \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$$

et compte tenu que  $\theta = \theta(i)$ , l'équation de Reynolds (IV-2) devient pour un schéma de discrétisation centré, au point A :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2} [\bar{P}(i+1, j) - 2\bar{P}(i, j) + \bar{P}(i-1, j)] + \frac{1}{c^2} [\bar{P}(i, j+1) - 2\bar{P}(i, j) + \bar{P}(i, j-1)] \\ - \frac{f(i)}{2b} [\bar{P}(i+1, j) - \bar{P}(i-1, j)] + g(i) = 0 \end{aligned} \quad (IV-3)$$

En regroupant les termes  $\bar{P}(i, j)$  on obtient :

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \bar{P}(i, j) = \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{f(i)}{2b} \right] \bar{P}(i+1, j) + \left[ \frac{1}{b^2} + \frac{f(i)}{2b} \right] \bar{P}(i-1, j) + \\ + \frac{1}{c^2} \bar{P}(i, j+1) + \frac{1}{c^2} \bar{P}(i, j-1) + g(i) \end{aligned} \quad (IV-4)$$

d'où, un système d'équations de la forme :

$$[A]\{\bar{P}\} = \{B\} \quad (IV-5)$$

### 2.3. Procédé de résolution

Dans la pratique, les discrétisations s'effectuent sur des maillages fins pour des raisons de précision, et de ce fait conduisent à des systèmes linéaires de tailles importantes. Afin de profiter du fait que dans ces systèmes, la matrice  $A$  est à diagonale dominante, on utilise une méthode itérative pour la résolution de ce type de système.

Le principe de méthode est:

- L'imposition des conditions aux limites sur les nœuds concernés
- La supposition d'une valeur quelconque aux termes  $\bar{P}^0(i, j)$  respectant cependant une certaine valeur de l'angle de calage  $\varphi$
- Le calcul des termes  $\bar{P}^1(i, j)$  à partir des termes  $\bar{P}^0(i, j)$  introduits dans le second membre.

L'itération est menée jusqu'à ce que l'erreur relative  $err$  entre n'importe quelle valeur  $\bar{P}(i, j)$  à l'itération  $n$  et la valeur  $\bar{P}(i, j)$  à l'itération  $n + 1$  soit inférieure à une valeur très faible, soit en général :

$$err = \frac{\max |\bar{P}^{n+1}(i, j) - \bar{P}^n(i, j)|}{\bar{P}^n(i, j)} \leq eps \quad (IV-6)$$

Toutefois, on améliore la rapidité de convergence de ce procédé itératif par différentes techniques. La technique la plus en cour aujourd'hui est celle dite de sur-relaxation. Elle est définie par (IV-7) [42]:

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \bar{P}^{n+1}(i, j) = & 2(1 - \omega) \left[ \frac{1}{b^2} + \frac{f(i)}{2b} \right] \bar{P}^n(i, j) + \omega \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{f(i)}{2b} \right] \bar{P}^n(i + 1, j) + \\ & + \omega \left[ \frac{1}{b^2} + \frac{f(i)}{2b} \right] \bar{P}^{n+1}(i - 1, j) + \omega \left[ \frac{1}{c^2} \bar{P}^n(i, j + 1) + \frac{1}{c^2} \bar{P}^{n+1}(i, j - 1) + g(i) \right] \end{aligned} \quad (IV-7)$$

où  $\omega$  est appelé facteur de sur-relaxation si  $2 > \omega > 1$ , et facteur de sous-relaxation pour  $0 < \omega < 1$ .

Lorsque la géométrie du palier développé est devenue très simple, nous pouvons aisément mettre en place un maillage bien approprié. Nous choisissons donc 41 points pour la direction angulaire, 41 points pour la direction axiale. Le critère de convergence pour le calcul de la pression relative est  $10^{-5}$ .

### 3. Solution du problème élasto-hydrodynamique pour un palier

#### 3.1. Géométrie et cinématique du palier

La figure (IV.3) présente les détails géométriques et cinématiques du palier lisse.  $R_a$ ,  $R_c$  et  $t_h$  représentent respectivement les rayons de l'arbre et du coussinet non déformés et l'épaisseur de la couche élastique constituant le revêtement de surface.  $E$  et  $\nu$  étant respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau (revêtement). Le repère  $(O_c, x, y, z)$  est fixé au coussinet. L'arbre est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\omega_a$ . La charge extérieure  $W_0$  est supposée constante en direction et en module. La direction de la ligne des centres du palier est repérée par l'angle  $\varphi$  dit angle de calage, tel que  $\varphi = (\overrightarrow{W_0}, \overrightarrow{O_a O_c})$ .

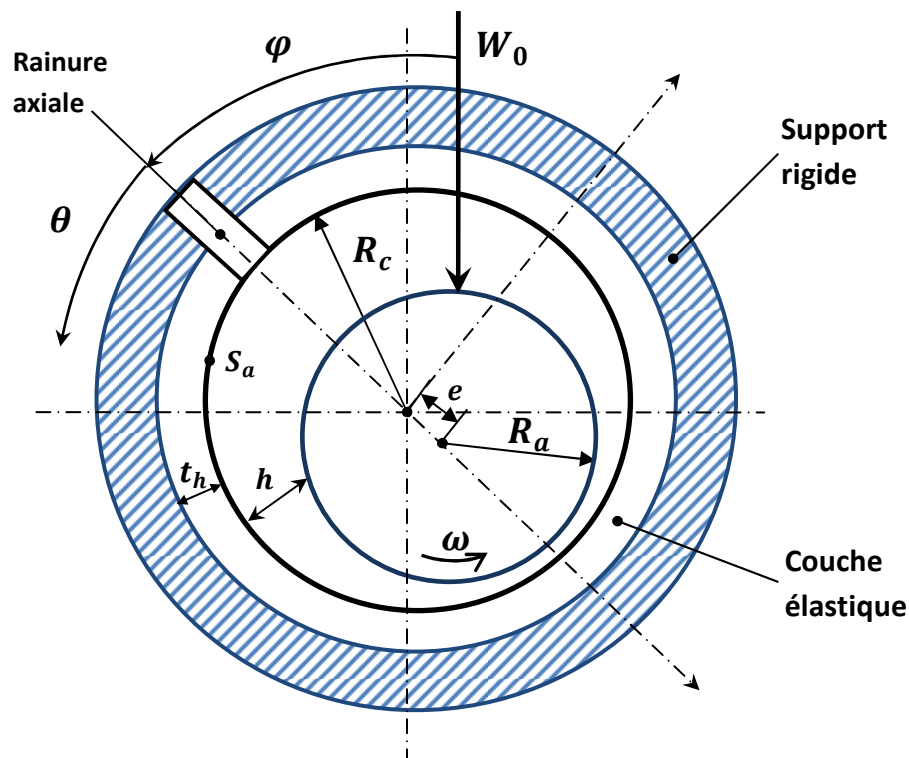


Figure IV.3 : Géométrie d'un palier cylindrique mono couche

### 3.2. Calcul du champ de pression dans le film lubrifiant

On considère que le fluide est iso-visqueux, la viscosité est supposée constante en tout point du film lubrifiant. Bien entendu, l'équation de Reynolds peut être ici résolue avec les conditions aux limites de Reynolds. En tenant compte des hypothèses, géométrie et conditions de service du palier, il vient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \omega_a \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{IV-8})$$

où :  $h(\theta, z) = C_R [1 + \varepsilon \cos \theta + \delta z^* \cos(\theta - \psi)] + U_r(\theta, z)$  étant l'épaisseur du film bidimensionnel incluant le mésalignement et les déformations élastiques.

### 3.3. Conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution de l'équation de Reynolds sont basées sur la séparation des zones actives et inactives. C'est dans la zone active que la pression monte et que l'équilibre avec la charge appliquée se réalise. La zone inactive est caractérisée par une pression nulle. En conséquence, les conditions aux limites sur les valeurs des pressions sont :

- $P = 0$  dans la zone inactive ; (IV-9.a)
- $P > 0$  dans la zone active.

La condition de Reynolds sur la dérivée de la pression à la frontière de rupture du film complet s'énonce comme suit :

$$\partial P / \partial n = 0 \quad (\text{IV-9.b})$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la frontière entre les zones active et inactive.

En général, le palier comporte une alimentation en lubrifiant. Cette alimentation peut être réalisée soit par un canal d'arrivée d'huile dans l'arbre, comme dans le cas des paliers de tête de bielle, soit par des trous percés dans l'épaisseur du coussinet, comme dans le cas des paliers de pied de bielle. Ce ne sont pas les seuls types d'alimentation des paliers, il peut y avoir des rainures circonférentielles totales ou partielles (paliers de tourillon), des rainures

axiales ou tout simplement, l'alimentation peut s'effectuer pour des paliers courts par les bords du palier [6].

Dans notre analyse, on traite le cas d'une alimentation en lubrifiant par rainure axiale. Les conditions aux limites d'alimentation sont donc :

$P = P_a$ , avec  $P_a$  étant la pression d'alimentation en lubrifiant.

Il faut bien noter que pour un palier développé, nous écrivons :  $P(0, z) = P(2\pi R, z)$

### **3.4. Résolution numérique**

La résolution de l'équation (IV-8) nous permet d'utiliser comme précédemment, la méthode des différences finies, où le calcul itératif pourra intervenir. Pour ce faire, le maillage choisi pour la direction angulaire correspond à une maille de 9 degrés, ce qui donne 40 mailles, alors que le maillage choisi pour la direction axiale donne 20 mailles. Dans le cas où le palier est aligné, seule la moitié du palier est maillée axialement.

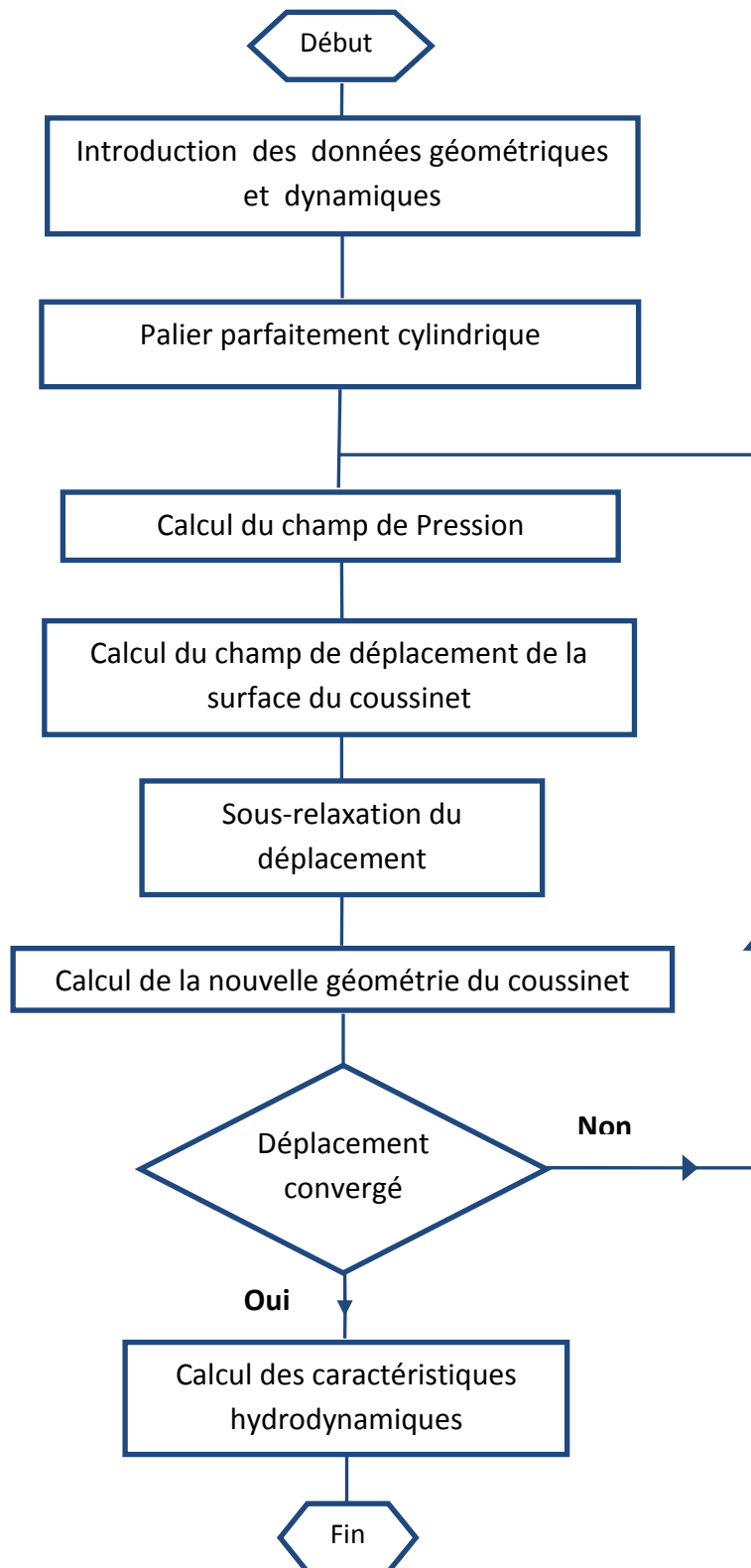
#### **3.4.1. Calcul du champ de déformation élastique**

Le champ de la déformation élastique de surface du coussinet dû aux actions hydrodynamiques est calculé à l'aide du modèle « couche mince ». Ce modèle déjà explicité dans le chapitre II, permet un calcul direct et rapide du champ de déplacement radial à l'interface fluide-solide.

#### **3.4.2. Interaction structure-fluide**

Le problème d'interaction structure-fluide peut être résumé sous forme d'un algorithme qui résout le cas élasto-hydrodynamique en régime isotherme (figure IV.4).

A partir de cet algorithme, nous pouvons dire que pour une géométrie initiale, nous calculons le champ de pression puis le champ de déplacement, ce dernier modifie à son tour le coussinet qui n'est plus cylindrique, puis nous recalculons un nouveau champ de pression et ainsi de suite. Ce procédé de calcul se poursuit jusqu'à stabilisation de la déformation, ce qui peut se traduire par l'obtention de deux champs de déplacement ou de pression consécutifs suffisamment proches.



**Figure IV.4 :** *Algorithme de calcul EHD*

Afin d'assurer la convergence du processus itératif, les déplacements calculés doivent être pondérés avant leur utilisation dans le calcul hydrodynamique. La méthode de sous-relaxation pouvant conduire à une convergence rapide, s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} U_r^{k+1} = \Omega U_r^{k+1} + (1 - \Omega)U_r^k \\ h^{k+1} = h_0 + U_r^{k+1} \end{cases} \quad (\text{IV-10})$$

où  $U_r^{k+1}$  et  $U_r^k$  sont respectivement les déplacements obtenus aux itérations  $k + 1$  et  $k$ ,  $\Omega$  étant un coefficient de sous-relaxation compris entre 0 et 1, et  $h_0$  étant l'épaisseur nominale du film avant déformation. Le choix optimum de ce coefficient donne une convergence rapide [40].

En effet, nous avons vu la nécessité d'appliquer l'algorithme de sous-relaxation pour relier les deux parties du programme élasto-hydrodynamique, car ce problème est fortement non linéaire et les déformations élastiques dues au champ de pression seraient parfois supérieures à l'épaisseur du film, qui lui-même intervient en tant que puissance cubique dans l'équation de Reynolds (IV-8).

Le test d'arrêt du processus itératif est défini par :

$$er_m = \frac{1}{N_p} \sum_{ij} \left| \frac{P_{ij}^{k+1} - P_{ij}^k}{P_{ij}^{k+1}} \right| \leq eps \quad (\text{IV-11})$$

où :  $er_m$  est l'erreur relative moyenne et  $N_p$  le nombre total de points pour lesquels la valeur de la pression est positive.

#### 4. Résultats et discussions

Afin de pouvoir comprendre et analyser les résultats de ce travail, nous avons eu à traiter le cas d'un palier lisse HD cylindrique comportant une rainure d'alimentation axiale. Ce palier peut être défini par le rapport  $L/D$  qui est égal à 1. Nous avons ainsi tenté d'aborder le calcul EHD, en considérant que les débits axial et circonférentiel ont été pris en compte, ce qui implique la résolution de l'équation de Reynolds bidimensionnelle. Vue l'objectif de ce travail, deux types de revêtements élastiques ont été mis en place. L'un est

constitué d'un matériau compressible et l'autre d'un matériau quasi-incompressible. Les caractéristiques du palier, du lubrifiant et les conditions de fonctionnement sont précisées dans le tableau IV.1.

**Tableau IV.1** : Caractéristiques du palier, du lubrifiant et conditions de fonctionnement

<b>Palier lisse de longueur finie : <math>L/D = 1</math></b>		
Diamètre de l'arbre	$D$ [mm]	160
Jeu radial	$C$ [ $\mu\text{m}$ ]	50,0
Longueur du palier	$L$ [mm]	160
Épaisseur de la couche élastique	$t_h$ [mm]	8
Lubrifiant		ISOVG32
Viscosité dynamique du lubrifiant	$\mu_0$ [Pa.s]	0,0224
Coefficient de piézoviscosité du lubrifiant	$\alpha_p$ [ $\text{GPa}^{-1}$ ]	0
Coefficient du poisson du matériau	$\nu$	0,3 et 0,49
Module de Young du matériau	$E$ [Gpa]	2,10 et 210
Longueur de rainure axiale	$L_r$ [mm]	150

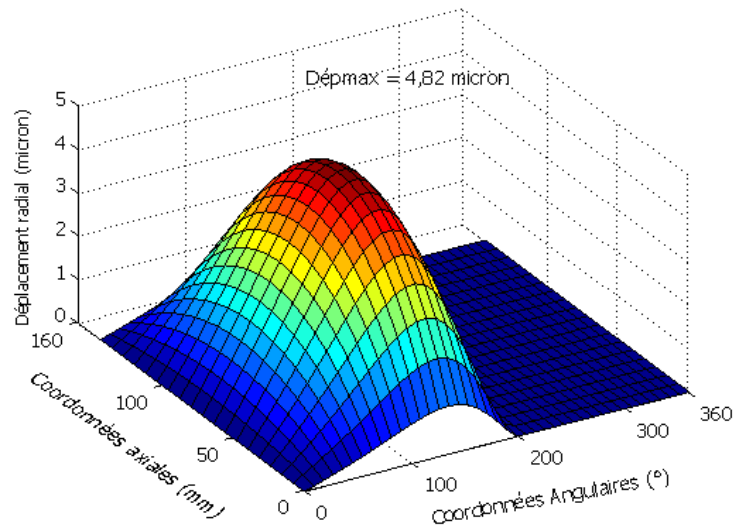
#### 4.1. Influence des déformations élastiques

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux résultats dans les zones critiques se situant dans le mi-plan du palier, là où nous avons : soit une concentration de chargement, soit une épaisseur du film minimale. Les résultats de calcul isotherme HD et EHD sont ainsi comparés. Les résultats pour le cas d'un palier mésaligné sont également présentés. Plusieurs conditions de fonctionnement sont utilisées dans les calculs HD et EHD.

