

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté des sciences de l'ingénieur Année : 2006

Département de Génie Civil

## THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT en Sciences en Génie Civil

# REPONSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES ENTERREES : APPLICATION AUX FONDATIONS ADJACENTES ENCASTREES

Option

Géotechnique

Par

**Badreddine SBARTAI**

DIRECTEURS DE THESE : Ahmed BOUMKIK Professeur

Université de Constantine

DEVANT LE JURY

PRESIDENT : B. Redjel  
EXAMINATEURS : F.Habita  
M.Hamami  
M.Mimoun  
K.Djehaba

Professeur  
Professeur  
Professeur  
Professeur  
M.C

Université de Annaba  
Université de Annaba  
Université de Skikda  
Université de Constantine  
Université de Annaba



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Professeur **Ahmed Boumekik** qui m'a permis d'entreprendre cette recherche et pour les conseils scientifiques qu'il m'a généralement prodigués ainsi que son soutien effectif qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ce travail et le profit que j'ai pu retirer de sa riche expérience dans la recherche. Qu'il trouve ici toute ma gratitude.

J'exprime ma vive reconnaissance à Monsieur le Professeur **Bachir Redjel**, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de thèse. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Je remercie également le Professeur **Faouzie Habita**, le Professeur **Mounir Hamami**, Professeur **Mustapha Mimoun** et le Maître de Conférence **Kamel Djeghaba** pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu manifester à l'égard de ce travail, en acceptant d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Je remercie aussi mes **parents**, mon frère et mes sœurs ainsi que ma belle-famille pour leurs encouragements et leur soutien moral pendant ces années.

Enfin, j'adresse ma profonde gratitude à ma **femme** pour avoir supporté au quotidien les contraintes professionnelles imposées par cette thèse; merci à toi pour tout ce que nous avons vécu ensemble.

# Abstract

This thesis studies the dynamic interaction between surface rigid square foundations in a homogeneous viscoelastic soil limited by a substratum. The vibrations come from a rigid foundations placed in soil layer and subjected to vertical harmonic loads. The required dynamic response of rigid surface foundations constitutes the solution of the waves equations obtained by taking into account the conditions of interaction. The solution is formulated in 3-D frequency domain Boundary Element Method in conjunction with the Kausel-Peek Green's function for a layered stratum and quadrilateral constant element to study the dynamic interaction between adjacent foundations. This approach allows the establishment of a mathematical model enabling us to determine the impedance or the compliance functions of adjacent foundations according to their different separations, depth of substratum, foundation mass, different embedded, dynamic parameters of the soil and the frequency of excitation.

---

**Keywords:** Dynamic foundation-soil-foundation interaction, homogeneous soil, boundary element method, Green's function.

# SOMMAIRE

<b>Remerciements</b>	i
<b>Abstract</b>	ii
<b>Listes des symboles</b>	iii
<b>Sommaire</b>	vi
<b>Chapitre 1 Introduction</b>	1
1.1 Généralités	1
1.2 Présentation du problème	2
1.3 But et originalités de la contribution	6
1.4 Plan de la thèse	7
<b>Chapitre 2 Interaction Sol-Structure et fondations vibrantes</b>	9
2.1 Introduction	9
2.2 Fondations vibrantes	11
2.2.1 Définition générale des fonctions impédances	11
2.2.1.1 Impédance d'un oscillateur simple avec masse	13
2.2.1.2 Impédance d'un oscillateur simple sans masse (modèle Voigt)	15
2.2.2 Définition générale des fonctions de déplacement (compliance)	16
2.2.3 Amortissement interne du sol	17
2.3 Formulation d'un problème d'Interaction Sol-Structure	19
2.3.1 Introduction	19
2.3.2 Méthodes de résolution d'un problème Sol-Structure	21
2.3.2.1 Méthodes globales	21
2.3.2.2 Méthodes de sous-structures	22
2.4 Etat de l'art	24
2.4.1 Modèles analytiques	24
2.4.2 Modèles numériques	26
1.2.2.1 Méthodes des Eléments Finis (FEM)	26
1.2.2.2 Méthodes des Eléments Frontières (BEM)	28
1.2.2.3 Couplage Eléments Finis-Eléments frontières (FEM/BEM)	31

<b>Chapitre 3 Propagation d'ondes dans un sol</b>	<b>32</b>
3.1 Introduction	33
3.2 Equations générales du mouvement	34
3.3 Différents type d'ondes	37
3.3.1 Ondes longitudinales et de cisaillements	37
3.3.2 Ondes de cisaillements polarisées	38
3.3.3 Propagation d'ondes planes	40
3.4 Relations de dispersions	41
3.4.1 Ondes dilatationnelles (ondes-P)	41
3.4.2 Ondes de cisaillements	43
3.5 Fonctions de Green	46
3.6 Le théorème dynamique de réciprocité	47
3.7 Equations Intégrales Frontières	49
3.8 La réciprocité des fonctions de Green	51
3.9 Application des Equations Intégrales pour un problème Sol-Structure	53
3.10 Equation Intégrale discrète	54
3.11 Détermination des fonctions de Green d'un sol multicouche	56
3.12 Conclusion	68
<b>Chapitre 4 Modèle de calcul de l'interaction 3-D de deux fondations adjacentes</b>	<b>69</b>
4.1 Introduction et aperçu sur l'état de l'art	69
4.2 Solution du problème	70
4.2.1 Matrice de flexibilité du sol	70
4.2.2 Modèle de calcul	76
4.2.3 Réponse du modèle	76
4.2.3.1 Conditions de rigidité et d'équilibre	77
4.2.3.2 Détermination des fonctions impédances (compliances)	80
<b>Chapitre 5 Résultats et discussions</b>	<b>83</b>
5.1 Présentation du programme	83
5.1.1 Partie existante du programme (FONDVIB)	83
5.1.2 Partie développée dans cette thèse (FONDVIB2)	84
5.2 Validation de la méthode	85
5.3 Analyse paramétriques	85
5.3.1 Cas d'une seule fondation chargée	86
A. Influence de la hauteur du sol	86
B. Influence de la distance entre les deux fondations	87
C. Influence de la masse des deux fondations	88
D. Influence de l'encastrement	89
E. Influence du coefficient de poisson	89
F. Influence du coefficient d'amortissement	90
5.3.2 Cas de deux fondations chargées	90
A. Influence de la hauteur du sol	90

B. Influence de la distance entre les deux fondations	91
C. Influence de la masse des deux fondations	92
D. Influence de l'encastrement	92
E. Influence du coefficient de poisson	92
F. Influence du coefficient d'amortissement	93
<b>Chapitre 6 Conclusions générales et perspectives</b>	<b>106</b>
6.1 Conclusion	106
6.2 Perspectives futurs	108
6.2.1 Généralisation de la présente étude	108
6.2.2 Etudes à développer	108
<b>Références</b>	<b>109</b>
<b>Annexes</b>	<b>118</b>

# Liste des symboles

$P(t)$  : Sollicitation harmonique

$R(t)$  : Réaction du sol

$Z(t)$  : Déplacement de la fondation

$K$  : Impédance

$m$  : Masse du SDOF

$C$  : Amortissement du SDOF

$\omega$  : Fréquence d'excitation

$\omega_n$  : Fréquence propre

$k_1$  : Partie réelle de l'impédance

$k_2$  : Partie imaginaire de l'impédance

$D$  : Facteur d'amortissement

$F(t)$  : Compliance

$f_1$  : Partie réelle de la compliance

$f_2$  : Partie imaginaire de la compliance

$a_0$  : Partie imaginaire de l'impédance

$\beta$  : Amortissement matériel

$G$  : Module de cisaillement réel

$G_S$  : Module de cisaillement sécant

$G^*$  : Module de cisaillement complexe

$\ddot{U}$  : Accélération

$\dot{u}$  : Vitesse

$\varepsilon_{ij}$  : Tenseur des déformations

$\sigma_{ij}$  : Tenseur des contraintes

$\rho$  : Masse volumique

$\lambda, \mu$  : coefficients de lamé

$\nu$  : Coefficient de poisson

$E$  : Module de Young

$C_s$  : Vitesse des ondes de cisaillement

$C_p$  : vitesse des ondes de compression

$t_s$  : Tractions

$\Phi^S$  : Fonction scalaire

$\Psi^s$  : Fonction vecteur

grad : gradient

div : divergent

rot : rotationnel

$\nabla^2$  : le laplacien

$k_x, k_y$  : nombre d'onde horizontal

$k_{zp}$  : nombre d'onde vertical (onde P)

$k_{zs}$  : nombre d'onde vertical (onde S)

$I_{sv}^s, R_{sv}^s$  : Potentiels de l'onde S incidente et réfléchie

$I_p^s, R_p^s$  : Potentiels de l'onde P incidente et réfléchie

$\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker

$u_{ij}^G(\xi, x, t)$  : Fonctions de Green (déplacement)

$t_{ij}^G(\xi, x, t)$  : Fonction de Green (contraintes)

$N(x)$  : Fonction d'interpolation

$u(\xi)$  : Déplacement nodale

$t(\xi)$  : Traction nodale

$N_t$  : Nombre total d'éléments

$N_f$  : Nombre d'éléments au niveau des fondations

$U_{ij}$  : fonctions de Green discret

$H_t$  : Hauteur du substratum

$h_j$  : Hauteur de chaque couche

$A_j, B_j, G_j, M_j$  : Matrices caractéristique de chaque couche

$K_j$  : Matrice élémentaire de chaque couche

$\Phi$  : vecteur des modes propres

$F_{ij}$  : Matrice de flexibilité du sol

$F_1$  : Matrice de flexibilité du sol ( au niveau de la 1<sup>ère</sup> fondation)

$F_2$  : Matrice de flexibilité du sol ( au niveau de la 2<sup>ème</sup> fondation)

$F_{12}, F_{21}$  : Matrice de flexibilité de couplage du sol

$d_1$  : Vecteur déplacement à l'interface sol-fondation (au niveau de la 1<sup>ère</sup> fondation)

$d_2$  : Vecteur déplacement à l'interface sol-fondation (au niveau de la 2<sup>ème</sup> fondation)

$t_1$  : Vecteur traction à l'interface sol-fondation (au niveau de la 1<sup>ère</sup> fondation)

$t_2$  : Vecteur traction à l'interface sol-fondation (au niveau de la 2<sup>ème</sup> fondation)

$R_1$  : Matrice de transformation de la 1<sup>ère</sup> fondation

$R_2$  : Matrice de transformation de la 2<sup>ème</sup> fondation

$D_1$ : Vecteur déplacement de la 1<sup>ère</sup> fondation

$D_2$ : Vecteur déplacement de la 2<sup>ème</sup> fondation

$P_{i1}$ : Vecteur des forces extérieures sur la 1<sup>ère</sup> fondation

$P_{i2}$ : Vecteur des forces extérieures sur la 2<sup>ème</sup> fondation

$M_{i1}$ : Vecteur des moments extérieurs sur la 1<sup>ère</sup> fondation

$M_{i2}$ : Vecteur des moments extérieurs sur la 2<sup>ème</sup> fondation

$C_{11}$ : Compliances de la 1<sup>ère</sup> fondation

$C_{12}$ : Compliance de couplage

$K_1$ : Impédance de la 1<sup>ère</sup> fondation

$K_2$ : Impédance de la 2<sup>ème</sup> fondation

$K_{12}, K_{21}$ : Impédance de couplage

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Généralités

Le phénomène de l'interaction dynamique fondation-sol-fondation a été longtemps reconnu comme un facteur important dans la réponse sismique et dynamique des structures étroitement espacées. Les machines vibrantes constituent une source de vibrations qui sont transmises au sol environnant. Selon l'énergie communiquée au milieu, cette perturbation peut affecter considérablement le sol ou les structures adjacentes. L'analyse raisonnable du phénomène exige de tenir compte de la nature dynamique de l'interaction entre le sol et la fondation. C'est essentiellement un problème de propagation d'ondes avec des conditions aux frontières mixtes (c.-à-d. déplacement rigide de corps sous les fondations et tractions nulles ailleurs). Ceci rend assez difficile la solution analytique du problème même pour des cas de géométrie simple. A cause de cette complexité, les méthodes analytiques simplifient beaucoup la géométrie du problème. En outre, il y a une absence apparente des modèles discrets simplifiés qui est due, peut-être, du manque général de résultats rigoureux qui seraient employés pour la vérification et le calibrage de tels modèles. Les géométries complexes, les types de chargements et la nature du sol, ont découragé en général le développement des solutions analytiques. Grâce aux performances grandissantes des ordinateurs, aux développements d'outils numériques tels que les méthodes des Eléments Finis et les Eléments Frontières et des conditions de sécurité très rigoureuses imposées à certains types de structures tels que les réacteurs des centrales nucléaires, les turbo-alternateurs des centrales électriques, ...etc, l'étude du phénomène d'interaction sol-fondation et fondation-sol-fondation a constitué un intérêt particulier pour de nombreux chercheurs.

L'analyse dynamique des fondations placées ou encastrées dans un sol semi-infini est le plus important problème d'interaction sol-structure ou structure-sol-structures. Les fondations rigides ou flexibles en surface ou encastrées, bidimensionnelles ou tridimensionnelles avec ou

sans superstructures, sujettes à des forces extérieures dynamiques ou à des ondes sismiques peuvent être analysés successivement par la méthode des Eléments Frontières dans le domaine fréquentiel ou temporel seule ou couplée avec la méthode des Eléments Finis. Quand l'étude est effectuée dans le domaine temporel, la réponse des fondations rigides sous sollicitations dynamiques ou sismiques est obtenue par la méthode d'intégration du temps pas-à-pas de l'équation intégrale discrète pour le sol. Si l'étude est dans le domaine fréquentiel, on détermine par la méthode des Eléments Frontières appliquée au sol la matrice impédance (ou rigidité dynamique)  $[K(\omega)]$  de chaque fondation rigide pour le cas de forces dynamiques et la matrice du mouvement (input motion matrix)  $[C(\omega)]$  pour le cas d'une sollicitations sismiques à partir de laquelle la réponse de la fondation  $\Delta$  est obtenue par la solution des équations suivantes :

$$\{P\} = [K(\omega)]\{D\} \tag{1.1}$$

$$\{D\} = [C(\omega)]\{u_f\}$$

où

$\{P\}$  et  $\{u_f\}$  sont les vecteurs des amplitudes des forces extérieures et le mouvement de la surface libre respectivement. Quand les fondations sont flexibles ou reliées à une superstructure, la méthode des Eléments Finis est souvent utilisée pour les fondations flexibles ou la superstructure par contre la méthode des Eléments Frontières est appliquée pour le sol.

## **1.2 Présentation du problème**

Dans cette présente étude, on se penchera sur l'étude de la réponse dynamique de deux ou plusieurs fondations rigides adjacentes placées ou encastrées dans un sol homogène ou hétérogène semi-infini ou limité par un substratum rigide. La méthode utilisée est la Méthode des Eléments Frontières (BEM) dans le domaine fréquentiel en utilisant le formalisme des fonctions de Green d'un sol multicouches limité par un substratum de Kausel et Peek avec des éléments frontières constant quadrilatère.

En effet, considérons deux fondations carrées rigides placées ou encastrées dans un sol multicouches viscoélastique et soumises à des charges dynamiques harmoniques suivant les trois directions.

Dans le milieu discrétisé fondation-sol-fondation, la relation liant les charges réparties sur les éléments frontières aux déplacements est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

où sous forme plus simple :

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = [F_t] \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

$\{t_1\}$  : représente les charges réparties sur les éléments frontières au niveau de la première fondation.

$\{t_2\}$  : représente les charges réparties sur les éléments frontières au niveau de la seconde fondation.

$\{d_1\}$  : représente le vecteur déplacement sur les éléments frontières au niveau de la première fondation.

$\{d_2\}$  : représente le vecteur déplacement sur les éléments frontières au niveau de la seconde fondation.

$[F_t]$  : La matrice déplacement totale du sol obtenue par application successive des charges unités réparties sur les éléments frontières constituant le massif du sol discrétisé. Cette matrice englobe les termes de flexibilités du sol qui sera occupé par la première fondation et celui de la seconde fondation et ceux des termes de couplages entre les deux fondations.

La présence des deux fondations impose aux éléments frontières des déplacements compatibles avec le mouvement du corps rigide. De là, on peut relier les déplacements des éléments à ceux de la fondation par la relation :

$$\{d\} = [R] \cdot \{D\} \tag{1.4}$$

A partir des considérations d'équilibre, les forces appliquées aux deux fondations peuvent être reliées aux charges réparties sur les éléments frontières par :

$$\{P\} = [R]^T \cdot \{t\} \tag{1.5}$$

En combinant les relations (1.3), (1.4) et (1.5), on obtient la relation liant le vecteur charge  $\{P\} = \{P_1, P_2\}^T$  directement appliqué au centre de gravité des deux fondations aux vecteurs déplacements  $\{D\} = \{D_1, D_2\}^T$  résultant :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

où

$[K_{11}]$  : représente la matrice de rigidité complexe de la première fondation chargée.

$[K_{22}]$ : représente la matrice de rigidité complexe de la deuxième fondation.

$[K_{12}]$  : représente la matrice de rigidité de couplage de la première fondation sur la seconde fondation.

$[K_{21}]$  : représente la matrice de rigidité de couplage de la seconde fondation sur la première fondation.

$\{D_1\}$  } : représente le vecteur déplacement de la première fondation pour les 06 degrés de liberté considérés .

$\{D_2\}$  : représente le vecteur déplacement de la seconde fondation pour les 06 degrés de liberté considérés.

$\{P_1\}$  : représente le vecteur charge appliqué au centre de gravité de la première fondation.

$\{P_2\}$  : représente le vecteur charge appliqué au centre de gravité de la seconde fondation.

Cette dernière expression peut s'écrire sous forme matricielle plus simple :

$$\{P\} = [K] \cdot \{D\} \quad (1.3)$$

La matrice  $[K]$  est une matrice complexe symétrique de (12x12) représentant la matrice impédance du système fondation-sol-fondation (les deux fondations ensemble).

L'inverse de la matrice impédance  $[K]^{-1}$  est aussi une matrice symétrique de (12x12) représentant la matrice compliance  $[C]$  du système fondation-sol-fondation. Elle est reliée aux vecteurs charges et déplacements par la relation suivante :

$$\{D\} = [C] \cdot \{P\} \quad (1.4)$$

Si la seconde fondation n'est pas chargée ( $P_2=0$ ), le système d'équations (1.2) devient :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

De cette dernière expression, on peut déterminer alors les vecteurs déplacements des deux fondations par les expressions suivantes :

$$\{D_1\} = [C_{11}] \{P\} \quad (1.6)$$

$$\{D_2\} = [C_{12}] \{P\}$$

avec

$$[C_{11}] = \left[ [K_1] - [K_{12}] [K_2]^{-1} \cdot [K_{21}] \right]^{-1}$$

$$[C_{12}] = -[K_2]^{-1} \cdot [K_{21}] [C_{11}]$$

où

$[C_{11}]$  : représente les déplacements (rotations) de la fondation chargée si  $P_1=1$ , en d'autres termes elle représente la matrice compliance de la fondation chargée.

$[C_{12}]$  : représente les déplacements (rotations) de la fondation non chargée due au chargement de la première fondation  $P_1=1$ , en d'autres termes elle représente la matrice compliance de couplage de la deuxième fondation.

### **1.3 But et originalité de la contribution**

Ce travail présente une méthode tridimensionnelle basée sur la méthode des Eléments de Frontière (BEM) dans le domaine fréquentielle. Seulement l'interface sol-fondation et une surface libre entre les fondations adjacentes sont discrétisées. Dans le milieu discrétisé, les fonctions de Green (déplacement de l'élément  $i$  dû à la force harmonique d'unité appliquée sur l'élément  $j$ ) sont calculées en utilisant une méthode basée sur la technique des couches minces (Thin Layers Method) développée par Waas [188] en premier lieu et généralisée ensuite par Kausel et Peeck [90]. En utilisant cette approche, on a pu établir un modèle mathématique nous permettant de déterminer les fonctions déplacements (compliances) des fondations adjacentes.

L'originalité du travail se résume comme suit :

- Une étude tridimensionnelle
- Les fonctions de Green se calculent analytiquement d'où l'exactitude des résultats
- Prise en compte de tous les modes de vibrations

- Prise en compte de l'hétérogénéité du sol
- Prise en compte de différentes géométries des fondations
- Prise en compte de l'effet de la profondeur du bedrock
- Diminution de la taille du problème (peu d'éléments)

#### **1.4 Plan de la thèse**

Cette thèse se divise en six grands chapitres dont une introduction. Le premier chapitre est consacré à une introduction générale qui se présente sous forme d'une étude bibliographique sur le but d'étudier le problème d'interaction sol-fondation d'une et le problème d'interaction fondation-sol-fondation d'une autre part. Dans cette même partie, il a été exposé les différentes méthodes analytiques et numériques pour résoudre ce type de problème en citant un grand nombre de travaux.

Dans le deuxième chapitre, l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu élastique est brièvement exposée. Le théorème de réciprocité dynamique a été utilisé pour dériver les équations intégrales de frontières et la réciprocité des fonctions de Green qui représentent la solution fondamentale du sol.

Le troisième chapitre présente une méthode de calcul des fonctions de Green pour un sol hétérogène à couche horizontale et limité par un substratum rigide. Le calcul de ces fonctions se base sur l'inversion spectrale de la matrice impédance du sol obtenue en utilisant la méthode des Eléments Frontières. Aussi, il a été présenté les outils mathématiques qui ont servi pour l'obtention de la matrice de flexibilité du massif discrétisé.

Le quatrième chapitre étudie l'interaction dynamique de deux fondations adjacentes encastrées dans un sol multicouches en présentant un modèle mathématique qui nous permet de calculer les fonctions impédances (compliances) des deux fondations en utilisant la méthode des Eléments Frontières.

Le cinquième chapitre est consacré aux différents résultats obtenus lors de l'analyse de la variation des impédances (compliances) des deux fondations en fonction d'un certain nombre de paramètres adimensionnelles.

Le sixième chapitre est consacré à présenter des conclusions et des recommandations de recherches futures.

## Chapitre 2

# Interaction Sol-Structure et Fondations Vibrantes

### 2.1 Introduction

On entend généralement par interaction Sol-Structure l'étude du comportement d'une structure soumise à une sollicitation sismique ou dynamique. Littéralement, l'interaction Sol-Structure traduit la modification du mouvement du sol (ou de la structure) lors d'un séisme ou d'une sollicitation dynamique du fait de la présence de l'autre composant (structure ou sol). Cette interaction est bien entendue plus ou moins importante suivant la nature du sol, les caractéristiques de l'ouvrage et son mode de fondation. La nécessité d'étudier la réponse sismique ou dynamique d'un ouvrage, en ne le considérant pas isolément mais comme partie intégrante d'un ensemble comprenant le sol et les structures avoisinantes, rend les analyses d'interaction Sol-Structure impérieuses pour une part grandissante d'ouvrages importants : centrales nucléaires, centrales électriques, réservoirs de gaz liquéfié (GNL) , barrages,...etc.

Pour résoudre un problème d'interaction Sol-Structure, plusieurs aspects nécessitent une étude approfondie à savoir : la définition de l'aléa sismique et du mouvement résultant, l'étude du comportement du sol sous chargement cyclique, l'évaluation de la réponse du sol en champ libre et celle des structures sous chargement dynamique.

L'abondance de la littérature concernant l'interaction Sol-Structure traduit à la fois la complexité du phénomène et l'intérêt qu'y ont porté nombre de chercheurs. Deux synthèses générales ont entrepris une classification des méthodes d'étude de l'interaction Sol-Structure Lysmer (1978) [112] et Idriss-Kennedy (1980) [77]. Ces publications mettent en évidence le fait que l'étude des phénomènes d'interaction est essentiellement limitée au cas des problèmes linéaires. L'approche de problèmes purement non linéaire reste l'exception.

Une analyse complète d'interaction Sol-Structure doit prendre en compte :

- La variation des caractéristiques du sol avec la profondeur
- Le comportement non linéaire du sol
- Le caractère tridimensionnel du problème
- Le schéma complexe de propagation des ondes qui engendrent le mouvement
- L'interaction avec les structures adjacentes.

En l'état actuel des connaissances, des simplifications doivent être effectuées pour permettre le traitement du problème ; elles concernent la schématisation du sol de fondation, la nature des ondes incidentes,...etc.

Avant d'examiner les différentes méthodes de prise en compte de l'interaction Sol-Structure, il est utile de mentionner que l'objectif essentiel consiste à évaluer les mouvements des fondations sous l'action d'un système de charges dynamiques externes et par conséquent anticiper les déplacements de la machines ou la structure à travers le calcul des fonctions impédances de la fondation en tenant compte des caractéristiques des fondations et des propriétés du sol.

La fin des années 60 et le début des années 70 voient les méthodes de résolution de l'interaction Sol-Structure se perfectionner du fait de l'essor des moyens de calcul. Quoiqu'il en soit, les résultats sont quasi-systématiquement présentés sous forme de deux termes fonctions de la fréquence. Le premier étant la partie réelle et le second la partie imaginaire de la raideur complexe. Ces fonctions sont connues sous le nom de fonctions impédances.

Cette méthode revient implicitement à remplacer l'ensemble fondation (sans masse)- sol par un ressort et un amortisseur dont les caractéristiques dépendent de la fréquence. Le système fondation (avec masse)- sol est donc remplacé, pour les applications, par un oscillateur simple équivalent. Ce sont ces fonctions d'impédance qui sont à étudier dans cette thèse mais pour le cas d'un problème d'interaction fondation-sol-fondation.

## **2.2 Fondations vibrantes**

Bien avant l'étude de la réponse d'ouvrages à sollicitations sismiques, les ingénieurs se sont intéressés aux vibrations des fondations engendrées par les machines qu'ils supportent. Tout naturellement, en abordant les phénomènes d'interaction Sol-Structure, seul l'aspect théorique de l'analyse de la réponse vibratoire sera abordé dans ce chapitre.

Dans toute cette étude, nous considérons que des fondations rigides sont soumis à des sollicitations (forces, moments, couple de torsion) harmoniques. La réponse aux efforts transitoires s'obtient tout naturellement par décomposition de la sollicitation en série de Fourier.

Concernant la loi de comportement du sol, nous ne nous référons qu'au seul modèle viscoélastique linéaire équivalent. En effet, s'agissant de vibrations de machines, leur bon fonctionnement nécessite une limitation de l'amplitude de leurs déplacements. Par voie de conséquence, les efforts transmis au sol de fondation sont faibles et celui-ci n'est pratiquement pas sollicité au-delà de son domaine d'élasticité. Le comportement du sol est défini par son module de cisaillement élastique  $G$  et son coefficient de poisson  $\nu$ .

Contrairement à l'étude de la réponse sismique d'un profil de sol, l'étude des vibrations de machines est un problème de source mathématiquement bien posé. Des solutions exactes peuvent être obtenues sans qu'aucune hypothèse concernant la nature des ondes émises ne soit nécessaire.

### **2.2.1 Définition générale des fonctions impédances**

Considérant une fondation de forme quelconque reposant à la surface d'un milieu semi-infini et soumise à une sollicitation harmonique  $P(t)$ , (voir fig.2.1). Outre la sollicitation appliquée, les forces s'exerçant sur la fondation sont les forces d'inertie et les forces de réactions du sol  $R(t)$ . Il en résulte, en régime stationnaire, un déplacement  $z(t)$  de la fondation.

Associant à la fondation réelle une fondation fictive de même caractéristiques géométriques mais de masse nulle. Soit  $Z(t)$  son déplacement lorsqu'elle est soumise à la force appliquée  $P(t)$ .

Par définition, on appelle impédance de la fondation le quotient de la force appliquée au déplacement de la fondation sans masse. Dans le cas générale, la sollicitation et la réponse ne sont pas en phase ; cette impédance est donc une expression complexe:

$$K = \frac{P(t)}{Z(t)} \tag{2.1}$$

Il est évident, les forces d'inertie de la fondation étant nulles, que l'impédance est égale au quotient de la réaction  $R(t)$  exercée par le sol sur la fondation au déplacement de celle-ci :

$$K = \frac{R(t)}{Z(t)} \tag{2.2}$$

Dans le cas d'une fondation partiellement enterrée, la réaction  $R(t)$  se compose des efforts développés sous la base de la fondation et des efforts développés le long des faces latérales en contact avec le sol.

A partir de l'équation (2.1) on peut définir une impédance de la fondation pour les modes de translation (horizontale ou verticale), de basculement et de torsion. Notons aussi que l'application d'une force horizontale donnant naissance à la fois à un déplacement horizontal et une rotation, il existe également une impédance couplée rotation-déplacement horizontal ; celle-ci se définit comme le rapport de la force (ou du moment) appliquée à la rotation (ou au déplacement horizontal).

On peut illustrer aisément cette définition à l'aide d'un oscillateur simple à un seul degré de liberté.

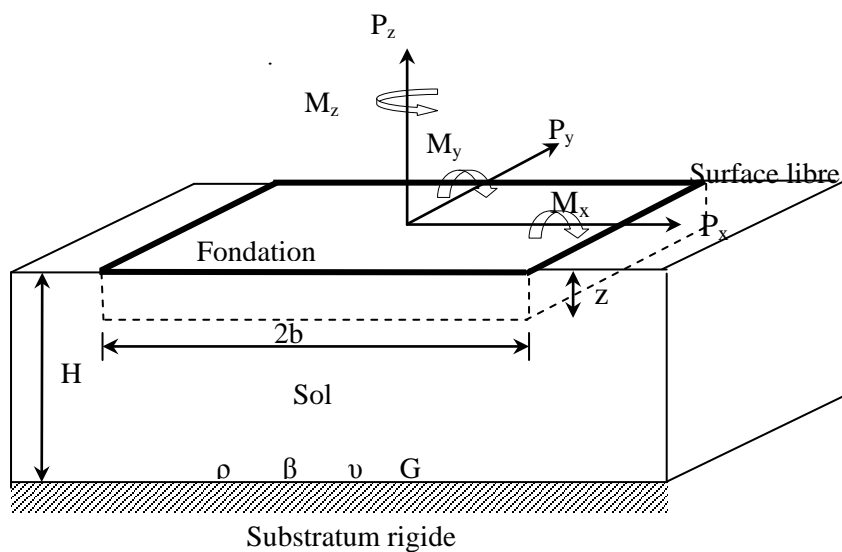


Figure 2.1 Réponse d'une fondation rigide

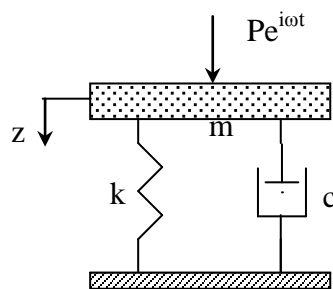
### 2.2.1.1 Impédance d'un oscillateur simple avec masse

La considération d'un oscillateur simple à un degré de liberté est utile pour la compréhension de la forme générale prise par les fonctions d'impédance. L'équation d'équilibre dynamique d'un tel oscillateur, de caractéristiques  $m$ ,  $c$ ,  $k$ , soumis à une sollicitation harmonique s'écrit :

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = Pe^{i\omega t} \quad (2.3)$$

La solution générale a pour expression :

$$z(t) = \frac{Pe^{i\omega t}}{(k - m\omega^2) + i\omega c} \quad (2.4)$$



**Figure 2.2** Oscillateur simple avec masse

En comparant l'équation (2.4) à l'équation (2.1), l'impédance dynamique s'écrit alors :

$$K = (k - m\omega^2) + i\omega c \quad (2.5)$$

Cette impédance, qui dépend de la fréquence, peut aussi être écrite sous une forme plus générale :

$$K(\omega) = k_1(\omega) + k_2(\omega) \quad (2.6)$$

On remarque que cette impédance se compose d'une partie réelle  $k_1(\omega)$  et d'une partie imaginaire  $k_2(\omega)$  dépendant toutes deux de la pulsation de la sollicitation.

En faisant apparaître des fonctions sans dimensions, l'expression (2.6) s'écrit :

$$K = k \left[ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] + i2D \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right] \quad (2.7)$$

avec

$\omega_n$  désigne la pulsation propre du système non amorti et  $D$  le facteur d'amortissement critique sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ D &= \frac{c}{2k/\omega_n} \end{aligned} \quad (2.8)$$

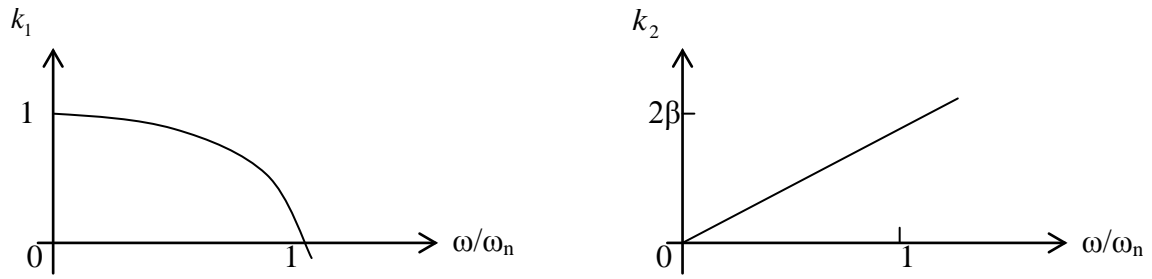
On notera que  $k$  est aussi la raideur statique de l'oscillateur. La relation (2.7) peut s'exprimer sous la forme du produit de la raideur statique  $k$  par un nombre complexe de la manière suivante :

$$K = k \left[ \bar{k}_1 + i\bar{k}_2 \right] \quad (2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \\ \bar{k}_2 &= 2D \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

On trouvera sur la figure 2.3 l'évolution des termes adimensionnels réel et imaginaire de l'impédance. On constate que ces termes sont des fonctions de la fréquence

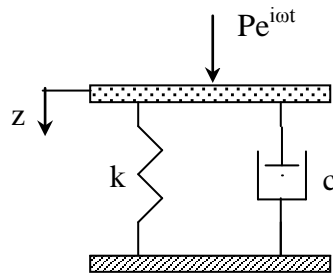


**Figure 2.3** Fonctions d'impédances d'un oscillateur simple avec masse

**2.2.1.2 Impédance d'un oscillateur simple sans masse (modèle Voigt)**

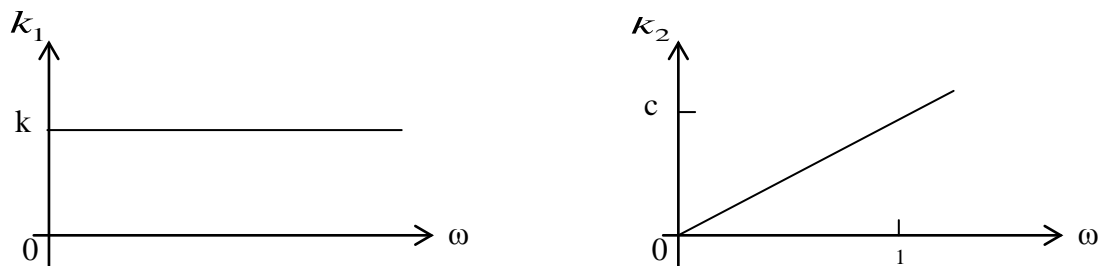
Dans le cas d'un oscillateur sans masse, les notions de fréquence de résonance et de facteur d'amortissement n'ont plus de sens. L'impédance se réduit alors à :

$$K = \frac{P(t)}{z(t)} = k + ic\omega \tag{2.11}$$



**Figure 2.4** Oscillateur simple sans masse

La figure 2.5 représente l'évolution des fonctions d'impédance de cet oscillateur particulier.



**Figure 2.5** Fonctions d'impédances d'un oscillateur simple sans masse

Dans les deux cas, la partie imaginaire de l'impédance est proportionnelle à la fréquence. En ce qui concerne la partie réelle, c'est l'effet d'inertie de la masse qui rend ce terme fonction de la fréquence.

### **2.2.2 Définition générale des fonctions de déplacement (souplesse, compliance)**

La fonction de déplacement est l'inverse de la fonction impédance, soit par définition :

$$F(t) = \frac{z(t)}{P(t)} \quad (2.12)$$

Pour un oscillateur avec masse, la souplesse s'écrit :

$$F = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \quad (2.13)$$

La souplesse est bien évidemment aussi une fonction de la fréquence. Comme cela a été fait précédemment pour l'impédance, on peut écrire la fonction de déplacement sous une forme plus générale :

$$F(\omega) = f_1(\omega) + if_2(\omega) \quad (2.14)$$

De plus, on peut montrer qu'il existe des relations liant les fonctions d'impédance  $k_1$  et  $k_2$  aux fonctions de déplacement  $f_1$  et  $f_2$  :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \\ f_2 &= \frac{-k_2}{k_1^2 + k_2^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pour la présentation des résultats donnant les variations des fonctions d'impédances avec la fréquence, il est utile d'introduire une fréquence adimensionnelle  $a_o$  définie par :

$$a_o = \frac{\omega b}{C_s} \quad (2.16)$$

Où  $b$  désigne une dimension caractéristique de la fondation (demi largeur pour une fondation carrée ou rectangulaire, rayon pour une fondation circulaire,...etc) et  $C_s$  une valeur caractéristique de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans le demi-espace. Par analogie avec l'équation (2.5), l'impédance peut alors s'écrire :

$$K = k[\bar{k}_1 + ia_o\bar{c}_1] \quad (2.17)$$

$\bar{k}_1$  et  $\bar{c}_1$  sont des paramètres adimensionnels variant avec la fréquence adimensionnelle  $a_o$ .

