BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année: 2017/2018

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

STABILITE D'UN SYSTEME THERMO-ELASTIQUE POREUX

Option
Mathématiques Appliquées

Par
Ghennam Karima

DIRECTEUR DE THÈSE: Djebabla Abdelhak	M.C.A	U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT: Guezane-Lakoud Assia	Prof	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR: Benouhiba Nawel	Prof	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR: Boussetila Nadjib	Prof	U. 8 MAI. GUELMA
EXAMINATEUR: Nisse Lamine	Prof	U. EL OUED
EXAMINATEUR: Ardjouni Abdelouaheb	M.C.A	U. SOUK-AHRAS

Remerciements

Je remercie profondément mon directeur de thèse Docteur Djebabla Abdelhak. Pour la confiance qu'il m'a accordé, sa disponibilité, ses mots de soutien quand j'avais des difficultés ou des problèmes de motivation.
Aussi, j'exprime mes remerciements à Mme. Guezane-Lakoud Assia, Professeur à l'UBM Annaba d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie vivement le Professeur Nisse Lamine de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury. J'adresse également mes remerciements aux Professeurs Benouhiba Nawel et Boussetila Nadjib et au Docteur Ardjouni Abdelouheb pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.
Enfin, j'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin.

Merci a tous...

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de la stabilisation de certains systèmes thermo-élastiques unidimensionnels, le premier est un système formé de deux équations hyperboliques couplées à deux équations paraboliques impliquant la température et la micro-température. Ce système apparaît en thermo-élasticité poreuse. Le deuxième est un système poreux thermo-visco-élastique, où la conduction thermique est donnée par la théorie de Green et Naghdi appelé type III. Le dernier est aussi un système thermo-visco-élastique type III où les oscillations sont définies par le modèle de Timoshenko avec deux amortissements type mémoire.

Pour démontrer la stabilisation de ces systèmes, nous utilisons une technique des multiplicateurs, elle se base sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov équivalente à l'énergie.

Dans les deux derniers systèmes nous introduisons deux nouveaux nombres de stabilité et nous prouvons un résultat général de décroissance, à partir du quel la décroissance exponentielle et polynomiale ne sont que des cas particuliers.

Pour mieux observer l'effet de la dissipation faible (effet thermique ou amortissement thermo-visco-élastique) sur le changement de la nature des nombres de stabilité, nous renvoyons le lecteur à [6].

Mots clés : Thermoélasticité type III - Poreux - Timoshenko - Stabilité - Fonctionnelle de Lyapunov.

Abstract

In this thesis, we are interested in studying the stabilization of some one-dimensional thermoelastic systems, the first is a system of two hyperbolic equations coupled to two parabolic equations involving temperature and micro-temperature. This system appears in porous thermoelasticity. The second is a porous thermoviscoelastic system, where the thermal conduction is given by the theory of Green and Naghdi called thermoelasticity type III. The last one is also a thermo-visco-elastic system type III where the oscillations are defined by the model of Timoshenko with two memory type damping.

To show the stabilization of these systems, we use a multipliers technique, it is based on the construction of a Lyapunov function equivalent to energy. In the last two systems we introduce two new stability numbers and prove a general decay result, from which the exponential and polynomial decay are only special cases.

For better observe the effect of weak dissipation (thermal effect or thermo-viscoelastic damping) on the change in the nature of stability numbers, we refer the reader to [6].

Key words : Thermoelasticity type III - Porous - Timoshenko - Stability - Lyapunov Function.

ملخص

ندرس في هذه الأطروحة، استقرار أنظمة مكونة من معادلات تفاضلية جزئية أحادية البعد، تمثل هذه المعادلات ما يسمى بالأنظمة المتأ ثرة بالحرارة و الحرارة الجزئية أوالأنظمة من النوع الثالث المتأ ثرة بالحرارة و المرونة و تتمثل هذه الأخيرة في أنظمة Timoshenko.
بإ ستعمال النظرية الطاقوية التي تعتمد على بناء دالة جديدة تسمى دالة Lyapunov، نظهر الإستقرار الشامل و الأسي للأنظمة المطروحة في الفصول الثلاثة.

الكلمات المفتاحية : الأنظمة من النوع الثالث - أنظمة Timoshenko - الإستقرار - دالة Lyapunov.

Table des matières

Introduction

En mécanique, les mouvements vibratoires sont souvent nocives à la structure. Pour cela, des amortissements de différents types ont été élaborés et incorporés directement dans le système, sur la frontière ou une partie de la frontière. Par exemple, les amortissement de type friction, thermique ou viscoélastique. Ainsi, dans les application il est crucial que la stabilisation se produit très rapidement, afin d'empêcher les dommages possibles de la structures ou de son fonctionnement. Dans la théorie de la thermoélasticité, la déformation d'un corps est associée à un changement de la température corporelle. En d'autres termes, la thermoélasticité traite la relation entre les propriétés élastiques d'un matériau et sa température, ou entre sa conductivité thermique et ses contraintes. En fait, la théorie de la thermoélasticité remonte au travail pionnier de Duhamel [7], quand il a dérivé les équations joignant la souche dans un corps élastique au gradient de température. Plus tard en 1841, ces mêmes résultats ont été confirmés par Neumann [34].

Au cours des trois dernières décennies, les problèmes liés à la thermoélasticité classique ont été examinés par de nombreux auteurs et de nombreux résultats de stabilité ont été établis. Par exemple, Muñoz Rivera [30] et Hansen [16] ont considéré indépendamment le système

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \theta_t - \gamma \theta_{xx} + \delta u_{tx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

où u est le déplacement transversal d'un faisceau de longueur L et θ est la différence de température, et ont prouvé que l'amortissement de la chaleur est assez fort pour stabiliser exponentiellement la partie oscillante de l'équation d'onde.

Dans le système ci-dessus, le flux de la chaleur est donné par la loi de Fourier. En conséquence, cette théorie prédit une vitesse infinie de propagation de la chaleur. A un moment donné cette perturbation thermique a un effet instantané ailleurs dans le corps. Des expériences ont montré que la conduction de la chaleur dans certains cristaux diélectriques à basse température est exempte de ce paradoxe et que les perturbations, qui sont presque entièrement thermiques, se propagent à une vitesse finie. Pour surmonter ce paradoxe physique, il y'a eu plusieurs théories telle que la thermo-élasticité de type III. Pour le contexte lié à cette théorie, nous renvoyons le lecteur à Green et Naghdi [12]-[13].

Muñoz Rivera et Racke [32] ont étudié le système thermo-élastique type Timoshenko suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

où φ, ψ et θ sont le déplacement transversal, l'angle de rotation du filament et la différence de température, respectivement. Ils ont montré que le système, avec diverses conditions aux limites, est exponentiellement stable si et seulement si les vitesses de propagation sont égales. Notons par κ_0 la différence entre ces vitesse

$$\kappa_0 = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}. \tag{3}$$

Un grand nombre de résultats intéressants sur la décroissance exponentielle des systèmes de Timoshenko avec une dissipation efficace dans une seule équation ont été établis, à condition que $\kappa_0 = 0$. Ammar Khodja et al. [1] ont considéré l'effet de mémoire. Rivera et Fernandez [31] ont étudié les systèmes de Timoshenko avec une histoire passée avec des conditions appropriées sur le terme histoire. Voir aussi [10], [2], [14], [33] et [25] et les références qui s'y trouvent.

Pour des données initiales suffisamment régulières, Guesmia et al [15] ont montré que le taux de décroissance du système (2) est polynomial, quand $\kappa_0 \neq 0$.

Magaña et Quintanilla [24] ont considéré le système thermo-élastiques poreux suivant

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \gamma u_{txx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ J\varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \beta u_{tx} + m\varphi_t = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

où u est le déplacement transversal, φ est la différence de fraction volumique et θ est la différence de température. Ils ont montré que la dissipation produite par l'amortissement thermique dans la troisième équation en présence du fort amortissement u_{txx} n'est pas assez puissante pour stabiliser uniformément le système.

Contrairement à cela, Casas et Quintanilla [4] ont montré qu'une dissipation par un amortissement poreux $\tau\varphi_t$ dans la seconde équation, en plus de la dissipation thermique, suffit pour stabiliser le système obtenu de manière exponentielle.

Messaoudi et Fareh [26] ont considéré le système poreux avec mémoire suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\varphi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \theta + \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}ds = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \varphi_{xt} + \psi_x + \theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

où g est une fonction de relaxation supposée satisfaire certaines conditions. Ils ont obtenu, pour le cas $\kappa_0 = 0$, un résultat général de décroissance, donnant notamment les taux de décroissance exponentielle et polynomiale. Le cas où $\kappa_0 \neq 0$ a été discuté dans [27]. Voir aussi [38].

Avec la nouvelle théorie de thermoélasticité, Messaoudi et Said-Houari ont considéré le système thermoélastique type III de la forme de Timoshenko suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\varphi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \varphi_{xt} + \psi_x - \alpha\theta_{txx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Ils ont prouvé une décroissance exponentielle dans le cas où $\kappa_0 = 0$. Et en ajoutant à la deuxième équation de ce dernier système un amortissement viscoélastique de la forme $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s,.)ds$ [29]. Ils ont prouvé que l'énergie décroit exponentiellement pour des vitesses de propagations égales et décroit polynomialement pour des vitesses de propagations non égales c'est à dire $\kappa_0 \neq 0$.

Djebabla et Tatar [6] ont amélioré le résultat précédent en remplaçant la dissipation forte par une autre plus faible de type visoélastique de la forme $\displaystyle\int_0^\infty g(t-s)\theta_{xx}ds$, plus precisement, ils ont étudié le système

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\varphi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_{tt} - l\theta_{xx} + \beta\displaystyle\int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(x,s)ds + \gamma\psi_{ttx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

et ils ont introduit deux nouveaux nombres de stabilité exponentielle ν_1 et ν_2 telles que

$$\nu_1 = \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 - \gamma \text{ et } \nu_2 = l - \frac{k\rho_3}{\rho_1} - \gamma.$$

Dans [21], Kafini a considéré le système (2) et a prouvé, pour les mêmes conditions sur les coefficients mais pour des fonctions de relaxation décroissantes plus générales, un résultat général de décroissance, dont les décroissances exponentielles et polynomiales ne sont que des cas particuliers.

Plus tard, Santos [37] a défini un autre nombre de stabilité χ_0 pour le système de

Timoshenko suivant avec un deuxième son

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{xx} - \delta\theta = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases}$$

où il a utilisé la théorie des semi-groupes et il a montré que le système décroit exponentiellement si et seulement

$$\chi_0 = (\tau - \frac{k\rho_1}{\rho_3})(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{\rho_3 k} = 0.$$

Dans cette thèse, nous considérons trois problèmes. Le premier est un système thermo-élastique poreux unidimensionnel formé de quatre équations différentielles partielles. Deux équations hyperboliques couplées à deux équations paraboliques, l'amortissement est constitué de champ thermique classique et de microtempérature. En utilisant la méthode des multiplicateur nous établissons un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie.

Le deuxième est un système thermo-élastique poreux unidimensionnel de thermo-élasiticité type III. En amortissant ce système par une dissipation thermique faible. Nous prouvons un résultat général de décroissance avec deux nouveau nombres de stabilité.

Le dernier problème est un système thermo-élastique type Timoshenko, type III amorti par deux dissipations visco-élastiques. En appliquant la méthode de l'énergie, un résultat de stabilité générale est obtenu. Il convient de mentionner ici qu'à notre connaissance, il n'y a pas de résultat concernant les systèmes de Timoshenko type III, en présence de deux amortissements de type mémoire.