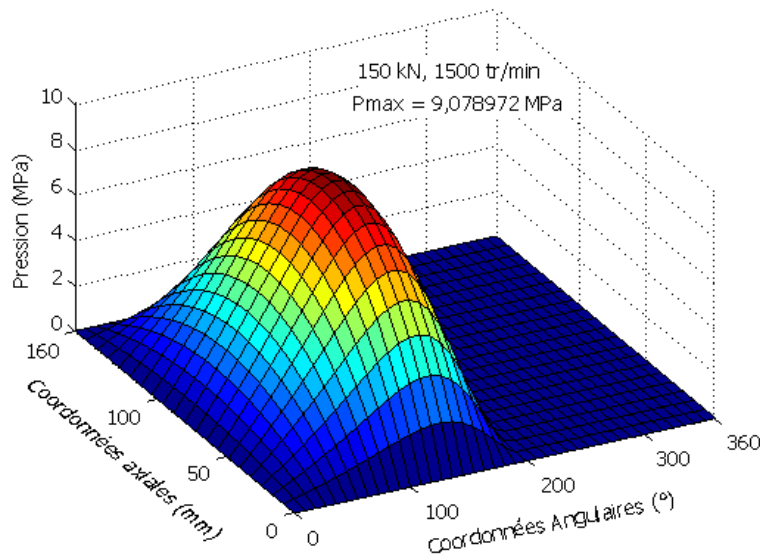
La figure IV.5 présente le champ de déplacements radiaux à la surface interne du coussinet, résultant du calcul EHD. On constate que le coussinet subit sous l'effet de pression HD, une déformation élastique radiale importante et surtout dans le mi-plan.

La figure IV.6 présente le champ de pression dû à la concentration du chargement statique, obtenu par le calcul EHD. On observe que la pression HD est importante dans la zone la plus critique à cause d'une épaisseur du film plus faible. On remarque ainsi qu'il y a une concordance entre le champ de déplacement et celui de pression. La figure IV.7 montre le champ de pression en tenant compte du mésalignement. Ici, la pression maximale est située à l'une des deux extrémités dans la zone active car l'épaisseur minimale du film n'est plus au mi-plan du palier. La pression maximale atteint une valeur plus importante si on la compare avec celle obtenue dans le cas de palier aligné.

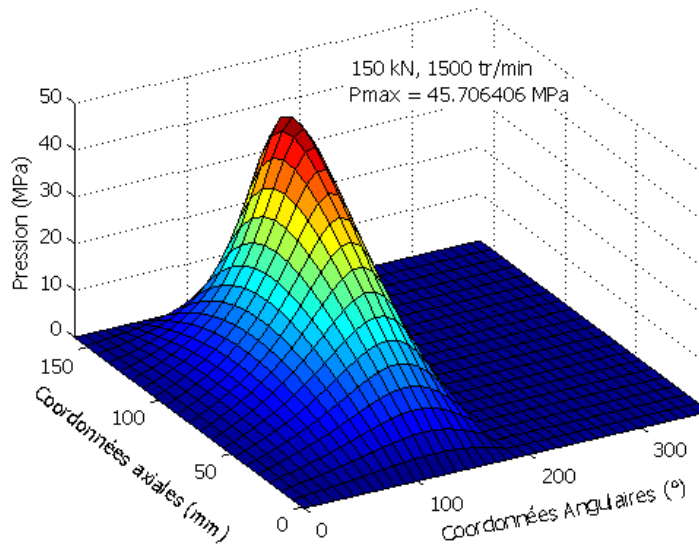
Dans les figures IV.8-9, on présente de façon bidimensionnelle, l'épaisseur du film lubrifiant obtenue par le modèle EHD pour les deux types de revêtements. On remarque que dans la zone active, c'est-à-dire celle qui subit un chargement important avec un champ de déplacements considérable, l'épaisseur du film est modifiée et connaît une augmentation notable. La comparaison entre les épaisseurs minimales pour les deux figures IV 8-9 qui se trouvent aux extrémités du palier, dégage un écart assez faible de l'ordre de 5 % environ.



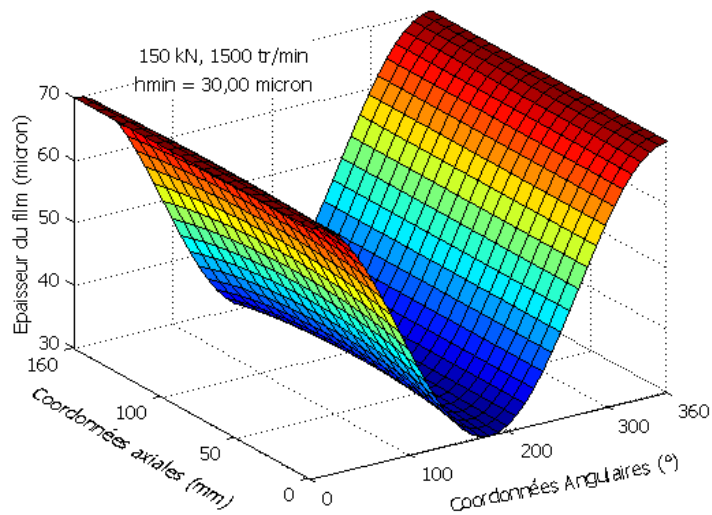
**Figure IV.5 :** *Champ de déplacements radiaux,  $\varepsilon = 0.4$*



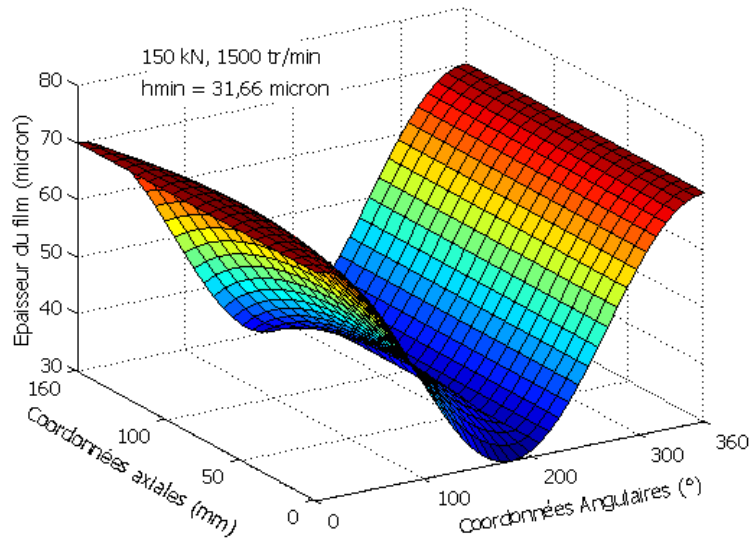
**Figure IV.6 :** *Champ de pression hydrodynamique*



**Figure IV.7 :** *Champ de pression dans un palier mésaligné,  $D_m = 80\%$ ,  $\psi = 2^\circ$*



**Figure IV.8 :** *Champ de l'épaisseur du film lubrifiant pour revêtement compressible*



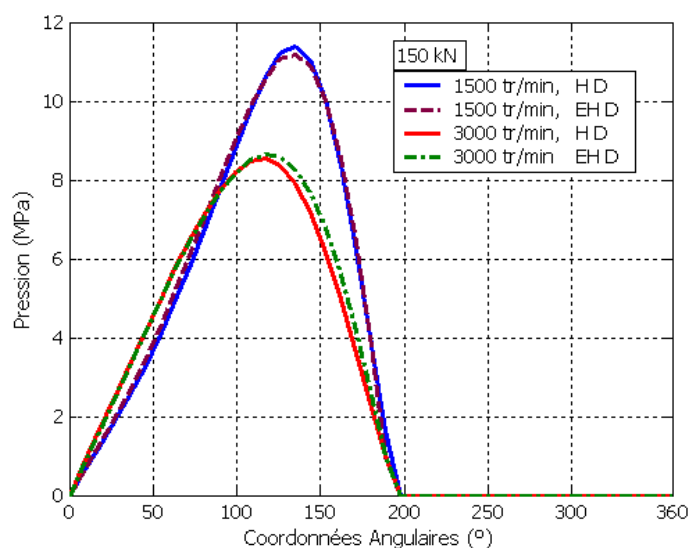
**Figure IV.9 :** *Champ de l'épaisseur du film lubrifiant pour revêtement quasi-incompressible*

#### 4.2. Influence des conditions de fonctionnement sur la pression

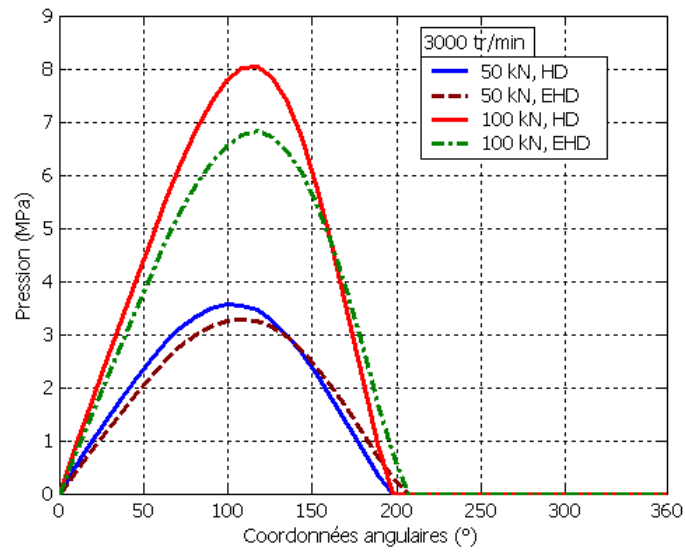
La figure IV.10 présente la répartition circumférentielle de la pression dans le plan médian du palier. La couche mince utilisée sur la surface interne du coussinet est supposée compressible. Différentes valeurs de charges et vitesses sont prises dans le calcul EHD. Dans la figure IV.10.(a), pour une charge statique de 150 kN et en utilisant deux vitesses telles que 1500 et 3000 tr/min, on peut constater que la distribution de la pression maximale est presque la même, que ce soit dans le calcul HD ou EHD c'est-à-dire une diminution de près de 2 % ; par contre si l'on compare les pressions de calcul HD et EHD pour les vitesses 1500 et 3000 tr/min, on constate que l'augmentation de la vitesse sert à diminuer considérablement la pression maximale de près de 26 %. Inversement, on présente dans la figure IV.10.(b) l'influence de la charge appliquée sur la pression maximale à une vitesse de 3000 tr/min. Ici, l'écart entre les pressions maximales pour le calcul HD et EHD est important. On peut également noter que le résultat de calcul EHD n'est significatif que lorsque le chargement est

plus important. En effet, pour le cas à 100 kN, on a une diminution de presque 16 % de la pression maximale alors que pour le cas 50 kN, elle n'est que de l'ordre de 8 %.

La figure IV.11 présente l'influence de la vitesse et du chargement statique en utilisant un revêtement élastique quasi-incompressible. Comme il a été explicité, on constate dans la figure IV.11.(a) que les écarts entre les pressions maximales sont plus importants. Pour une charge de 150 kN, on note un abaissement de près de 56 % de la pression au cas 1500 tr/min, et de près de 50 % au cas 3000 tr/min. D'autre part dans la figure IV.11.(b), pour une vitesse de 3000 tr/min, on remarque que les écarts entre les pressions maximales sont relativement très grands, plus précisément, en appliquant une charge de 50 kN, on obtient une réduction de près de 45 %, alors que pour une charge de 100 kN, la réduction de la pression atteint presque 53 %. Il est à noter que dans le cas d'un revêtement quasi-incompressible, la prise en considération des déformations élastiques est beaucoup plus significative surtout quand la charge statique est très élevée.

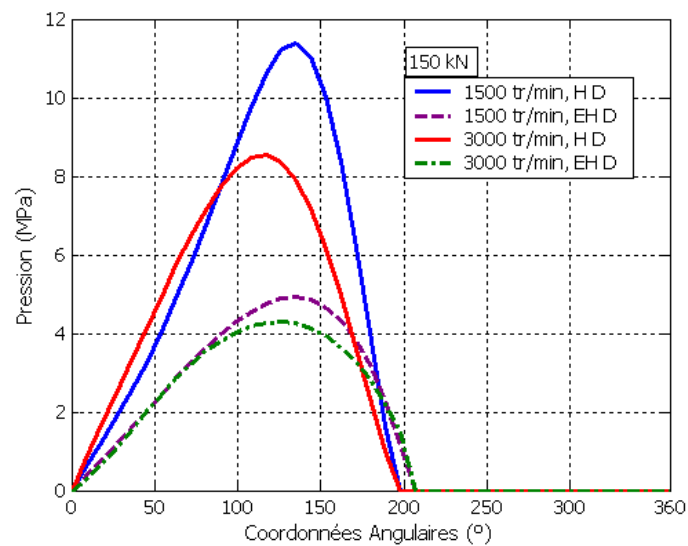


(10.a)

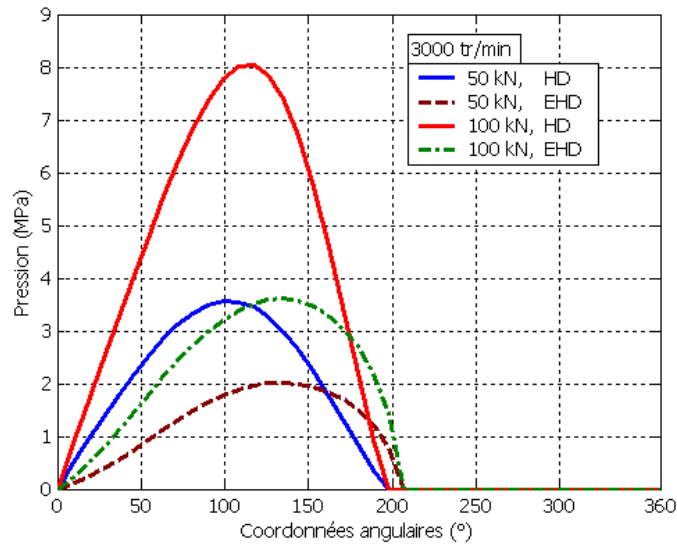


(10.b)

Figure IV.10 : Distribution de Pression maximale de mi-plan pour revêtement compressible



(11.a)



(11.b)

**Figure IV.11 :** *Distribution angulaire de Pression maximale de mi-plan pour revêtement quasi-incompressible*

### 4.3. Influence des conditions de fonctionnement sur le déplacement

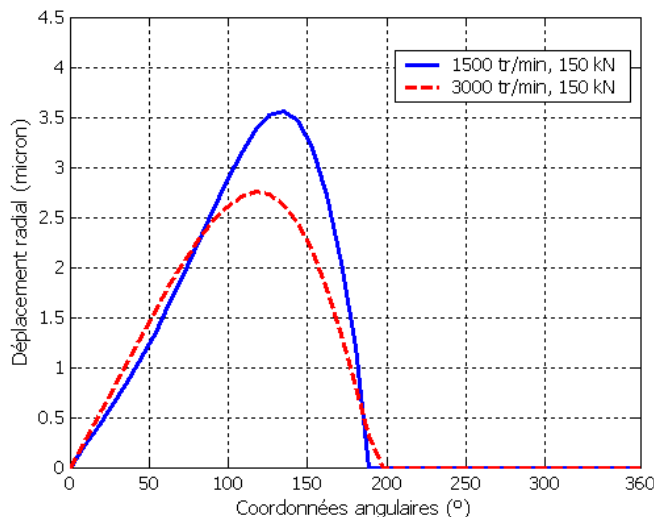
Dans cette partie, on cherche à faire une liaison entre le champ de déplacement et celui de pression puisque ceux-ci sont obtenus d'un même procédé de calcul à partir d'un couplage structure-fluide. Les résultats de calcul HD et EHD pour le déplacement et l'épaisseur du film sont ainsi présentés en utilisant les mêmes conditions de service et les deux types de revêtements élastiques. La figure IV.12 présente la distribution circonférentielle du champ de déplacements radiaux pour un matériau compressible. Dans la figure IV.12.(a), on constate que le déplacement maximal au cas de 150 kN est assez faible et lorsqu'on fait varier la vitesse de 1500 à 3000 tr/min, il résulte une diminution de 23 % environ. En revanche, dans la figure IV.12.(b) pour le cas 3000 tr/min, en augmentant la charge de 50 à 100 kN, on obtient un accroissement du déplacement de presque 100 % avec des déplacements maximaux relativement faibles.

En ce qui concerne les déplacements pour un revêtement constitué d'un matériau quasi-incompressible, on peut constater dans la figure IV.13.(a) que les déplacements maximaux atteignent pour le cas 150 kN des valeurs élevées et lorsque la vitesse augmente de 1500 à 3000 tr/min, une réduction du déplacement d'environ 13 %, peut être observée.

Dans la figure IV.13.(b), à une vitesse de 3000 tr/min, les déplacements sont relativement importants. On constate ainsi qu'en faisant croître la charge de 50 à 100 kN, les déplacements subissent une augmentation de près de 80 %. Après analyse de ces résultats, il reste à noter que dans le cas de calcul EHD, l'exécution d'une charge importante engendre un champ de pression aussi important, qui lui-même sert à modifier profondément la géométrie du film par déformation élastique, mais ne modifie que peu l'épaisseur minimale du film.

