

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**BADJI MOKHTAR -ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA**



**جامعة باجي مختار  
- عنابة -**

**Faculté des Sciences**

**Département de Mathématiques**

**THESE**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES**

**Dynamique chaotique Des Transformations  
Bidimensionnelles Couplées**

**Option** : Mathématiques Appliquées

**Par**

**M<sup>r</sup> KILANI BRAHIM**

Devant le jury

<b>PRESIDENT :</b>	H. SISSAOUI	Prof.	U.B.M. ANNABA
<b>RAPPORTEUR :</b>	I. DJELLIT	Prof.	U.B.M. ANNABA
<b>CO-RAPPORTEUR :</b>	D. FOURNIER	Prof.	INSA -TOULOUSE
<b>EXAMINATEUR :</b>	A. MOUMENI	M.C.	U.B.M. ANNABA
<b>EXAMINATEUR :</b>	N. HAMRI	Prof.	U. CONSTANTINE
<b>EXAMINATEUR :</b>	A. TAHA	Prof.	INSA -TOULOUSE

**Année Universitaire 2008 / 2009**

# Table des matières

Introduction.....	6
1 - Chapitre 1	
1.1 Introduction.....	10
1.2 Généralités sur les transformation ponctuelles.....	10
1.2.1 Singularités.....	11
1.2.2 Caractérisations des singularités.....	12
1.3 Courbes invariantes.....	13
1.4 Attracteur -Bassin d'attraction.....	13
1.5 Chaos.....	14
1.6 Bifurcations dans le plan des paramètres.....	15
1.6.1 La bifurcation fold ou noeud-col.....	15
1.6.2 La bifurcation flip ou doublement de période.....	16
1.6.3 Bifurcation de Neimark-Hopf.....	17
1.6.4 La cascade de Myrberg.....	17
1.6.5 Détermination des courbes de bifurcation dans un plan parametrique.....	18
1.6.6 Structure de bifurcation "boîtes-emboîtées.....	19
1.7 Ligne critique.....	22
1.7.1 Antécédents de rang 1.....	22
1.7.2 Division du plan de phase.....	23
1.7.3 Définition mathématique des lignes critiques.....	23
1.8 Définitions et propriétés générales.....	24
2 - Chapitre 2	
2.1 Introduction.....	26
2.2 Singularités et stabilités.....	26

2.3 Etude du plan paramétrique.....	29
2.3.1 Techniques utilisées.....	29
2.3.2 Balayage du plan de paramètres.....	30
2.3.3 Courbes de bifurcation.....	33
2.4 Etude du plan de phases.....	38
2.4.1 Lignes crituques.....	39
2.4.2 Bassins et attracteurs .....	43
3 - Chapitre3	
3.1 Inroduction.....	58
3.2 Singularités.....	58
3.3 Etude du plan paramétrique.....	59
3.4 Etude du plan de phases.....	60
3.4.1 Lignes crituques.....	61
3.4.2 Bassins d'attraction.....	62
4 - Chapitre4	
4.1 Inroduction.....	72
4.2 Singularités et stabilités.....	73
4.3 Etude du plan des paramètres.....	74
4.3.1 Balayage des plans paramétriques.....	74
4.4 Etude de plan de phases.....	77
4.4.1 Lignes crituques.....	77
Conclusion.....	84
Bibliographie.....	85

# Résumé

L'étude des dynamiques couplées est un des développements les plus récents dans la synchronisation et contrôle du chaos. Ces nouveaux modèles puisent leur inspiration dans le développement important des techniques d'observation et simulations numériques, qui apportent une connaissance de plus en plus poussée des principes qui régissent le contrôle du chaos.

À ce titre, cette thèse s'inspire, dans le cadre de l'étude des ensembles chaotiques faite via les lignes critiques, de la théorie des bifurcations. Les lignes critiques  $LC$  sont un outil mathématique, qui intervient souvent dans l'étude des propriétés et bifurcations de bassins d'attraction, d'ensembles attractants et d'attracteurs. Trois modèles sont considérés, qui sont des endomorphisme de type  $Z_0 - Z_2 - Z_4$ .

On s'intéressera aussi, aux bifurcations de contact entre la frontière d'un attracteur et la frontière de son bassin d'attraction. On considèrera un des modèles basé sur une fonction sinusoïdale et on mettra en évidence les structures de bifurcations et les comportements chaotiques.

Le dernier chapitre sera consacré à l'étude des systèmes dynamiques couplés définis par morceaux, et à la notion d'attracteurs faibles et de bassins ridés associés à ce type de transformations. On prouvera qu'il existe un lien entre les trois systèmes considérés et qu'ils partagent une même dynamique.

# Abstract

the survey of coupled dynamics is one of the most recent developments in the synchronization and control of the chaos. These new models take their inspiration in the important development of techniques of observation and numeric simulations, that give a best knowledge of principles that governs the control of the chaos.

By this fact, this thesis inspires itself, in the setting of the chaotic sets study via the critical lines, of the bifurcation theory. Critiques lines  $LC$  are a mathematical tool, that often intervenes in the study of properties and bifurcations of basins of attraction, attracting sets and attractors. Three models are considered, that are endomorphisms of type  $Z_0 - Z_2 - Z_4$ .

We are also interested, by bifurcations of contact between the border of an attractor and the border of its attraction basin. We consider one of models based on a sinusoidal function and we put in evidence structures of bifurcations and the chaotic behaviors.

The last chapter will be dedicated to piecewise coupled dynamical systems survey, and to the notion of weak attractors and riddled basins associated to this type of transformations. We prove that there exists a link between the three considered systems and that they share one same dynamics.

## Remerciements

Je suis très heureux d'exprimer ici mes respectueux remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur **I. Djellit** Professeur à l'université d'Annaba pour le sujet qu'elle m'a proposé, pour ses précieux conseils, ses encouragements, ses suggestions vailleuses, sa patience et sa bonne humeur, sa grande érudition, disponibilité et son sens de la recherche qui ont été déterminant à la réalisation de ce travail.

De même je remercie très vivement mon co-encadreur **D. Fournier-Prunaret** Professeur à l' INSA de Toulouse pour ses encouragements et pour son aide très précieuse.

Mes respectueux remerciements vont à Monsieur **H. Sissaoui** Professeur à l'université d'Annaba pour avoir accepté de présider le jury.

Du fond du cœur, un grand merci à Monsieur **A.K.Taha** Docteur à l'INSA de Toulouse pour ses encouragements, ses commentaires toujours très dynamiques et bien fondés sur mes analyses et ses orientations très précieuses.

Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur **A. Moumeni** Docteur à l'université d'Annaba d'avoir accepté de participer au jury.

De même je remercie très vivement Monsieur **N.Hamri** Professeur à l'université de Constantine d'avoir accepté de juger ce travail.

Un grand merci à **M.L.Sahari** pour son aide très précieuse. Merci aussi à **M.R. Ferchichi**.

## 0.1 Introduction

La théorie des systèmes dynamiques non linéaires remonte en particulier avec les travaux de Poincaré et Lyapunov dans des problèmes de mécanique à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, début du 20<sup>ème</sup> siècle. A partir de 1930, cette théorie a connu un développement très important avec les écoles russes d'Andronov ( méthodes analytiques et qualitatives) et de Bogoliubov-Mitropolski ( méthodes analytiques) [AWK] [ALGM]. L'étude analytique a cependant connu ses plus grands développements avec l'Ecole de Kiev. Hayashi a poussé les applications dans des circuits électriques et électroniques [H] au Japon.

Une modélisation de systèmes dynamiques peut se faire à l'aide de transformations ponctuelles ou récurrence. Elles correspondent à une évolution discrète du temps sont sous les formes :

$$X_{n+1} = F(X_n), \text{ ( autonome)} \quad (1)$$

ou

$$X_{n+1} = F(X_n, n), \text{ ( non autonome)} \quad (2)$$

où  $X \in IR^p$ ,  $p = 1, 2, \dots, p$  est appelé la dimension des équations (1) et (2).

L'étude des récurrences présente un double intérêt. D'une part, elles peuvent servir à modéliser des systèmes à informations discrètes, d'autre part, elles permettent d'étudier des équations différentielles ordinaires.

Par exemple, grâce à la méthode de la section de Poincaré, surface transverse aux trajectoires de phase, on peut associer localement au système différentiel étudié une transformation autonome de dimension un.

L'idée de base de cette méthode est d'associer à un point  $M_n (X_n)$  situé à l'intersection de la surface de section et d'une trajectoire de phase donnée, son conséquent  $M_{n+1} (X_{n+1})$  point d'intersection de la surface de section et de la trajectoire considérée, situé après  $M_n$  dans le sens du temps croissant.

Certains systèmes peuvent dépendre d'un ou plusieurs paramètres, ils se présentent sous la forme :

$$X_{n+1} = F(X_n, \Lambda) \quad (3)$$

où  $\Lambda$  est un vecteur paramètre de  $IR^q$ ,  $q = 1, 2, \dots$

Une classe particulière de transformations ponctuelles joue un rôle important du point de vue fondamental et appliqué : les *transformations non inversibles* ( ou TNI). Elles se différencient des transformations dites inversibles par le fait qu'un point de l'espace de phase ne possède pas un antécédent unique mais peut avoir zéro, un ou plusieurs suivant la région de l'espace considérée. Du point de vue historique, l'intérêt porté sur les TNI s'est accru depuis 1990 et s'est manifesté par la première conférence intitulé " First Noninvertible Dynamical Systems Workshop". Celle-ci s'est déroulée du 14 au 17 Mars 1995 au Geometry Center ( NSF) à l'Université du Minnesota à Minneapolis.

L'étude faite dans ce mémoire concerne principalement les TNI bi-dimensionnelles. Elle se caractérisent en général par la présence dans le plan de phase de singularités appelées *lignes critiques* ( ou *LC*). Cette notion a été introduite pour la première fois en 1964 [M2][GM1]. Les *LC* séparent deux régions  $Z_i$  et  $Z_j$  avec  $i \neq j$ . Du point de vue de la transformation inverse  $T^{-1}$ , le plan de phase apparaît alors comme feuilleté. Chaque feuillet est associé à une détermination bien défini de  $T^{-1}$ . Les lignes critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent. Depuis 1969, de nombreuses publications ont développé le rôle des lignes critiques pour expliquer les *bifurcations* intervenant sur la structure des *bassins d'attraction* [MR][BCM][BLM][GM5][GM6][C1]. Le rôle des lignes critiques est également prépondérant dans l'études des bifurcations concernant les modifications des *zones chaotiques* qui ont commencé en 1977 et se sont poursuivies [GM3][GM4][GM5][M9][KK][C3][G1][G2][G3][BC][MN].

L'intérêt de ces transformations réside dans le fait que de nombreux modèles de systèmes appartenant aux techniques de l'ingénieur font appel à des transformations non inversibles. Des études dans le domaine du contrôle adaptatif ont nécessité l'utilisation

des TNI [AK][FAKGY][AFK]. Dans le domaine de l'électronique, des systèmes échantillonnés, de la modulation d'impulsions pour les systèmes de transmission en téléphonie [FUMD][F4], des modèles conduisent également à des transformations non inversibles. De plus, la modélisation dans le domaine économique ou même biologique fait appel à des TNI [DGG][G4].

Cette thèse sera divisée en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous allons tout d'abord rappeler un certain nombre de notions élémentaires concernant les transformations ponctuelles de dimension un et deux. Différents types de singularités peuvent être introduit et caractérisés dans l'espace d'état. Dans l'espace des paramètres, un problème fondamental qui se pose est l'étude de bifurcations, c'est-à-dire l'étude des changements qualitatifs de comportement du système lorsque les valeurs des paramètres varient. Nous rappelons différents types de bifurcations et de structure comme celles de type "boîtes-emboîtées" qui apparaissent dans les transformations que nous étudions par la suite. Nous parlerons aussi des bassins d'attraction et leur fractalisation et l'apparition des comportements chaotiques.

Dans les autres chapitres nous avons étudié trois transformations quadratiques non inversibles couplées donnée par les systèmes suivants :

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = 1 - ax_n^2 + c(y_n^2 - x_n^2) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) = 1 - ay_n^2 + b(x_n^2 - y_n^2) \end{cases}$$

$$T_1 : \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n^2 - x_n^2)) \\ y_{n+1} = 1 - ay_n^2 + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n^2 - x_n^2)) \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) = 1 - ay_n^2 + b|x - y| + c \end{cases}$$

où  $x, y$  sont les variables et  $a, b, c$  sont des paramètres.

Pour ces trois transformations, nous essayons d'établir la structure de bifurcation dans le plan paramétrique et nous nous intéressons à l'évolution des bassins d'attraction

(le plan de phases).

$T$  a fait l'objet d'une étude antérieure par [LK][LKK][KL] ; où ils ont mis en évidence l'existence de bassins ridés et d'attracteurs de Milnor.

Nous nous inspirons des travaux de [MMM] sur les attracteurs synchrones, asynchrones et antisynchrone pour étudier la récurrence  $T_1$ .

La récurrence  $T_2$  est définie par morceaux, couplée et asymétrique.

Toutes ces transformations sont liées et la symétrie joue un rôle important dans leurs bifurcations.

# Chapitre 1

## 1.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous donnons les notions de base de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et plus principalement ceux qui concernent les transformations ponctuelles “réurrences”, outils de modélisation des systèmes dynamiques.

Un système dynamique est soit représenté par des équations différentielles de type :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, \Lambda, t), \quad X \in IR^p \text{ et } \Lambda \in IR^q \quad (1.1)$$

où  $\Lambda$  est un vecteur paramètre de  $IR^q$   $q = 1, 2, \dots$ .

Soit par des transformations ponctuelles de type :

$$X_{n+1} = f(X_n, \Lambda, n) = T_\Lambda(X_n) \quad (1.2)$$

Lorsque  $t$  (resp.  $n$ ) ne figure pas explicitement, le système est dit autonome.

## 1.2 Généralités sur les transformations ponctuelles :

Soit la récurrence définie par (1.2) où  $f$  est au moins de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) par rapport à la variable  $X$  et au paramètre  $\Lambda$ . La dimension de l'équation (1.2) est  $p$ , et  $IR^p$  est appelé espace de phases de (1.2).

Une solution de (1.2) est formée par une suite de points  $X_n$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$  formant la trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

Le point  $X_{n+1}$  est le conséquent de rang 1 du point  $X_n$ , le point  $X_n$  est l'antécédent de rang un du point  $X_{n+1}$ . La transformation inverse  $T_\Lambda^{-1}$  exprime  $X_n$  en fonction de  $X_{n+1}$ . Lorsque  $T_\Lambda^{-1}$  est unique la transformation  $T_\Lambda$  est dite inversible, ou *difféomorphisme*.  $X_{n+1}$  peut avoir zéro, un, ou plusieurs antécédent de rang un. Si la transformation  $T_\Lambda^{-1}$  a ainsi un nombre de déterminations différent de un (zéro ou plusieurs), on dit que  $T_\Lambda$  est non inversible (appelé aussi *endomorphisme*). Un point qui a plusieurs antécédents de premier rang confondus est appelé un *point critique*.

Pour notre étude, nous allons commencer par rappeler un certain nombre de notions de base concernant les transformations ponctuelles.

### 1.2.1 Singularités :

Les transformations ponctuelles peuvent posséder des singularités de différentes types :

**Définition 1 :** Un point fixe  $X^*$  est une solution de l'équation algébrique :

$$X^* = T_\Lambda(X^*) \quad (1.3)$$

**Définition 2 :** Un *cycle d'ordre k*, est un ensemble de points  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$  chacun des  $X_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) étant un point fixe de  $T_\Lambda^k$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} X_{i+1} = T_\Lambda(X_i) \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \\ X_1 = T_\Lambda(X_k) \end{array} \right. \\ X_i = T_\Lambda^k(X_i) \quad i = 1, 2, \dots, k \\ X_i \neq T_\Lambda^h(X_i) \quad i = 1, 2, \dots, k, 1 \leq h < k \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Un cycle d'ordre  $k$  est caractérisé par l'ordre d'échange de ses  $k$  points  $X_i$  par applications successives de  $T_\Lambda$ , un tel cycle sera désigné par le couple  $(k, j)$  ( $k$  représente

l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par applications successives de  $T_\Lambda$ ).

## 1.2.2 Caractérisations des singularités :

Pour caractériser la nature des singularités de dimension zéro, on introduit la notion de *multiplieurs* ( ou valeurs propres) définis lorsque  $T_\Lambda$  est différentiable au point considéré.

Si la dimension de la transformation est un, on définit le multiplicateur  $S$  d'un point fixe  $X^*$  par  $S = \frac{dT_\Lambda}{dX}(X^*)$ , et celui d'un cycle d'ordre  $k$  ( $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$ ) par  $S = \prod_{i=1}^k \frac{dT_\Lambda}{dX}(X_i^*)$ .

Lorsque  $|S| < 1$ , le point fixe ou le cycle d'ordre  $k$  est dit stable ou attractif. Si  $|S| > 1$  le point fixe ou le cycle d'ordre  $k$  est dit instable ou répulsif.

Dans le cas d'une transformation bidimensionnelle (la dimension est deux) un point fixe ou le cycle possède deux multiplieurs  $S_1$  et  $S_2$  qui sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $T_\Lambda$  (pour un point fixe) ou de  $T_\Lambda^k$  (pour un cycle d'ordre  $k$ ) au point considéré.

On définit alors différentes sortes de points fixes ou cycles suivant les valeurs de  $S_1$  et  $S_2$  :

Soient  $S_1$  et  $S_2 \in IR$

- a) Si  $|S_1| < 1$  et  $|S_2| < 1$  le point fixe ou le cycle est un *noeud* stable.
- b) Si  $|S_1| > 1$  et  $|S_2| > 1$  le point fixe ou le cycle est un *noeud* instable.
- c) Si  $|S_1| > 1$  et  $|S_2| < 1$  le point fixe ou le cycle est un *col* toujours instable.

quand  $S_1$  et  $S_2 \in C$  ( $S_1 = \rho e^{i\theta}$  et  $S_2 = \rho e^{-i\theta}$ )

- d) Si  $\rho > 1$  le point fixe ou le cycle est un *foyer* instable.
- e) Si  $\rho < 1$  le point fixe ou le cycle est un *foyer* stable.
- f) Si  $\rho = 1$  le point fixe ou le cycle est un *centre* stable.

## 1.3 Courbes invariantes

Pour des transformations ponctuelles de type (1.1), il existe d'autres singularités que les points fixes ou les cycles d'ordre  $k$ , les courbes invariantes.

**Définition 3 :** Une *courbe*  $Q(X) = c$ ,  $c$  étant une constante réelle, est *invariante* par la transformation  $T_\Lambda$ , si  $Q$  satisfait l'équation fonctionnelle :

$$Q(f(X)) = Q(X) \quad (1.5)$$

Dans le cas d'un point fixe ( ou d'un cycle d'ordre  $k$ ) de type col, on note  $W_s$  les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module inférieur à 1 et  $W_u$  les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module supérieur à 1.

Plus généralement, un ensemble  $A$  de  $IR^p$  est invariant par  $T_\Lambda$  ssi  $T_\Lambda(A) = A$ .

## 1.4 Attracteur-Bassin d'attraction :

Dans ce paragraphe, nous donnons les définitions d'un attracteur et d'un bassin d'attraction.

**Définition4 :** Un ensemble fermé et invariant  $A$  est appelé *ensemble attractant*, s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$ , tel que  $T(U) \subset U$  et  $T^n(X) \rightarrow A$  quand  $n \rightarrow +\infty \forall X \in U$ .

Un ensemble attractant  $A$  peut contenir un ou plusieurs attracteurs.

Il existe différents types d'attracteurs :

- a) Le *point fixe* : correspond à un état stationnaire du système.
- b) Le *cycle limite* : est associé à un comportement périodique du système.
- c) Le *tore* : est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant  $r$  fréquences de base indépendants.

En 1971, poursuivant les travaux d'Edward Lorentz, David Ruelle et Floris Takens définissent un nouveau type d'attracteurs, de forme géométrique plus complexe, qu'ils

appellent *attracteurs étranges* (exemples : attracteur de Hénon ; attracteur Lorentz).

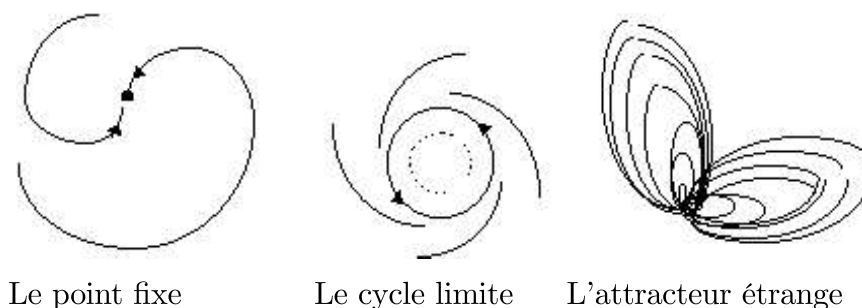


Figure1.1

**Définition 5** : Le *bassin d'attraction* d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace de phases dont les conséquents successifs convergent vers l'attracteur.

Il peut être connexe, multiplement connexe (c'est à dire connexe avec des trous) ou non connexe et sa frontière peut être fractale.

## 1.5 Chaos :

Actuellement il n'y a pas de définition générale du terme "chaos". En fonction du contexte, on dit qu'un état est chaotique quand il est non périodique. On parle même de mouvement chaotique pour un mouvement périodique très irrégulier sur une période, et pour lequel la durée des observations physiquement possibles est inférieure à cette période.

On parle de chaos stable lorsqu'il y a existence d'un attracteur étrange et de chaos instable lorsqu'il y a existence d'un transitoire étrange dû à la présence d'une infinité de solutions périodiques instables associé à un attracteur à l'infini ( donc divergence pour les conditions initiales choisies).

On peut néanmoins proposer la définition suivante ( une parmi les définitions possibles) :

**Définition 6** : Un attracteur, dont les points génèrent des suites itérées qui vérifient la propriété de sensibilité aux conditions initiales, est dit *chaotique*.

## 1.6 Bifurcations dans le plan de paramètres :

Lorsque le système dynamique dépend continûment d'un paramètre  $\Lambda$ , la variation de ce paramètre peut entraîner des changements qualitatifs ou quantitatifs dans l'espace de phases, tels que l'apparition ou la disparition de singularités, le changement de stabilité d'une singularité, le changement de type de singularités, etc.... Ces changements qualitatifs s'appellent *bifurcations*. Il y a plusieurs sortes de bifurcations qui peuvent se produire. Nous citerons ici que celles qui interviennent dans ce mémoire.

### 1.6.1 La bifurcation fold ou noeud-col :

Elle correspond à l'apparition de deux points fixes ou cycles d'ordre  $k$ , l'un stable et l'autre instable. A la bifurcation les deux points fixes ou les deux cycles sont confondus et possèdent un multiplicateur  $S = +1$ .

Le schéma de cette bifurcation pour la transformation d'ordre un, est donnée par

$$\Phi \left\langle \xrightarrow[S=1]{} \right\rangle A^k + R^k \quad (1.6)$$

où  $\Phi$  signifie l'absence de cycles,  $A^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  attractif et  $R^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  répulsif.

Pour une transformation d'ordre deux, la bifurcation fold donne un cycle noeud stable et un cycle col. Le schéma de cette bifurcation est donné par

$$\Phi \left\langle \xrightarrow[S=1]{} \right\rangle N_s^k + C^k \quad (1.7)$$

où  $N_s^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type noeud stable,  $C^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type col (instable).

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_{(k)_0}^j$  où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange de ses points. Deux cycles différents

peuvent comporter le même nombre de points, mais leur ordre d'échange est différent.

### 1.6.2 La bifurcation flip ou doublement de période :

Un point fixe (cycle d'ordre  $k$ ) change de stabilité lorsque l'un de ses multiplicateurs prend la valeur  $S = -1$ , et donne naissance à un cycle d'ordre deux (cycle d'ordre  $2k$ ) de même stabilité que le cycle d'origine.