Lorsque le sol de fondation présente un amortissement matériel, l'impédance est souvent écrite de façon à isoler l'influence de cet amortissement sous la forme suivante :

$$K = k(k'_1 + ia_o c'_1)(1 + 2i\beta) \quad (2.18)$$

Cette formulation est intéressante pour un demi-espace homogène, ou pour un milieu dont les propriétés varient lentement avec la profondeur ; les valeurs de  $k'_1$  et  $c'_1$  sont alors pratiquement indépendantes de la valeur de  $\beta$ .

Il suffit de les calculer pour  $\beta=0$  (milieu élastique). Dans un demi-espace présentant au contraire des variations rapides ou discontinues de caractéristiques, les valeurs de  $k'_1$  et  $c'_1$  dépendent sensiblement de la valeur de  $\beta$  et la formulation de l'équation (2.18) perd de son intérêt.

### **2.2.3 Amortissement interne du sol**

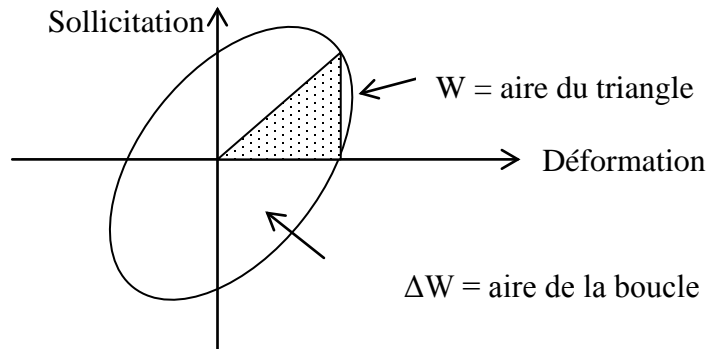
On peut éventuellement tenir compte d'un amortissement interne du sol. Celui-ci est caractérisé par le facteur d'amortissement  $D$  défini par analogie avec un oscillateur simple par :

$$\beta = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (2.20)$$

où

$\Delta W$  étant l'énergie dissipée par cycle, et  $W$  l'énergie élastique maximale emmagasinée au cours du même cycle (figure.2.6)

En générale, il s'agit d'une dissipation d'énergie de type hystérétique, indépendante de la fréquence.



**Figure 2.6** Boucle d'hystérésis

Le facteur d'amortissement de type visqueux, défini pour l'oscillateur simple, est donné par :

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} \frac{\omega_n}{\omega} \tag{2.21}$$

où

$\omega$  et  $\omega_n$  désignent respectivement la pulsation de l'excitation et la pulsation propre du système non amorti.

Il n'y a identité des expressions (2.20) et (2.21) que dans le cas où  $\omega = \omega_n$ . Contrairement à l'amortissement matériel, l'énergie dissipée par cycle par l'oscillateur simple dépend de la fréquence pour un amortissement visqueux. On ne peut donc pas simplement additionner les deux facteurs d'amortissement, l'un relatif aux termes d'amortissement  $C_j$  de type visqueux dus à une propagation des ondes jusqu'à l'infini, et l'autre relatif à l'amortissement interne du matériau sol.

L'amortissement matériel affectant à la fois le terme de raideur et le terme d'amortissement, il est communément admis d'écrire :

$$K = K_s (k + ia_a C) (1 + 2i\beta) \tag{2.22}$$

Pour un sol isotrope, cela revient à remplacer le module de cisaillement  $G$  admis d'écrire :

$$G^* = G(1 + 2i\beta) \tag{2.23}$$

Cette dernière expression représente la raideur complexe à résonance d'un oscillateur simple de raideur  $G$  et de pourcentage d'amortissement critique  $\beta$ . En choisissant pour module  $G$  du modèle linéaire équivalent le module sécant du matériau  $G_s$ , on obtient une forme possible de linéarisation du système. Cette linéarisation a été proposée par Rosenblueth et Herrera (1964) [152] et utilisée pour les sols par Schnabel et al (1972) [161].

En résumé, le comportement non linéaire du sol a été approché par un modèle viscoélastique linéaire équivalent. L'équivalence est fonction des caractéristiques du matériau mais également de la sollicitation. Dans le cas présent de cette thèse elle a été développée pour des sollicitations harmoniques. Ce type de modèle est employés de façon extensive dans la pratique courante car il fournit des valeurs (contraintes, accélérations, déplacements,...) qui se comparent favorablement à celles obtenues à l'aide de modèles plus sophistiqués tels que Martin (1975) [117], Pecker et al (1984) [133] ou à celles observées Valera et al (1977) [178]. Ce type de modèle a par ailleurs le mérite de la simplicité car il nécessite que la mesure de trois paramètres (un de plus que le modèle élastique) : module cisaillement  $G$ , module volumétrique  $K$  et un coefficient de perte  $\eta = 2\beta$ .

## **2.3 Formulation d'un problème d'Interaction Sol-Structure**

### **2.3.1 Introduction**

Actuellement, différentes procédures sont employées pour la détermination des impédances de fondation de forme quelconque soumises à une sollicitation harmonique (force ou moment). Une procédure donnée est plus ou moins bien adaptée à la solution d'un problème, et il n'existe pas de méthode universelle permettant de déterminer l'impédance d'une fondation, quels que soient la forme de cette dernière, son encastrement dans le sol, la stratigraphie du sol de fondation, la fréquence d'excitation,...etc. Il est donc important de connaître les limitations et avantages principaux de chacune d'entre elles pour choisir la mieux adaptée au problème posé. On peut distinguer :

- Les solutions obtenues à partir d'une formulation continue du problème conduisant à des solutions analytiques
- Les solutions obtenues à partir d'une formulation semi-analytiques.

- Les solutions obtenues à partir d'une formulation discrétisée du problème : méthode des Eléments Finis et la méthode des Eléments Frontières.

Les caractéristiques principales de ces diverses solutions sont examinées ci-après.

Dans cette partie, on va présenter les différentes méthodes utilisées dans la littérature qui ont permis à beaucoup de chercheurs à étudier le phénomène d'interaction dynamique Sol-Structure pour différents cas de problèmes.

**Les solutions analytiques** ne peuvent être obtenues qu'en simplifiant la condition de contact :

- Les contraintes de cisaillement sont supposées nulles à l'interface pour les mouvements de translation verticale ou de balancement autour d'un axe horizontal
- Les contraintes normales sont supposées nulles pour les mouvements de translation horizontale.

L'application de transformations intégrales (Fourier ou Hankel) conduit, pour chaque mode de vibration à un ensemble d'équations intégrales duales réductibles à une équation de Fredholm dont l'évaluation est obtenue numériquement.

**Les solutions semi-analytiques** sont obtenues par discrétisation de la surface de contact. Le déplacement résultant de l'application d'une sollicitation harmonique en un des points de la discrétisation est calculé en tous les autres points de la surface de contact. On obtient ainsi une matrice de coefficients d'influence dynamique ; la solution du problème est obtenue en imposant aux déplacements de tous les points de la surface de contact de se trouver dans un plan. Plusieurs techniques numériques sont possibles pour l'obtention de la matrice des coefficients d'influences (fonctions de Green) :

- Utilisation de la solution de Lamb
- Transformation de Fourier
- Méthode des équations intégrales

**Les solutions discrètes** sont généralement obtenues par la méthode des Eléments Finis. La principale difficulté pour la mise en œuvre de solutions numériques par Eléments Finis réside dans la simulation des conditions aux limites du modèle. Pour éviter les réflexions d'ondes

heurtant les bords du modèle, il est nécessaire d'adjoindre à ces limites des frontières simulant de façon exacte la présence, au-delà de la frontière, d'un milieu d'extension infinie.

L'existence de ce milieu permet la dissipation d'énergie vers l'infini. Des exemples de frontières seront présentés plus tard. Actuellement, des frontières n'ont été développées que pour les problèmes plans ou axisymétriques. Pour les problèmes 3-D, la seule alternative consiste à éloigner suffisamment les frontières du modèle pour permettre une dissipation d'énergie par amortissement matériel, ou à adjoindre aux limites des frontières visqueuses type Lysmer-Kuhlemeyer ne représentant le milieu infini que de façon approché. Cela se traduit par l'augmentation du nombre d'éléments finis et rend l'obtention de la solution très onéreuse.

Pour cette raison une autre méthode a été introduite pour résoudre le problème de frontières du modèle et de ce fait réduire la taille d'un problème 3-D. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode des Eléments Frontières. Cette méthode a l'avantage de prendre en compte l'amortissement par radiation (matériel) dans sa formulation qui représente la prise en compte de la frontière infini du sol. Cette méthode nécessite seulement la discrétisation de l'interface sol-fondation, et de ce fait elle réduit la taille du problème du fait qu'il y a une diminution du nombre d'éléments.

Si la fondation est reliée par une superstructure, la solution de ce type de problème nécessite le couplage de la méthode des Eléments finis et la méthode des Eléments frontières. Son point faible c'est qu'elle est applicable que dans des cas linéaire.

### **2.3.2 Méthodes de résolution d'un problème Sol-Structure**

Parmi les méthodes de résolution d'un problème Sol-Structure, on peut distinguer 03 : les méthodes globales, les méthodes de sous-structures et les méthodes hybrides. Chacune d'elles correspond à une schématisation du modèle Sol-Structure.

#### **2.3.2.1 Méthodes globales**

Les méthodes globales sont celles conduisant à une détermination simultanée du mouvement dans le sol et dans la structure. Le problème à résoudre est celui défini par l'équation du mouvement du système sol-fondation suivante :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q_f\} \quad (2.19)$$

où  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  représentent les matrices de masse, amortissement et raideur du système respectivement.

En théorie, les méthodes globales peuvent être étendues aux cas tridimensionnels et sont susceptibles d'appréhender les comportements non linéaires dus à la loi de comportement d'un des matériaux (sol le plus souvent) ou aux interfaces Sol-Structure (décollement ou glissement d'ouvrages sur leur fondation). En pratique, le coût de résolution de problèmes tridimensionnels est nettement prohibitif et on doit se restreindre aux problèmes bidimensionnels. Un des avantages des méthodes globales est leur capacité à prendre en compte les hétérogénéités résultant soit des variations de faciès, soit des variations des caractéristiques de sol provenant de non linéarités plus prononcées dans certaines zones (angle des radiers,...etc.). Par ailleurs, l'expérience montre qu'elles sont généralement mieux adaptées et plus faciles de mise en œuvre pour l'étude d'ouvrages enterrés.

### **2.3.2.2 Méthodes de sous-structures**

Cette catégorie de méthodes fait appel au principe de superposition. L'idée de base est d'analyser le problème d'interaction Sol-Structure en plusieurs étapes successives ; chacune de ces étapes est réputée plus facile à résoudre, du point de vue de la modélisation ou du traitement, que les méthodes globales. Les différentes méthodes de sous-structures se différencient par la décomposition en sous-modèles du modèle global. On distingue deux méthodes :

- Les méthodes de frontières
- Les méthodes de volume

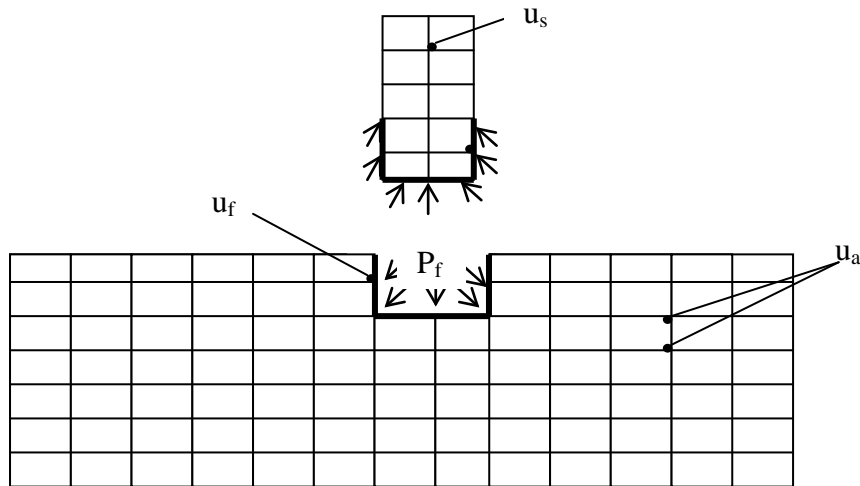
#### **Méthodes de frontières**

Le modèle global Sol-Structure est divisé en deux sous-modèles représentant la structure et le sol (voir figure 2.6) ; la compatibilité des efforts et déplacements est écrite le long de la frontière séparant les deux sous-structures. Pour ces méthodes, les solutions numériques sont obtenues par intégration dans le domaine des fréquences. L'amortissement matériel est alors incorporé au système en formant les matrices de raideur à partir des modules complexes.

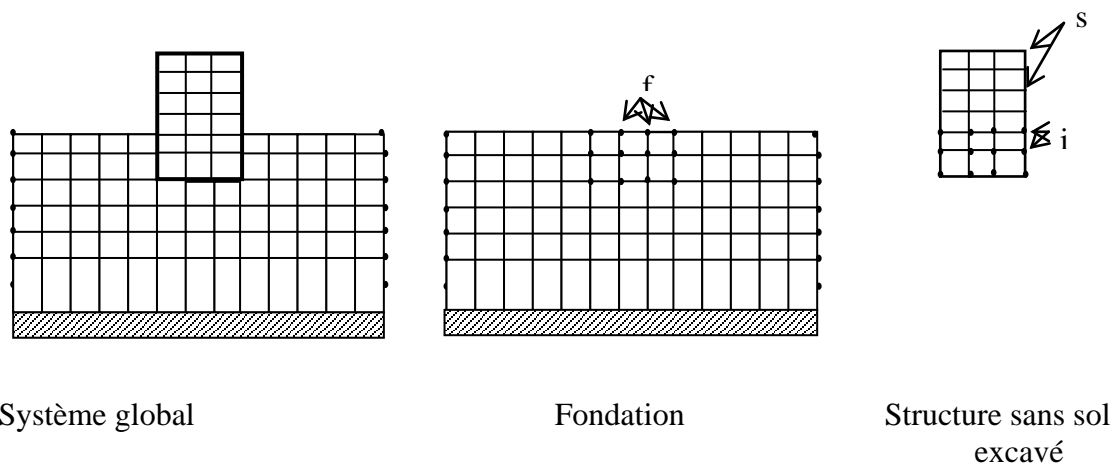
**Méthode de volume**

La méthode de volume permet d'éviter la résolution du problème de diffraction. L'interaction entre le sol et la structure est prise en compte, non seulement à l'interface Sol-Structure, mais à tous les nœuds de la structure sous la surface du sol Lysmer et al (1981) [114], comme cela apparaît par la division en sous structures définie sur la figure 2.7. Il est à noter que ces méthodes ne sont pratiquement utilisables que pour une intégration dans le domaine fréquentiel.

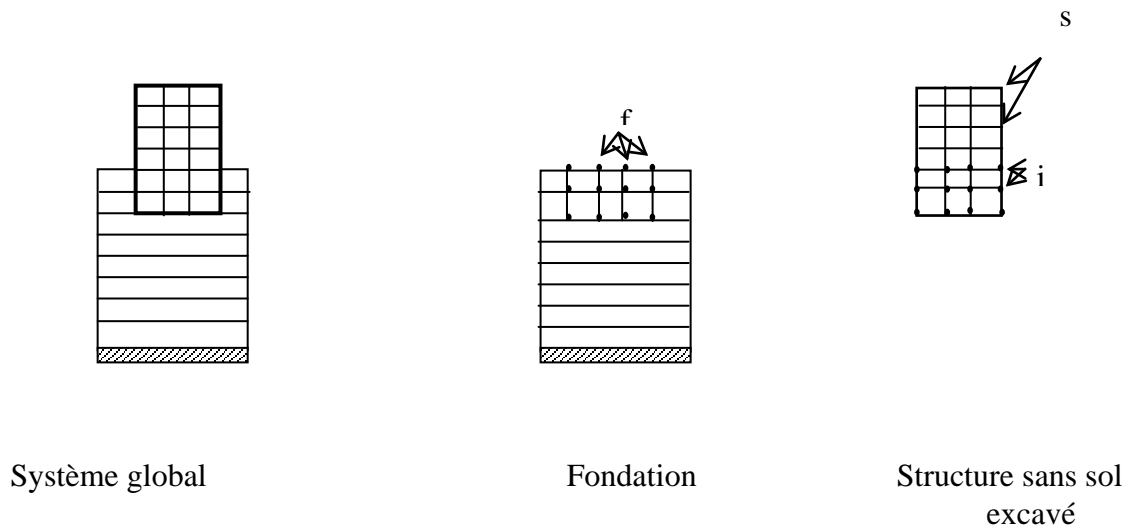
Dans notre travail, cette dernière méthode a été utilisée pour étudier la réponse dynamique de deux fondations carrées adjacentes placées ou encastrées dans un sol homogène limité par un substratum rigide.



**Figure 2.6** Méthode des sous-structures : méthode de frontière



**Figure 2.7** Méthode des sous-structures : méthode de volume avec la technique des Éléments Finis



**Figure 2.8** Méthode des sous-structures : méthode de volume avec technique des Couches minces (Thin layer technique)/Eléments Frontières

## 2.4 Etat de l'art

Dans cette section, on va présenter les différents travaux de recherches trouvés dans la littérature pour chaque type de models analytiques ou numériques.

### 2.4.1 Models analytiques

Ces solutions sont obtenues à partir des solutions analytiques des équations de l'élastodynamique dans chaque couche de sol. Suivant la façon dont est traité la condition aux limites de l'interface sol-fondation, on peut distinguer les solutions entièrement analytiques et les solutions semi-analytiques.

En (1904), Lamb [100] étudie les vibrations d'un massif élastique linéaire semi-infini dues à un chargement harmonique ponctuel. Il s'agit en fait de la généralisation du problème de Boussinesq en dynamique.

En (1936), Reissner [147] analyse la réponse à une excitation harmonique verticale d'un disque posé à la surface d'un massif homogène élastique semi-infini. Il a eu le mérite de mettre en évidence le premier un aspect qui nous semble à présent évident, à savoir l'existence d'une énergie dissipée par radiation. Les oscillations de la fondation donnent naissance à des ondes de volume et à des ondes de surface dont le contenu énergétique est non nul. Dans un milieu semi-infini, ces ondes se propagent indéfiniment, et ne restituent donc pas, sous une forme ou une autre, l'énergie qu'elles contiennent. Il y a donc dissipation

d'énergie, et tout se passe donc comme si le milieu présentait un amortissement, bien qu'il soit supposé élastique linéaire et non dissipatif.

De (1953) à (1956), Sung [165], Quilan [142], Arnold et al [15] et Bycroft [36] reprennent, précisent et généralisent les travaux de Reissner aux mouvements correspondant aux six degrés de liberté de la fondation.

L'hypothèse de répartition adoptée par ces auteurs a l'avantage de reproduire des déplacements compatibles avec le mouvement rigide de la fondation. Néanmoins, ces solutions restent assez approximatives, car en réalité la répartition des contraintes sous la fondation est fonction de la fréquence particulièrement dans les hautes fréquences.

Des méthodes plus exactes sont apparues vers la moitié des années 60. Ces méthodes analysent les vibrations du système sol-fondation comme un problème aux conditions frontières mixtes avec des déplacements compatibles avec le mouvement du corps rigide sous la fondation et des contraintes nulles sur la partie restante de la surface du sol. Ces méthodes supposent généralement une répartition libre des contraintes « Relaxed Boundary » dans le sens où pour des oscillations verticales ou de flexion, le contact est supposé lisse (contraintes de cisaillement nulles) et pour des oscillations horizontales, le contact est non pressurisant (contraintes normales nulles). Sous cette hypothèse, la réponse d'un disque circulaire a été étudiée par un certain nombre de chercheurs. Entre 1962 et 1967, alors que Awojobi et al [24], Eloduy et al [52], CollinS [47] et Robertson [149] ont étudié la réponse d'un disque pour des oscillations verticales, Gladwell [67] pour celles de torsions et Luco et Westman [110] pour des oscillations horizontale et de flexion, perfectionnent les méthodes précédentes, Hsieh [74] et surtout Lysmer [115] introduisent pour la première fois l'idée que le comportement du sol-fondation en translation verticale peut être représenté par un oscillateur simple de raideur et d'amortissement constants avec la fréquence. Cette approche simplifiée, souvent désignée par « analogie de lysmer », est étendue à l'ensemble des mouvements par Richart et Withman [148].

Concernant les fondations encastrees dans un sol semi-infini, la solution analytique du problème est assez complexe à cause des conditions aux frontières supplémentaires introduites par l'encastrement de la fondation. Des solutions assez approximatives ont été proposées par Novak et beredugo pour tous les modes de vibration [127][128][129][130].

Pour le cas de l'interaction de deux ou plusieurs fondations adjacentes très peu de travaux ont été publiés et cela à cause de la complexité du problème même pour le cas d'une seule

fondation, toutes fois nous pouvons citer le travail de Liou [103] en 1994 qui a étudié l'interaction 3-D dynamique de deux fondations circulaires placées à la surface d'un sol semi-infini élastique en utilisant une approche variationnelle.

### **2.4.2 Modèles numériques**

Les géométries complexes, les types de chargements et la nature du sol, ont découragé en général le développement des solutions analytiques. Mais, grâce aux performances grandissantes des ordinateurs, aux développements d'outils numériques tels que les méthodes des Eléments Finis et les Eléments Frontières et des conditions de sécurité très rigoureuses imposées à certains types de structures tels que les réacteurs des centrales nucléaires, les turbo-alternateurs des centrales électriques, ...etc, l'étude du phénomène d'interaction sol-fondation et fondation-sol-fondation a constitué un intérêt particulier pour de nombreux chercheurs.

#### **2.4.2.1 Méthode des Eléments Finis (FEM)**

La méthode des Eléments Finis (FEM) est une méthode de discrétisation destinée à chercher une solution approchée à un problème physique sous une forme variationnelle, c'est-à-dire à chercher une solution approchée du problème.

Elle consiste à décomposer le milieu en éléments finis limités par des frontières et à écrire la fonctionnelle globale comme une somme de fonctionnelles relatives à chaque élément.

Dans chaque élément les champs de déplacements inconnus sont représentés par une méthode de Ritz au moyen d'une base fonctionnelle propre à chaque élément et dont les fonctions de base sont appelées fonctions d'interpolation.

Les fonctions d'interpolations sont choisies en principe de façon à réaliser la continuité des champs inconnus à la traversée des frontières connues des éléments.

La frontière du domaine globale est approchée par la réunion des frontières élémentaires des éléments concernés. Donc la méthode se présente comme une méthode de Ritz par morceaux destinée à rendre algébrique le problème au moyen d'inconnues nodales.

Cette méthode est plus flexible que les méthodes analytiques du fait que la discrétisation du milieu continue permet de traiter des problèmes complexes (sol stratifié, fondations encastrées, fondations de formes quelconques).

Néanmoins pour des raisons d'économie, son utilisation dans le domaine des vibrations des fondations nécessite une adaptation qui consiste à représenter avec fiabilité la nature infinie du problème par un modèle discrétisé et imposer au modèle des conditions aux frontières pour éviter toute réflexion des ondes à ce niveau. L'utilisation de la notion de frontières a montré par la suite leurs limites seulement pour des problèmes à deux dimensions.

En ce qui concerne le type de frontières existantes, il y a lieu de citer les plus connues à savoir, les frontières absorbantes et les frontières transmettantes.

En utilisant la frontière absorbante Lysmer et Kuhmeyer [113] ont étudié les vibrations des fondations en surface ou partiellement encastrées dans un sol semi-infini par la méthode des (FEM). Mais cette frontière, qui est basée sur l'application aux frontières du modèle discrétisé des contraintes visqueuses normales et tangentielles de sorte que la plus grande partie de l'énergie transportée par les ondes P (ondes de compression) et les ondes S (ondes de cisaillement) puisse être totalement absorbée au niveau de la frontière du modèle discrétisé, s'est avérée par la suite inefficace dans le cas d'un sol stratifié semi-infini.

La raison étant que l'énergie transportée par les ondes S et P est difficile à quantifier et cela à cause des réflexions et des réfractions de ces ondes au niveau des strates. Cependant, pour que cette frontière soit efficace, elle devrait être placée à une certaine distance de la fondation.

En utilisant la frontière transmettante qui se base sur l'application aux frontières du modèle à discrétiser des forces qui assurent l'équilibre entre la partie du sol discrétisée et la partie non discrétisée avec l'hypothèse d'une propagation des ondes parallèles aux strates, Waas [188] a étudié par la (FEM) des vibrations verticales et de torsions pour une fondation en surface soit partiellement encastrée dans un sol multicouche limité par un substratum sous l'hypothèse des déformations planes.

Chiang-Liang [44] a utilisé cette frontière pour étudier les vibrations verticales, horizontales et de flexion d'une fondation rectangulaire infiniment longue.

Cette frontière s'est avérée assez efficace pour modéliser l'influence de la radiation des ondes, dans la partie non discrétisée, sur la réponse de la fondation. De plus, l'utilisation de cette conduit à des économies considérables par rapport à la frontière absorbante du fait qu'elle

peut être placée directement à côté de la fondation, cependant son utilisation s'est limité au cas de déformation bidimensionnelle.

Kausel [86] a généralisé cette frontière pour l'analyse tridimensionnelle des vibrations des fondations axisymétriques sous des sollicitations non axisymétriques. A cette fin, Kausel a utilisé une méthode pseudo-tridimensionnelle introduite par Wilson [194] dans le calcul par (FEM) des structures axisymétriques soumis à des charges non axisymétriques. Cette technique consiste à développer les charges non axisymétriques (les déplacements) en série de Fourier en fonction de la coordonnée angulaire  $\theta$ .

Cette méthode a l'avantage de préserver la nature tridimensionnelle du problème et de ramener en même temps l'étude du problème à deux dimensions, ce qui entraîne une économie importante en terme de stockage par rapport aux méthodes tridimensionnelles.

L'étude par (FEM) des vibrations des fondations en utilisant la frontière transmittante a pour avantage de prendre en considération de façon efficace l'influence de la partie du sol non discrétisé sur le modèle discrétisé. Son inconvénient limite l'utilisation de cette méthode à des cas de vibrations qui peuvent être ramenés à une analyse bidimensionnelle tel que le cas des fondations rectangulaires assez longues ou celui des fondations circulaires. Néanmoins, les fondations carrées peuvent être traitées comme des fondations circulaires en imposant une surface égale pour les deux fondations. Par contre, l'analyse tridimensionnelle des fondations rectangulaires ne s'adapte pas à cette méthode et nécessite l'utilisation de méthodes plus appropriées tels que la méthode des Eléments Frontières (BEM) et le couplage (FEM-BEM).

#### **2.4.2.2 Méthode des Eléments Frontières (BEM)**

Les limitations de la méthode des Eléments Finis citée précédemment ont poussé différents chercheurs à développer d'autres techniques de calcul numériques plus performantes. Une de ces méthodes est la méthode des Eléments Frontières.

Cette méthode, basée sur l'hypothèse d'un milieu élastique linéaire utilise le théorème de réciprocité de Betti, détermine les solutions fondamentales ou fonctions de Green des équations correspondantes puis formule l'équation intégrale laquelle relie les déplacements et les tractions le long de la frontière du domaine considéré. L'avantage de cette méthode c'est qu'elle prend en considération la condition de radiation à travers les fonctions de Green singulière Manolis et beskos [116].

Le sujet est très riche en publications établis par un grand nombre de chercheurs et cela vu son importance, tels que ceux de Dominguez et Abascal (1988) [50], Karabalis et Mohammadi (1988) [78], Tosaka et Ohmi (1992)[172] et Antes et Spyrakos (1987) [12]. On peut aussi rajouter les deux livres de Wolf (1985) [197] qui traitent un grand nombre de problèmes d'interaction dynamique sol-structure en utilisant la méthode des Eléments Frontières dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel.

Concernant l'étude dynamique des fondations, on peut grouper les différents travaux dans sept catégories :

i)- Fondations 2-D rigides en surface ou encastées par la (BEM) dans le domaine fréquentiel : Dans ce cas, Antes et Spyrakos (1987) [12], Ahmad (1988) [3], Mesquita et Romanini (1992) [118] ont étudié les fondations en surface et Dominguez et Abascal (1988) [50], Ahmad et Bharadwaj (1991)[5], Bharadwaj et Ahmad (1992) [31], Mesquita Neto et al (1995)[119] ont étudié les fondations encastées en utilisant la (BEM) directe. Wolf et Darbe (1984) [195], Apsel et Luco(1987) [14], Luco et Wong (1987) [109], Rajapakse et Shah (1988) [145], Wang et Rajapakse (1991)[192] et De Barros et Luco (1995) [49] ont analysé les fondations encastées en utilisant la (BEM) indirecte.

ii)- Fondations 3-D rigides en surface ou encastées par la (BEM) dans le domaine fréquentiel : Dans ce cas, Van Laethem et al (1984) [182], Luco et Mita (1987) [111], Alarcon et al (1989)[8], Yu et al (1992) [198], Savidis et al (1991) [154], Savidis et Vrettos (1995) [153], Auersch (1995) [22] ont étudié des fondations en surface et Boumekik et al (1986) [32], Ahmad et al (1988) [2], Bu (1996) [34], Bu et Davies (1996) [35] ont étudié des fondations en surface et encastées en utilisant la (BEM) direct. L'étude des fondations encastées avec la (BEM) directe et indirect a été établi par Gazetas et al (1987a,b) [61],[62], Ahmad et Gazetas (1992a, b) [6], [7], Mita et Luco (1987, 1989) [122], [123], Takahashi et al (1992) [166], Emperador et Dominguez (1989) [53], Kurimoto et al (1992) [99], Betti et Abdel-Ghaffar (1994) [30], Suarez et Sanchez-Sesma (1995) [164].

iii)- Fondations 2-D et 3-D flexible en surface ou encastées par la (BEM) dans le domaine fréquentiel : Dans ce cas, Rajapakse (1989) [146] a étudié une plaque annulaire en surface en utilisant la (BEM) pour le sol et une méthode analytique pour la plaque. Tong et Kuribayashi (1988) [171] ont étudié une fondation 3-D encastée et Gaul et al (1988a, b, 1991a, b) [56], [57], [58], [59] ont étudié des fondations 3-D en surface en utilisant la (BEM/BEM) directe.

iv)- Fondations 2-D rigides en surface ou encastrées par la (BEM) dans le domaine temporel : Spyarakos et Antes (1986a, b) [162], [163] et Batta et al (1989) [25] ont étudié les fondations en surface alors que Von Estorff (1991) [179], ont étudié les fondations en surface et encastrées.

v)- Fondations 3-D rigides ou flexible en surface ou encastrées par la (BEM) dans le domaine temporel : Karabalis et Huang (1989) [81], Karabalis (1991) [80], Karabalis et Huang (1991, 1994a, b) [82], [83], [84] et Triantafyllidis (1991) [174] ont étudiés les fondations rigides en surface, Ahmad et Banerjee (1988) [4] pour les fondations flexibles en surface et Ohmi et Tosaka (1987a, b) [131], [132] et Tosaka et Ohmi (1992) [172] pour les fondations rigides encastrées.

vi)- Interaction entre deux ou plusieurs fondations 2-D rigides ou flexible en surface ou encastrées par la (BEM) : Dans ce cas, Zhou et al (1986) [200], Rajapakse et Shah (1988) [145], Wang et al (1991b) [191], Mesquita et Pontes (1992) [1120], en utilisant la (BEM) dans le domaine fréquentiel et Von Estorff (1991) [179] et Takemiya et al (1994a, b) [168], [169] en utilisant la (BEM) dans le domaine temporel.

vii)- Interaction entre deux ou plusieurs fondations 3-D rigides en surface ou encastrées par la (BEM) : Nakai et Fukuwa (1982) [126], Wong et Luco (1986) [196], Triantafyllidis (1987) [173], Triantafyllidis et Prange (1987,1989) [176], [177], Triantafyllidis et Neidhart (1989) [175], Zhou et al (1990) [201], Aubry et Clouteau (1991b, 1992) [17],[18], Qian et Beskos (1994a, b, 1995, 1996) [136], [137], [138], [140], Qian et al (1998) [127], Mohammadi (1992) [124] et Karabalis et Mohammadi (1998) [85] ont étudié les fondations en surface en utilisant la (BEM) dans le domaine fréquentiel. Ohmi et Tosaka (1987a, b) [131], [132], Tosaka et Ohmi (1992) [172] ont étudié des fondations encstrées en utilisant la (BEM) dans le domaine temporel et Karabalis et Huang (1994a, b) [83], [84] ont étudié des fondations en surfaces en utilisant la (BEM) dans le domaine temporel.

Généralement dans la nature, le sol est hétérogène et cette hétérogénéité peut être discrète (sols avec des couches horizontales ou irrégulières) ou continue (sols avec un module de cisaillement qui augmente avec la profondeur). Le traitement de ce type de sols dans le cas des problèmes d'interaction sol-structure par la (BEM) utilise l'une des méthodes de calcul des fonctions de Green suivante :

i) Fonctions de Green d'un demi-espace multicouches dérivées de transformations dans le domaine fréquentiel : Cette approche est utilisée seulement avec des couches horizontales et

nécessite seulement la discrétisation de l'interface sol-structure. On peut citer les travaux de Romanel et Kundu (1990) [150] dans les problèmes 2-D et Luco et Apsel (1983) [108], Wong et luco (1986) [196], Luco et Wong (1987) [109], Apsel et Luco (1987) [14], Kaynia (1982) [93], Kaynia et Kausel (1982, 1991) [94], [95], Chapel (1987) [41], Gazetas et al (1991) [65], Miura et al (1994) [121], Pei et Papageorgiou (1993) [134], Aubry et Clouteau (1991a) [16], Auersch (1995) [22] et Hisada (1994, 1995) [72], [73] dans les problèmes 3-D.

ii) Fonction de Green d'un demi-espace multicouches dérivées de la méthode des couches minces (Thin layers method) dans le domaine fréquentiel : De même, cette approche est utilisée seulement avec des sols à couches horizontales et nécessite seulement la discrétisation de l'interface sol-structure. On peut mentionner les travaux de Waas (1972) [188], Kausel et Peeck (1982) [90], Hull et Kausel (1984) [76], Waas et al (1985) [189], Lin et Tassoulas (1987) [105], Boumekik (1985) [33], Liu et Novak (1994) [107], Sbartai (2002) [155], Sbartai et Boumekik (2002, 2003, 2005, 2006, 2006) [156], [157], [158], [159], [160] Hijikata et Tomii (1995) [71] pour des cas 3-D et Beskos et al (1990) [29], Beskos (1991d) [28] pour les cas 2-D. Récemment Kausel (1994) [91] a étendu la méthode des couches minces (Thin Layers Method) pour calculer les fonctions de Green d'un demi-espace multicouches dans le domaine temporel.

iii) Fonctions de Green d'un semi-espace multicouches en coordonnées cylindriques dans le domaine temporel : Dans ce cas, on peut citer les travaux de Cheung et al (1993,1995) [42], [43], Tham et al (1994) [167].

iv) Fonctions de Green d'un sol ayant une hétérogénéité continue dans le domaine fréquentiel dans des conditions 2-D et 3-D : On peut citer les travaux de Rajapakse (1990) [144], Vrettos (1990a, b, 1991a, b, c) [183], [184], [185], [186], [187], Savidis et al (1991) [154], Savidis et Vrettos (1995) [153].

### **2.4.2.3 Couplage Elément Finis-Eléments Frontières (FEM-BEM)**

L'utilisation du couplage de la méthode des Eléments Finis avec la méthode des Eléments Frontières a pris naissance quant on a voulu utilisé seulement les avantages de chacune des deux méthodes. Quant la fondation est flexible ou si elle est surmontée par une superstructure, la méthode des Eléments Finis est habituellement employée pour la fondation flexible ou la structure et la méthode des Eléments Frontières est utilisée pour le sol.

Kokkinos et Spyrakos (1989, 1991) [97], [98] ont utilisé le couplage des deux méthodes en 2-D dans le domaine fréquentiel afin d'étudier les vibrations des fondations flexibles placées à la surface d'un sol.

Gaitanaros et Karabalis (1988) [55] et Auersch (1994b, 1995, 1996) [21], [22], [23] ont utilisé cette méthode en 3-D dans le domaine fréquentiel pour étudier les vibrations des fondations flexibles et encastrées dans un sol.