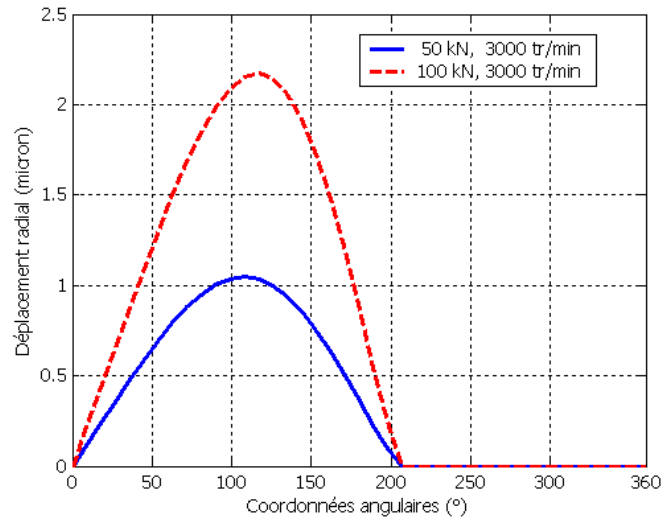
#### 4.4. Influence des conditions de fonctionnement sur l'épaisseur du film

Bien entendu, lorsque la géométrie est modifiée par déformation élastique, l'épaisseur du film doit être aussi modifiée. Dans les mêmes conditions précédentes, on montre la répartition circonférentielle de l'épaisseur du film au mi-plan du palier pour les deux types de revêtements. Dans la figure IV.14, pour la couche compressible, les modifications de l'épaisseur du film sont situées dans la zone active due à la pression HD. On peut noter que l'épaisseur du film en exécutant une charge importante, s'accroît de façon considérable là où la pression est importante, mais sa valeur minimale ne change pas beaucoup. Cependant, le fonctionnement à faible vitesse implique une épaisseur plus faible.



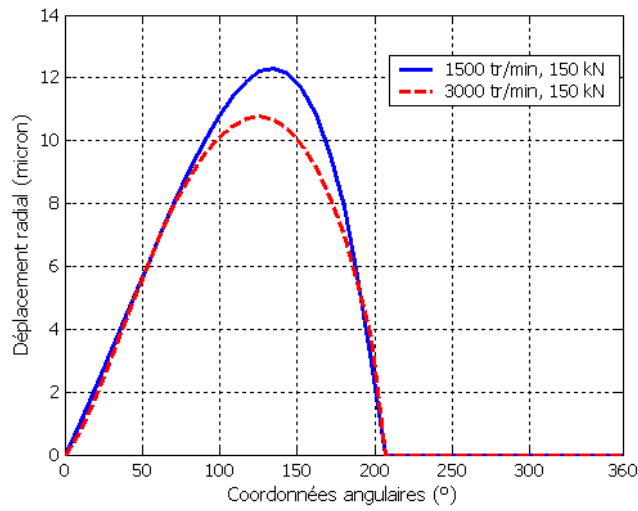
(12.a)

Pour la couche quasi-incompressible (figure IV.15), dont le module de Young est plus faible, l'épaisseur du film est modifiée fortement dans la zone active et sa valeur minimale s'accroît de près de 8 % pour 1500 tr/min et 150 kN.

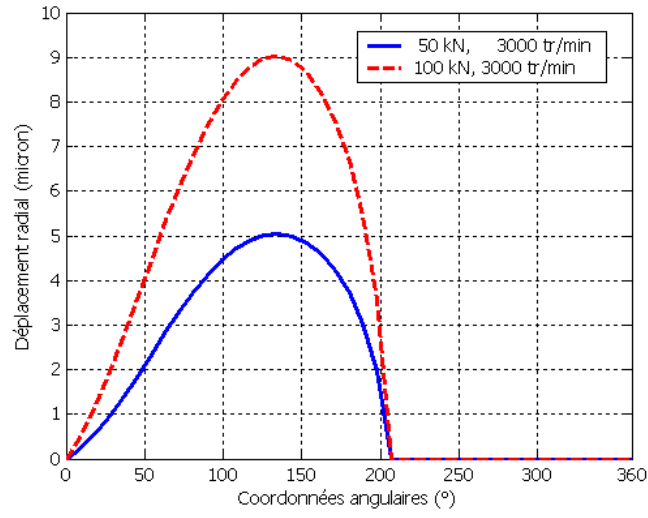


(12.b)

Figure IV.12 : Distribution angulaire de déplacements radiaux de mi-plan pour revêtement compressible

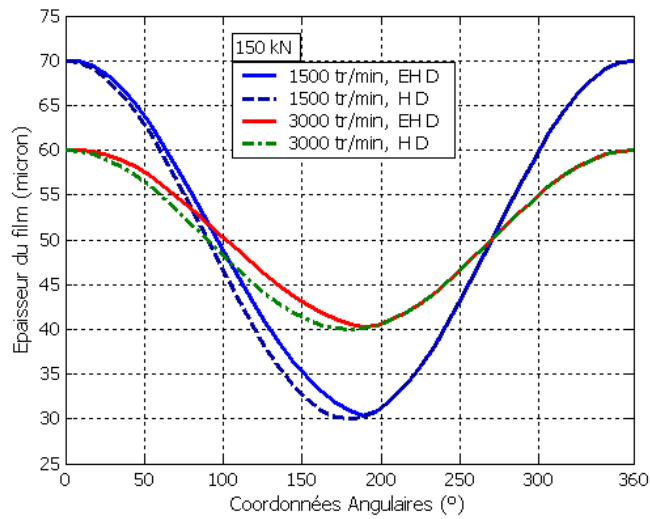


(13.a)

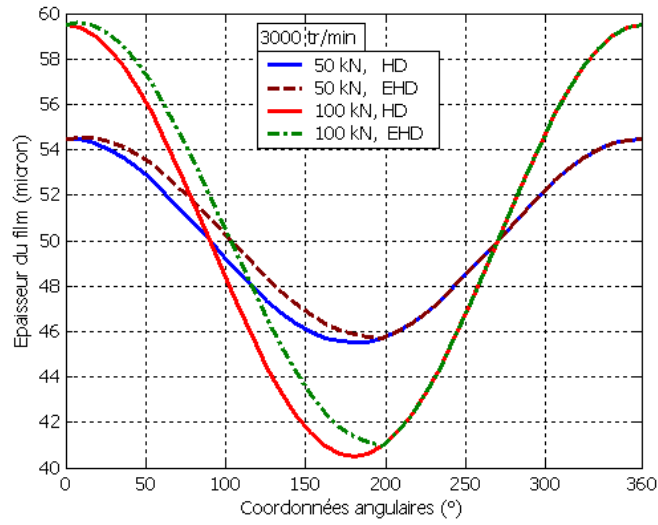


(13.b)

**Figure IV.13 :** *Distribution angulaire de déplacements radiaux de mi-plan pour revêtement quasi-incompressible*

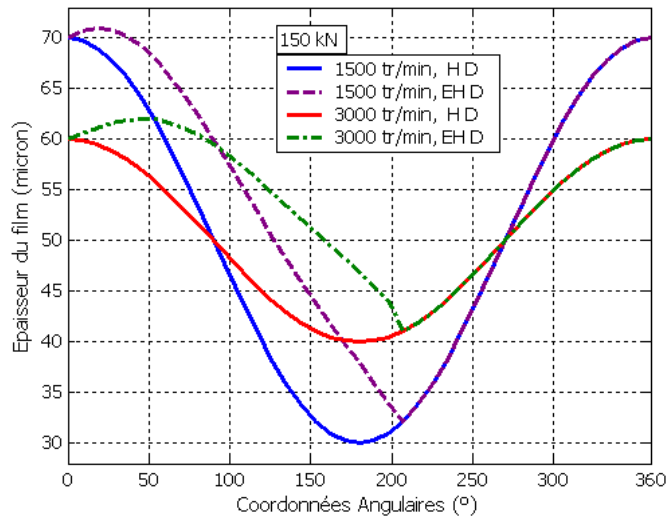


(14.a)

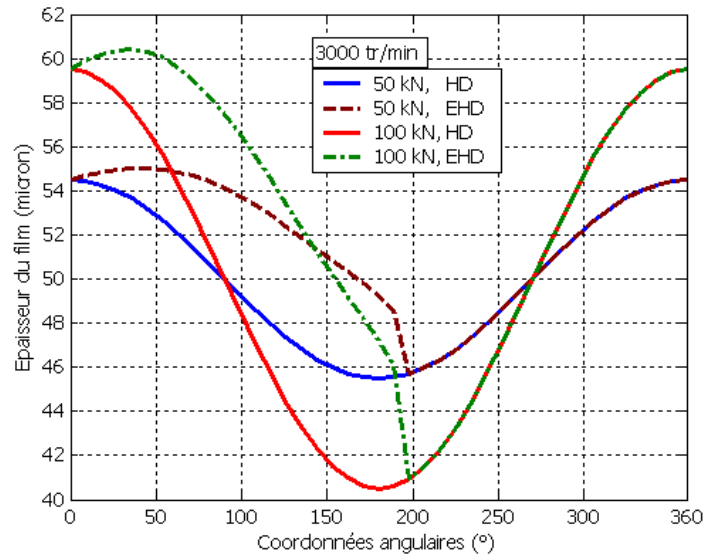


(14.b)

Figure IV.14 : Répartition angulaire de l'épaisseur du film minimale pour revêtement compressible



(15.a)



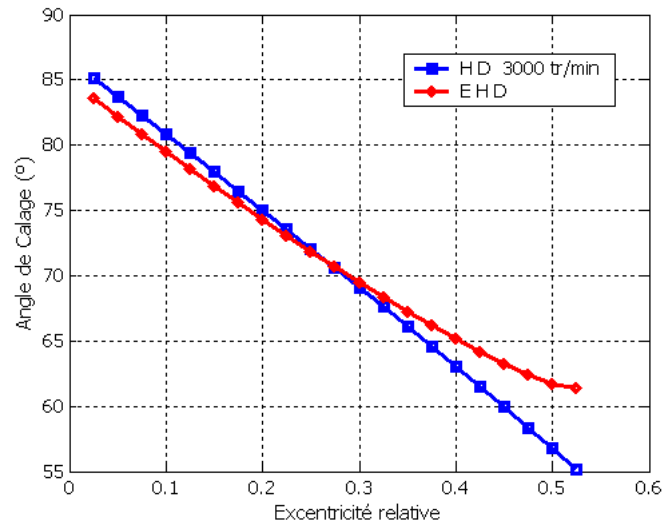
(15.b)

**Figure IV15 :** Répartition angulaire de l'épaisseur du film minimale pour revêtement quasi-incompressible

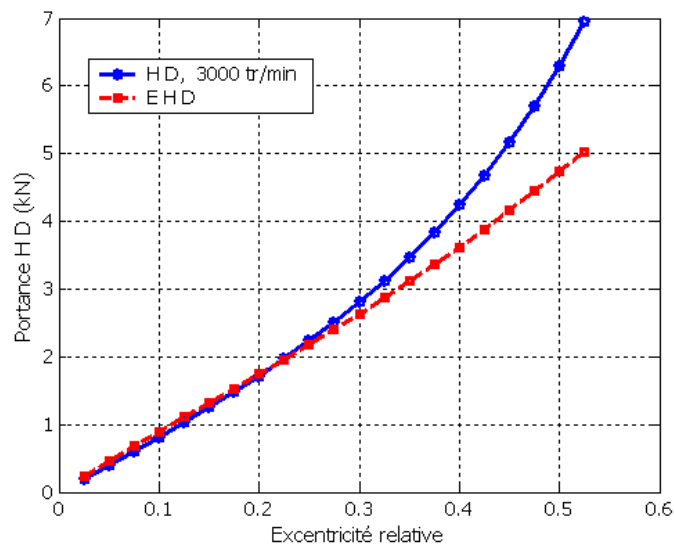
#### 4.5. Angle de calage et portance hydrodynamique

Dans les figures IV.16-17, on présente la variation de l'angle de calage qui donne la position de l'arbre tournant dans le palier et la portance hydrodynamique HD qui est la charge extérieure que peut supporter le contact, en fonction de l'excentricité relative. En faisant augmenter l'excentricité relative de 0.025 à 0.55, il advient que l'angle de calage est réduit de  $85^\circ$  vers  $63^\circ$  pour le calcul EHD (figure IV.16). Ainsi, l'écart maximal entre le cas HD avec EHD vaut presque 12 %.

Dans la figure IV.17, on constate que la charge portante croit par l'augmentation de l'excentricité relative qui varie entre 0.025 et 0.55 pour les deux cas de calcul HD et EHD. A partir de l'excentricité 0.25, l'écart de diminution des portances commence à croître pour atteindre environ 28 %.



**Figure IV.16 :** Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative



**Figure IV.17 :** Variation de la portance HD en fonction de l'excentricité relative

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'influence des déformations élastiques des revêtements de surface du coussinet dues aux pressions hydrodynamiques, ainsi que la rhéologie du fluide lubrifiant sur le champ de pression et la géométrie du film, ce qui nous a permis de prendre en ligne de compte les effets considérables de l'élasticité des revêtements sur la pression hydrodynamique et l'épaisseur du film. Nous avons aussi montré que la pression maximale obtenue par couplage fluide-structure est plus faible devant celle obtenue pour le coussinet rigide et que le mésalignement du palier engendre des modifications sur le champ de pression et l'épaisseur du film.

Egalement, les conditions de fonctionnement ont une grande influence sur le champ de pression, les déplacements et l'épaisseur du film. L'épaisseur minimale du film ne subit pas un changement important en fait, mais sa géométrie est fortement modifiée dans la zone active. Les déplacements radiaux deviennent plus importants lorsque le revêtement de surface est quasi-incompressible.

Pour la résolution de ce problème, nous avons utilisé la méthode des différences finies. Cette méthode nous a permis de réaliser la discrétisation de la géométrie étudiée et d'obtenir une distribution bidimensionnelle de pression et de déplacement au moyen du calcul itératif tel que : sur-relaxation. Le modèle couche mince, nous permet un calcul direct et rapide nécessitant pour la convergence du calcul EHD, une méthode dite : sous-relaxation, servant à la pondération des déplacements avant utilisation.

## ANNEXE A

### Solutions en contraintes et en déplacements du premier

#### Problème mixte

##### A.1. Système d'équation : Calcul de $a_k$ et $a'_{-k}$

Les relations qui nous permettent d'appliquer les conditions aux limites du premier problème mixte sont les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> relations du système ( ) et les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> relations du système ( ), soit :

$$\sigma_1^{(0)} = (1 + \chi) H^{-1} \bar{a}_{-1}$$

$$\sigma_k^{(0)} = (1 - k) a_k H^k + \bar{a}_{-k} H^{-k} - a'_{k-2} H^{k-2}, \quad \forall k \in \{z - \{1\}\}$$

$$U_{-1}^{(1)} = 2 a_{-1} \chi \log(R_1) + \frac{\alpha\chi - \bar{\beta}}{R_1} - \bar{a}_1$$

$$U_k^{(1)} = \frac{\chi}{1+k} a_k - \bar{a}_{-k} + \frac{\bar{a}'_{-2-k}}{1+k}, \quad \forall k \in \{z - \{-1\}\}$$

La relation ( ), donne directement :

$$a_{-1} = \frac{H \sigma_1^{(0)}}{1 + \chi}$$

La relation ( ), ( ) pour  $k = 1$  et la relation ( ) pour  $k = 1$  donnent ensuite :

$$\begin{cases} U_{-1}^{(1)} = 2 a_{-1} \chi \log(R_1) + \frac{\alpha\chi - \bar{\beta}}{R_1} - \bar{a}_1 \\ \sigma_{-1}^{(0)} = 2 a_{-1} H^{-1} + \bar{a}_1 H - a'_{-3} H^{-3} \\ U_1^{(1)} = \frac{\chi a_1}{2} - \bar{a}_{-1} + \frac{a'_{-3}}{2} \end{cases}$$

En tenant compte de ( ), la solution du système devient :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2H(1-H^2)}{(1+\chi)(H^4+\chi)}\sigma_1^{(0)} + \frac{2U_1^{(1)}}{(H^4+\chi)} + \frac{H^3\overline{\sigma_{-1}^{(0)}}}{(H^4+\chi)} \\ a'_{-3} = -\chi\overline{a_1} + \frac{2H}{(1+\chi)}\overline{\sigma_1^{(0)}} + 2\overline{U_{-1}^{(1)}} \\ (\alpha\chi - \beta)R_1^{-1} = \overline{a_1} + \overline{U_{-1}^{(1)}} - 2\chi a_{-1} \log(R_1) \end{cases}$$

Pour  $k \neq 1$ , les relations ( ) et ( ) prises pour  $k$  et leurs conjuguées prises pour  $(-k)$  nous permet d'avoir :

$$\begin{cases} \sigma_k^{(0)} = (1-\chi) a_k H^k + \overline{a_{-k}} H^{-k} - a'_{k-2} H^{k-2} \\ U_k^{(1)} = \frac{\chi}{1+k} a_k - \overline{a_{-k}} + \frac{\overline{a'_{-2-k}}}{1+k} \\ \overline{\sigma_{-k}^{(0)}} = (1+\chi) \overline{a_{-k}} H^{-k} + a_k H^k - \overline{a'_{-k-2}} H^{-k-2} \\ \overline{U_{-k}^{(1)}} = \frac{\chi\overline{a_{-k}}}{1-k} - a_k + \frac{a'_{k-2}}{1-k} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\Delta M_k} \left\{ \begin{aligned} & \left( (H^2-1)(1+k)H^{2-k}\sigma_k^{(0)} - (1+k)(H^{-2-2k} + \chi)U_k^{(1)} - \right. \\ & \left. (\chi H^{2+2k} + 1)H^{-k}\overline{\sigma_{-k}^{(0)}} + (1-k^2)(H^2-1)\overline{U_{-k}^{(1)}} \right) \end{aligned} \right\} \\ a'_{k-2} = (1-k) a_k - \chi\overline{a_{-k}} + (1-k)\overline{U_{-k}^{(1)}} \end{cases}$$

avec  $\Delta M_k = (1-k^2)(1-H^2)^2 - (H^{2+2k} + \chi)(H^{2-2k} + \chi)$

## A.2. Contraintes et déplacements en tout point de la couronne

Si nous regroupons les résultats ( ), ( ) et dans les relations du système ( ), en tenant compte de la relation ( ), nous obtenons la solution en contraintes et déplacement du premier problème mixte :

Pour  $k \in z$

$$V_k(\ell) = \frac{\mathbf{M}_k}{\Delta M_k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2H^{2-k}[(H^2 - 1)(1 + k)\ell^k - (H^{-2+2k} + \chi)\ell^{-k}] \\ 2H^{2+k}[(H^2 - 1)(1 - k)\ell^{-k} - (H^{-2-2k} + \chi)\ell^k] \\ -2(1 + k)[(H^{-2-2k} + \chi)\ell^k - (H^2 - 1)(1 - k)\ell^{-k}] \\ -2(1 - k)[(H^{-2+2k} + \chi)\ell^{-k} - (H^2 - 1)(1 + k)\ell^k] \end{array} \right\}$$