Le schéma de cette bifurcation pour une transformation d'ordre un, est donné par

$$A^k \xrightarrow[S=-1]{} R^k + A^{2k} \quad (1.8)$$

ou

$$R^k \xrightarrow[S=-1]{} A^k + R^{2k} \quad (1.9)$$

et dans le cas d'une transformation d'ordre deux, on a :

$$N_s^k \xrightarrow[S=-1]{} N_i^k + N_s^{2k} \quad (1.10)$$

ou

$$N_i^k \xrightarrow[S=-1]{} N_s^k + N_i^{2k} \quad (1.11)$$

où  $N_i^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  instable,  $N_s^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  stable,  $N_i^{2k}$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $2k$  instable et  $N_s^{2k}$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $2k$  stable.

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_k^j$  où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange de ses points.

### 1.6.3 Bifurcation de Neimark-Hopf :

Cette bifurcation est définie pour des transformations d'ordre supérieur à un et a lieu lorsqu'un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type foyer de multiplicateurs complexes  $S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\theta}$ ,  $i^2 = -1$ , dont le module  $\rho$  passe par la valeur 1.

Le schéma de cette bifurcation pour une transformation d'ordre deux, est donné par

$$F_s^k \xleftrightarrow[\rho=1]{} F_i^k + CFI_s^k \quad (1.12)$$

ou

$$F_i^k \xleftrightarrow[\rho=1]{} F_s^k + CFI_i^k \quad (1.13)$$

où  $F_s^k$  représente un cycle d'ordre  $k$  de type foyer stable,  $F_i^k$  représente un cycle d'ordre  $k$  de type foyer instable et  $CFI_s^k$  (resp.  $CFI_i^k$ ) désigne un cycle de  $k$  courbes fermées invariantes stables (resp. instable).

### 1.6.4 La cascade de Myrberg :

Une succession de bifurcation flip (ou doublement de période) peut donner lieu à une cascade de Myrberg qui donne un schéma du passage d'un comportement périodique à un comportement chaotique.

Le système possède successivement un cycle d'ordre  $k$  stable puis un cycle d'ordre  $2k$ ,  $4k$ ,  $8k$ , ... à la fin de cette série de bifurcations apparaît un ensemble de cantor répulsif d'ordre  $k$ , c'est un ensemble cyclique formé de  $k$  sous ensemble qui s'échangent par application de la transformation. Les différentes bifurcations flip dans la cascade de Myrberg se passent de la manière suivante :

$$\text{Si la première bifurcation est par exemple : } N_s^i \xrightarrow{} C^i + N_s^{2i}$$

où  $N_s^i$  désigne un cycle noeud d'ordre  $i$  stable et  $C^i$  un cycle col d'ordre  $i$  et  $N_s^{2i}$  désigne un cycle noeud d'ordre  $2i$  stable, celle-ci est alors suivie des bifurcations :

$$N_s^{2i} \xrightarrow{} C^{2i} + N_s^{4i}, \quad N_s^{4i} \xrightarrow{} C^{4i} + N_s^{8i}, \quad \dots$$

Ce qui va donner de façon globale :

$$N_s^i \langle \text{-----} \rangle C^i + N_s^{2i} \langle \text{-----} \rangle C^i + C^{2i} + N_s^{4i} \langle \text{-----} \rangle C^i + C^{2i} + C^{4i} + N_s^{8i} \\ \langle \text{-----} \rangle \dots$$

Cette accumulation de singularités instables, donc d'un grand nombre de variétés invariantes instables est à l'origine du chaos.

La courbe de bifurcation  $\Lambda_{(k)_s}^j$  est le point d'accumulation des bifurcations  $\Lambda_{k2^i}^{j_i}$ , elle est définie comme :  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Lambda_{k2^i}^{j_i} = \Lambda_{(k)_s}^j$ .

### 1.6.5 Détermination des courbes de bifurcation dans un plan des paramètres :

On considère (1.1) avec  $\Lambda = (a, b)$  vecteur paramètre de  $IR^2$ . Les courbes de bifurcation des cycles d'ordre  $k$  de la récurrence (1.1) sont tracées dans le plan des paramètres  $(a, b)$ . Ces courbes sont déterminées à l'aide d'un programme en Fortran basé sur les algorithmes de [C2].

En considérant les définitions et les notations précédentes, un cycle d'ordre  $k$  de  $T_\Lambda$  est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Phi_k(X, \Lambda) = X - T_\Lambda^k(X) = 0 \\ \Psi(S, X, \Lambda) = \det(S I - DT_\Lambda^k(X)) = 0 \\ S = \pm 1 \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\Phi_k = 0$  signifie que  $X$  est un cycle d'ordre  $k$  de  $T_\Lambda$  et  $\Psi = 0$  est l'équation caractéristique du cycle pour lequel on a fixé l'une de ses valeurs propres  $S$ ;  $S$  est le multiplicateur qui fixe la nature de la bifurcation cherchée (flip ou fold) et le vecteur  $X \in IR^2$  est considéré comme paramètre dans (1.14) son élimination conduit à une équation paramétrique implicite  $g(a, b) = 0$  qui donne les courbes de bifurcation.

Donc les courbes de bifurcation sont déterminées par la projection sur le plan des deux paramètres de l'ensemble :

$$\{(X, \Lambda) \in IR^2 \times IR^2 : \Phi(X, \Lambda) = 0, \Psi(S, X, \Lambda) = 0 \text{ et } S = \pm 1\}.$$

### 1.6.6 Structure de bifurcation “boîtes-empoîtées” :

La structure de bifurcation “*boîte-empoîtées*” a été mise en évidence par Mira en 1975 ; une description détaillée peut être trouvée dans [GM4], [F3].

Afin d’illustrer cette structure, nous la présentons dans le cas d’une transformation spécifique connue en dimension un. Considérons la transformation quadratique de la forme suivante dite récurrence de Myrberg ( une autre forme classique de ce modèle est le modèle dit logistique [M8], [M1]) :

$$x_{n+1} = x_n^2 - \lambda = T(x_n), \quad x_n \in IR, \quad \lambda \in IR \quad (1.15)$$

Lorsque  $\lambda$  décrit  $IR$ , l’ensemble des bifurcations présente une structure fractale, c’est à dire que l’organisation de cet ensemble est semblable à celle de ses parties ( propriété d’auto similarité). Cette structure est en relation avec l’apparition d’un comportement chaotique..

Sur l’axe réel du paramètre  $\lambda$ , il existe une boîte (ou intervalle) :  $\Omega_1 = [\lambda_{(1)_0}, \lambda_1^*] = [-\frac{1}{4}, 2]$  qui contient toutes les valeurs de bifurcation de (1.15). La frontière  $\lambda_{(1)_0}$  correspond à la naissance de deux points fixes  $q_1$  répulsif ( $S > 1$ ) et  $q_2$  attractif ( $S < 1$ ) par une bifurcation (1.6). La valeur  $\lambda = \lambda_1^* = 2$  correspond à une bifurcation non classique [M3], se traduit par la fusion d’un point critique  $C_1$  ( conséquent de rang deux de l’extremum de  $T$ ) avec le point fixe répulsif  $q_1$  :  $C_1 = q_1$ . Pour  $-\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}$ , le point fixe  $q_2$  est attractif ( $-1 < S < 1$ ) et pour  $\lambda > \frac{3}{4}$ , ce point devient répulsif ( $S < -1$ ) en donnant naissance à un cycle d’ordre deux (  $q_1$  est toujours répulsif  $S > 1$ , pour  $\lambda > -\frac{1}{4}$ ).

$\Omega_1$  contient une infinité d’intervalles (boîtes de premier rang)  $\Omega_k^j = [\lambda_{(k)_0}^j, \lambda_k^{j*}]$  ( $j = 1, 2, \dots, p_k, k = 3, 4, \dots; p_k \rightarrow \infty$  si  $k \rightarrow \infty$ ) en relation avec un ensemble de bifurcations pour les puissances  $T^k$  de  $T$ .

Une frontière de  $\Omega_k^j$  est liée à la naissance de deux cycles de base ( $k ; j$ ) ( l’un stable,

l'autre instable) par une bifurcation (1.6) pour  $\lambda = \lambda_{(k)_0}^j$ ,  $j$  étant l'indice qui caractérise l'ordre d'échange des points des cycles de base par application de  $T$ . Plus précisément, dans l'ensemble ordonné par la loi d'ordre de Myrberg des suites de rotation indécomposables [GM5][M1][M10] de tous les cycles d'ordre  $k$ ,  $j$  représente le numéro d'ordre de la suite de rotation considérée (noter que le "kneading invariant" est une variante de la notion plus ancienne de suite de rotation de Myrberg).

Juste après la bifurcation  $\lambda = \lambda_{(k)_0}^j$ , l'un des cycles est attractif pour  $\lambda$  suffisamment voisin de  $\lambda = \lambda_{(k)_0}^j$  ( $S < 1$ ), l'autre est répulsif ( $S > 1$ ).

L'autre frontière de  $\Omega_k^j$  est la première valeur de  $\lambda$  ( $\lambda = \lambda_k^{*j}$ ), dans le sens des  $\lambda$  croissants, qui correspond à la fusion du point critique de rang  $k + 1$ ,  $C_k$  (conséquent de rang  $k + 1$  de l'extrémum), avec le cycle d'ordre  $k$  né répulsif ( $S > 1$ ) pour  $\lambda = \lambda_{(k)_0}^j$ .

Si l'on considère la transformation  $T^k$  et l'intervalle  $\Omega_k^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p_k$ ,  $k = 3, 4, \dots$ , cet intervalle contient une organisation des bifurcations de  $T^k$  identique à la structure de  $\Omega_1$  :  $\Omega_k^j \subset \Delta_1 \subset \Omega_1$ , où  $\Delta_1$  est l'intervalle en dehors duquel se déroule une chaîne de bifurcation de Myrberg [M6].

Un intervalle  $\Omega_{k_1}^{j_1}$  contient une infinité d'intervalles  $\Omega_{k_1.k_2}^{j_1.j_2}$  (boîte de second rang) avec une structure identique à celle de  $\Omega_{k_1}^{j_1}$  :  $\Omega_{k_1.k_2}^{j_1.j_2} \subset \Delta_{k_1}^{j_1} \subset \Omega_{k_1}^{j_1}$ ; chaque intervalle  $\Omega_{k_1.k_2}^{j_1.j_2}$  contient une infinité d'intervalles de troisième rang :  $\Omega_{k_1.k_2.k_3}^{j_1.j_2.j_3}$ .

Si l'on considère  $T^k$ ,  $k = 2^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , il est également possible de définir des boîtes  $\Omega_{2^i}$  [GM5]. La loi d'ordre de Myrberg donne alors un classement des cascades de Myrberg (cf figures (1.3), (1.4),(1.5)).



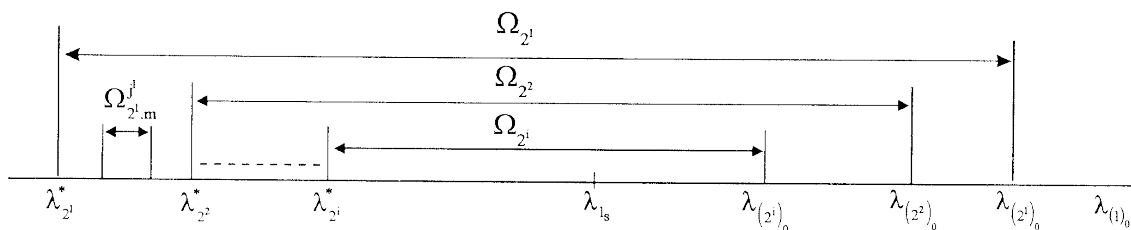


Figure 1.4 : Structure de bifurcation de  $\Omega_{2^i}$ .

## 1.7 Ligne critique :

Dans ce paragraphe, nous représentons les lignes critiques de la transformation (1.1) dans le cas où la dimension  $p = 2$ .

### 1.7.1 Antécédents de rang 1

Lorsque  $T$  est une transformation non inversible la spécificité de ces transformations repose sur la considération de leurs transformations inverses  $T^{-1}$ . Elle sont obtenues en calculant les solutions de système (1.1) où  $(x_n, y_n)$  sont les inconnues pour un couple  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  donné. La résolution de ce problème peut faire apparaître l'existence, soit de plusieurs solutions, on suppose alors qu'elles sont en nombre fini, soit la non existence solutions, selon la paire  $(x_n, y_n)$  considérée. Ainsi, la transformation inverse  $T^{-1}$  peut être multi-valuée ou ne pas être définie, contrairement au transformations inversibles pour lesquelles elle existe toujours et est unique. Les points solutions  $(x_n, y_n) \in IR^2$  sont les antécédents de rang 1 de  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ .

## 1.7.2 Division du plan de phase

En considérant les antécédents de rang 1, le plan de phase de  $IR^2$  peut être divisé en régions bornées ou non bornées notées  $Z_i$  avec  $IR^2 = \cup_i \overline{Z_i}$ . Chacune d'elles est constituée par l'ensemble des points  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  qui possèdent  $i$  antécédents de rang 1 distincts. La limite de ces régions est déterminée par des courbes appelées “*lignes critiques*” notées  $LC$ . Elles sont définies par le lieu des points  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  qui possèdent au moins deux antécédents de rang 1 confondus. Ces deux antécédents se confondent sur une courbe notée  $LC_{-1}$ .

## 1.7.3 Définition mathématique des lignes critiques

Dans le cas où  $T$  est différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est le lieu des points de  $IR^2$  pour lesquels le déterminant de la matrice jacobienne  $J$  de  $T$  s'annule. Dans le cas où  $T$  est non différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est le lieu des points de non différentiabilité [GM2].

Le lieu  $LC_{-1}$  est un sous ensemble de dimension un (une courbe) de  $\mathbb{R}^2$ , avec par définition  $T(LC_{-1}) = LC$ . L'image de rang  $k$  de  $LC$ ,  $LC_k = T^k(LC)$ ,  $k \geq 1$  est appelée ligne critique de rang  $k$  où leur étude présente plusieurs intérêts :

a) Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques [GMF].

b) Les lignes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et permettent de comprendre l'évolution des bassins [MFGKC] ..

Il existe des situations particulières où  $LC$  se réduit à un seul point, ou bien que le Jacobien de l'application  $T$  soit constant [M3].

## 1.8 Définitions et Propriétés Générales :

**Définition 7 :** On appelle *zone absorbante*  $E$ , un sous ensemble fermé borné du plan tel que :

(i)  $T(E) \subseteq E$

(ii) Sa frontière  $\partial E$  est constituée d'un nombre fini ou infini de segments de lignes critiques des  $LC$ ,  $LC_1$ ,  $LC_2, \dots, LC_k$ , où  $LC_i = T^i(LC)$ ,  $i \geq 1$  sont les images de rang  $i$  de  $LC$ .

(iii) Il existe un voisinage  $U$  de  $E$  tel que  $T(U) \subset U$ , et tout point  $x \in U \setminus E$  a une image de rang fini à l'intérieur de  $E$ .

**Remarque 1 :** Une zone absorbante peut contenir un ou plusieurs attracteurs. Une zone absorbante  $E$  est invariante,  $T(E) = E$ , s'il existe un entier  $m$  fini tel que :

$$\partial E \subset \cup_{k=1}^m T^k(\gamma)$$

où  $\partial E$  est la frontière de  $E$  et  $\gamma = E \cap LC_{-1}$ . S'il n'existe pas d'entier  $m$  fini tel que la frontière  $\partial E$  soit incluse dans  $\cup_{k=1}^m T^k(\gamma)$ , la zone absorbante  $E$  n'est pas invariante. L'intersection  $\cap_{n>0} T^n(E)$  ( $n$  fini ou infini) est une zone absorbante invariante.

Seules les zones absorbantes invariantes sont utiles, lorsqu'on considère des contacts entre les frontières des zones absorbantes et les frontières de leurs bassins d'attraction. Les zones absorbantes non invariantes sont, dans cette situation, généralement sans conséquence sur les ensembles invariants (exemple les attracteurs) qu'elles contiennent strictement.

**Définition 9 :** On dit que  $\Lambda = \Lambda^*$  est une *valeur de bifurcation de contact* d'une zone absorbante  $E$ , si en  $\Lambda = \Lambda^*$  un contact a lieu entre la frontière de  $E$  et la frontière de son bassin d'attraction.

La proposition suivante est fondamentale pour les bifurcations de contact.

**Proposition 1 :** Lorsqu'une bifurcation de contact d'une zone chaotique  $A$  a lieu, pour une valeur du paramètre  $\Lambda = \Lambda^*$ , la traversée de cette valeur conduit soit à la destruc-

tion de  $A$  donnant lieu à un répulseur étrange, soit à une modification qualitative des propriétés de  $A$  (c'est-à-dire une soudaine et importante modification de la taille de cette zone ou de son bassin d'attraction).

La destruction de la zone chaotique  $A$ , après la traversée d'une valeur de bifurcation de contact, a été montrée par Gumowski et Mira [GM4]. Il en résulte un répulseur étrange constitué d'une infinité de cycles instables, de leurs points limites et des séquences arborescentes de leurs antécédents appartenant à  $A$  avant la bifurcation. Un tel ensemble de points donne lieu à un transitoire chaotique vers l'infini ou vers un autre attracteur à distance finie.

# Chapitre 2

## 2.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une transformation quadratique non inversible couplée avec trois paramètres. Nous nous intéressons à déterminer la structure de bifurcation, où nous caractérisons les bifurcations flip et fold, nous identifions aussi les différents attracteurs présents.

La transformation considérée est donnée par le système suivant :

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = 1 - ax_n^2 + c(y_n^2 - x_n^2) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) = 1 - ay_n^2 + b(x_n^2 - y_n^2) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x, y$  sont les variables et  $\Lambda = (a, b, c)$  un vecteur paramètre de  $IR^3$ .

## 2.2 Singularités et stabilités :

La transformation (2.1) a huit points fixes  $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3), P_4 = (x_4, y_4), P_5 = (x_5, y_5), P_6 = (x_6, y_6), P_7 = (x_7, y_7)$  et  $P_8 = (x_8, y_8)$  où  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2a}A, x_3 = x_4 = -\frac{1}{2a}B, x_5 = x_6 = \frac{1}{2a(a+b+c)}C, x_7 = x_8 = -\frac{1}{2a(a+b+c)}D,$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 + \sqrt{1 + 4a + \frac{bA^2}{a} + 4b + \frac{b^2A^2}{a^2}} \right), \\
y_2 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 - \sqrt{1 + 4a + \frac{bA^2}{a} + 4b + \frac{b^2A^2}{a^2}} \right), \\
y_3 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 + \sqrt{1 + 4a + \frac{bB^2}{a} + 4b + \frac{b^2B^2}{a^2}} \right), \\
y_4 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 - \sqrt{1 + 4a + \frac{bB^2}{a} + 4b + \frac{b^2B^2}{a^2}} \right), \\
y_5 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 + \sqrt{1 + 4a + 4b + \frac{b(a+c)C^2}{a^2(a+b+c)^2}} \right), \\
y_6 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 - \sqrt{1 + 4a + 4b + \frac{b(a+b)C^2}{a^2(a+b+c)^2}} \right), \\
y_7 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 + \sqrt{1 + 4a + 4b + \frac{b(a+b)D^2}{a^2(a+b+c)^2}} \right) \\
\text{et } y_8 &= \frac{1}{2(a+b)} \left( -1 - \sqrt{1 + 4a + 4b + \frac{b(a+b)D^2}{a^2(a+b+c)^2}} \right) \text{ avec } A = (-1 + \sqrt{1 + 4a}), \\
B &= (1 + \sqrt{1 + 4a}), C = (c - a - b + \sqrt{(a+c)^2 + 2b(a-c) + b^2 + 4a(a+b+c)^2}) \\
\text{et } D &= (c - a - b - \sqrt{(a+c)^2 + 2b(a-c) + b^2 + 4a(a+b+c)^2}).
\end{aligned}$$

La stabilité de ces points fixes (voir les figures 2.4 et 2.5) est fixée par les valeurs obtenues en résolvant  $\det(DT(x, y) - SI) = 0$ , où  $I$  est la matrice unitaire et  $DT(x, y)$  la matrice jacobienne de cette transformation donnée par :

$$DT(x, y) = \begin{bmatrix} -2(a+c)x & 2cy \\ 2bx & -2(a+b)y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Pour  $c = 0$  la transformation (2.1) a seulement quatre points fixes, et pour  $c = b$  la transformation (2.1) peut avoir quatre points fixes.

La figure 2.4 montre les différentes zones de stabilité des quatre points fixes de la transformation (2.1) pour  $c = 0$ .

- Dans la zone  $R_1$  ( $x_1, y_1$ ) est un nœud stable, ( $x_2, y_2$ ) est un col, ( $x_3, y_3$ ) est un nœud instable, ( $x_4, y_4$ ) est nœud instable.

- Dans la zone  $R_2$  ( $x_1, y_1$ ) est un nœud stable, ( $x_2, y_2$ ) est un col, ( $x_3, y_3$ ) est un col, ( $x_4, y_4$ ) est nœud instable.

- Dans la zone  $R_3$  ( $x_1, y_1$ ) est un col, ( $x_2, y_2$ ) est un nœud stable, ( $x_3, y_3$ ) est un nœud instable, ( $x_4, y_4$ ) est nœud instable.

- Dans la zone  $R_4$   $(x_1, y_1)$  est un col,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_5$   $(x_1, y_1)$  est un nœud instable,  $(x_2, y_2)$  est un nœud instable,  $(x_3, y_3)$  est un col,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_6$   $(x_1, y_1)$  est un col,  $(x_2, y_2)$  est un nœud instable,  $(x_3, y_3)$  est un col,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_7$   $(x_1, y_1)$  est un nœud instable,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_8$   $(x_1, y_1)$  est un nœud instable,  $(x_2, y_2)$  est un nœud instable,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_9$   $(x_1, y_1)$  est un col,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_{10}$   $(x_1, y_1)$  est un nœud instable,  $(x_2, y_2)$  est un nœud instable,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

La figure 2.5 montre les différentes zones de stabilité des huit points fixes de la transformation (2.1) pour  $c = b$ .

- Dans la zone  $R_1$   $(x_1, y_1)$  est un nœud stable,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un col,  $(x_6, y_6)$  est un col,  $(x_7, y_7)$  est un col et  $(x_8, y_8)$  est un col.

- Dans la zone  $R_2$   $(x_1, y_1)$  est un nœud stable,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un col,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un nœud stable,  $(x_6, y_6)$  est un col,  $(x_7, y_7)$  est un col et  $(x_8, y_8)$  est un nœud instable.

- Dans la zone  $R_3$   $(x_1, y_1)$  est un col,  $(x_2, y_2)$  est un nœud stable,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un col,  $(x_6, y_6)$  est un col,  $(x_7, y_7)$  est un col et  $(x_8, y_8)$  est un col.

- Dans la zone  $R_4$   $(x_1, y_1)$  est un col,  $(x_2, y_2)$  est un nœud stable,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un nœud instable,  $(x_6, y_6)$  est un col,  $(x_7, y_7)$  est un col et  $(x_8, y_8)$  est un nœud stable.

- Dans la zone  $R_5$   $(x_1, y_1)$  est un nœud instable,  $(x_2, y_2)$  est un nœud instable,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un nœud instable,  $(x_6, y_6)$  est un nœud instable,  $(x_7, y_7)$  est un nœud instable et  $(x_8, y_8)$  est un nœud instable.

- Dans la zone  $R_6$   $(x_1, y_1)$  est un col,  $(x_2, y_2)$  est un nœud instable,  $(x_3, y_3)$  est un col,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_7$   $(x_1, y_1)$  est un nœud instable,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable.

- Dans la zone  $R_8$   $(x_1, y_1)$  est un col,  $(x_2, y_2)$  est un nœud instable,  $(x_3, y_3)$  est un col,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un col,  $(x_6, y_6)$  est un nœud instable,  $(x_7, y_7)$  est un nœud stable et  $(x_8, y_8)$  est un col.

- Dans la zone  $R_9$   $(x_1, y_1)$  est un nœud stable,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un col,  $(x_6, y_6)$  est un col,  $(x_7, y_7)$  est un nœud instable et  $(x_8, y_8)$  est un nœud instable.

- Dans la zone  $R_{10}$   $(x_1, y_1)$  est un nœud stable,  $(x_2, y_2)$  est un col,  $(x_3, y_3)$  est un nœud instable,  $(x_4, y_4)$  est nœud instable,  $(x_5, y_5)$  est un col,  $(x_6, y_6)$  est un col,  $(x_7, y_7)$  est un col et  $(x_8, y_8)$  est un col.