Cette thèse se compose de quatre chapitres :

Chapitre 1 : Nous prèsentons des notions préliminaires.

Chapitre 2 : Concerne un problème thermo-élastique poreux avec un effet thermique et un effet micro-thermique, il est constitue de trois sections : position du problème, résultat d'existence et d'unicité et résultat de stabilité exponentielle.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous étudions un problème poreux de thermo-élasticité type III, en utilisant la méthode des multiplicateurs nous démontrons la stabilité générale de ce systéme.

Chapitre 4 : Ce dernier chapitre constitue l'essentiel de ce travail. où nous nous intéressons à la stabilité de la poutre de Timoshenko de thermo-élasticté type III et nous donnons un résultat de décroissance générale. Il a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale : K. Ghennam and A. Djebabla, *Energy decay result in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with weak damping*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI :10.1002/mma.4873, (2018).

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques espaces de Sobolev et certaines inégalités dans ces espaces qu'on utilisera ultérieurement et nous donnons brièvement, les définitions et les notations de quelques produits de convolution et aussi quelques inégalités intégrales qui nous seront utiles pour la suite de notre travail. Dans ce qui suit, on désignera par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

1.1 Espace de sobolev

Commençons par les espaces $L^p(\Omega)$.

1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1. *On définit l'espace $L^p(\Omega)$ par*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^p(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \textit{ mesurables telles que} \qquad (1.1) \\ \int_\Omega |f(x)|^p\, dx &< +\infty\ ,\ si\ 1 \le p < +\infty\ et\ \sup ess\, |f(x)| < +\infty,\ si\ p = +\infty\} \end{aligned}$$

Théorème 1.1.1. *Les espaces $L^p(\Omega)$, munis des normes suivantes*

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\ pour\ 1 \le p \le +\infty \quad et \quad ||f||_{L^\infty} = supess|f(x)|, \tag{1.2}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.1.1. *Pour $p = 2$, l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

1.1.2 Les espaces de sobolev $H^m(\Omega)$

Théorème 1.1.2. *Etant donné $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev où*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \ \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m \ \exists v_\alpha \in L^2(\Omega) \ tel \ que \ v_\alpha = \partial^\alpha u \ au \ sens \ faible\} \tag{1.3}$$

On introduit sur H^m le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{\alpha_l eqm} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle, \tag{1.4}$$

et la norme associée $||u||_{H^m} = \sqrt{\langle u, v \rangle_m}$.

Théorème 1.1.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.4) est un espace de Hilbert séparable.*

Dans le cas $m = 1$ on utilise la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ pour définir l'espace de Sobolev suivant :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \tag{1.5}$$

H désigne un espace de Hilbert, $H^{'}$ son dual.

Théorème 1.1.4. *[3] (**Lax-Milgram**) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H^{'}$ il existe $u \in$ tel que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété.

$$u \in H \qquad et \qquad \frac{1}{2} a(u, v) - \langle \varphi, u \rangle = Min \left\{ \frac{1}{2} a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.1.5. *[3] (**Hille-Yosida**) Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction*

$$u \in C^1([0,+\infty]; H) \cap C([0,+\infty]; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & sur\ [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 & (donnée \quad initiale). \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \qquad et \qquad |\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \leq |Au_0| \qquad \forall t \geq 0.$$

1.2 Quelques inégalités

Lemme 1.2.1. *(**Inégalité de Hölder**) Soient p et p deux nombres réels conjugués c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ $g \in L^q(\Omega)$, et $q \in]1,+\infty[$ on a*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.1. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hö lder dans le cas $p = 2$, $q = 2$.*

Lemme 1.2.2. *(**Inégalité de Young**) Soient p et q deux nombres réels conjugués dans $]1,+\infty[$. Alors, pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}_+$ on a*

$$\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon}{p}\alpha^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}\beta^q, \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.7}$$

En particulier pour $p = q = 2$ on a

$$\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\beta^2, \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.8}$$

Lemme 1.2.3. ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Il existe une constante $c > 0$ vérifiant :*

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \ \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.9}$$

où $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$

Notons qu'à partir de cette inégalité, on montre que $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$, et par conséquent $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f(x).\nabla g(x) dx. \tag{1.10}$$

Aussi, on donne l'inégalité de Poincaré habituelle dans $L^2(\Omega)$ à partir du lemme suivant :

Lemme 1.2.4. *Soit $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C positive vérifiant*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.11}$$

1.3 Produit de convolution

Définition 1.3.1. ***(Produit de convolution)*** *Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g est une fonction, qui se note généralement $(f * g)$ et qui est définie par :*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f(s)g(t-s)ds. \tag{1.12}$$

Définition 1.3.2. *Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes. On définit les opérateurs binaires $\diamond$ et $\circ$ respectivement par*

$$(f \diamond g)(t) = \int_0^t |f(t-s)| \left(|g(t) - g(s)|\right) ds \tag{1.13}$$

et

$$(f \circ g)(t) = \int_0^t |f(t-s)| \, |g(t) - g(s)|^2 \, ds \tag{1.14}$$

Lemme 1.3.1. *[1] Soientf etg deux fonctions de $C^1[0,\ L]$, alors on a*

$$(g * f)\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2}g(t)|f(t)|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{dt} \circ f\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g \circ f - \left(\int_0^t g(s)ds\right)|f(t)|^2\right). \tag{1.15}$$

Lemme 1.3.2. *[9] Soit g une fonction de $C^1[0,L]$. Alors, il existe une constante positive c_0 tel que*

$$\int_\Omega (g \diamond f)^2 \, dx \leq c_0 \int_\Omega (gof) \, dx,$$

pour tout $f \in L^2(0,L)$.

Remarque 1.3.1. *Utisant le Lemme 1.3.2 et l'inégalité de Poincaré, avec $-g'$, au lieu de g, on obtient*

$$\int_\Omega \left(\int_0^t -g'(t-s)(h(t) - h(s))\,ds\right)^2 dx \leq c_0 \int_\Omega \left(g' \circ h_x\right) dx.$$

Lemme 1.3.3. *Supposant que la fonction $g \in C^1[0,L]$. Alors, il existe une constante positive c_0 tel que*

$$\int_\Omega (h_x - (g * h_x))^2 \, dx \leq c_0 \left(\int_\Omega h_x^2 dx + \int_\Omega (g \circ h_x)\, dx\right), \quad t \geq 0,$$

pour tout $h \in L^2(\Omega)$.

Preuve. Utilisant le fait que $\left(a^2 + b^2\right) \leq 2a^2 + 2b^2$ et le lemme 1.3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (h_x - (g * h_x))^2 \, dx \\
&\leq 2\int_\Omega h_x^2 dx + 2\int_\Omega (\int_0^t g(t-s)(h_x(t) - h_x(s) - h_x(t))\,ds)^2 dx \\
&\leq \left(2 + 4\left(\int_0^t g(s)ds\right)^2\right)\int_\Omega h_x^2 dx + 4\int_\Omega (g \diamond h_x)^2 \, dx \\
&\leq c_0 \left(\int_\Omega h_x^2 dx + \int_\Omega (g \circ h_x)\, dx\right).
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ⧫

1.4 Inégalités intégrales

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs et aussi non dissipatifs. En effet, plusieurs résultats concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants :

Lemme 1.4.1. *[17] Soient* $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante et* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction strictement croissante de classe* $C^1(\mathbb{R}_+)$ *telle que :* $\phi(0) = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$*. Supposant que :* $\exists p \geq 0$ *et* $d > 0$ *tels que*

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) E^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0) E(s), \quad \forall s > 0. \tag{1.16}$$

Alors

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0) e^{1-d\phi(t)} \quad \forall t > 0 \text{ si } p = 0 \\ E(t) \leq E(0) \left(\dfrac{1+p}{1+pd\phi(t)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall t > 0 \text{ si } p > 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

dans le cas particulier où $\phi(t) = t$ *on déduit les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \textbf{a)}\ E(t) &\leq E(0) e^{1-dt} \quad \forall t > 0 \text{ si } p = 0 \qquad (1.18) \\ \textbf{b)}\ E(t) &\leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pdt} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall t > 0 \text{ si } p > 0, \end{aligned}$$

appelées respectivement, estimation exponentielle [17] et estimation polynomiale [22].

Lemme 1.4.2. *[8] Soit* $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue (décroissante) vérifiant*

$$\int_s^{+\infty} \phi(E(t)) dt \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s > 0, \tag{1.19}$$

où d *est un réel strictement positif et* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant* $\phi(0) = 0$*. Alors il existe trois réels strictement positifs* t_0, c_0 *et* c_1 *tels que*

$$E(t) \leq \phi^{-1} \left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t} \right), \ \forall t > t_0, \tag{1.20}$$

où $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est définie par*

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\phi(t)} dt, \ \forall s > 0. \tag{1.21}$$

Chapitre 2

Système poreux avec effet thermique et microthermique

Ces dernières années, les matériaux poreux, sont largement utilisés dans l'ingénierie, tels que les véhicules, les avions, les grandes structures spatiales et ainsi de suite.

En raison de leurs applications étendues, le problème d'élasticité de ce type de matériaux est devenu une question brûlante qui attire l'attention de nombreux chercheurs. En introduisant le concept d'une théorie continue des matériaux granulaires et interstitiels, Goodman et Cowin en 1972 [11] ont proposé une extension de la théorie de l'élasticité classique aux milieux poreux. Outre les effets élastiques habituels, la masse de ces matériaux dans chaque point peut être obtenue comme le produit de la densité massique de la matrice de matière par la fraction volumique. Cette idée a été développée par Nunziato et Cowin [35] pour proposer une théorie non-linéaire pour ce type de matériaux élastiques. Ensuite en 1983 [5], Cowin et Nunziato ont établi la théorie linéaire de ces matériaux. Plus tard Ieşan [18]-[20] a ajouté à cette théorie la température ainsi que l'élément microtempérature.

Les équations d'évolution pour les matériaux poreux en une dimension et en présence de la température et la micro température sont données par

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_x, & J\phi_{tt} = H_x + G \\ \rho \eta_t = q_x, & \rho E_t = P_x + q - Q \end{cases}$$

où T est le stress, H est le stress équilibré, G est la force corporelle équilibrée, q est le flux de chaleur, η est l'entropie, P est le premier moment de flux de chaleur, Q est le flux de chaleur moyen et E est le premier moment de l'énergie. Les variables u et ϕ sont, respectivement, le déplacement du matériau élastique solide et la fraction volumique.

Et les équations constitutives sont

$$\begin{cases} T = \mu u_x + b\phi + \gamma u_{tx} - \beta\theta, & H = \alpha\phi_x - d\omega, \\ G = -bu_x - \xi\phi + m\theta - \tau\phi_t, & \rho\eta = \beta u_x + c\theta + m\phi, \\ q = \kappa\theta_x + \kappa_1\omega, & P = -\kappa_2\omega_x, \\ Q = \kappa_3\omega + \kappa_4\theta_x, & \rho E = -\delta\omega - d\phi_x. \end{cases}$$

où θ et ω sont la température et la microtempérature, respectivement. Et $\rho, J, \mu, \gamma,$ $\alpha, d, \xi, m, \beta, c, \kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \delta$ sont les coefficients constitutifs dont la signification physique est bien connue.