Pour  $k \in \{z - \{1\}\}$

$$\sigma_k(\ell) = \frac{\mathbf{M}_k}{\Delta M_k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{H}{\ell}\right)^{2-k} [(H^2 - 1)(1 - k^2)(\ell^k - 1) - (H^{2+2k} + \chi)(\chi + \ell^{2-2k})] \\ (1 - k) H^{2+2k} \ell^{k-2} [(H^{2-2k} + \chi)(1 - \ell^2) + (H^2 - 1)(\ell^{2-2k} + \chi)] \\ (1 - k^2) \ell^{k-2} [(H^{2-2k} + \chi)(1 - \ell^2) + (H^2 - 1)(\ell^{2-2k} + \chi)] \\ (1 - k) \ell^{k-2} [(H^2 - 1)(1 - k^2)(\ell^2 - H^2) + (H^{2+2k} + \chi)(H^{2-2k} - \ell^{2-2k})] \end{array} \right\}$$

Pour  $k \in \{z - \{-1\}\}$

$$U_k(\ell) = \frac{\mathbf{M}_k}{\Delta M_k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} H^{2-k} \ell^{-k-2} [\chi(\ell^{2+2k} - 1)(H^2 - 1) + (H^{2+2k} + \chi)(\ell^2 - 1)] \\ -H^{2+k} \ell^{k-2} [\chi(H^{2-2k} + \chi)(\ell^{2+2k} - 1) + (1 - k^2)(H^2 - 1)(\ell^2 - 1)] \\ (1 - k^2) \ell^{-k-2} [(H^2 - \ell^2)(H^2 - 1) - (H^{2+2k} - \chi \ell^{2k+2})(H^{2-2k} + \chi)] \\ (1 - k) \ell^{-k-2} [\chi(H^2 - 1)(\ell^{2+2k} - 1) + (\ell^2 - 1)(H^{2+2k} + \chi)] \end{array} \right\}$$

Pour  $k = -1$

$$U_{-k}(\ell) = \mathbf{M}_{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 - \ell^2)H^3}{(H^4 + \chi)\ell} \\ \frac{2H\ell^{-1}}{(1 + \chi)} \left[ \chi \log(\ell) + \frac{(1 - \ell^2)(1 - H^2)}{(H^4 + \chi)} \right] \\ \ell^{-1} \\ \frac{2(1 - \ell^2)}{(H^4 + \chi)\ell} \end{array} \right\}$$

où  $\mathbf{M}_k = \langle \sigma_k^{(0)} : \overline{\sigma_{-k}^{(0)}} : U_k^{(1)} : \overline{U_k^{(1)}} \rangle$ ,  $\forall k \in z$

## ANNEXE B

### Solutions en contraintes et en déplacements du deuxième

#### Problème mixte

##### *B.1. Système d'équation : Calcul de $a_k$ et $a'_{-k}$*

Les relations qui nous permettent d'appliquer les conditions aux limites du deuxième problème mixte sont les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> relations du système ( ) et les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> relations du système ( ), soit :

$$\sigma_1^{(1)} = (1 + \chi) \overline{a_{-1}}$$

$$\sigma_k^{(1)} = (1 - k) a_k + \overline{a_{-k}} - a'_{k-2} , \quad \forall k \in \{z - \{1\}\}$$

$$U_{-1}^{(0)} = 2 a_{-1} \chi H^{-1} \log(R_0) + \frac{\alpha\chi - \bar{\beta}}{R_0} - \overline{a_1} H , \quad \text{pour } k = -1$$

$$U_k^{(0)} = \frac{\chi}{1+k} H^k a_k - \overline{a_{-k}} H^{-k} + \frac{\overline{a'_{-2-k}}}{1+k} H^{-2-k} , \quad \forall k \in \{z - \{-1\}\}$$

La relation ( ), donne directement :

$$a_{-1} = \frac{\overline{\sigma_1^{(1)}}}{1 + \chi}$$

La relation ( ), ( ) pour  $k = -1$  et la relation ( ) pour  $k = 1$  donnent ensuite :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2 (H^2 - 1)}{(1 + \chi)(\chi H^4 + 1)} \sigma_1^{(1)} + \frac{2 H^3 U_1^{(0)}}{(\chi H^4 + 1)} + \frac{\overline{\sigma_{-1}^{(1)}}}{(\chi H^4 + 1)} \\ a'_{-3} = \overline{a_1} + 2a_{-1} - \sigma_{-1}^{(1)} \\ (\alpha\chi - \bar{\beta}) R_0^{-1} = H \overline{a_1} + U_{-1}^{(0)} - 2\chi a_{-1} H^{-1} \log(R_0) \end{cases}$$

Pour  $k \neq 1$ , les relations ( ) et ( ) prises pour  $k$  et leurs conjuguées prises pour  $(-k)$  nous permet d'avoir :

$$\begin{cases} \sigma_k^{(1)} = (1-k) a_k + \overline{a_{-k}} - a'_{k-2} \\ U_k^{(0)} = \frac{\chi H^k}{1+k} a_k - \overline{a_{-k}} H^{-k} + \frac{\overline{a'_{-2-k}}}{1+k} H^{-2-k} \\ \overline{\sigma_{-k}^{(1)}} = (1+k) \overline{a_{-k}} + a_k - \overline{a'_{-k-2}} \\ \overline{U_{-k}^{(0)}} = \frac{\chi \overline{a_{-k}} H^{-k}}{1-k} - a_k H^k + \frac{a'_{k-2}}{1-k} H^{k-2} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\Delta M'_k} \left\{ \begin{aligned} & \left( (1-H^2)(1+k)\sigma_k^{(1)} - (1+k)(\chi H^{2-2k} + 1)H^{2+k}U_k^{(0)} - \right. \\ & \left. (\chi H^{2-2k} + 1)\overline{\sigma_{-k}^{(1)}} + (1-k^2)(1-H^2)H^{2-k}\overline{U_{-k}^{(0)}} \right) \\ a'_{k-2} &= (1-k)\alpha_k - \overline{a_{-k}} + \sigma_k^{(1)} \end{aligned} \right. \end{cases}$$

avec  $\Delta M'_k = (1-k^2)(1-H^2)^2 - (\chi H^{2+2k} + 1)(\chi H^{2-2k} + 1)$

## B.2. Contraintes et déplacements en tout point de la couronne

Si nous regroupons les résultats ( ), ( ) et dans les relations du système ( ), nous obtenons la solution en contraintes et déplacement du premier problème mixte :

Pour  $k \in z$

$$V_k(\ell) = \frac{M'_k}{\Delta M'_k} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 2[(1-H^2)(1+k)\ell^k - (\chi H^{2+2k} + 1)\ell^{-k}] \\ & 2[(1-H^2)(1-k)\ell^{-k} - (\chi H^{2-2k} + 1)\ell^k] \\ & -2(1+k)H^{2+k}[(\chi H^{2-2k} + 1)\ell^k - (1-H^2)(1-k)\ell^{-k}] \\ & -2(1-k)H^{2-k}[(\chi H^{2+2k} + 1)\ell^{-k} - (1-H^2)(1+k)\ell^k] \end{aligned} \right\}$$

Pour  $k \in \{z - \{1\}\}$

$$\sigma_k(\ell) = \frac{\mathbf{M}'_k}{\Delta \mathbf{M}'_k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ell^{k-2} [(1-H^2)(1-k^2)(\ell^k - H^2) - (\chi H^{2+2k} + 1)(\chi H^{2-2k} + \ell^{2-2k})] \\ (1-k) \ell^{k-2} [(\chi H^{2-2k} + 1)(1-\ell^2) + (1-H^2)(\ell^{2-2k} + 1)] \\ (1-k^2) H^{2+k} \ell^{k+2} [(\chi H^{2-2k} + 1)(1-\ell^2) + (1-H^2)(\ell^{2-2k} + 1)] \\ (1-k) \ell^{k-2} [(1-H^2)(1-k^2)(\ell^2 - 1) + (\chi H^{2+2k} + 1)(1-\ell^{2-2k})] \end{array} \right\}$$

Pour  $k \in \{z - \{-1\}\}$

$$U_k(\ell) = \frac{\mathbf{M}'_k}{\Delta \mathbf{M}'_k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ell^{-k-2} [(\chi \ell^{2+2k} - 1)(1-H^2) + (\chi H^{2+2k} + 1)(\ell^2 - 1)] \\ \frac{\ell^{-k-2}}{1+k} [\chi(H^{2+2k} - \ell^{2+2k})(\chi H^{2-2k} + 1) + (1-k^2)(1-H^2)(H^2 - \ell^2)] \\ \left(\frac{H}{\ell}\right)^{2+k} [(\ell^2 - 1)(1-H^2)(1-k^2) - (1 - \chi \ell^{2k+2})(\chi H^{2-2k} + 1)] \\ (1-k) H^{2-k} \ell^{-k-2} [(1-H^2)(\chi \ell^{2+2k} + 1) + (\ell^2 - 1)(\chi H^{2-2k} + 1)] \end{array} \right\}$$

Pour  $k = -1$

$$U_{-k}(\ell) = \mathbf{M}'_{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{(H^2 - \ell^2)}{(\chi H^4 + 1)\ell} \\ \frac{2}{(1+\chi)} \left[ -\chi \ell^{-1} \log\left(\frac{H}{\ell}\right) + \frac{(\ell - H^2 \ell^{-1})(1-H^2)}{(\chi H^4 + 1)} \right] \\ \frac{H \ell^{-1}}{2H^3(H^2 - \ell^2)} \\ \frac{2H^3(H^2 - \ell^2)}{(\chi H^4 + 1)\ell} \end{array} \right\}$$

où  $\mathbf{M}'_{-1} = \langle \sigma_k^{(1)} : \overline{\sigma_{-k}^{(1)}} : U_k^{(0)} : \overline{U_k^{(0)}} \rangle$ ,  $\forall k \in z$

## ANNEXE C

### Solution analytique de l'équation de Reynolds pour un palier long

Dans ce qui suit, on présente les solutions analytiques de l'équation de Reynolds ( ) correspond aux conditions limites de Reynolds (Swift-Stieber), pour un palier infiniment long.

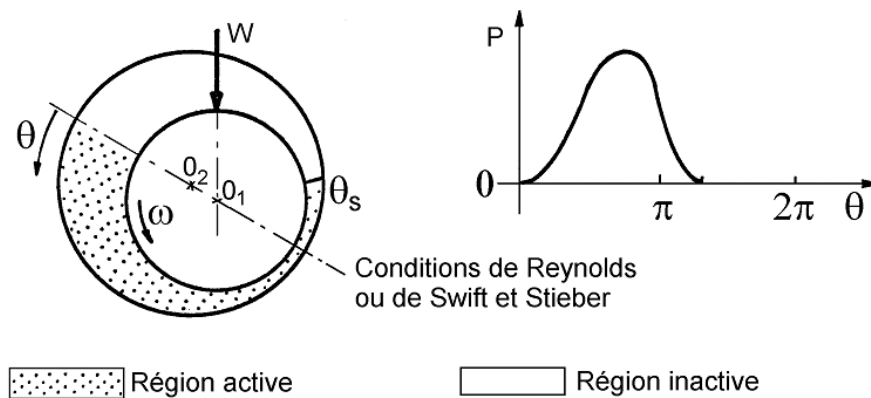
Supposons que le palier soit alimenté à la pression atmosphérique par l'intermédiaire d'une rainure axiale de largeur infiniment mince située à l'abscisse  $\theta = 0$ . Les conditions aux limites :

$$P(\theta = 0) = P(\theta = \theta_s) = 0$$

$$\frac{dP}{d\theta}(\theta = \theta_s) = \frac{dP}{dz}(\theta = \theta_s) = 0$$

$\theta_s$  étant la limite de la zone active du film.

On distingue ainsi deux régions dans le palier : une région active où la pression est positive et le film complet pour des valeurs de  $\theta$  comprises entre 0 et  $\theta_s$  et une région inactive à pression nulle ( $\theta_s < \theta < 2\pi$ ).



*Condition aux limites de Reynolds*

Une première intégration de l'équation de Reynolds donne :

$$\frac{dP}{d\theta} = 6 \mu R^2 \omega_a \frac{h - h^*}{h^3}$$

$h^*$  étant l'épaisseur du film lubrifiant au point où le gradient de pression est nul. En intégrant et en remplaçant  $h$  par sa valeur, on obtient :

$$P = 6 \mu \omega_a \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left[ \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h^*}{C} \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right] + k$$

où  $k$  étant la constante d'intégration.

Pour calculer ces deux intégrales, on utilise le changement de variable de Sommerfeld défini par :

$$1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \psi}$$

Soit :

$$\cos \theta = \frac{\cos \psi}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \psi}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad d\theta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} d\psi}{1 - \varepsilon \cos \psi}$$

Les deux constantes d'intégration qui apparaissent dans l'équation de pression sont donc déterminées à partir de deux conditions aux limites :

$$P(\theta = 0) = 0 \quad \text{ou} \quad P(\theta = \psi) = 0$$

$$P(\theta = \theta_s) = \left(\frac{dP}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_s} = 0 \quad \text{ou} \quad P(\psi = \psi_s) = \left(\frac{dP}{d\psi}\right)_{\psi=\psi_s}$$

La pression devient donc :

$$P(\psi) = \frac{6 \mu R^2 \omega_a}{C^2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left[ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{2 \psi - 4 \varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi}{2(1 - \varepsilon \cos \psi_s)} \right]$$

où  $\psi_s$ , qui correspond à l'abscisse de rupture du film d'huile, est défini par la relation :

$$\varepsilon(\sin \psi_s \cos \psi_s - \psi_s) + 2(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)$$

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] S.MARTIN. « Contribution à la modélisation de phénomènes de frontière libre en mécanique des films minces ». I.N.S.A, MathIF, 2005.
- [2] W.HARDY et I. BIRCUMSHAW. « Boundary lubrication : plane surfaces and the limitation of Amontons law ». Proc. R. Soc. London, 108 ,1-27,1925.
- [3] J. FRENE. « Butées et paliers hydrodynamiques ». Technique de l'ingénieur, traité Génie Mécanique.
- [4] A.N. Grubin, et I.E. Vinogradova « Investigation of Scientific and Industrial Research ». Central Research Institute for Technology and Mechanical Engineering Book 30, (pp. 115-166), (Moscow), D.S.I.R. Londres, Translation n° 337 ,1949.
- [5] G.R. Higginson, « The Theoretical Effects of Elastic Deformation on the Bearing Liner on Journal Bearing Performance ». Proc. Of the Symposium on the Elastohydro dynamic Lubrication, Instn. Mech. Engrs., Vol. 180, paper 1, p. 31 , 1965-66.
- [6] V. OPTASANU. « Modélisation expérimentale et numérique de la lubrification des paliers compliants sous chargement dynamique ».Thèse de Doctorat. Université de Poitiers, 2000.
- [7] R., Boncompain, M. Fillon, J. Frêne. « Analysis of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings ». ASME J. Tribol. 1986, 108, 219-224.
- [8] O. Zienkiewicz. « Temperature distribution with in lubricating film between parallel bearing surfaces and its effects on the pressures developed ». Proc Conf Lub Wear Inst Engrs 1958; 28:135-41.
- [9] D. Dowson. « A generalized Reynolds equation for fluid film lubrication ». Int J Mech Sci 1962;4:159-70.
- [10] I. Pierre, M Fillon. « Influence of Geometric Parameters and Operating Conditions on Thermohydrodynamic Behavior of Plain Journal Bearings ». IMechE J. Engng Tribol 2000; 214,445-457.
- [11] I. Pierre, J. Bouyer, M. Fillon. « Thermohydrodynamic Study of Misaligned Plain Journal Bearings – Comparison Between Experimental Data and Theoretical Results ». Int. J. Appl. Mech Engng 2002; 7, 949-960.
- [12] BC. Majumdar. « The thermodynamic solution of oil journal bearing ». Wear 1975; 31: 287- 94.
- [13] Wang, Y., Zhang, C., Liu, G., Wang, J.Q. & Lin, C. « A mixed-TEHD analysis and experiment of journal bearings under severe operating conditions ». 2nd World Tribology Congress, Vienne, Autriche, 3-7 Septembre, 2001, paper#252, CD, 5 pages.
- [14] J. Ferron, J. Frene , R. Boncompain. « A study of thermo-hydrodynamic performance of a Plain journal bearing comparison between theory and experiments ». Trans ASME J Lub Technol 1983; 105:422-8.
- [15] SS.Banwait, HN. Chandrawat . « Study of thermal boundary conditions for a plain journal bearing ».Tribol Int 1998; 31:189-96.
- [16] GH. Jang, DI. Chang. « Analysis of a hydrodynamic herringbone grooved journal bearing considering cavitations ». ASME J Tribol 2000;122:103-9.
- [17] JT. Sawicki, Rao TVVLN. « Stability characteristics of herringbonegrooved journal »

- [18] CARL T.E. « An experimental investigation of a cylindrical journal bearing under constant and sinusoidal loading ». Second convention Lubrification and Wear, Proc. Inst. Mech Engrs, 1963-64, Vol 178, Pt 3N, PP 100-119.
- [19] M.M. Reddi. « Finite Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem » ASME, Journal of Lubrication Technology, 1969, Vol. 91, pp. 524-533.
- [20] K. Herrebrugh. « Solving the Incompressible and Isothermal Problem in Elastohydrodynamic Lubrication Through an Integral Equation » Transaction of the ASME, Journal of Lubrication Technology, 1968, pp. 262-270.
- [21] D. Nicolas. « Les Paliers Hydrodynamiques Soumis à un torseur de Forces Quelconques ». Thèse de docteur ingénieur, 1972, INSA de Lyon.
- [22] D. Nicolas. et J. Frêne. « Tilting Torque Permissible in Plain Bearing. Theory, Experimental Results and Application to Machine Design ». Ist European Tribology Congress 1973.
- [23] K.P. Oh., Huebner, K.H. « Solution of the Elastohydrodynamic Finite Journal Bearing Problem ». ASME- Journal of Lubrication Technology, 1973, Vol. 3, pp. 342-352
- [24] L. Wechsler. « An Analysis of Partial Arc Bearing Including Effects of Elasticity and Viscosity ». Naval Engineers Journal, 1973, Vol. 85, pp.50-58, USA
- [25] S.M. Rhode, K.P. Oh. « A Unified Treatment of Thick and Thin Film Elastohydrodynamic Problems by Using Higher Order Element Methods » Proc. Of R. Soc., Londre, 1975, Vol. A. 343, pp. 315-331
- [26] S.M. Rhode, K.P. Oh. « Higher Order Finite Element Methods for the Solution of Compressible Porous Bearing Problem » Int. J. Num. Meth. Eng., 1975, Vol. 9, pp. 903-911
- [27] H.D. Conway, H.C. Lee. « The Analysis of the Lubrication of a Flexible Journal Bearing ». Transaction of the ASME, Journal of Lubrication Technology, 1975, pp. 559-604
- [28] H.D. Conway, H.C. Lee. « The Lubrication of a Short Flexible Journal Bearing » Transaction of the ASME, Journal of Lubrication Technology, 1975, pp. 376-378
- [29] B. Fantino, J. Frêne et J. Du Parquet. « Elastic Connecting-Rod Bearing with Piezoviscous Lubricant : Analysis of the Steady State Characteristics ». ASME Journal of Lubrication Technology, 1979, Vol., 101, pp. 190-200
- [30] J. Pierre-Eugene, J. Frêne, B. Fantino, G. Roussel, J. du Parquet. « Theory and The Experiments on Elastic Connecting-Rod Bearings Under Steady State Conditions ». 9 Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Leeds, Grande-Bretagne, Sept. 1982, édité par D. Dowson, C.M. Taylor, M. Godet, et D. Berthe, "Tribology of Reciprocating Engines", Butterworths Westbury House, 1983, pp. 49-54
- [31] G. CIMATTI et O. MENCHI. « On the numerical solution of a variational inequality connected with the hydrodynamic lubrication of a complete journal bearing ». Calcolo, 15(3) :249-258, 1978.
- [32] G.BAYADA et M.CHAMBAT. « The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation : a mathematical proof ». Appl. Math.Optim., 14(1) : 73-93, 1986.
- [33] S. A. NAZAROV. « A symptotic solution of the Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid ». Sibirsk. Mat. Zh., 31(2) : 131-144, 1990.
- [34] J. BOUYER, M. FILLON. « Influence des déformations élastiques et des effets thermiques sur les performances d'un palier hydrodynamique soumis à de très fortes charges ». 16<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique. Nice, 1-5 septembre 2003.
- [35] G.V. Kolosov. On the application of complex function theory of a plane problem of the mathematical theory of elasticity. Dorpat (Yuriev) University, 1909.