## 2.3 Etude du plan paramétrique :

### 2.3.1 Techniques utilisées :

Pour l'étude du plan paramétrique nous avons utilisé un logiciel numérique conçu par le groupe d'étude des systèmes non linéaires et applications (I.N.S.A de Toulouse). C'est une technique numérique pour tracer un plan de bifurcations dit "*Balayage*". Il s'agit de tester l'existence des attracteurs, pour une récurrence donnée, pour un ensemble de conditions initiales préétablies et d'attribuer à chaque point la couleur qui correspond à l'ordre de la singularité trouvée. Cette technique donne une première information sur les différents attracteurs existants et sur les courbes correspondant à leur apparition ou leur

disparition. Le résultat du balayage est une projection sur un plan d'une représentation spatiale correspondant à la structure feuilletée. Nous avons apporté une variante à cette technique en prenant des conditions initiales aléatoires dans un domaine prédéfini. Ceci a pour résultat de nous donner les zones de coexistence de plusieurs attracteurs d'ordre différent comme des zones où plusieurs couleurs sont présentes. Notons que les simulations ne font pas apparaître les singularités instables. Puis nous avons déterminé les courbes de bifurcation en utilisant les méthodes développées dans [C2] et rappelées au paragraphe (1.6.5) pour les cycles d'ordre  $k = 1$  analytiquement et numériquement par un programme en fortran pour les cycles d'ordre  $k = 2, 3, 4$  car les calculs analytiquement deviennent très difficiles.

### 2.3.2 Balayage du plan de paramètres :

Les résultats du balayage dans le plan paramétrique  $(a, b)$  sont donnés par les figures (2.1) à (2.3). Sur ces figures, le blanc correspond aux valeurs des paramètres pour lesquelles il n'a pas été trouvé d'attracteur. Une distinction est faite entre les attracteurs de type cycles d'ordre  $k$  pour  $k \leq 14$  et les autres attracteurs. A chaque cycle d'ordre  $k$  ( $k \leq 14$ ) est associée une couleur. Ainsi, la zone de couleur bleue représente les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un point fixe attractif. La zone de couleur verte est associée aux solutions de  $T$  de type cycle d'ordre 2 attractif et ainsi de suite pour les autres cycles jusqu'à l'ordre  $k = 14$ . Le noir correspond aux valeurs de  $(a, b)$  pour lesquelles il existe soient des cycles stables d'ordre supérieur ou égal à quinze, soient des attracteurs étranges, soient des courbes invariantes fermées soient à des attracteurs chaotiques.

Ce diagramme de bifurcation permet de mettre en évidence certaines courbes de bifurcations. En effet, le segment qui sépare une zone de couleur bleue ( existence d'un point fixe attractif) d'une zone de couleur verte ( existence d'un cycle d'ordre 2 attractif) est une courbe de bifurcation de type doublement de période ( ou flip) correspondant au schéma 1.8 du chapitre 1 ( nous avons représenté, sur figure 2.1 la courbe de bifurcation

de type flip  $\Lambda_1^1$ ).

Cette représentation du plan paramétrique  $(a, b)$  ne suffit pas à établir la structure de bifurcation d'une transformation telle que  $T$ , mais elle est très utile pour l'initialisation des programmes de tracé des courbes de bifurcation.

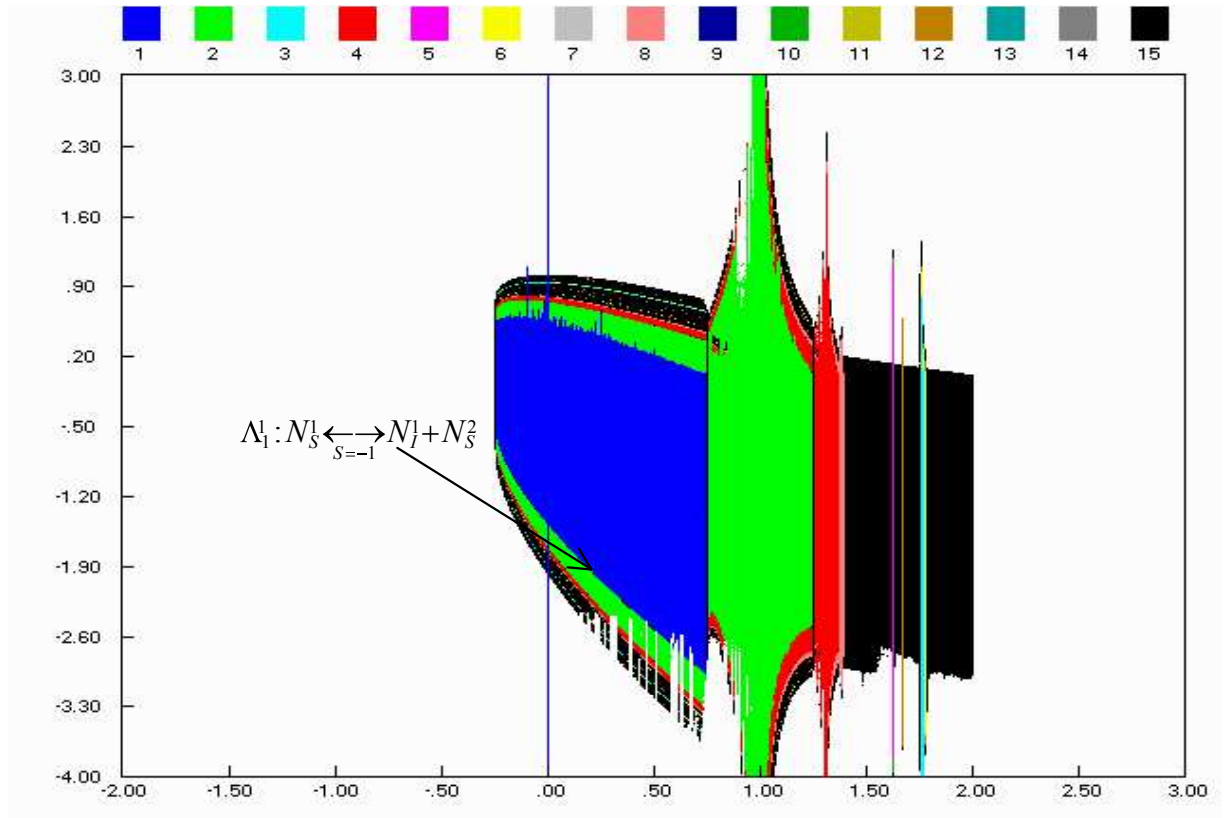


Figure 2.1 : Diagramme de bifurcation du système (2.1) dans le plan paramétrique  $(a, b)$ ,  $c = 0$ .

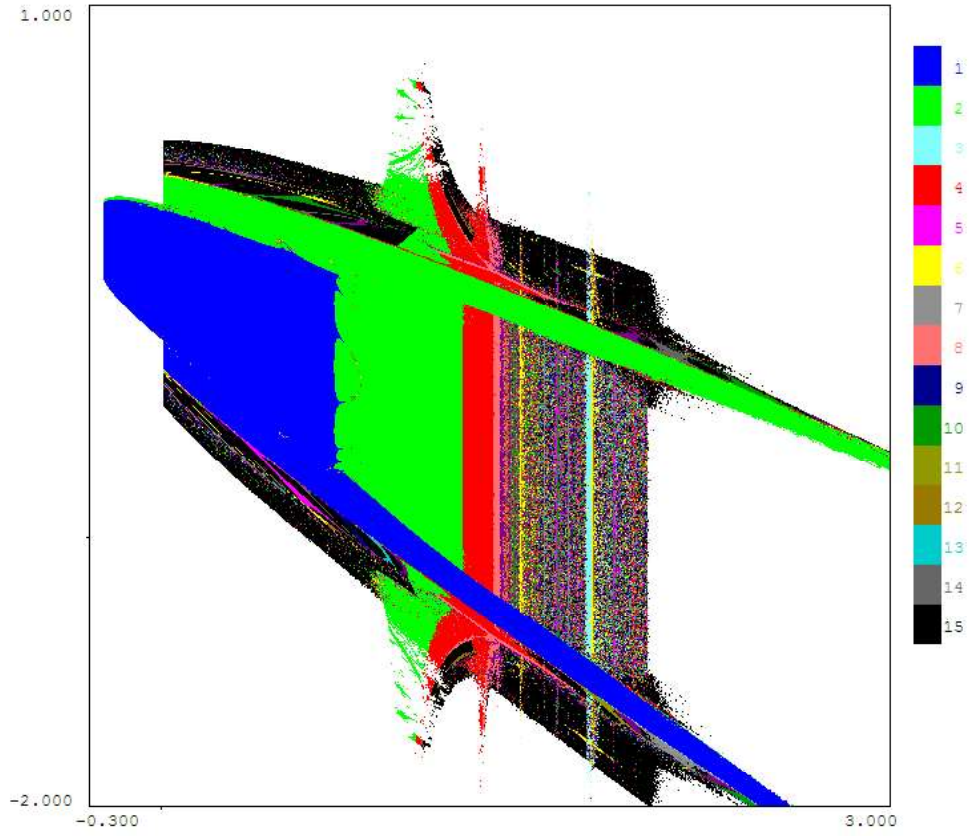


Figure 2.2 : Diagramme de bifurcation du système (2.1) dans le plan paramétrique  $(a, b)$ ,  $c = b$ .

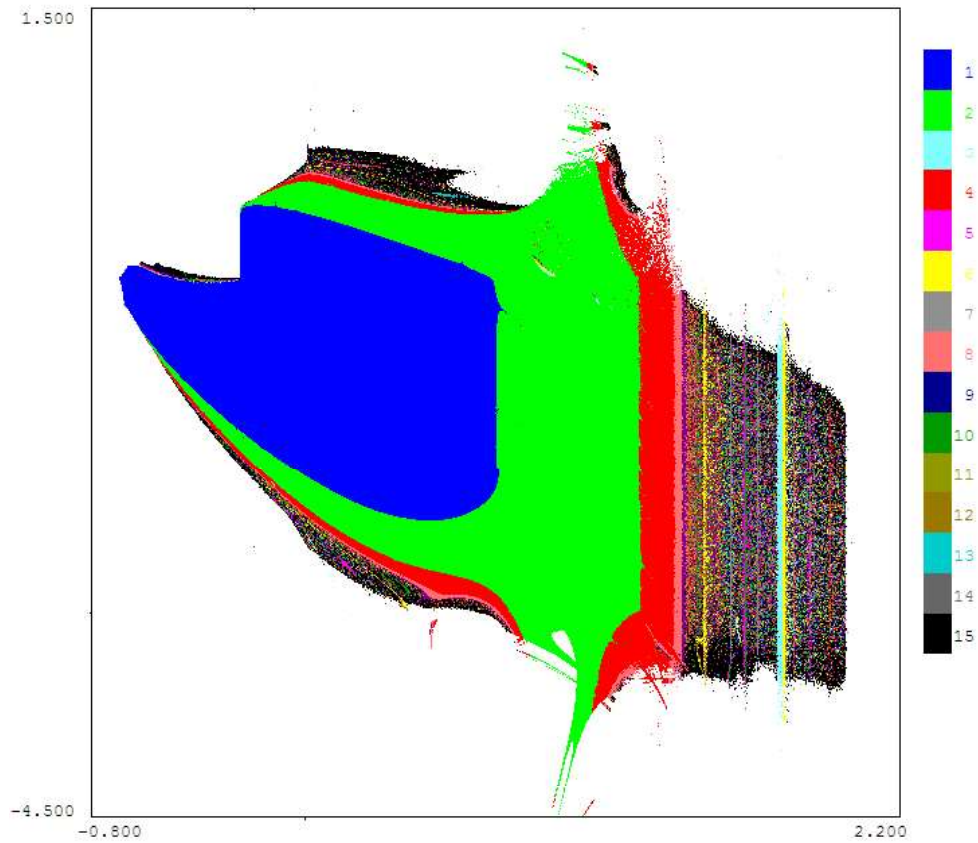


Figure : 2.3. Diagramme de bifurcation du système (2.1) dans le plan paramétrique  $(a, b)$ ,  $c = 0.5$ .

### 2.3.3 Courbes de bifurcation :

En utilisant les méthodes développées dans [C2] rappelées au paragraphe (1.6.5), le système d'équations donnant les courbes de bifurcation flip et fold d'un cycle d'ordre  $k$  de  $T$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_k(X, \Lambda) = X - T^k(X) = 0 \\ \Psi(S, X, \Lambda) = \det(S I - DT^k(X)) = 0 \\ S = \pm 1 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Pour le système (2.1), le système d'équation qui permet de construire les courbes de bifurcation d'un point fixe est :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+c)x^2 + x - cy^2 - 1 = 0 \\ (a+b)y^2 + y - by^2 - 1 = 0 \\ S^2 + 2((a+b)y + (a+b)x)S + 4a(a+b+c)xy = 0 \\ S = \pm 1 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

L'élimination de  $(x, y)$  dans (2.4) permet d'avoir les équations des courbes de bifurcations, noeud-col ou fold si  $S = +1$ , notées  $\Lambda_{1(0)}^j$ , et les courbes de bifurcations doublement de période ou flip si  $S = -1$ , notées  $\Lambda_1^j$ .

D'où l'équation qui donne les courbes de bifurcation  $\Lambda_{1(0)}^j$  pour  $c = 0$  est :

$$\begin{aligned} &16a^6 + 16b^6 + 8a^5 + 16b^5 + 96ab^5 + 240a^2b^4 + 320a^3b^3 \\ &+ 240a^4b^2 + 96a^5b + 72ab^4 + 128b^3a^2 + 112a^3b^2 + a^4 \\ &+ 4b^4 + 48a^4b + 6a^3b + 13a^2b^2 + 12b^3a = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

et dans le cas des courbes de bifurcation  $\Lambda_1^j$  pour  $c = 0$  est :

$$\begin{aligned} &16a^6 + 16b^6 - 24a^5 + 16b^5 + 96ab^5 + 240a^2b^4 + 320a^3b^3 \\ &+ 240a^4b^2 + 96a^5b + 40ab^4 + 128b^3a^2 - 80a^3b^2 + 9a^4 \\ &- 12b^4 - 80a^4b + 6a^3b - 27a^2b^2 - 36b^3a = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

La figure 2.4 représente les courbes de bifurcation ( flip et fold), d'un point fixe de la transformation  $T$  pour  $c = 0$ .

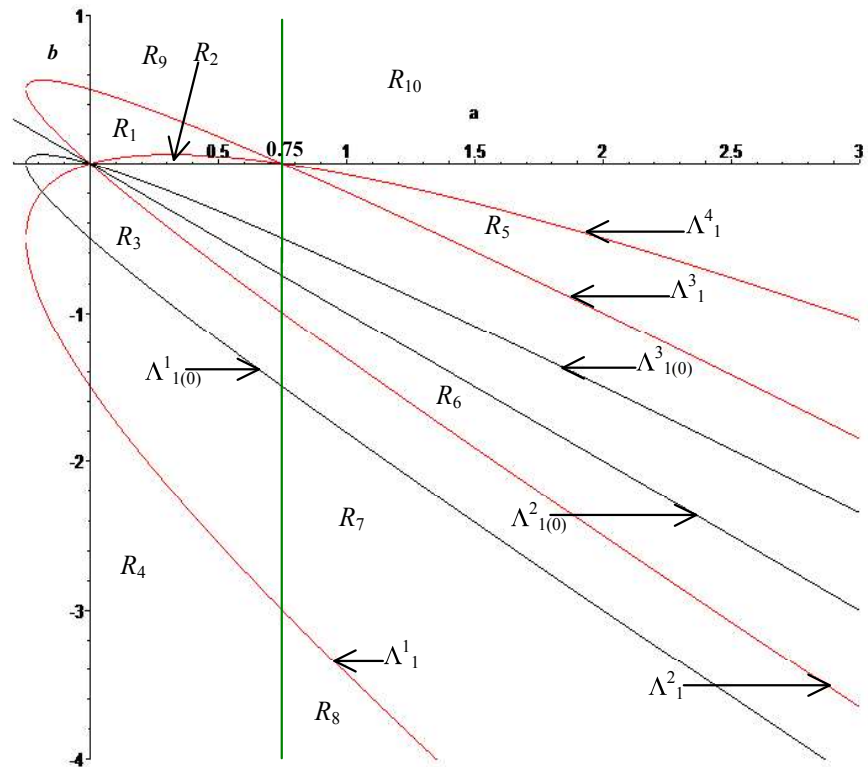


Figure. 2.4 : Courbes de bifurcation des cycles d'ordre 1.

La figure 2.5 représente les courbes de bifurcation ( flip et fold), d'un point fixe de la transformation  $T$  pour  $c = b$ .

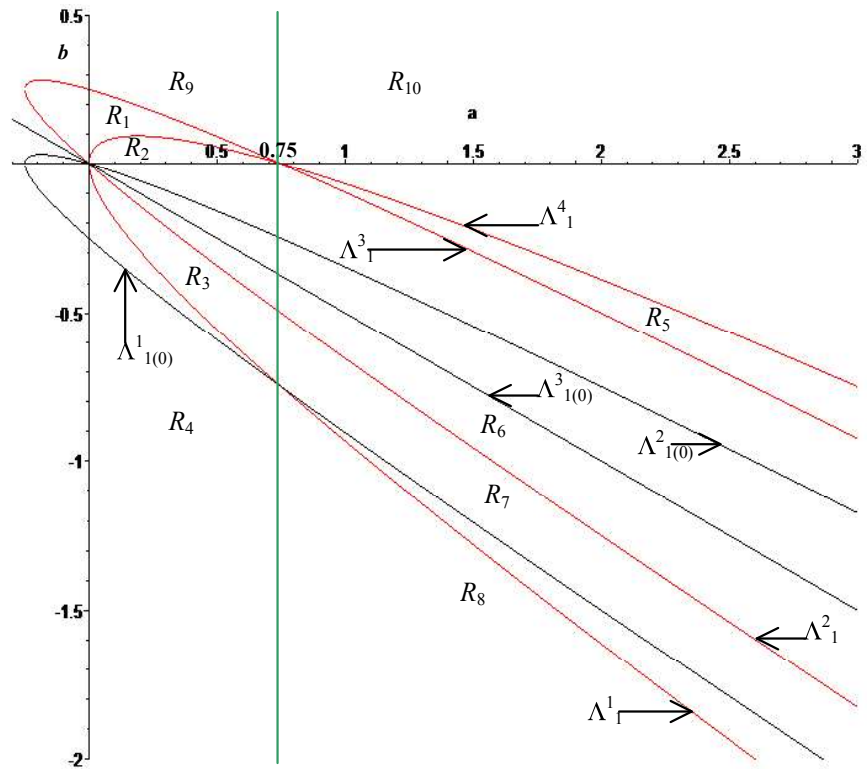


Figure. 2.5 : Courbes de bifurcation des cycles d'ordre 1.

La figure 2.6 représente les courbes de bifurcation flip pour  $k = 1, 2, 3$  et 4 et les courbes de bifurcations fold pour  $k = 1, 2$  et 3 pour  $c = 0$ .

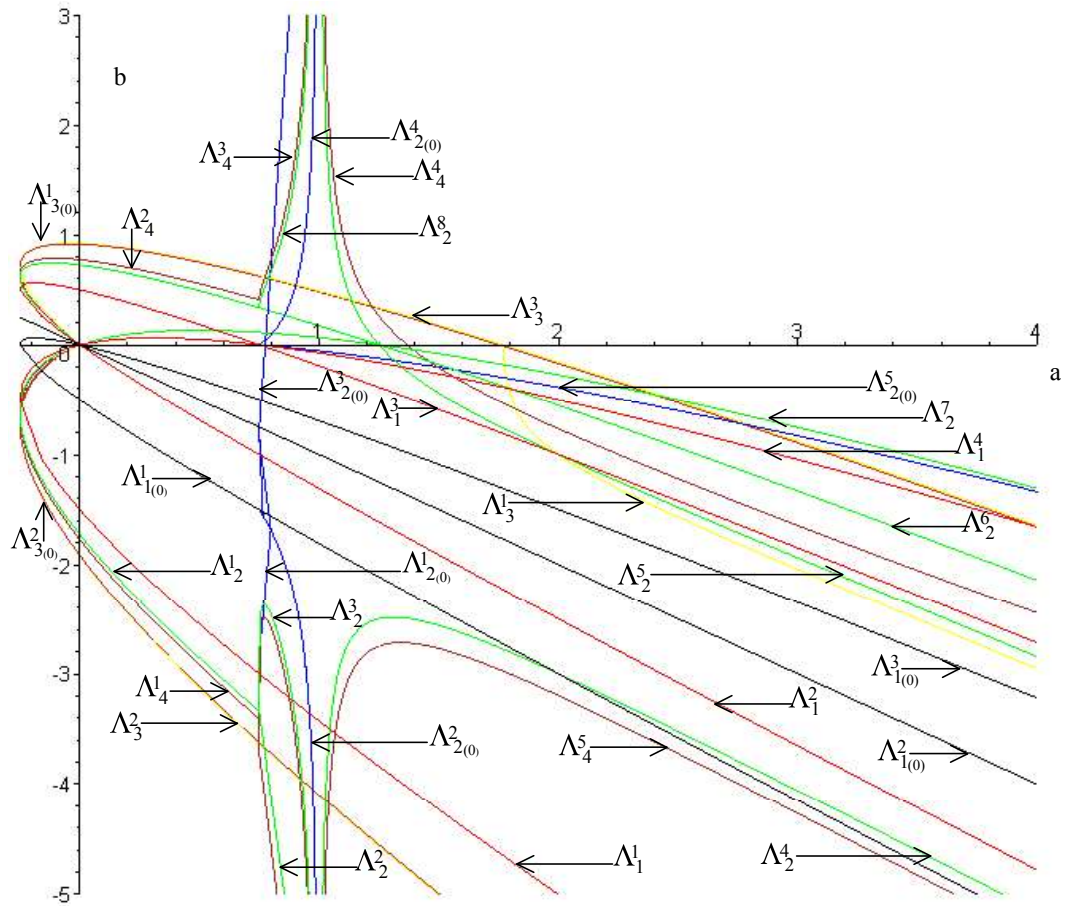


Figure 2.6 : Courbes de bifurcation fold d'ordre 1, 2 et 3 et flip d'ordre 1, 2, 3 et 4.

La figure 2.7 représente les courbes de bifurcation flip pour  $k = 1, 2, 3$  et 4 et les courbes de bifurcations fold pour  $k = 1, 2$  et 3 pour  $c = b \neq 0$ .

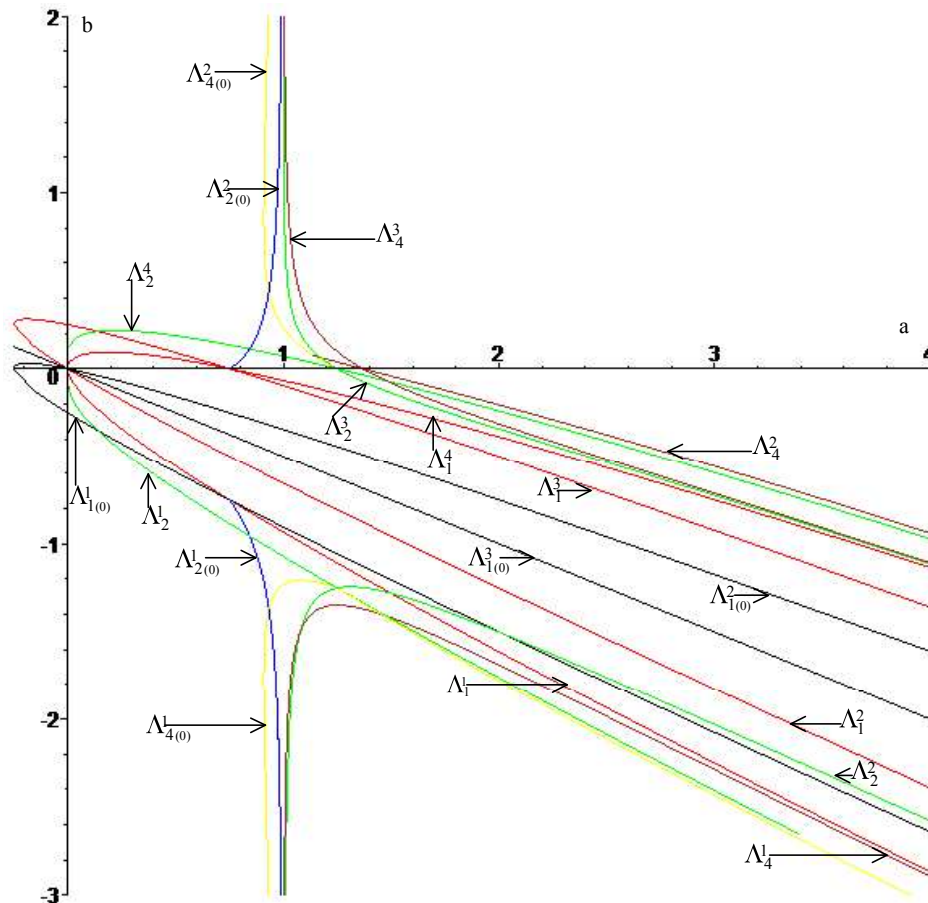


Figure 2.7 : Courbes de bifurcation fold et flip d'ordre 1, 2 et 4.