En utilisant ce couplage des deux méthodes en 3-D dans le domaine fréquentiel Rajapakse et al (1987) [143] ont pu étudier les vibrations de torsion des fondations flexibles encastrées dans un sol.

Von Estorff et Prabuski (1988) [180] et Chang et Belytschko (1988) [39] ont utilisé le couplage des deux méthodes dans le domaine temporel pour étudier les fondations rigides placées à la surface d'un sol.

En utilisant le couplage (FEM/BEM) en 2-D dans le domaine fréquentiel Kobori et al (1982) [96], Zeng et al (1985) [199], Hadjиков et al (1986) [70], Huh et Schmid (1986) [75], Dangla (1988) [48], Romanel et Kundu (1990,1993) [150], [151], ont pu étudier des structures flexibles encastrées dans un semi-espace. Par contre dans le domaine temporel, on peut citer les travaux de Von Estorff et Prabuski (1990) [181] et Von Estorff (1991) [179].

Pour l'étude des structures flexibles 3-D dans le domaine fréquentiel par la méthode couplée (FEM/BEM) on peut citer les travaux de Kawase et al (1982) [92], Antes et Latz (1990) [11], Auersch et Schmid (1990) [19], Wang et Schmid (1992) [190], Aubry et Clouteau (1992) [18], Lee et al (1995b) [101] et Capuani et al (1995a, b) [37], [38].

Concernant l'étude de l'interaction entre deux ou plusieurs fondations flexibles placées à la surface d'un sol en utilisant le couplage (FEM/BEM) dans le domaine temporel, on peut mentionner les travaux de Karabalis et Mohammadi (1988, 1991) [78], [79], Mohammadi et Karabalis (1995) [125] et Coda et Venturini (1995a) [46]. Dans le domaine fréquentiel on peut citer les travaux de Wang et Schmid (1992) [190], Qian et al (1996) [140].

## Chapitre 3

# Propagation d'ondes dans le sol

### 3.1 Introduction

Le comportement constitutif du sol sous un chargement cyclique est complexe, le sol est un matériau discontinu où les pores du squelette solide peuvent être partiellement saturés en eau. Les essais en laboratoire prouvent que le comportement du sol est anisotrope et non linéaire. Pour les sols secs non cohérent, le comportement non linéaire peut être négligé quand la contrainte de cisaillement est plus petite que  $10^{-5}$ . C'est le cas des vibrations induites par les machines vibrantes, le trafic de la route et chemin de fer dans le champ libre.

La propagation d'onde dans un sol isotrope poro-élastique saturé et non saturé peut être décrite par des équations poro-élastique de Biot. La fréquence caractéristique  $w_c$ , (fréquence propre) qui est inversement proportionnelle à la perméabilité du milieu poro-élastique, détermine l'importance de l'accouplement visqueux entre le solide et la phase du fluide. Aux basses fréquences  $w$  et tout en respectant  $w_c$ , un couplage visqueux élevé empêche le mouvement relatif entre la phase solide et la phase liquide et le sol se comporte comme mélange congelé, En hautes fréquences et en respectant  $w_c$  le couplage visqueux est petit et le sol se comporte comme milieu poreux non diffusé (ne se dissipe pas).

Pour la plupart des problèmes dans le génie civil, seulement cette gamme de basse fréquence est intéressante et le sol peut être modélisé comme milieu sec élastique, à condition de prendre en compte la densité et l'incompressibilité des couches saturées du sol. Dans ce chapitre, la propagation d'ondes dans les milieux élastiques secs est brièvement discutée. On focalisera principalement sur l'existence et la bonne connaissance des techniques qui ont été développées pour la propagation d'onde dans les couches horizontales du milieu. La restriction aux problèmes linéaires défini sur les couches horizontales du milieu permet l'utilisation des techniques de transformation intégrales efficaces pour la coordonnée horizontale.

D'abord, les équations générales du mouvement sont récapitulées. Les fonctions de Green sont la solution fondamentale des équations du mouvement. Après cela, le théorème dynamique de réciprocité est discuté. On montre comment les équations intégrales frontières qui sont employés pour la solution du problème d'interaction de sol-structure sont dérivées. Enfin, on indique comment les fonctions de Green sont calculées au moyen de la méthode directe de rigidité.

### **3.2 Equations générales du mouvement**

Dans ce qui suit, une description matérielle est employée pour décrire les déformations d'un milieu élastique sec avec un volume  $V$  et une surface  $S$ . Le temps  $t$  et la position de référence  $x$  des particules dans leur état initial (sans déformation) sont les variables indépendantes. Une théorie linéaire est employée pour décrire le comportement dynamique d'un milieu élastique soumis à de faibles déformations.

Un système des coordonnées cartésiennes rectangulaires est employé. Les vecteurs de base sont écrits comme  $e_i$ . Les composants d'un vecteur  $V$  sont notés comme étant  $v_i$ , où l'indice inférieur  $i$  prend la valeur de  $x$ , de  $y$  ou de  $z$ .

Le champ de déplacement dans le milieu élastique est noté  $u_s(x, t)$ . Les composants des petites déformations du tenseur sont calculés à partir des déplacements comme suit:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{si,j} + u_{sj,i}) \quad (3.1)$$

où la virgule dénote la différentiation partielle de la coordonnée spatiale.

Les équations d'équilibre sont:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_{si} \quad (3.2)$$

où le point au-dessus d'une variable représente la différentiation par rapport au temps  $t$ .

Dans cette équation,  $\sigma_{ij}$  dénote le tenseur des contraintes,  $\rho$  la densité du milieu élastique et  $\rho b_i$  la force de volume dans la direction  $\epsilon_i$ .

Pour un matériau élastique linéaire isotrope, l'équation constitutive suivante relie les tenseurs des contraintes et des déformations :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (3.3)$$

où

$\lambda$  et  $\mu$  dénotent les coefficients de Lamé. Les coefficients de Lamé sont reliés au module de Young  $E$  et au rapport de Poisson comme suit :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.4)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Le coefficient  $\mu$  de Lamé est identique au module de cisaillement  $G$ . Les équations linéaires d'équilibre en termes du vecteur  $u_s$  ou les équations de Navier résultent de l'élimination des tenseurs de déformation et de contrainte des équations d'équilibre (3.2) au moyen des équations (3.3) et des relations linéaire déformation-déplacement (3.1) :

$$\mu \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_s) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u_s) + \rho b = \rho \ddot{u}_s \quad (2.5)$$

En outre, la solution des équations de Navier  $u_s(x;t)$  doit satisfaire les conditions initiales et les conditions aux frontières du problème élasto-dynamique. Les conditions initiales suivantes sont formulées pour les déplacements  $u_s(x;0)$  et les vitesses  $\dot{u}_s(x;0)$  en un point  $x$  de volume  $V$  à l'instant  $t = 0$  :

$$u_{si}(x,0) = u_{si0}(x) \quad (3.6)$$

$$\dot{u}_{si}(x,0) = \dot{u}_{si0}(x)$$

La frontière  $S$  du volume  $V$  peut être subdivisé en deux parties  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_t$ . là où les déplacements et les tractions en surface sont prescrits:

$$u_{si}(x,t) = \bar{u}_{si}(x,t) \text{ pour } x \in \Gamma_u \quad (3.7)$$

$$t_{si}(x,t) = \bar{t}_{si}(x,t) \text{ pour } x \in \Gamma_t$$

Le principe des contraintes de Cauchy est appliqué pour calculer les tractions  $t_{si} = \sigma_{ji} n_j$  du tenseur des contraintes du second ordre pour une frontière avec un vecteur unité normal extérieur  $n$ .

Dans le cas où le volume  $V$  est illimité, des restrictions additionnelles sont imposées sur le comportement des variables du sol à l'infini. Ces restrictions s'appellent les conditions

de rayonnement. Considérer une sphère  $V_R$  avec un grand rayon limiteur  $R$  et de frontière  $S_R$ . Les déplacements et les tractions au frontière de  $S_R$  du volume  $V_R$  sont notés  $u_s$  et  $t_s$ . Comme sera montré dans ce qui suit, le déplacement  $u_s$  peut être décomposé en tant que :  $u_s = u_s^p + u_s^s$  dans un composant irrotationnel  $u_s^p$  et un composant rotationnel  $u_s^s$ . Les équations suivantes représentent les conditions de rayonnement de l'élasto-dynamique [55]:

$$\begin{aligned} t_s^p + \rho C_p \dot{u}_s^p &= o\left(\frac{1}{R}\right) \\ t_s^s + \rho C_s \dot{u}_s^s &= o\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$C_p$  et  $C_s$  dénotent les vitesses d'ondes irrotationnelles et rotationnelles respectivement.

### 3.3 Différents type d'ondes

#### 3.3.1 Ondes longitudinal et de cisaillements

Dans l'élasto-dynamique classique, il est usuel d'expliquer la signification physique des équations de Navier par une décomposition de Helmholtz du vecteur de déplacement en deux parts: le premier composant est le gradient d'une fonction scalaire  $\Phi^S$ , tandis que le deuxième composant est le rotationnel d'une fonction vecteur  $\Psi^S$ :

$$u_s = \text{grad } \Phi^S + \text{rot } \Psi^S \tag{3.9}$$

Comme les trois composantes du déplacement sont écrites en termes de quatre fonctions potentielles scalaires  $\Phi^S, \Phi_x^S, \Phi_y^S$  et  $\Phi_z^S$ , une relation additionnelle doit se tenir. Selon Achenbach [2], les composants du vecteur  $\Psi^S$  satisfont :  $\text{div } \Psi^S = 0$ .

En utilisant la décomposition de Helmholtz (3.9), les équations homogènes de Navier (3.5) sont transformées en l'ensemble suivant d'équations différentielles partiellement découplées:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi^S &= \rho\ddot{\Phi}^S \\ \mu\nabla^2\Psi^S &= \rho\ddot{\Psi}^S\end{aligned}\tag{3.10}$$

avec

$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  est l'opérateur de Laplace.

Le mouvement longitudinal, décrit par le potentiel scalaire  $\Phi^S$ , est découplé de la partie rotationnelle de la perturbation, décrite par le vecteur de potentiel  $\Psi^S$ .

Le découplage, seulement des ondes longitudinales et de cisaillements, se produit dans un milieu homogène quand l'influence des forces de volume est négligée. En traitant les équations découplées, le couplage se produit uniquement à l'interface entre les couches.

Pour l'onde longitudinale (ou: dilatationnelle, irrotationnelle, primaire, P), les déplacements de la particule sont dans la même direction que la direction de propagation de l'onde. La vitesse de l'onde longitudinale est égale à :

$$C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}.$$

Le rapport  $S$  des vitesses d'onde  $C_s$  et  $C_p$  est égal à  $\sqrt{(1-2\mu)/(2-2\mu)}$  et dépend uniquement du rapport de Poisson.

### 3.3.2 Ondes de cisaillement polarisées

En général, la contribution de l'onde de cisaillement au vecteur de déplacement peut être décomposé en une composante parallèle (onde-SH) et normale (onde-SV) sur une surface de réflexion.

Comme nous sommes intéressés par la réponse des couches horizontales d'un semi-infini où l'axe vertical  $Z$  est perpendiculaire aux couches d'interfaces, c'est commode de choisir la surface réflexion parallèle au plan horizontal  $(X, Y)$ . Selon Pilant [149], la décomposition alternative suivante du vecteur de déplacement  $u_s$  est employé:

$$u_s = \text{grad } \Phi^S - l \text{rot} \left[ \text{rot}(e_z \Psi^{S'}) \right] + \text{rot}(e_z X^S) \quad (3.11)$$

Les potentiels scalaires  $\Psi^{S'}$  et  $X^S$  décrivent la propagation des ondes-SV et ondes-SH, respectivement. Le facteur dimensionnel  $l$  rend les potentiels scalaires  $\Phi^S$ ,  $\Psi^{S'}$  et  $X^S$  de même dimension [149].

Quand tous les composants sont écrits explicitement, la décomposition dans l'équation (3.11) devient:

$$\begin{aligned} u_{sx} &= \frac{\partial \Phi^S}{\partial x} - l \frac{\partial^2 \Psi^{S'}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial X^S}{\partial y} \\ u_{sy} &= \frac{\partial \Phi^S}{\partial y} - l \frac{\partial^2 \Psi^{S'}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial X^S}{\partial x} \\ u_{sz} &= \frac{\partial \Phi^S}{\partial z} + l \nabla^2 \Psi^{S'} - \frac{\partial^2 \Psi^{S'}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette décomposition montre que les deux ondes de cisaillement contribuent aux composantes horizontales de déplacement  $u_{sx}$  et  $u_{sy}$ .

L'ensemble d'équations différentielles partielles découplées devient:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi^S &= \rho \ddot{\Phi}^S \\ \mu \nabla^2 \Psi^{S'} &= \rho \ddot{\Psi}^{S'} \\ \mu \nabla^2 X^S &= \rho \ddot{X}^S \end{aligned} \quad (3.13)$$

indiquant les ondes de propagation : P-onde, SV-onde et onde-SH respectivement.

### **3.3.3 Propagations d'ondes planes**

Pour la propagation d'onde bidimensionnelle dans le plan  $(X, Z)$ , la dépendance à l'égard de la coordonnée  $y$  peut être ignoré si nous choisissons:

$$\Psi^S = l \frac{\partial \Psi^{S'}}{\partial x} \quad (3.14)$$

la décomposition du vecteur de déplacement suivante comprend :

$$u_S = \text{grad } \Phi^S + \text{rot } (e_y \Psi^S) + \text{rot } (e_z X^S) \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} u_{Sx} &= \frac{\partial \Phi^S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^S}{\partial z} \\ u_{Sy} &= -\frac{\partial X^S}{\partial x} \\ u_{Sz} &= \frac{\partial \Phi^S}{\partial z} - \frac{\partial \Psi^S}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les déplacements  $u_{Sx}$  et  $u_{Sz}$  suivant  $ox$  et  $oz$  (in-plane motion) sont découplés du déplacement  $u_{Sy}$  (out-of-plane motion) suivant  $oy$ .

Le mouvement suivant le plan  $(x-z)$  est décrit en termes d'ondes potentiels scalaires  $\Phi^S$  (onde-P) et  $\Psi^S$  (onde-SV) par l'ensemble d'équations différentielles partielles hyperboliques suivant:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi^S = \rho\ddot{\Phi}^S \tag{3.17}$$

$$\mu\nabla^2\Psi^S = \rho\ddot{\Psi}^S$$

L'opérateur de Laplace  $\nabla^2$  est réduit à :  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ .

Le mouvement suivant  $oy$  est décrit en terme d'onde potentielle scalaire  $X^S$  (onde-SH) par l'équation différentielle partielle hyperbolique suivante :

$$\mu\nabla^2 X^S = \rho\ddot{X}^S \tag{3.18}$$

### **3.4 Relations de dispersion**

#### **3.4.1 Ondes dilatationnelle (P-ondes)**

Dans l'équation différentielle partielle hyperbolique (3.13) qui régit la propagation des ondes longitudinales, le temps  $t$  est transformé en fréquence circulaire au moyen d'une transformation de Fourier:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\hat{\Phi}^S + \omega^2\rho\hat{\Phi}^S = 0 \tag{3.19}$$

où

$\hat{\Phi}^S(x, y, z, \omega) = f[\Phi^S(x, y, z); \omega]$  dont l'utilisation a été faite pour le calcul de la transformée de Fourier de second ordre (dérivée de  $\Phi^S$  par rapport au temps).

Le principe de correspondance est appliqué dans l'équation (3.19) pour modéliser le matériau amortissant dans le milieu élastique par l'utilisation du coefficient complexe de Lamé  $(\lambda + 2\mu)(1 + 2\beta_p i)$ , où  $\beta_p$  représente le coefficient d'amortissement d'hystérésis pour les ondes longitudinales.

La transformation précédente est suivie par une double transformation de Fourier des coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  aux nombres d'ondes horizontales  $k_x$  et  $k_y$ , car on suppose que la géométrie est invariable dans le plan horizontal:

$$(\lambda + 2\mu) \left[ -k_x^2 - k_y^2 + \frac{d^2 \bar{\bar{\Phi}}^S}{dz^2} \right] + \omega^2 \rho \bar{\bar{\Phi}}^S = 0 \quad (3.20)$$

Comme l'équation (3.20) a des coefficients constants, on peut proposer la solution suivante:

$$\bar{\bar{\Phi}}^S(k_x, k_y, z, \omega) = P^S \exp(-ik_{zp}z) \quad (3.21)$$

où

$k_{zp}$  : représente la composante verticale du vecteur de propagation d'onde

$K_p = \{k_x, k_y, k_{zp}\}^T$  des ondes de dilatation.

La composante du vecteur propre  $P_S$  dépend de la frontière et des conditions initiales du problème à étudier. En remplaçant la solution (3.21) dans l'équation ordinaire (3.20) on aura :

$$\left[ -(\lambda + 2\mu)(k_x^2 + k_y^2 + k_{zp}^2) + \omega^2 \rho \right] P^S = 0 \quad (3.22)$$

Une solution non triviale pour la composante du vecteur propre  $P^S$  peut être trouvée si le coefficient  $P^S$  dans l'équation (3.22) est égal à zéro où:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_{zp}^2 = \frac{\omega^2}{C_p^2} = k_p^2 \quad (3.23)$$

$k_p = \omega/C_p$  : est la magnitude du vecteur de propagation d'onde  $k_p$ .

L'application du principe de correspondance dans l'équation (3.19) rend la vitesse de l'onde de dilatation  $C_p$  et le nombre d'ondes  $k_p$  complexes. L'équation (3.23) est désigné sous le nom de relation de dispersion pour l'onde de dilatation et permet le calcul du nombre d'onde complexe verticale  $k_{zp}$  pour chaque paire de nombre d'onde horizontaux  $k_x, k_y$  et pour chaque fréquence circulaire  $\omega$  :

$$k_{zp} = \pm(k_p^2 + k_x^2 + k_y^2)^{0.5} \text{ pour } k_x^2 + k_y^2 \leq k_p^2 \quad (3.24)$$

$$k_{zp} = \pm i(k_p^2 + k_x^2 + k_y^2)^{0.5} \text{ pour } k_x^2 + k_y^2 > k_p^2$$

La première expression pour le  $k_{zp}$  correspond aux ondes se propageant dans la direction verticale  $e_z$ , tandis que la seconde représente les ondes évanescentes ou non homogènes avec une diminution ou une augmentation exponentielle dans l'amplitude avec  $z$ . En utilisant le signe supérieur dans les deux expressions, la solution (3.21) est écrite plus généralement comme:

$$\bar{\Phi}^S = (k_x k_y, z, \omega) = I_p^S \exp(-ik_{zp} z) + R_p^S \exp(+k_{zp} z) \quad (3.25)$$

Les potentiels  $I_p^S$  et  $R_p^S$  se réfèrent aux ondes incidentes (sortantes, se propageant dans la direction positive de  $z$ ) et réfléchies (entrantes, se propageant dans la direction négative de  $z$ ) respectivement.

### **3.4.2 Ondes de cisaillement (Ondes SV et SH)**

Dans l'équation partielle hyperbolique (3.13) qui régie la propagation d'ondes verticales polarisées de cisaillement, la variable de temps  $t$  est transformé au domaine fréquentiel au moyen d'une transformation de Fourier:

$$\mu \nabla^2 \hat{\Psi}^S + \omega^2 \rho \hat{\Psi}^S = 0 \quad (3.26)$$

où

$$\hat{\Psi}^S(x, y, z, \omega) = f[\Psi^S(x, y, z); \omega].$$

Le principe de correspondance est appliqué dans l'équation (3.26) pour modéliser le matériau d'amortissement dans le milieu élastique par l'utilisation du coefficient complexe de Lamé,  $\mu(1 + 2\beta_s i)$  ou  $\beta_s$  représente la constante d'amortissement du matériau par hystérésis pour les ondes de cisaillement. La transformation précédente est suivie d'une double transformation de Fourier des coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  aux nombres d'ondes horizontaux  $k_x$  et  $k_y$  (annexe A), car on suppose que la géométrie est invariable dans le plan, on aura :

$$\mu \left[ -k_x^2 - k_y^2 + \frac{d^2 \bar{\bar{\Psi}}^S}{dz^2} \right] + \omega^2 \rho \bar{\bar{\Psi}}^S = 0 \quad (3.27)$$

Comme l'équation (3.28) a des coefficients constants, on peut proposer la solution suivante:

$$\bar{\bar{\Psi}}^S(k_x, k_y, z, \omega) = S^S \exp(-ik_{zS} z) \quad (3.28)$$

où

$k_{zS}$  : représente la composante verticale du vecteur de propagation d'onde

$$K_S = \{k_x, k_y, k_{zS}\}^T \text{ des ondes de cisaillement (in-plane).}$$

La composante du vecteur propre dépend de la frontière et des conditions initiales du problème à étudier.

La présentation de la solution (3.28) dans l'équation différentiel ordinaire (3.27) mène à:

$$[-\mu(k_x^2 + k_y^2 + k_{zS}^2) + \omega^2 \rho] S^S = 0 \quad (3.29)$$

Une solution non triviale peut être trouvée pour la composante du vecteur propre  $S^S$  si le coefficient  $S^S$  dans l'équation (3.29) est égal à zéro où:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_{zS}^2 = \frac{\omega^2}{C_S^2} = k_S^2 \quad (3.30)$$

$k_S = \omega/C_S$  : est l'amplitude du vecteur de propagation d'onde  $k_S$ .

L'application du principe de correspondance dans l'équation (3.26) rend la vitesse de l'onde de cisaillement  $C_S$  et le nombre d'ondes  $k_S$  complexes.

L'équation (3.30) est mentionnée comme la relation de dispersion pour l'onde de cisaillement et permet de calculer le nombre d'onde verticale et complexe  $k_{zS}$  pour chaque paire de nombre d'onde horizontaux  $k_x, k_y$  et chaque fréquence circulaire  $\omega$  :

$$k_{zS} = \pm(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2)^{0.5} \text{ pour } k_x^2 + k_y^2 \leq k_S^2 \quad (3.31)$$

$$k_{zS} = \pm i(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2)^{0.5} \text{ pour } k_x^2 + k_y^2 > k_S^2$$

La première expression pour  $k_{zS}$  correspond aux ondes se propageant dans la direction verticale  $e_z$ , tandis que la seconde représente les ondes évanescentes ou non homogènes avec une diminution ou augmentation d'amplitude exponentielle dans la direction de l'axe  $z$ .

En utilisant le signe supérieur dans les deux expressions, la solution (3.28) est écrite plus généralement comme:

$$\bar{\Psi}^S(k_x, k_y, z, \omega) = I_{SV}^2 \exp(-ik_{zS}z) + R_{SV}^S \exp(+ik_{zS}z) \quad (3.32)$$

Les potentiels  $I_{SV}^S$  et  $R_{SV}^S$  font référence aux ondes incidentes (sortantes, se propageant dans la direction positive de  $z$ ) et réfléchies (entrantes, se propageant dans la direction négative de  $z$ ) respectivement.

De manière similaire, l'équation partielle hyperbolique (3.13) qui régit la propagation des ondes horizontales polarisées de cisaillement est résolue.

### **3.5 Fonctions de Green**

Dans le cas particulier où une charge concentrée est considérée, la solution du problème élasto-dynamique  $u_s(x,t)$  est mentionnée comme la solution singulière fondamentale ou la fonction de Green du milieu [10], [116]. La charge impulsive au point  $\xi$  dans une direction  $e_i$  est écrite comme étant une force de volume :

$$\rho b_j(x,t) = \delta(x - \xi)\delta(t)\delta_{ij}$$

où

les  $\delta_{ij}$  du tenseur dénote le delta de Kronecker défini comme:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (3.33)$$

Le point  $\xi$  est désigné sous le nom du point de source, tandis que le point  $x$  est le point d'observateur ou de récepteur. Cette solution fondamentale est importante, étant donné qu'elle est utilisée pour dériver les représentations intégrales générales des variables du milieu dans un cas plus complexe au moyen du théorème dynamique de réciprocité.

La solution  $u_s(x,t)$  satisfait les équations homogènes de Navier (3.5), excepté au point de source  $\xi$ , là où une singularité existe. Les déplacements initiaux  $u_{si0}(x)$  et les vitesses initiales  $\dot{u}_{si0}(x)$  sont nuls.

A la frontière  $S$  avec un vecteur unité normal extérieur  $n$ , le principe des contraintes de Cauchy peut être appliqué pour calculer la solution fondamentale pour les tractions  $t_{sj}(x,t)$  comme  $\sigma_{kj}(x,t)n_k$  du tenseur des contraintes du second ordre  $\sigma_{kj}$ . Le déplacement  $u_{sj}(x,t)$  et la traction  $t_{kj}(x,t)$  à un point  $x$  dû à une charge concentrée  $\rho b_j(x,t) = \delta(x-\xi)\delta(t)\delta_{ij}$  à un point  $\xi$  et dans une direction  $e_i$  sont notés comme suit :

$$u_{sj}(x,t) = u_j^{G_i}(\xi, x, t) = u_{ij}^G(\xi, x, t) \quad (3.34)$$

$$t_{sj}(x,t) = t_j^{G_i}(\xi, x, t) = t_{ij}^G(\xi, x, t)$$

Les tenseurs de Green de déplacement et de traction sont des tenseurs du second ordre. Chaque colonne  $i$  représente les trois composantes fondamentales de la solution en un point  $x$  dû à une charge concentrée impulsive chargée dans une direction  $e_i$  au point  $\xi$ .

Dans le cas où le point de source  $\xi$  coïncide avec l'origine de l'axe de référence, la dépendance de l'argument des fonctions de Green au point de source est ignoré et la fonction de Green est notée dans ce cas  $u_{ij}^G(x,t)$  ou  $t_{ij}^G(x,t)$ .

Dans le prochain chapitre, on indiquera comment les fonctions de Green d'un semi espace à couches horizontales peut être calculé au moyen de la méthode directe de rigidité.

### **3.6 Le théorème dynamique de réciprocité**

La base de toutes les Equations Intégrales Frontières (BIE) dans l'élasto-dynamique est le théorème dynamique de réciprocité [220]. Le théorème dynamique de

réciprocité indique le rapport entre une paire d'états élasto-dynamique. C'est la prolongation dynamique du théorème classique de réciprocité de Betti-Rayleigh dans l'élastostatique.

Considérons deux états élasto-dynamique  $V$  d'un volume avec une frontière  $S$ , caractérisé par des forces de volumes  $\rho b_1(x,t)$  et  $\rho b_2(x,t)$  et les tractions  $t_1(x,t)$  et  $t_2(x,t)$  à la frontière  $S$ , ayant pour résultat des déplacements  $u_1(x,t)$  et  $u_2(x,t)$ .

Le rapport suivant, entre les variables du milieu dans les deux états, découle du théorème de Betti-Rayleigh [123], [189]:

$$\begin{aligned} & \int_S \int_0^t t_{1j}(x,t-\tau)u_{2j}(x,\tau)d\tau dS + \int_V \int_0^t \rho b_{1j}(x,t-\tau)u_{2j}(x,\tau)d\tau dV \\ & + \int_V \rho [\dot{u}_{1j}(x,0)u_{2j}(x,t) + u_{1j}(x,0)\dot{u}_{2j}(x,t)]dV = \int_S \int_0^t t_{2j}(x,t-\tau)u_{1j}(x,\tau)d\tau dS \quad (3.35) \\ & + \int_V \int_0^t \rho b_{2j}(x,t-\tau)u_{1j}(x,\tau)d\tau dV + \int_V \rho [\dot{u}_{2j}(x,0)u_{1j}(x,t) + u_{2j}(x,0)\dot{u}_{1j}(x,t)]dV \end{aligned}$$

Si les déplacements  $u$  et les vitesses  $\dot{u}$  dans les deux états disparaissent pour  $t$  tendant à  $-\infty$ , les conditions initiales dans l'équation (3.34) peuvent être remplacé par une prolongation de la limite inférieure de l'intégration sur  $\tau$  à  $-\infty$ .

$$\begin{aligned} & \int_S \int_{-\infty}^t t_{1j}(x,t-\tau)u_{2j}(x,\tau)d\tau dS + \int_V \int_{-\infty}^t \rho b_{1j}(x,t-\tau)u_{2j}(x,\tau)d\tau dV \\ & = \int_S \int_{-\infty}^t t_{2j}(x,t-\tau)u_{1j}(x,\tau)d\tau dS + \int_V \int_{-\infty}^t \rho b_{2j}(x,t-\tau)u_{1j}(x,\tau)d\tau dV \quad (3.36) \end{aligned}$$

La transformation de Fourier de l'équation (3.36) résulte de la formulation du théorème de Betti-Rayleigh dans le domaine fréquentiel :

$$\int_S \hat{t}_{1j}(x, \omega) \hat{u}_{2j}(x, \omega) dS + \int_V \rho \hat{b}_{1j}(x, \omega) \hat{u}_{2j}(x, \omega) dV = \int_S \hat{t}_{2j}(x, \omega) \hat{u}_{1j}(x, \omega) dS + \int_V \rho \hat{b}_{2j}(x, \omega) \hat{u}_{1j}(x, \omega) dV \quad (3.37)$$

### **3.7 Equations Intégrales Frontières**

Le théorème dynamique de réciprocité est employé pour formuler une équation intégrale qui exprime la relation entre les variables de champ en un principe fondamental connu et en un état élasto-dynamique inconnu d'un volume  $V$  avec une frontière  $S$ . L'état connu est la solution singulière fondamentale, là où une charge concentrée  $\rho b_j(x, t) = \delta(x - \xi) \delta(t) \delta_{ij}$  est appliquée à un point  $\xi$  de  $V$  dans une direction  $e_i$ . La fonction de Green  $u_{ij}^G(\xi, x, t)$  représente les déplacements à un point  $x$  de  $V$ , tandis que  $t_{ij}^G(\xi, x, t)$  dénote les tractions, dérivé du tenseur de contraintes pour un vecteur d'unité normal  $n$ . Ces solutions fondamentales correspondent à la  $i$ -ème rangée du tenseur de Green dans l'équation (3.34).

L'état inconnu se caractérise par les déplacements  $u_{sj}(x, t)$ , les tractions  $t_{sj}(x, t)$  et les forces de volumes  $\rho b_{sj}(x, t)$ .

De l'équation (3.36), il suit:

$$\begin{aligned} \int_{S-\infty}^t \int_S t_{sj}(x, t - \tau) u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dS + \int_{V-\infty}^t \int_V \rho b_{ij}(x, t - \tau) u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dV = \int_{S-\infty}^t \int_S t_{ij}^G(\xi, x, t - \tau) u_{sj}(x, \tau) d\tau dS \\ + \int_{V-\infty}^t \int_V \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \delta_{ij} u_{sj}(x, \tau) d\tau dV \end{aligned} \quad (3.38)$$

Cette équation est encore élaborée comme suit:

$$\begin{aligned}
u_{sj}(\xi, t) = & \int_{S-\infty}^t \int t_{ij}(x, t-\tau) u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dS - \int_{S-\infty}^t \int t_{ij}^G(\xi, x, t-\tau) u_{sj}(x, \tau) d\tau dS \\
& + \int_{V-\infty}^t \int \rho b_{sj}(x, t-\tau) u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dV
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Le déplacement inconnu  $u_{sj}(\xi, t)$  au point  $\xi$  est écrit en fonction des :

- fonctions de Green connues.
- déplacements et les tractions le long de la frontière  $S$ .
- forces de volume dans l'état inconnu.

Cette relation est également connue comme l'identité de Somigliana pour les déplacements [16]. L'emplacement  $\xi$  et la direction  $e_j$  des déplacements inconnus  $u_{sj}(\xi, t)$  correspondent à l'endroit et à la direction de la charge concentrée dans l'état fondamental connu.

L'expression équivalente dans le domaine fréquentiel découle de la transformée de Fourier de l'équation (3.39):

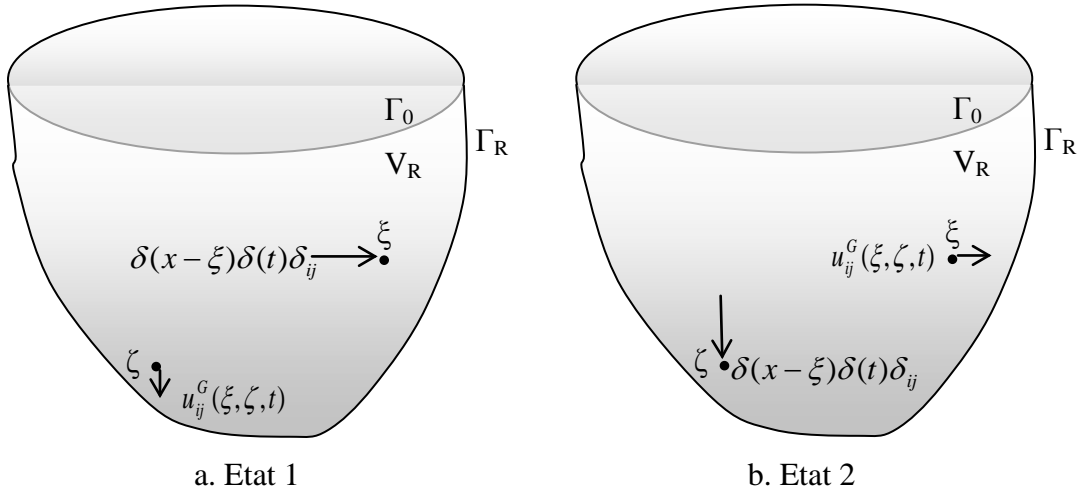
$$\begin{aligned}
\hat{u}_{sj}(\xi, \omega) = & \int_S \hat{t}_{sj}(x, \omega) \hat{u}_{ij}^G(\xi, x, \omega) dS - \int_S \hat{t}_{ij}^G(\xi, x, \omega) \hat{u}_{sj}(x, \omega) dS \\
& + \int_V \rho \hat{b}_{sj}(x, \omega) \hat{u}_{ij}^G(\xi, x, \omega) dV
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Si les forces de volumes sont nulles cette dernière expression s'écrit :

$$\hat{u}_{sj}(\xi, \omega) = \int_S \hat{t}_{sj}(x, \omega) \hat{u}_{ij}^G(\xi, x, \omega) dS - \int_S \hat{t}_{ij}^G(\xi, x, \omega) \hat{u}_{sj}(x, \omega) dS \tag{3.41}$$

### 3.8 La réciprocité des fonctions de Green

Considérons deux points arbitraires  $\xi$  et  $\zeta$  d'un volume  $V_R$  avec la forme d'une semi sphère. Les fonctions de Green  $u_{ij}^G(\xi, x, t)$  et  $t_{ij}^G(\xi, x, t)$  représentent le déplacement et la traction à un point  $x$  du volume  $V_R$  pour une charge concentrée  $\rho b_j(x, t) = \delta(x - \xi)\delta(t)\delta_{ij}$  dans une direction  $e_i$  au point  $\xi$  (figure 2.1a). Considérons un deuxième ensemble fondamental de solutions  $u_{ij}^G(\zeta, x, t)$  et  $t_{ij}^G(\zeta, x, t)$  pour une charge concentrée  $\rho b_j(x, t) = \delta(x - \zeta)\delta(t)\delta_{ij}$  dans une direction  $e_k$  au point  $\zeta$  (figure 2.1b). Le théorème dynamique de réciprocité (3.36) est employé pour dériver les relations de réciprocité entre les deux états fondamentaux.



**Figure 2.1:** (a) Etat 1 et (b) Etat 2 du volume  $V_R$  avec la surface libre  $\Gamma_0$  et la frontière  $\Gamma_R$  à l'intérieur du semi espace.

L'expression suivante est tirée à partir du théorème de réciprocité (2.12):

$$\begin{aligned}
& \int_{S_R^{-\infty}}^t t_{kj}^G(\zeta, x, t - \tau) u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dS + \int_{V_R^{-\infty}}^0 \delta(x - \zeta) \delta(t - \tau) \delta_{kj} u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dV \\
&= \int_{S_R^{-\infty}}^t t_{ij}^G(\xi, x, t - \tau) u_{kj}^G(\zeta, x, \tau) d\tau dS + \int_{V_R^{-\infty}}^0 \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \delta_{ij} u_{ij}^G(\zeta, x, \tau) d\tau dV \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Cette fonction est élaborée comme suit :

$$u_{ij}^G(\xi, \zeta, \tau) + \int_{S_{R'}^{-\infty}}^t t_{ij}^G(\zeta, x, t - \tau) u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dS = u_{ij}^G(\zeta, \xi, \tau) + \int_{S_R^{-\infty}}^t t_{ij}^G(\xi, x, t - \tau) u_{kj}^G(\zeta, x, \tau) d\tau dS \quad (3.43)$$

La surface  $S_R$  du volume peut être subdivisé aux frontières  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_R$  à la surface et à l'intérieur du semi espace respectivement. Les tractions du sol sur la surface libre  $\Gamma_0$  du semi espace sont nulles et seulement l'intégrale au-dessus de la frontière  $\Gamma_R$  règne. Pour une grande valeur limite du rayon  $R$  du volume  $V_R$ .