- [36] N. I. Muskhelishvili. « Some basic problems of the mathematical theory of elasticity ». P.Noordhoff Ltd, 4<sup>ème</sup> édition, 1963.
- [37] L. Solomon. Elasticité linéaire. Masson et Cie, 1968.
- [38] M. Lahma. « Modélisation du comportement élastohydrodynamique des revêtements de surface dans les paliers hydrodynamiques ». Thèse de docteur, Université de Poitier, 1991.
- [39] A. Nouar. « Analyse des contraintes et des déformations des tubes et secteurs cylindriques : Application à la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure dans les paliers hydrodynamiques ». Mémoire de Magister, Université de Guelma, 2005.
- [40] A. MOUSSA. « Comportement des paliers fluides en régimes de lubrification hydrodynamique et élastohydrodynamique ». Thèse de magister, Université Annaba, 1997.
- [41] Jean-Marie GEORGES. « Frottement, usure et lubrification. La tribologie ou science des surfaces ». Edition EYROLLES. Paris, 2000.
- [42] J-L. LIGIER. « Lubrification des paliers moteurs. Publication de l'institut français du pétrole ». Editions technip. Paris, 1997.
- [43] J.FRNE. « Lubrification hydrodynamique », Eyrolles, 1990.
- [44] M. Sahu, M. Sarangi, B.C. Majumdar. Thermo-hydrodynamic analysis of herringbone grooved journal bearings. Tribology International 2006 ; 39: 1395–1404
- [45] M. Fillon, J. Bouyer. « Thermohydrodynamic analysis of a worn plain journal bearing ». Tribology International 2004 ; 37 : 129–136
- [46] M.He, C.H. Cloud, J.M. Byrne. « Fundamentals of fluid film journal bearing operation and modeling ». Thirty-Fourth Turbomachinery syposium 2005: 155-175.
- [47] Desbordes H, Fillon M, Chan Hew Wai C, Frêne J. « Dynamic analysis of tilting-pad journal bearing-influence of pad deformations ». ASME J Tribol 1994;116(3): 621–8.

# PRINCIPALES NOTATIONS

## Chapitre II

$H$	Rapport des rayons des deux cercles limites d'une couronne circulaire, $(R_0/R_1)$
$L_{ij}, L'_{ij}$	Coefficient d'influence
$\ell$	Coordonnée radiale relative d'un point de la couronne $N$ , $(r/R_1)$
$N$	Ensemble des entiers naturels
$r$	Coordonnée radiale d'un point appartenant à la couronne, (m)
$R_0, R_1$	Rayons extérieur et intérieur de la couronne (m)
$t_h$	Épaisseur de la couche élastique, (m)
$U(z, \bar{z})$	Déplacement complexe d'un point courant $M(z)$
$U_k$	Coefficients de Fourier complexes du déplacement
$Z$	Ensemble des entiers relatifs
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé
$\theta$	Coordonnée circonférentielle (rad)
$\phi, \psi$	Potentiels complexes de Kolosov et Muskhelishvili
$\sigma_k$	Coefficients de Fourier complexes de la contrainte

## Chapitre III

$A(t)$	Milieu continu fonction du temps
$C$	Jeu radial (m)
$C_p$	Chaleur spécifique du lubrifiant (J/ kg °c)
$C_{p_s}$	Chaleur spécifique du solide (J/ kg °c)
$d_m$	Amplitude de mésalignement (m)
$D_m$	Degré de mésalignement ( $0 < D_m < 1$ )
$e$	Excentricité du palier (m)
$e_0$	Distance entre les centres d'axes de l'arbre et du coussinet
$E$	Module de Young du matériau (Pa)
$f_i$	Forces volumiques extérieures (N/m <sup>3</sup> )
$F_\varepsilon, F_\varphi$	Composantes de la portance hydrodynamique (N)
$h$	Épaisseur du film lubrifiant (m)
$h_0$	Épaisseur nominale du film lubrifiant (m)
$h_e$	Déplacements élastiques de la surface interne du coussinet (m)
$H$	Hauteur du film (m)
$H_1, H_0$	Bornes d'intégrale suivant la direction radiale (m)
$k_f, k_s$	Conductivité thermique du fluide et du solide (w/ m °c)
$k_x, k_z$	Coefficients dépendant du nombre de Reynolds
$L$	Longueur du palier (m)
$M_1, M_2$	Points liés aux surfaces du coussinet et de l'arbre
$M, M'$	Points liés aux deux surfaces des parois lubrifiées
$O_c, O_c$	Centres du coussinet et de l'arbre
$P$	Pression hydrodynamique (Pa)
$P$	Pression hydrodynamique sans dimension $(P H^2 / \mu_0 V L)$

$\bar{p}$	Flux de chaleur (W/m <sup>2</sup> )
$q$	Coordonnées cylindriques
$r, \theta, z$	Rayon du palier (m)
$R$	Rayons de l'arbre et du coussinet (m)
$R_a, R_c$	Nombre de Reynolds ( $\rho V H / \mu_0$ )
$Re$	Surface de la section droite d'intégrale
$S$	Temps variable (s)
$t$	Épaisseur de la couche mince interne du coussinet (m)
$t_h$	Vecteur contrainte dû aux forces extérieures, dans le repère $(x, y, z)$
$t_v$	Température variable (°C)
$T$	Température suivant les coordonnées cartésiennes (°C)
$T_i$	Temps sans dimension ( $t V / L$ )
$\bar{t}$	Composantes de la vitesse de la première paroi (m/s)
$U_{1i}$	Composantes de la vitesse de la deuxième paroi (m/s)
$U_{2i}$	Énergie interne (W)
$U_e$	Déplacements élastiques de la surface interne du coussinet (m)
$U_r$	Composantes de la vitesse du fluide lubrifiant (m/s)
$V_i$	Vitesse sans dimension du fluide en circonférentiel ( $V_1 / V$ )
$\bar{V}_1$	Vitesse sans dimension du fluide en radial ( $V_1 L / V H$ )
$\bar{V}_2$	Vitesse sans dimension du fluide suivant l'axial ( $V_3 / V$ )
$\bar{V}_3$	Charge appliquée sur le coussinet (N)
$\vec{W}$	Portance hydrodynamique (N)
$W_r$	Coordonnées cartésiennes liées à la surface de la première paroi
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes liées à la surface de la première paroi
$x_i$	Variable sans dimension en circonférentiel ( $x_1 / L$ )
$\bar{x}_1$	Variable sans dimension en radial ( $x_2 / H$ )
$\bar{x}_2$	Variable sans dimension en axial ( $x_3 / L$ )
$\bar{x}_3$	Variable sans dimension liée la géométrie du film pour le cas de mésalignement
$z^* = z / L$	Coefficient de piézoviscosité du lubrifiant (Pa <sup>-1</sup> )
$\alpha_p$	Coefficient de dilatation volumique à pression constante
$\alpha_d$	Excentricité relative du palier ( $e / C$ )
$\varepsilon$	Coefficient de Poisson
$\nu$	Vitesses angulaires de l'arbre et du coussinet (Rad/s)
$\omega_a, \omega_c$	Tenseur des contraintes
$\sigma_{ij}$	Contraintes de cisaillement
$\sigma_{xy}$	Masse volumique du fluide lubrifiant (Kg/m <sup>3</sup> )
$\rho$	Masse volumique du solide (Kg/m <sup>3</sup> )
$\rho_s$	Viscosité dynamique du fluide lubrifiant (Pa.s)
$\mu$	Viscosité dynamique à une température donnée (Pa.s)
$\mu_0$	Viscosité dynamique sans dimension ( $\mu / \mu_0$ )
$\bar{\mu}$	Second coefficient de viscosité (coefficient de Lamé) (Pa.s)
$\lambda_L$	Symbole de Kronecker
$\delta_{ij}$	Rapport de la hauteur du film à la longueur du palier ou des surfaces lubrifiées $H / L$
$\varepsilon_d$	Tenseur des taux de déformation
$\dot{\gamma}_{ij}$	Angle de calage (°C)
$\varphi$	Angle que fait la projection de la ligne des centres de l'arbre sur le plan $xoz$
$\psi$	Angle que fait la droite $(C_1 C_0 C_2)$ avec sa projection sur le plan $yoZ$
$\gamma_1$	Angle que fait cette projection ( $\gamma_1$ ) avec l'axe $Oz$
$\alpha_1$	Mésalignement relatif $d_m / C$
$\delta =$	Mésalignement relatif maximal.

$\delta_{max}$

## Chapitre IV

$A$	Matrice du système d'équations non linéaire
$B$	Vecteur du système d'équation non linéaire
$C_R$	Jeu radial (m)
$D$	Diamètre du palier (m)
$e$	Excentricité (m)
$E$	Module de Young du matériau (Pa)
$err$	Erreur de calcul itératif
$h$	Epaisseur du film (m)
$h_0$	Epaisseur nominale du film lubrifiant (m)
$L$	Longueur du palier (m)
$L_r$	Longueur de rainure axiale du palier (m)
$L/D$	Rapport de la longueur au diamètre du palier
$N$	Vitesse de rotation de l'arbre (tr/min)
$N_p$	Nombre total de points pour que $P > 0$
$P$	Pression hydrodynamique (Pa)
$\bar{P}$	Pression sans dimension
$P_a$	Pression d'alimentation (Pa)
$R_c, R_a$	Rayons du coussinet et de l'arbre (m)
$t_h$	Epaisseur de la couche élastique (m)
$U_r$	Déplacement radiale du coussinet (m)
$W_0$	Charge statique appliquée sur le palier (N)
$W_r$	Résultant hydrodynamique
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes liée à la surface interne du coussinet
$\theta$	Coordonnée circonférentielle (Rad)
$\eta$	Variable sans dimension = $z/R$
$\varepsilon$	Excentricité relative = $e/C_R$
$\mu$	Viscosité dynamique du lubrifiant (Pa.s)
$\mu_0$	Viscosité à une certaine température (Pa.s)
$\alpha_p$	Coefficient de piézo-viscosité du lubrifiant ( $\text{Pa}^{-1}$ )
$\omega_a$	Vitesse de rotation angulaire (Rad/s)
$\omega$	Coefficient de sur-relaxation
$\nu$	Coefficient du poisson du matériau
$\varphi$	Angle de calage (Rad)
$\Omega$	Coefficient de sous-relaxation

## Chapitre V

$A', A'', A'''$	Matrices de systèmes d'équations
$B', B'', B'''$	Vecteurs de systèmes d'équations
$C_p$	Chaleur spécifique du lubrifiant (J/ kg °c)
$e_c$	Epaisseur du coussinet (m)
$f(x)$	Fonction quelconque
$\bar{h}$	Pas de discrétisation pour la méthode de Simpson (m)

$K_f, K_c$	Conductivité thermique du fluide et du coussinet (w/ m °c)
$r_c$	Coordonnée radiale pour la géométrie du coussinet (m)
$R_E$	Rayon extérieur du coussinet (m)
$T_c$	Température du coussinet (°C)
$T_f$	Température du film lubrifiant (°C)
$T_0, T_a$	Température d'alimentation et de l'arbre (°C)
$u, v, w$	Composantes de la vitesse d'écoulement du film lubrifiant (m/s)
$\rho$	Masse volumique kg/m <sup>3</sup>
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes appartenant à la surface interne du coussinet

## CHAPITRE V

### SOLUTION DU PROBLEME THERMO-HYDRODYNAMIQUE (THD)

#### 1. Introduction

Les paliers hydrodynamiques sont soumis à des sollicitations de plus en plus sévères. Cela fait très souvent augmenter la pression et la température d'huile. D'autre part, il est bien connu que les lubrifiants sont très sensibles à la variation de la température, ce qui implique dans la plupart des cas une diminution de l'épaisseur du film lubrifiant dans les contacts mécaniques. Dans ce chapitre nous aborderons l'étude thermo-hydrodynamique (THD) d'un palier lisse de longueur finie chargé radialement et lourdement. Nous montrerons que les effets thermiques influent considérablement sur l'épaisseur du film et le champ de pression.

En faisant référence à des études réalisées récemment, on s'intéresse essentiellement à celle de Bouyer et Fillon [34] en 2003, qui analysent l'influence des effets élastiques et thermiques sur les caractéristiques d'un palier hydrodynamique très chargé. Ils résolvent l'équation de Reynolds généralisée bidimensionnelle, l'équation de l'énergie tridimensionnelle et l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques en introduisant une relation de viscosité donnée par Mc Coull et Walther, déduite du champ de température du film. Ainsi, une étude THD réalisée par Sahu, Sarangi et Majumdar [44] en 2006, tient compte d'un calcul transitoire et une géométrie complexe de l'arbre tournant en utilisant les mêmes équations. Fillon et Bouyer [45] entament également une analyse THD qui traite le cas d'un coussinet déjà usé et qui n'est plus cylindrique à sa surface interne. Ils utilisent les équations de Reynolds généralisée, de l'énergie et de la chaleur en introduisant une épaisseur du film modifiée. He, Cloud et Byrne [46] se sont proposés une modélisation globale sur la tribologie au sein des paliers hydrodynamiques. Dans leur étude, ils s'intéressent essentiellement au calcul thermo-élasto-hydrodynamique (TEHD) qui considère l'élasticité et l'effet thermique en utilisant les trois équations principales suscitées.

## 2. Résolution du problème thermo-hydrodynamique

Dans ce paragraphe, nous étudions par formulation mathématique le problème THD qui tient compte des effets thermiques dans le film lubrifiant selon son épaisseur. Evidemment, il s'agit d'utiliser l'équation de Reynolds généralisée (III-10) en vue d'obtenir le champ de pression, l'équation de l'énergie (III-21) pour la température du film et l'équation de transfert de chaleur (III-26) pour la température du coussinet [47].

### 2.1. Formulation mathématique

Partant des hypothèses classiques de lubrification, on peut supposer l'écoulement laminaire du fluide, les forces d'inertie négligeables et le fluide Newtonien incompressible. Aussi, la masse volumique, la chaleur spécifique, la conductivité thermique et le coefficient de transfert de chaleur sont supposés constants. D'autre part, on sait que l'augmentation de la pression et de la température du film affecte la viscosité du lubrifiant [17], ce qui permet de l'exprimer par une forme exponentielle décroissante. Elle est supposée varier en fonction de la température du film suivant les deux composantes  $\theta$  et  $y$ , il s'agit donc d'écrire :  $\mu = \mu(T_f)$  ou bien  $\mu = \mu(\theta, y)$  qui est définie par:

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta(T_f - T_0)} \quad (2)$$

où  $T_0$  et  $\beta$  sont respectivement la température d'alimentation et le coefficient de thermo-viscosité du fluide.  $\mu_0$  étant la viscosité dynamique mesurée à une température définie.