## 2.4 Etude du plan de phase :

Nous étudions dans cette section le plan de phase  $(x, y)$  de la récurrence  $T$ . Les lignes critiques qui délimitent les attracteurs chaotiques sont représentées. Enfin, nous étudions les bassins d'attraction dans le plan de phase et leur évolution. Une étude Koréenne a été déjà faite par [LK][LKK][KL] où il a été mis en évidence les bifurcations donnant des bassins ridés. Dans les travaux Russes de [MMP] nous pouvons trouver l'évolution des

bassins.

### 2.4.1 Lignes critiques :

Soit la transformation ponctuelle (2.1), qui est non inversible,  $T$  différentiable dans  $IR^2$ , dans ce cas l'équation de la ligne critique  $LC_{-1}$  de  $T$  vérifie :  $|DT(x, y)| = 0$  où  $DT(x, y)$  et le jacobien de  $T$  donné par (2.2).

On obtient deux branches  $LC_{-1}^{(a)}$  et  $LC_{-1}^{(b)}$  pour  $LC_{-1}$  ( voir figures 2.8 et 2.9) qui sont des droites dont leurs équations sont données par :

$$\begin{cases} LC_{-1}^{(a)} : x = 0 \\ LC_{-1}^{(b)} : y = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $a \neq 0$  et  $a + b + c \neq 0$ .

En outre l'ensemble critique de rang un,  $LC = LC_0 = T(LC_{-1})$  lui aussi est constitué par deux droites  $LC^{(a)}$  et  $LC^{(b)}$  ( voir figures 2.8 et 2.9) où  $LC^{(a)} = T(LC_{-1}^{(a)})$  et  $LC^{(b)} = T(LC_{-1}^{(b)})$  dont leurs équations sont données par 2.8 si  $c \neq 0$  et par 2.9 si  $c = 0$  :

$$\begin{cases} LC^{(a)} : y = -\frac{a+b}{c}x + \frac{a+b+c}{c} \\ LC^{(b)} : y = -\frac{b}{a+c}x + \frac{b+a+c}{a+c} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} LC^{(a)} : x = 1 \\ LC^{(b)} : y = -\frac{b}{a}x + \frac{b+a}{a} \end{cases} \quad (2.9)$$

L'image de rang  $k$  ( $k \geq 1$ ) de  $LC$ , elle aussi est constituée par deux branches  $LC_k^{(a)}$  et  $LC_k^{(b)}$  où  $LC_k^{(a)} = T^k(LC^{(a)})$  et  $LC_k^{(b)} = T^k(LC^{(b)})$  (voir figures 2.8 et 2.9).

Les figures 2.8 et 2.9 représentent les lignes critiques  $LC_{-1}$ ,  $LC$ ,  $LC_1$ ,  $LC_2$ ,  $LC_3$  et  $LC_4$ .

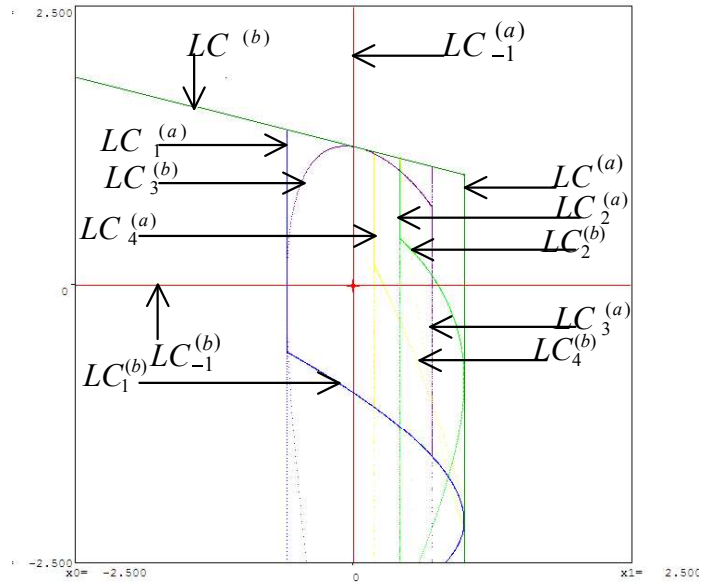


Figure 2.8 : Branches des lignes critiques  $LC_{-1}$ ,  $LC$ ,  $LC_1$ ,  $LC_2$ ,  $LC_3$  et  $LC_4$  pour  $a = 1.6$ ,  $b = 0.4$ .

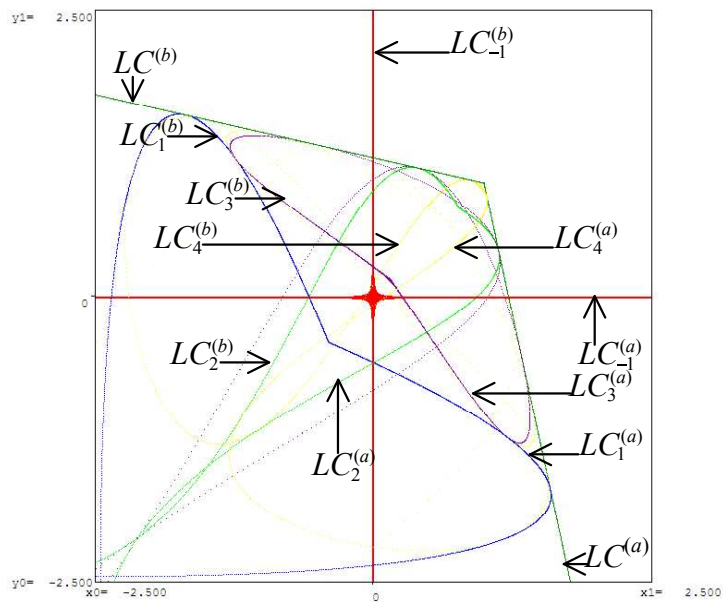


Figure 2.9 : Branches des lignes critiques  $LC_{-1}$ ,  $LC$ ,  $LC_1$ ,  $LC_2$ ,  $LC_3$  et  $LC_4$  pour  $a = 1.4$ ,  $b = c = 0.4$ .

La figure 2.10 représente les zones  $Z_i$ ,  $LC$  possède deux branches qui séparent le plan en trois régions  $Z_0$ ,  $Z_2$  et  $Z_4$  où il existe respectivement zéro antécédent, deux antécédents, quatre antécédents pour chaque point de la zone.

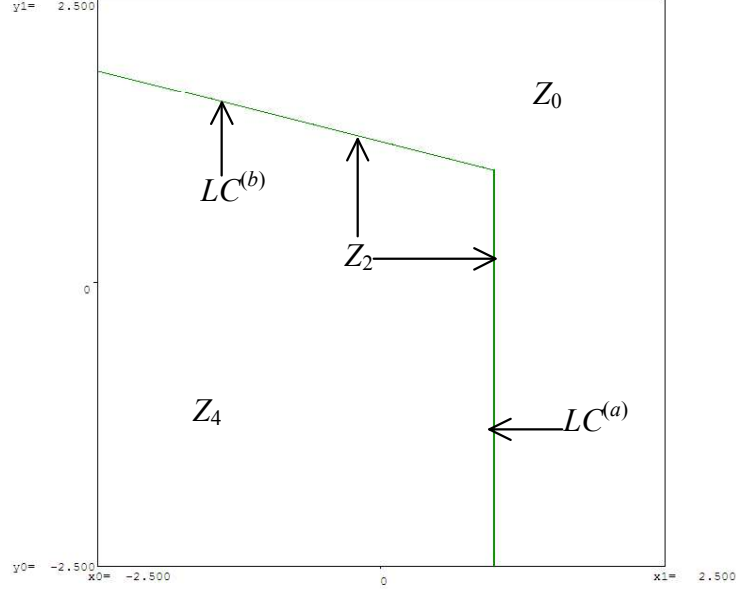


Figure 2.10 : Le plan de phase est de type  $(Z_0 - Z_2 - Z_4)$   
pour  $a = 1.6$ ,  $b = 0.4$  et  $c = 0$ .

Lorsque les points ont quatre antécédents, ceux-ci sont donnés par quatre déterminations de la transformation inverse :

$$T_1^{-1} \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} (cy_n + (a+b)x_n - (a+b+c))} \\ y_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} ((a+c)y_n + bx_n - (a+b+c))} \end{cases}$$

$$T_2^{-1} \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} (cy_n + (a+b)x_n - (a+b+c))} \\ y_{n+1} = -\sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} ((a+c)y_n + bx_n - (a+b+c))} \end{cases}$$

$$T_3^{-1} \begin{cases} x_{n+1} = -\sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} (cy_n + (a+b)x_n - (a+b+c))} \\ y_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} ((a+c)y_n + bx_n - (a+b+c))} \end{cases}$$

$$T_4^{-1} \begin{cases} x_{n+1} = -\sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} (cy_n + (a+b)x_n - (a+b+c))} \\ y_{n+1} = -\sqrt{-\frac{1}{a^2+ab+ac} ((a+c)y_n + bx_n - (a+b+c))} \end{cases}$$

Les figures 2.11 et 2.12 représentent certaines courbes critiques  $LC_i$  où un attracteur chaotique existe dans le plan de phase et est limité par des arcs de lignes critiques.

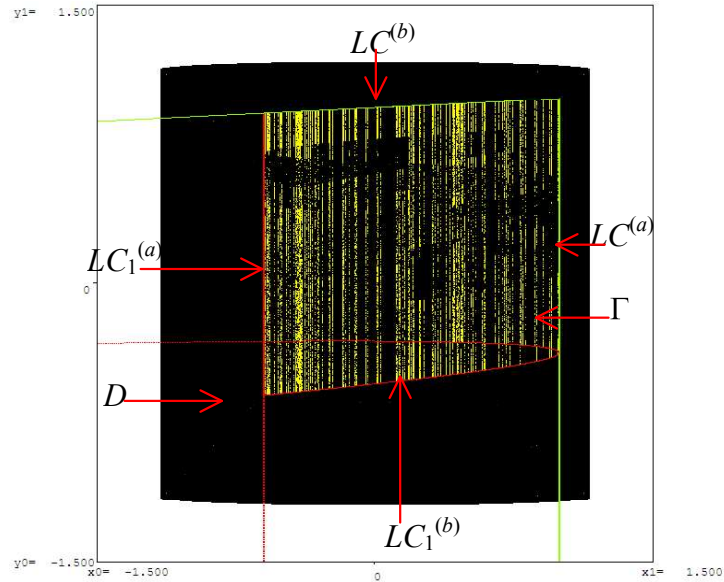


Figure 2.11 Attracteur chaotique  $\Gamma$  avec une dimension de Lyapounov égale à 2 pour  $a = 1.6$ ,  $b = -0.08$  et  $c = 0$ .

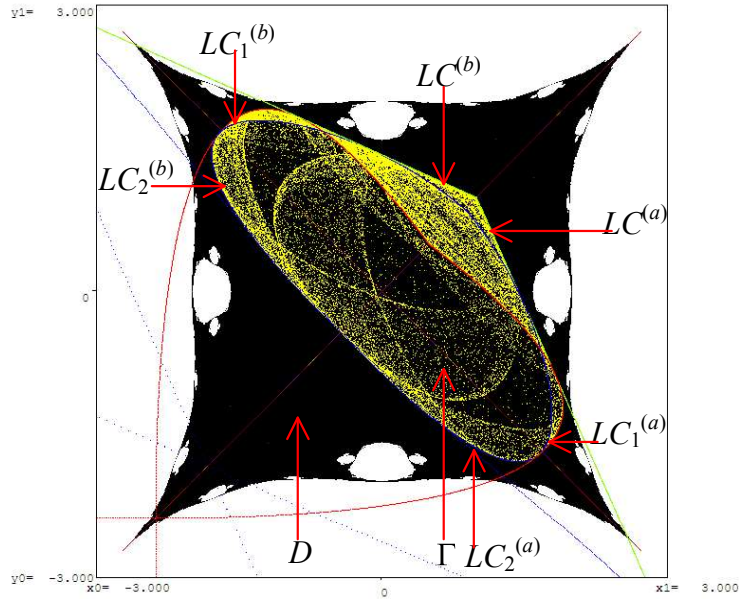


Figure 2.12 : Attracteur chaotique  $\Gamma$  avec une dimension de Lyapounov égale à 2 pour  $a = 0.48$  et  $b = c = 0.4$ .

## 2.4.2 Bassins et attracteurs

La construction de l'attracteur se fait en traçant les trajectoires de phases pour un grand nombre d'itération fixé à  $10^5$  à partir de différentes conditions initiales  $X_0$  pour une valeur fixée des paramètres  $(a, b, c)$ , et en visualisant le comportement du système en régime permettant de voir l'existence des cycles stables (attracteurs), par exemple deux points indiquent l'existence d'un cycle d'ordre 2, trois points c'est un cycle d'ordre 3, ... et de comprendre la variation que subit le bassin d'attraction. Des formes plus complexes peuvent indiquer l'existence d'un attracteur chaotique (voir les figures 2.11 et 2.12). La variation de l'un des paramètres peut conduire dans certain cas à la disparition du bassin d'attraction où à la fractalisation de sa frontière.

Nous avons considéré 3 cas pour ce système couplé ( $b = c$ ,  $b \neq c$  et  $c = 0$ ) et nous avons suivi l'évolution des bassins et des attracteurs.

### 1<sup>er</sup> cas : Système couplé symétrique ( $b = c$ )

Pour la valeur fixe du paramètre  $a = 0.2000$  et variant  $b$  dans le sens croissant sur

l'intervalle  $[0.3300, 0.4842]$ , l'application  $T$  a un point fixe instable  $P$  et un cycle d'ordre deux  $(F_1, F_2)$ , qui est de type foyer attractive pour  $b = 0.3300$ .

Intéressons-nous aux changements dans la structure géométrique du bassin d'attraction  $D$  du cycle d'ordre deux, lorsque le paramètre  $b$  varie dans le sens croissant.

1- La figure 2.13.a montre un point fixe  $P$  instable et le bassin  $D$  (couleur jaune) d'un cycle d'ordre deux  $(F_1, F_2)$ , qui est de type foyer attractive qui existe pour  $b = 0.3300$  et  $\gamma$  sa frontière. La zone rose représente l'ensemble des conditions initiales qui mènent à des suites itérées de points divergents. Les branches  $LC^{(a)}$  et  $LC^{(b)}$ , courbes consécutives des courbes  $LC_{-1}^{(a)}$  et  $LC_{-1}^{(b)}$  par la transformation  $T$ , séparent le plan  $(x_n, y_n)$  en trois parties  $Z_0, Z_2$  et  $Z_4$ . Le bassin  $D$  ne possède pas de trou et est constitué d'un seul élément, il est connexe.

2- Pour  $b = 0.3350$ , on a un cycle de courbes fermées d'ordre deux  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  qui est né de la déstabilisation du cycle d'ordre deux via à une bifurcation de Hopf-Neimark voir la figure 2.13.b.

3- Pour  $b = 0.3600$ ,  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  évolue et entre en contact avec les branches  $LC^{(a)}$  et  $LC^{(b)}$  et  $LC^{(a)} \cap D$  est simplement connexe ainsi que  $LC^{(b)} \cap D$ . La figure 2.13.c représente ces changements.

4- Pour  $b = 0.3800$ , l'intersection de  $LC^{(a)}$  avec  $D$  devient non connexe ainsi que  $LC^{(b)}$  avec  $D$ . Il en découle la naissance des lacs (trous) dans le bassin d'attraction, rendant ce dernier multiplement connexe. Ces lacs sont les images réciproques  $T^{-n}(H_{0,1})$  et  $T^{-n}(H_{0,2})$  des baies  $H_{0,1}$  et  $H_{0,2}$  voir la figure 2.13.d.

5- Pour  $b = 0.4000$ , on a l'évolution des deux courbes fermées  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  voir la figure 2.13.e.

6- Pour  $b = 0.4100$ , on voit que les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont fusionné pour donner un attracteur chaotique  $\Gamma$  avec une dimension de Lyapounov égale à 1.36369 voir la figure 2.13.f.

7- Pour  $b = 0.4800$ , l'attracteur chaotique  $\Gamma$  évolue et entre en contact avec la frontière du bassin (bifurcation de contact) voir la figure 2.13.g.

8- Pour  $b = 0.4801$ , disparition de l'attracteur chaotique et du bassin d'attraction après la bifurcation de contact.

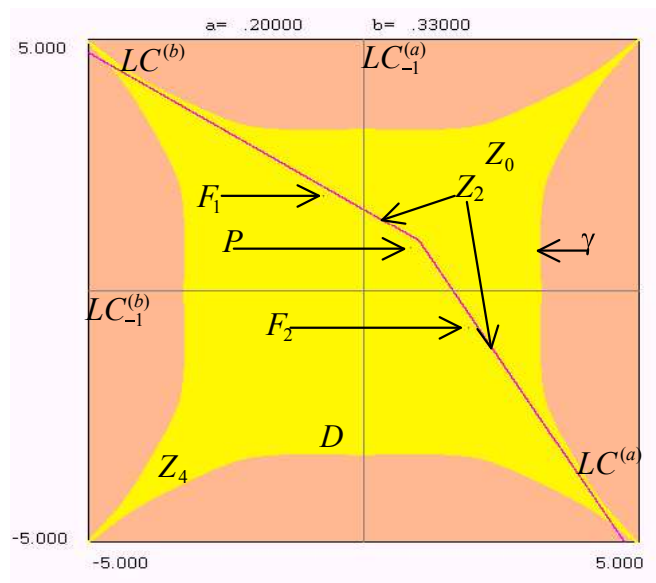


Figure 2.13.a : Bassin d'attraction en jaune du cycle d'ordre deux stable  $(F_1, F_2)$ .

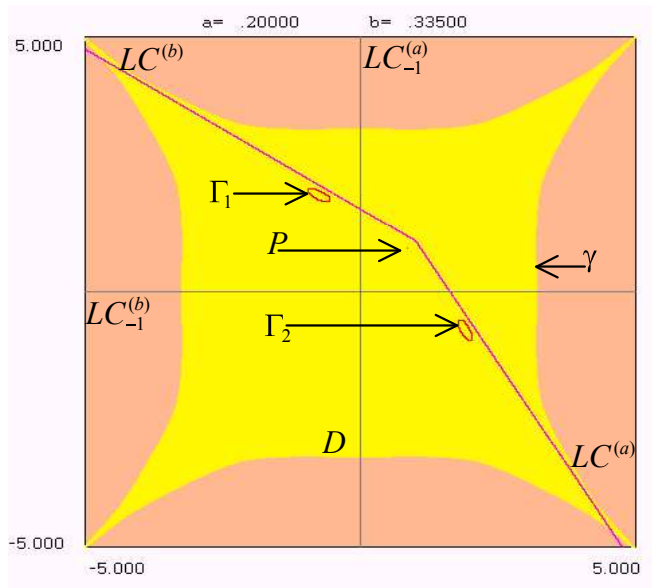


Figure 2.13.b : Naissance d'un cycle de courbes fermées d'ordre 2 par une bifurcation de Hopf-Neimark.

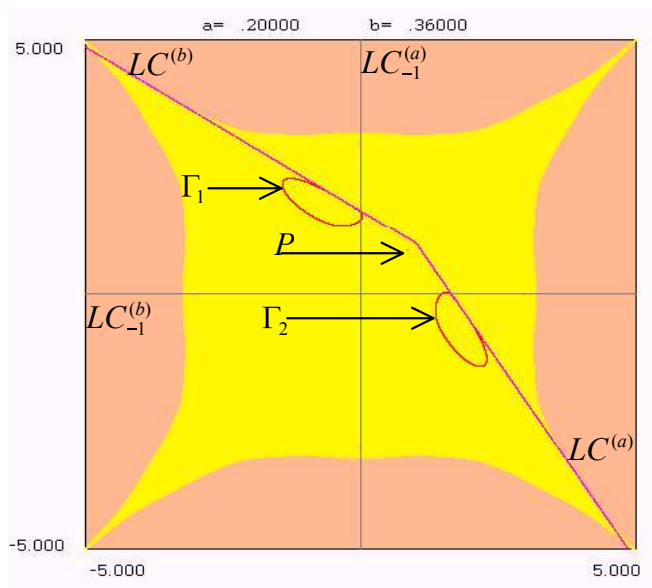


Figure 2.13.c : Augmentation du volume de  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  qui entre en contact avec les branches  $LC^{(a)}$  et  $LC^{(b)}$ .

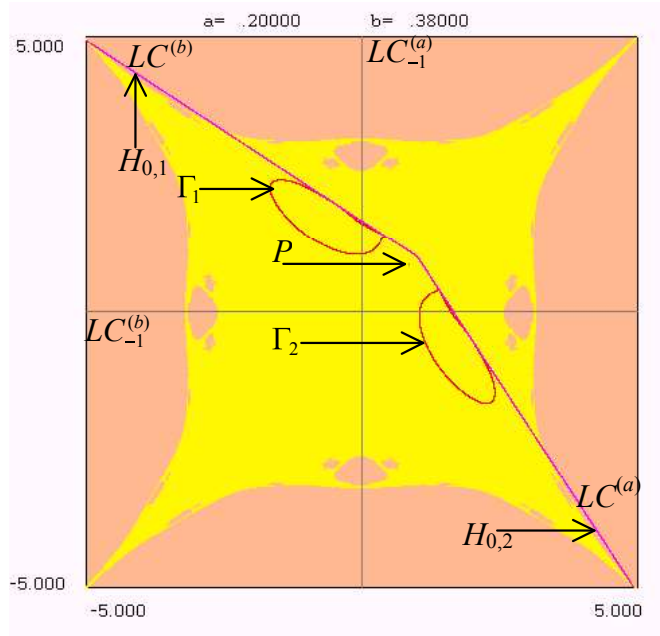


Figure 2.13.d : Bassin d'attraction  $D$  multiplément connexe.

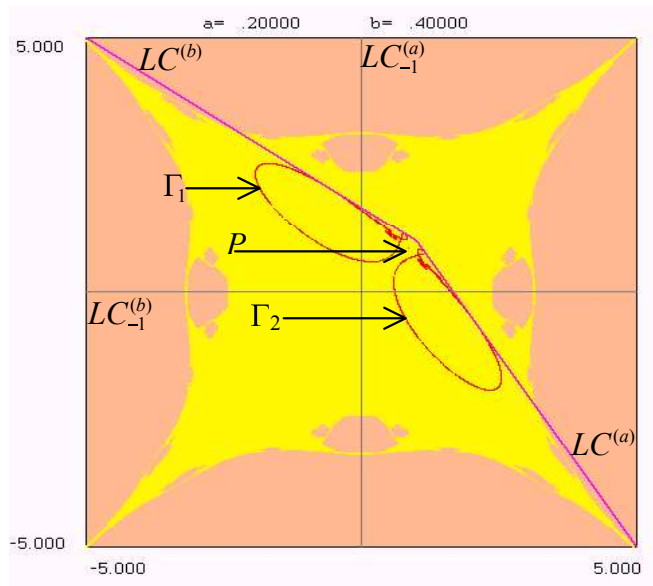


Figure 2.13.e : L'évolution des deux courbes fermées qui.