Pour une grande valeur, néanmoins limitée, du rayon  $R$  du volume  $V_R$ , l'expression suivante est obtenue:

$$u_{ik}^G(\xi, \zeta, \tau) = u_{ki}^G(\zeta, \xi, \tau) + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^{-\infty}}^t t_{ij}^G(\xi, x, \tau) u_{kj}^G(\zeta, x, \tau) d\tau dS - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^{-\infty}}^t t_{kj}^G(\zeta, x, \tau) u_{ij}^G(\xi, x, \tau) d\tau dS \quad (3.44)$$

Il est peut être montrer que les intégrales de surface disparaissent en raison des conditions de rayonnement dans l'équation (3.32) [215].

L'expression précédente devient:

$$u_{kj}^G(\zeta, \xi, t) = u_{ik}^G(\xi, \zeta, t) \quad (3.45)$$

Ce qui représente les relations de réciprocity entre les fonctions de Green dans le domaine temporel.

L'expression équivalente dans le domaine fréquentiel est trouvée à travers une transformée de Fourier :

$$\hat{u}_{kj}^G(\zeta, \xi, \omega) = \hat{u}_{ik}^G(\xi, \zeta, \omega) \tag{3.46}$$

### 3.9 Application des Equations Intégrales pour un problème Sol-Structure

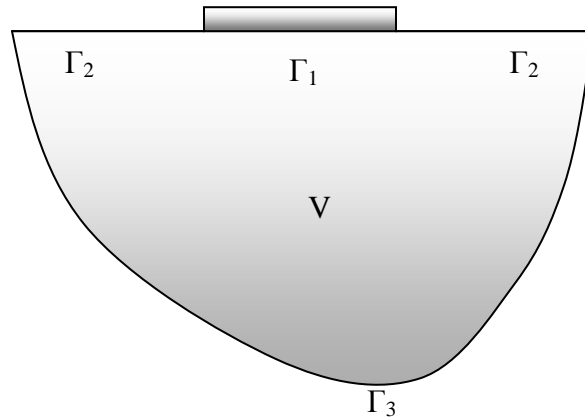
Soit un sol élastique linéaire 2-D ou 3-D dans un domaine  $V$  avec une frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .

Pour le cas général, on prend en considération un problème aux frontières avec des conditions aux limites suivantes (figure 3.1) :

$u_i = \bar{u}_i$  sur la frontière  $\Gamma_1$  qui représente la surface en contact avec la fondation

$t_i = \bar{t}_i$  sur la frontière  $\Gamma_2$  qui représente la surface libre

$u_i \rightarrow 0, t \rightarrow 0$  sur la frontière infini  $\Gamma_3$



**Figure 3.1** présentation du problème

Si on applique l'équation intégrale (3.45) à ce problème d'interaction Sol-Structure représenté dans la figure 3.1, on aura :

$$\hat{u}_{\Gamma_i}(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \hat{t}_{\Gamma_j}(x, \omega) \hat{u}_{ij}^G(\xi, x, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{t}_{ij}^G(\xi, x, \omega) \hat{u}_{\Gamma_j}(x, \omega) d\Gamma \quad (3.46)$$

avec

$\hat{u}_{ij}^G$  et  $\hat{t}_{ij}^G$  représentent les fonctions de Green, ayant la propriété suivante respective :

$$\hat{u}_{ij}^G = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \hat{t}_{ij}^G = 0 \text{ sur } \Gamma_2 .$$

Etant donné que la valeur de bord sol-fondation est homogène sur la frontière  $\Gamma_1$ , la dernière intégrale disparaît et l'équation intégrale (3.46) se réduit à l'expression simple suivante :

$$\hat{u}_{\Gamma_i}(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \hat{t}_{\Gamma_j}(x, \omega) \hat{u}_{ij}^G(\xi, x, \omega) d\Gamma \quad (3.47)$$

Dans la méthode des Elément Frontières, la surface  $S$  est discrétisé tandis que les tractions et les déplacements le long de la surface sont interpolés au moyen d'élément basé sur les fonctions de forme. Si cette interpolation est introduite dans l'équation (3.47), le déplacement est exprimé en fonction des déplacements nodaux et des tractions. La formulation de cette équation pour un ensemble de points  $\xi$  conduit à un système d'équations linéaires qui peuvent être résolues numériquement.

### **3.10 Equation Intégrale discrète**

Pour un domaine (V) avec une géométrie et des conditions aux frontières mixtes, il est difficile d'intégrer l'équation intégrale (3.47) analytiquement.

Cependant, une discrétisation de la frontière en un nombre fini d'éléments frontières rend possible son intégration. Pour cela, il suffirait d'interpoler les déplacements et les

tractions par des polynômes de même genre que ceux utilisés dans la méthode des Eléments Finis.

A l'intérieur d'un élément, ces fonctions s'expriment par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_i(x) &= N(\xi, x) \cdot u(\xi) \\ t_i(x) &= N(\zeta, x) \cdot t(\zeta) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Avec

$\xi$  : varie de (1, 2, ...,  $N_t$ )

$\zeta$  : varie de (1, 2, ...,  $N_f$ )

$N_t$  : représente le nombre total des éléments appartenant à la frontière  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

$N_f$  : représente le nombre d'éléments appartenant à la frontière  $\Gamma_1$ .

$x$  : représente un point quelconque dans la frontière  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

$N(x)$  : représente les fonctions de formes.

$u(\xi)$  : représente les déplacements nodaux en un point de la frontière  $\Gamma$ .

$t(\zeta)$  : représente les tractions nodaux en un point de la frontière  $\Gamma_1$ .

Pour des éléments de frontières constants, les nœuds sont choisis au milieu de l'élément et la fonction de forme prend l'expression suivante :

$$N(x) = 1 \tag{3.49}$$

Pour des éléments de frontières linéaires, les nœuds sont choisis aux deux extrémités de l'élément et la fonction d'interpolation est une fonction d'interpolation linéaire.

Dans notre travail des éléments frontières constant quadrilatère ont été utilisés pour discrétiser l'interface fondation-sol-fondation, qu'on présentera dans les sections suivantes avec détail.

Avec cette approximation, l'équation intégrale (3.47) devient une équation matricielle algébrique :

$$u_i = U_{ij} \cdot t \quad (3.50)$$

où

$u_i$  : vecteur des valeurs discrètes du déplacement de l'élément de frontière du domaine à analyser, de dimensions  $(3N_t \times 1)$ .

$t$  : vecteur des valeurs discrètes de traction de l'élément de frontière du domaine à analyser, de dimension  $(3N_f \times 1)$ .

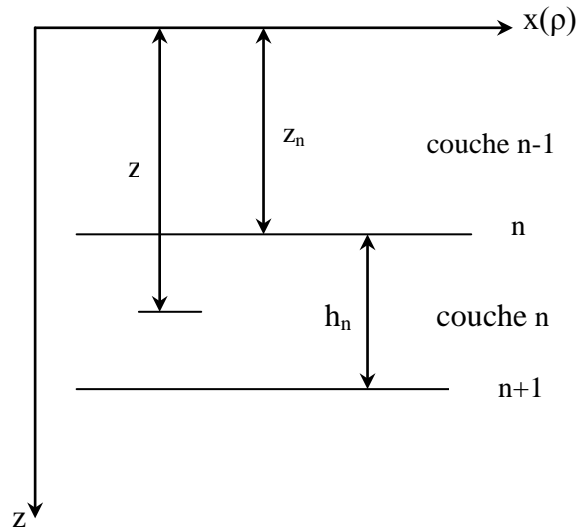
$U_{ij}$  : matrice de déplacement résultant de l'intégration de la solution fondamentale et est défini de la manière suivante, de dimension  $(3N_t \times 3N_f)$  :

$$U_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ij}(\xi, x) \cdot N(x, \zeta) d\Gamma \quad (3.51)$$

### **3.11 Détermination des fonctions de Green d'un sol multicouche**

Soit le domaine (V), un sol multicouche limité par un substratum formé de N couches horizontales définis par  $z = z_1, z_2, \dots, z_n$ . Une couche n est définie par  $z_n < z < z_{n+1}$ , voir figure 3.3.

A l'intérieur de chaque couche n d'épaisseur  $h_n$  le sol est supposé homogène, isotrope et linéairement élastique.



**Figure 3.3** Sol multicouche

Actuellement, les fonctions de Green d'un massif (V) sont obtenues par inversion de sa matrice de rigidité, basée sur la technique des couches minces de Waas (Thin layer technique), à travers la procédure de la décomposition spectrale Kausel et Peek (1982) [90]. Selon cette théorie des couches minces, l'épaisseur de chaque couche doit être inférieure que le 1/10 de la longueur d'onde de Rayleigh dans cette couche.

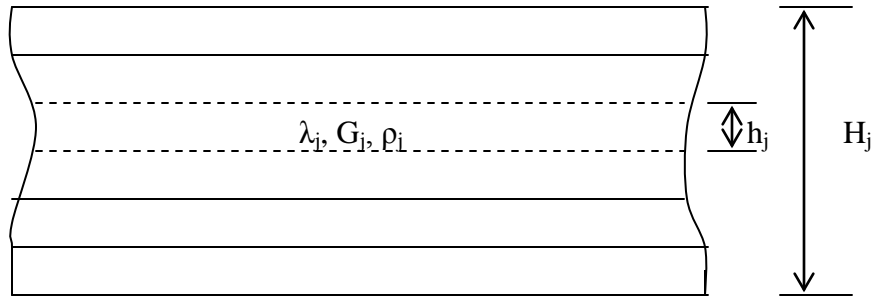
Pour obtenir cette condition, Waas pour un problème 2-D puis Kausel pour un problème axisymétrique ont utilisé la discrétisation verticale de chaque couche en plusieurs sous-couches afin que les déplacements dans la couche varient linéairement avec la profondeur, et continues dans la direction parallèle aux couches.

Le principe de la discrétisation verticale du massif est donné à la figure.3.4

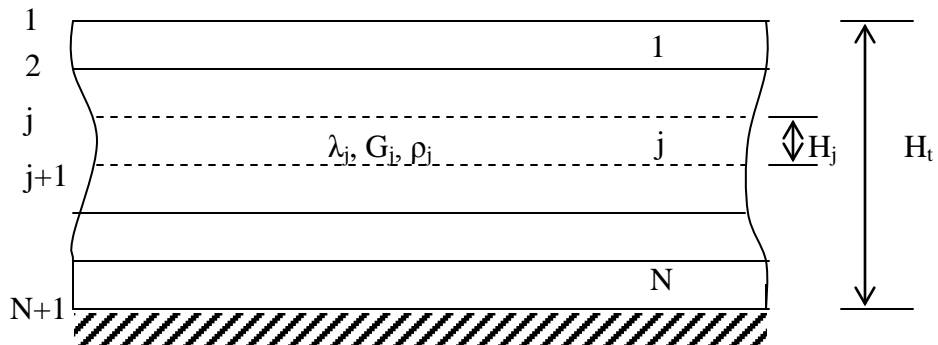
Une couche quelconque du massif figure.1-a est subdivisée en un certain nombre de sous-couches de hauteur  $h_j$  qui ont les mêmes caractéristiques physique que la couche. Celle-ci est supposée horizontale, viscoélastique et isotrope caractérisés par la constante complexe de Lamé  $\lambda_j$ , le module complexe de cisaillement  $G_j$  est la masse volumique  $\rho_j$ .

La figure.1-b donne une coupe verticale du massif discrétisé en sous couche et la numérotation des interfaces correspondantes. Cette discrétisation n'englobe pas le substratum situé à la profondeur  $H$ , et considéré rigide. A ce niveau (interface  $N + 1$ ) la réflexion des ondes est supposée totale et les déplacements sont nuls.

A l'intérieur d'une sous-couche donnée, le déplacement est supposé une fonction linéaire des déplacements aux interfaces supérieures et inférieures. Ceci étant vrai si la hauteur de la sous-couche est faible par rapport à la longueur d'onde en considération.



a . Discrétisation de la couche j en plusieurs sous-couches



b. Profil d'un sol multicouche limité par un substratum

**Figure.3.4** Discrétisation verticale

Cette méthode est par essence comparable à celle des éléments finis, dans le sens où les déplacements à l'intérieur de chaque sous-couche (élément) sont totalement définis à partir des déplacements au milieu des interfaces (nœuds).

L'interaction entre les éléments (sous-couche) se fait uniquement par l'intermédiaire des nœuds. L'équilibre global dans le massif s'entend en terme d'éléments finis, c'est-à-dire au sens d'équilibre nodal.

Les degrés de liberté du massif se réduisent aux degrés de liberté des nœuds. La matrice de rigidité du massif s'obtient de façon similaire à celles déterminées dans le calcul des structures par éléments finis.

Par analogie, nous utilisons le terme « élément » pour désigner la sous-couche et le terme « nœud » pour désigner l'interface.

Ainsi, les déplacements peuvent être représentés par une interpolation linéaire en fonction des déplacements nodaux aux interfaces de la sous-couche.

Dans une sous-couche donnée  $j$ , on peut écrire les égalités suivantes :

Le vecteur déplacement (modal) à l'intérieur d'une sous-couche est noté  $U_j$ . Les déplacements sur les interfaces  $j$  et  $j+1$  seront :

$$U_j^b = U_j(z_j)$$

$$U_{j+1}^b = U_j(z_{j+1})$$

Dans l'hypothèse d'une variation linéaire de  $U_j$ , nous avons :

$$U_j = N_j U_j^b + N_{j+1} U_{j+1}^b \tag{3.52}$$

où

$$N_j = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\eta \end{bmatrix}, \quad N_{j+1} = \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

avec :

$$\eta = \frac{z - z_{nj}}{h_j}, \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels aux différents déplacements dans chaque couche, la matrice de rigidité pour chaque sous-couche peut être obtenue.

La matrice de rigidité élémentaire (une sous-couche  $j$ ) du massif (V) a été donnée par Kausel et Peek sous la forme suivante :

$$K_j = k^2 A_j + kB_j + G_j - \omega^2 M_j \quad (3.53)$$

où

les matrices caractéristiques de la sous-couche  $A_j, B_j, G_j$  et  $M_j$  sont :

$$A_j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda + 2G) & 0 & 0 & \lambda + 2G & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 2G & 0 & 0 & G \\ \lambda + 2G & 0 & 0 & 2(\lambda + 2G) & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}$$

$$a \quad B_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda - G & 0 & 0 & -(\lambda + G) & 0 \\ \lambda - G & 0 & 0 & \lambda + G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + G & 0 & 0 & -(\lambda - G) & 0 \\ -(\lambda + G) & 0 & 0 & -(\lambda - G) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec

$$[C_j] = [G_j] - \omega^2 [M_j]$$

où

$$G_j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & -G & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2G & 0 & 0 & -(\lambda + 2G) & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & -G \\ -G & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2G) & 0 & 0 & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & -G & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

et

$$M_j = \frac{\rho h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité globale du massif (sol) est obtenue par le principe d'assemblage des matrices de rigidités de chaque sous-couche similaire à celui de la méthode des Eléments finis:

$$\bar{K} = [K_j] \quad (3.54)$$

L'aspect de cette matrice résulte des deux remarques suivantes :

- 1- A une interface donnée, le déplacement  $U_j$  n'est influencé que par  $U_{j-1}$  et  $U_{j+1}$ .
- 2- La continuité des déplacement au niveau des interfaces font qu'une partie de la matrice de rigidité  $K_j$  chevauche avec celle de  $K_{j+1}$

L'équilibre global du massif (sol) est obtenu en imposant l'équilibre à chaque élément (sous-couche), ce qui donne l'expression suivante :

$$\bar{K}\Phi = 0 \quad (3.55)$$

où

$\bar{K}$  : est la matrice de rigidité globale de dimension  $(3N \times 3N)$ ,

$N$  : est le nombre de sous-couche et :

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\} : \text{est le vecteur modal de dimension } (6N \times 1)$$

La relation (3.55) représente un problème aux valeurs propres quadratique et algébrique en  $k$ . Ceci résulte directement de l'aspect algébrique des sous matrices  $K_j$ .

Pour chaque pulsation d'excitation  $\omega$ , il existe  $6N$  ( $N$  : nombre de sous-couche) valeurs propres  $k_j$ . A chaque valeur propre correspond un mode propre  $\phi_j$ .

Le déplacement harmonique résultant s'obtient par combinaison linéaire de ces vecteurs propres.

Du fait que la matrice de rigidité est complexe (milieu amortissant), les vecteurs propres seront complexes. Cette matrice est indépendante de  $\mu$  (harmonique ou ordre de développement des forces en série de Fourier en fonction de  $\theta$ ). Elle est analogue à celle obtenue par Waas [188] pour le cas des déformations planes. Il résulte donc que pour une même valeur propre  $k_j$ , les vecteurs propres pour le cas des déformation planes et le cas de vibration non axisymétrique sont strictement les mêmes. La différence entre les deux cas précités est dans les coefficients de la combinaison linéaire. Pour le cas non axisymétrique, ces coefficients sont les fonctions de Bessel (ou hankel). Ceci étant la conséquence de l'hypothèse de l'isotropie des couches autour de l'axe z.

En particulier dans le cas des vibrations non axisymétrique, la matrice de rigidité du massif reste inchangée sur tout plan vertical faisant un angle  $\theta$  avec l'axe x. Par contre les forces et les déplacements sont variables d'un plan vertical à l'autre, et leur expression fait intervenir les transformées de Hankel.

Le tenseur déplacement discret de Green pour un massif (sol), (V) est définis dans le domaine fréquence-transformé de Fourier comme étant la réponse du vecteur déplacement à des charges unités appliquées dans le sens verticale et horizontale en chaque interface du massif d'où la relation d'équilibre suivante :

$$K\tilde{U} = \tilde{P} \quad (3.56)$$

où

$\tilde{P}$  : est le vecteur contenant les forces (modales) imposées sur les interfaces du massif.

$\tilde{U}$  : est le vecteur contenant les déplacements (modales) résultants.

Pour  $\tilde{P} = 1$ , nous obtenons les fonctions de Green :

$$\tilde{U} = K^{-1}\tilde{P} \quad (3.57)$$

En pratique, l'inversion de  $K$  est effectuée par décomposition spectrale en cherchant les solutions du problème aux valeurs propres :

$$K\Phi = 0 \quad (3.58)$$

Les valeurs propres étant le nombre d'onde  $k$ .

Comme la matrice de rigidité  $K$  est quadratique en  $k$ , il existe en théorie  $6N$  valeurs propres et le même nombre de vecteurs propres. La moitié de ces valeurs propres  $k_j$  et vecteurs propres  $\Phi_j$  ( $j = 1, 3N$ ) correspondent à des ondes qui se propagent ou ayant une amplitude qui décroît de la source vers l'infini. L'autre moitié correspond à des ondes qui se propagent ou ayant une amplitude qui décroît de l'infini à l'origine.

Cependant, par des considérations physiques, les valeurs propres  $k_j$  sont choisies telles que les ondes résultantes se propagent de la source à l'infini ou ayant une amplitude qui décroît avec la distance à la source. Ceci ramène le nombre des vecteurs propres à  $(3N)$ . Ces dernières sont choisies comme suit :

- si  $k_j$  est complexe, nous choisissons les  $k_j$  dont la partie réelle est négative.
- si  $k_j$  est réel, nous choisissons les  $k_j$  positifs.

La matrice de rigidité étant indépendante du cas de charge appliqué, les vecteurs et valeurs propres de cette matrice le seront également. En d'autres termes, pour différents cas de charges, les valeurs et vecteurs propres ne sont calculés qu'une seule fois.

Les détails mathématiques de l'inversion de la matrice de rigidité ne représentent aucune importance en soi. Ces détails sont donnés dans [90] et [33] et ne sont pas repris ici.

Nous nous limitons dans notre présentation qu'aux résultats obtenus.

Si nous ordonnons les déplacements et (les forces) par degré de liberté et non par interface comme c'était le cas jusqu'à présent, c'est-à-dire en groupant d'abord les déplacements horizontaux ( $U_x$  ou  $U_\rho$ ) puis les déplacements verticaux ( $U_z$ ) et enfin les déplacements antiplanaires ( $U_y$  ou  $U_\theta$ ) nous aurons :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_x \\ \tilde{U}_z \\ \tilde{U}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{xx} & F_{zx} & 0 \\ F_{xz} & F_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & F_{yy} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \tilde{P}_x \\ \tilde{P}_z \\ \tilde{P}_y \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

où  $\tilde{U}_i$  ( $\tilde{P}_i$ ) sont les vecteurs contenant tous les déplacements (forces) suivant la direction  $i$  ( $i=x,y,z$ ) pour tout le massif.

La relation (3.59) met en évidence le découplage entre les déplacements  $U_x, U_z$  et le déplacement  $U_y$ . Ceci résulte directement du fait que la matrice  $K$  est strictement la même que ce soit pour le cas d'un milieu à déformation plane, ou pour le milieu axisymétrique à vibration non axi-symétrique.

Par analogie avec les ondes de Rayleigh et de Love nous utilisons le terme « ondes de Rayleigh :R » pour référer aux déplacements  $U_x, U_z$  et le terme « onde de Love :L » pour désigner les déplacements  $U_y$ .

A noter que le découplage entre les deux types d'ondes n'a lieu que sur le plan vertical ( $\theta = 0$ ). Les termes  $F_{ij}$  résultant de l'inversion de la matrice de rigidité (3.41) sont uniquement fonction des valeurs propres  $k_l$  (nombre d'ondes) et des vecteurs  $\Phi^l$  correspondants. Ceux-ci représentent en fait les fonctions de Green (ou terme de flexibilité pour des charges unités) et sont donnés par :

$$F_{xx} = \{f_{xx}^{mn}\}$$

$$F_{zz} = \{f_{zz}^{mn}\}$$

$$F_{yy} = \{f_{yy}^{mn}\}$$

$$F_{xz} = \{f_{xz}^{mn}\}$$

$$F_{zx} = F_{xz}^t$$

où

les fonctions  $f_{ij}^{mn}$  sont données [90] par :

$$\begin{aligned}
 f_{xx}^{mn} &= \sum_{l=1}^{2N} \Phi_x^{ml} \Phi_x^{nl} a_l^R \\
 f_{xz}^{mn} &= \sum_{l=1}^{2N} \Phi_x^{ml} \Phi_z^{nl} b_l^R = \sum_{l=1}^{2N} \Phi_x^{ml} \Phi_z^{nl} c_l^R \\
 f_{zx}^{mn} &= \sum_{l=1}^{2N} \Phi_z^{ml} \Phi_x^{nl} b_l^R = \sum_{l=1}^{2N} \Phi_z^{ml} \Phi_x^{nl} c_l^R \\
 f_{zz}^{mn} &= \sum_{l=1}^{2N} \Phi_z^{ml} \Phi_z^{nl} a_l^R \\
 f_{yy}^{mn} &= \sum_{l=1}^{2N} \Phi_y^{ml} \Phi_y^{nl} a_l^L
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

avec :

$$a_l = \frac{1}{k^2 - k_l^2}$$

$$b_l = \frac{k}{k_l(k^2 - k_l^2)}$$

$$c_l = \frac{k_l}{l(k^2 - k_l^2)}$$

Dans ces dernières expressions, l'indice  $m$  réfère à l'élévation (interface) ou la charge est appliquée et l'indice  $n$  à l'élévation ou les fonctions de green sont calculées :

$$\begin{aligned} m &= 1, N \\ n &= 1, N \end{aligned} \quad (N : \text{nombre de sous-couche})$$

L'indice  $l$  réfère aux vecteurs et valeurs propres.

Nous avons :

$$l = 1, N \quad (\text{ondes de Love})$$

$$l = 1, 2N \quad (\text{ondes de Rayleigh})$$

Les indices supérieurs  $R$ ,  $L$  dans  $a_l$  et  $b_l$  indiquent que ces coefficients sont calculés en utilisant le nombre d'ondes  $k_l = k_l^R$  (ondes R) ou  $k_l = k_l^L$  (ondes L).

L'avantage de la technique d'obtention de la matrice de rigidité par Kausel et Peeck [90] par rapport à la technique classique des matrices de transferts pour couches finis de Haskell 1953 [68] et Thomson 1950 [170] et celle de Kausel et Roesset [89] est que les fonctions transcendantales de la matrice de rigidité des couches sont linéarisées.

L'obtention des fonctions de Green par la méthode proposée va nous permettre par la suite de former la matrice de déplacements (flexibilité) du sol discrétisé. Ce qui sera le but du prochain chapitre.

### **3.12 Conclusion**

Dans ce chapitre, l'étude de la propagation d'onde dans un milieu élastique à couches horizontales est brièvement récapitulée. Le théorème de réciprocité dynamique est employé pour dériver une relation entre les variables de champ dans un état fondamental connu et un état inconnu plus complexe. La solution fondamentale connue de la réponse du sol est la fonction de Green du semi espace multicouche. Dans le prochain chapitre, ces équations intégrales frontières sont employés pour dériver une méthode d'éléments frontières pour le calcul de l'impédance du sol.

Dans le chapitre suivant, on va présenter la formulation de la matrice de flexibilité d'un massif (sol) à couches horizontales limité par un substratum rigide que nous avons utilisés dans cette étude. Le programme FONDVIB développé par Boumekik à l'université libre de Bruxelles en (1985) [33] a été utilisé pour déterminer les fonctions de Green 3-D et par la suite la matrice de flexibilité du semi-espace du sol. Cette méthode est basée sur une solution exacte des équations d'onde dans le domaine fréquence nombre d'onde où seulement les fonctions de Green axisymétriques sont nécessaires pour la réalisation d'une transformation à un système de coordonnées cylindriques. La relation entre la double transformée de Fourier dans un système de coordonnées cartésiennes et la transformée de Hankel d'ordre zéro ou d'ordre un dans un système à coordonnées cylindriques permet de dériver la solution transformée dans un système à coordonnées cartésiennes. Par la suite un modèle mathématique sera présenter pour nous permettre de calculer la réponse dynamique de deux fondations adjacentes encastrées dans un sol multicouches limités par un substratum rigide. Un programme de calcul a été développé FONVIB2 pour ce but là.

## Chapitre 4

# Modèle de calcul de l'interaction 3-D de deux fondations adjacentes

### 4.1. Introduction et aperçu sur l'état de l'art

Dans le précédent chapitre nous avons montré comment on peut obtenir les fonctions de Green en coordonnées cylindrique et en coordonnées cartésiennes pour un massif de sol arbitraire en utilisant la méthode des couches minces (Thin Layer Method, TLM) de Kausel et Peeck.

La réponse dynamique d'une ou plusieurs fondations à l'action des charges dynamiques harmoniques s'exprime à travers de la matrice impédance (compliance) de chaque fondation ainsi que ceux du couplage entre les fondations.

Dans ce chapitre nous allons procéder à étudier l'interaction dynamique de deux fondations adjacentes encastrées dans un sol multicouches qui se résume à calculer les fonctions impédances (compliances) des deux fondations en faisant varier un certain nombre de paramètres adimensionnelles caractérisant le sol et les deux fondations.

Le problème d'interaction Sol-Structure pour les fondations rigides (flexibles) en surface a été intensivement étudié dans le domaine sismique. Dans le cas des fondations rigides, le calcul des fonctions impédances nécessite la connaissance des tractions à l'interface sol-fondation où les déplacements sont uniformes. La solution de ce problème d'élasto-dynamique satisfait deux conditions aux frontières. La première condition prescrit un déplacement uniforme à l'interface sol-fondation, tandis que la deuxième condition impose que les tractions sont nulles à la surface libre du sol.

L'étude du phénomène d'interaction fondation-sol-fondation a constitué un intérêt particulier pour de nombreux chercheurs pour étudier la réponse d'un certain nombre de structures qui nécessitent des conditions de sécurité très rigoureuses tels que les réacteurs des centrales nucléaires, les turbo-alternateurs des centrales électriques, des machines vibrantes dans une minoterie, ...etc.

## **4.2. Solution du problème**

Dans ce travail, la solution est formulée par la méthode d'équations intégrales de frontières (MEF) dans le domaine fréquentielle avec des éléments constants quadrilatères. Seulement l'interface sol-fondation et une surface libre entre les fondations adjacentes sont discrétisées. Dans le milieu discrétisé, les fonctions de Green (déplacement de l'élément  $i$  dû à la force harmonique d'unité appliquée sur l'élément  $j$ ) sont calculées en utilisant la méthode de (Kausel et Peeck, 1982) basée sur la méthode de couches minces (TLM). En utilisant cette approche, on a pu établir un modèle mathématique nous permettant de déterminer les fonctions impédances (compliances) de deux fondations adjacentes à partir des considérations d'interaction Sol-Structure.

A cet effet, le volume du sol qui sera occupé par les deux fondations est discrétisé de façon approprié dans le sens horizontal et vertical. Si la matrice de flexibilité (déplacement) du volume du sol considéré est connue, la matrice impédance de chaque fondation ainsi que ceux du couplage s'obtiennent directement à partir des caractéristiques géométriques du modèle discrétisé et des caractéristiques physiques de chaque fondation (degrés de liberté). Cependant la détermination de la matrice de flexibilité nécessite à priori la connaissance des fonctions de Green  $u$ ,  $v$ ,  $w$  au centre de tout élément dues à des charges réparties sur un élément donné. Nous rappelons que ces fonctions ont été calculées dans le précédent chapitre qui représente les termes de la matrice de flexibilité (déplacement) du sol. La détermination de cette matrice permet à son tour l'obtention des fonctions impédances (compliances) de chaque fondation ainsi que ceux du couplage.

### **4.2. 1. Matrice de flexibilité du sol**

Les caractéristiques géométriques du modèle utilisé et la notation adoptée pour la détermination de la matrice de flexibilité du volume du sol considéré ont été présentées

précédemment. Cette matrice sera déterminée pour trois cas de charges réparties :

- Charge horizontale unitaire suivant l'axe des x  $q_x= 1$
- Charge horizontale unitaire suivant l'axe des y  $q_y= 1$
- Charge verticale unitaire suivant l'axe des z  $q_z= 1$

Ceci nécessite la connaissance des fonctions de green en coordonnées cartésiennes en un nœud  $(\alpha, m)$  dû à une charge  $q_j$  ( $j = x,y,z$ ) répartie sur un élément (disque) de rayon R et dont le centre est représenté par le nœud  $(\beta, n)$ . Les termes de flexibilité au nœud  $(\alpha, m)$  seront :

$$f = \{g_x \quad g_y \quad g_z\} \tag{4.1}$$

Où  $f$  représente une sous-matrice de dimension (3x3) obtenue en appliquant simultanément les trois charges considérées. La sous-matrice  $f$  constitue l'élément de base pour la formation de la matrice de flexibilité (déplacement).

Le déplacement suivant une direction donnée résultant de l'application simultanée des trois charges considérées, est la superposition de tous les déplacements suivant une direction  $i$  (x,y,z) sur chaque élément. On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} d_x &= \sum_i u_i t_i \\ d_y &= \sum_i v_i t_i \\ d_z &= \sum_i w_i t_i \end{aligned} \quad (i = x, y, z) \tag{4.2}$$

où sous forme matricielle on a :

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

Comme :

$$g_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}$$

La relation (4.3) devient :

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = [g_x \quad g_y \quad g_z]^* \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Ou sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = [f]^* \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

où

la matrice  $[f]$  de dimension (3x3) ainsi obtenue est une sous-matrice complexe qui représente les termes de flexibilité en un nœud donné dû à des charges placées en un autre nœud.

Par (3.6), (3.10) et (3.14) dans (4.5), on obtient :

$$[f(\rho, \theta, z)] = [L(\theta)] \cdot \{S(\rho, z)\} \quad (4.6)$$

avec

$$[L] = \begin{bmatrix} L_x & 0 \\ L_y & 0 \\ 0 & L_x \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Qui représente la variation angulaire des termes de flexibilité. Pour cette raison, cette matrice est appelée « fonction angulaire de flexibilité ».

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_z \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Qui représente la variation des termes de flexibilité dans la direction radiale ( $\theta = \text{cste}$ ) pour un plan donné ( $z = \text{cste}$ ). Pour cette raison, cette matrice est appelée « fonction radiale de flexibilité ».

où

$L_x, L_y, L_z$  sont donnés par (3.8), (3.11), (3.13) et  $Q_x, Q_z$  par (3.9) et (3.14).

En utilisant les équations (4.7) et (4.8), la sous-matrice de flexibilité peut se mettre sous une forme explicite pour un nœud quelconque ( $\alpha, m$ ) dû à des charges appliquées sur un nœud quelconque ( $\beta, n$ ):

$$[f]_{\alpha\beta}^{mn} = \begin{bmatrix} c^2 Q_{\rho x} + s^2 Q_{\theta x} & cs Q_{\rho x} - cs Q_{\theta x} & c Q_{\rho x} \\ cs Q_{\rho x} - cs Q_{\theta x} & s^2 Q_{\rho x} + c^2 Q_{\theta x} & s Q_{\rho z} \\ c Q_{zx} & s Q_{zx} & Q_{zz} \end{bmatrix}_{\alpha\beta}^{mn} \quad (4.9)$$

où

$Q_{ij}$  : représente les fonctions de Green modales et

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

$\alpha$  : représente le nœud où les fonctions de Green sont calculées

$\beta$  : représente le nœud où les charges sont appliquées

$m$  : représente le niveau du plan où se trouve le nœud  $\alpha$ .

$n$  : représente le niveau du plan où se trouve la charge  $q_j$

En tenant compte du théorème de réciprocité et de l'orientation des axes, on peut écrire que :

$$Q_{\rho z} = -Q_{zx} \quad (4.10)$$

De là, la relation (4.9) peut se mettre sous une forme plus simple :

$$[f]_{\alpha\beta}^{mn} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & -f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & -f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix}_{\alpha\beta}^{mn} \quad (4.11)$$

Les termes de flexibilité au nœud où les charges sont appliquées s'obtiennent pour  $m = n$ .

La sous-matrice  $[f]$  constitue l'élément de base pour la formation de la matrice de flexibilité du sol.

Pour déterminer la matrice de flexibilité du sol  $[F_s]$ , il suffit d'appliquer successivement les charges sur tous les nœuds et à calculer pour chaque application de charge les termes de flexibilité résultant en chaque nœud.

Cette démarche qui semble assez simple mais en réalité trop coûteuse en temps de calcul car elle recalcule les vecteurs et les valeurs propres  $N_h$  fois.

Pour pallier cette difficulté, une seconde méthode plus économique consiste à appliquer les charges sur les nœuds d'une verticale donnée par exemple (1,n) avec ( $n = 1, N_z$ ) et à calculer les termes de flexibilités dans tous les nœuds. Lorsque les charges sont appliquées sur les nœuds restants, les flexibilités ne sont pas calculés proprement dit, mais obtenues par combinaison appropriée des flexibilités obtenues dans le premier cas. Les vecteurs et les valeurs propres du problème ne sont calculés donc qu'une seule fois. Ce qui se traduit par une importante économie sur le temps de calcul par ordinateur.

Cette dernière méthode sera utilisée au cours de cette étude pour déterminer la matrice de flexibilité du sol de dimension ( $3N_t \times 3N_t$ ) :

$$[F_s] = [f_{\alpha\beta}^{mn}] \quad (4.12)$$

Où

$f$  : est la sous-matrice de flexibilité donnée par (4.9)

$\alpha$  : varie de (1,  $N_h$ )

$\beta$  : varie de (1,  $N_h$ )

$m$  : varie de (1,  $N_z$ )

$n$  : varie de (1,  $N_z$ )

$N_t$  : est le nombre total des nœuds du sol, où  $N_t = N_h \times N_z$

Pour la formation de la matrice  $[F_s]$  deux étapes sont nécessaires :

- Formation de la sous-matrice de base  $[A]^n$
- Formation de la matrice de base  $[A]$
- Combinaison des termes de la matrice  $[A]$  pour obtenir ceux de  $[A]_\alpha$ .

En premier lieu, on détermine la matrice  $[A]^n$  contenant les  $N_t$  sous-matrice  $[f]$  résultante de l'application des charges en un nœud fixe (1, n), notée :

$$[A]^n = [f_\alpha^m]^n \quad (4.13)$$

En appliquant successivement des charges sur les nœuds (1, 1), ..., (1,  $N_z$ ), on obtient une matrice de dimension ( $3N_t \times N_z$ ) notée :

$$[A] = [A]^n = [f_\alpha^{mn}] \quad (4.14)$$

En second lieu, on détermine la matrice  $[A]_\alpha$  lorsque les charges sont appliquées sur un nœud ( $\beta$ , n), on a alors :

$$[A]_\beta = [f_\alpha^{mn}]_\beta \quad (4.15)$$

En dernier lieu, la matrice de flexibilité totale du sol est donnée par la relation :

$$[F_s] = [A_\beta] \quad (\beta = 1, N_z) \quad (4.16)$$

La matrice  $[F_s]$  ainsi obtenue est complexe et symétrique. A titre indicatif les matrices  $[A]$ ,  $[A_\beta]$  et  $[F_s]$  sont générées automatiquement à partir du programme FONVIB et reprisent dans le programme FONVIB2 établie dans le cadre de cette étude.