### 2.2. L'équation de Reynolds généralisée

Le champ de pression est déterminé par l'équation de Reynolds généralisée (III-10). Après simplification et en tenant compte des hypothèses et de la géométrie du palier, l'équation (III-10) prend la forme suivante :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \int_0^h \frac{R^* y}{\mu} dy - I_2 F \right) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \int_0^h \frac{R^* y}{\mu} dy - I_2 F \right) \frac{\partial P}{\partial z} \right] = \omega_a \left( \rho \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$$

où :

$$R^* = \int_0^y \rho d\xi, \quad F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R^*}{\mu(\theta, y)} dy, \quad I_2 = \int_0^h \frac{y}{\mu(\theta, y)} dy \quad \text{et}$$

$$J_2 = \int_0^h \frac{dy}{\mu(\theta, y)} \quad (V-2)$$

Les expressions qui donnent les deux composantes de la vitesse du fluide  $u, w$  à une position  $y$  quelconque dans l'épaisseur du film (III-23), deviennent :

$$u = \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left( \int_0^y \frac{\xi}{\mu(\theta, \xi)} d\xi - \frac{I_2}{J_2} \int_0^y \frac{d\xi}{\mu(\theta, \xi)} \right) + \frac{\omega R}{J_2} \int_0^y \frac{d\xi}{\mu(\theta, \xi)}$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} \left( \int_{H_1}^y \frac{\xi}{\mu(\theta, \xi)} d\xi - \frac{I_2}{J_2} \int_{H_1}^y \frac{d\xi}{\mu(\theta, \xi)} \right) \quad (V-3)$$

Nous devons en suite, chercher l'expression de la composante  $v$  de la vitesse du fluide qui peut être calculée par résolution de l'équation de la continuité (III-1). Cette dernière va être réduite car le lubrifiant est incompressible. Il en découle :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ou bien :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (V-4)$$

### 2.3. Equation de l'énergie

Nous cherchons maintenant à exprimer le champ de température dans le film lubrifiant en radial et en circonférentiel, puisque nous nous intéressons uniquement aux zones où la pression est maximale. Par conséquent, nous savons que si le palier étudié est aligné, la pression maximale se situe en mi-plan du palier, expliquant bien l'objectif de cette proposition. Les températures du film lubrifiant sont calculées grâce à l'équation bidimensionnelle d'énergie (III-21) qui inclut l'effet de transfert thermique par conduction et convection dans le fluide ainsi que la dissipation visqueuse d'écoulement. Dans la zone active, selon la théorie des films minces visqueux et en négligeant les variations de température suivant la direction axiale, l'équation de l'énergie devient en régime stationnaire :

$$\rho C_p \left( \frac{u}{R} \frac{\partial T_f}{\partial \theta} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) = K_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (V-5)$$

## 2.4. L'équation de transfert de chaleur

Là, le transfert thermique par conduction dans le coussinet est pris en compte. Lorsque l'arbre de notre palier tourne à grandes vitesses, il est possible pour des raisons de simplification, de négliger le transfert thermique en radial et en circonferentiel. Le champ de température du coussinet en circonferentiel et en radial est déterminé par l'équation de transfert de chaleur bidimensionnelle en coordonnées cylindriques et en régime stationnaire. Le transfert de chaleur en axial ne sera pas pris en compte lorsqu'on aura résolu l'équation (III-26) dans la zone de pression maximale. On obtient alors :

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial r_c^2} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial T_c}{\partial r_c} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{V-6})$$

## 3. Méthode de résolution

On choisit pour la résolution de ces équations différentielles, la méthode des différences finies présentée précédemment [47], qui est simple et facile à maîtriser, sauf que les conditions aux limites qu'on doit utiliser, peuvent s'y appliquer difficilement. On constate que pour cette modélisation, on a besoin d'une autre méthode numérique pour le calcul des intégrales se trouvant dans l'équation V-2, et dans les composantes de la vitesse du film (équation V-3), telle que la méthode de Simpson composite. En effet, cette dernière peut s'adapter à la discrétisation par différences finies. Le choix de cette méthode peut être justifié par le fait qu'à chaque étape de calcul, les fonctions à intégrer ne sont plus définies et subissent toujours avant convergence, des petites variations liées aux changements de la viscosité et l'épaisseur du film.

### 3.1. Maillage

Le maillage utilisé pour ce problème est de 41 points en circonferentiel, 21 en axial, 21 suivant l'épaisseur du film lubrifiant et 21 points en radial pour le coussinet. Les critères de convergences sont  $10^{-1}$  pour le champ de pression et  $10^{-3}$  pour la température du film et du coussinet. La figure V.1, illustre le maillage suivi pour le problème THD. En ce qui concerne le maillage selon l'épaisseur du film, il serait préférable de mettre au point une discrétisation à pas variables, permettant d'estimer les changements d'épaisseur produits durant le calcul, compte tenu de l'allure de l'épaisseur du film en fonction de la circonférence.

### 3.2. Discrétisation de l'équation de Reynolds généralisée

L'équation de Reynolds généralisée réduite (V-2) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial G^*}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} G^* \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial G^*}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} + G^* \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \omega_a \left( \rho \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0$$

où 
$$G^* = \int_0^h \frac{R^* y}{\mu} dy - I_2 F \quad (V-7)$$

En remplaçant les dérivées exactes par des différences finies centrées, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 R^2 (\Delta \theta)^2} (G_{i+1}^* - G_{i-1}^*) (P_{i+1,j} - P_{i-1,j}) + \frac{G_i^*}{R^2 (\Delta \theta)^2} (P_{i+1,j} - 2 P_{i,j} + P_{i-1,j}) + \\ + \frac{G^*}{(\Delta z)^2} (P_{i,j+1} - 2 P_{i,j} + P_{i,j-1}) - \frac{\omega_a}{2 \Delta \theta} [\rho (h_{i+1} - h_{i-1}) - (F_{i+1} - F_{i-1})] = 0 \end{aligned} \quad (V-8)$$

où  $P_{i,j} = P(i,j)$

Si on regroupe les termes  $P_{i,j}$ , celle-ci peut s'exprimer sous la forme matricielle :

$$[A']\{P\} = \{B'\} \quad (V-9)$$

En ce qui concerne le calcul de  $G^*$  qui contient des éléments d'intégration, on tente d'appliquer la méthode numérique de Simpson composite qui consiste à trouver une approximation de ces intégrales en subdivisant l'intervalle d'intégration en sous intervalles pour améliorer la précision de la méthode classique de Simpson.

Etant donnée une fonction quelconque  $f(x)$ . L'intégration de celle-ci en fonction de la variable  $x$  sous un intervalle  $[a, b]$  subdivisé  $[x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n]$ , s'exprime par :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=1,3,\dots}^{n-2} \left[ \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \right]$$

où 
$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{\bar{h}}{3} [f(x_i) + 4 f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

ou bien, on utilise la forme simplifiée :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\bar{h}}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (\text{V-10})$$

avec :  $\bar{h}$  représente le pas de discrétisation.

Ayant abouti à une approche approximative d'intégration, nous procédons au calcul des intégrales pour chaque étape itérative. Il s'avère lors du calcul, que nous ne pouvons obtenir des approximations variantes qu'à partir de nouvelles valeurs de viscosité. La viscosité qui est fonction de la température variant selon l'épaisseur du film ne peut être obtenue qu'en calculant le champ de pression, puis le champ de température. Pour cela, nous devons faire appel à l'analyse isotherme (HD), permettant d'approcher les résultats et de rendre adéquat notre procédé. D'autre part, la discrétisation de l'intervalle d'intégration doit être identique à celle des différences finies concernant les trois principales équations suscitées.

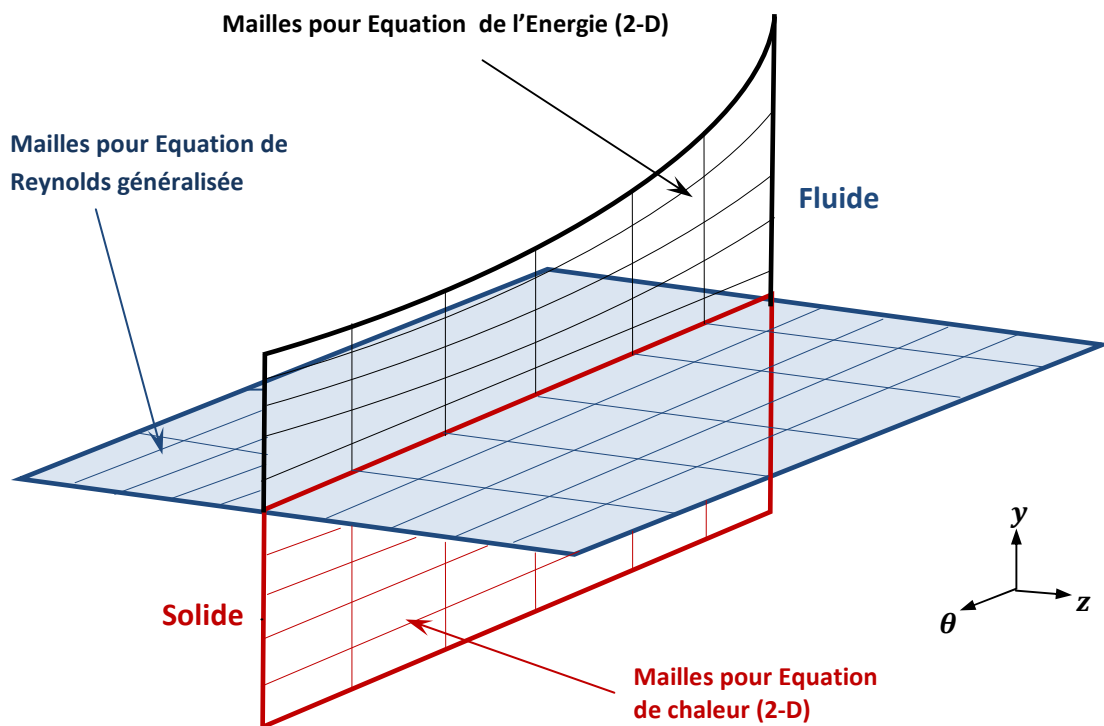


Figure V.1 : Discrétisation globale des géométries étudiées

### 3.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'équation d'énergie (V-5) devient en utilisant des différences finies avec pas droit :

$$\begin{aligned} \rho C_P \left( \frac{u_{i,k}}{R} \frac{T_f^{i+1,k} - T_f^{i,k}}{\Delta\theta} + v_{i,k} \frac{T_f^{i,k+1} - T_f^{i,k}}{\Delta y} \right) - \\ - K_f \frac{T_f^{i,k+1} - 2T_f^{i,k} + T_f^{i,k-1}}{(\Delta y)^2} - \mu_{i,k} \left( \frac{u^{i,k+1} - u^{i,k}}{\Delta y} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (V-11)$$

En regroupant les termes  $T_f^{i,k}$ , nous obtenons la forme :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2k_f}{(\Delta y)^2} - \rho C_P \left( \frac{u_{i,k}}{R \Delta\theta} + \frac{v_{i,k}}{\Delta y} \right) \right] T_f^{i,k} + \left( \rho C_P \frac{v_{i,k}}{\Delta y} - \frac{k_f}{(\Delta y)^2} \right) T_f^{i,k+1} + \\ \rho C_P \frac{u_{i,k}}{R \Delta\theta} T_f^{i+1,k} - \frac{k_f}{(\Delta y)^2} T_f^{i,k-1} - \mu_{i,k} \left( \frac{u^{i,k+1} - u^{i,k}}{\Delta y} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (V-12)$$

L'équation (V-12) s'écrit aussi sous le système d'équation :

$$[A''] \{T_f\} = \{B''\} \quad (V-13)$$

### 3.4. Discrétisation de l'équation de transfert de chaleur

Après discrétisation de la géométrie du coussinet développé par différences finies centrées, l'équation de transfert de chaleur (V-6) prenant en compte les variations de la température selon la circonférence et l'épaisseur du coussinet s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{T_c^{l+1,i} - 2T_c^{l,i} + T_c^{l-1,i}}{(\Delta r_c)^2} + \frac{1}{(l-1)\Delta r_c} \frac{T_c^{l+1,i} - T_c^{l-1,i}}{2\Delta r_c} + \\ + \frac{1}{[(l-1)\Delta r_c]^2} \frac{T_c^{l,i+1} - 2T_c^{l,i} + T_c^{l,i-1}}{(\Delta\theta)^2} = 0 \end{aligned} \quad (V-14)$$

Nous l'écrivons aussi :

$$2 \left[ \frac{1}{(\Delta r_c)^2} + \frac{1}{[(l-1)\Delta r_c \Delta \theta]^2} \right] T_c^{l,i} - \left[ \frac{1}{(\Delta r_c)^2} + \frac{1}{2(l-1)\Delta r_c^2} \right] T_c^{l+1,i} \\ \left[ \frac{1}{2(l-1)\Delta r_c^2} - \frac{1}{(\Delta r_c)^2} \right] T_c^{l-1,i} - \frac{1}{[(l-1)\Delta r_c \Delta \theta]^2} (T_c^{l,i+1} + T_c^{l,i-1}) = 0 \quad (\text{V-15})$$

et (V-15) peut aussi se transformer au système (V-16) :

$$[A'''] \{T_c\} = \{B'''\} \quad (\text{V-16})$$

#### 4. Conditions aux limites

L'équation de Reynolds généralisée, l'équation de l'énergie et l'équation de transfert de chaleur ne peuvent être résolues qu'avec des conditions aux frontières ou bien aux limites entre le liquide et le solide, que nous devons rajouter dans le procédé de calcul. Ici, l'équation de l'énergie et celle de transfert de chaleur interviennent comme étant conditions aux limites l'une par rapport à l'autre; c'est-à-dire, lorsque l'on résout l'équation de l'énergie, les conditions aux limites qui conviennent, sont déduites de l'équation de la chaleur. Cette dernière à son tour ne peut se résoudre qu'en rajoutant les conditions aux limites déduites de l'équation de l'énergie et vis versa. Autrement dit, ce calcul ne peut être effectué que lorsqu'on met en évidence sa relation avec l'équation de Reynolds généralisée. Les conditions aux limites étant :

##### 4.1. Conditions aux limites pour le champ de pression (de Reynolds)

- (i) Les pressions dans les deux extrémités du palier sont égales à la pression atmosphérique, on peut donc écrire :

$$P(\theta, \mp L/2) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (\text{V-17.a})$$

- (ii) La distribution des pressions est symétrique par rapport au mi-plan :

$$\partial P / \partial z(\theta, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (\text{V-17.b})$$

- (iii) Dans la zone inactive les pressions  $P$  doivent être égales à 0 quand  $P \leq 0$ .

## 4.2. Conditions aux limites pour le film fluide

Les conditions aux limites suivantes sont employées pour la résolution de l'équation de l'énergie [15].

$$(i) \quad \text{Sur l'interface fluide-arbre } (y = h) : \quad T_f = T_a \quad (\text{V-17.c})$$

$$(ii) \quad \text{Sur l'interface fluide-coussinet } (y = 0) : \quad T_f = T_c \quad (\text{V-17.d})$$

## 4.3. Conditions aux limites pour le coussinet

(i) Sur l'interface fluide-coussinet ( $y = 0, r_c = R_c$ ) la température est donnée par le flux de chaleur de conduction [15]:

$$K_c \left( \frac{\partial T_c}{\partial r_c} \right)_{r_c=R_c} = -K_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{V-17.e})$$

Dans la zone inactive :  $T_c = T_f$ .

(ii) Sur la surface circonférentielle extérieure du coussinet ( $r_c = R_E$ ), intervient la convection d'environnement :

$$K_c \left( \frac{\partial T_c}{\partial r_c} \right)_{r_c=R_E} = h_a [(T_c)_{r_c=R_E} - T_e] \quad (\text{V-17.f})$$

## 5. Procédé de calcul

Dans ce paragraphe, nous présentons en détail l'algorithme de résolution du problème THD qui illustre clairement toutes les étapes de calcul que nous avons expliquées ci-dessus.

Le procédé de calcul se résume comme suit (figure V.2) :

1. Calculer le champ de pression en résolvant l'équation de Reynolds (IV-4) pour une viscosité initiale constante
2. Calculer les composantes de la vitesse du fluide (V-3) pour résoudre l'équation d'énergie
3. Résoudre l'équation d'énergie (V-12) pour le film fluide et l'équation de transfert de chaleur pour le coussinet (V-15)

4. Calculer la nouvelle viscosité du film (V-1)
5. Calculer les intégrales que contient l'équation de Reynolds (V-10) et les composantes de la vitesse d'écoulement du lubrifiant (V-3)
6. Recalculer un nouveau champ de pression à l'aide de l'équation (V-8)
7. Recalculer les composantes de la vitesse et les températures du film et du coussinet
8. Répéter les étapes de 4 à 7 jusqu'à ce que la température du film converge
9. Calculer les caractéristiques statiques du contact hydrodynamique.

## 6. Résultats et discussions

Le cas étudié concerne un palier lisse cylindrique ayant une rainure d'alimentation d'huile axiale. Les caractéristiques statiques, dynamiques et géométriques du palier sont présentées dans le tableau V.1. Lorsque ce palier a un rapport  $L/D = 1$ , on considère le cas d'un palier de longueur finie, qui rend le calcul bidimensionnel, se traduisant dans l'équation de Reynolds par les débits circonférentiel et axial non négligeables.

Les résultats obtenus montrent l'influence des effets thermiques dans un contact hydrodynamique lubrifié par une huile du type ISOVG32. On s'intéresse à l'influence de la charge appliquée sur la pression, l'épaisseur du film et la température, ainsi qu'à l'influence de la vitesse de fonctionnement sur les caractéristiques de ce contact.

### 6.1. Influence de la température sur le champ de pression

Dans ce qui suit, on montre la distribution de la pression à la surface interne du coussinet dans le calcul HD et on la compare avec celle de THD. Dans la figure V.3.(a) qui présente la distribution du champ de pression hydrodynamique d'un palier lisse aligné, on constate que le champ de pression est étendu dans la zone critique ( $140^\circ$ - $180^\circ$ ), s'expliquant par le fait que l'épaisseur du film est minimale. Dans la zone inactive, le champ de pression est toujours nul, car partant de nos hypothèses et compte tenu des conditions de Reynolds, le film lubrifiant devrait se rompre dans un certain point dit : point de rupture du film, si bien qu'au-delà de celui-ci, il n'y aurait plus de pression. Pratiquement, dans le point de rupture qui se trouve dans la partie divergente, le film complet se sépare en deux parties sous forme de couches minces sur les surfaces de parois (arbre et coussinet), d'où une zone inactive de nature mixte.

Egalement, dans le calcul isotherme (HD), on obtient la même distribution de pression, sauf qu'elle a des valeurs maximales inférieures de celle du calcul THD.