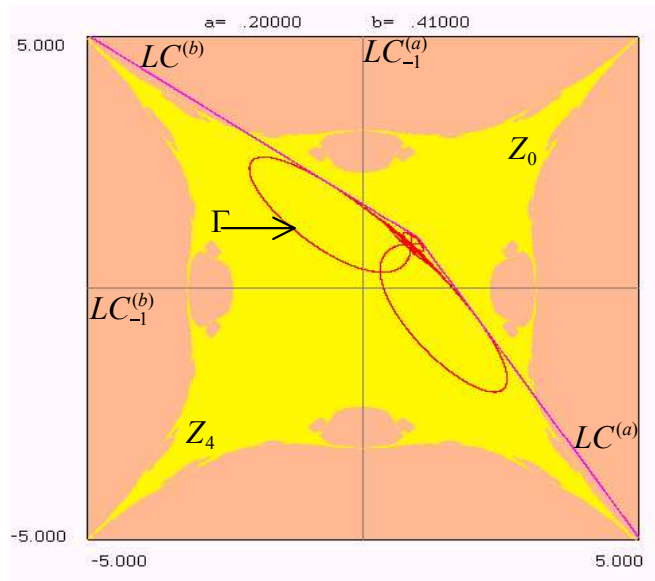


Figure 2.13.f : Naissance d'un attracteur chaotique  $\Gamma$  après l'union des deux courbes fermées  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

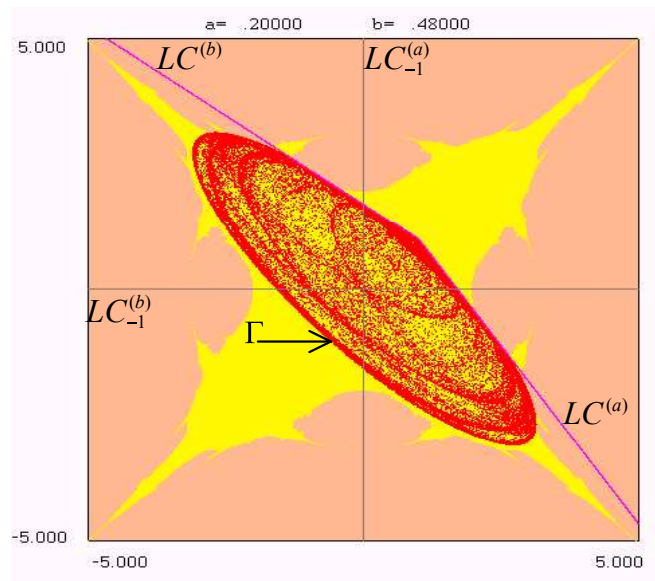


Figure 2.13.g : Augmentation de l'attracteur chaotique qui entre en contact avec la frontière du bassin d'attraction.

## 2<sup>ème</sup> cas système couplé ( $b \neq c$ )

Nous avons considéré le cas où les paramètres  $a$ ,  $c$  sont fixes et égales à 0.2000; 0.5000 et nous avons fait varier le paramètre  $b$  dans le sens croissant de la valeur 0.2800 à la valeur 0.43472 on a les situations suivantes :

1- Pour  $b = 0.2800$  ( fig 2.14.a) montre le bassin d'attraction connexe  $D$  d'un cycle d'ordre 6 ( $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ ), qui est de type noeud stable.

2- Pour  $b = 0.2850$  ( fig 2.14.b) on a un attracteur chaotique  $\Gamma$  de type Hénon avec une dimension de Lyapounov égale à 1.23487 et  $LC^{(b)} \cap D$  est connexe .

3- Pour  $b = 0.3500$  ( fig 2.14.c) l'attracteur  $\Gamma$  évolue et donne un attracteur chaotique  $\Gamma_1$  avec une dimension de Lyapounov égale à 1.07054.

4- Pour  $b = 0.3800$  ( fig 2.14.d) l'évolution de l'attracteur chaotique  $\Gamma_1$ .

5- Pour  $b = 0.4100$  ( fig 2.14.e) l'attracteur chaotique évolue et l'intersection de  $LC^{(b)}$  avec  $D$  devient non connexe. Il en découle la naissance des lacs ( trous) dans le bassin d'attraction, rendant ce dernier multiplement connexe.

6- Pour  $b = 0.43462$  ( fig 2.14.f) l'attracteur chaotique évolue et entre en contact avec la frontière du bassin ( bifurcation de contact).

7- Pour  $b = 0.43463$  disparition de l'attracteur chaotique et du bassin d'attraction après la bifurcation de contact.

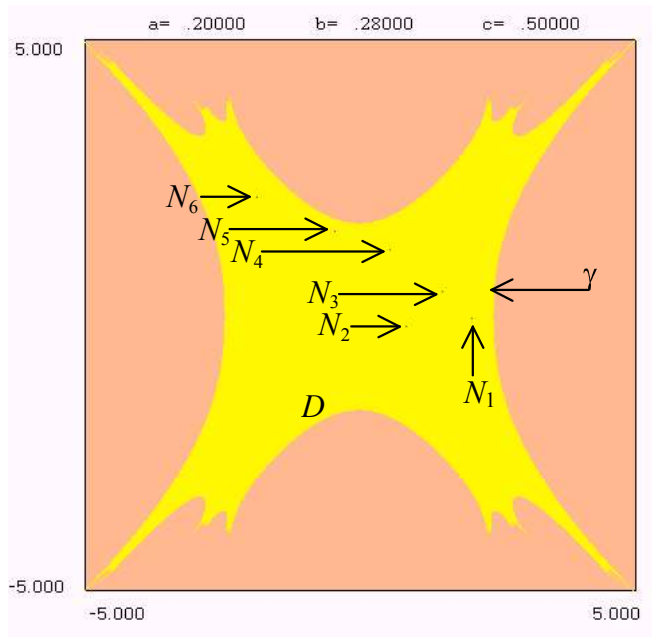


Figure 2.14.a : Bassin d'attraction  $D$  en jaune du cycle d'ordre six stable  $(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6)$ .

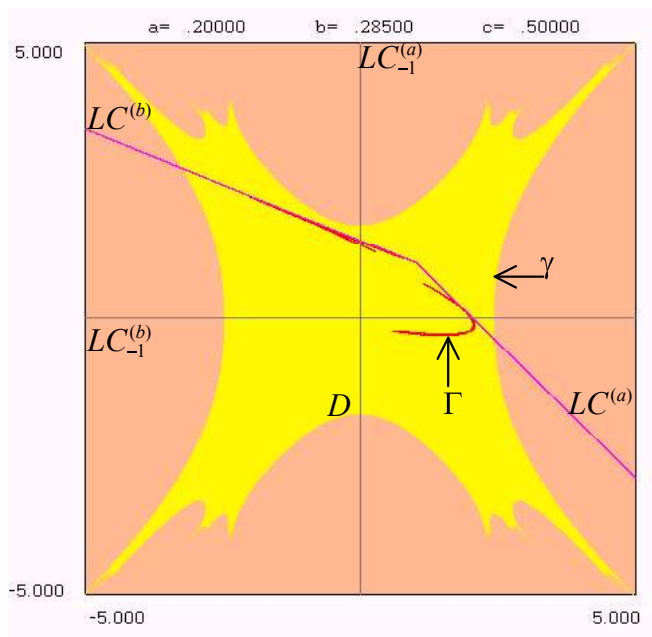


Figure 2.14.b : Naissance d'un attracteur de Hénon.

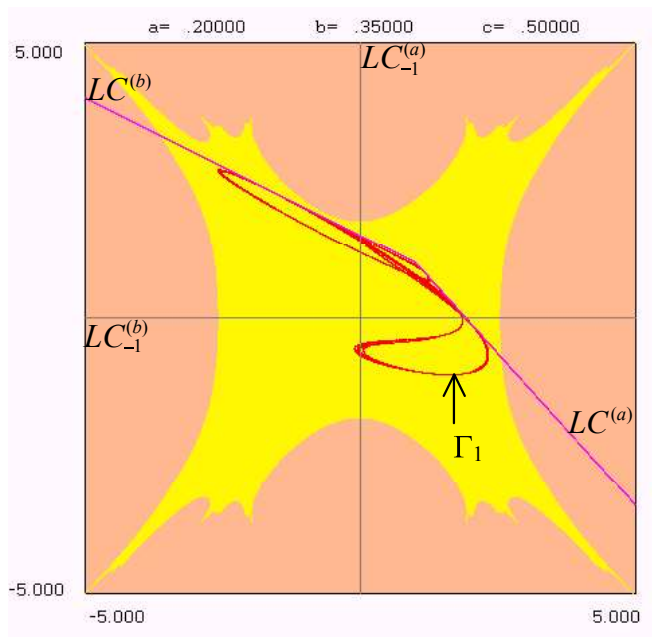


Figure 2.14.c : Bassin d'attraction ( en jaune)  
d'un attracteur chaotique  $\Gamma_1$ .

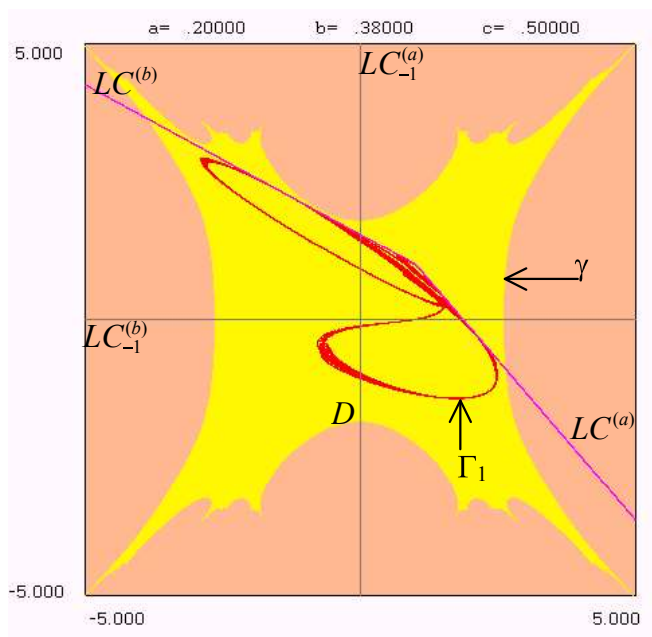


Figure 2.14.d : Evolution de l'attracteur chaotique  $\Gamma_1$ .

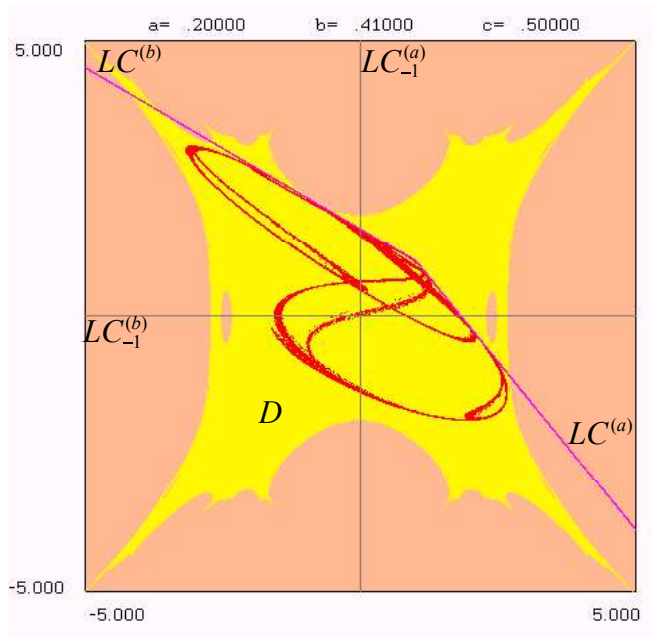


Figure 2.14.e : Le bassin  $D$  de l'attracteur chaotique est devenu multiplément connexe

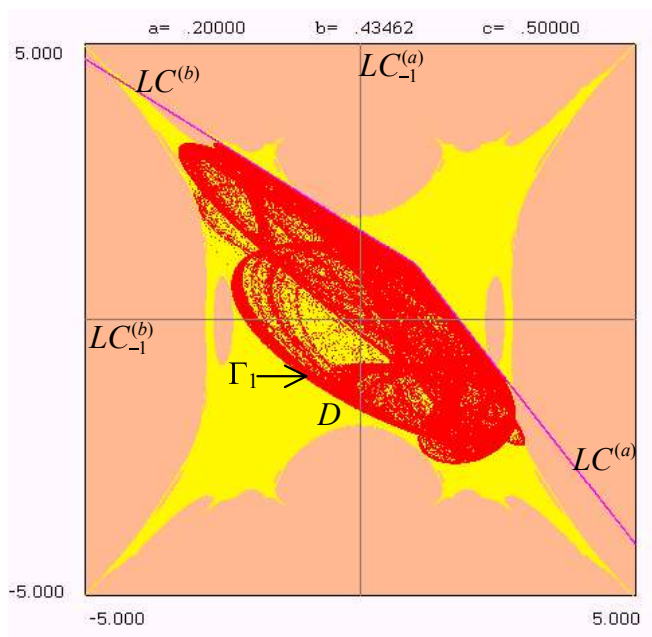


Figure 2.14.f : Augmentation du volume de l'attracteur chaotique qui entre en contact avec la frontière  $\gamma$  du bassin  $D$ .

### 3<sup>ème</sup> cas système couplé asymétrique ( $c = 0$ )

Prenons la valeur fixe du paramètres  $a = 1.2300$  et faisons varier le paramètre  $b$  dans le sens décroissant de la valeur  $-1.3900$  à la valeur  $-1.5015$  on a les situations suivantes :

1- La figure 2.15.a montre le bassin d'un cycle d'ordre quatre  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$ , qui est de type foyer attractive qui existe pour  $b = -1.3900$ .

2- Pour  $b = -1.4100$ , on a un cycle de courbes fermées d'ordre quatre  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$  qui est né de la déstabilisation du cycle d'ordre quatre via à une bifurcation de Hopf-Neimark voir la figure 2.15.b.

3- Pour  $b = -1.4550$ , le cycle de courbes fermées d'ordre quatre  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$  évolue pour devenir quatre attracteurs chaotiques, et  $D$  devient multiplement connexe (connexe avec des trous) voir figure 2.15.c.

4- Pour  $b = -1.4800$  on a l'union des deux attracteurs chaotiques  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3, \Gamma_4$  qui donnent deux attracteurs chaotiques  $\delta_1, \delta_2$ , et fractalisation du bassin d'attraction comme à la figure 2.15.d.

5- Pour  $b = -1.5010$  les deux attracteurs chaotiques  $\delta_1$  et  $\delta_2$  évolue voir figure 2.15.e.

6- Pour  $b = -1.5011$  disparition des deux attracteurs chaotiques  $\delta_1$  et  $\delta_2$  avec leur bassin d'attraction.

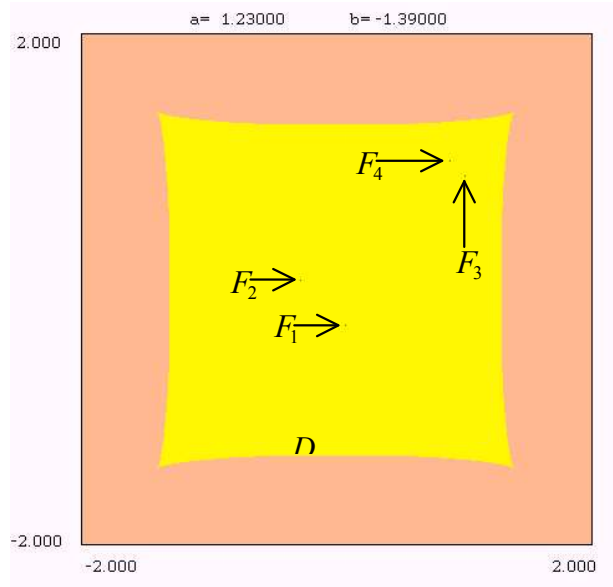


Figure 2.15.a : Bassin d'attraction en jaune d'un cycle d'ordre quatre attractif de type foyer.

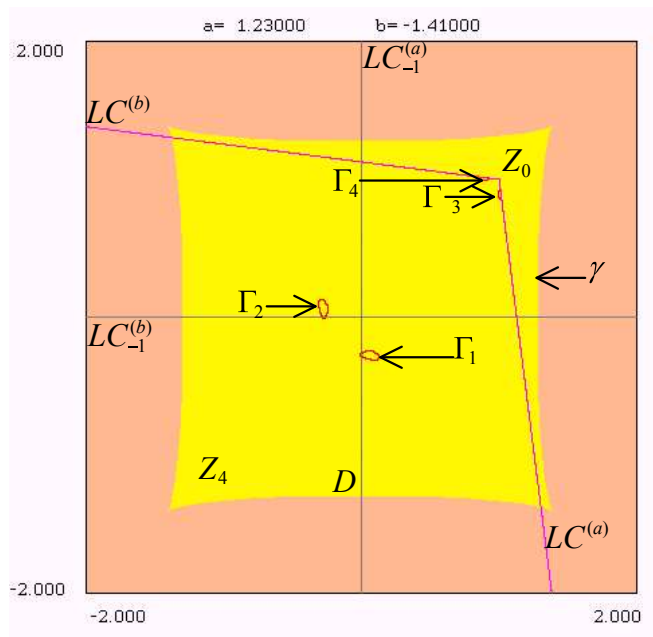


Figure 2.15.b : Bassin d'attraction du cycle de courbes fermées d'ordre quatre ( $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ ) qui est né après la bifurcation de Hopf-Neimark.

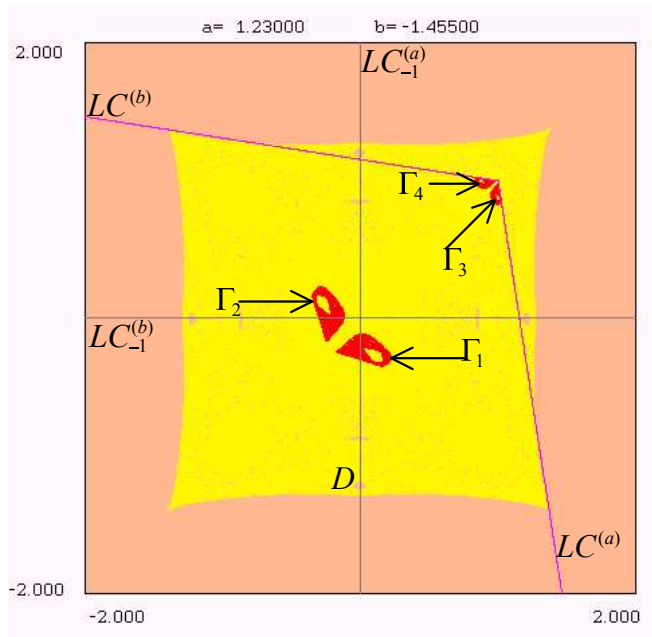


Figure 2.15.c : Le bassin d'attraction  $D$  des attracteurs chaotiques  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ .

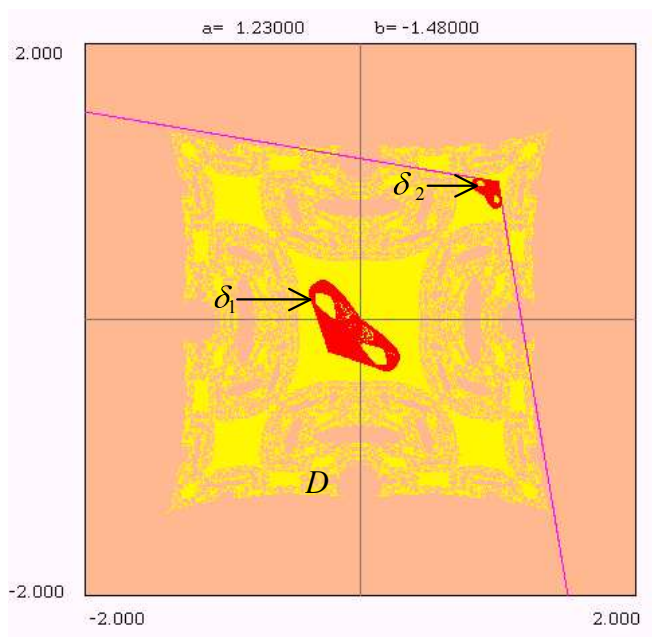


Figure 2.15.d : Naissance de deux attracteurs chaotiques  $\delta_1$  et  $\delta_2$  après l'union de  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3, \Gamma_4$  ;

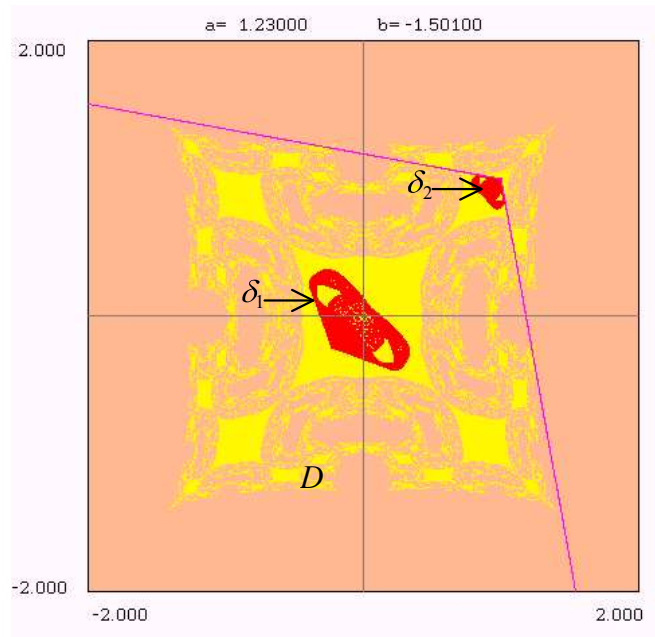


Figure 2.15.e : Evolution des deux attracteurs chaotiques  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

Pour  $c = 0$ , le système couplé devient asymétrique, les bassins d'attraction sont donnés par les figures 2.16 et 2.17 pour  $b$  très petit. Ces figures sont caractéristiques de système de deux récurrences unidimensionnelles et identiques.

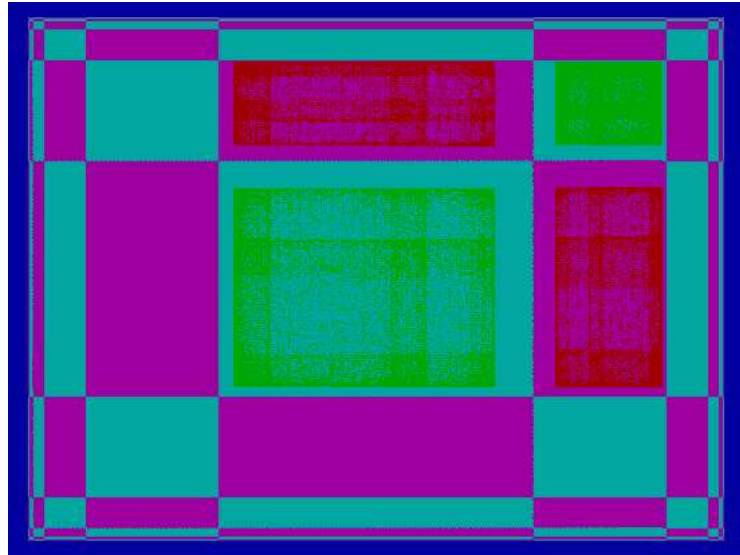


Figure 2.16 :  $a = 1.4125$ ,  $b = 0.0010$  et  $c = 0$ .

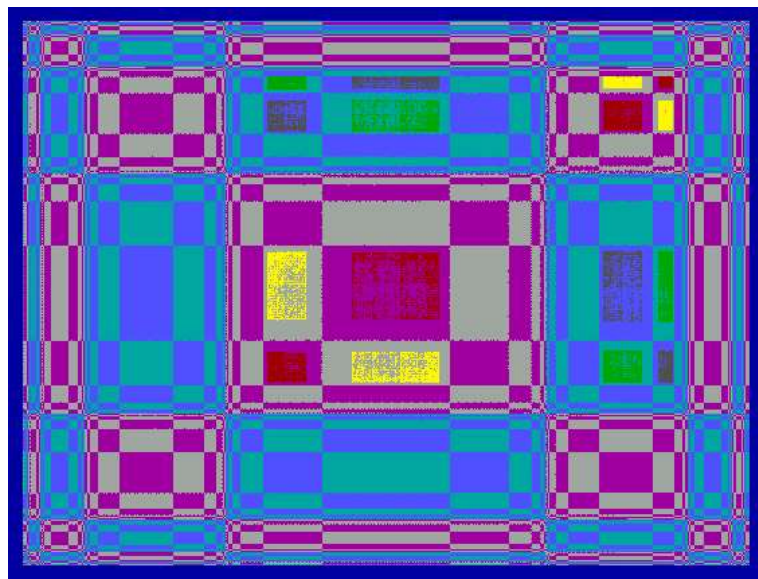


Figure 2.17 :  $a = 1.5000$ ,  $b = 0.0010$  et  $c = 0$ .