### **4.2.2. Modèle de calcul**

Le modèle de calcul est représenté sur la figure.4.1. Les deux fondations considérées sont supposées être rigides, sans masse, de forme carrée et placée à la surface d'un sol homogène limité par un substratum. Le sol de hauteur H, est supposé être linéaire viscoélastique caractérisé par sa masse volumique  $\rho$ , son module de cisaillement G, son coefficient d'amortissement  $\beta$  et son coefficient de poisson  $\nu$ . La première fondation est soumise en générale à trois forces externes harmoniques  $P_x, P_y, P_z$  et à trois moments harmoniques  $M_x, M_y, M_z$ . On suppose que la dépendance de l'excitation du temps est du type  $e^{i\omega t}$  dans lequel  $\omega$  représente la fréquence angulaire. Pour la brièveté, ce facteur sera omis dans la suite. Le but étant d'obtenir les déplacements (fonctions compliances) de deux fondations adjacentes dont seulement une seule fondation est chargée. Le cas de deux fondations chargées sera aussi traité dans cette étude en déterminant les fonctions impédances.

### **4.2.3. Réponse du modèle**

La matrice déplacement totale du sol est obtenue par application successive des charges unités réparties sur les éléments constituant le massif du sol discrétisé Figures.4.2 et Figure.4.3.

Cette matrice englobe les termes de flexibilités du sol qui sera occupé par la fondation (milieu1) et celui de la seconde fondation (milieu 2) et ceux des termes de couplages entre les deux milieux peut être décomposée comme suit :

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Où

$\mathbf{F}_1$  : ( $3N_1 \times 3N_1$ ) est la matrice de flexibilité du milieu (1).

$\mathbf{F}_2$  : ( $3N_2 \times 3N_2$ ) est la matrice de flexibilité du milieu (2).

$\mathbf{F}_{12}$  : ( $3N_1 \times 3N_2$ ) est la matrice de flexibilité de couplage du milieu (1) sur le milieu (2).

$\mathbf{F}_{21}$  : ( $3N_2 \times 3N_1$ ) est la matrice de flexibilité de couplage du milieu (2) sur le milieu (1).

$N_1$  et  $N_2$  : sont respectivement le nombre d'éléments qui discrétisent le milieu (1) et le milieu (2).

Les déplacements dans les deux milieux s'expriment alors:

$$\{\mathbf{d}_1\} = [F_1]\{\mathbf{t}_1\} + [F_{12}]\{\mathbf{t}_2\} \quad (4.18)$$

$$\{\mathbf{d}_2\} = [F_2]\{\mathbf{t}_2\} + [F_{21}]\{\mathbf{t}_1\} \quad (4.19)$$

où

$\{\mathbf{t}_1\} = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1k}, \dots, t_{1N_1}\}^t$  : représente le vecteur charge du milieu (1) dans lequel  $\{\mathbf{t}_{1k}\} = \{h, t, n\}_k^t$  est le sous-vecteur charge appliqué sur l'élément k, où h, t et n sont les charges harmoniques réparties suivant les directions respectives x, y et z.

$\{\mathbf{t}_2\} = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2k}, \dots, t_{2N_2}\}^t$  : représente le vecteur déplacement du milieu (2) dans lequel  $\{\mathbf{t}_{2j}\} = \{h, t, n\}_j^t$  est le sous-vecteur charges de l'élément j, où h, t et n sont les charges harmoniques réparties suivant les directions respectives x, y et z.

$\{\mathbf{d}_1\} = \{d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1k}, \dots, d_{1N_1}\}^t$  : représente le vecteur déplacement du milieu (1) dans lequel  $\{\mathbf{d}_{1k}\} = \{u, v, w\}_k^t$  est le sous-vecteur déplacement appliqué à l'élément k.  
 $\{\mathbf{d}_2\} = \{d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2k}, \dots, d_{2N_2}\}^t$  : représente le vecteur déplacement du milieu (2) dans lequel  $\{\mathbf{d}_{2j}\} = \{u, v, w\}_j^t$  est le sous-vecteur déplacement appliqué à l'élément j.

#### **4.2.3.1. Conditions de rigidité et d'équilibre :**

Lorsque les deux fondations sont en place, elles imposent leurs déplacements aux différentes sections qui seront contraints de se déplacer comme un corps rigide. Pour tous les éléments du modèle, on peut écrire les relations suivantes:

$$\{\mathbf{d}_1\} = [R_1]\{\mathbf{D}_1\} \quad (4.20)$$

$$\{\mathbf{d}_2\} = [R_2]\{\mathbf{D}_2\} \quad (4.21)$$

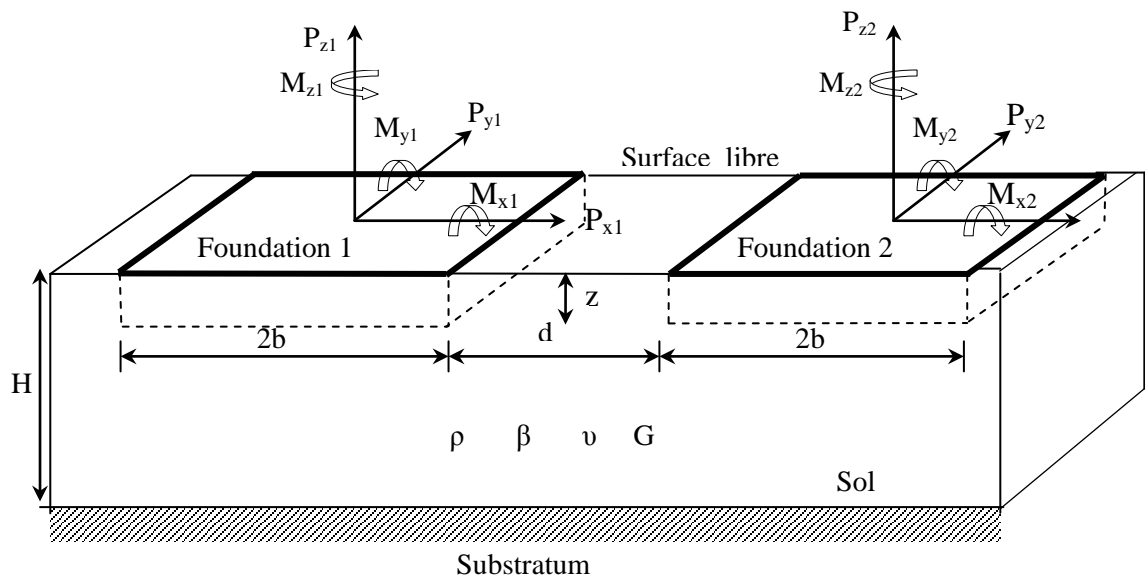


Figure 4.1 Modèle de calcul

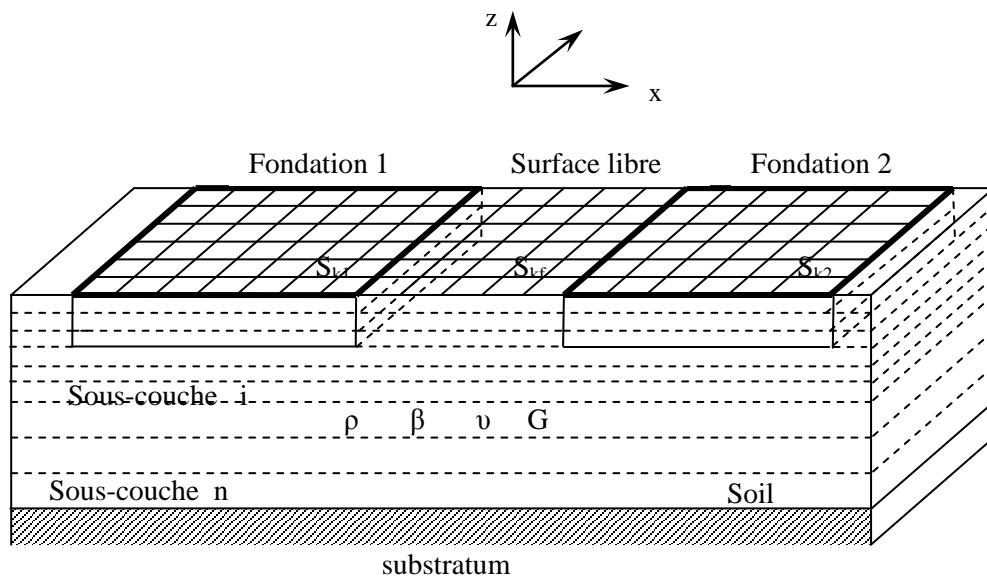


Figure 4.2 Discretisation horizontale et verticale

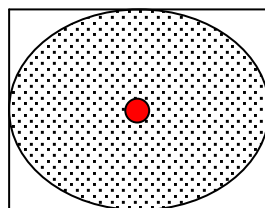


Figure 4.3. Elément constant  $S_{kj}$  ( $j=1,2,f$ )

avec

$\{\mathbf{D}_1\} = \{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}_1^t$  : représente le vecteur déplacement de la première fondation pour les 06 degrés de liberté considérés .

$\{\mathbf{D}_2\} = \{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}_2^t$  : représente le vecteur déplacement de la seconde fondation pour les 06 degrés de liberté considérés.

$[\mathbf{R}_1] = [R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_{N_1}]$  : est une matrice de transformation de dimension  $(3N_1 \times 6)$ , ne dépendant que des caractéristiques géométriques du volume discrétisé du sol de la première fondation , où la sous-matrice est donnée par :

$$[\mathbf{R}_1]_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 \end{bmatrix}_k \quad (4.22)$$

dans laquelle  $x_k$  et  $z_k$  sont les coordonnées de l'élément  $k$  par rapport au centre de la fondation.

$[\mathbf{R}_2] = [R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_{N_2}]$  : est aussi une matrice de transformation de dimension  $(3N_2 \times 6)$ , ne dépendant que des caractéristiques géométriques du volume discrétisé du sol de la seconde fondation , où la sous-matrice  $[\mathbf{R}_2]_j$  est similaire à celle de l'équation (4.22) dans laquelle  $x_j$  et  $z_j$  sont les coordonnées de l'élément  $j$  par rapport au centre de la seconde fondation.

Si on note  $P_{i1}$  et  $M_{i1}$  les composantes du vecteur charge appliqué à la première fondation, l'équilibre entre ces derniers et les forces réparties sur les éléments discrétisant le volume de la fondation s'exprime pour les charges de translation par :

$$\mathbf{P}_{i1} = \sum_{k=1}^{N_1} t_k = \sum_{k=1}^{N_1} \begin{pmatrix} h \\ t \\ n \end{pmatrix}_k \quad (\mathbf{i} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (4.23)$$

et pour l'équilibre de rotation :

$$\mathbf{M}_{i1} = \sum_{k=1}^{N_1} \begin{pmatrix} y \cdot n - z \cdot t \\ z \cdot h - x \cdot n \\ x \cdot t - y \cdot h \end{pmatrix}_k \quad (\mathbf{i} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (4.24)$$

Ces deux dernières expressions peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\{\mathbf{P}_1\} = [\mathbf{R}_1] \cdot \{t_1\} \quad (4.25)$$

De la même façon, on peut écrire la même chose pour la deuxième fondation, on a alors:

$$\mathbf{P}_2 = \sum_{j=1}^{N_2} t_j = \sum_{j=1}^{N_2} \begin{pmatrix} h \\ t \\ n \end{pmatrix}_j \quad (\mathbf{i} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{M}_{i2} = \sum_{j=1}^{N_2} \begin{pmatrix} y \cdot n - z \cdot t \\ z \cdot h - x \cdot n \\ x \cdot t - y \cdot h \end{pmatrix}_j \quad (\mathbf{i} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (4.27)$$

Ces deux dernières expressions peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\{\mathbf{P}_2\} = [\mathbf{R}_2] \cdot \{t_2\} \quad (4.28)$$

#### **4.2.3.2. Déterminations des fonctions impédances (compliances)**

La relation liant le vecteur charge  $\{\mathbf{P}\}$  directement appliqué au centre de gravité de la première fondation aux vecteurs déplacements  $\{D_1\}$  et  $\{D_2\}$  peut être exprimée à partir des relations (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) et (4.25) par:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}_1] \cdot \{D_1\} + [\mathbf{K}_{12}] \cdot \{D_2\} \quad (4.29)$$

La relation liant le vecteur charge  $\{P_2\}$  directement appliqué au centre de gravité de la seconde fondation aux vecteurs déplacements  $\{D_1\}$  et  $\{D_2\}$  peut être exprimée à partir des relations (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) et (4.25) par:

$$\{P_2\} = [K_2] \cdot \{D_2\} + [K_{21}] \cdot \{D_1\} \quad (4.30)$$

où

$$K_{11} = R_1^T \cdot A^{-1} \cdot R_1$$

$$K_{12} = -R_1^T \cdot A^{-1} \cdot F_{12} \cdot F_{22}^{-1} \cdot R_2$$

$$K_{21} = K_{12}^T \quad (4.30a)$$

$$K_{22} = R_2^T \cdot F_{22}^{-1} \cdot M \cdot R_2$$

avec

$$A = F_{11} - F_{12} \cdot F_{22}^{-1} \cdot F_{21} \quad (4.30b)$$

$$M = I + F_{21} \cdot A^{-1} \cdot R_1$$

Les deux dernières équations représentent les fonctions impédances des deux fondations adjacentes et ceux du couplage.

Si la seconde fondation n'est pas chargée ( $P_2=0$ ), les équations (4.29) et (4.30) deviennent :

$$\{P_1\} = [K_1] \cdot \{D_1\} + [K_{12}] \cdot \{D_2\} \quad (4.31)$$

$$\{0\} = [K_2] \cdot \{D_2\} + [K_{21}] \cdot \{D_1\} \quad (4.32)$$

A partir de ce système d'équations, on peut écrire:

$$\{D_1\} = [C_{11}] \cdot \{R\} \quad (4.33)$$

$$\{D_2\} = [C_{12}] \cdot \{R\} \quad (4.34)$$

avec

$$[C_{11}] = \left[ [K_{11}] - [K_{12}] \cdot [K_{22}]^{-1} \cdot [K_{21}] \right]^{-1} \quad (4.35)$$

qui représente les déplacements (rotations) de la fondation chargée si  $P_1=1$ , en d'autres termes elle représente la matrice des fonctions de compliances, et

$$[C_{12}] = -[K_{22}]^{-1} \cdot [K_{21}] \cdot [C_{11}] \quad (4.36)$$

qui représente les déplacements (rotations) de la fondation non chargée due au chargement de la première fondation  $P_1=1$ , en d'autres termes elle représente la matrice des fonctions de compliances de couplage.

où

$[K_{11}]$  : représente la matrice de rigidité de la fondation chargée.

$[K_{22}]$ : représente la matrice de rigidité de la fondation non chargée.

$[K_{12}]$  : représente la matrice de rigidité de couplage de la fondation chargée sur la fondation non chargée.

## Chapitre 5

# Résultats et discussions

### 5.1 Présentation du programme

La réponse dynamique de deux fondations adjacentes placées ou encastrées dans un sol homogène ou hétérogène a été étudiée à partir d'un programme de calcul développé dans cette présente thèse (FONVIB2). Ce programme est constitué de deux parties, l'une existante qui concerne la discrétisation, le calcul des fonctions de Green ainsi que la formation de la matrice de flexibilité du sol (FONVIB : développé à l'université libre de Bruxelles 1985), l'autre partie, développé à l'université de Annaba en collaboration avec le laboratoire de mécanique des sols de l'université de Constantine, qui détermine les fonctions impédances de deux fondations adjacentes encastrés dans un sol limité par un substratum.

#### 5.1.1 Partie existante du programme (FONVIB)

Le programme existant comporte deux grandes parties :

##### **A. Caractéristiques géométriques et dynamiques du modèle**

- Définition des caractéristiques géométriques et dynamiques du sol.
- Calcul des valeurs et vecteurs propres de propagation.
- Calcul des fonctions de Green par la méthode de Kausel-Peek.
- Calcul des fonctions de Green en coordonnées cartésiennes.

## B. Formation de la matrice de flexibilité

- Calcul des sous matrices de flexibilités.
- Formation de la matrice de flexibilité totale.

### 5.1.2 Partie développée dans cette thèse (FONVIB2)

Le programme développé étudie deux cas :

#### A. Les deux fondations sont chargées

- Définitions des caractéristiques géométriques des deux fondations.
- Formations des matrices de transformations  $R_1$  et  $R_2$ .
- Formations des matrices de flexibilités  $F_1, F_2, F_{12}, F_{21}$ .
- Calcul des matrices impédances  $K_1, K_2, K_{12}, K_{21}$ .
- Calcul des fonctions déplacements (compliances)  $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}$

#### B. Seulement une fondation est chargée

- Annulation de la charge  $P_2$
- Calcul des fonctions déplacements  $C_{11}, C_{12}$

Pour des raisons de présentation, la matrice des compliances est présentée sous la forme suivante:

$$C = K^{-1} \quad (5.1)$$

avec

$$K = K_{st} (k + ia_o c) \cdot (1 + 2i\beta) \quad (5.2)$$

où

$K_{st}$ : est la rigidité statique.

$k$ : est le coefficient normalisé de la rigidité.

$c$ : est le coefficient d'amortissement.

$\beta$ : is the hysteretic damping coefficient.

$a_o$ : est la fréquence adimensionnelle définie par  $a_o = \omega b / C_s$ .

$C_s$ : est la vitesse de cisaillement du sol.

$\omega$  : est la fréquence circulaire.

## **5.2 Validation de la méthode**

Les résultats de ce travail seront validés en comparant les résultats obtenus par la présente étude à ceux obtenus par Karabalis et Mohammadi [85] en utilisant une formulation 3-D de la méthodes des éléments frontières.

La comparaison porte sur le cas de deux fondations carrées placées à la surface d'un sol semi-infini viscoélastique et isotrope ayant les caractéristiques suivantes:  $\rho = 1$ ;  $G = 1$ ;  $C_s = 1$ ;  $\nu = 0,333$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $H/b = 16$  (pour approcher un sol semi-infini) avec  $b = 1/2$  est le demi largeur des deux fondations. Seulement la première fondation est chargée avec une force verticale unitaire  $P_z = 1$ , toutefois la deuxième fondation est déchargée.

Le sol est discrétisé horizontalement en 9 éléments constants quadrilatéraux sur l'interface sol-fondation des deux fondations et 9 éléments constants quadrilatéraux sur la surface libres entre les fondations. Pour la discrétisation verticale la profondeur du substratum sera subdivisée en 10 sous-couches Figure.4.2. Les compliances sont calculés à la distance relative  $d/b = 2$  entre les deux fondations en fonction de la fréquence d'excitation adimensionnelle  $a_0$ . Les résultats présentés ainsi sur la figure.5.1 sont pratiquement comparables et les erreurs maximales sont observées seulement dans le cas statique.

Les fonctions de déplacements adimensionnelles des deux fondations sont représentées par la relation suivante :

$$C_v = Gb \cdot K_v^{-1} \quad (5.3)$$

## **5.4. Analyse paramétrique**

Dans cette partie, nous allons présenter une analyse paramétrique afin de montrer la variation des fonctions déplacements (compliances) de deux fondations adjacentes carrées placées ou encastrées dans un sol limité par un substratum sous l'influence d'un certain nombre de paramètres adimensionnels. Dans ce travail on s'intéressera seulement à l'étude des vibrations verticales des deux fondations. Les différents paramètres adimensionnels à étudier sont :

- La fréquence  $a_0 = \omega \cdot b / C_s$
- La hauteur du sol  $h = H_t / b$
- La distance entre les deux fondations  $d = D / b$
- La masse des deux fondations  $M_i = m_i / (\rho \cdot b^3)$
- L'encastrement des deux fondations  $E = z / b$
- Les caractéristiques dynamiques du sol  $\nu, \beta$

De plus, cette étude prendra aussi en compte l'effet de la position du chargement dynamique sur les deux fondations à savoir :

- Une seule fondation est chargée
- Les deux fondations sont chargées

#### **5.4.1 Cas d'une seule fondation chargée**

Dans cette application, la fondation considérée est soumise à une force verticale unitaire  $P_z = 1$  pour différentes fréquences adimensionnelles  $a_0$  (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Le sol est discrétisé en 9 éléments constants quadrilatéraux à l'interface sol-fondation et 9 éléments constants quadrilatéraux sur la surface libre entre les deux fondations. Il se caractérise par  $\rho = 1, G = 1, C_s = 1$ .

#### **A. Influence de la hauteur du sol**

Les fonctions déplacements adimensionnelles verticales  $C_{11} \times Gb$  pour la fondation chargée et les fonctions déplacements verticales adimensionnelles de couplage de la fondation non chargée  $C_{12} \times Gb^2$  ont été étudiées pour différentes hauteurs relative du substratum ( $H/b = 2, 4, 8, \text{semi-infini}$ ) en fonction de la fréquence relative adimensionnelle  $a_0$ . Dans les Figures 5.2 et 5.3 l'effet de la hauteur du sol en fonction de la fréquence  $a_0$  est examiné tandis que les fondations sont sans masse, la distance relative entre les fondations  $d/b = 2$ , le coefficients d'amortissement  $\beta = 0,05$  et le coefficient de poisson  $\nu = 0,333$  restent constant tout le long de cette analyse. La compliance adimensionnelle  $C_{mn}(\omega)$  représente la compliance d'un mode quelconque de la fondation "n" quand la fondation "m" est chargée

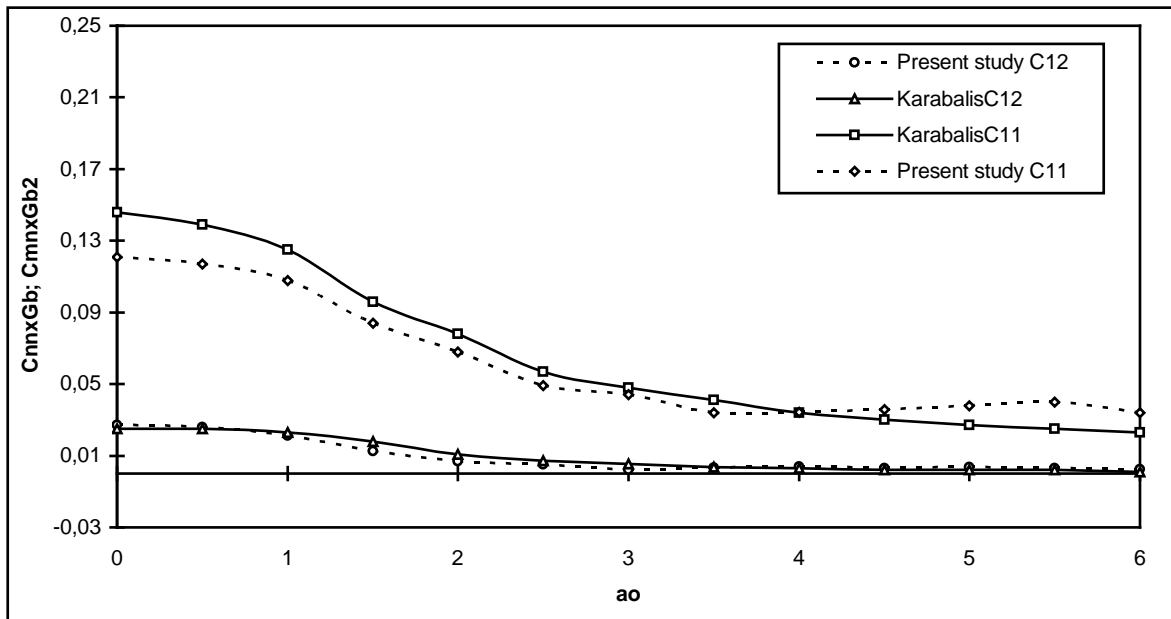
avec un force(moment) quelconque. Tout en changeant la hauteur du substratum en fonction de la fréquence nous avons constaté:

- Augmentation de la réponse statique quand la hauteur du sol augmente.
- La réponse dynamique approche la solution d'un sol semi-infini quand la hauteur du sol augmente.
- Un décalage remarquable dans les fréquences de résonance.
- Une variation des pics de résonance.
- Une variation importante de la magnitude de la réponse au niveau des fréquences de résonance avec des hauteurs de sols plus petite.

Le comportement de la fondation déchargée est semblable à celui décrit ci-dessus pour la fondation chargée, la seule différence étant que l'augmentation des pics de résonances suit l'augmentation de la hauteur du sol.

### **B. Influence de la distance entre les deux fondations**

Les compliances adimensionnelles  $C_{11}.Gb$  pour la fondation chargée et les compliances verticales adimensionnelles de couplage de la fondation non chargée  $C_{12}.Gb^2$  ont été étudiées pour différentes distances relative entre les deux fondations ( $d/b = 2, 4, 6, 8$ ) en fonction de la fréquence relative adimensionnelle  $a_0$  avec une hauteur relative du substratum fixée à  $H/b=8$ , un coefficient d'amortissement  $\beta=0.05$  et un coefficient de poisson  $\nu = 0.333$ . Dans les figures.5.4 et 5.5 on a représenté les compliances verticales. Nous avons constaté qu'une augmentation de la distance relative entre les deux fondations affecte beaucoup plus les compliances de la fondation non chargée que ceux de la fondation chargée. Cela s'explique par le fait que le sol amortie les vibrations émises par la première fondation. A partir de la distance relative  $d/b=8$ , on remarque que l'effet de l'interaction entre les deux fondations disparaît et la réponse de la première fondation s'approche de la réponse du cas d'une seule fondation chargée. Il est à noter que les magnitudes des compliances de la deuxième fondation non chargé sont moins importantes.



**Figure 5.1** Validation de la présente méthode avec celle de Karabalis et al: complianc vertical de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol semi-infini  $C_{11}$  et  $C_{12}$  pour  $d/b = 2$  et  $\beta = 0.05$ .

### C. Influence de la masse des deux fondations

Dans les figures.5.6 et 5.7, l'influence de la variation de la masse adimensionnelle ( $M = 0, 1, 5$ ) des deux fondations en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examiné pour  $d/b=2$ ,  $H/b=2$ ,  $\beta=0.05$  et  $\nu = 0.333$ . Dans le cas où les fondations ont une masse, l'expression de la fonction impédance est donné par :

$$K_v - \omega^2 M = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_v - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & \\ & M_{22} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

En augmentant la masse des deux fondations, on a soulevé quelques remarques :

- Un décalage remarquable dans les fréquences de résonance.
- Une variation des pics de résonance dans les basses fréquences.
- Des magnitudes moins importantes de la deuxième fondation par rapport à la première.

### **D. Influence de l'encastrement des deux fondations**

Dans les figures.5.8 et 5.9, l'influence de la variation de l'encastrement adimensionnelle ( $E = z/b = 0, 1/4, 1/2, 1$ ) des deux fondations en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examiné pour  $d/b=2$ ,  $H/b=2$ ,  $\beta=0.05$  et  $\nu = 0.333$ .

En augmentant l'encastrement des deux fondations, on a soulevé quelques remarques :

- Plus l'encastrement augmente plus les fonctions déplacements de la fondation  $C_{11}$  chargée diminuent. Cela s'explique par le fait que l'encastrement résulte en une augmentation considérable de la surface de contact avec le sol qui participe au mouvement vibratoire. Ce qui rend le phénomène de réflexion des ondes par la fondation plus important d'où l'augmentation de la rigidité dynamique des deux fondations qui se traduit par une atténuation remarquable des fonctions de déplacements (flexibilités dynamiques).
- Pas de décalage des fréquences de résonance.
- Le même phénomène a été constaté pour les fonctions déplacements de la deuxième fondation  $C_{12}$  mais avec des magnitudes beaucoup moins important.

### **E. Influence du coefficient de poisson**

Dans les figures.5.10 et 5.11, l'influence de la variation du coefficient de poisson du sol ( $\nu = 0.1, 0.2, 0.333$ ) en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examiné pour  $d/b = 2$ ,  $H/b = 4$ ,  $z/b = 0$  et  $\beta = 0.05$ .

En augmentant le coefficient de poisson du sol, on a soulevé quelques remarques :

- Plus le coefficient de poisson augmente plus les fonctions déplacements de la fondation  $C_{11}$  chargée diminuent. Cela s'explique par le fait que le coefficient de poisson résulte en une augmentation de la rigidité du sol du fait qu'il devient moins compressible.
- Pas de décalage des fréquences de résonance.
- Le même phénomène a été constaté pour les fonctions déplacements de la deuxième fondation  $C_{12}$  mais avec des magnitudes beaucoup moins important.

## **F. Influence du coefficient d'amortissement**

Dans les figures 5.12 et 5.13, l'influence de la variation du coefficient d'amortissement du sol ( $\beta = 0.01, 0.03, 0.05$ ) en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examinée pour  $d/b = 2, H/b = 4, z/b = 0$  et  $\nu = 0.333$ .

En augmentant le coefficient d'amortissement du sol, on a soulevé quelques remarques :

- Plus le coefficient d'amortissement augmente plus les fonctions déplacements de la fondation  $C_{11}$  chargée diminuent surtout au niveau des fréquences de résonance.
- Pas de décalage des fréquences de résonance.
- Le même phénomène a été constaté pour les fonctions déplacements de la deuxième fondation  $C_{12}$  mais avec des magnitudes beaucoup moins importantes.

### **5.4.2 Cas de deux fondations chargées**

Dans cette application, les deux fondations sont carrées et sollicitées par deux forces harmoniques verticales d'amplitudes  $P_{zi} = 1$  ( $i = 1, 2$ ) pour différentes fréquences adimensionnelles  $a_0 = \omega b / 2C_s$ . Le sol est discrétisé en 9 éléments constants quadrilatères à l'interface fondation-sol-fondation caractérisé par  $\rho = 1, G = 1, C_s = 1$ .

#### **A. Influence de la hauteur du sol**

Les fonctions déplacements adimensionnelles verticales  $C_{11} \times Gb$  pour la première fondation chargée et les fonctions déplacements verticales adimensionnelles de couplage de la fondation  $C_{12} \times Gb^2$  ont été étudiées pour différentes hauteurs relatives du substratum ( $H/b = 2, 4, 8, \text{semi-infini}$ ) en fonction de la fréquence relative adimensionnelle  $a_0$ .

Dans les Figures 5.14 et 5.15 l'effet de la hauteur du sol en fonction de la fréquence  $a_0$  est examiné tandis que les fondations sont sans masse, la distance relative entre les fondations  $d/b = 2$ , les coefficients d'amortissement  $\beta = 0,05$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.333$ .

En variant la hauteur du substratum en fonction de la fréquence nous avons constaté pour  $C_{11}$ :

- Augmentation de la réponse statique quand la hauteur du sol augmente.
- La réponse dynamique approche la solution d'un sol semi-infini quand la hauteur du sol augmente.
- Un décalage remarquable dans les fréquences de résonance.
- Une variation des pics de résonance.
- Une variation importante de la magnitude de la réponse au niveau des fréquences de résonance avec des hauteurs de sols plus petite.

Par contre, en variant la hauteur du substratum en fonction de la fréquence nous avons constaté pour  $C_{12}$  une:

- Diminution de la réponse statique quand la hauteur du sol augmente.
- Atténuation de la réponse avec l'augmentation de la hauteur du sol.
- Disparition des pics de résonance au niveau des basses fréquences.

### **B. Influence de la distance entre les deux fondations**

Les compliances adimensionnelles  $C_{11}.Gb$  pour la première fondation chargée et les compliances verticales adimensionnelles de couplage  $C_{12}.Gb$  ont été étudiées pour différentes distances relative entre les deux fondations ( $d/b = 2, 4, 6, 8$ ) en fonction de la fréquence relative adimensionnelle  $a_0$  avec une hauteur relative du substratum fixée à  $H/b=8$ , un coefficient d'amortissement  $\beta=0.05$  et un coefficient de poisson  $\nu = 0.333$ .

Dans les figures.5.16 et 5.17 on a représenté les compliances verticales.

Nous avons constaté qu'une augmentation de la distance relative entre les deux fondations :

- Augmente légèrement les pics de résonance
- Augmente légèrement la réponse statique de  $C_{11}$  et de  $C_{12}$ .
- Affecte les compliances de couplage  $C_{12}$  surtout pour les distances  $d/b \geq 8$ . Cela s'explique par le fait qu'à partir de cette distance les rigidités dynamiques (impédances) de couplage diminuent à cause de l'augmentation de la masse du sol qui vibre entre les deux fondations (intervention de l'amortissement du sol).

### **C. Influence de la masse des deux fondations**

Dans les figures.5.18 et 5.19, l'influence de la variation de la masse adimensionnelle ( $M = 0,1$ ) des deux fondations en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examiné pour  $d/b=2$ ,  $H/b=2$ ,  $\beta=0.05$  et  $\nu = 0.333$ .

En augmentant la masse des deux fondations, on a soulevé quelques remarques :

- Un décalage remarquable des fréquences de résonance.
- Une variation importante des pics de résonance vers les basses fréquences.
- Aucune variation des compliances de couplages  $C_{12}$ .

### **D. Influence de l'encastrement des deux fondations**

Dans les figures.5.20 et 5.21, l'influence de la variation de l'encastrement adimensionnelle ( $E = z/b = 0, 1/4, 1/2, 1$ ) des deux fondations en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examiné pour  $d/b=2$ ,  $H/b=8$ ,  $\beta=0.05$  et  $\nu = 0.333$ .

En augmentant l'encastrement des deux fondations, on a soulevé quelques remarques :

- Plus l'encastrement augmente plus les fonctions déplacements de la fondation  $C_{11}$  chargée diminuent sauf pour le cas de  $E = 1/4$  où on remarque une légère augmentation. Cela s'explique par le fait que l'encastrement résulte en une augmentation considérable de la surface de contact avec le sol qui participe au mouvement vibratoire. Ce qui rend le phénomène de réflexion des ondes par la fondation plus important d'où l'augmentation de la rigidité dynamique des deux fondations qui se traduit par une atténuation remarquable des fonctions de déplacements (flexibilités dynamiques).
- Une nette atténuation de la réponse a été constatée à partir de la valeur  $E = 1$ .
- Pas de décalage des fréquences de résonance pour  $C_{11}$ .
- Le même phénomène a été constaté pour les fonctions déplacements de la deuxième fondation  $C_{12}$  mais avec des magnitudes légèrement supérieures.

### **E. Influence du coefficient de poisson du sol**

Dans les figures.5.22 et 5.23, l'influence de la variation du coefficient de poisson du

sol ( $\nu = 0.1, 0.2, 0.333$ ) en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examiné pour  $d/b = 2, H/b = 4, z/b = 0$  et  $\beta = 0.05$ .

En augmentant le coefficient de poisson du sol, on a soulevé quelques remarques qui sont semblables à ceux du cas d'une fondation chargée:

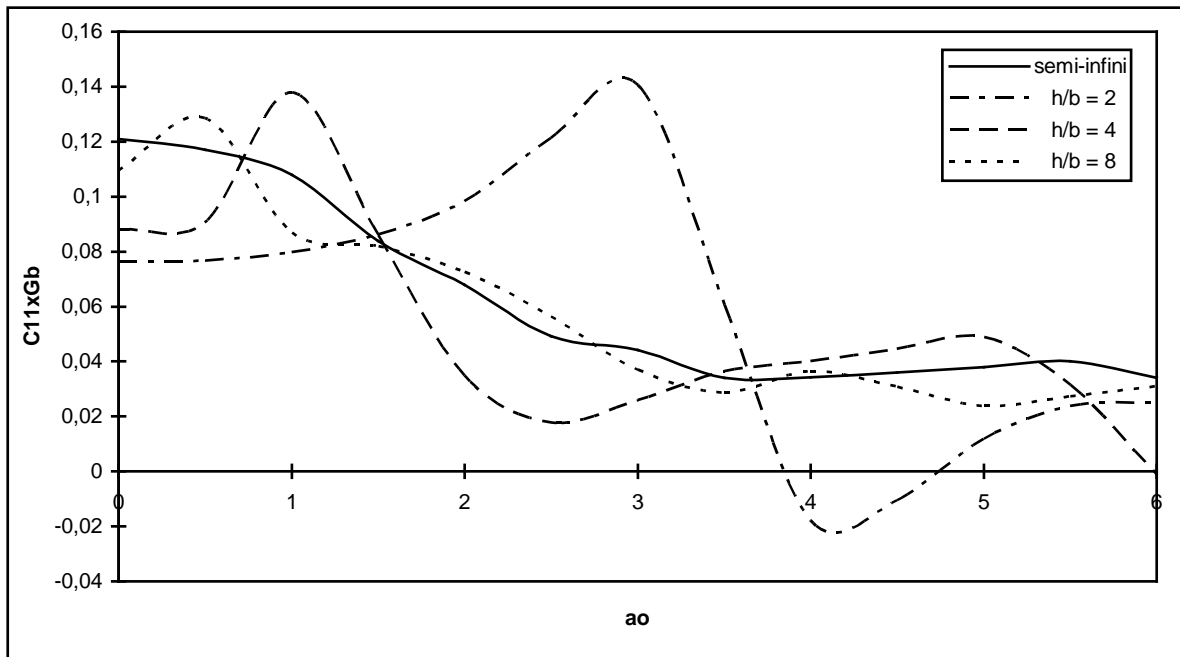
- Plus le coefficient de poisson augmente plus les fonctions déplacements de la fondation  $C_{11}$  chargée diminuent.
- Plus le coefficient de poisson augmente plus les fonctions déplacements de couplage  $C_{12}$  chargée diminuent.
- Pas de décalage des fréquences de résonance pour le cas de  $C_{11}$ .
- Les magnitudes de  $C_{12}$  sont plus importantes que ceux de  $C_{11}$ .