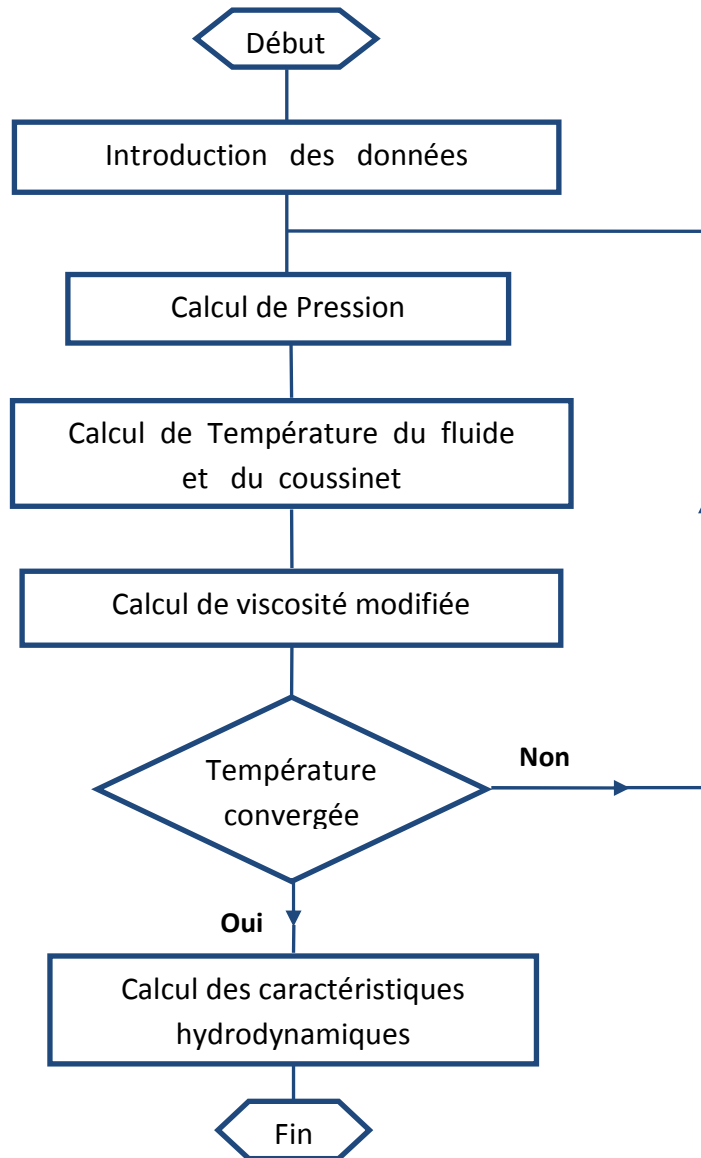
**Tableau V.1.** *Caractéristiques du palier, du lubrifiant et d'environnement*

Palier lisse de longueur finie : $L/D = 1$		
Diamètre du palier	$D$ [mm]	160
Longueur de l'arbre	$L$ [mm]	160
Jeu radial à 20°C	$C_R$ [ $\mu\text{m}$ ]	50,0
Longueur de rainure axiale	$L_r$ [mm]	150
Épaisseur du coussinet	$e_c$ [mm]	40
Conductivité thermique du coussinet	$K_c$ [w/ m °C]	111
Température d'alimentation	$T_0$ [°C]	45
Température de l'environnement	$T_e$ [°C]	30
Coefficient de convection de l'environnement	$h_a$ [w/ m <sup>2</sup> °C]	20
Lubrifiant		ISOVG32
Masse volumique du lubrifiant	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	860
Chaleur spécifique du lubrifiant	$C_p$ [J/ kg °C]	2000
Conductivité thermique du lubrifiant	$K_f$ [W/ m °C]	0.13
Viscosité de l'huile à 40 °C	$\mu_1$ [Pa.s]	0.0224
Viscosité de l'huile à 70 °C	$\mu_2$ [Pa.s]	0.0112

Si le palier est mésaligné, la distribution du champ de pression devient différente. Dans la figure V.3.(b), nous constatons que la pression maximale est située à l'extrémité du palier, que ce soit pour le régime isotherme (HD) ou bien pour le calcul THD. Pour des valeurs importantes de charges statiques, il y a création d'un pic dans le champ de pression à l'extrémité du palier se traduisant par la concentration locale du chargement statique qui elle-même, implique que l'épaisseur du film dans cette zone est très réduite (figure V.2.c). Toutefois, lorsque nous nous sommes intéressés dans l'analyse THD au champ de température maximale qui est au mi-plan du palier, le champ de pression obtenu en prenant en compte le mésalignement du palier, ne subit pas un changement considérable, car lors du calcul il est difficile de sélectionner à chaque étape itérative un champ de pression maximal qui n'est plus au mi-plan du palier.

## 6.2. Influence des conditions de fonctionnement sur la pression maximale

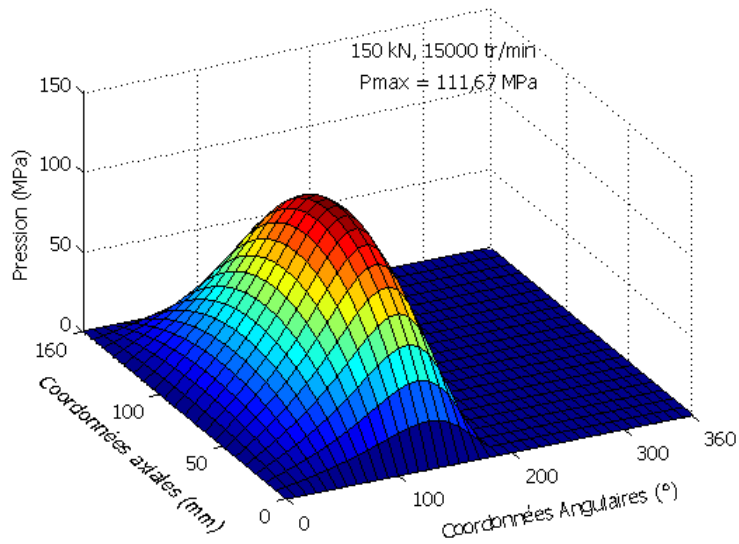
Dans ce paragraphe, nous cherchons à expliciter l'influence du chargement statique et de la vitesse de fonctionnement dans les zones les plus critiques. Les résultats des études isothermes (HD) et THD sont également comparés.



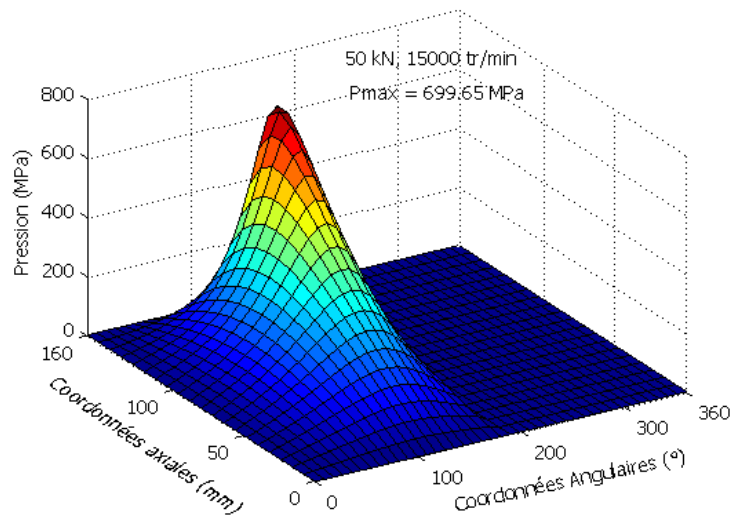
**Figure V.2 :** *Algorithme de calcul THD*

La figure V.4.(a) présente la variation de la pression selon la circonférence au mi-plan du palier. En appliquant une charge de 150 KN et deux vitesses différentes, on remarque dans le calcul THD que la pression maximale est réduite par l'augmentation de la vitesse de fonctionnement, mais si on compare le cas HD avec THD pour les deux vitesses 1500 et 3000 tr/min, on constate qu'il y a peut-être plus de 50 % d'écart entre les pressions maximales. La figure V.4.(b) présente également la variation de la pression de mi-plan en fonction de la circonférence. Dans celle-ci, la vitesse de fonctionnement est fixée 3000 tr/min,

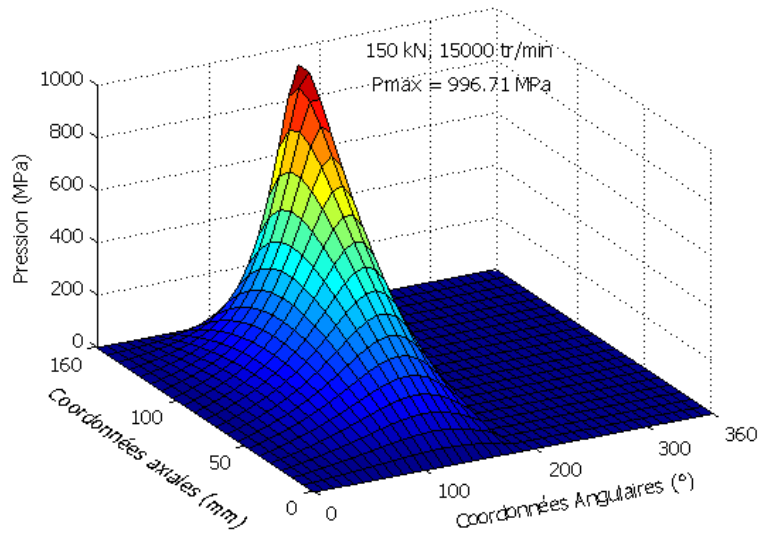
et deux valeurs de la charge appliquée 50-100 kN, sont utilisées. A noter que si l'on compare les résultats de calcul HD et THD, on obtient un écart de l'ordre de 30 % et de 28 % entre les pressions maximales pour les charges 50 kN et 100 kN respectivement, de telle sorte que la pression maximale se trouve plus élevée quand la charge est relativement importante.



(3.a)



(3.b) :  $D_m = 80\%$  ,  $\psi = 2^\circ$



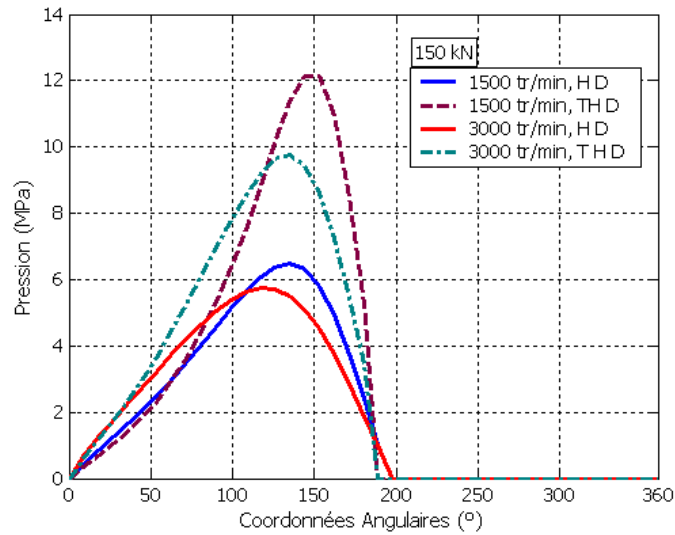
(3.c) :  $D_m = 80\%$  ,  $\psi = 2^\circ$

Figure V.3 : Champ de pression hydrodynamique au sein du palier

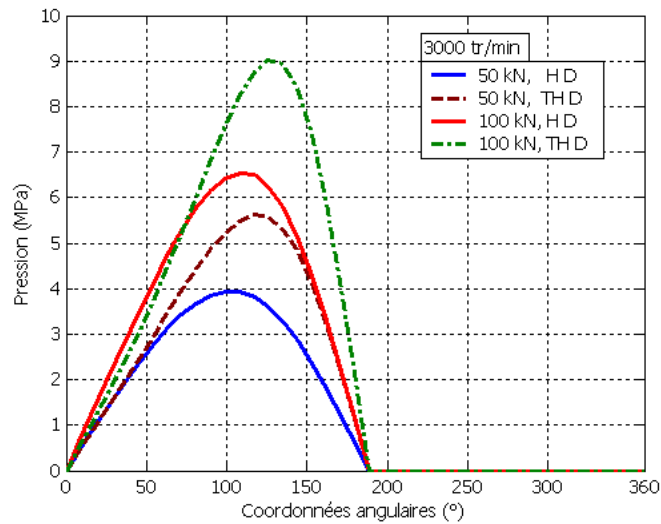
### 6.3. Influence des conditions de fonctionnement sur l'épaisseur du film

La figure V.5 donne la variation de l'épaisseur du film selon les coordonnées angulaires. On constate dans la figure V.5.(a) que l'épaisseur du film est réduite en faisant diminuer la vitesse de rotation de l'arbre, ce qui provoque aussi une augmentation de la pression maximale. Les effets thermiques ont une influence considérable sur l'épaisseur minimale du film lorsqu'on fait varier la vitesse 1500-3000 tr/min pour une charge fixe 150 kN. Ceci repose sur la viscosité du lubrifiant qui doit être réduite par l'élévation de la température, et qui correspond au calcul théorique de l'excentricité relative en relation avec l'expression de l'épaisseur du film. De même, dans la réalité en réchauffant un fluide visqueux ayant une certaine viscosité, on sait bien que cette dernière va être réduite. La figure V.5.(b) nous montre que l'épaisseur du film devient plus réduite si l'on applique une charge plus élevée 100 kN, à une vitesse relativement faible 3000 tr/min. Autrement, la comparaison des épaisseurs obtenues de calcul HD et THD, dégage un écart de réduction de 17 % environ, pour la charge 50 kN et d'environ 23 % pour la charge 100 kN. Ces résultats expliquent par conséquent, l'importance de la prise en compte des variations de température du lubrifiant

dues au champ de pression, dans l'étude du comportement et des caractéristiques du contact pour paliers hydrodynamiques.

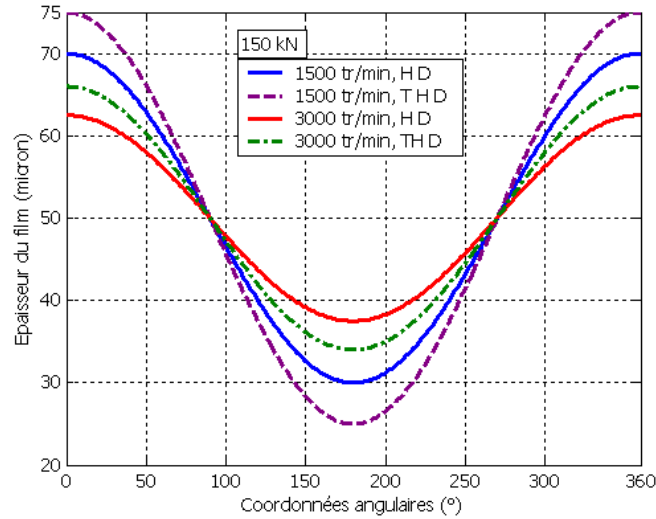


(4.a)

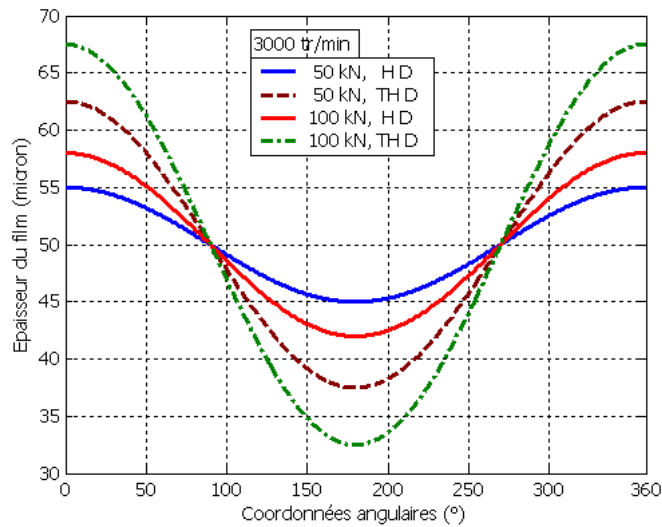


(4.b)

Figure V.4 : Pression circonférentielle du mi-plan du palier



(5.a)



(5.b)

Figure V.5 : Epaisseur du film circonférentielle du mi-plan du palier

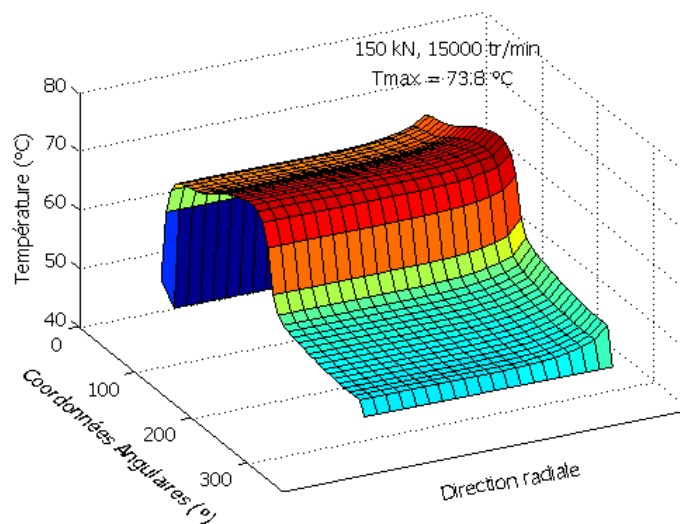
#### 6.4. Influence des conditions de fonctionnement sur la température maximale

La figure V.6 montre le champ de température du film obtenu par la résolution de l'équation de l'énergie qui fait partie du procédé de calcul global. On constate que la température est sensiblement plus élevée dans la zone critique, d'où une relation corrélative avec le champ de pression. Selon la direction radiale, tant que l'épaisseur du film est très

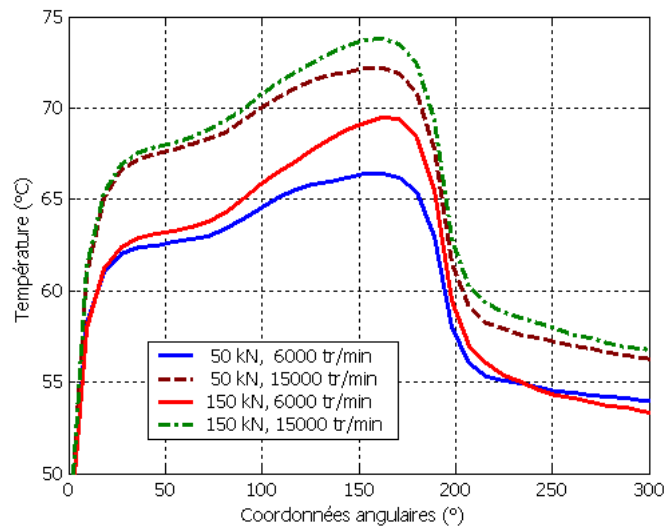
réduite, les températures en positions radiales (nœuds) ne connaissent pas d'écarts significatifs.