Notons que le concept de micro-température vient d'être utilisé dans la théorie de la thermodynamique pour les matériaux élastiques à microstructure. Dans [36], Santos a étudié le système élastique poreux en présence de viscosité poreuse et sans dissipation élastique. Et en le combinant avec des microtempératures, il a obtenu le système suivant

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ J\phi_{tt} - \alpha\phi_{xx} + bu_x + d\omega_x + \xi\phi + \tau\phi_t = 0 & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \delta\omega_t - \kappa_2\omega_{xx} + d\phi_{tt} + \kappa_3\omega = 0 & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

et il a montré qu'il est exponentiellement stable si et seulement si $\dfrac{\rho}{\mu} - \dfrac{J}{\alpha} = 0$, et qu'il décroit polynomialement avec un taux optimal si et seulement si $\dfrac{\rho}{\mu} - \dfrac{J}{\alpha} \neq 0$.

Le système (2.1) a été étudié par A. Magaña et R. Quintanilla dans [23] et [24]. Là, les auteurs ont utilisé le théorème de Routh-Hurwitz pour prouver l'absence de décroissance exponentielle si $\dfrac{\rho}{\mu} - \dfrac{J}{\alpha} \neq 0$.

Dans ce chapitre, nous considérons un système thermoélastique poreux formé d'équations amorti par des effets thermal et micro-thermale impliquant la différence de température et la microtempérature. nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution et la décroissance exponentielle de l'énergie.

2.1 Position du problème

Considérons le système thermo-élastique suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + \varphi)_x + \gamma\theta_x = 0, & x \in [0,1], \quad t \geq 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - \alpha\varphi_{xx} + k(u_x + \varphi) + d\omega_x - m\theta = 0, & x \in [0,1], \quad t \geq 0, \\ \rho_3 \theta_t - l\theta_{xx} + \gamma u_{tx} + m\varphi_t - k_1\omega_x = 0, & x \in [0,1], \quad t \geq 0, \\ \rho_4 \omega_t + k_2\omega - k_3\omega_{xx} + k_1\theta_x + d\varphi_{tx} = 0, & x \in [0,1], \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), & \\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \omega(x,0) = \omega_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & \\ u(x,t) = \varphi_x(x,t) = \theta_x(x,t) = \omega(x,t) = 0, & x = 0,1, \end{cases} \tag{2.2}$$

où ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, α, γ, l, m, d, k, k_1, k_2, k_3 sont des constantes positives, u est le déplacement, φ est la fraction volumique, θ est la différence de température et ω est la microtempérature.

Afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Poincaré pour φ et θ, on déduit de la troisième équation du système (2.2)

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta dx = -\frac{m}{\rho_3}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi dx, \quad t \geq 0.$$

$$\int_0^1 \theta dx + \frac{m}{\rho_3}\int_0^1 \varphi dx = \int_0^1 \theta_0(x)dx + \frac{m}{\rho_3}\int_0^1 \varphi_0(x)dx,\ \forall t \geq 0.$$

En supposant les conditions suivantes (ces conditions ont été imposées dans [4]),

$$\int_0^1 \theta_0(x)dx = \int_0^1 \varphi_0(x)dx = 0, \tag{2.3}$$

nous obtenons

$$\int_0^1 \theta dx = -\frac{m}{\rho_3}\int_0^1 \varphi dx.$$

A partir de la deuxième équation du système (2.2) nous aurons

$$\begin{aligned} &\rho_2 \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 \varphi dx + k\int_0^1 \varphi dx - m\int_0^1 \theta dx \\ &= \rho_2 \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 \varphi dx + (k + \frac{m^2}{\rho_3})\int_0^1 \varphi dx = 0, \end{aligned}$$

donnant

$$\int_0^1 \varphi dx = (\int_0^1 \varphi_0(x)dx)\cos(\nu t) + \frac{1}{\nu}(\int_0^L \varphi_1 dx)\sin \nu t, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\nu = \sqrt{\frac{k}{\rho_2} + \frac{m^2}{\rho_2\rho_3}}$.

Ainsi, si nous mettons

$$\bar{\varphi}(x,t) = \varphi(x,t) - \frac{1}{\nu}\left(\int_0^1 \varphi_1(x)dx\right)\sin(\nu t), \qquad t \geq 0,\ x \in [0,1]$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x,t) &= \theta(x,t) - \int_0^1 \theta(x,t)dx = \theta(x,t) + \frac{m}{\rho_3}\int_0^1 \varphi(x,t)dx \\ &= \theta(x,t) + \frac{m}{\rho_3\nu}(\int_0^1 \varphi_1(x)dx)\sin(\nu t), \qquad t \geq 0,\ x \in [0,1] \end{aligned}$$

nous trouvons

$$\int_0^1 \bar{\theta}(x,t)dx = \int_0^1 \bar{\varphi}(x,t)dx = 0, \quad t \geq 0 \tag{2.4}$$

et $(u, \bar{\varphi}, \bar{\theta}, \omega)$ vérifié le système (2.2).

Dans la suite nous allons travailler avec $\bar{\varphi}$ et $\bar{\theta}$ mais par commodité nous utilisons à leur place φ et θ.

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section, en utilisant le théorème de Hille-yosida, nous démontrons l'existence et l'unicite de la solution du système (2.2).

Soit l'espace de Hilbert suivant

$$H = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_*^1(0,1) \times L_*^2(0,1) \times L_*^2(0,1) \times L^2(0,1)$$

où

$$H_*^1(0,1) = \{\omega \in H^1(0,1);\ \int_0^1 \omega dx = 0\},$$
$$L_*^2(0,1) = \{\omega \in L^2(0,1);\ \int_0^1 \omega dx = 0\}.$$

L'espace H est muni du produit scalaire

$$\langle U, \bar{U} \rangle = \int_0^1 \{\rho_1 v\bar{v} + k u_x \bar{u}_x + \rho_2 \phi\bar{\phi} + \alpha\varphi_x\bar{\varphi}_x + k\varphi\bar{\varphi} + \rho_3\theta\bar{\theta} + \rho_4\omega\bar{\omega}\} dx,$$

tels que $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta, \omega)^T$,et $U = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\varphi}, \bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\omega})^T$.

Ainsi le système (2.2) peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} U' = AU, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, \omega_0)^T, \end{cases} \tag{2.5}$$

où A est un opérateur linéaire définit par

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{k}{\rho_1}(u_x + \varphi)_x - \frac{\gamma}{\rho_1}\theta_x \\ \phi \\ \frac{\alpha}{\rho_2}\phi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(u_x + \varphi) - \frac{d}{\rho_2}\omega_x + \frac{m}{\rho_2}\theta \\ \frac{l}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}v_x - \frac{m}{\rho_3}\phi + \frac{k_1}{\rho_3}\omega_x \\ -\frac{k_2}{\rho_4}\omega + \frac{k_3}{\rho_4}\omega_{xx} - \frac{k_1}{\rho_4}\theta_x - \frac{d}{\rho_4}\phi_x \end{pmatrix}.$$

Le domaine de l'opérateur A est donné par $D(A) = \{U \in H, u, \omega \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \varphi, \theta \in H^2(0,1), v, \phi \in H^1(0,1), \varphi_x = \phi_x = \theta_x = 0, x = 0, 1\}$.

Clairement,$D(A)$ est dense dans H. Ainsi Nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit $U_0 \in H$, alors le problème* (2.5) *admet une solution unique $U \in C(R^+, H)$. De plus, si $U_0 \in D(A)$, alors $U \in C(R^+, D(A)) \cap C^1(R^+, H)$.*

Preuve du théorème 2.2.1. Pour obtenir le résultat ci-dessus, nous allons prouver que A est un opérateur monotone maximal. C'est à dire que A est dissipatif et $Id - A$ est surjectif.

Pour tout $U \in D(A)$, et en utilisant le produit intérieur ainsi que l'intégration par parties, nous obtenons

$$(AU, U)_H = -l \int_0^1 \theta_x^2 dx - k_2 \int_0^1 \omega^2 dx - k_3 \int_0^1 \omega_x^2 dx \leq 0, \; t \geq 0.$$

ce qui implique que A est dissipatif. Ensuite, nous montrons que l'opérateur $Id - A$ est surjectif. Autrement dit, pour chaque $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in H$, nous devons trouver $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta, \omega)^T \in D(A)$ tel que

$$(Id - A)U = F. \tag{2.6}$$

ainsi nous obtenons

$$\begin{cases} u - v = f_1, \\ \rho_1 v - ku_{xx} - k\varphi_{xx} + \gamma\theta_x = \rho_1 f2, \\ \varphi - \phi = f_3, \\ \rho_2\phi - \alpha\varphi_{xx} + ku_x + k\varphi + d\omega_x - m\theta = \rho_2 f_4, \\ \rho_3\theta - l\theta_{xx} + \gamma v_x + m\phi - k_1\omega_x = \rho_3 f_5, \\ (\rho_4 + k_2)\omega - k_3\omega_{xx} + k_1\theta_x + d\phi_x = \rho_4 f_6. \end{cases} \tag{2.7}$$

En substituant $u - f_1 = v$ et $\varphi - f_3 = \phi$ dans les deuxième, quatrième, cinquième et sixième équations du système (2.7), nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1 u - k u_{xx} - k\varphi_{xx} + \gamma\theta_x = \rho_1(f_1 + f_2), \\ \rho_2\varphi - \alpha\varphi_{xx} + k u_x + k\varphi + d\omega_x - m\theta = \rho_2(f_3 + f_4), \\ \rho_3\theta - l\theta_{xx} + \gamma u_x + m\varphi - k_1\omega_x = \gamma\partial_x f_1 + m f_3 + \rho_3 f_5, \\ (\rho_4 + k_2)\omega - k_3\omega_{xx} - k_1\theta_x + d\varphi_x = d\partial_x f_3 + \rho_4 f_6. \end{cases} \tag{2.8}$$

Multipliant respectivement les équations du système (2.8) par $\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}$ et $\bar{\omega}$, et intégrant par parties sur $[0,1]$, nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^1 u\bar{u}dx + k\int_0^1 u_x\bar{u}_x dx + k\int_0^1 \varphi\bar{u}_x dx + \gamma\int_0^1 \theta_x\bar{u}dx = \rho_1\int_0^1 (f_1 + f_2)\bar{u}dx, \\ \rho_2\int_0^1 \varphi\bar{\varphi}dx + \alpha\int_0^1 \varphi_x\bar{\varphi}_x dx + k\int_0^1 u_x\bar{\varphi}dx + k\int_0^1 \varphi\bar{\varphi}dx + d\int_0^1 \omega_x\bar{\varphi}dx \\ -m\int_0^1 \theta\bar{\varphi}dx = \rho_2\int_0^1 (f_3 + f_4)\bar{\varphi}dx, \\ \rho_3\int_0^1 \theta\bar{\theta}dx + l\int_0^1 \theta_x\bar{\theta}_x dx + \gamma\int_0^1 u\bar{\theta}dx + m\int_0^1 \varphi\bar{\theta}dx + k_1\int_0^1 \omega\bar{\theta}_x dx \\ = \gamma\int_0^1 \partial_x f_1\bar{\theta}dx + m\int_0^1 f_3\bar{\theta}dx + \rho_3\int_0^1 f_5\bar{\theta}dx, \\ (\rho_4 + k_2)\int_0^1 \omega\bar{\omega}dx + k_3\int_0^1 \omega_x\bar{\omega}_x dx + k_1\int_0^1 \theta_x\bar{\omega}dx + d\int_0^1 \varphi_x\bar{\omega}dx \\ = d\int_0^1 \partial_x f_3\bar{\omega}dx + \rho_4\int_0^1 f_6\bar{\omega}dx. \end{cases} \tag{2.9}$$

Pour l'espace de Hilbert suivant

$$X \times X = [H_0^1(0,1) \times H_*^1(0,1) \times L_*^1(0,1) \times L^2(0,1)]^2,$$

Nous définissons la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \left((u,\varphi,\theta,\omega)^T, (\bar{u},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{\omega})^T\right) = \int_0^1 & [\rho_1 u\bar{u} + k u_x\bar{u}_x + k\varphi\bar{u}_x + \gamma\theta_x\bar{u} + \rho_2\varphi\bar{\varphi} + \alpha\varphi_x\bar{\varphi}_x \\ & + k u_x\bar{\varphi} + k\varphi\bar{\varphi} + d\omega_x\bar{\varphi} - m\theta\bar{\varphi} + \rho_3\theta\bar{\theta} + l\theta_x\bar{\theta}_x + \gamma u_x\bar{\theta} \\ & + m\varphi\bar{\theta} + k_1\omega\bar{\theta}_x + (\rho_4 + k_2)\omega\bar{\omega} + k_3\omega_x\bar{\omega}_x + k_1\theta_x\bar{\omega} \\ & + d\varphi_x\bar{\omega}]dx, \end{aligned}$$

pour tout $(u,\varphi,\theta,\omega),(\bar{u},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{\omega})\in X$,

et la forme linéaire

$$l\left((\bar{u},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{\omega})^T\right)=\int_0^1[\rho_1(f_1+f_2)\bar{u}+\rho_2(f_3+f_4)\bar{\varphi}+(\gamma\partial_x f_1$$
$$+mf_3+\rho_2 f_5)\bar{\theta}+(d\partial_x f_3+\rho_4 f_6)\bar{\omega}]dx,$$

pour tout $(\bar{u},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{\omega})\in X$.