### **F. Influence du coefficient d'amortissement**

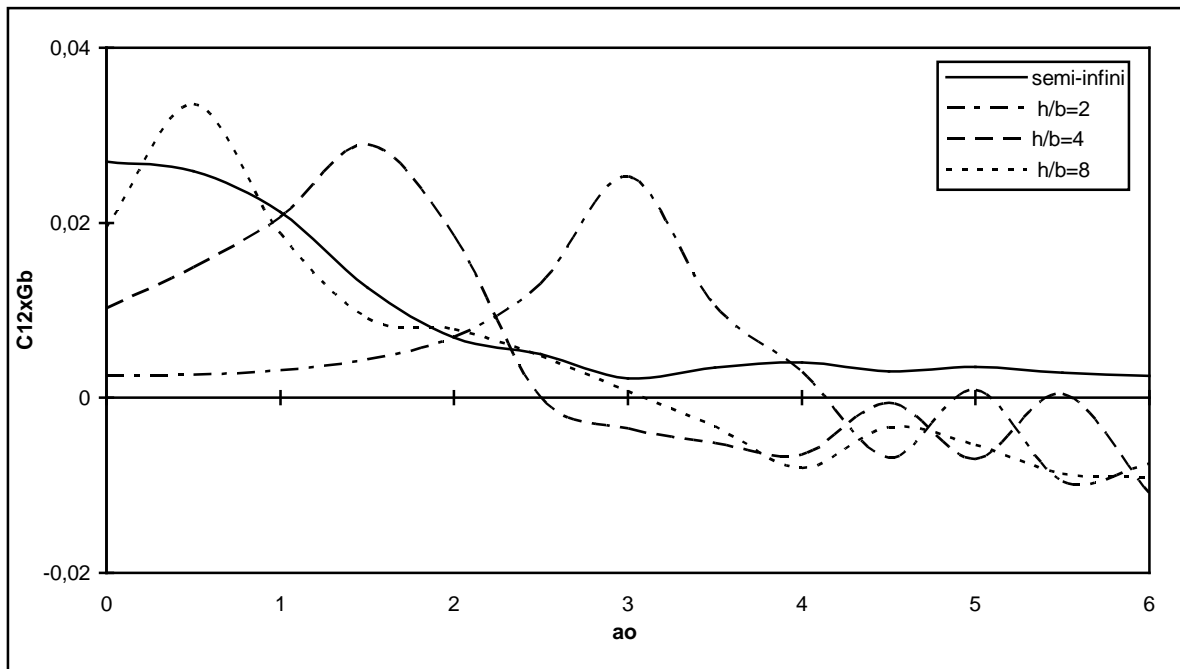
Dans les figures.5.24 et 5.25, l'influence de la variation du coefficient d'amortissement du sol ( $\beta = 0.01, 0.03, 0.05$ ) en fonction de la fréquence adimensionnelle a été examiné pour  $d/b = 2, H/b = 4, z/b = 0$  et  $\nu = 0.333$ .

En augmentant le coefficient d'amortissement du sol, on a soulevé quelques remarques semblables à ceux du cas d'une seule fondation chargée :

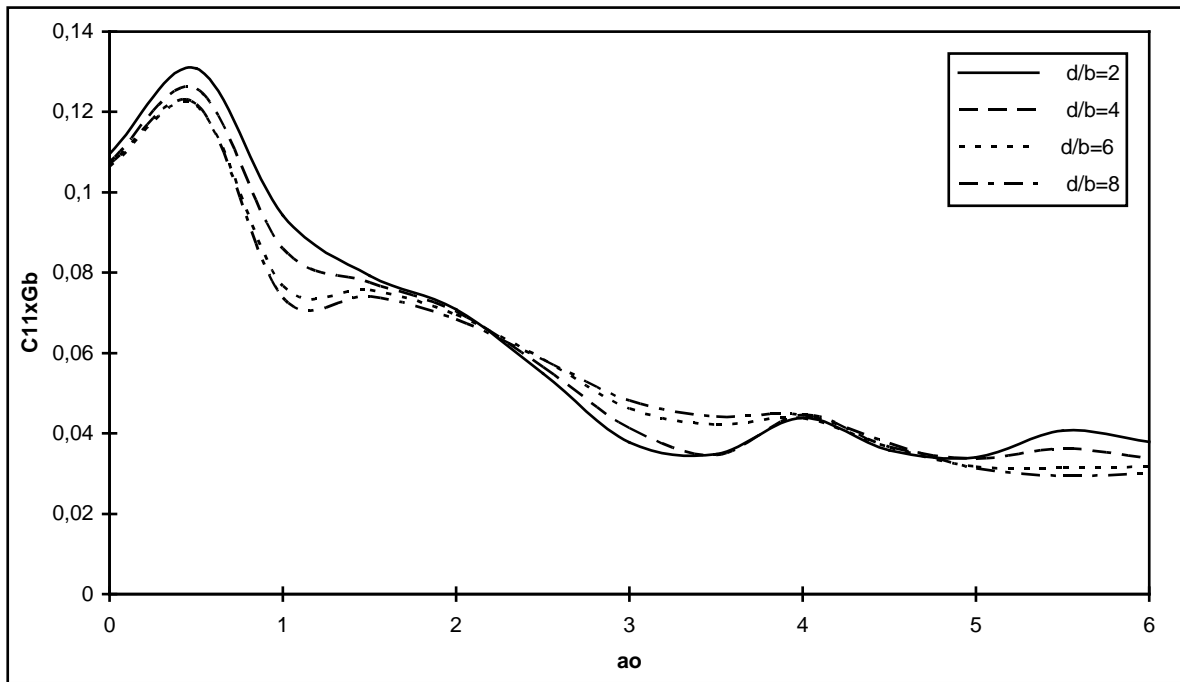
- Plus le coefficient de poisson augmente plus les fonctions déplacements de la fondation  $C_{11}$  chargée diminuent surtout au niveau des fréquences de résonance.
- Plus le coefficient de poisson augmente plus les fonctions déplacements de la fondation  $C_{12}$  chargée diminuent surtout au niveau des fréquences de résonance.
- Pas de décalage des fréquences de résonance pour  $C_{11}$ .
- Les magnitudes de  $C_{12}$  sont plus importantes que ceux de  $C_{11}$ .



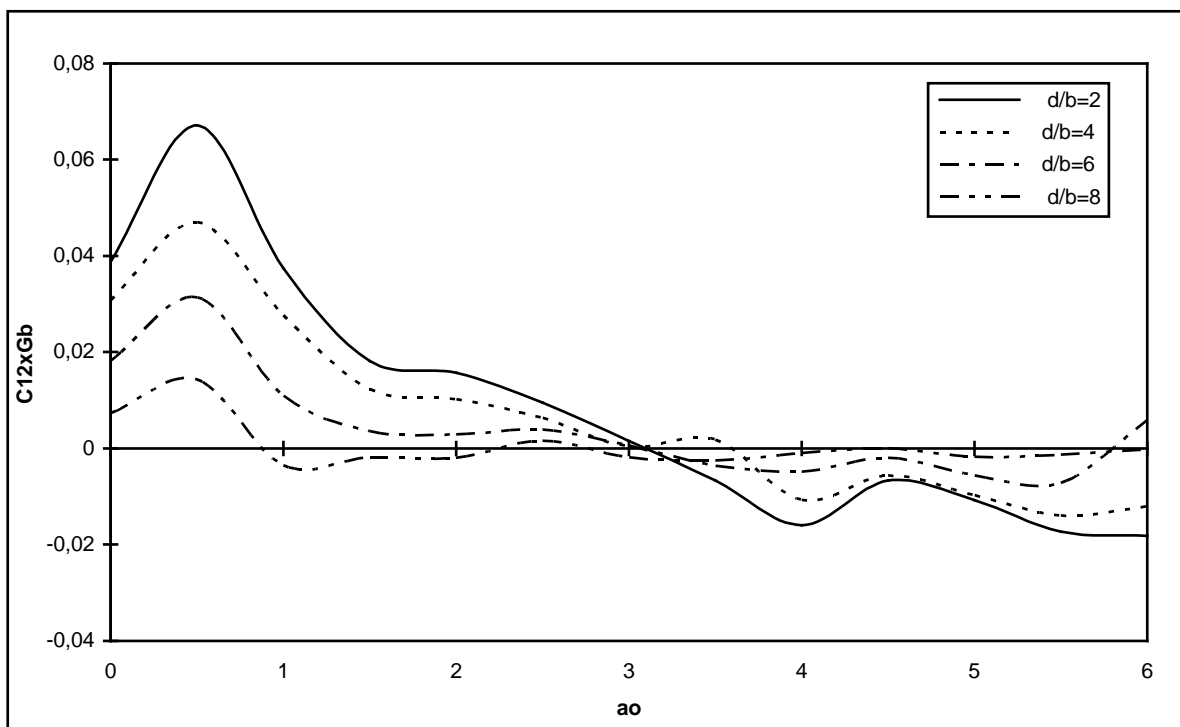
**Figure. 2** Variation de la compliance verticale de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide pour différents cas de hauteur relatives du sol , avec  $d/b = 2$  et  $\beta = 0.05$ .



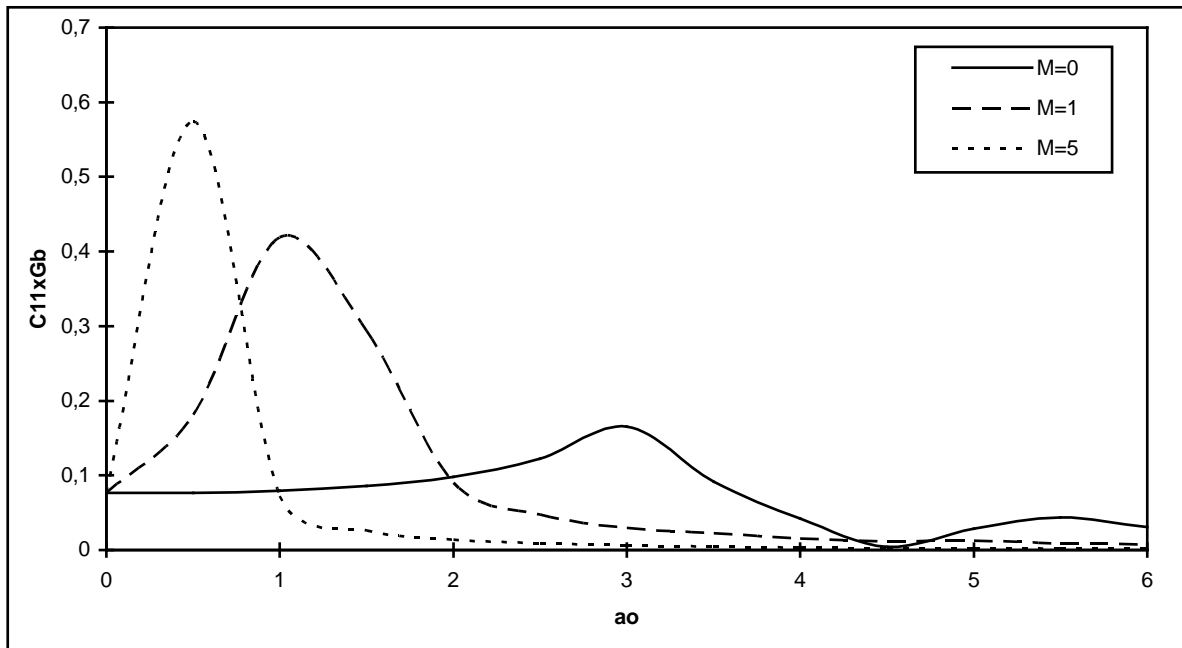
**Figure. 3** Variation de la compliance de couplage verticale de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide pour différents cas de hauteur relatives du sol , avec  $d/b = 2$  et  $\beta = 0.05$ .



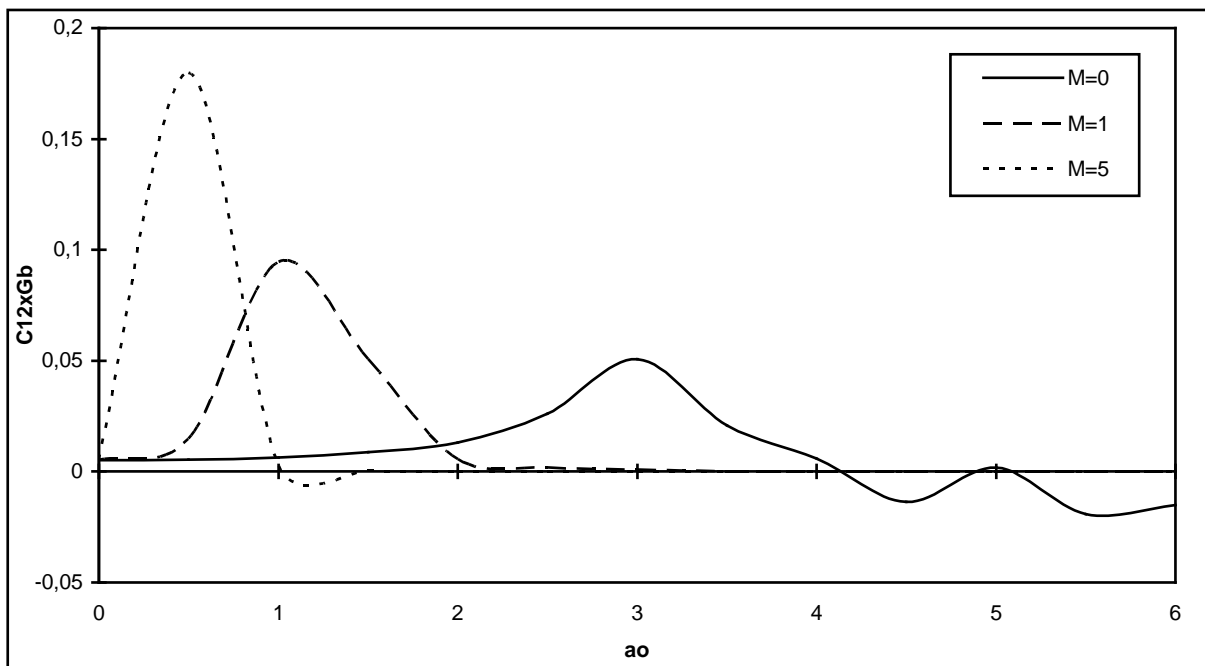
**Figure 4** Variation de la compliance verticale  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide en variant la distance entre les deux fondations avec  $h/b = 8$  et  $\beta = 0.05$ .



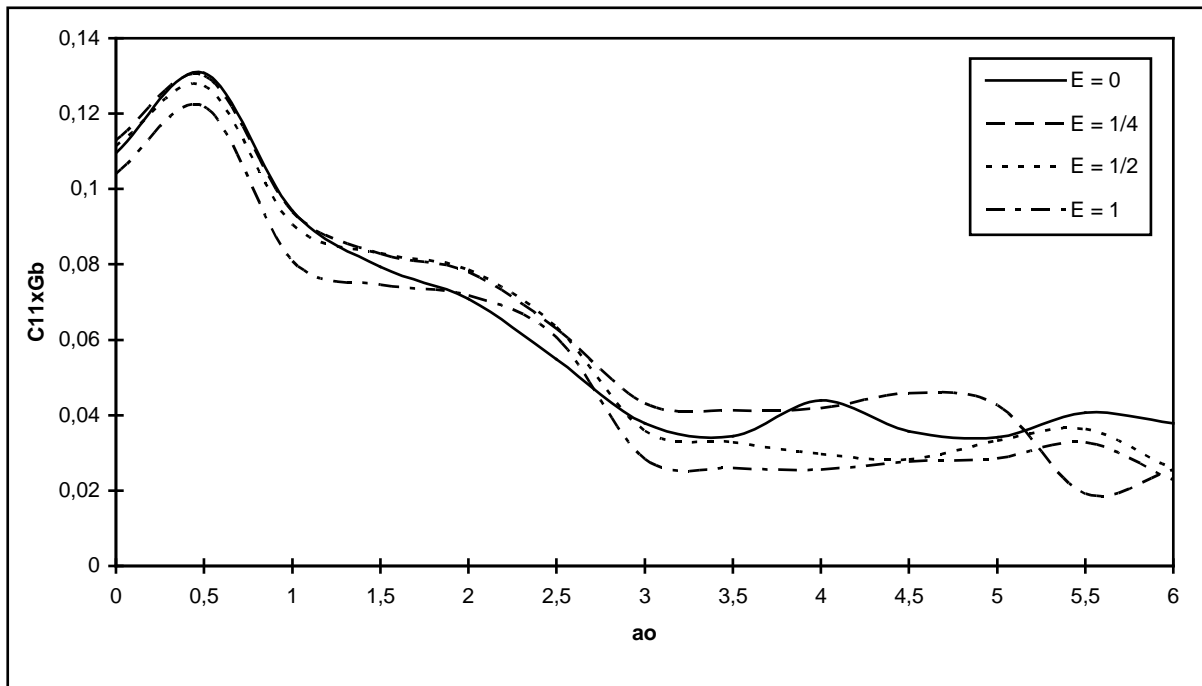
**Figure 5** Variation de la compliance de couplage verticale  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide en variant la distance entre les deux fondations avec  $h/b = 8$  et  $\beta = 0.05$ .



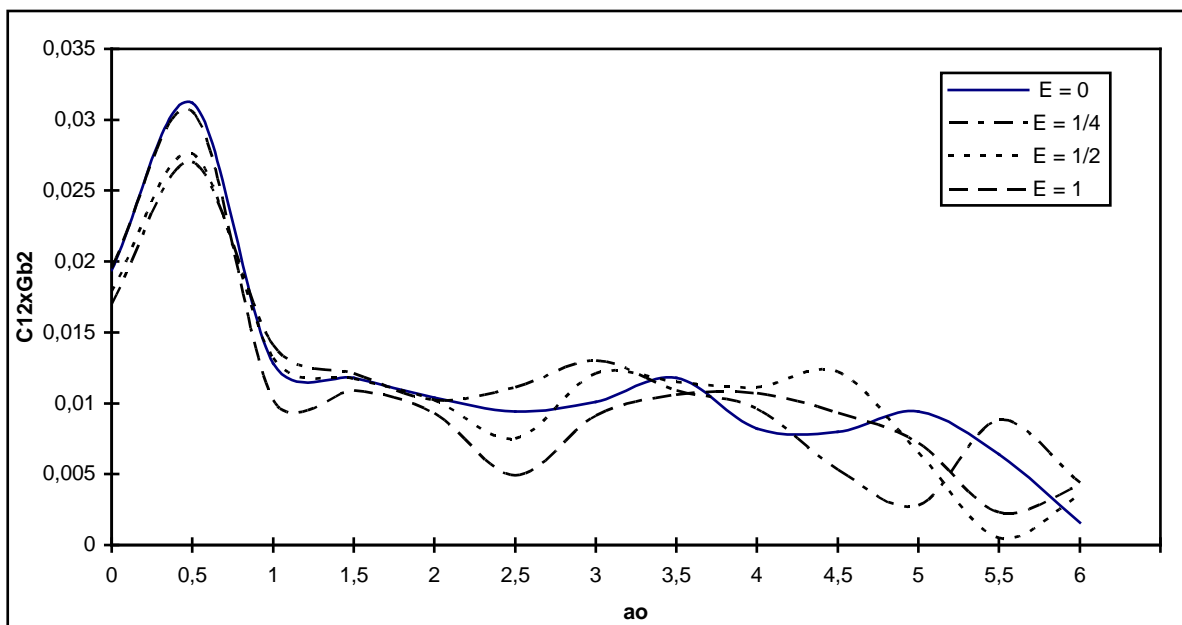
**Figure 6** Variation de la compliance vertical  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide en variant la masse des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=2$  et  $\beta=0.05$ .



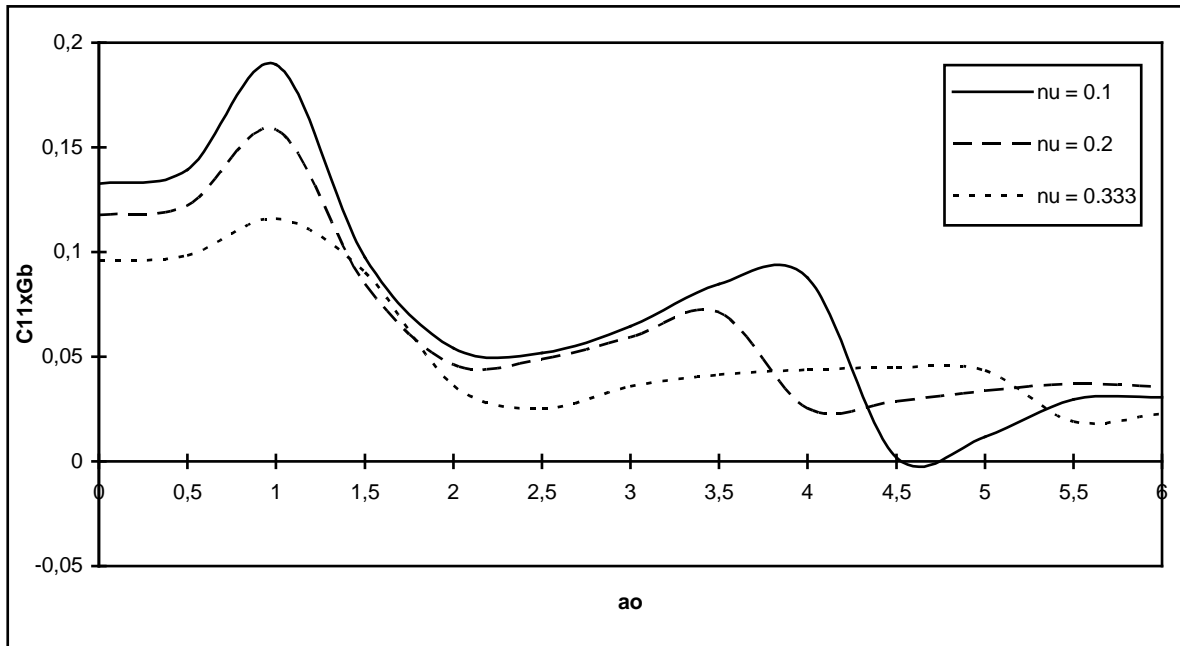
**Figure 7** Variation de la compliance de couplage vertical  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide en variant la masse des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=2$  et  $\beta=0.05$ .



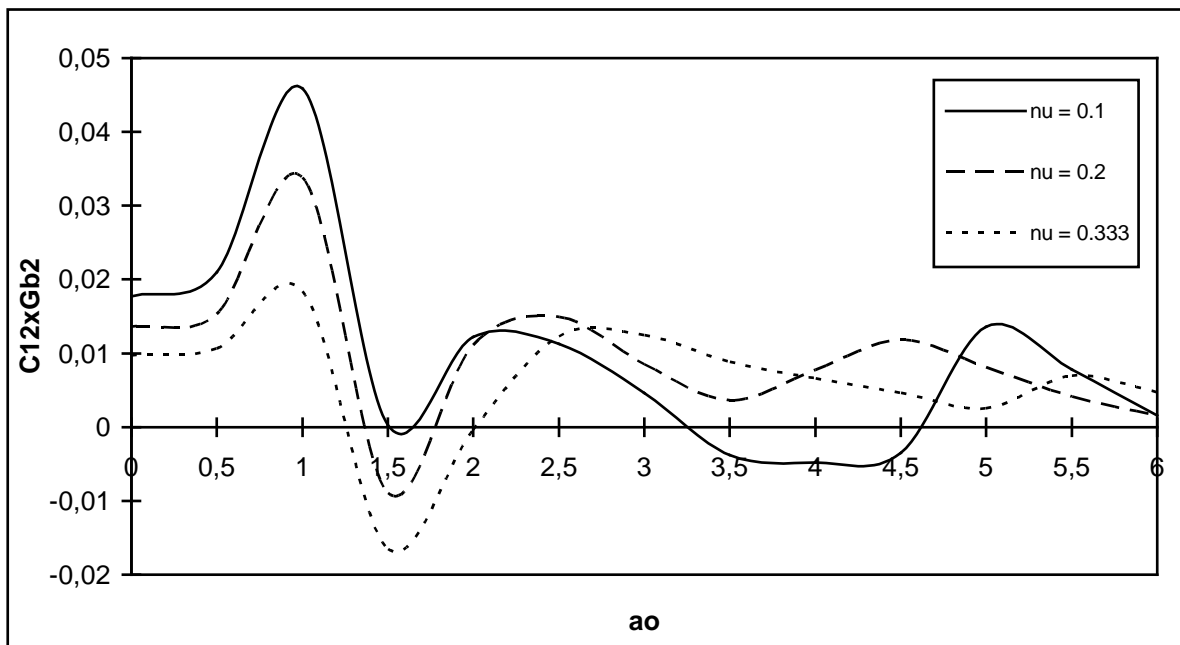
**Figure 8** Variation de la compliance vertical  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes encastrées dans un sol limité par un substratum rigide en variant l'encastrement des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=8$  et  $\beta=0.05$ .



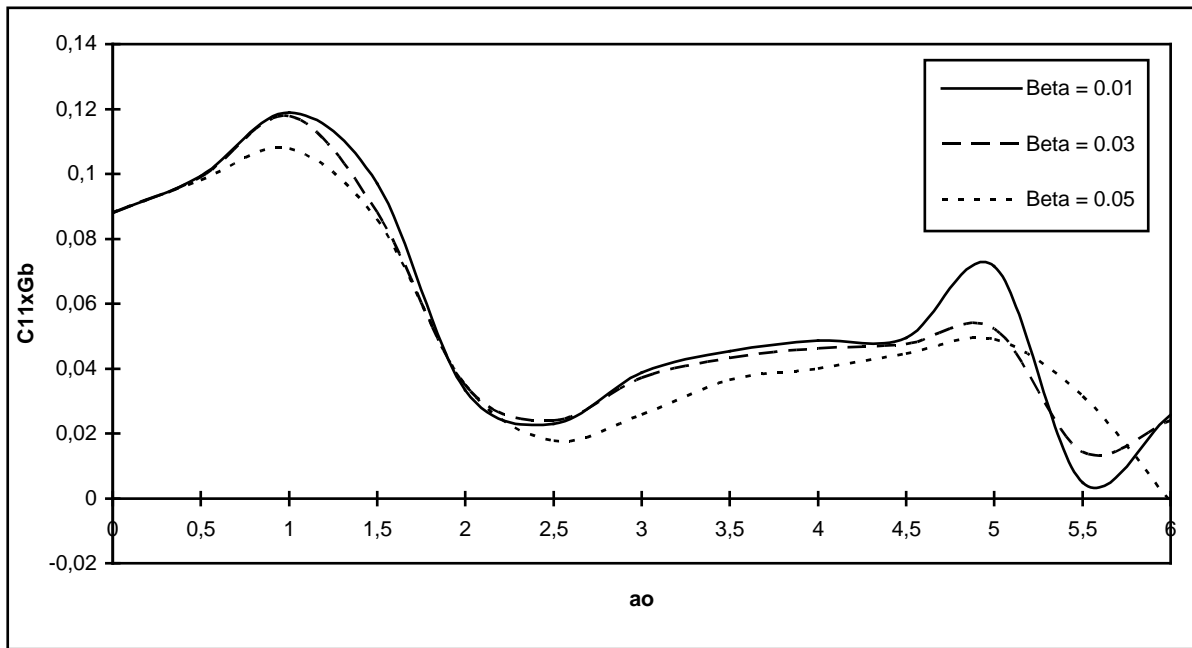
**Figure 9** Variation de la compliance vertical  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes encastrées dans un sol limité par substratum rigide en variant l'encastrement des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=8$  et  $\beta=0.05$ .



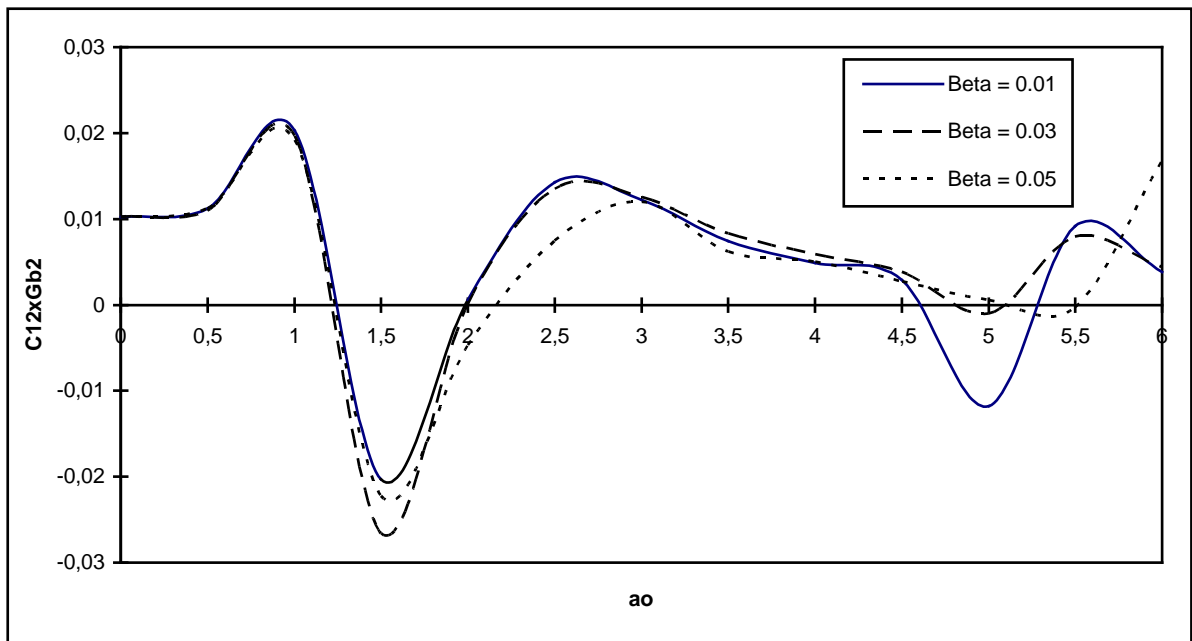
**Figure 10** Variation de la compliance verticale  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient de poisson du sol avec  $d/b=2$ ,  $h/b=4$  et  $\beta=0.05$ .



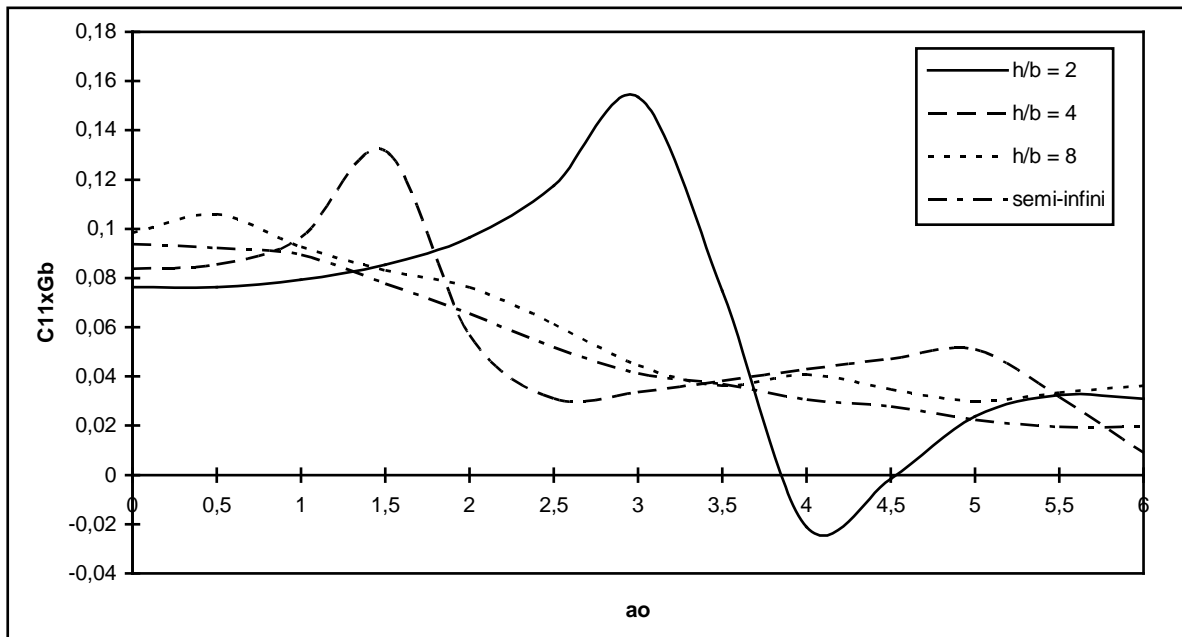
**Figure 11** Variation de la compliance verticale  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient de poisson du sol avec  $d/b=2$ ,  $h/b=4$  et  $\beta=0.05$ .



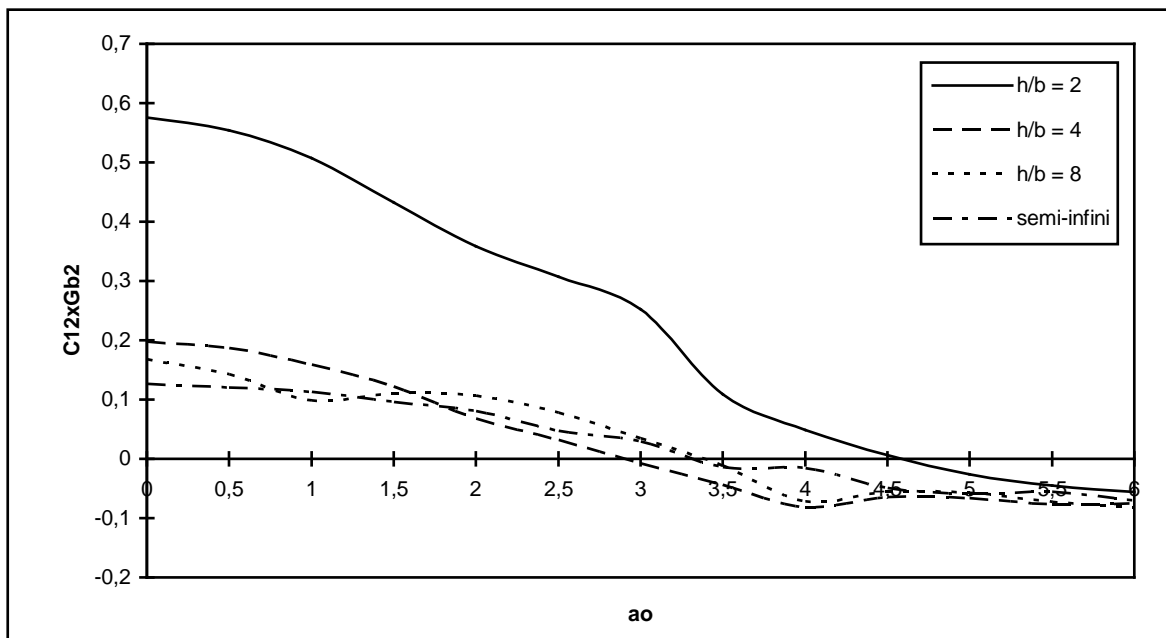
**Figure 12** Variation de la compliance verticale  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient d'amortissement du sol avec  $d/b=2$ ,  $h/b=4$  et  $\beta=0.05$ .