# Chapitre 3

## 3.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous étudions une transformation couplée basée sur la fonction sinusoidale. Pour un choix de paramètres bien approprié deux états chaotiques synchronisés coexistent le long de la diagonale principale ( $y = x$ ) avec des bassins d'attraction complexes. Nous déterminons les régions de stabilité pour les cycles principaux et nous décrivons les bifurcations de doublement de période et de Hopf que subissent ces attracteurs.

Notre transformation considéré est donné par le système suivant :

$$T_1 : \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n^2 - x_n^2)) \\ y_{n+1} = 1 - ay_n^2 + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x_n^2 - y_n^2)) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x, y$  sont les variables et  $\Lambda = (a, b)$  un vecteur paramètre de  $\mathbb{R}^2$ .

## 3.2 Singularités :

Les points fixes de la transformation (3.1) vérifiant l'équation :

$$\left(x + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{4a + 1}{a^2} \quad (3.1)$$

- Si  $a < -\frac{1}{4}$  la transformation (3.1) n'a pas de points fixes.
- Si  $a > -\frac{1}{4}$  les points fixes de la transformation de (3.1) se trouve sur le cercle de centre  $(-\frac{1}{2a}, -\frac{1}{2a})$  et de rayon  $\frac{\sqrt{4a+1}}{a}$  avec  $a \neq 0$ .
- Si  $a = -\frac{1}{4}$  la transformation (3.1) admet un seul point fixe  $(2, 2)$ .

### 3.3 Etude du plan paramétrique :

Nous donnons ici le diagramme de bifurcation dans le plan paramétrique  $(a, b)$  de la transformation  $T_1$ . Dans la figure 3.1, le code des couleurs que nous avons défini est identique à celui du chapitre deux et trois :

- les zones bleues représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un point fixe attractif;
- les zones vertes représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un cycle d'ordre deux attractif;
- les zones rouges représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un cycle d'ordre quatre attractif; ainsi de suite pour les cycles jusqu'à l'ordre  $k = 14$ ;
- les zones noires correspondent aux valeurs des paramètres  $(a, b)$  pour lesquelles il existe des cycles attractifs d'ordre supérieur ou égal à quinze soit à des phénomènes chaotiques.

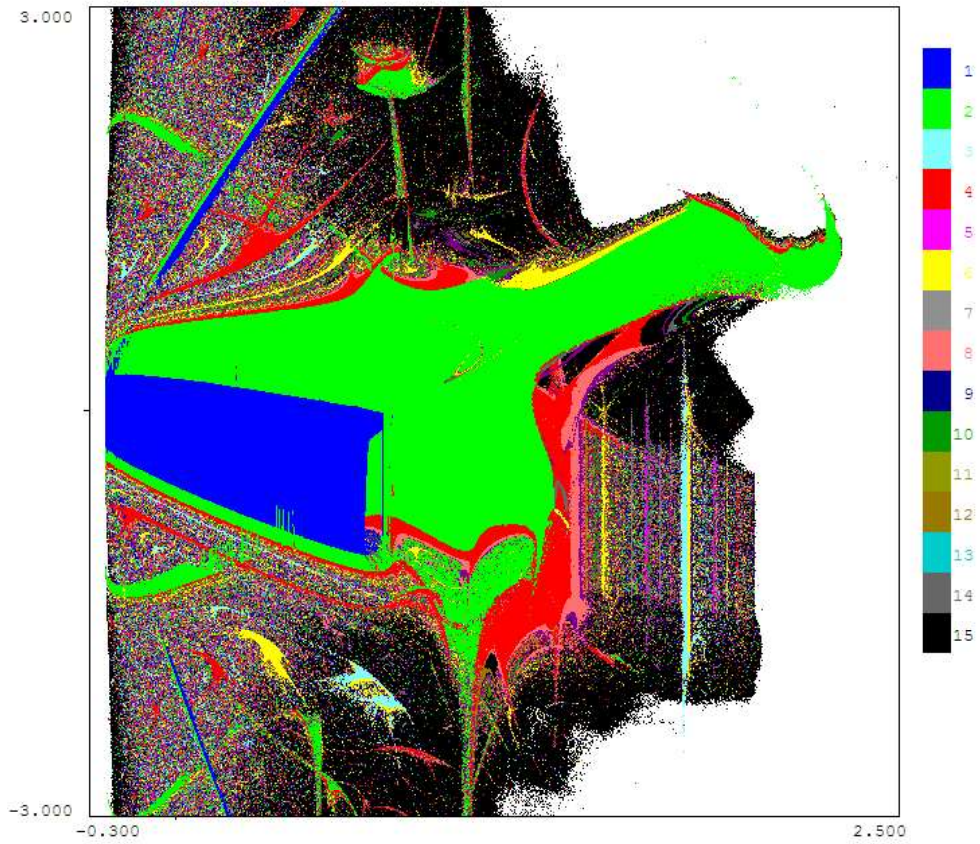


Figure 3.1 : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs du système (3.1) dans le plan paramétrique  $(a, b)$ .

### 3.4 Etude du plan de phases :

Nous étudions dans cette section le plan  $(x, y)$  de la récurrence  $T_1$ . Les lignes critiques qui délimitent les attracteurs chaotiques sont présentées. Enfin, nous étudions les bassins d'attraction dans le plan de phase et leur évolution.

### 3.4.1 Lignes critiques :

Soit la transformation ponctuelle (3.1), qui est non inversible,  $T_1$  différentiable dans  $IR^2$ , dans ce cas l'équation de la ligne critique  $LC_{-1}$  de  $T_1$  vérifie :  $|DT_1(x, y)| = 0$  où  $DT_1(x, y)$  est la matrice jacobienne de  $T_1$  donnée par :

$$DT_1(x, y) = \begin{bmatrix} -2ax - 2bx \cos 2\pi (y^2 - x^2) & 2by \cos 2\pi (y^2 - x^2) \\ 2bx \cos 2\pi (x^2 - y^2) & -2ay - 2by \cos 2\pi (x^2 - y^2) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

On obtient trois branches  $LC_{-1}^{(a)}$ ,  $LC_{-1}^{(b)}$  et  $LC_{-1}^{(c)}$  pour  $LC_{-1}$  ( voir figure 3.2) dont leurs équations sont données par :

$$\begin{cases} LC_{-1}^{(a)} : x = 0 \\ LC_{-1}^{(b)} : y = 0 \\ LC_{-1}^{(c)} : x^2 - y^2 = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(-\frac{a}{b}\right) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

L'image de rang  $k$  ( $k \geq 1$ ) de  $LC$ ,  $LC_k = T_1^k(LC)$  est appelée ligne critique de rang  $k$ , elle aussi est constitué par trois branches  $LC_k^{(a)}$ ,  $LC_k^{(b)}$  et  $LC_k^{(c)}$  où  $LC_k^{(a)} = T_1^k(LC^{(a)})$ ,  $LC_k^{(b)} = T_1^k(LC^{(b)})$  et  $LC_k^{(c)} = T_1^k(LC^{(c)})$ .

La figure 3.2 représente les lignes critiques  $LC_{-1}$ ,  $LC$  et  $LC_1$  qui délimitent un attracteur chaotique pour  $a = 1.2$  et  $b = 0.3$ .

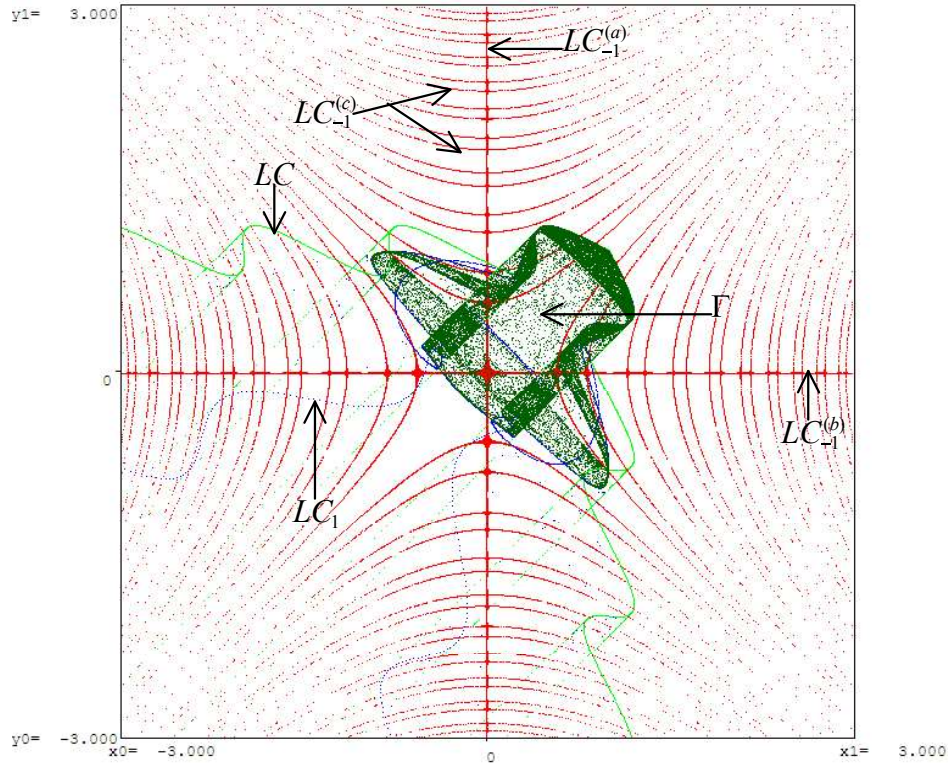


Figure 3.2 : Branches des lignes critiques  $LC_{-1}$ ,  $LC$  et  $LC_1$  et attracteur chaotique avec une dimension de Lyapounov égale à 2 pour  $a = 1.2$ ,  $b = 1.3$ .

### 3.4.2 Bassins d'attraction

*I*—Fixons  $b = 0.4000$  et faisons varier  $a$  :

1— Pour  $a = 1.1430$ , la figure 3.3.a représente les bassins d'attraction du cycle d'ordre deux  $(F'_1, F'_2)$  ( en bleu) et du cycle d'ordre quatre  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$  ( en blanc). Les deux cycles sont de type foyer attractive.

2— Pour  $a = 1.1600$ , la figure 3.3.b, représente les bassins d'attraction du cycle d'ordre deux  $(F'_1, F'_2)$  ( en bleu) et un cycle de courbes fermées d'ordre quatre  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$  ( en gri) qui est né de la déstabilisation du cycle d'ordre quatre via à une bifurcation de Hopf-Neimark.

3— Pour  $a = 1.2010$ , la figure 3.3.c, montre l'augmentation du volume des quatre

courbes fermées  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ .

4– Pour  $a = 1.2200$ , la figure 3.3.d, montre l'union de  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3, \Gamma_4$  qui donne un attracteur chaotique d'ordre deux  $(\delta_1, \delta_2)$  avec une dimension de Lyapounov égale à 2 où son bassin d'attraction est vert.

5– Pour  $a = 1.3300$ , la figure 3.3.e, montre l'augmentation du volume de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , et naissance d'un cycle de courbes fermées d'ordre deux  $(\Gamma'_1, \Gamma'_2)$  qui est né de la déstabilisation du cycle d'ordre deux via une bifurcation de Hopf-Neimark.

6– Pour  $a = 1.3800$ , la figure 3.3.f, montre l'évolution des deux courbes fermées  $\Gamma'_1, \Gamma'_2$  et de  $\delta_1, \delta_2$  qui entre en contact avec la frontière de  $D_1$  et  $D_2$ .

7– Pour  $a = 1.3920$ , la figure 3.3.g, montre la disparition de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  après la bifurcation de contact. Le bassin des deux courbes fermées  $(\Gamma'_1, \Gamma'_2)$  qui était non connexe avant la bifurcation est devenu connexe.

8– Pour  $a = 1.600$ , la figure 3.3.h, montre l'évolution de  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  qui donne un attracteur chaotique d'ordre deux  $(\delta'_1, \delta'_2)$  avec une dimension de Lyapounov égale à 1.08784.

9– Pour  $a = 1.6200$ , la figure 3.3.i, montre l'union de  $\delta'_1$  et  $\delta'_2$  qui donne un seul attracteur chaotique  $\delta'$ .

10– Pour  $a = 1.84096$ , la figure 3.3.j, montre l'augmentation du volume de l'attracteur chaotique  $\delta'$  qui entre en contact avec la frontière de son bassin d'attraction  $D$ .

11– Pour  $a = 1.84097$ , disparition de l'attracteur chaotique  $\delta'$  et du bassin d'attraction après la bifurcation de contact.

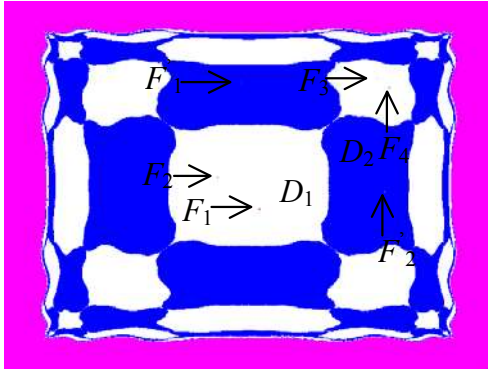


Figure 3.3.a :  $a = 1.143$ ,  $b = 0.4$

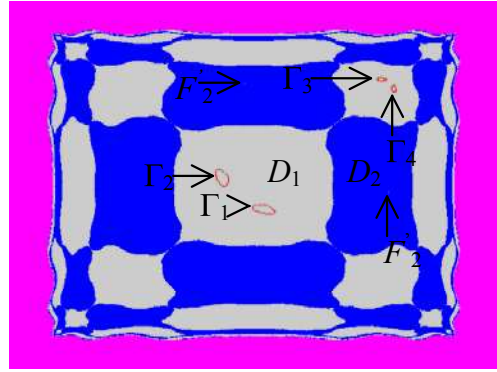


Figure 3.3.b :  $a = 1.16$ ,  $b = 0.4$

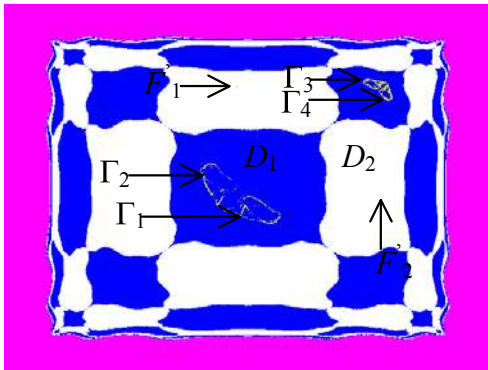


Figure 3.3.c :  $a = 1.201$ ,  $b = 0.4$

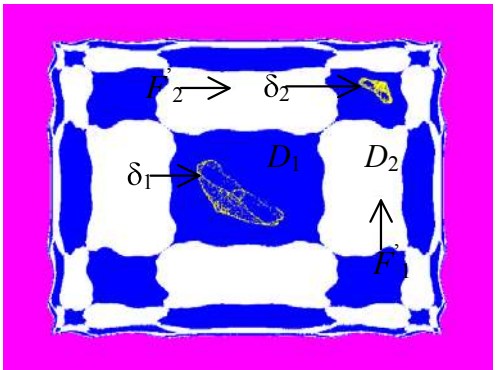


Figure 3.3.d :  $a = 1.22$ ,  $b = 0.4$

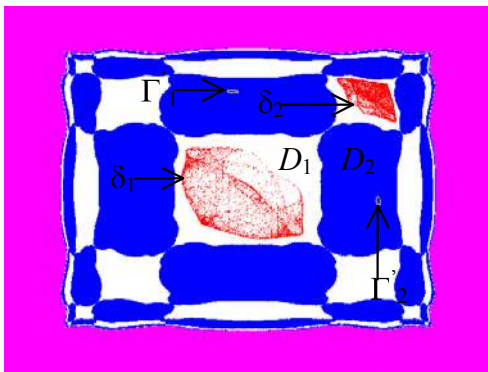


Figure 3.3.e :  $a = 1.33$ ,  $b = 0.4$

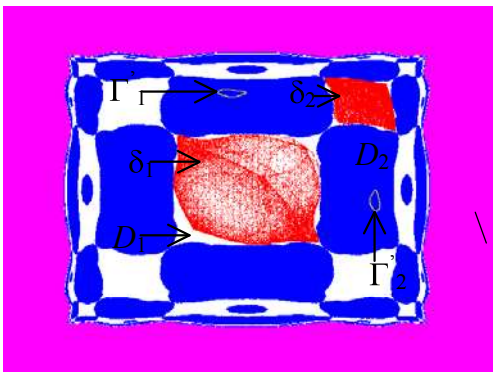


Figure 3.3.f :  $a = 1.38$ ,  $b = 0.4$

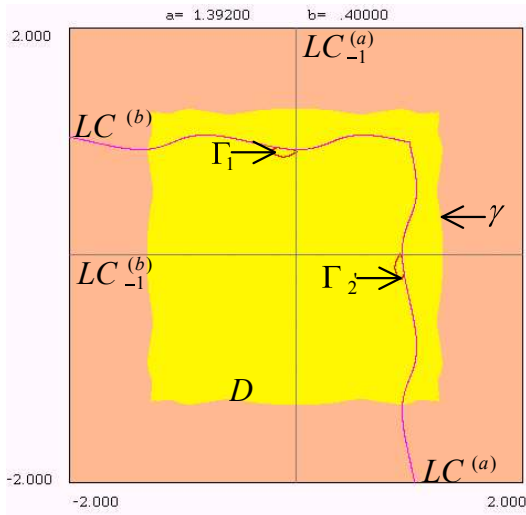


Figure 3.3.i

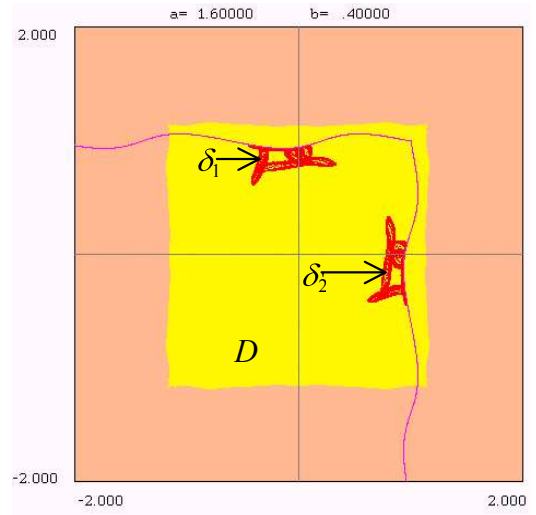


Figure 3.3.j

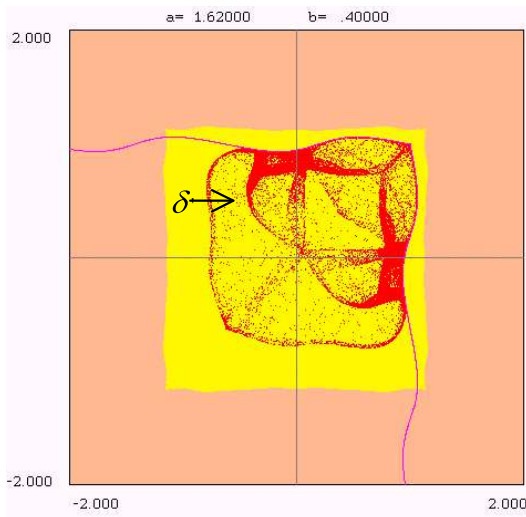


Figure 3.3.i

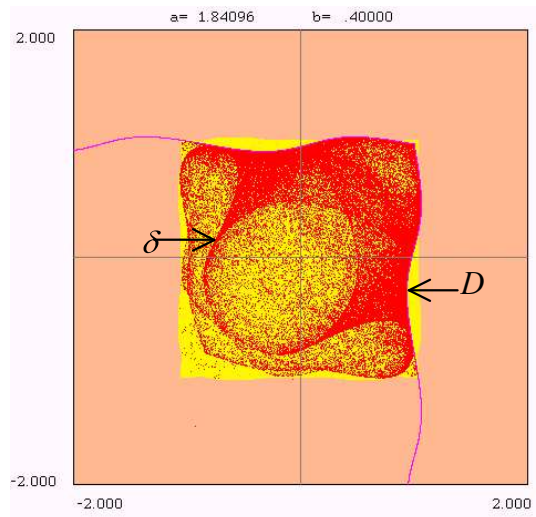


Figure 3.3.j

II—Fixons  $b = -2.0000$  et faisons varier  $a$  :

1— Pour  $a = 1.0500$ , la figure 3.4.a représente le bassin d'attraction du cycle d'ordre quatre  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$ . Le cycle est de type foyer attractive.

2— Pour  $a = 1.0600$ , la figure 3.4.b représente le bassin d'attraction du cycle courbes fermées d'ordre quatre  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$  qui est né de la déstabilisation du cycle d'ordre quatre via une bifurcation de Hopf-Neimark.

3— Pour  $a = 1.0800$ , la figure 3.4.c montre l'union de  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3, \Gamma_4$  qui donne un attracteurs chaotiques d'ordre deux  $(\delta_1, \delta_2)$  avec une dimension de Lyapounov égale à 1.09073.

4— Pour  $a = 1.1800$  figure 3.4.d,  $a = 1.2000$  figure 4.4.e et  $a = 1.2140$  figure 4.4.f, on a l'évolution du volume de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

5— Pour  $a = 1.22$ , la figure 3.4.g montre l'union des deux attracteurs chaotiques  $\delta_1$  et  $\delta_2$  qui donne un seul attracteur chaotique  $\delta$ .

6— Pour  $a = 1.30$ , la figure 3.4.h montre la naissance des lacs dans  $D$  qui est alors devenu, multiplement connexe (connexe avec des trous).

7— Pour  $a = 1.8400$ , la figure 3.3.i montre l'évolution de l'attracteur chaotique  $\delta$  qui est devenu un attracteur de Milnor avec une dimension de Lyapounov égale à 1.08837.

8— Pour  $a = 2.0000$ , la figure 3.3.j montre l'augmentation du volume de l'attracteur de Milnor  $\delta$  avec une dimension de Lyapounov égale à 1.08853 qui entre en contact avec la frontière de son bassin d'attraction  $D$ .

9— Pour  $a = 2.00001$ , disparution de l'attracteur de Milnor et du bassin d'attraction après la bifurcation de contact.