Nous pouvons montrer que $a(.,.)$ et $l(.)$ vérifient les conditions du théorème de Lax-Milgram. Alors, il existe une solution unique $(u,\varphi,\theta,\omega)\in X$ telle que

$$a\left((u,\varphi,\theta,\omega)^T,(\bar{u},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{\omega})^T\right)=l\left((\bar{u},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{\omega})^T\right), \tag{2.10}$$

pour tout $(\bar{u},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{\omega})\in X$.

Puis, en substituant u et φ dans la première et la troisième équations du système (2.8), nous obtenons $(v,\phi)\in L^2(0,1)\times L^2_*(0,1)$. Finalement, l'application de la théorie de la régularité classique pour les équations linéaires elliptiques garantit l'existence d'une solution unique $(u,v,\varphi,\phi,\theta,\omega)^T\in D(A)$ qui satisfait (2.6). Par conséquent, l'opérateur $Id-A$ est surjectif. Enfin, par le théorème de Hille-Yosida ([3], [24]), nous obtenons le résultat du théorème 2.2.1. ♦

2.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs pour démontrer la stabilité exponentielle du système (2.2), le principe de cette méthode est de construire une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lyapunov, équivalente à l'énergie classique et qui décroit exponentiellement. Nous commençons d'abord, par la construction de quelques lemmes utiles pour la suite de ce chapitre.

Lemme 2.3.1. *Soit* $(u,\varphi,\theta,\omega)$ *solution du système* (2.2)*, alors la fonctionnelle* *énergie définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \{\rho_1 u_t^2 + \rho_2\varphi_t^2 + \rho_3\theta^2 + \rho_4\omega^2 + k(u_x+\varphi)^2 + \alpha\varphi_x^2\}dx,\ t \geq 0. \quad (2.11)$$

vérifié

$$E^{'}(t) = -l\int_0^1 \theta_x^2 dx - k_2\int_0^1 \omega^2 dx - k_3\int_0^1 \omega_x^2 dx, \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

Preuve. En multipliant la première équation du système (2.2) par u_t, la deuxième par φ_t, la troisième par θ et la quatrième par ω, en les sommant et en les intégrant sur $[0,1]$, nous trouvons l'équation (2.12).

Donc la fonction énergétique est non-croissante. Cependant, cette inégalité n'implique pas la décroissance exponentielle vers l'équilibre. Nous devons construire une fonctionnelle de Lyapunov appropriée afin d'établir une estimation de décroissance exponentielle de l'énergie. ♦

Lemme 2.3.2. *Soit*

$$I_1(t) = \rho_1\int_0^1 u_t u dx + \rho_2\int_0^1 \varphi_t\varphi dx, t \geq 0, \quad (2.13)$$

et soit $(u,\varphi,\theta,\omega)$ solution du système (2.2), alors pour tout $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} I_1^{'}(t) \leq & -k\int_0^1 (u_x+\varphi)^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \varepsilon_1\int_0^1 u_x^2 dx + \rho_1\int_0^1 u_t^2 dx \\ & +\rho_2\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{d^2}{\alpha}\int_0^1 \omega^2 dx + (\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} + \frac{m^2}{\alpha})\int_0^1 \theta_x^2 dx, t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Preuve. Dérivant l'équation (2.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_1^{'}(t) = & \rho_1\int_0^1 u_t^2 dx + \int_0^1 [k(u_x+\varphi)_x - \gamma\theta_x]u dx + \rho_2\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + \int_0^1 [\alpha\varphi_{xx} - k(u_x+\varphi) - d\omega_x + m\theta]\varphi dx \\ = & \rho_1\int_0^1 u_t^2 dx - k\int_0^1 (u_x+\varphi)^2 dx + \rho_2\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \alpha\int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ & +\gamma\int_0^1 \theta u_x dx + d\int_0^1 \omega\varphi_x dx + m\int_0^1 \theta\varphi dx,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

et utilisant les inégalités de Young et de Poincaré pour obtenir la relation (2.14). ♦

Lemme 2.3.3. *Soit*

$$I_2(t) = \rho_2\rho_4 \int_0^1 \left(\int_0^x \omega(y,t)\, dy \right) \varphi_t dx,\ t \geq 0, \tag{2.15}$$

et soit $(u, \varphi, \theta, \omega)$ *solution du système* $((2.2))$, *alors pour tout* $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} I_2'(t) \leq & -\frac{\rho_2 d}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 + \varepsilon_1 \alpha \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \varepsilon_1 k \int_0^1 (u_x + \varphi)^2 dx \\ & + C_1(\varepsilon_1) \int_0^1 \omega dx + C_2 \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{3\rho_2 k_3^2}{2d} \int_0^1 \omega_x^2 dx. \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $C_1(\varepsilon_1) = \dfrac{3\rho_2 k_2^2}{2d} + \dfrac{\rho_4^2}{4}(\dfrac{\alpha}{\varepsilon_1} + \dfrac{k}{\varepsilon_1} + \dfrac{2m}{\rho_4})$ *et* $C_2 = \dfrac{\rho_4 m}{2} + \dfrac{3\rho_2 k_1^2}{2d}$.

Preuve. Dérivant la fonction I_2, utilisant la deuxième et la quatrième équations du système (2.2) et intégrant par parties sur [0,1], nous trouvons

$$\begin{aligned} I_2'(t) = & \rho_2 \int_0^1 (\int_0^x [-k_2\omega + k_3\omega_{xx} - k_1\theta_x - d\varphi_{tx}]dy)\varphi_t dx \\ & + \rho_4 \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)[\alpha\varphi_{xx} - k(u_x + \varphi) - d\omega_x + m\theta]dx \\ = & \rho_2 k_2 \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)\varphi_t dx + \rho_2 k_3 \int_0^1 \omega_x \varphi_t dx \\ & + [-\rho_2 k_3 \omega_x(0) + \rho_2 d\varphi_t(0) + k_1\rho_2\theta(0)] \int_0^1 \varphi_t dx \\ & - k_1\rho_2 \int_0^1 \theta\varphi_t dx - \rho_2 d \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_4\alpha \int_0^1 \omega\varphi_x dx + \rho_4 d \int_0^1 \omega^2 dx \\ & - \rho_4 k \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)(u_x + \varphi)dx + \rho_4 m \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)\theta dx. \end{aligned}$$

La condition (2.4), nous donne

$$\begin{aligned} I_2'(t) = & -\rho_2 k_2 \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)\varphi_t dx + \rho_2 k_3 \int_0^1 \omega_x \varphi_t dx \\ & - k_1\rho_2 \int_0^1 \theta\varphi_t dx - \rho_2 d \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_4\alpha \int_0^1 \omega\varphi_x dx + \rho_4 d \int_0^1 \omega^2 dx \\ & - \rho_4 k \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)(u_x + \varphi)dx + \rho_4 m \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)\theta dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, nous obtenons

$$-\rho_2 k_2 \int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)\varphi_t dx \leq \frac{\rho_2 d}{6} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{3\rho_2 k_2^2}{2d} \int_0^1 \omega^2 dx, \tag{2.18}$$

$$\rho_2 k_3 \int_0^1 \omega_x \varphi_t dx \leq \frac{\rho_2 d}{6} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{3\rho_2 k_3^2}{2d} \int_0^1 \omega_x^2 dx, \tag{2.19}$$

$$k_1\rho_2\int_0^1 \theta\varphi_t dx \le \frac{\rho_2 d}{6}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{3\rho_2 k_3^2}{2d} \tag{2.20}$$

$$-\rho_4\alpha\int_0^1 \omega\varphi_x dx \le \varepsilon_1\alpha\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{\rho_4^2\alpha}{4\varepsilon_1}\int_0^1 \omega^2 dx, \tag{2.21}$$

$$\rho_4 m\int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)\theta dx \le \frac{\rho_4 m}{2}\int_0^1 \omega^2 dx + \frac{\rho_4 m}{2}\int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{2.22}$$

$$-\rho_4 k\int_0^1 (\int_0^x \omega(y,t)dy)(u_x+\varphi)dx \le \varepsilon_1 k\int_0^1 (u_x+\varphi)^2 dx + \frac{\rho_4^2 k}{4\varepsilon_1}\int_0^1 \omega^2 dx. \tag{2.23}$$

substituant (2.18)-(2.23) dans (2.17), nous obtenons (2.16). ♦

Lemme 2.3.4. *Soit*

$$I_3(t) = \rho_1\rho_3\int_0^1 (\int_0^x \theta(y,t)dy)u_t dx, \quad t \ge 0, \tag{2.24}$$

et soit $(u,\varphi,\theta,\omega)$ *solution du système* (2.2). *Alors, pour tout* ε_2, δ_1,

$$\begin{aligned} I_3' \le & -\frac{\rho_1\gamma}{2}(1-\delta_1)\int_0^1 u_t^2 dx + \varepsilon_2 k\int_0^1 (u_x+\varphi)^2 dx \\ & +\frac{\rho_1 m^2}{2\delta_1\gamma}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1 k_1^2}{\gamma}\int_0^1 \omega^2 dx + C_3(\epsilon_2)\int_0^1 \theta_x^2 dx, \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

où $C_3(\varepsilon_2) = \dfrac{\rho_1 l^2}{\gamma} + \dfrac{\rho_3^2 k}{4\varepsilon_2} + \rho_3\gamma.$