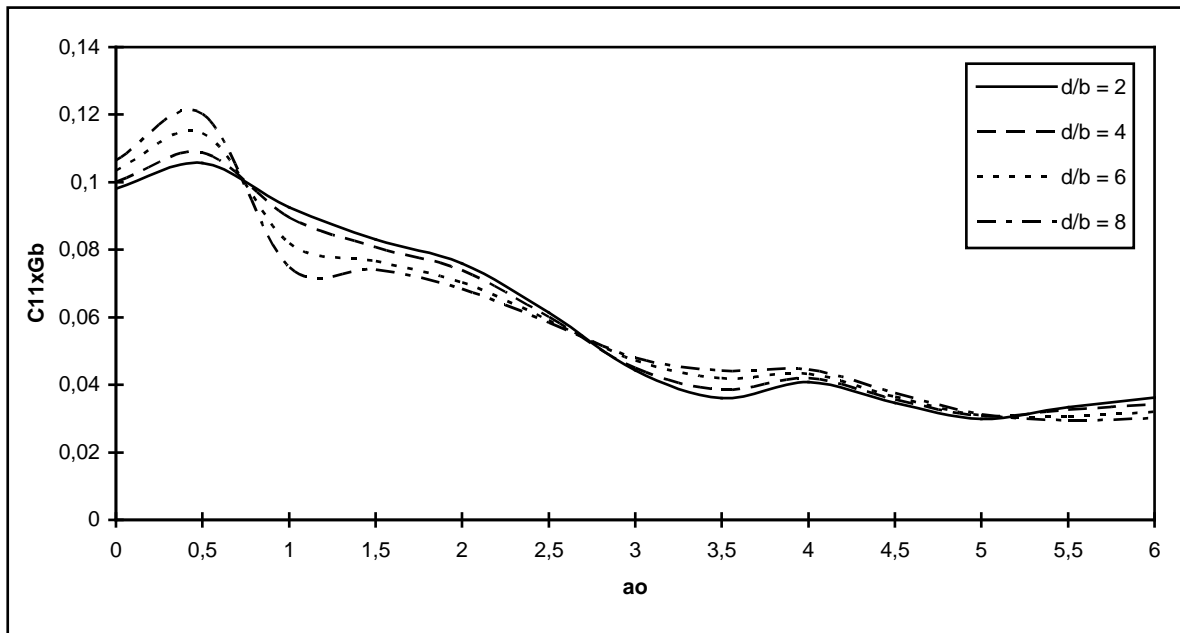
**Figure 13** Variation de la compliance de couplage verticale  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient d'amortissement du sol avec  $d/b=2$ ,  $h/b=4$  et  $\nu=0.333$ .



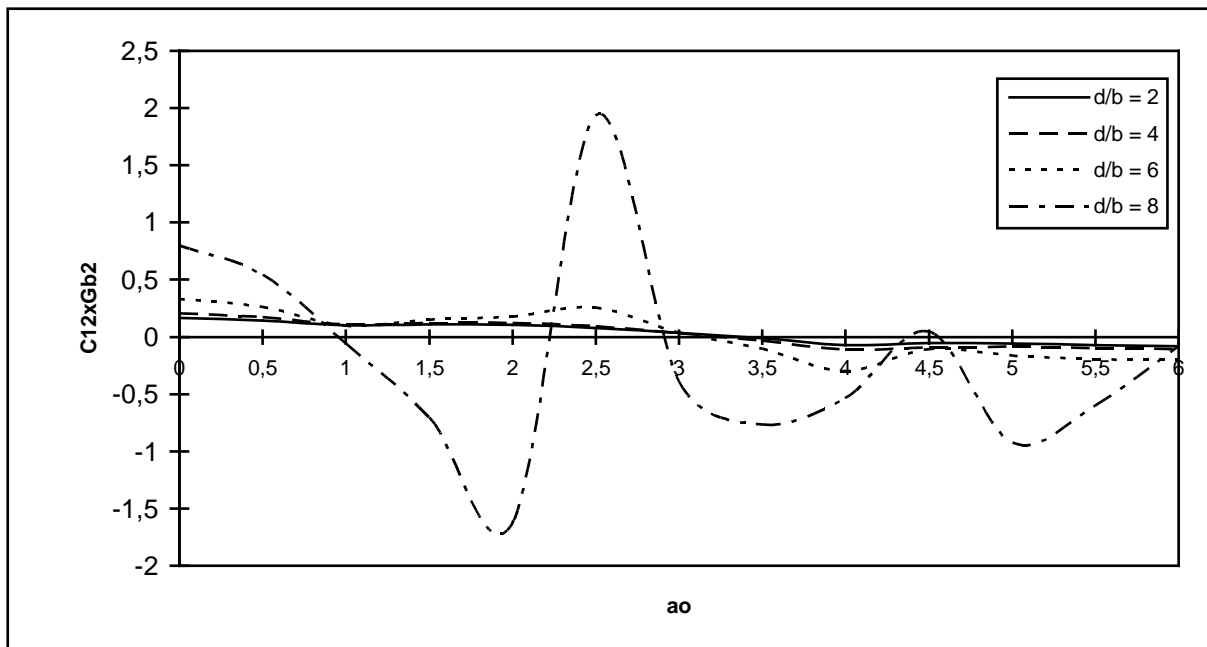
**Figure 14** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance  $C_{12}$  vertical de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide pour différents cas de hauteur relatives du sol, avec  $d/b = 2$  et  $\beta = 0.05$ .



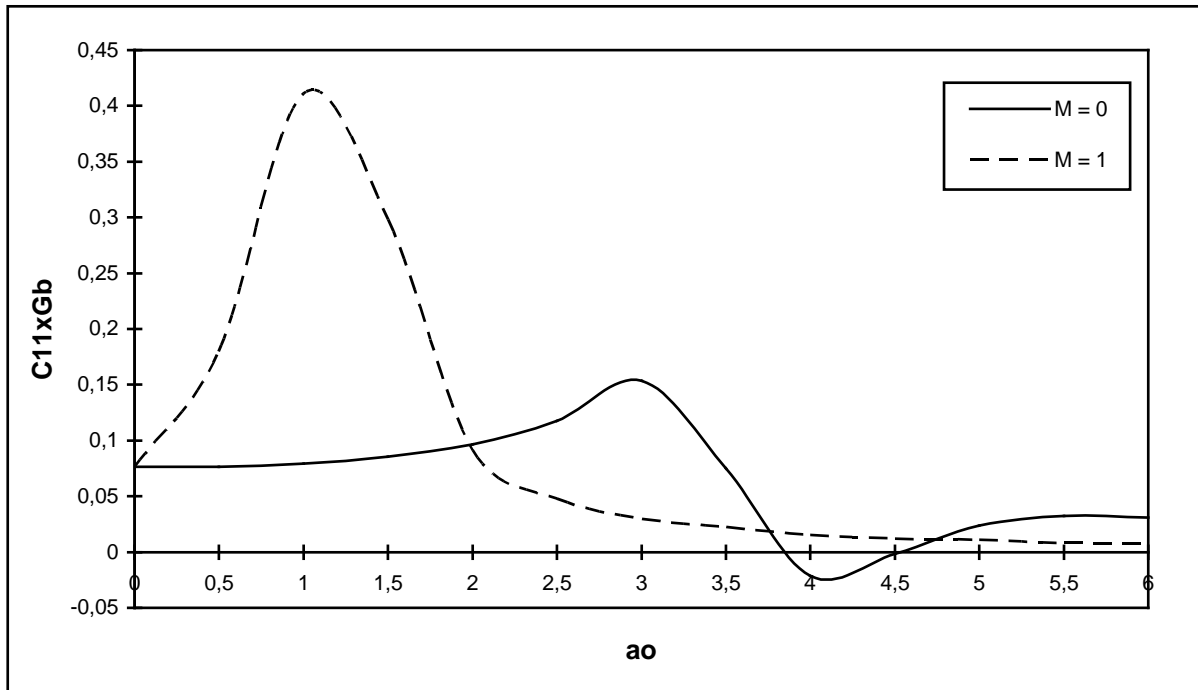
**Figure 15** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance de couplage  $C_{12}$  vertical de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide pour différents cas de hauteur relatives du sol, avec  $d/b = 2$  et  $\beta = 0.05$ .



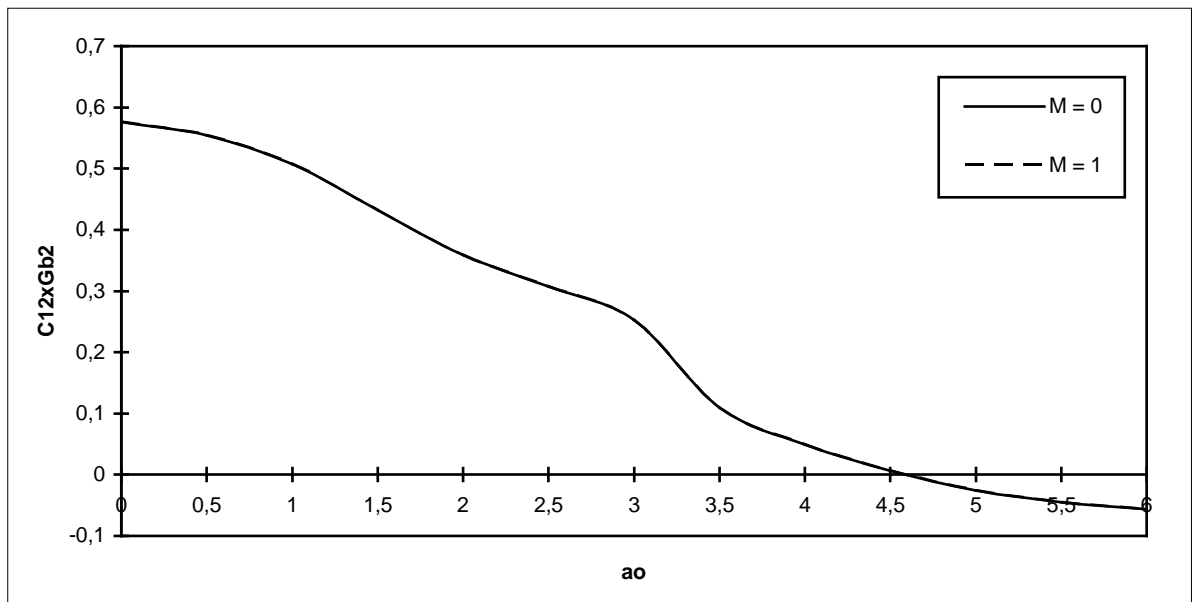
**Figure 16** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance vertical  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant la distance entre les deux fondations avec  $h/b = 8$  et  $\beta = 0,05$ .



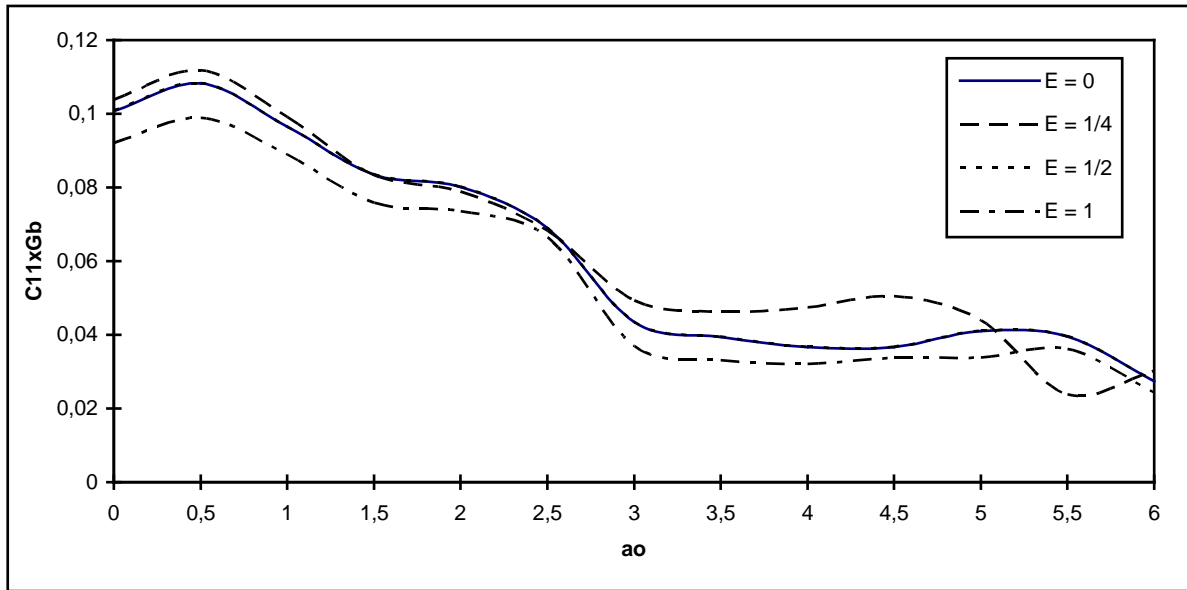
**Figure 17** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance vertical  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide en variant la distance entre les deux fondations avec  $h/b = 8$  et  $\beta = 0,05$ .



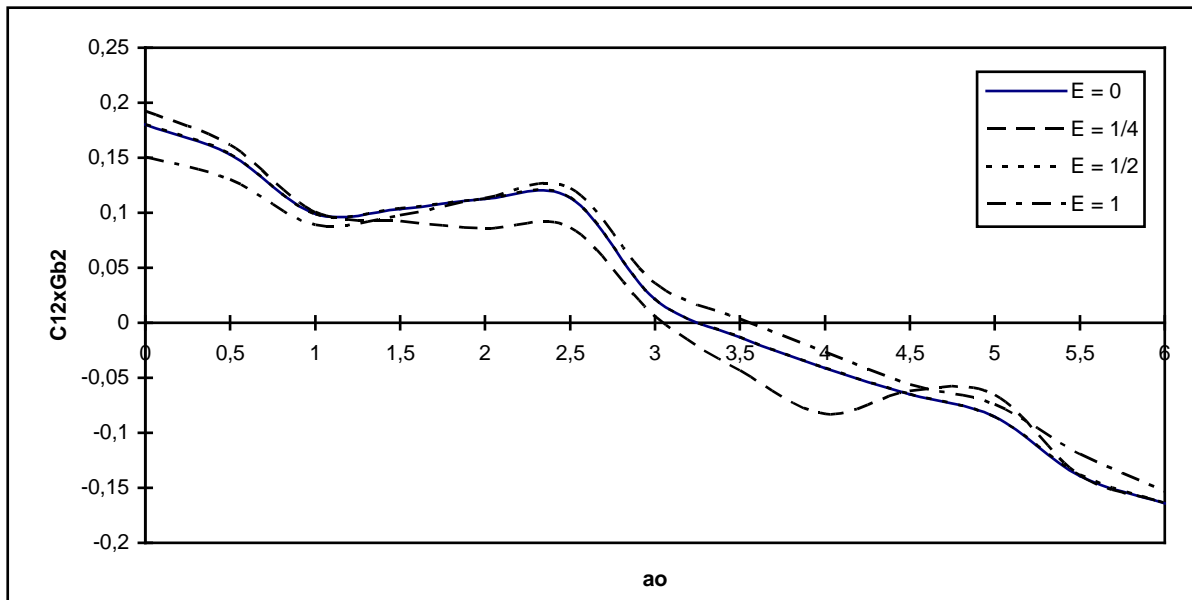
**Figure 19** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance vertical  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide en variant la masse des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=2$  et  $\beta=0.05$ .



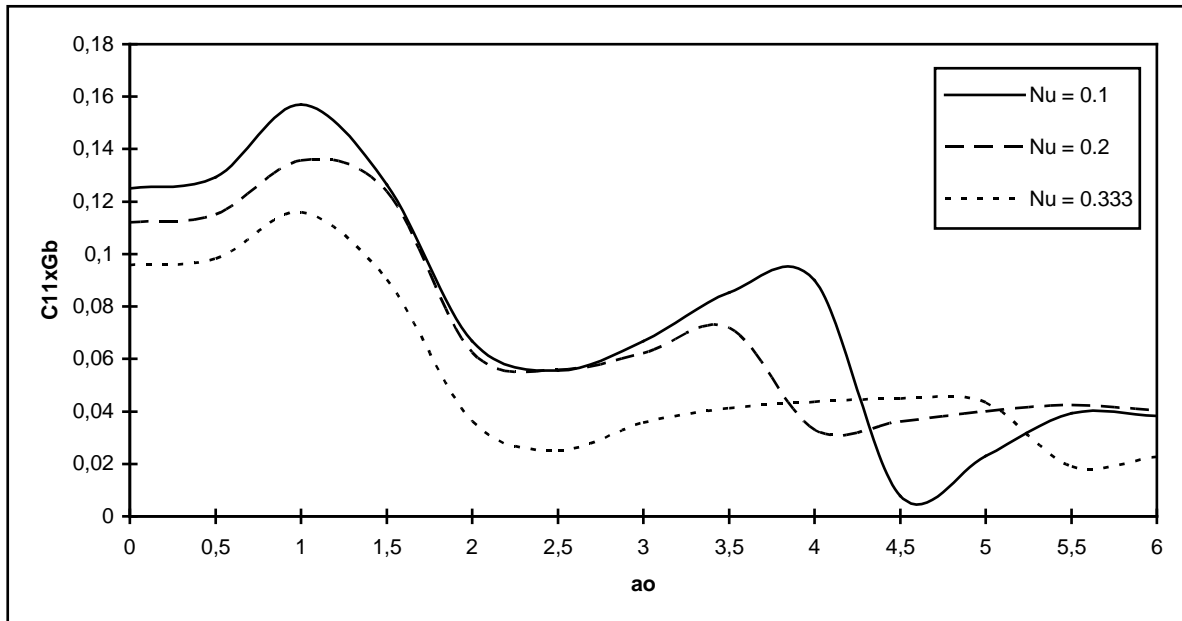
**Figure 19** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance vertical  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par substratum rigide en variant la masse des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=2$  et  $\beta=0.05$ .



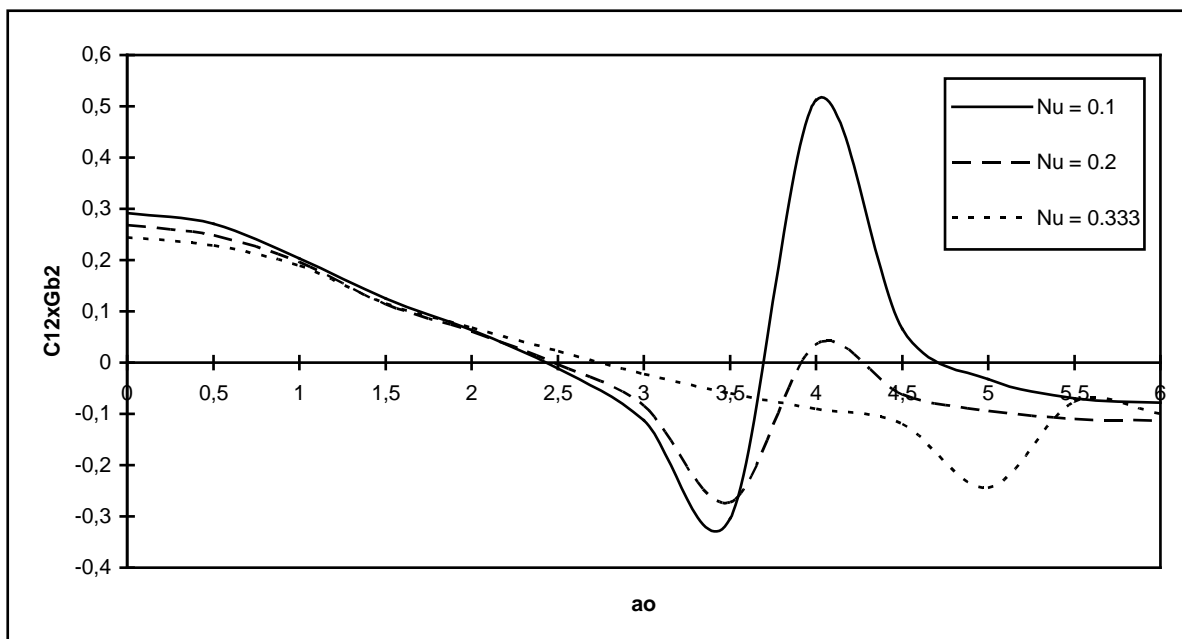
**Figure 20** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliane vertical  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes encastrées dans un sol limité par un substratum rigide en variant l'encastrement des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=8$  et  $\beta=0.05$ .



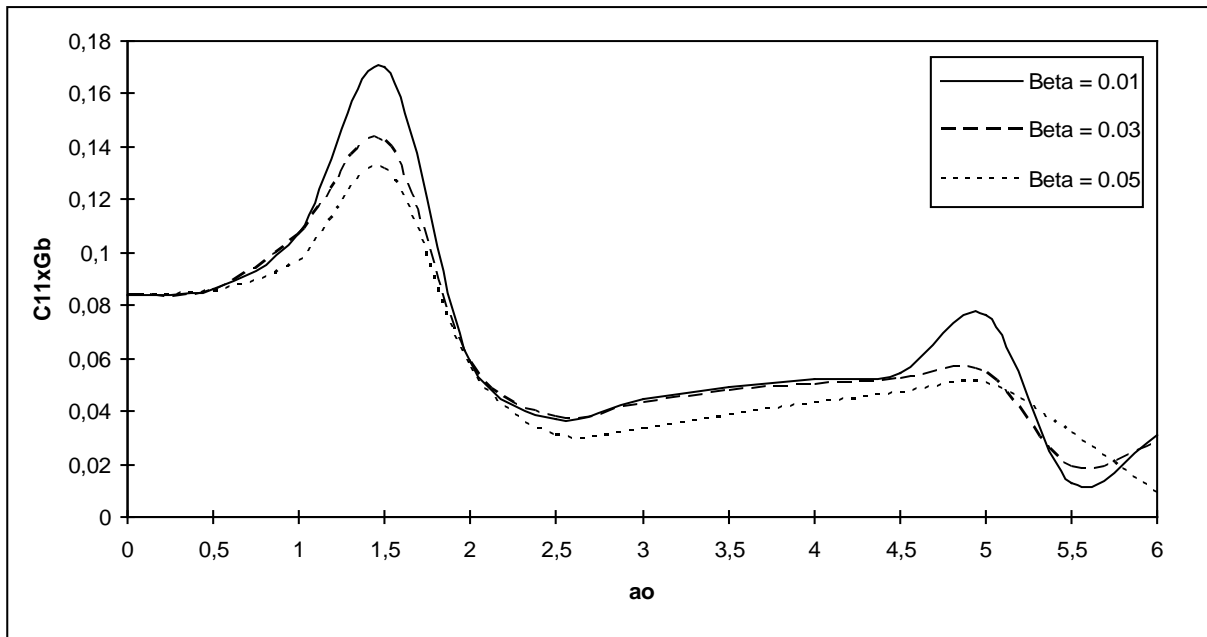
**Figure 21** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliane vertical  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes encastrées dans un sol limité par un substratum rigide en variant l'encastrement des deux fondations avec  $d/b=2$ ,  $h/b=8$  et  $\beta=0.05$ .



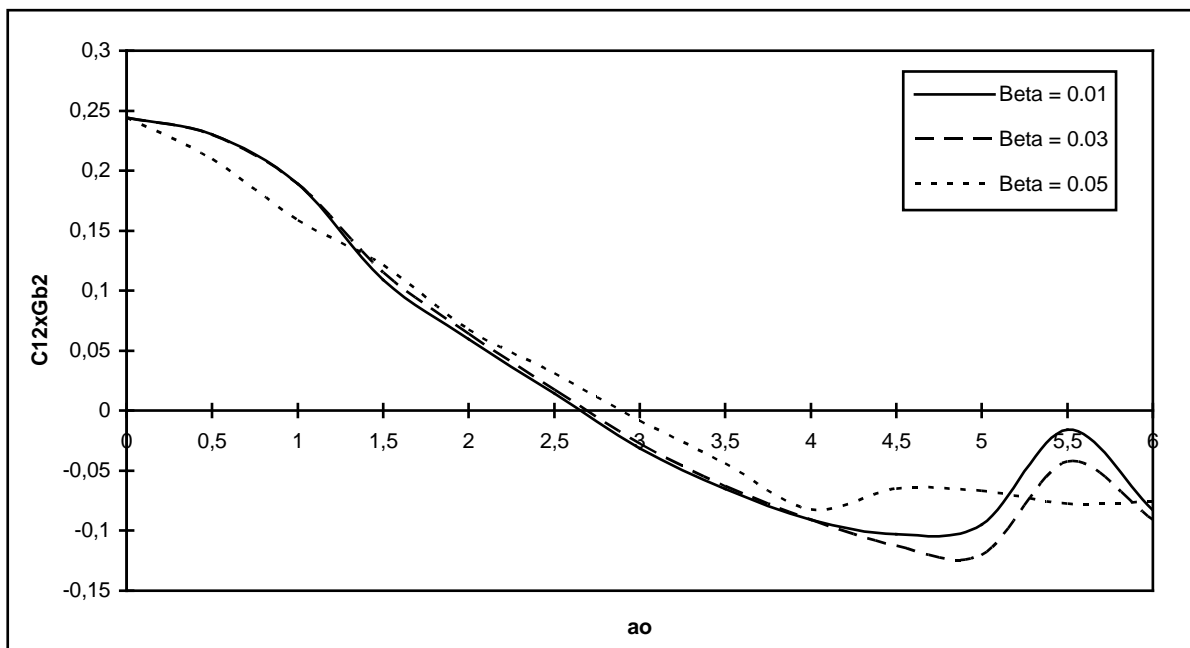
**Figure 22** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance vertical  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient de poisson du sol avec  $d/b = 2$ ,  $h/b = 4$  et  $\beta = 0.05$ .



**Figure 23** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance vertical  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient de poisson du sol avec  $d/b = 2$ ,  $h/b = 4$  et  $\beta = 0.05$ .



**Figure 24** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance vertical  $C_{11}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient d'amortissement du sol avec  $d/b = 2$ ,  $h/b = 4$  et  $\beta = 0.05$ .



**Figure 25** Cas de deux fondations chargées : Variation de la compliance verticale  $C_{12}$  de deux fondations carrées adjacentes placées à la surface d'un sol limité par un substratum rigide en variant le coefficient d'amortissement du sol avec  $d/b = 2$ ,  $h/b = 4$  et  $\beta = 0.05$ .

## Chapitre 6

# Conclusions générales et perspectives

### 6. 1 Conclusions

Dans cette thèse, une validation numérique du modèle qui nous a permis de calculer la réponse dynamique de deux fondations rigides carrées adjacentes encastrées dans un sol multicouche limité par un substratum rigide a été développée et discutée.

La méthode utilisée est la Méthode des Eléments Frontières (BEM) dans le domaine fréquentiel en utilisant le formalisme des fonctions de Green d'un sol multicouches horizontales limité par un substratum rigide de Kausel et Peek avec des éléments frontières constant quadrilatère placés à l'interface fondation-sol-fondation.

Cette méthode consiste à discrétiser l'interface fondation-sol-fondation afin de rendre le problème algébrique et obtenir ainsi les fonctions de Green en chaque élément de la zone discrétisée.

L'application successive des charges harmoniques unitaires (horizontales et verticales) en chaque élément de l'interface fondation-sol-fondation permet de former la matrice de déplacements (flexibilités).

En utilisant l'Equation Intégrale discrète, on peut relier les déplacements aux tractions à l'interface fondation-sol-fondation.

Les fonctions impédances du système sont obtenues en imposant les conditions de compatibilité et d'équilibre entre les éléments de l'interface fondation-sol-fondation.

En utilisant cette approche, on a pu établir un modèle mathématique nous permettant de déterminer les fonctions impédances (compliances) de deux fondations carrées adjacentes à partir des considérations d'interaction Sol-Structure dans deux cas de figures:

- une seule fondation est chargée
- les deux fondations sont chargées

Afin de caractériser les fonctions de déplacements (compliances), une analyse paramétrique adimensionnelle a été effectuée pour l'étude de l'influence de chaque paramètre tels que : la fréquence, la hauteur du sol, la distance entre les deux fondations, la masse des deux fondations, l'encastrement des deux fondations, les caractéristiques dynamiques du sol  $\beta$  et  $v$ .

L'étude de l'influence de la hauteur du substratum sur la réponse dynamique des deux fondations dont une seule est chargée a montré une augmentation des pics de résonance avec des hauteurs de substratum plus petites. Un décalage des fréquences de résonance vers les basses fréquences a été aussi observé. Le comportement de la fondation déchargée est semblable à celui de la fondation chargée sauf que l'augmentation des pics de résonances suit l'augmentation de la hauteur du substratum. De plus, il a été constaté qu'à partir de la hauteur du substratum  $h/b=8$ , la réponse des deux fondations s'approche de la réponse d'un sol semi-infini.

L'étude de l'influence de la variation de la distance entre les deux fondations a montré que seulement la fondation non chargée est affectée. A partir de la distance  $d/b=8$ , l'effet de l'interaction disparaît et la réponse de la fondation chargée s'approche de la réponse d'un problème d'une seule fondation. De plus, les magnitudes de la fondation non chargée sont moins importantes.

La variation de la masse des deux fondations a provoqué une variation des pics de résonance avec un décalage des fréquences de résonance vers les basses fréquences. De plus, les magnitudes de la fondation non chargée sont moins importantes.

L'augmentation de l'encastrement des deux fondations provoque une légère diminution des pics de résonance des compliances et s'accroissent à partir de la valeur  $E = 1$  et agit comme un paramètre sécuritaire dans les problèmes de vibrations des fondations.

L'influence du coefficient de poisson a montré que plus le sol est compressible plus les déplacements sont plus importants et surtout au niveau des pics de résonance. Ce qui confirme la théorie.

Les résultats ont montré que plus le coefficient d'amortissement augmente plus les déplacements diminuent. Cette variation a été observée beaucoup plus au niveau des pics de résonance.

Concernant le deuxième cas (deux fondations chargées), on a observé les mêmes remarques que le premier cas (une seule fondation chargée) pour les compliances de la première fondation  $C_{11}$  mais avec une différence au niveau de l'allure de la courbe de la compliance de couplage  $C_{12}$  ainsi qu'au niveau des magnitudes.

## **6.2 Perspectives futurs**

L'étude ainsi réalisée offre aux futurs chercheurs différentes perspectives de recherche tels que :

### **6.2.1 Généralisation de la présente étude**

Cette présente étude n'est pas générale actuellement mais elle le sera si on arrive à étudier :

1. les différents modes de vibrations
2. le cas d'un sol hétérogène type Gibson ou multicouche
3. autres formes géométriques des fondations
4. le cas des fondations flexibles.

### **6.2.2 Etudes à développer**

Parmi les études à développer avec cette méthode, on peut citer :

- la réponse d'une ou plusieurs fondations à une sollicitation sismique
- la réponse d'un tunnel sous sollicitation dynamique et sismique
- la réponse d'un ou plusieurs pieux à une sollicitation dynamique et sismique
- la réponse du système sol-structure sous sollicitation dynamique et sismique.
- La réponse d'une fondation sous sollicitation dynamique mobiles (véhicules, tramway, train,...).

## References

- [1] Achenbach J.D et Epstein H.I. Dynamic interaction of a layer and a half-space. *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, 93(EM5):27(42), 1967.
- [2] Ahmad S et al (1988), Comparison of dynamic stiffnesses of rigid square and rectangular foundation by DBEM and IBEM, *Int J Num Anal Meth Geomech* 12, 657-678.
- [3] Ahmad S (1988), Dynamic stress analysis of a class of geomechanics problems by the boundary element method, *int J Num Anal Meth Geomech* 12, 401-417.
- [4] Ahmad S et Banerjee PK (1988b), Time-domain transient elastodynamic analysis of 3-D solids by BEM, *Int J Num Eng* 26, 1709-1728.
- [5] Ahmad S et Bharadwaj A (1991), Horizontal impedance of embedded strip foundations in layered soil, *J Geotech Eng ASCE*, 118, 1168-1185.
- [6] Ahmad S et Gazetas G (1992a), Torsional stiffness of arbitrarily shaped embedded foundations, *J Geotech Eng ASCE*, 118, 1168-1185.
- [7] Ahmad S et Gazetas G (1992b), Torsional radiation damping of arbitrarily shaped embedded foundations, *J Geotech Eng ASCE*, 118, 1186-1199.
- [8] Alarcon E et al (1989), Boundary element approach to the dynamic stiffness functions of circular foundations, *INC J Num Anal Meth Geomech* 13, 645-664.
- [9] Antes H et Von Estorff O (1987d), Transient behavior of strip foundations resting on different soil profiles by a time domain BEM, dans *Ground Motion And Engineering Seismology*, Cakmak AS (ed), Elsevier, Amsterdam, 291-305.
- [10] Antes H et Von Estorff O (1987e), Erschütterung-sausbreitung im boden und dynamische interaktionseffekt, *Bauingenieur*, 62, 201-208.
- [11] Antes H et Latz K (1990), Zur wechselwirkung zwischen baugrund und rahmenkonstruktionen , dans *Aktuelle Probleme der Bodendynamik*, Felmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, 35-44.
- [12] Antes H et Spyrakos CC (1987), Dynamic response of massive block to transient Rayleigh wave, in *Dynamic of structures*, Roesset JM, (ed) ASCE, New York, 512-518.
- [13] Apsel R.J et Luco J.E. On the Green's functions for a layered half-space. Part II. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73:931-951, 1983.
- [14] Apsel RJ et Luco JE (1987), Impedance functions for foundations embedded in a layered medium: as integral equation approach, *Earth quake Eng Struct Dyn* 15, 231-231.
- [15] Arnold R.N, Bycroft G.N and Warburton G.B. Forced vibration of a body on infinite elastic soil. *J.App.Mech.* 1955, ASME, Vol.77. 391-401.
- [16] Aubry D et Clouteau D (1991a), Regularized boundary element method for stratified media, dans *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, Cohen G et al (eds), SIAM, Philadelphia, 660-670.
- [17] Aubry D et Clouteau D (1991b), Seismic site effect and soil structure interaction, dans *Structural Dynamics EURO DYN 90*, Vol 2, Kratzig WB et al (eds), AA Balkema, Rotterdam, 731-738.
- [18] Aubry D et Clouteau D (1992), Subdomain approach to dynamic soil-structure interaction, dans *Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Davidovichi v (ed), Ouest Editions, Nantes, 251-272.
- [19] Auersch L et Schmid G (1990), Simple boundary element formulation and its application to wavefield excited soil-structure interaction, *Earthquake Eng Struct Dyn* 19, 931-947.
- [20] Auersch L (1994a), Wave propagation in layered soil: theoretical solution in wavenumber domain and experimental results of hammer and railway traffic excitation, *J Sound Vib* 173, 233-264.
- [21] Auersch L (1994b), Zur dynamik einer unendlichen platte auf dem halbraum-fundamentnachschiebigkeit und wellenfeld bei harmonischer punktlast, *Asch Appl Mech* 64, 346-356.

- [22] Auersch L (1995), Some effects of the layering of the soil on wave propagation and foundation vibrations, dans *Soil Dynamic and Earthquake Engineering VII*, Cakmak AS et Brebbia CA (eds), Comput Mech Publ, Southampton, 283-290.
- [23] Auersch L (1996), Dynamic plate-soil interaction: finite and infinite, flexible and rigid plates on homogeneous, layered or winkler soil, *Soil Dyn Earthquake Eng* 15, 51-59.
- [24] Awojobi et Grootenhuis P. Vibration of rigid body on an elastic media. Proc.Roy. Lond. Soc. 1965, A287. 27.
- [25] Batta v, Pekau OA, et Syamal PK (1989), Time domain boundary element analysis, of embedded strip foundations, dans *Proc 12<sup>th</sup> Canadian Congres of Appl Mech*, Erki MA et Kirkhope J (eds), Carleton Univ, Ottawa, 196-197.
- [26] Becker A.A. The boundary element method in engineering. McGraw-Hill Book Company Europe, Maidenhead, UK, 1992.
- [27] Beskos D.E. Boundary Element methods in dynamic analysis. Applied Mechanics Rev 1987; 40: 1-23.
- [28] Beskos DE (1991d), Wave propagation in layered ground, dans *Ondes Acoustiques et Vibratoires, Interactions Fluide-Structures Vibrantes*, Filippi P et Habault D (eds), Publications du Laboratoire de Mécanique et Acoustique No 126, Centre Natl de la Recherche Scientifique, Marseille, 49-72.
- [29] Beskos DE, leung KI, et Vardoulakis IG (1990), Vibration isolation studies in non-homogeneous soil, dans *Boundary Element in Mechanical and Electrical Engineering*, Brebbia CA et Chaudouet-Miranda A (eds), Springer-Verlag, Berlin, 205-217.
- [30] Betti, R et Abdel-Ghaffar (1994), Analysis of embedded foundations by substructure-deletion method, *J Eng Mech, ASCE*, 120, 1283-1303.
- [31] Bharadwaj Aet Ahmad S (1992), Roking impedance of embedded strip foundations in layered soil , *J Geotechn Eng ASCE*, 118, 796-813.
- [32] Boumekik A, Nuyens J and Canstantopoulos I.C (1986). Soil-structure interaction effect on non-circular structure embedded in multilayered soil. In: Proceedings of the International. Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. San Francisco, USA.
- [33] Boumekik A. Fonctions impédances d'une fondation vibrante en surface ou partiellement encastrée dans un sol multicouche. PhD Thesis, Free University of Bruxelles 1985.
- [34] Bu S (1996), Infinite boundary elements for the analysis of machine foundations, *Int J Num Meth Eng*, to appear.
- [35] Bu S et Davies TG (1996a), Boundary element technique for geotechnical problems of incompressible soils, *Comm Appl Num Meth*, to appear.
- [36] Bycroft G.N. Forced vibration of rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on elastic stratum. Phil. Trans. Roy. Lond. Soc. 1956, A248. 327-368
- [37] Capuani D, Klein R, et Antes H (1995a), Soil structure interaction effects on flexural and torsional vibrations of perforated cores, dans *Soil Dynamics and earthquake Engineering VII*, Cakman AS and Brebbia CA (rds), Comput Mech Publ, Southampton, 81-88.
- [38] Capuani D, Klein R, Antes H, et Trialli A (1995b), Dynamic soil-structure interaction of coupled shear wells by boundary element method, *Earthquake Eng Struct Dyn* 24, 861-879.
- [39] Chang HS et Belytschko T (1988), Multi-scattering and boundary effects in soil- structure interaction, *Nucl Eng Des* 106, 9-17.
- [40] Chow N et Schmid g (1995), Influence of soil-structure interaction on pounding between buildings, in Proc 10<sup>th</sup> European conf on Earthquake induced structural vibrations, dans *Earthquake Resistant Construction and Design II, Vol I*, Savidis SA (ed), AA Balkema, Rotterdam, 375-380.
- [41] Chapel F(1987), Boundary element method applied soil-structure interaction on a heterogeneous soil, *Earthquake Eng Struct Dyn* 15, 815-829.
- [42] Cheung YK, Tham LG, et Lei ZX (1993), Wave propagation in layered media by time domain BEM, *Earthquake Eng Struct Dyn* 22, 225-244.
- [43] Cheung YK, Tham LG, et Lei ZX (1995), Transient response of singles piles under horizontal excitations, *Earthquake Eng Struct Dyn* 24, 1017-1038.
- [44] Chiang-Liang V. Dynamic response of structure in layered soils. Ph.D.Thesis, M.I.T., 1974.