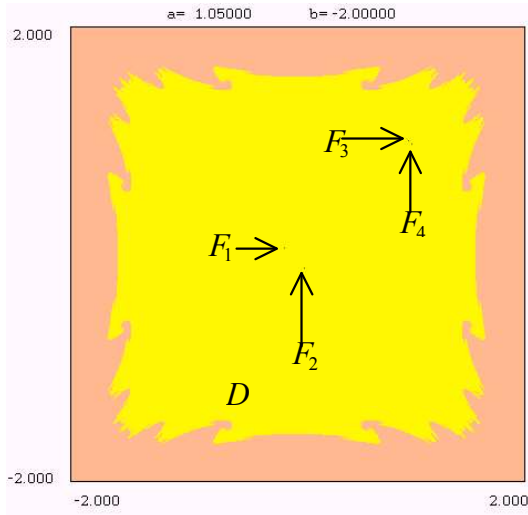


Figure 3.4.a

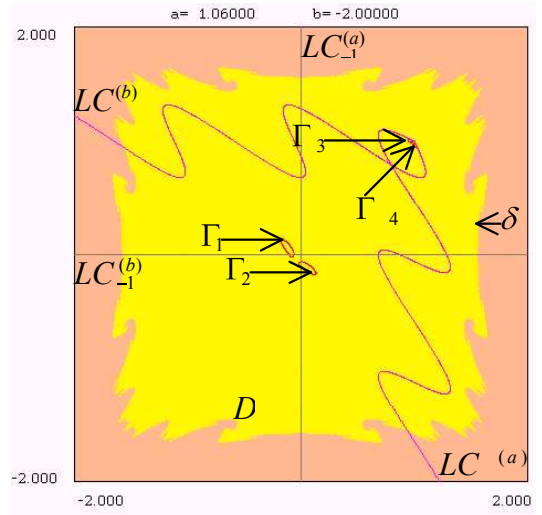


Figure 3.4.b

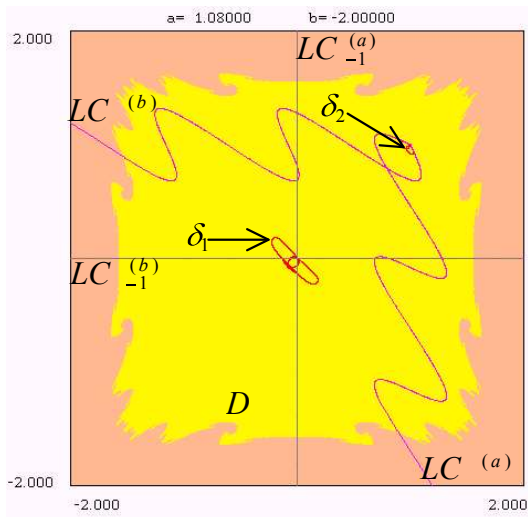


Figure 3.4.c

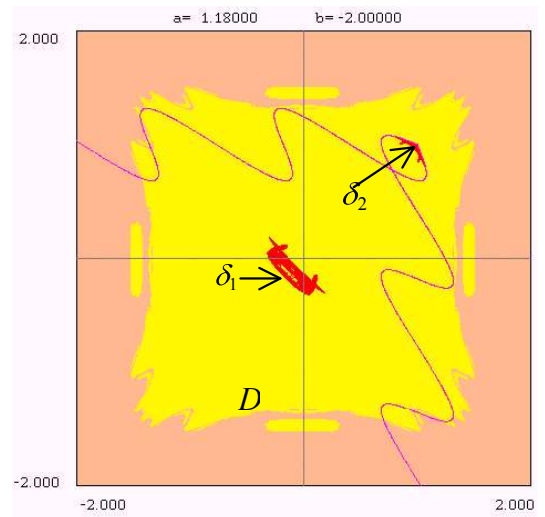


Figure 3.4.d

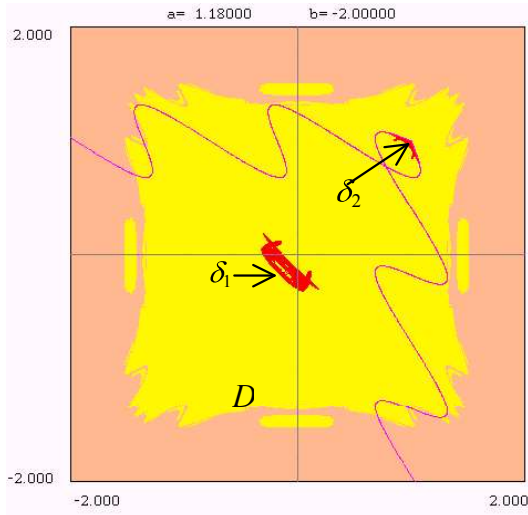


Figure 3.4.e

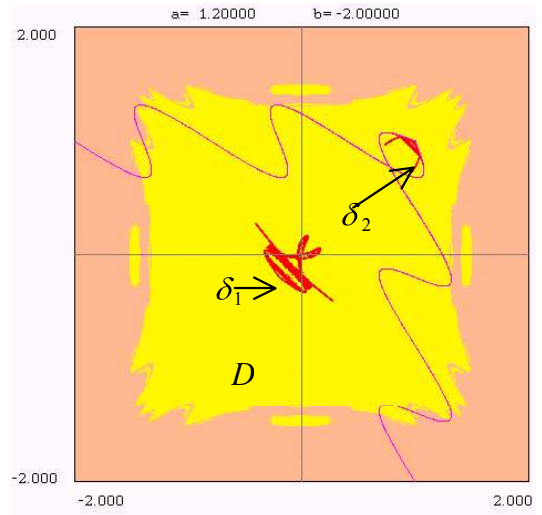


Figure 3.4.f

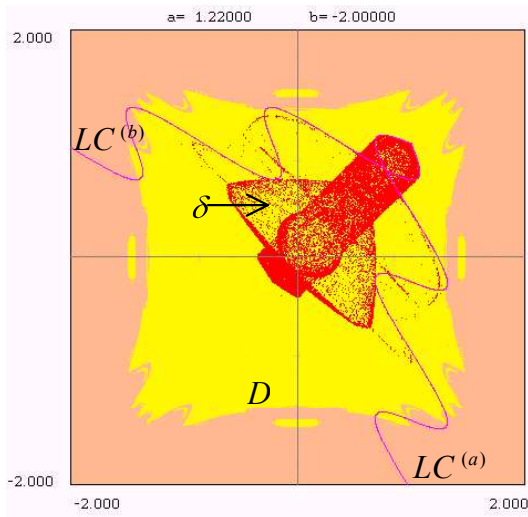


Figure 3.4.g

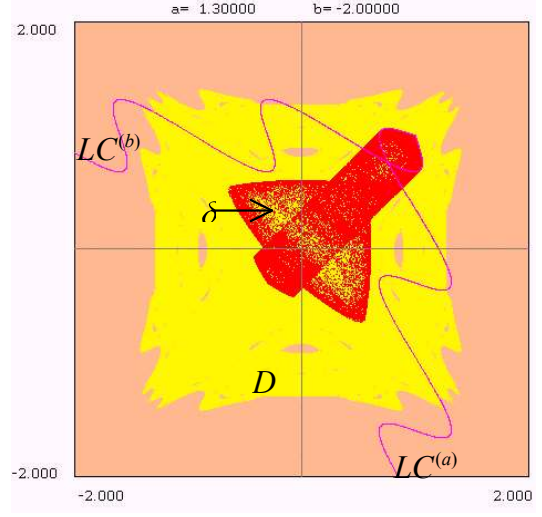


Figure 3.4.h

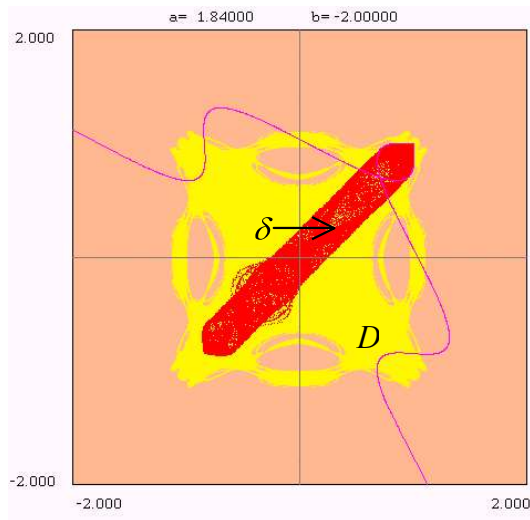


Figure 3.4.i

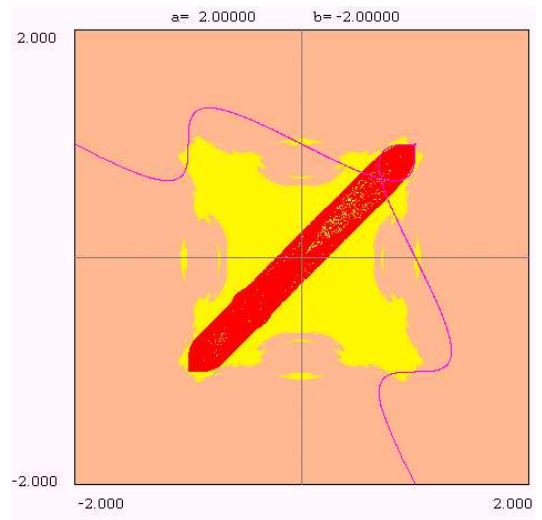


Figure 3.4.j

*III*—Fixons  $b = 2.0500$  et faisons varier  $a$  :

1— Pour  $a = 0.60308$ , la figure 3.5.a représente le bassin d'attraction du cycle d'ordre huit  $(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8)$ . Le cycle est de type noeud attractive.

2— Pour  $a = 0.60309$ , la figure 3.4.b montre la naissance d'un attracteur chaotique  $\delta$ .

3— Pour  $a = 1.0000$ , la figure 3.5.c montre l'évolution de l'attracteur chaotique  $\delta$ .

4— Pour  $a = 1.2870$ , la figure 3.5.d montre l'augmentation du volume de l'attracteur chaotique  $\delta$  qui entre en contact avec la frontière de son bassin d'attraction  $D$ .

5— Pour  $a = 1.2871$ , disparition de l'attracteur chaotique et du bassin d'attraction après la bifurcation de contact.

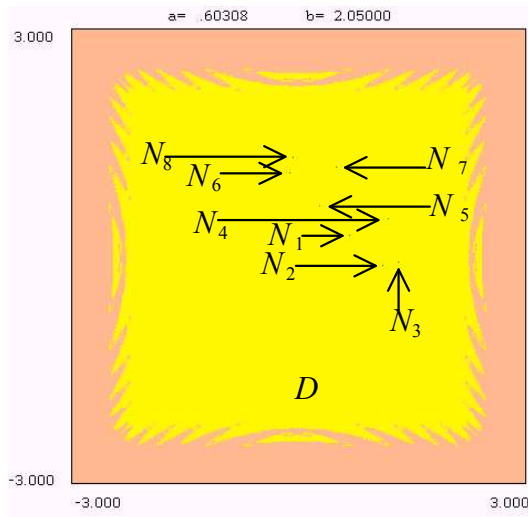


Figure 3.5.a

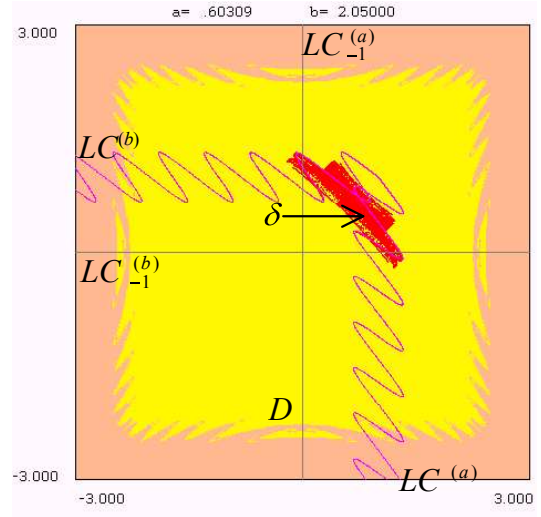


Figure 3.5.b

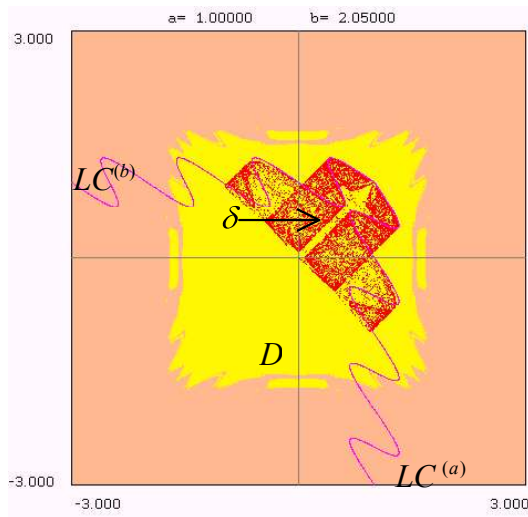


Figure 3.5.c

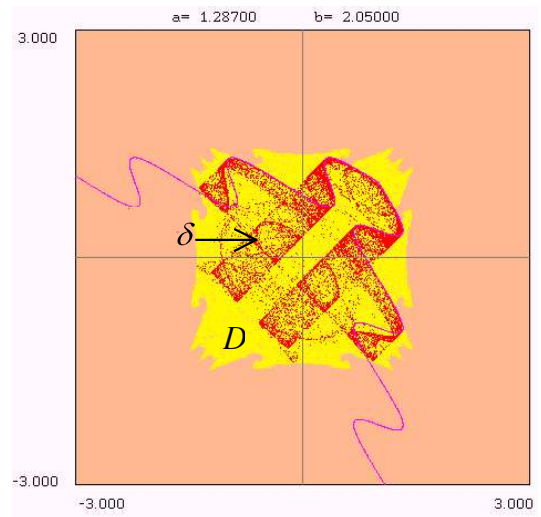


Figure 3.5.d

# Chapitre 4

## 4.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est l'étude de l'évolution d'un système dynamique défini par morceaux donné par :

$$T_2 \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = 1 - ay_n^2 + b|x_n - y_n| + c \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sont les variables,  $\Lambda = (a, b, c)$  un vecteur paramètre de  $\mathbb{R}^3$ .

La valeur absolue et la non linéarité de (4.1) rend difficile toute étude analytique dans tout l'espace de paramètres, en particulier, la détermination des courbes de bifurcations, donc seule une étude numérique sera réalisée ici.

Le premier objectif a été de chercher les points fixes et les cycles d'ordre  $k$  de (4.1), ainsi que les différentes bifurcations qui peuvent se produire en ces points (cycles). Notre seconde objectif a été de localiser les bassins d'attraction, des différents attracteurs existant pour des valeurs fixées des paramètres. La transformation (4.1) n'est pas inversible, ce qui nous amène à identifier les lignes critiques et les différentes bifurcations concernant le bassin d'attraction.

## 4.2 Singularités et stabilités :

La transformation (4.1) a quatre points fixes  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3)$  et  $P_4 = (x_4, y_4)$  où  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2a}A$ ,  $x_3 = x_4 = -\frac{1}{2a}B$ ,

$$y_1 = \frac{1}{2a} \left( -1 - b + \sqrt{(b+1)^2 + 4a(1+c) + 2bA} \right),$$

$$y_2 = \frac{1}{2a} \left( -1 - b - \sqrt{(b+1)^2 + 4a(1+c) + 2bA} \right),$$

$$y_3 = \frac{1}{2a} \left( -1 - b + \sqrt{(b+1)^2 + 4a(1+c) - 2bB} \right)$$

et  $y_4 = \frac{1}{2a} \left( -1 - b + \sqrt{(b+1)^2 + 4a(1+c) - 2bB} \right)$  si  $x \geq y$   
 et  $P'_1 = (x_1, y'_1)$ ,  $P'_2 = (x_2, y'_2)$ ,  $P'_3 = (x_3, y'_3)$  et  $P'_4 = (x_4, y'_4)$  si  $x \leq y$  où

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2a}A, \quad x_3 = x_4 = -\frac{1}{2a}B,$$

$$y'_1 = \frac{1}{2a} \left( -1 + b + \sqrt{(b-1)^2 + 4a(1+c) - 2bA} \right),$$

$$y'_2 = \frac{1}{2a} \left( -1 + b - \sqrt{(b-1)^2 + 4a(1+c) - 2bA} \right),$$

$$y'_3 = \frac{1}{2a} \left( -1 + b + \sqrt{(b-1)^2 + 4a(1+c) + 2bB} \right)$$

et  $y'_4 = \frac{1}{2a} \left( -1 + b - \sqrt{(b-1)^2 + 4a(1+c) + 2bB} \right)$  avec  $A = (-1 + \sqrt{1+4a})$  et  $B = (1 + \sqrt{1+4a})$ . La stabilité de ces points fixes est fixée par les valeurs obtenues en résolvant  $\det(DT_2(x, y) - SI) = 0$ , où  $I$  est la matrice unité et  $DT_2(x, y)$  la matrice jacobienne de cette transformation donné par :

$$DT_2(x, y) = \begin{bmatrix} -2ax & 0 \\ b & -2ay - b \end{bmatrix} \quad \text{si } x \geq y \quad (4.2)$$

$$DT_2(x, y) = \begin{bmatrix} -2ax & 0 \\ -b & -2ay + b \end{bmatrix} \quad \text{si } x \leq y \quad (4.3)$$

Les valeurs propres sont  $S_1 = -2ax$  et  $S_2 = -2ay - b$  si  $x \geq y$  et  $S'_1 = -2ax$  et  $S'_2 = -2ay + b$  si  $x \leq y$ .

## 4.3 Etude du plan des paramètres :

### 4.3.1 Balayage des plans paramétriques :

Le balayage des plans paramétriques  $(a, b, -5)$  (figure 4.1),  $(a, b, -1)$  (figure 4.2),  $(a, b, 1)$  (figure 4.3) et  $(a, b, 10)$  (figure 4.4), nous donne les zones d'existence et de stabilité, avec différentes couleurs, des cycles d'ordre un jusqu'à l'ordre quatorze. La frontière entre deux zones de couleurs différentes constituent les courbes de bifurcations (flip ou fold) des cycles ou des attracteurs chaotiques associés à cette zone. Les zones de couleur noire dans ces figures correspondent soit à des cycles stables d'ordre supérieur ou égal à quinze soit à des attracteurs chaotiques. Les zones de couleur blanche correspondent à la non existence d'attracteurs dans le plan de phase.

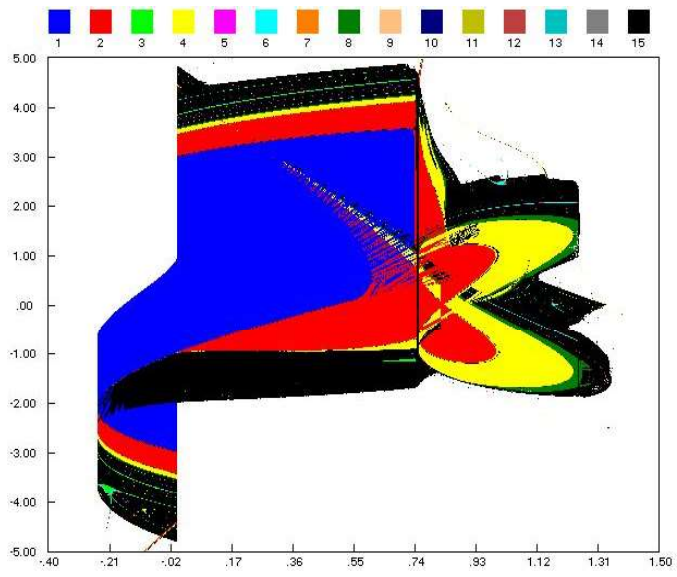


Figure 4.1

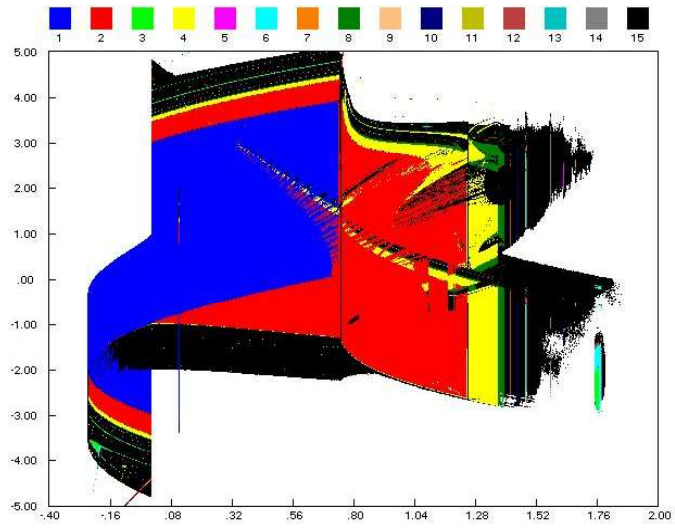


Figure 4.2

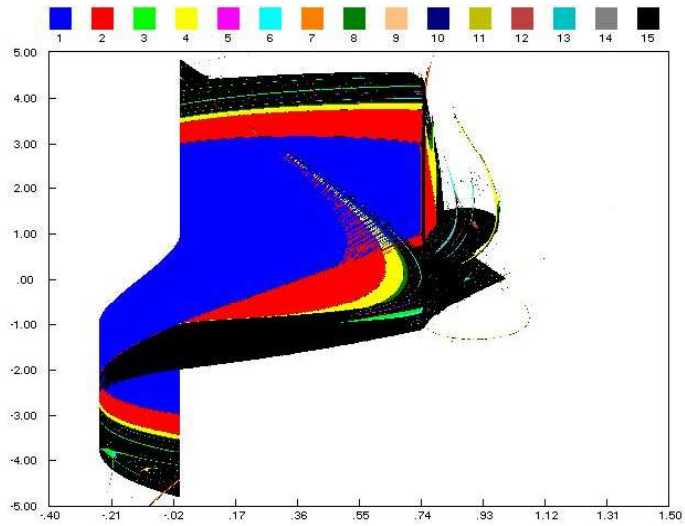


Figure 4.3

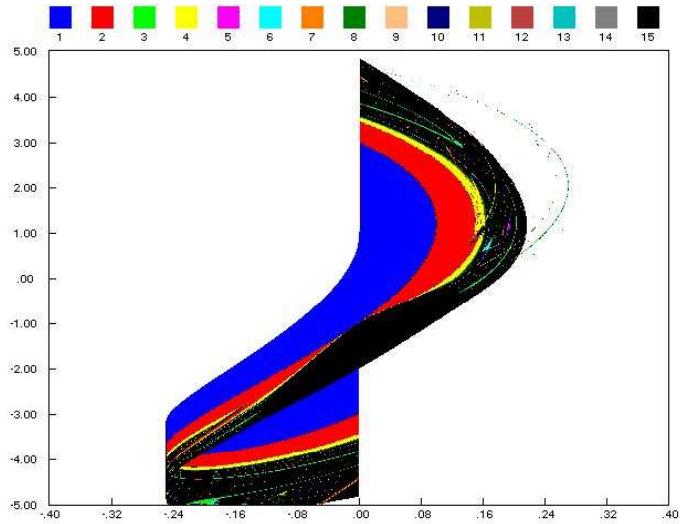


Figure 4.4

## 4.4 Etude du plan de phase :

Nous étudions dans cette section le plan  $(x, y)$  de la récurrence  $T_2$ . Les lignes critiques qui délimitent les attracteurs chaotiques sont présentées. Enfin, nous étudions les bassins d'attraction dans le plan de phase et leur évolution.

### 4.4.1 Lignes critiques :

Soit la transformation ponctuelle (4.1), qui est non inversible, dans ce cas l'équation de la ligne critique  $LC_{-1}$  de  $T_2$  vérifie :  $|DT_2(x, y)| = 0$  pour  $y \neq x$  car  $T_2$  est différentiable où  $DT_2(x, y)$  est la matrice jacobienne de  $T_2$ , et par  $y = x$  car  $T_2$  n'est pas différentiable.

On obtient quatre branches  $LC_{-1}^{(a)}, LC_{-1}^{(b)}, LC_{-1}^{(c)}$  et  $LC_{-1}^{(d)}$  pour  $LC_{-1}$  ( voir figure 4.4) qui sont des droites dont leurs équations sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} LC_{-1}^{(a)} : x = 0 \\ LC_{-1}^{(b)} : y = \frac{b}{2a} \\ LC_{-1}^{(c)} : y = -\frac{b}{2a} \\ LC_{-1}^{(d)} : y = x \end{array} \right. \quad (4.4)$$

avec  $a \neq 0$ .

La figure 4.4 représente les lignes critiques  $LC_{-1}$  et  $LC$ .