Preuve. En dérivant la fonction $I_3(t)$, utilisant les deux équations première et troisième du système (2.2) et intégrant par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_3'(t) = & \rho_1\int_0^1 (\int_0^x [l\theta_{xx} - \gamma u_{xx} - m\varphi_t + k_1\omega_x]dy)u_t dx \\ & +\rho_3\int_0^1 (\int_0^x \theta(y,t)dy)[k(u_x+\varphi)_x - \gamma\theta_x]dx \\ = & \rho_1 l\int_0^1 \theta_x u_t dx + \rho_1\gamma\int_0^1 u_t^2 dx - \rho_1 m\int_0^1 (\int_0^x \varphi_t(y,t)dy)u_t dx \\ & +\rho_1 k_1\int_0^1 \omega u_t dx + \rho_3 k[u_x(1)+\varphi(1)]\int_0^1 \theta^2 dx \\ & -\rho_3 k\int_0^1 \theta(u_x+\varphi)dx - \rho_3\gamma\theta(1)\int_0^1 \theta dx + \rho_3\gamma\int_0^1 \theta^2 dx, \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\int_0^1 \theta(x,t)dx = 0,$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} I_3'(t) = \rho_1 l \int_0^1 \theta_x u_t dx - \rho_1 \gamma \int_0^1 u_t^2 dx - \rho_1 m \int_0^1 (\int_0^x \varphi_t(y,t) dy) u_t dx \\ + \rho_1 k_1 \int_0^1 \omega u_t dx - \rho_3 k \int_0^1 \theta(u_x + \varphi) dx + \rho_3 \gamma \int_0^1 \theta^2 dx, \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

D'après les inégalités de Young et de Poincaré nous aurons

$$\rho_1 l \int_0^1 \theta_x u_t dx \leq \frac{\rho_1 \gamma}{4} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_1 l^2}{\gamma} \int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{2.27}$$

$$-\rho_1 m \int_0^1 (\int_0^x \varphi_t(y,t) dy) u_t dx \leq \frac{\delta_1 \rho_1 \gamma}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_1 m^2}{2\delta_1 \gamma} \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \tag{2.28}$$

$$\rho_1 k_1 \int_0^1 \omega u_t dx \leq \frac{\rho_1 \gamma}{4} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_1 k_1^2}{\gamma} \int_0^1 \omega^2 dx, \tag{2.29}$$

$$-\rho_3 k \int_0^1 \theta(u_x + \varphi) dx \leq \varepsilon_2 k \int_0^1 (u_x + \varphi)^2 dx + \frac{\rho_3^2 k}{4\varepsilon_2} \int_0^1 \theta_x^2 dx, \ t \leq 0. \tag{2.30}$$

en substituant (2.22)- (2.25) dans (2.21), nous obtenons (2.20). ♦

Maintenant nous donnons le résultat principal qu'est la décroissance exponentielle du système (2.2).

Théorème 2.3.1. *Si les conditions initiales du système* (2.2) *vérifient la condition* (2.3)*, alors la solution* $(u, \varphi, \omega, \theta)$ *décroit exponentiellement, i.e. existe deux constantes positives* C *et* d *tel que*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-dt}, \forall t \geq 0. \tag{2.31}$$

Preuve du théorème 2.3.1. Premièrement nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov

$$L(t) = NE(t) + I_1(t) + N_1 I_2(t) + N_2 I_3(t), \quad t \geq 0 \tag{2.32}$$

tels que N, N_1, N_2 sont des constantes à déterminer. Pour N assez grand, on peut montrer qu'il existe deux constantes positives β_1 et β_2 tels que

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t \geq 0. \tag{2.33}$$

En prenant en compte (2.12),(2.14), (2.16), (2.25) et la relation

$$\int_0^1 u_x^2 dx \leq 2\int_0^1 (u_x+\varphi)^2 dx + 2\int_0^1 \varphi_x^2 dx,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} L^{'}(t) \leq & -\eta_1 \int_0^1 \omega^2 dx - \eta_2 \int_0^1 \theta_x^2 dx - \eta_3 \int_0^1 \omega_x^2 dx - \eta_4 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ & -\eta_5 \int_0^1 (u_x+\varphi)^2 dx - \eta_6 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \eta_7 \int_0^1 u_t^2 dx, \end{aligned} \tag{2.34}$$

où $\eta_i = 1,\bar{}7$ sont définis comme suit

$$\eta_1 = Nk_2 - \frac{d^2}{\alpha} - N_1 C_1(\varepsilon_1) - \frac{N_2\rho_1 k_1^2}{\gamma},$$

$$\eta_2 = Nl - (\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} + \frac{m^2}{\alpha}) - N_1 C_2 - N_2 C_3(\varepsilon_2),$$

$$\eta_3 = Nk_3 - \frac{3N_1\rho_2 k_1^2}{2d},$$

$$\eta_4 = \frac{\alpha}{2} - \varepsilon_1(N_1\alpha + 2),$$

$$\eta_5 = k - \varepsilon_1(N_1 k + 2) - \varepsilon_2 N_2 k,$$

$$\eta_6 = \frac{N_1\rho_2 d}{2} - \frac{N_2\rho_1 m^2}{2\delta_1\gamma} - \rho_2,$$

$$\eta_7 = \frac{N_2\rho_1\gamma}{2}(1-\delta_1) - \rho_{1.}$$

Si nous sélectionnons nos paramètres avec soin, tous ces termes (du côté droit de (2.34) deviennent négatifs.

Tout d'abord, prenons $\delta_1 = \frac{1}{2}$, et choisissons N_2 assez grand tel que

$$N_2 > \frac{4}{\gamma},$$

et aussi N_1 assez grand tel que

$$N_1 > \frac{2}{\rho_2 d}\left(\frac{N_2\rho_1 m^2}{\gamma} + \rho_2\right) > 0.$$

Ensuite nous sélectionnons ε_1 assez petit tel que

$$\epsilon_1 < \frac{1}{4}\min\left(\frac{\alpha}{N_1\alpha+2}, \frac{k}{N_1k+2}\right),$$

et ε_2 assez petit tel que

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{4N_2}.$$

Enfin nous choisissant N assez grand et vérifié (2.28)

$$Nl - \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} + \frac{m^2}{\alpha}\right) - N_1C_2 - N_2C_3(\varepsilon_2) > 0,$$

$$Nk_2 - \frac{d^2}{\alpha} - N_1C_1(\varepsilon_1) - \frac{N_2\rho_1k_1^2}{\gamma} > 0,$$

$$Nk_3 - \frac{3N_1\rho_2k_3^2}{2d} > 0.$$

Tous ces choix conduisent à

$$L^{'}(t) \leq -C_4\int_0^1 (u_t^2 + \varphi_t^2\theta^2 + \omega^2 + (u_x+\varphi)^2 + \varphi_x^2)dx \leq -C_5E(t),$$

pour certaines constantes C_4 et C_5. Prenant en considération l'équivalence entre $E(t)$ et $L(t)$, nous déduisons que

$$L^{'}(t) \leq -d_1L(t), \quad t \geq 0, \tag{2.35}$$

où $d_1 = \dfrac{C_5}{\beta_2} > 0$. Une simple intégration de (2.35) nous donne

$$L(t) \leq L(0)e^{-d_1t}, \quad t \geq 0,$$

en utilisant de nouveau l'autre côté de la relation d'équivalence, nous obtenons le résultat souhaité (2.31). ♦

Chapitre 3

Système poreux avec dissipation thermo-viscoélastique

En 2008 [38], Soufiane a proposé le problème thermo-élastique poreux avec une dissipation de type mémoire suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - u_{xx} - \varphi_x + \theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \varphi_{tt} - \varphi_{xx} + u_x + \varphi - \theta - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\varphi_{xx}(x,s)ds = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{tx} + \varphi_t = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases}$$

où g est une fonction positive non croissante, et il a démontré la décroissance exponentielle (resp polynomiale) lorsque la fonction de relaxation décroît exponentiellement (resp polynomialement).

Récemment, Messaoudi et Apalara [28] ont considéré un système poreux-thermoélastique de type III avec la présence d'un amortissement viscoélastique

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \theta_x = 0, & x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \alpha \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \theta + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\varphi_{xx}(x,s)ds = 0, & x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \\ \rho_3 \theta_t - \kappa \theta_{xx} + \delta \theta_{xxt} + \varphi_{xtt} + \psi_{tt} = 0, & x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \end{cases}$$

où φ est le déplacement longitudinal, ψ est la fraction volumique, θ est la différence de température et la fonction de relaxation $g : R_+ \to R$ est une fonction non croissante. Ils ont établi un résultat général de décroissance pour le cas des vitesses égales. Notons que le terme θ_{xxt} dans la troisième équation représente une dissipation forte.

Dans ce dernier chapitre nous remplaçons la dissipation forte par une autre qui est plus faible (amortissement frictionnel) de type $\beta\theta_t$ et nous considérons donc avec les données initiales et les conditions aux limites le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma\theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma\theta + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_{xx} ds = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_{tt} - l\theta_{xx} + \beta\theta_t + \gamma\varphi_{ttx} + \gamma\psi_{tt} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(x), & \\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x)\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta_1(x), & \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t \geq 0. & \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Hypothèses et transformations

A fin de montrer la nature dissipative du système, nous faisons le changement suivant : $\varphi_t = \chi \in H_0^1(0, L)$ et $\psi_t = \xi \in H_0^1(0, L)$.

Ainsi le système (3.1) devient

$$\begin{cases} \rho_1\chi_{tt} - k(\chi_x + \xi)_x + \gamma\theta_{tx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\xi_{tt} - b\xi_{xx} + k(\chi_x + \psi) - \gamma\theta_t + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\xi(x,s) ds = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_{tt} - l\theta_{xx} + \beta\theta_t + \gamma\chi_{tx} + \gamma\xi_t = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \chi(x,0) = \chi_0(x),\ \chi_t(x,0) = \chi_1(x),\ \xi(x,0) = \xi_0(x), & \\ \xi_t(x,0) = \xi_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & \\ \chi(0,t) = \chi(t,L) = \xi(0,t) = \xi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t \geq 0 & \end{cases} \tag{3.2}$$

ou ρ_1, ρ_2, ρ_3, α, γ, l, m, d, k, k_1, k_2, k_3 sont des constantes positives.

Concernant la fonction de relaxation g, nous supposons :

(A1) $g : \Re_+ \to \Re_+$ est une fonction dérivable qui vérifié la condition suivante

$$g(0) > 0, \lambda = b - \int_0^\infty g(s) ds = b - \bar{g} > 0$$

$(A2)$ Il existe une fonction dérivable décroissante $\zeta(t) : \Re_+ \to \Re_+$

$$g^{'}(t) \leq -\zeta(t)g(t), \qquad \forall t \geq 0$$

L'existence et l'unicité du système (3.2) est assuré par la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *Soit* $((\chi_0, \chi_1), (\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2$. *Supposon que (A1) et (A2) sont satisfaites. Alors le système* (3.2) *admet une solution unique globale* $(\chi, \xi, \theta) \in (C(\Re_+; H_0^1(0, L)) \cap C^1(\Re_+; L^2(0, L)))^3$

Remarque 3.1.1. *Pour la démonstration on peut utiliser la méthode standard de Galerkin voir [9].*

l'énergie du premier ordre associé au système (3.2) est définie par

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L &\{\rho_1 \chi_t^2 + \rho_2 \xi_t^2 + \rho_3 \theta_t^2 + k(\chi_x + \xi)^2 + l\theta_x^2 \\ &+(b - \int_0^t g(s)ds)\xi_x^2 + g \circ \xi_x\}dx, \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Stabilité générale

Le résultat principal de ce chapitre est donné par.