La figure V.7 présente la répartition circumférentielle de la température maximale du film lubrifiant obtenue en mettant au point différentes charges et vitesses. La figure V.7.(a) indique bien que lorsque la vitesse de fonctionnement est plus grande (15 000 tr/min), la température maximale du film devient élevée (72 et 74 °C). Par contre, si l'on fait varier la charge appliquée (50-150 KN) à une vitesse constante (6000 ou 15 000 tr/min), la température prend des valeurs peu proches. Sur la figure V.7.(b), on remarque que la variation de la charge appliquée (30-60 KN) n'a pas d'influence significative sur la température à des vitesses de fonctionnement relativement moyennes (3000 ou 9000 tr/min). La comparaison des figures V.7.(a-b), montre que si l'écart de la variation de vitesse de rotation est plus grand, la température devient plus élevée, c'est-à-dire que l'accroissement de la vitesse de fonctionnement influe fortement sur la température maximale du film.

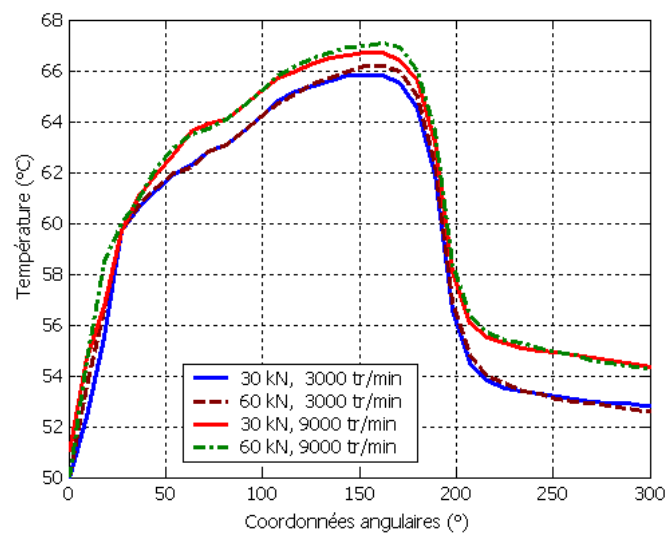
La figure V.8 donne la variation de la température maximale du film en fonction de l'excentricité relative. Sur celle-ci, on peut observer que la température maximale du film augmente lentement par l'augmentation de l'excentricité relative, ce qui confirme bien les résultats de la figure V.7, et prouve que l'excentricité relative étant liée théoriquement à la charge appliquée, la vitesse de fonctionnement et la viscosité.



**Figure V.6 :** Champ de température du film en fonction de  $\theta$  et  $h$

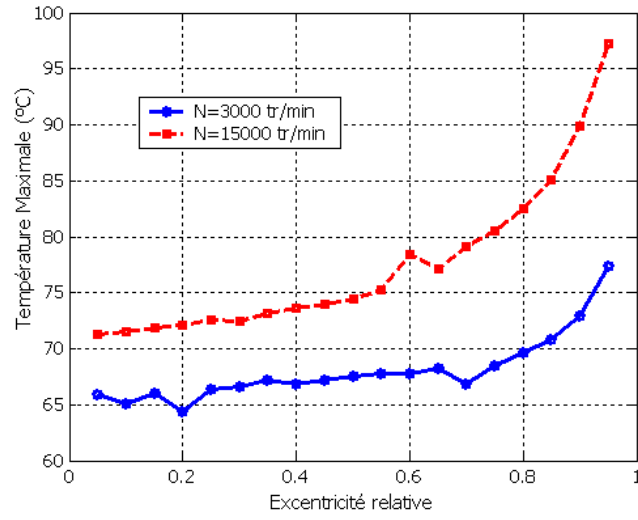


(7.a)

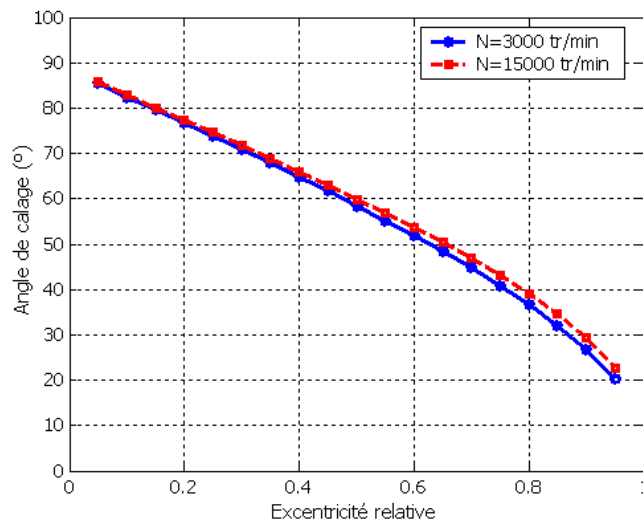


(7.b)

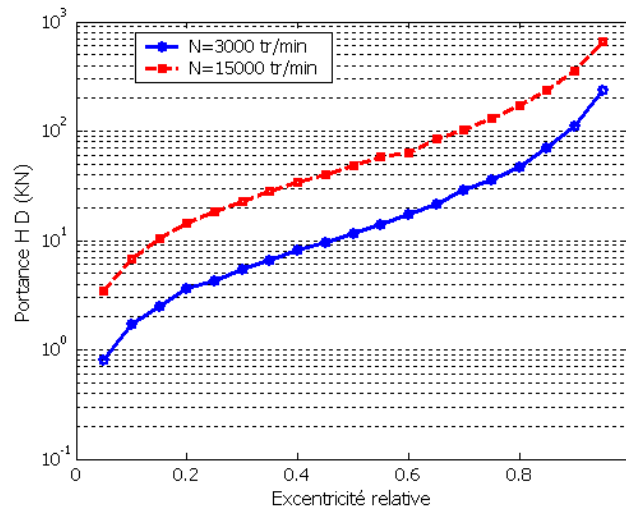
Figure V.7 : Température circonférentielle du mi-plan du palier



**Figure V.8 :** Température maximale en fonction de l'excentricité relative



**Figure V.9 :** Variation de l'angle de Calage en fonction de l'excentricité relative



**Figure V.10 :** Variation de la Portance hydrodynamique en fonction de l'excentricité relative

### 6.5. Angle de calage et portance hydrodynamique

La figure V.9-10 présente la variation de l'angle de calage et la portance hydrodynamique en fonction de l'excentricité relative. En augmentant l'excentricité relative, on constate que l'angle de calage subit une réduction allant de  $85^\circ$  à  $20^\circ$  (figure V.9). Ainsi, pour les deux vitesses 3000 et 15000 tr/min, les résultats sont presque identiques.

De même, la charge portante augmente lentement pour les excentricités 0.05-0.75, puis rapidement à partir de l'excentricité 0.8 jusqu'à 0.95 (figure V.10). On observe aussi qu'à une vitesse élevée 15000 tr/min la charge portante atteint des valeurs plus élevées, surtout à des excentricités proches de 0.85-0.95 dont la valeur est d'environ 650 kN.

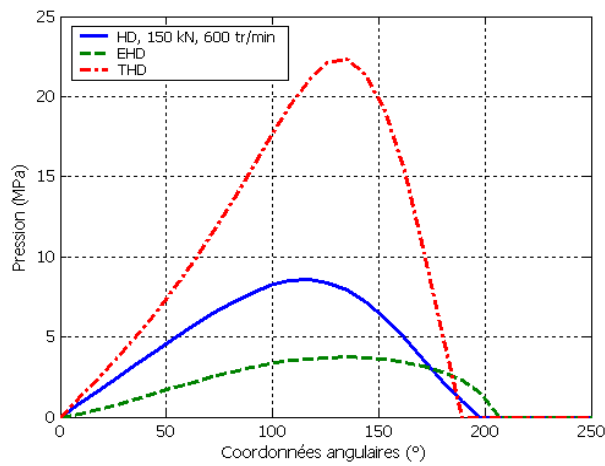
### 7. Comparaison des résultats de calculs HD, EHD et THD

Il est intéressant de comparer les résultats de calculs HD, EHD (voir Chap.IV) et THD, pour voir de manière claire l'influence des déformations élastiques et les effets thermiques sur le comportement du palier lisse étudié.

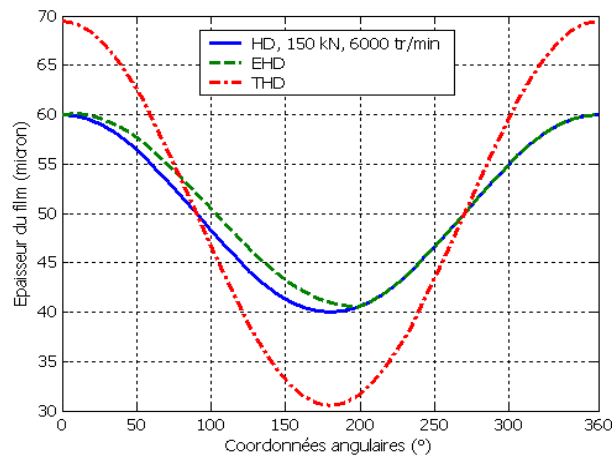
Dans la figure V.11, on constate que la prise en compte des effets thermiques joue un rôle important entraînant une pression maximale plus élevée par rapport à celle obtenue par le régime isotherme avec un écart de 27 %, ainsi qu'une épaisseur assez réduite du film

(figure V.12). D'autre part, la prise en compte des déformations élastiques influe fortement sur la pression maximale entraînant une valeur très inférieure à celle du régime isotherme avec un écart de 40 %. Il en découle donc que la différence entre les pressions maximales pour le calcul EHD et THD puisse atteindre les 56 % environ.

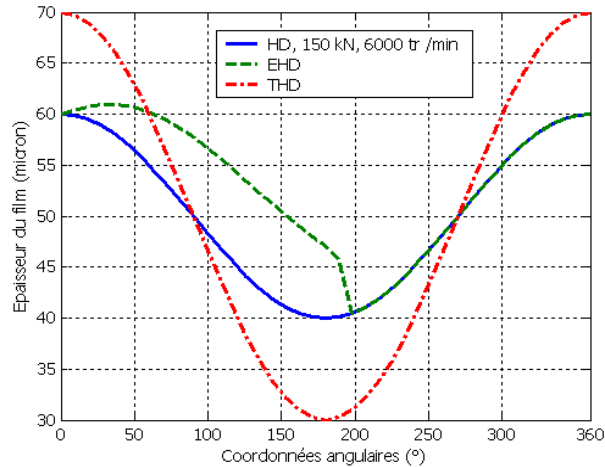
La prise en compte de déformations élastiques donne une épaisseur du film modifiée dans la zone active avec un écart dégressif de près de 47 % pour le revêtement compressible (figure V.12.a), et de 52 % pour le revêtement quasi-incompressible (figure V.12.b).



**Figure V.11 :** *Pression circonférentielle du mi-plan*



**(12.a)**



(12.b)

Figure V.12 : Epaisseur du film circonférentielle du mi-plan

## 8. Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude s'est consacrée à l'analyse thermo-hydrodynamique du palier lisse qui explique l'influence des effets thermiques sur la pression maximale et l'épaisseur du film. Il a été expliqué auparavant, que la prise en compte des effets thermiques a une grande part d'influence sur le contact. Une température du film très élevée ou bien une viscosité réduite, impliquent une pression maximale plus élevée avec une épaisseur minimale du film très réduite. Les conditions de fonctionnement à savoir : la vitesse et la charge appliquée, ont une influence assez importante sur le champ de pression et l'épaisseur minimale du film, d'où l'accroissement de la température du film et la charge portante, pour des excentricités proches de un (1).

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé la méthode des différences finies pour la discrétisation numérique des géométries du palier développé. Quant à la résolution par schéma itérative des systèmes d'équations déduites de cette méthode, nous avons appliqué la méthode de Gauss-Seidel avec sur-relaxation qui permet une convergence rapide des calculs.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses cylindriques. Cette étude traite essentiellement de deux grandes parties liées à la lubrification, la première portant sur l'analyse de l'influence des déformations élastiques sur le comportement statique du palier, la deuxième partie ayant pour objectif d'analyser l'influence des effets thermiques sur la lubrification.

Nous avons pour cela, développé au préalable un modèle élastique semi-analytique pour le calcul des champs de contraintes et de déplacements dans les milieux élastiques, pouvant traiter les cas de solides de formes géométriques simples à utilisation fréquente tels que, par exemple les tubes et les secteurs cylindriques. Une fois validé ce modèle a été intégré ensuite dans le procédé de calcul élasto-hydrodynamique des paliers.

Le modèle semi-analytique utilisé pour le cas des tubes cylindriques très longs est basé sur la formulation du problème élastostatique dans le plan complexe. Les solutions générales en contraintes et en déplacements sont en coordonnées polaires. Ce modèle ne nécessite pas une discrétisation du milieu étudié et ne permet de calculer les contraintes et les déplacements que suivant la circonférence. A cet effet, on a fait appel à l'hypothèse d'un tube ou secteur élastique mince très long encastré dans un alésage rigide qui permet d'obtenir un nouveau modèle élastique simplifié dit modèle couche mince, qui implique que les déplacements radial et tangentiel en un point de la couche sont proportionnels aux contraintes radiale et tangentielle. Le modèle couche mince peut aussi devenir bidimensionnel en utilisant un champ de contrainte bidimensionnel, ce qui facilite l'analyse élasto-hydrodynamique en deux dimensions : circonférentielle et axiale.

Dans l'analyse élasto-hydrodynamique, les déformations élastiques sont engendrées par les actions hydrodynamiques sur la surface interne du coussinet. La résolution du problème élasto-hydrodynamique conduit à la résolution de :

- L'équation de la mécanique des films minces visqueux qui détermine le champ de contrainte dans le film lubrifiant
- Les équations de l'élasticité linéaire qui permettent de calculer les champs de contrainte et de déplacements élastiques dans les solides.

Nous avons élaboré le cas d'un palier lisse de longueur finie ( $L/D = 1$ ) comportant une seule couche mince cylindrique homogène à la surface interne du coussinet avec un arbre rigide. Les parties hydrodynamique et élastique sont liées par un processus de calcul itératif durant lequel nous résolvons alternativement l'équation de film mince et l'équation de l'élasticité linéaire. L'équation des films minces s'appliquant aux hypothèses de la

lubrification hydrodynamique pour un palier lisse, s'écrit sous forme de l'équation de Reynolds généralisée. Lorsque l'analyse EHD ne tient pas en compte des effets thermiques suivant la direction radiale, l'équation devient assez simple et est dite l'équation de Reynolds.

Il est à noter que le problème d'interaction fluide-structure dans les paliers fluides est non linéaire car les déformations des revêtements de surface sont importantes et peuvent être de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du film. Celles-ci interviennent en tant que puissance cubique dans l'équation de Reynolds ce qui explique la forte non linéarité du problème.

La résolution numérique du problème EHD a été effectuée par la méthode des différences finies pour l'équation de Reynolds, en appliquant le calcul itératif de sur-relaxation. Ainsi, pour l'équation géométrique du film on a été amené à utiliser la méthode de sous-relaxation qui assure la convergence du processus itératif.

Les résultats du calcul EHD ont permis de conclure que le champ de pression et la géométrie du contact sont sensiblement affectés surtout dans le cas où le matériau du revêtement a un module de Young faible ou une charge appliquée très élevée. Egalement, la portance hydrodynamique est d'autant plus faible que celle obtenue dans le cas d'un palier rigide. La prise en compte du mésalignement avec les déformations montre une influence significative sur le comportement hydrodynamique du palier se traduisant par un champ de pression et d'épaisseur du film non symétriques par rapport au mi-plan du palier.

En ce qui concerne l'analyse thermo-hydrodynamique qui tient compte de l'influence des variations de la température sur la lubrification hydrodynamique des paliers lisses, on a mis au point un modèle numérique comportant essentiellement trois équations différentielles, qui sont respectivement l'équation de Reynolds généralisée, l'équation de l'énergie bidimensionnelle et l'équation de transfert de chaleur bidimensionnelle en coordonnées cylindriques en régime stationnaire. D'autre part, la viscosité dynamique du fluide lubrifiant a été supposée variant en fonction de la température du film sous une forme exponentielle. Cette forme proposée par quelques auteurs avait pour objectif d'obtenir une viscosité décroissante par l'élévation de la température du film.

Nous avons traité le cas d'un palier de longueur finie ( $L/D = 1$ ) ayant une rainure d'alimentation axiale. En ce qui concerne la température des solides, nous nous sommes intéressés uniquement à la distribution de la température du coussinet en radial et en circonférentiel. Nous avons utilisé également pour la résolution de ces équations, la méthode des différences finies qui permet de discrétiser les milieux étudiés. Les systèmes obtenus par différences finies ont été résolus par un processus itératif global. Cet algorithme contient un ensemble de procédés de calcul itératif basé sur la méthode de Gauss-Seidel. A noter que la méthode des différences finies ne peut faciliter la résolution des problèmes basés sur les équations aux dérivés partielles, que lorsque les géométries étudiées sont plus simples.

Les résultats de calcul THD montrent bien que la prise en compte des effets thermiques influe fortement sur la lubrification des contacts hydrodynamiques, que ce soit pour un palier aligné ou mésaligné. De même, les conditions de fonctionnement essentielles

(charge appliquée et vitesse de service) jouent un rôle important sur le comportement hydrodynamique du palier. On peut noter les points suivants :

- L'analyse THD donne une pression maximale très élevée, une épaisseur du film très réduite et une portance ainsi élevée, par rapport aux résultats de calcul isotherme HD.
- Dans le cas du palier fortement chargé tournant à une vitesse de rotation faible, la pression maximale devient élevée avec une épaisseur minimale très réduite.
- La température du lubrifiant est assez fortement affectée dans des vitesses élevées que pour les charges élevées.
- L'analyse THD ne semble être significative que lorsque le palier est fortement chargé.

En effet, Il est intéressant de poursuivre et d'enrichir cette étude par une autre analyse plus générale, pouvant inclure l'influence des déformations élastiques et celle des effets thermiques pour les régimes stationnaire et transitoire, dans un processus global appelé calcul thermo-élasto-hydrodynamique (TEHD). Egaleme nt, l'effet de cavitation, l'effet de vibration de l'arbre tournant et la prise en compte des dilatations thermiques de l'arbre et du coussinet pourront s'y rajouter.