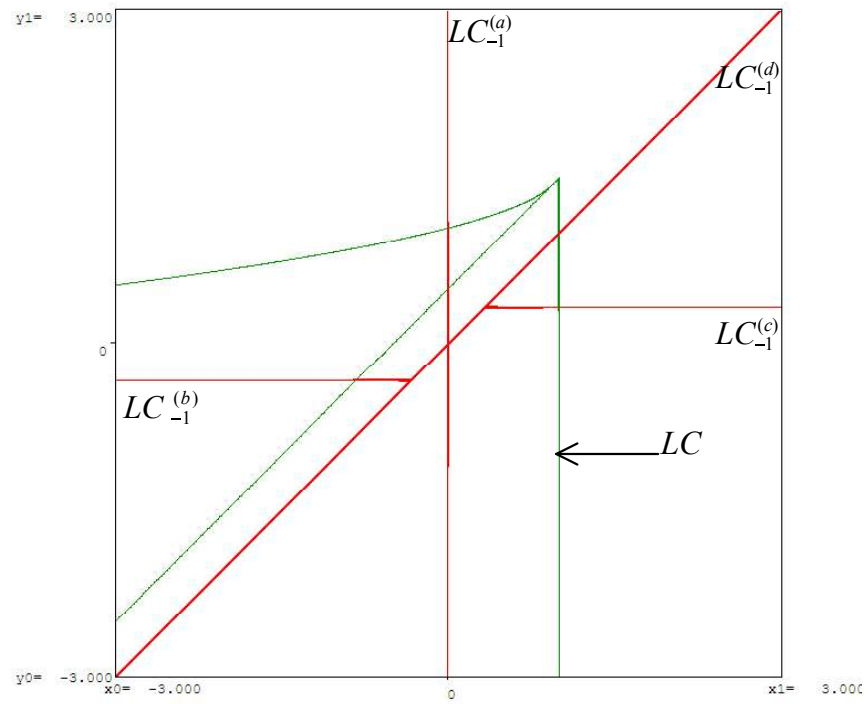


Figure 4.4 : Branches des lignes critiques  $LC_{-1}$  et  $LC$  pour  $a = 0.6$ ,  $b = -0.4$ ,  $c = 0.5$ .

La figure 4.6 représente les zones  $Z_i$ ,  $LC$  possède deux branches qui séparent le plan en trois régions  $Z_0$ ,  $Z_2$  et  $Z_4$  où il existe respectivement zéro antécédent, deux antécédents, quatre antécédents pour chaque point de la zone.

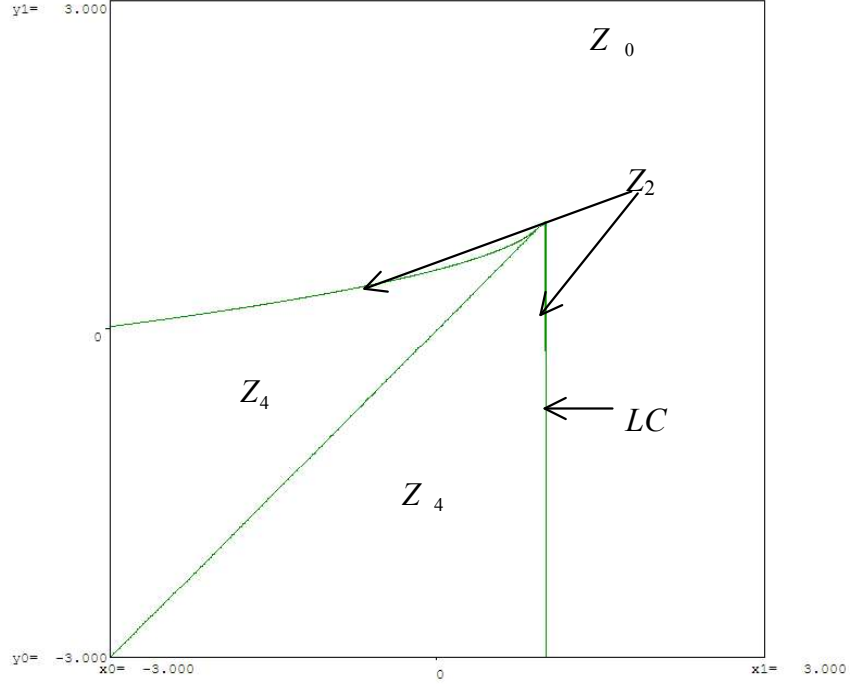


Figure 4.5 : Le plan de phase est de type  $(Z_0 - Z_2 - Z_4)$  pour  $a = 0.6$ ,  $b = -0.4$  et  $c = 0$ .

Lorsque les points ont quatre antécédents, ceux-ci sont donnés par les quatre déterminations de la transformation inverse,

si  $x \geq y$  :

$$T_1^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b - \sqrt{b^2 + 4a \left( b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

$$T_2^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b + \sqrt{b^2 + 4a \left( b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

$$T_3^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = -\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b - \sqrt{b^2 + 4a \left( -b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

$$T_4^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = -\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b + \sqrt{b^2 + 4a \left( -b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

et si  $x \leq y$  :

$$T_1^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b - \sqrt{b^2 + 4a \left( -b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

$$T_2^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b + \sqrt{b^2 + 4a \left( -b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

$$T_3^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = -\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b - \sqrt{b^2 + 4a \left( +b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

$$T_4^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = -\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2a} \left( -b + \sqrt{b^2 + 4a \left( +b\sqrt{\frac{1}{a}(1-x_n)} + c + 1 - y_n \right)} \right) \end{array} \right.$$

*I*—Fixons  $a = 0.7500$ ,  $c = 1.0000$  et faisons varier  $b$  :

1— Pour  $b = -0.5000$ , la figure 4.6.a représente le bassin d'attraction  $D$  qui est connexe d'un attracteur chaotique  $\delta$ .

2— Pour  $b = -0.7100$ , la figure 4.6.b montre l'évolution de la ligne critique  $LC$  qui don l'intersction avec  $D$  est connexe.

3— Pour  $b = -0.9000$ , la figure 4.6.c montre l'intersction de  $LC$  avec  $D$  devient non connexe. Il en découle la naissance des lacs ( trous) dans le bassin d'attraction, rendant ce dernier multiplement connexe (connexe avec des trous).

4— Pour  $b = -1.0100$ , la figure 4.6.d montre l'augmentation du volume de l'attracteur

chaotique  $\delta$  qui entre en contact avec la frontière de son bassin d'attraction  $D$ .

5- Pour  $b = -1.0101$  disparition de l'attracteur chaotique et son bassin d'attraction.

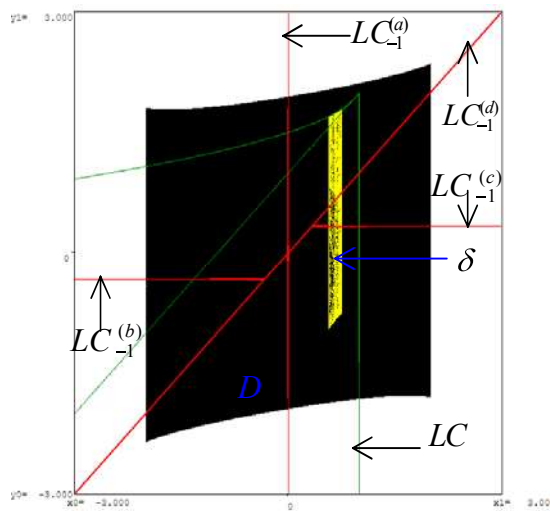


Figure 4.6.a :  $a = 0.75, b = -0.5, c = 1$

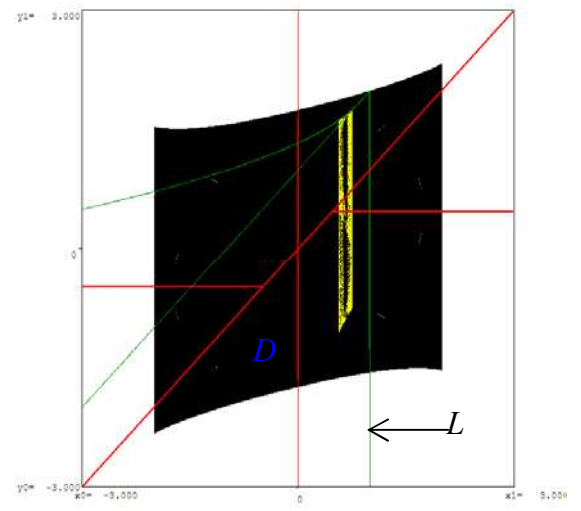


Figure 4.6.b :  $a = 0.75, b = -0.71, c = 1$

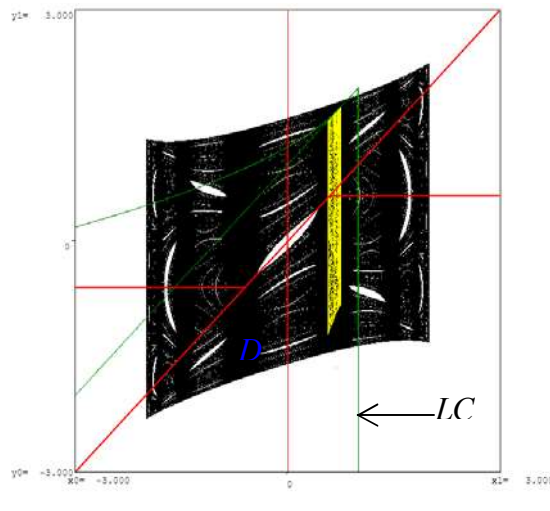


Figure 4.6.c :  $a = 0.75, b = -0.9, c = 1$

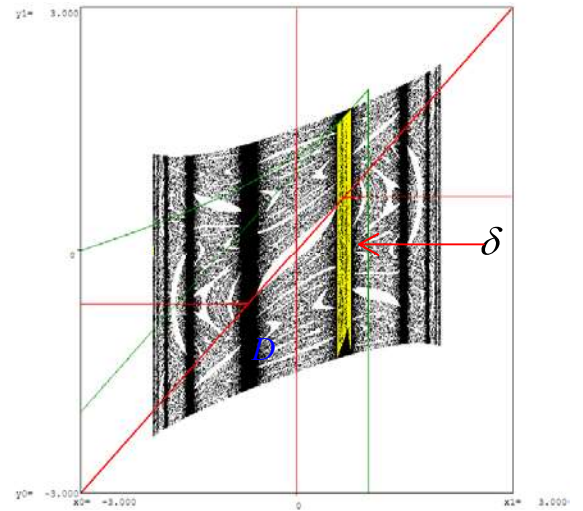


Figure 4.6.d :  $a = 0.75, b = -1.01, c = 1$

II—Fixons  $a = 1.8200$ , et  $c = 0$  et faisons varier  $b$  :

1— Pour  $b = -1.900$ , la figure 4.7.a représente le bassin d'attraction connexe  $D$  d'un attracteur chaotique  $\delta$  sur la diagonal qui est un attracteur de Milnor.

2— Pour  $b = -0.7000$ , la figure 4.7.b montre l'évolution de l'attracteur chaotique  $\delta$ .

3— Pour  $b = 0.1000$ , la figure 4.7.c montre l'augmentation du volume de l'attracteur chaotique  $\delta$ .

4— Pour  $b = 0.1500$ , la figure 4.7.d montre l'augmentation du volume de l'attracteur chaotique  $\delta$  qui entre en contact avec la frontière de son bassin d'attraction  $D$ .

5— Pour  $b = 0.1501$  disparition de l'attracteur chaotique et son bassin d'attraction.

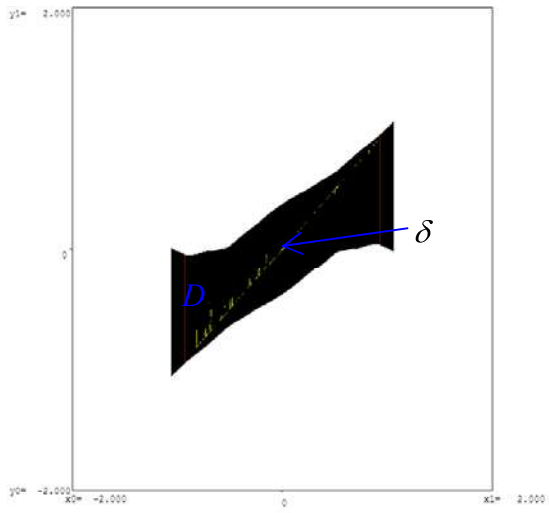


Figure 4.7.a :  $a = 1.82, b = -1.9, c = 0$

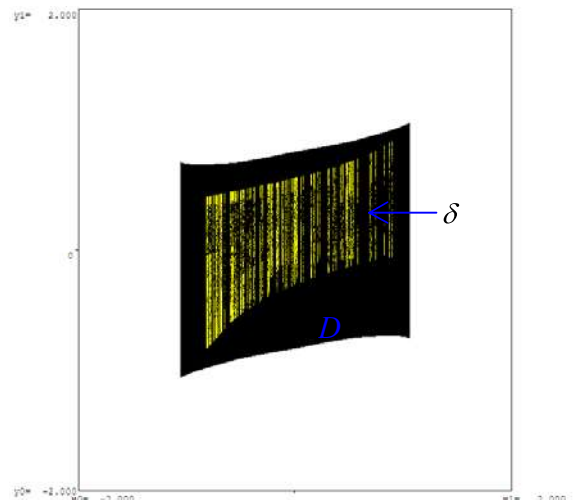


Figure 4.7.b :  $a = 1.82, b = -0.7, c = 0$

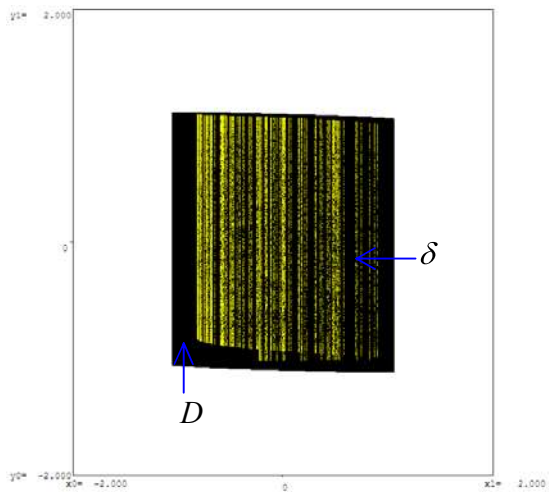


Figure 4.7.c :  $a = 1.82, b = 0.1, c = 0$

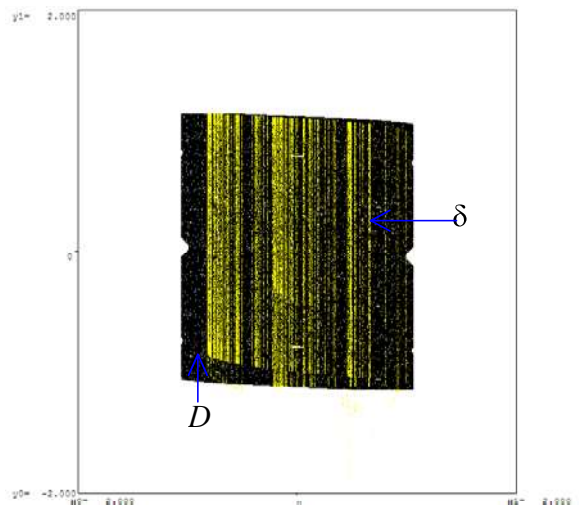


Figure 4.7.d :  $a = 1.82, b = 0.15, c = 0$

## Conclusion :

Le but de ce travail est d'étudier des systèmes dynamiques décrits par des transformations bidimensionnelles couplées symétriques, continues ou définies par morceaux ayant la particularité de présenter des oscillations complexes et même chaotiques. L'étude de ces transformations a nécessité des connaissances théoriques, qui ont fait l'objet du chapitre un. Le chapitre deux est consacré à l'étude de certaines propriétés des transformations ponctuelles non linéaires couplées à trois paramètres, deux études analytique et numérique ont été menées parallèlement pour déterminer les points fixes, les lignes critiques et enfin les attracteurs réguliers ou chaotiques. Au chapitre trois, nous avons étudié numériquement une transformation couplée basée sur fonction sinusoïdale. Dans le chapitre quatre, nous avons terminé par une transformation couplée asymétrique, définie par morceaux. Toutes ces transformations présentent des similarités dans le plan de phase.

## Bibliographie

[ALGM] Andronov A.A., Leontovitch E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. : "Etude qualitative des systèmes dynamiques d'ordre deux". (en Russe), Nauka, Moscou, 1966.

[AWK] Andronov A.A., Witt A.A., Khaikin S. : "Theory of oscillators". Pergamon Press, 1966.

[AK] Adomaitis R. A., Kevrekidis I.G. : "Noninvertibility and the structure of basins of attraction in a model adaptive control system", J. Non Linear Sci., 1991, vol. 1, p.95-105.

[AFK] Adomaitis R.A., Frouzakis C.E., Kevrekidis I.G. : "Global stability analysis of an adaptively-controlled mixing tank experiment", presented at the 1992 American Control Conference, Chicago.

[BCM] Barugola A., Cathala J.C., Mira : "Annular chaotic areas", Non Linear Analysis TM & A., 1986, 10 (11), p.1223-1236.

[BC] Barugola A., Cathala J.C. : "An extension of the notion of chaotic area in two-dimensional endomorphisms", ECIT (European conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept. 1992.

[BLM] Bernussou J., Liu Hsu, Mira C. : "Quelques exemples de solutions stochastiques bornées dans les récurrences autonomes du 2nd ordre", Proceeding of "Transformations Ponctuelles et Applications", Colloque CNRS, sept. 73, Toulouse, Ed. CNRS Paris 1976.

[C1] Cathala J.C. : "On some properties of absorptive areas in 2nd order endomorphisms.", ECIT Batschuns, sept. 1989, Proceedings, World Scientific.

[C2] Carcasses J.P. : "Sur quelques structures complexes de bifurcations de systèmes dynamiques". Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1990.

[C3] Cathala J.C. : "Multi connected chaotic areas in second order endomorphisms", Int. J. Systems Sci., 1990, vol. 21, n°5, p.863-887.

[DGG] Delli Gatti D., Gallegati M., Gardini L. : "Investment confidence, corporate debt and income fluctuations", Jour. of Economic Behaviour and Organisation 1993

[F1] Fournier-Prunaret D. : "Contribution à l'étude de la dynamique chaotique. Ana-

lyse de deux situations”. Thèse de Doctorat troisième cycle. 1981. Toulouse.

[F2] Fournier-Prunaret D. : “Structure de bifurcations d’un endomorphisme défini par un polynôme du troisième degré”. C.R.A.S, t 294, I, pp 445, 1982.

[F3] Fournier-Prunaret D. : Contribution à l’étude de structures de bifurcations rencontrées en dynamique chaotique. Thèse de Doctorat d’Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1987.

[F4] Fournier-Prunaret D. : ”Connectivity of Basins in an order 2 DPCM System Modelled by a Two-Dimensional Noninvertible Map. Proc. on IEEE CESA’S IMACS Conference.1996, Vol.2 pp. 637-641.

[FAKGY] Frouzakis C.E., Adomaitis R.A., Kevrekidis I.G., Golden M.P., Ydstie B.E. : ”The structure of basin boundaries in a simple adaptive control system”, Proc. NATO 1992 Advanced Summer Institute. T. Bountis ed.

[FUMD] D. Fournier Prunaret D., Uhl C., Machi O., Dinar S. : Chaotic bifurcations in the DPCM transmission system with order 2 predictor. Proceed. ECCTD 1993. Elsevier

[G1] Gardini L. : ”On the global bifurcation of two-dimensional endomorphisms by use of critical lines”, Non Linear Analysis T., M. & A., 18, 4,1991, p. 361-399.

[G2] Gardini L. : ”Global analysis and bifurcations in two-dimensional endomorphisms by use of critical lines”, Proceedings of ECIT (European conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept. 91, p. 112-125. World Scientific Ed., Singapore, 1992.

[G3] Gardini L. : ”Homoclinic orbits of saddles in two-dimensional endomorphisms”, Proceedings of ECIT (European conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept. 92.(to appear)

[G4] Gardini L ; 1993, ”On a model of financial crisis. Critical lines as new tools of global analysis”, Nonlinear Dynamics in Economics and Social Sciences, Gori & Geronazzo eds., Springer-Verlag, N-Y, 1993.

[GM1] Gumowski I., Mira C. : ”Sur un algorithme de détermination du domaine de stabilité d’un point double d’une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles”, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 1965, Série A, 260, 6524-6527.

- [GM2] Gumowski I., Mira C. : "Accumulations de bifurcations dans une récurrence". C.R.A.S, 281, 1975, p 45, série A.
- [GM3] Gumowski I., Mira C. : "Solutions chaotiques bornées d'une récurrence ou transformation ponctuelle du second ordre à inverse non unique", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 1977,Série A, 285, série A, p. 477-480.
- [GM3] Gumowski I., Mira C. : "Bifurcation déstabilisant une solution chaotique d'un endomorphisme du 2nd ordre", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 1978, Série A,. 286, série A, p. 427-431.
- [GM4] Gumowski I., Mira C. : "Dynamique chaotique". Cépadues Editions, Toulouse 1980.
- [GM5] Gumowski I., Mira C. : "Recurrences and discrete dynamic systems", Lecture notes in Mathematics, Springer 1980.
- [GMF] Gardini L., Mira C., Fournier-Prunaret D. : "Properties of invariant areas in two-dimensional endomorphisms". Communication présentée à ECIT 92, Batschuns, Autriche, Proceed. ECIT 92, pg 112-125, septembre1992.
- [H] Hayashi C.H. : "Non linear oscillation in physical systems". Mc Graw-Hill, New-York, 1964.
- [LK] Lee W., Kim S. Y. : "Destruction of chaotic attractors in coupled chaotic systems". Journal of the korean physical society, vol. 38, no. 5, may 2001, pp. 536-539.
- [LKK] Lee W. K., Kim Y., Kim S., Y. : "Loss of periodic synchronization in unidirectionally coupled non linear systems". Journal of the korean physical society, vol. 40, no. 5, may 2002, pp. 788-792.
- [KL] Kim S. Y., Lim W. : "Mechanism for the riddling transition in coupled chaotic systems". Physical review E, vol. 63, 026217, january 2001.
- [K K] Kawakami H. & Kobayashi K., 1979, "Computer experiments on chaotic solutions of  $x(t+2)-ax(t+1)-x^2(t)=b$ ", Bull. Fac. of Engin., Tokushima University, 16, p. 29-46.
- [M1] Myrberg P.J. : "Iteration der reellen polynome zweiten graden". Ann. Acad. Sci.

Fenn., Série A, 256, 1958, pp1-10; 268, 1959, pp 1-10; 336, 1963, pp 1-10.

[M2] Mira C. : “Détermination Pratique du Domaine de Stabilité d’un Point d’Equilibre d’une Récurrence non-Linéaire du Deuxième Ordre à Variables Réelles”, C. R. Acad. Sc. Paris, 1964t. 261, pp. 5314-5317, Groupe 2.

[M3] Mira C. : “Proceed of the VII th International Conference on Non Linear Oscillations”. (ICNO), 1975, Berlin

[M4] Mira C. “Sur la structure des bifurcations des difféomorphismes du cercle”. C.R.A.S. A, t 287, pp 883, 1978.

[M5] Mira C. :C.R. Sc. Paris, 295, série 1, 1982, pp 13-16.

[M6] Mira C. : “Chaotic Dynamics”. World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd. 1987.

[M7] Mira C. : ”Chaotic dynamics, from the one-dimensional endomorphism to the two-dimensional diffeomorphism”. World Scientific, Singapor, 1987.

[M8] Mira C. : ”La structure de bifurcations ”boîtes-emboîtées”, ses conséquences. Bull. Acad. Royale de Belgique, classe des sciences physiques, Math. app., 1988.

[M9] Mira C. : ”Systèmes asservis non linéaires”, Ed. Hermès, Paris 1990.

[M10] Mira C. : “Rotation sequences and bifurcations structure of one dimensional endomorphism”. International Symposium on Iteration theory and its functional equation. Vorarlberg (Austria).

[MMM] Maistrenko Y. L., Maistrenko V. L., Mosekilde E. : ”Chaotic synchronization and antisynchronization in coupled sine maps”. International journal of bifurcation and chaos, vol. 15, no. 7, 2007, 2161-2177.

[MMP] Maistrenko Y. L., Maistrenko V. L., Popovich A. :”Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps”. Physical review E, vol. 57, no. 3, march 1998.

[MN] Mira C., Narayaninsamy T. : ”On two behaviours of two-dimensional endomorphisms : role of the critical curves.”, Int. J. of Bif. and Chaos,vol. 3 1993,,(1), 187-194.

[MFGKC] Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L. Kawakami H., Cathala J.C. : Basin bifurcations of two-dimensional non invertible maps, fractalization of basins. In-

ternational Journal of bifurcation and chaos in Applied Sciences and Engineering, vol.4,  
no.2,1994, pages 343-381.