Théorème 3.2.1. *Soit* $((\chi_0, \chi_1), (\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) \in (H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1))^3$, *et supposons que g satisfait (A1) et (A2) et que les coefficients du système* (3.2) *satisfont la condition*

$$\kappa_0 = \gamma + \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 = 0 \ et \ \kappa_1 = \frac{\rho_1 b}{\rho_2} + \frac{b\gamma}{k} - l = 0. \tag{3.4}$$

Alors, il existe deux constantes positives d_0 *et* d_1 *telles que*

$$E(t) \leq d_0 e^{-d_1 \int_{t_0}^{t_1} \zeta(s)ds}, \qquad \forall t \geq t_0. \tag{3.5}$$

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants

Lemme 3.2.1. *Soit* (χ, ξ, θ) *solution du système* (3.2). *Alors l'énergie* E *définie par* (3.5) *satisfait*

$$E^{'}(t) = -\beta \int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{1}{2} g(t) \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L (g^{'} \circ \xi_x) dx \leq 0, \quad t \geq 0. \qquad (3.6)$$

Preuve. Nous multiplions la première équation du système (3.2) par χ_t, la deuxième par ξ_t, et la troisième par θ_t, nous intégrons sur l'intervalle $[0, L]$ et nous utilisons le lemme 1.3.1 nous obtenons (3.6). ♦

Ensuite, nous introduisons la fonction ω donné par la solution du problème de Dirichlet

$$-w_{xx} = \xi_x, \ w(0) = w(L) = 0.$$

Lemme 3.2.2. *Soit* (φ, ψ, θ) *solution du système* (3.2). *Alors pour toute constante positive* ε_1 *la fonctionnelle*

$$I_1(t) = \rho_1 \int_0^L \chi_t w dx + \rho_2 \int_0^L \xi_t \xi dx, \quad t \geq 0, \qquad (3.7)$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} I_1^{'}(t) \leq & -\frac{\lambda}{2} \int_0^L \xi_x^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_t^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{\rho_1^2 C_p}{4\varepsilon_1} \right) \int_0^L \xi_t^2 dx \\ & + \frac{3\gamma^2 C_p}{b\lambda} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{3\bar{g}}{2\lambda} \int_0^L (g \circ \xi_x)(t) dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Preuve. En dérivant $I_1(t)$ et en utilisant les deux premières équations du système (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_1^{'}(t) = & \rho_1 \int_0^L \chi_t w_t dx + k \int_0^L w_x^2 dx + \gamma \int_0^L \theta_t w_x dx + \rho_2 \int_0^L \xi_t^2 dx \\ & -b \int_0^L \xi_x^2 dx - k \int_0^L \xi^2 dx + \gamma \int_0^L \theta_t \xi dx + \int_0^L (g * \xi_x) \xi_x(t) dx. \end{aligned}$$

De la relation

$$\int_0^L w_t^2 dx \leq C_p \int_0^L w_{tx}^2 dx \leq C_p \int_0^L \psi_t^2 dx,$$

et de l'inégalité de Young nous aurons

$$\begin{aligned} I_1^{'} \leq \varepsilon_1 \int_0^L \chi_t^2 dx + \frac{\rho_1^2 C_p}{4\varepsilon_1} \int_0^L \xi_t^2 dx + \delta \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{\gamma^2 C_p}{4\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx \\ + \rho_2 \int_0^L \xi_t^2 dx - b \int_0^L \xi_x^2 dx + \delta \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{\gamma^2 C_p}{4\delta} \int_0^L \theta_t^2 dx \\ + \left(\int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^L \xi_x^2 dx + \int_0^L (g \diamond \xi_x) \xi_x dx \quad \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

En appliquons l'inégalité de Young et le lemme 1.3.3, nous obtenons pour tout $\delta > 0$,

$$\int_0^L (g \diamond \xi_x) \xi_x dx \leq \delta \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^L g(\tau) d\tau \int_0^L (g \circ \xi_x)(t) dx.$$

En mettant $\delta = \dfrac{\lambda}{6}$, d'où la relation (3.8).♦

Lemme 3.2.3. *Soit* (φ, ψ, θ) *solution du système* (3.2). *Alors la fonctionnelle*

$$I_2(t) = -\rho_1 \int_0^L \chi_t \chi dx - \rho_2 \int_0^L \xi_t \xi dx, \quad t \geq 0. \tag{3.9}$$

satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned} I_2^{'}(t) \leq -\rho_1 \int_0^L \chi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \xi_t^2 dx + \frac{3b}{2} \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{2k} \int_0^L \theta_t^2 dx \\ + \frac{3k}{2} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + \frac{\bar{g}}{2b} \int_0^L (g \circ \xi_x)(t) dx. \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Preuve. Dérivant I_2 et utilisant la première et la deuxième équations du système (3.2), nous trouvons

$$\begin{aligned} I_2^{'}(t) = -\rho_1 \int_0^L \chi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \xi_t^2 dx + k \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + b \int_0^L \xi_x^2 dx \\ -\gamma \int_0^L \theta_t (\chi_x + \xi) dx - \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^L \xi_x^2 dx - \int_0^L (g \diamond \xi_x) \xi_x(t) dx. \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Young sur les deux termes suivants

$$\begin{aligned} -\gamma \int_0^L \theta_t (\chi_x + \xi) dx \leq \frac{\gamma^2}{2k} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx \\ - \int_0^L (g \diamond \xi_x) \xi_x(t) dx \leq \frac{b}{2} \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{1}{2b} \int_0^L (g \diamond \xi_x)^2 dx. \end{aligned}$$

Enfin, nous allons conclure avec le lemme 1.3.3 pour obtenir (3.10).♦

Lemme 3.2.4. *Soit (φ, ψ, θ) solution du système (3.2). Alors la fonctionnelle*

$$I_3(t) = -\rho_2 \int_0^L \xi_t (g \diamond \xi)(t) dx, \quad t \geq 0. \tag{3.11}$$

satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned} I_3'(t) \leq & -(\rho_2 \int_0^L g(\tau) d\tau - \delta_1) \int_0^L \xi_t^2 dx + \varepsilon_2 (1 + \bar{g}) \int_0^L \xi_x^2 dx + k\varepsilon_2 \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx \\ & + \frac{\gamma}{2} \int_0^L \theta_x^2 dx + C(\varepsilon_2) \int_0^L (g \circ \xi_x) dx - \frac{\rho_2^2}{4\delta_1} g(0) C_p \int_0^L (g' \circ \xi)(t) dx. \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

où $C(\varepsilon_2) = \left[\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{b^2}{4\varepsilon_2} + \frac{kC_p}{4\varepsilon_2} + \frac{\gamma C_p}{2} \right) \bar{g} \right].$

Preuve. Dérivant la fonctionnelle I_3 et utilisant la deuxième équation du système (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_3'(t) = & -\rho_2 \int_0^1 \xi_t (g \diamond \psi)_t (t) dx + b \int_0^L \xi_x (g \diamond \psi_x)(t) dx + k \int_0^L (\chi_x + \xi)(g \diamond \xi)(t) dx \\ & -\gamma \int_0^L \theta_t (g \diamond \xi)(t) dx - \int_0^L \left(\int_0^t g(t-s) \xi_x(s) ds \right) (g \diamond \xi_x)(t) dx \\ = & -\left(\rho_2 \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^L \xi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \xi_t (g' \diamond \xi)(t) dx + b \int_0^L \xi_x (g \diamond \xi_x)(t) dx \\ & + k \int_0^L (\chi_x + \xi)(g \diamond \xi)(t) dx - \gamma \int_0^L \theta_t (g \diamond \xi)(t) dx - \int_0^L (g(t-s)\xi_x(s) ds) (g \diamond \xi_x)(t) dx. \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant les termes de cette dernière identité, en utilisant l'inégalité de Young et le lemme 1.3.3. Nous obtenons, pour tout $\delta_1 > 0$,

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L \xi_t (g' \diamond \xi)(t) dx & \leq \delta_1 \int_0^1 \xi_t^2 dx + \frac{\rho_2^2}{4\delta_1} \int_0^1 -g'(\tau) d\tau \int_0^1 (-g' \circ \xi)(t) dx \\ & \leq \delta_1 \int_0^L \xi_t^2 dx + \frac{\rho_2^2}{4\delta_1} g(0) C_p \int_0^L (-g' \circ \xi_x)(t) dx. \end{aligned}$$

De même, nous avons pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$b \int_0^L \xi_x (g \diamond \xi_x)(t) dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{b^2 \bar{g}}{4\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \xi_x)(t) dx,$$

$$k \int_0^L (\chi_x + \xi)(g \diamond \xi)(t) dx \leq k\varepsilon_2 \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + \frac{kC_p \bar{g}}{4\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \varepsilon_x)(t),$$

$$-\gamma \int_0^L \theta_t (g \diamond \xi)(t) dx \leq \frac{\gamma}{2} \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\gamma C_p \bar{g}}{2} \int (g \circ \xi_x)(t) dx.$$

Enfin

$$
\begin{aligned}
-\int_0^L \left(\int_0^t g(t-s)(\xi_x(s)ds)\right)(g\diamond\xi_x)(t)dx \leq{}& \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_0^L (g\diamond\xi_x)(t)dx \\
&+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_0^L \left(\int_0^t g(t-s)(\xi_x(t)-\xi_x(s)-\xi_x(t)ds)\right)^2 dx \\
&\leq \varepsilon_2\,(g(\tau)d\tau)\int_0^L \xi_x^2(t)dx+(\varepsilon_2+\frac{1}{2\varepsilon_2})\int_0^L (g\diamond\xi_x)(t)dx \\
&\leq \varepsilon_2\,(g(\tau)d\tau)\int_0^L \xi_x^2(t)dx+(\varepsilon_2+\frac{1}{2\varepsilon_2})\bar{g}\int_0^L (g\circ\xi_x)(t)dx
\end{aligned}
$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus, nous arrivons à la démonstration du lemme 3.2.4.♦

Lemme 3.2.5. *Soit* (φ,ψ,θ) *solution du système* (3.2). *Alors pour* $\varepsilon_3>0$, *la fonctionnelle*

$$
I_4(t)=\rho_3\int_0^L \theta_t\theta dx+\gamma\int_0^L(\chi_x+\xi)\theta dx+\frac{\beta}{2}\int_0^L\theta^2dx, \tag{3.13}
$$

satisfait l'estimation

$$
I_4'(t)\leq -l\int_0^L\theta_x^2dx+(\frac{\gamma^2}{4k\varepsilon_3}+\rho_3)\int_0^L\theta_t^2dx+k\varepsilon_3\int_0^L(\chi_x+\xi)^2dx. \tag{3.14}
$$

Preuve. En dérivant $I_4(t)$ et en utilisant la dernière équation du système (3.2), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \theta(l\theta_{xx}-\beta\theta_t-\gamma\chi_{tx}-\gamma\xi_t)dx+\rho_3\int_0^L\theta_t^2dx \\
+\gamma&\int_0^L(\chi_{tx}+\xi_t)\theta dx+\gamma\int_0^L(\chi_x+\xi)\theta_tdx+\beta\int_0^L\theta\theta_tdx \\
&=-l\int_0^L\theta_x^2dx+\gamma\int_0^L(\chi_x+\xi)\theta_tdx+\rho_3\int_0^L\theta_t^2dx.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Young, pour tout $\varepsilon_3>0$, nous arrivons à

$$
I_4'(t)\leq -l\int_0^L\theta_x^2dx+(\frac{\gamma^2}{4k\varepsilon_3}+\rho_3)\int_0^L\theta_t^2dx+k\varepsilon_3\int_0^L(\chi_x+\xi)^2dx,
$$

ce qui conduit au résultat (3.14) ♦

Lemme 3.2.6. *Soit (φ,ψ,θ) solution du système (3.2) et supposant que les coefficients $\rho_1,\rho_2,\rho_3,b,$ et γ satisfont la relation (3.4). Alors la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} I_5(t) = \rho_2 \int_0^L \xi_t(\chi_x+\xi)dx + (\rho_2-\gamma)\int_0^L \chi_t\xi_x dx - \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \chi_t(g*\xi_x)(t)dx \\ -(\frac{\gamma}{k}+\frac{\rho_3}{\rho_2})\int_0^L \theta_x(g*\xi_x)(t)dx + \rho_3\int_0^L \xi_t\theta_t dx + l\int_0^L \theta_x\xi_x dx, \end{aligned} \tag{3.15}$$

satisfait, pour toute constante positive ε_3, l'estimation

$$\begin{aligned} I_5^{'} \leq -\frac{k}{2}\int_0^L(\chi_x+\xi)^2dx + \varepsilon_3\int_0^L \chi_t^2 dx + \varepsilon_3\theta_x^2 dx + \rho_2\int_0^L \xi_t^2 dx \\ + [\chi_x(b\xi_x-(g*\xi_x)(t))]_0^L + C_1(\varepsilon_3)\int_0^L \theta_t^2 dx \\ -\frac{\bar{g}}{2\varepsilon_3}C_2\int_0^L (g^{'}\circ\xi_x)(t)dx + \frac{g^2(0)}{2\varepsilon_3}C_2\int_0^L \xi_x^2 dx, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où $C_1(\varepsilon_3) = \dfrac{\gamma^2}{k} + \dfrac{\beta^2}{4\gamma} + \dfrac{\rho_3\gamma}{\rho_2} + \dfrac{\rho_3^2 k}{\rho_2^2}$ *et* $C_2 = (\dfrac{\gamma}{k}+\dfrac{\rho_3}{\rho_2})^2 + (\dfrac{\rho_1}{k})^2.$