- [45] Chown, N et Schmid g (1991b), influence of the geometrical effects of the soil on structure-soil-structure interaction, dans *Structural Dynamics EURODYN'90 Vol 2*, Kratzig WB et al (eds), AA Balkema, Rotterdam, 797-802.
- [46] Coda HB et Venturini WS (1995a), Three-dimensional transient BEM analysis, *Comput Struct* 56, 751-768.
- [47] Collins W.D. The forced oscillations of an elastic half-space. Proc. Math. Soc. 1962, n°12.
- [48] Dangla P (1988), A plane strain soil-structure interaction model, *Earthquake Eng Struct Dyn* 16,1115-1128.
- [49] De Barros FCP et Luco JE (1995), Dynamic response of a two-dimensional semi-circular foundation embedded in a layered viscoelastic half-space, *Soil Dyn Earthquake Eng* 14, 45-57.
- [50] Dominguez J et Abascal R (1988), Seismic response of strip footings on zoned viscoelastic soils, in *Advanced Boundary Element Method*, Cruse TA (ed), Springer-Verlag Berlin, 125-133.
- [51] Dominguez J, Roesset J.M. Dynamic stiffness of rectangular foundation. M.I.T Research report 1978; R78-20.
- [52] Elorduy J Nieto J.A and Szekely E.M. Dynamic response of bases of arbitrary shape subject to periodic vertical loading. Proc.Int.Symp.Wave Prop. & Dynamic.Prop.Earth Math. Univ. of New Mexico. 1967, Albuquerque, 105-121.
- [53] Emperador JM et Dominguez J(1989), Dynamic response of axisymmetric embedded foundations, *Earth Eng & Struct Dyn* 18, 1105-1117.
- [54] Eringen A.C et Suhubi E.S. *Elastodynamics, Volume 2, Linear theory.* Academic Press, New York, USA, 1975.
- [55] Gaitanaros AP et Karabalis DL, (1955), Dynamic analysis of 3-D flexible embedded foundations by a frequency domain BEM-FEM, *Earthquake Eng Struct Dyn* 16, 653-674.
- [56] Gaul L et al (1988a), Dynamic boundary element analysis of foundations slabs on layered soil, in *Boundary Elementss X, Vol 4*, Brebbia CA (ed), Springer-Verlag, Berlin, 29- 44.
- [57] Gaul L et al (1988b), Continuum-boundary element and experimental models of soil-foundations interaction, in *Numerical Methods in Geomechanics-Innsbruck 1988*, G Swoboda (ed),AA Balkema, Rotterdam, 1649-1661.
- [58] Gaul L et al (1991a), Simulation of wave propagation in irregular soil domains by BEM and associated small scale experiments, *Eng Anal Bound Elem* 8, 200-205.
- [59] Gaul L et al (1991b), Boundary element calculation and experimental studies on wave propagation in inhomogeneous soils, in *Earthquake Resistant construction and Design*, SA Savidis (ed), AA Balkema, Rotterdam, 95-104.
- [60] Gazetas G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art. international Journal of soil dynamics and Earthquake Engineering, vol. 2, n°1, 1983.
- [61] Gazetas G et JL Tassoulas (1987a), Horizontal stiffness of arbitrarily shaped embedded foundations, *J Geotech Eng ASCE*, 113, 440-457.
- [62] Gazetas G et JL Tassoulas (1987b), Horizontal damping of arbitrarily shaped embedded foundations, *J Geotech Eng ASCE*, 113, 458-475.
- [63] Gazetas G, Roesset J.M. Vertical vibration of machine foundations. *Journal of the Geotechnical Engineering Division ASCE* 1979; 105 (12): 1435-1454.
- [64] Gonzalez J.J. Dynamic interaction between adjacent structures. Research report 1974; R77-30 M.I.T.
- [65] Gazetas G, Fan K, Kaynia A et Kausel E (1991), Dynamic interaction factors for floating pile groups, *J Geotech Eng ASCE*, 117, 1531-1548.
- [66] Jinru H et Cherry S (1989), Influence coefficients for dynamics response of foundations, *J Eng Mech ASCE*, 115, 22493-2506.
- [67] Gladwell G.M.L. Forced tangential and rotary vibration of rigid circular disk on a semi-infinite solid. *Int. J. Engng. Sciences.*1968, Vol.6.

- [68] Haskell N.A. The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1953; 43: 17-34.
- [69] Hayashi Y et Takahashi J (1992), An efficient time-domain soil-structure interaction analysis based on the dynamic stiffness of an unbounded soil, *Earthquake Eng Struct Dyn* 21, 787-798.
- [70] Hadjkov L, Dineva P et Rangelov T (1986), On the analysis of the dynamic soil-structure interaction by a hybrid method (SH-wave) dans *Boundary Elements*, Du Q (ed), Pergamon Pres, Oxford, 469-474.
- [71] Hijikata K et Tomili Y (1995), Dynamic characteristics of pile groups on non-homogeneous soil, dans *10<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering, Vienna* Duma G (ed), AA balkema, Rotterdam,1, 661-666.
- [72] Hisada Y (1994), An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at closed depth, *Bull Seism Soc Am* 84, 405-416.
- [73] Hisada Y (1995), An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at closed depth (Part 2), *Bull Seism Soc Am* 85 , 1080-1093.
- [74] Hsieh T.K. Foundation vibration. *Proc.Inst.Civil.Engng.* 1962, Vol.22.
- [75] Huh Y and Schmid G (1986), dynamic response multistorey buildings on layered soil due to earthquake, dans *Boundary Elements*, Du Q (ed), Pergamon Press, Oxford, 697-706.
- [76] Hull SW et Kausel E (1984), Dynamic loads in layered half-spaces, dans *Engineering Mechanics in Civil Engineering*, AP Borese et KP Chong (eds), ASCE, New York, 201-204.
- [77] Idriss J.M et Kennedy R.P. Analysis for soil-structure interaction effects for nuclear power plants. Report by the Ad Hoc Group on soil structure interaction of the committee on nuclear structures and materials of the structural division of ASCE, 1980.
- [78] Karabalis DL et Mohammadi M (1988), Foundation-soil-foundation interaction: an application to railway problems, dans *Boundary Elements X, Vol 4*, Brebbia CA (ed), Springer-Verlag, Berlin, 75-87.
- [79] Karabalis DL et Mohammadi M (1991), foundation-soil-foundation dynamic using a 3-d frequency domain BEM, dans *Boundary Element XIII*, Brebbia CA and Gipson GS(eds), Elsevier Appl Sci, London, 447-456.
- [80] Karabalis DL (1991), A simplified 3-D time domain BEM for dynamic soil-structure interaction problems, *Eng Anal Bound Elem* 8, 139-145.
- [81] Karabalis DL et Huang CFD (1989), Kinematics and inertial soil-structure interaction by time domain BEM, dans *Advances boundary Elements, Vol 3*, Brebbia CA and JJ Conor (eds), Springer-Verlag, Berlin, 359-374.
- [82] Karabalis DL et Huang CFD (1991), Inertial soil foundation interaction by a direct time domain BEM, *Math Compute Model* 15, 215-228.
- [83] Karabalis DL et Huang CFD (1994a), Dynamics analysis of 3-D foundations with interna holes by time domain BEM, in *Earthquake Resistant Construction and Design, Vol 1*, SA Savidis (ed), AA Balkema Rotterdam, 331-339.
- [84] Karabalis DL et Huang CFD (1994b), 3-D foundation -soil- foundation interaction, dans *Boundary Element Technology IX*, Brebbia CA and Kassab AJ (eds), Comput Mech Publ, Southampton, 197-207.
- [85] Karabalis D.L, Mohammadi M. 3-D dynamic foundation-soil-foundation interaction on layered soil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 1998 ; 17: 139-152.
- [86] Kausel E. Forced vibrations of circular foundations on layered media. M.I.T. Research Report 1974; R74-11
- [87] Kausel.E, Roesset J.M. and Waas G. Dynamic analysis of footings on layered media. *Journal of Engineering Mechanics* 1975; 101 : 679-693.
- [88] Kausel E, Roesset J.M. Dynamic stiffness of circular foundations. *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE* 1975; 101 : 771-785EM6.
- [89] Kausel E, Roesset J.M. Stiffness matrix for layered soils. *Bull. Seismol. Soc. Am* 1987; 72: 1459-1481.
- [90] Kausel E, Peek R. Dynamic loads in the interior of layered stratum: an explicit solution. *Bull. Seism.Soc.Am* 1982; 72(5): 1459-1481.

- [91] Kausel E (1994), Thin layer method: formulation in the time domain, *Int J Num Meth Eng* 37, 927-941.
- [92] Kawase H, Yoshida K, Nakai S, et Koyanagi Y (1982), Dynamic response of a structure on a layered medium – a dipping layer and a flat layer, dans *Proc 6<sup>th</sup> Japanese Earthquake Eng Symp*, 1641-1648.
- [93] Kaynia AM (1982), Dynamic stiffness and seismic response of pile groups, Report R82-03, Dept of Civil Eng, MIT, Cambridge MA.
- [94] Kaynia AM et Kausel E (1982), Dynamic behaviour of pile groups, dans *Proc 2nd Int Conf on Numer Methods in Offshore Piling*, Austin TX, 509-532.
- [95] Kaynia AM et Kausel E (1991), Dynamics of piles and pile groups in layered soil media, *Soil Dyn Earthquake Eng*, 10, 386-401.
- [96] Kobori T, Shinosaki Y, et Mita A (1982), Soil-structure interaction analysis of embedded structures by boundary integral equation method, dans *Proc 6<sup>th</sup> Japanese Earthquake Eng Symp*, 1737-1744.
- [97] Kokkinos FT et Spyrakos CC (1989), Hybrid BEM-FEM analysis of flexible strip foundations in the frequency domain, dans *Proc 2<sup>nd</sup> Greek Natl Congress on Mech, Vol I*, Univ of Athens Press, Athens, 197-211.
- [98] Kokkinos FT et Spyrakos CC (1991), Dynamic analysis of flexible strip-foundations in the frequency domain, *Comput Struct* 39, 473-482.
- [99] Kurimoto O et al (1992), Dynamics characteristics of irregularly embedded foundation, in *Proc 10th World Conf on Earthquake Eng, Madrid*, AA Balkema, Rotterdam, Vol 3, 1725-1730.
- [100] Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil.Trans.of royal soc* 1904; Vol.203, 1-42.
- [101] Lee YJ, Lin TW, et Chen CH (1995b), Hybrid modeling for soil-structure interaction analysis in layered half-space, dans *Proc 10<sup>th</sup> European Conf on Earthquake Eng, Vienna, 1994, Vol I*, G Duma (ed), AA Balkema, Rotterdam, 623-628.
- [102] Leung KL, Vardoulakis IG, Beskos BE, et Tassoulas JL (1991), Vibration isolation by trenches in continuously non-homogeneous soil by the BEM, *Soil Dyn Earthquake Eng*, 10, 172-179.
- [103] Liou G.S Dynamic stiffness matrices for two circular foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 1994; 23: 193-210
- [104] Lin H.T, Tassoulas J.L. A hybrid method for three-dimensional problems of dynamics of foundations. *Earthquake Engineering and Structural dynamics* 1986; 14 : 61-74.
- [105] Lin H.T, Roesset J.M and Tassoulas J.L. Dynamic interaction between adjacent foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 1987; 15 : 323-343.
- [106] Liu SW, Liu CH, et Franke SJ (1990), Three-dimensional Green's functions for wave propagation in a linearly inhomogeneous medium- the exact analytic solution, *J Acoustic Soc Am*, 87, 2285-2291.
- [107] Liu SW, et Novak M (1994), Dynamic response of single piles embedded in transversely isotropic layered media, *Earthquake Eng Struct Dyn* 23, 1239-1257.
- [108] Luco JE et Apsel RJ (1983), on the Green's function's for a layered half-space, part 1, *Bull Seism Soc Am* 73, 909-929.
- [109] Luco JE et Wong HL (1987), Seismic response of foundations embedded in a layered half-space, *Earthquake Eng Struct Dyn* 15, 233-247.
- [110] Luco J.E et Westman R.A. Dynamic response of circular footings. *J.Engng.Mech.Div.ASCE*. 1971, vol.97.
- [111] Luco JE et Mita A (1987), Response of circular foundation on a uniform half-space to elastic waves, *Earthquake Eng Struct Dyn* 15, 105-118.
- [112] Lysmer J. Analytical procedures in soil dynamics. State of the Art. *Earthquake Engineering and soil dynamics*, Pasadena, California, 1978.
- [113] Lysmer J et Kuhlemeyer R.L. finite dynamic model for infinite media. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol.98, n°EM1, 1969.

- [114] Lysmer J, Raissi M, Tajirian F, Vahdani S et Ostandan F. SASSI- a system for analysis of soil-structure interaction. Geotechnical report n° 81-02, University of California, Berkeley, 1981.
- [115] Lysmer J. Lumped mass method for rayleigh waves. *Bull. Seism. Sos. Am.* 1970, Vol.60.
- [116] Manolis G.D et Beskos D.E. Boundary element methods in Elastodynamics. Unwin Hyman Ltd, London, UK, 1988.
- [117] Martin P.P. Non linear methods for dynamic analysis of ground response. Ph.D. thesis university of California, Berkeley, 1975.
- [118] Mesquita E et Romanini E (1992), Green's function approach versus direct boundary scheme to model the dynamic interaction of foundations resting on a viscoelastic layer over a bedrock, in *Boundary Elements XIV, Vol 2*, Brebbia CA, Dominguez J, et Paris F (eds), Elsevier Sci Publ, Londres, 107-121.
- [119] Mesquita Neto et al (1995), Boundary elements implementation of the substructure deletion method, in *Boundary Elements XVII*, Brebbia CA, Kim S, Osswald TA, and Power H (eds), Comput Mech Publ, Southampton, 375-386.
- [120] Mesquita E et Pontes BR (1992), Complete compliance matrices for the dynamic foundation-soil-foundation interaction, a critical review of the BEM potentialities, dans *Boundary Elements XIV, Vol 2*, Brebbia CA, Dominguez J, et Paris F (eds), Elsevier Science Publishers, London, 193-205.
- [121] Miura K, Kaynia AM, Masuda K, Kitamura E, et Seto Y (1994), Dynamic behavior of pile foundations in homogeneous and non-homogeneous media, *Earthquake Eng Struct Dyn* 23, 183-192.
- [122] Mita A et Luco JE (1987), Response of embedded foundations: a hybrid approach, in *Proc 3<sup>rd</sup> ASCE/EM Speciality Conf on Dyn Response of structure, Los Angeles*, 708-715.
- [123] Mita A et Luco JE (1989), Dynamic response embedded foundation: a hybrid approach, *Comput Meth Appl Mech Eng* 63, 233-259.
- [124] Mohammadi M. 3-D Dynamic foundation-soil-foundation interaction by BEM. Ph.D Thesis, University of South Carolina, Columbia, 1992.
- [125] Mohammadi M et Karabalis DL (1995), Dynamic 3-D soil-railway track interaction by BEM-FEM, *Earthquake Eng Struct Dyn* 24, 1177-1193.
- [126] Nakai S et Fukuwa N (1982), Boundary element analysis of approximate three-dimensional soil-structure interaction, dans *Proc 6<sup>th</sup> Japan Earthquake Engineering Symposium*, 1633-1640.
- [127] Novak M et Beredugo Y.O. Vertical vibration of embedded footing. *J. Soil. Mech. Fnd. Engng. Div.* 1972, ASCE, SM12.
- [128] Novak M et Sachs K. Torsional and coupled vibration of embedded footing. *Earthq. Engng. Struct. Dyn.* 1973, Vol.2.
- [129] Novak M. Foundation and soil-structure interaction. *Proc. 6<sup>th</sup> world conf. Earthq. Engng.* 1977, New delhi, India.
- [130] Novak M and EL-Hilfnawy. Effect of soil-structure interaction on damping of structure. *Earthq. Engng. Struct. Dyn.* 1983, Vol.11.
- [131] Ohmi M et Tosaka N (1987a), Time dynamic analysis of 3-D embedded foundations by BEM, dans *Theory and Application Boundary Element Methods VII, Vol 1*, Tanaka M et Du QH (eds), Pergamon Press, Oxford, 65-74.
- [132] Ohmi M et Tosaka N (1987b), Dynamic response of 3-D embedded rigid foundations with consideration of topographic irregularity by time domain BEM, dans *Boundary Element IX Vol 2*, Brebbia CA, Wendland WL, et Kuhn G (eds), Springer-Verlag, Berlin, 613-624.
- [133] Pecker A, Walter J.P et Sigismond J. Réponse sismique d'une couche de vase molle. *Revue française de géotechnique.* 1984
- [134] Pei D et Papageorgiou AS (1993), Study of the response of cylindrical alluvial valleys of arbitrary cross-section to obliquely incident seismic waves using the discrete wavenumber boundary element method, dans *Soil Dynamics and Earthquake Engineering VI*, AS Cakmak and Brebbia CA (eds), Elsevier Appl Sci, London, 149-161.
- [135] Pilant W.L. Elastic waves in the earth. *Developments in Solid Earth Geophysics.* Vol. 6, Elsevier, 1979.

- [136] Qian J et Beskos DE (1994a), Dynamic cross interaction of rigid foundations to obliquely incident SH seismic waves, dans *Boundary Elements Methods XVI*, Brebbia CA (ed), Comput Mech Publ, Southampton, 555-562.
- [137] Qian J et Beskos DE (1994b), Dynamic cross-interaction of two massive 3-D foundations to Rayleigh waves, dans *Advances in Simulation and Interaction Techniques*, Papadrakakis M et Pping BHV, (eds), Civil Compu Ltd, Edinburgh, 37-49.
- [138] Qian J et Beskos DE (1995), Dynamic interaction between 3-D rigid surface foundations and comparison with the ATC-3 provisions, *Earthquake Eng Struct Dyn* 24, 419-437
- [139] Qian J, Tham L.G and Cheung Y.K. Dynamic cross-interaction between flexible surface footings by combined BEM and FEM. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 1996; 25: 509-526.
- [140] Qian J, Beskos D.E. Harmonic wave response of two 3-D rigid surfaces foundations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 1996 ; 15: 95 -110.
- [141] Qian J, Tham L.G and Cheung Y.K. Dynamic analysis of rigid surface footings by boundary element method. *Journal of Sound and Vibration* 1998; 214 (4): 747-759.
- [142] Quilan P.M. The elastic theory of soil dynamics. In *Symposium on Dynamic testing of soils 1954*, ASTM, STP, n° 156. 3-34
- [143] Rajapakse RKND, Shah AH, et Datta AK (1987), Torsional vibrations of elastic foundations embedded in an elastic half-space, *Earthquake Eng Struct Dyn* 15, 279-297.
- [144] Rajapakse RKND (1990), Vertical load in the interior of a non-homogeneous of incompressible elastic half-space, *QJ Mech Appl Math* 43, 963-972.
- [145] Rajapakse RKNF et Shah AH (1988), Impedance of embedded of rigid strip foundations, *Earthquake Eng Struct Dyn* 16, 255-273.
- [146] Rajapakse RKND (1989), Dynamic response of elastic plates on viscoelastic half-space, *J Eng Mech ASCE*, 115, 1867-1881.
- [147] Reissner E. Stationare, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde masse erregte sch eines hoomogenen elastischen halbraumes. *Ing. Arch* 1936; Vol.7, part 6, 381-396.
- [148] Richart F.E et Whitman R.V. Comparaison of footings vibration with theory. *J.Soil.Mech.Fnd.Engng.Div.* 1967.
- [149] Robertson. Forced vertical vibration of rigid circular disc on semi-infinite elastic solid. *Proc.Cambr. Phil. Soc.* 1966, vol.62.
- [150] Romanel C et Kundu T (1990), Soil-structure interaction in a layered medium, *Int J Eng Sci* 28, 191-213.
- [151] Romanel C et Kundu T (1993), Hybrid modelling of soil-structure interaction problems for deeply embedded structures in a multilayered medium, *Earthquake Eng Struct Dyn* 22, 557-571.
- [152] Rosenblueth E et Herrera I. On a kind of hysteretic damping. *Journal of Engineering mechanics division, ASCE*, vol.90, n°EM4, 1964.
- [153] Savidis SA et Vrettos C (1995), Dynamic Soil-structure interaction for foundations on homogeneous soils, dans *Procs 10<sup>th</sup> European Conf on Earthquake Eng, Vienna, Vol I*, G Duma (ed), AA Balkema, Rotterdam, 599-609.
- [154] Savidis SA, Vrettos C, et Faust B (1991), Vertical vibration of a rigid plate on a continuously non-homogeneous soil, dans *Soil Dynamic and Earthquake Engineering V*, Inst fur Bodenmechanickund Felsmechanic (ed), Elsevier Appl Sci, London, 663-671.
- [155] Sbartai B. Transmission of wave in the soil layer. In: Auriault J.L et al, editors. *Poromechanics*, A.A.BALKEMA, Grenoble, 2002, pp. 789-793.
- [156] Sbartai B, Boumekik A. Propagation d'ondes dans un sol homogène générées par une machine vibrante. In: Croitoro E.M, editors. *Nonlinear Solid Mechanics*, E-PRINTIT, Vancouver, 2002, pp. 533-542, Vol.2.
- [157] Sbartai B, Boumekik A. Propagation d'ondes dans un sol multicouche générées par une machine vibrante. In : Sahli et al, editors. *La Géotechnique*, ISBN 9954-4807-0-2, Marrakech, 2003, pp. 119-126.

- [158] Sbartaï B et Boumekik A. Dynamic interaction between two surface rigid foundation in soil layer, *International Al- Azhar University of Engineering Journal*. Vol.8(1).2005.pp358-364.
- [159] Sbartaï B et Boumekik A. Vertical compliance function of adjacent surface rigid footings in heterogeneous soil layer. *Proc. Sixth European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, A.A.BALKEMA, Graz, Autriche, Sept 2006.
- [160] Sbartaï B et Boumekik A. 3-D interaction between two rigid foundation resting on layered soil Part I: Homogenous soil, *International journal of Engineering and Applied sciences*, Vol.1(4).2006. pp.476-482.
- [161] Schnabel P.E, Lysmer J et Seed H.B. SHAKE, A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites. Report EERC 72-12, Earthquake Engineering Research center, University of California, Berkeley, 1972.
- [162] Spyrakos CC et Antes H (1986a), Time domain boundary element method approaches in elastodynamics: a comparative study, *Comput Struct* 24, 529-535.
- [163] Spyrakos CC et Antes H (1986b), Boundary element procedures for transient analysis of soil-structure interaction problems, dans *Proc 1<sup>st</sup> Natl Congress on mechanics, Athens, Vol 1*, Technical Chamber of Greece, Athens, 49-61.
- [164] Suarez M et Sanchez-Sesma FJ (1995), Dynamic soil-structure interaction for non-axisymmetrical foundations, in *Soil Dynamics and earthquake Engineering VII*, AS cakmak and Brebbia CA (eds), Comput Mech Publ, Southampton, 485-492.
- [165] Sung T.Y. Vibration of semi-infinite solids due to periodique surface loadings. In Symposium on Dynamic testing of soils 1954, ASTM, STP, n° 156. 35-64
- [166] Takahashi I et al (1992), A study of impedance functions and input motions of embedded foundation by a hybrid approach, in *Proc 10th World Conf of Earthquake Eng, Madrid. AA Balkema, Rotterdam, Vol 3*, 1625-1631.
- [167] Tham LG, Cheung YK, et Lei ZX (1994), Torsional dynamic analysis of single piles by time-domain BEM, *J Sound Vib* 174, 505-519.
- [168] Takemiya H, Guan F, et Sukeyasu Y (1994a), 2D transient soil-surface foundation interaction and wave propagation by time domain BEM, *Earthquake Eng Struct Dyn* 23, 931-945.
- [169] Takemiya H, Steinfeld B, et Sukeyasu Y (1994b), Dynamic characteristics and seismic response of soil-structure systems by time domain boundary element methods, dans *Earthquake Resistant construction and Design II, Vol I*, Savidis SA AA Balkema, Rotterdam, 341-349.
- [170] Thomson W.T. Transmission of elastic waves through a stratified soil medium. *J. Appl. Phys* 1950; 21: 89-93.
- [171] Tong J et Kuribayashi E (1988), Dynamic responses of flexible rectangular foundations embedded into a viscoelastic half-space to obliquely incident waves, *soils and Foundations* , Jap Soc Soil Mech Found Eng, 28, 56-64.
- [172] Tosaka N et Ohmi M (1992), Transient elasticwave scattering problems by boundary elements methods, dans *Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods,77*, Banerjee PK and Kobayashi S (eds), Elsevier Appl Sci, London, 155-205.
- [173] Triantafyllidis T (1987), Some aspects of the dynamic subsoil-coupling between circular and rectangular foundations, dans *Ground Motion and Engineering Seismology*, Carmak AS (ed), Elsevier, Amsterdam, 259-275.
- [174] Triantafyllidis T (1991), 3-D time domain BEM using half space Green's functions, *Eng Anal Bound Elem* 8,115-124.
- [175] Triantafyllidis T et Neidhart T (1989), Diffraction effects between foundations due to incident Rayleigh waves, *EarthquakeEng Struct Dyn* 18, 815-835.
- [176] Triantafyllidis T et Prange B (1987), Dynamic subsoil-coupling between rigid rectangular foundations, *Soil Dynamic Earthquake engineering* 6, 164-179.
- [177] Triantafyllidis Th, Prange B. Dynamic subsoil-coupling between rigid circular foundations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 1989; 8: 9-21.

- [178] Valera J.E , Seed H.B, Tsai C.F et Lysmer J. Seismic soil structure interaction effects at Humbolt Bay power plant. *Journal of geotechnical Engineering division, ASCE*, vol.103, n°GT10, 1977.
- [179] Von Estorff O (1991), Dynamic response of elastic block by time domain BEM and FEM, *Comput Struct* 38, 289-300.
- [180] Von Estorff O et Prabucki MJ (1988), Coupling of boundary and finite elements to solve transient problems in elastodynamics, dans *Boundary Element X, Vol 4*, Brebbia CA (ed), Springer-Verlag, Berlin, 447-459.
- [181] Von Estorff O et Prabucki MJ (1990), Dynamic response in the time domain by coupled boundary and finite elements, *Comput Mech* 6, 35-46.
- [182] Van Laethem et al (1984), use of boundary elements to present the far field in soil-structure interaction, *Nuclear Eng Des* 78, 313-327.
- [183] Vrettos C (1990a), In-plane vibrations of soil deposits with variable share modulus: I , surface waves, *Int J Num Anal Meth Geomech* 14, 209-222.
- [184] Vrettos C (1990b), In-plane vibrations of soil deposits with variable share modulus: II line load, *Int J Num Anal Meth Geomech* 14, 649-662.
- [185] Vrettos C (1991a), Forced anti-plane vibrations at the surface of an inhomogeneous half-space, *Soil Dyn Earthquake Eng* 10, 230-235.
- [186] Vrettos C (1991b), Surface Green's functions for continuously non-homogeneous soil, in *Computer Methods and Advances in Geomechanics, Vol I*, Beer G, Booker JR, et Cartez JP (eds), AA Balkema, Rotterdam, 801-804.
- [187] Vrettos C (1991c), Time-harmonic Boussinesq problem for a continuously non-homogeneous soil, *Earthquake Eng Struct Dyn* 20, 961-977.
- [188] Waas G. Linear two-dimensional analysis of soil dynamic problems in semi-infinite layered media. PhD Thesis, University of California, Berkley 1972.
- [189] Waas G, Riggs HR, et Werkle H (1985), Displacement solutions for dynamic loads in transversely isotropic stratified media, *Earthquake Eng Struct Dyn* 13, 173-193.
- [190] Wang S and Schmid G (1992), Dynamic structure-soil-structure interaction by FEM and BEM, *Comput Mech* 9, 347-357.
- [191] Wang Y, Rajapakse RKND, et Shah HA (1991b), Dynamic interaction between flexible strip foundations, *Earthquake eng Struct Dyn* 28, 441-454.
- [192] Wang Y et Rajapakse RKND (1991), Dynamics of rigid strip foundations embedded
- [193] Wheeler L.T et. Sternberg E. Some theorems in classical elastodynamics.  
*Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 31:51{90, 1968.
- [194] Wilson E. Structural analysis of axisymmetric solids. *AIAA Journal* 1965, Vol.3.
- [195] Wolf J.P et Darbre GR (1984), Dynamic stiffness matrix of embedded and pile foundations by indirect boundary-element method, *Nucl Eng Des* 80, 331-342.
- [196] Wong H.L, Luco J.E. Dynamic interaction between rigid foundations in a layered half-space. *Soil dynamics and Earthquake Engineering* 1986; 5 (3) : 149-158.
- [197] Wolf J.P. Dynamic soil-structure interaction. Prentice-hall, Inc., London. 1985.
- [198] Yu H et al (1992), Dynamic response of soil structure interaction – A simple methode for calculating the dynamic complance function of soils, in *Proc 10th World Conf of Earthquake Eng , Madrid*. Vol 3, AA Balkema, Rotterdam, 935-940.
- [199] Zeng X, Askar A, et Cakmak AS (1985), Soil-structure interaction in coupled rocking and sliding vibratio- the plane problem, *Soil Dyn Earthquake Eng*, 4, 140-150.
- [200] Zhou Xr, Wiberg NE, et Tullberg O (1986), Dynamic soil-structure interaction problem including viscous damping, *Boundary Elements*, DO Q (ed), Pergamon Press, Oxford, 507-520.
- [201] Zhou Xr, Wu XJ, et Chen HK (1990), BEMTDY- the boundary element analysis program for 3-D transient dynamic field, dans *Boundary Element Methods: Principles and Applications*, Tanaka M et Du Q (eds), Pergamon Press, Oxford, 205-213.

## Annexe

### A. Fichier Résultats pour la variation de l'encastrement $z/b$ avec $h/b=8$ et $d/b=2$ : cas d'une seule fondation chargée

9 3 1  
3 3 1  
3 3 1 1  
2  
2 0.5  
1 0.5  
3.0.

$C_{11}$	$z/b = 0$	$z/b = 1/4$	$z/b = 1/2$	$z/b = 1$
0	0,1095	0,113	0,1114	0,104
0,5	0,1308	0,1301	0,1274	0,1219
1	0,0943	0,0939	0,0906	0,0809
1,5	0,0793	0,0827	0,0829	0,0746
2	0,0709	0,078	0,0785	0,0717
2,5	0,0549	0,0629	0,0633	0,0606
3	0,0378	0,0431	0,0359	0,0283
3,5	0,0345	0,0412	0,0327	0,0259
4	0,0439	0,0418	0,0296	0,0255
4,5	0,0357	0,0457	0,0282	0,0277
5	0,0341	0,0426	0,0332	0,0285
5,5	0,0407	0,0192	0,0363	0,0327
6	0,0379	0,0255	0,0257	0,0228

$C_{12}$	$z/b = 0$	$z/b = 1/4$	$z/b = 1/2$	$z/b = 1$
0	0,0194	0,017	0,0179	0,0195
0,5	0,0312	0,027	0,0276	0,0306
1	0,0128	0,0141	0,0132	0,0102
1,5	0,0118	0,0121	0,0117	0,0109
2	0,0104	0,0102	0,0102	0,0093
2,5	0,0094	0,0111	0,0075	0,0049
3	0,0101	0,013	0,0121	0,0091
3,5	0,0118	0,0109	0,0115	0,0106
4	0,0082	0,0096	0,0111	0,0107
4,5	0,008	0,0053	0,0122	0,0093
5	0,0094	0,0028	0,0065	0,0072
5,5	0,0064	0,0088	0,0005	0,0023
6	0,0016	0,0044	0,0035	0,0042

## B. Fichier Résultats pour la variation de la distance $d/b$ avec $z/b=0$ et $h/b=8$ : cas de deux fondations chargées

9 3 1  
 3 3 1  
 3 3 1 1  
 2  
 2 0.5  
 1 0.5  
 3.0.

$C_{11}$	$d/b = 2$	$d/b = 4$	$d/b = 6$	$d/b = 8$
0	0,0981	0,1	0,1034	0,1065
0,5	0,1057	0,1087	0,1145	0,1203
1	0,0926	0,0895	0,082	0,0749
1,5	0,083	0,0807	0,0766	0,0741
2	0,076	0,0738	0,0703	0,0683
2,5	0,0614	0,0601	0,0591	0,0584
3	0,0443	0,0449	0,0472	0,048
3,5	0,0361	0,0384	0,0419	0,0441
4	0,0408	0,042	0,0432	0,0445
4,5	0,0346	0,0356	0,0364	0,0375
5	0,0299	0,0307	0,0308	0,0312
5,5	0,0334	0,0326	0,0307	0,0294
6	0,0362	0,0341	0,0319	0,03

$C_{12}$	$d/b = 2$	$d/b = 4$	$d/b = 6$	$d/b = 8$
0	0,1679	0,2034	0,3272	0,7962
0,5	0,1427	0,1693	0,2591	0,5449
1	0,0983	0,1033	0,0955	-0,0592
1,5	0,1102	0,1209	0,1464	-0,7083
2	0,106	0,1181	0,1771	-1,6272
2,5	0,0779	0,0894	0,2558	1,9335
3	0,0345	0,0283	0,0336	-0,3872
3,5	-0,0121	-0,0342	-0,1034	-0,7689
4	-0,0718	-0,1157	-0,301	-0,5346
4,5	-0,0555	-0,0955	-0,1109	0,0459
5	-0,058	-0,0881	-0,1668	-0,9243
5,5	-0,0727	-0,102	-0,1982	-0,5995
6	-0,0832	-0,1079	-0,2008	-0,0836

**C. Fichier Résultats pour la variation de la hauteur du substratum  $h/b$  avec  $z/b=0$  et  $d/b=2$  : cas de deux fondations chargées**

9 3 1  
3 3 1  
3 3 1 1  
2  
2 0.5  
1 0.5  
3.0.

$C_{11}$	$h/b = 2$	$h/b = 4$	$h/b = 8$	semi-infini
0	0,0762	0,0836	0,0981	0,0937
0,5	0,0763	0,0855	0,1057	0,0922
1	0,0793	0,0965	0,0926	0,0893
1,5	0,0853	0,1317	0,083	0,0775
2	0,0964	0,0568	0,076	0,0654
2,5	0,1176	0,031	0,0614	0,0518
3	0,1535	0,0336	0,0443	0,0412
3,5	0,0748	0,0382	0,0361	0,0369
4	-0,0212	0,0429	0,0408	0,0305
4,5	-0,0016	0,047	0,0346	0,0278
5	0,0238	0,0509	0,0299	0,0223
5,5	0,0324	0,0316	0,0334	0,0194
6	0,0309	0,009	0,0362	0,0194

$C_{12}$	$h/b = 2$	$h/b = 4$	$h/b = 8$	semi-infini
0	0,576	0,1977	0,1679	0,1265
0,5	0,5544	0,1864	0,1427	0,1198
1	0,5074	0,1586	0,0983	0,1128
1,5	0,4322	0,1213	0,1102	0,0958
2	0,3587	0,0678	0,106	0,0799
2,5	0,3074	0,0312	0,0779	0,0465
3	0,2523	-0,0081	0,0345	0,0284
3,5	0,1093	-0,0439	-0,0121	-0,0143
4	0,0489	-0,0824	-0,0718	-0,0165
4,5	0,0062	-0,065	-0,0555	-0,0494
5	-0,0257	-0,067	-0,058	-0,0593
5,5	-0,0451	-0,0778	-0,0727	-0,0563
6	-0,0562	-0,076	-0,0832	-0,0704