Preuve. Dérivant $I_5^{'}$, prenant en compte les équations du système (3.2) et intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_5^{'} = -\kappa_0\int_0^L \xi_x\chi_{tt}dx - \kappa_1\int_0^L \xi_x\theta_{tx}dx - k\int_0^L(\chi_x+\xi)^2dx + (\rho_2-\gamma)\int_0^L \xi_t^2 \\ +\frac{\rho_3\gamma}{\rho_2}\int_0^L \theta_t^2 dx + \gamma\int_0^L \theta_t(\chi_x+\xi)dx + [\chi_x(b\xi_x-(g*\xi_x)(t))]_0^L - \frac{\rho_3 k}{\rho_2}\int_0^L(\chi_x+\xi)\theta_t dx \\ -\beta\int_0^L \xi_t\theta_t dx - (\frac{\gamma}{k}+\frac{\rho_3}{\rho_{\ 2}})\int_0^L \theta_x(g(t)\varepsilon_x - g^{'}\diamond\xi_x)dx - \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \chi_t(g(t)\xi_x - g^{'}\diamond\xi_x)dx. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young, la relation (3.4) et les propriétés de g, donnent le résultat. ♦

Comme dans [23] , pour éliminer les conditions limites apparaissant dans (3.16), nous définissons la fonction suivante

$$q(x) = 2 - \frac{4x}{L},\ x\in[0,L]$$

Lemme 3.2.7. *Soit (φ,ψ,θ) solution du système (3.2). les fonctionnelles définies par*

$$J_1(t) = \frac{\varepsilon_3}{k}(\rho_1)\int_0^L \chi_t q(x)\chi_x dx + \rho_3\int_0^L \theta_t q(x)\theta_x dx + \gamma\int_0^L \chi_x q(x)\theta_x dx, \tag{3.17}$$

$$J_2(t) = \frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}\int_0^L \xi_t q(x)(b\xi_x - \int_0^t g(t-s)\xi_x(s)ds)dx, \tag{3.18}$$

satisfont, pour $\varepsilon_3 > 0$ les estimations suivantes

$$\begin{aligned}J_1^{'} \leq & -\varepsilon_3[\chi_x^2(L)+\chi_x^2(0)] + \frac{2\varepsilon_2\rho_1}{kL}\int_0^L \chi_t^2 dx + \varepsilon_3(\frac{2}{L}+1)\int_0^L \chi_x^2 dx + \varepsilon_3\int_0^L \xi_x^2 dx \\ & +\frac{\varepsilon_3}{k}(\frac{2l}{L}+\beta+\gamma)\int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\varepsilon_3}{k}(\frac{2\rho_3}{L}+\beta)\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\varepsilon_3\gamma}{k}\int_0^L \xi_t^2 dx\end{aligned} \tag{3.19}$$

et

$$\begin{aligned}J_2^{'}(t) \leq & C(\varepsilon_3)\int_0^L \xi_x^2 dx + k\varepsilon_3\int_0^L (\chi_x+\xi)^2 dx + \frac{\rho_2}{2\varepsilon_3}(1+\frac{1}{L})\int_0^L \xi_t^2 dx + \frac{\gamma^2 L}{4\varepsilon_3}\int_0^L \theta_t^2 dx \\ & -\frac{1}{4\varepsilon_3}(b\xi_x(L) - \int_0^t g(t-s)\xi_x(L,s)ds)^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}(b\xi_x(L) - \int_0^t g(t-s)\xi_x(L,s)ds)^2 \\ & +(\frac{3\bar{g}}{L\varepsilon_3}+\frac{k\bar{g}}{4\varepsilon_3^3})\int_0^L (g\circ\xi_x)dx - \frac{\rho_2 g(0)}{4\varepsilon_3}\int_0^L (g^{'}\circ\xi_x)dx\end{aligned} \tag{3.20}$$

où $C_3(3) = (\frac{3}{2L\varepsilon_3}+\frac{k}{8\varepsilon_3^3})(b^2+2\bar{g}^2) + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}g^2(0)$.

Preuve. Dérivant J_1 et utilisant la première et la troisième équations du système (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}J_1(t) = & \frac{\varepsilon_3}{k}\int_0^L [k(\chi_x+\xi)_x - \gamma\theta_{tx}]q(x)\chi_x dx + \frac{\varepsilon_3}{k}\int_0^L [l\theta_{xx} - \beta\theta_t - \gamma\chi_{tx} - \gamma\xi_t]q(x)\theta_x dx \\ & +\frac{\varepsilon_3\rho_1}{k}\int_0^L \chi_t q(x)\chi_{tx} dx + \frac{\varepsilon_3\rho_3}{k}\int_0^L \theta_{tx} q(x)\theta_{tx} dx + \frac{\varepsilon_3\gamma}{k}\int_0^L \chi_{tx} q(x)\theta_x dx \int_0^L \chi_x q(x)\theta_{tx} dx \\ \leq & -\varepsilon_3[\chi_x^2(L)+\chi_x^2(0)] + \frac{2\varepsilon_3}{L}\int_0^L \chi_x^2 dx + \varepsilon_3\int_0^L \xi q(x)\chi_x dx + \frac{2\varepsilon_3\rho_1}{kL}\int_0^L \chi_t^2 dx \\ & +\frac{2\varepsilon_3}{kL}\int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{\varepsilon_3\beta}{k}\int_0^L \theta_t q(x)\theta_x dx - \frac{\varepsilon_3\gamma}{k}\int_0^L \xi_t q(x)\theta_x dx + \frac{2\varepsilon_3\rho_3}{kL}\int_0^L \theta_t^2 dx.\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young, nous obtenons le résultat souhaité.

Ensuite, à partir de la deuxième équation du système (3.2) et en intégrant par parties, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
J_2'(t) = &\frac{1}{2L\varepsilon_3}\int_0^L \left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)^2 dx \\
&-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[\left(b\xi_x(L) - \int_0^t g(t-s)\xi_x(L,s)ds\right)^2\right] \\
&-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[\left(b\xi_x(0) - \int_0^t g(t-s)\xi_x(0,s)ds\right)^2\right] \\
&+\frac{\gamma}{4\varepsilon_3}\int_0^L \theta_t q(x)\left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)dx \\
&-\frac{k}{4\varepsilon_3}\int_0^L (\varphi_x+\xi)q(x)\left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)dx \\
&+\frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}\int_0^L \xi_t q(x)\left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)_t dx.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

En utilisant l'inégalité de Young, le lemme 1.3.3 et le fait que $q^2(x) \leq 4, \forall x \in [0, L]$,

nous estimons les termes de (3.21) comme suit

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{4\varepsilon_3}\int_0^L \theta_t q(x)\left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)dx \\
&\quad \leq \frac{\gamma^2 L}{4\varepsilon_3}\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{1}{4L\varepsilon_3}\int_0^L \left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)^2 dx \\
&\quad \leq \frac{\gamma^2 L}{4\varepsilon_3}\int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{1}{2L\varepsilon_3}(b^2+\bar{g}^2)\int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{\bar{g}}{L\varepsilon_3}\int_0^L g\circ\xi dx,
\end{aligned}
$$

et de même

$$
\begin{aligned}
&-\frac{k}{4\varepsilon_3}\int_0^L (\varphi_x+\xi)q(x)\left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)dx \\
&\quad \leq k\varepsilon_3\int_0^L (\chi_x+\xi)^2 dx + \frac{k}{4L\varepsilon_3}\int_0^L \left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)^2 dx \\
&\quad \leq k\varepsilon_3\int_0^L (\chi_x+\xi)^2 dx + \frac{k}{8\varepsilon_3^3}(b^2+2\bar{g}^2)\int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{k\bar{g}}{4\varepsilon_3^3}\int_0^L g\circ\xi_x dx.
\end{aligned}
$$

Enfin,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}\int_0^L \xi_t q(x)\left(b\xi_x - \int_0^L g(t-s)\xi_x(s)ds\right)_t dx \\
&= \frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}\int_0^L \xi_t q(x)\left(g(t)\xi_x - g'\diamond\xi_x\right)dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}\int_0^L \xi_t q(x) b\xi_{xt} dx \\
&= -\frac{\rho_2}{8\varepsilon_3}\int_0^L q^x b\xi_t 2dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}\int_0^L \xi_t q(x)g(t)\xi_x dx - \frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}\int_0^L \xi_t q(x)(g'\xi_x)dx \\
&\leq \frac{\rho_2}{2\varepsilon_3}\left(1+\frac{1}{L}\right)\int_0^L \xi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_3}g^2(0)\int_0^L \xi_x^2 dx - \frac{\rho_2 g(0)}{4\varepsilon_3}\int_0^L g'\circ\xi_x dx.
\end{aligned}
$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous arrivons à la l'inégalité (3.20).♦

Preuve du théorème 3.2.1. Pour certaines constantes positives,N, N_1, N_2, que nous choisissons d'une façon appropriée plus tard. Nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov par

$$L(t) = NE(t)+N_1I_1(t)+\frac{1}{4}I_2(t)+N_2I_3(t)+N_3I_4(t)+I_5(t)+J_1(t)+J_2(t), \quad \forall t>0. \tag{3.22}$$

Prenant en compte (3.6), (3.8), (3.10), (3.12), (3.14), (3.16), (3.19), (3.20) et les relations suivantes

$$\int_\Omega \chi_x^2 dx \leq 2\int_\Omega (\chi_x+\xi)^2 dx + 2C_p\int_\Omega \xi_x^2 dx,$$

$$\begin{aligned}\left[\chi_x\left(b\xi_x-\int_0^t g(t-s)\xi_x(x,s)\,ds\right)\right]_{x=0}^{x=L} &\leq \varepsilon_3\left[\chi_x^2(L)+\chi_x^2(0)\right]\\ &+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[\left(b\xi_x(L)-\int_0^t g(t-s)\xi_x(L,s)\,ds\right)^2\right]\\ &+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[\left(b\xi_x(0)-\int_0^t g(t-s)\xi_x(0,s)\,ds\right)^2\right],\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}L'(t)\leq\; & -\left[\frac{\lambda_1N_1}{2}-\frac{3b_1}{8}-N_2\varepsilon_2(1+\bar g)-\frac{g^2(0)}{2\varepsilon_3}C_2-\varepsilon_3-C_3(\varepsilon_3)-2\varepsilon_3(\frac{2}{L}+1)C_p\right]\int_0^L\xi_x^2dx\\ & -\left[N\beta-\frac{\gamma^2}{8k}-N_3(\frac{\gamma^2}{4k\varepsilon_3}+\rho_3)-\frac{3N_1\gamma^2C_p}{\lambda b}-C_1(\varepsilon_3)-\frac{\varepsilon_1}{k}(\frac{2\rho_3}{L}+\beta)-\frac{\gamma_2L}{4\varepsilon_3}\right]\int_0^L\theta_t^2dx\\ & -\left[\frac{k}{8}-kN_2\varepsilon_2-\varepsilon_3(N_3k+k+2(\frac{2}{L}+1))\right]\int_0^L(\chi_x+\xi)^2dx\\ & -\left[\frac{\rho_1}{4}-N_1\varepsilon_1-\varepsilon_3(1+\frac{2\rho_1}{kL})\right]\int_0^L\chi_t^2dx\\ & -\left[N_3l-\frac{\gamma}{2}N_2-\frac{\varepsilon_3}{k}(\frac{2l}{L}+\beta+\gamma+1)\right]\int_0^L\theta_x^2dx\\ & +\left[\frac{3\bar gN_1}{2\lambda}+\frac{\bar g}{8b}+N_2C(\varepsilon_2)+\left(\frac{3\bar g}{L\varepsilon_3}+\frac{k\bar g}{4\varepsilon_3^3}\right)\right]\int_0^L(go\xi_x)\,dx\\ & +\left[\frac{N}{2}-N_2\frac{\rho_2^2}{4\delta_1}g(0)C_p-\frac{\rho_2g(0)}{4\varepsilon_3}-\frac{\bar g}{2\varepsilon_3}C_2\right]\int_0^L(g'o\xi_x)(t)dx.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Puisque g est une fonction continue et positive, alors pour tout $t_0>0$, nous avons

$$\int_0^t g(s)\geq\int_0^{t_0}g(s)ds=g_0, \qquad \forall t\geq t_0.$$

Si nous choisissons nos constantes d'une manière convenable, tous les termes du côté droit de (3.23) deviennent négatifs.

Tout d'abord, nous prenons $\delta_1 = \dfrac{k}{4N_2}$, ensuite, nous choisissons ε_1 assez petit pour que

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\rho_1}{8N_1},$$

Deuxièmement, sélectionnons N_1 assez grand pour que

$$\frac{\lambda N_1}{4} - \frac{3b}{8} - \frac{g^2(0)}{2\varepsilon_3}C_2 - C_3(\varepsilon_3) - 2\varepsilon_3\left(\frac{2}{L} + 1 + \frac{1}{2C_p}\right)C_p > 0,$$

et sélectionnons ε_3 assez petit pour que

$$\varepsilon_3 \leq \min\left[\frac{\rho_1}{8}\left(1 + \frac{2\rho_1}{kL}\right)^{-1}, \frac{k}{16}\left(N_3 k + k + 2\left(\frac{2}{L} + 1\right)\right)^{-1}\right].$$

Ensuite, nous choisissons N_3 assez grand pour que

$$N_3 l - \frac{\gamma}{2}N_2 - \frac{\varepsilon_3}{k}\left(\frac{2l}{L} + \beta + \gamma + 1\right) > 0,$$

et nous choisissons N_2 assez grand pour que

$$N_2 g_0 - \frac{1}{4} - \frac{5\rho_2}{4} - N_1\left(\rho_2 + \frac{\rho_1^2 C_p}{4\varepsilon_1}\right) - \frac{\varepsilon_3\gamma}{k} - \frac{\rho_2}{2\varepsilon_3}\left(1 + \frac{1}{L}\right) > 0$$

et ε_2 si petit pour que

$$\varepsilon_2 < \min\left(\frac{1}{8N_2}, \frac{\lambda N_1}{4N_2(1+\bar{g})}\right)$$

Enfin, nous choisissons N assez grand tel que

$$N\beta - \frac{\gamma_2}{8k} - N_3\left(\frac{\gamma_2}{4k\varepsilon_3} + \rho_3\right) - \frac{3N_1\gamma^2 C_p}{\lambda b} - C_1(\varepsilon_3) - \frac{\varepsilon_3}{k}\left(\frac{2\rho_3}{L} + \beta\right) - \frac{\gamma_2 L}{4\varepsilon_3} > 0,$$

et

$$\frac{N}{2} - N_2\frac{\rho_2^2}{4\delta_1}g(0)C_p - \frac{\rho_2 g(0)}{4\varepsilon_3} - \frac{\bar{g}}{2\varepsilon_3}C_2 > 0.$$

Par conséquent, (3.23) prend la forme

$$L^{'}(t) \leq -k_0 E(t) + c(g \circ \xi_x)(t), \qquad t \geq t_0, \tag{3.24}$$

avec k_0 et c sont deux constantes positives.

Maintenant en multipliant (3.24) par $\zeta(t)$ et en utilisant $(A1)$ et $(A2)$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\zeta(t)L^{(}t) &\leq -k_0\zeta(t)E(t) + c\zeta(t)(g \circ \xi_x)(t) \\
&\leq -k_0\zeta(t)E(t) + c_1(g^{'} \circ \xi_x)(t) \qquad (3.25) \\
&\leq -k_0\zeta(t)E(t) + c_1E^{'}(t) \\
[\zeta(t)L(t) + cE(t)]^{'} - \zeta^{(}t)E(t) &\leq -k_0\zeta(t)E(t), \qquad \forall t \geq t_0.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\zeta^{'}(t) \leq 0$, nous obtenons

$$[\zeta(t)L(t) + cE(t)]^{'} \leq -k_0\zeta(t)E(t), \qquad \forall t \geq t_0.$$

Encore une fois, en notant par :

$$R(t) = \zeta(t)L(t) + cE(t) \sim E(t).$$

nous aurons pour une constante positive α,

$$R^{'}(t) \leq -\alpha\zeta(t)R(t), \qquad t \geq t_0, \tag{3.26}$$

une simple intégration de (3.26) sur (t_0, t) conduit à

$$R(t) \leq R(t_0)e^{-c_1\int_{t_0}^{t_1}\zeta(s)ds}, \qquad \forall t \geq t_0. \tag{3.27}$$

Ce qui conduit au résultat du théorème 3.2.1. ♦

Chapitre 4

Système de Timoshenko avec deux termes mémoire

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle de poutre thermoélastique entièrement hyperbolique. C'est-à-dire que, au lieu du système thermoélastique classique défini par l'équation d'Euler-Bernoulli couplée aux équations de la chaleur (parabolique), nous utiliserons le système de Timoshenko couplé à un modèle de chaleur hyperbolique défini par la loi de Cattaneo. De notre point de vue, ce modèle explique mieux le phénomène thermoélastique. Nous allons ensuite expliquer les raisons de ces changements. Le modèle bien connu d'Euler-Bernoulli pour la vibration transversale d'une poutre n'est pas adapté à toutes les applications. Le modèle permet la transmission d'énergie à des vitesses proches de l'infini. Rayleigh a résolu ce problème en principe en introduisant une inertie rotatoire, mais les corrections étaient insuffisantes. En 1921 [40], Timoshenko a fait une amélioration supplémentaire par laquelle la déformation de cisaillement est prise en compte. Le modèle mathématique est constitué de deux équations aux dérivées partielles présentées comme suit

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (Ku_x + \varphi))_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ I_\rho \varphi_{tt} - (EI\varphi_{xx} + K(u_x - \varphi) = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \end{cases}$$

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier l'effet de la thermo-élasticité de type III sur un nouveau couplage pour le système de Timoshenko avec la présence de deux amortisseurs de type mémoire. Plus précisément, nous prouvons la décroissance générale de la solution dans la norme énergie.

Dans la section suivante, nous posons notre problème et dans la deuxième nous présentons l'énoncé et la preuve du résultat avec les différentes fonctionnelles par lesquelles nous modifions l'énergie classique pour en obtenir une équivalente.

4.1 Position du problème

Soit le problème

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t) = S_x(x,t), \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t) = M_x(x,t) - S(x,t), \\ \rho_3\theta_t(x,t) = -q_x(x,t) - \gamma(\varphi_x(x,t) + \psi(x,t))_t, \end{cases} \tag{4.1}$$

où t est la variable du temps, x est la variable de l'espace, φ est le déplacement transversale, ψ est la rotation et θ est la température. $\rho_1 = \rho A$ et $\rho_2 = \rho I$ où ρ est la densité de masse du matérielle, A est la cross-section area et I est le moment de la cross-section area. On note par M de bending moment, S est la force transversale et q est le flux de la chaleur.

les équations constitutives correspondantes sont donnée par :

$$\begin{cases} M = EI\varphi_x - \displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\varphi_x(x,s)ds, \\ S = \kappa AG(\varphi_x + \psi)ds, \\ q = -lp_x - \displaystyle\int_0^t g_2(t-s)p_{tx}(x,s), \end{cases} \tag{4.2}$$

où g_1 et g_2 sont fonctions positives décroissantes, E est le module de Young, G est le module de rigidité, et κ est le facteur de la force transversale. On note par p l'effet thermo-viscoélastique, alors $\theta = p_t$.

Prenant en compte les deux système (4.1) et (4.2), les conditions initiales et les conditions aux bord de dirichlet et mettant $EI = b_1, \kappa AG = k, l = b_2$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma\theta_x = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b_1\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma\theta + \int_0^t g_1(t-s)\psi_{xx}ds = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_{tt} - b_2\theta_{xx} + \int_0^t g_2(t-s)\theta_{xx}ds + \gamma\varphi_{ttx} + \gamma\psi_{tt} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x)\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta_1(x), \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Maintenant, pour montrer la nature dissipative du système (4.3), nous prenons le même changement utilisé pour le système (3.1), ainsi nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1\chi_{tt} - k(\chi_x + \xi)_x + \gamma\theta_{tx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_2\xi_{tt} - b_1\xi_{xx} + k(\chi_x + \psi) - \gamma\theta_t + \int_0^t g_1(t-s)\xi_{xx}ds = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \rho_3\theta_{tt} - b_2\theta_{xx} + \int_0^t g_2(t-s)\theta_{xx} + \gamma\chi_{tx} + \gamma\xi_t = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ \chi(x,0) = \chi_0(x),\ \chi_t(x,0) = \chi_1(x),\ \xi(x,0) = \xi_0(x), \\ \xi_t(x,0) = \xi_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \\ \chi(0,t) = \chi(L,t) = \xi(0,t) = \xi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Supposant que les deux fonctions de relaxation $g_i (i = 1, 2)$ vérifient les hypothèses suivantes

(H1) $g_i : \Re_+ \to \Re_+$ sont deux fonctions dérivables satisfaisant la condition suivante

$$g_i(0) > 0, \lambda_i = b_i - \int_0^\infty g_i(s)ds > 0, \qquad i = 1, 2.$$

(H2) Il existe deux fonctions dérivables décroissantes $\zeta_i(t) : \Re_+ \to \Re_+$ satisfaisant

$$g_i^{'}(t) \leq -\zeta_i(t)g_i(t), \qquad i = 1, 2, \qquad \forall t \geq 0.$$

L'existence et l'unicité de la solution du système (4.4) est assuré par la proposition suivante

Proposition 4.1.1. *[9] Soit* $((\chi_0, \chi_1), (\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2$. *Supposons que (H1) et (H2) sont satisfaites. Alors le système* (4.4) *admet une solution unique globale*

$$(\chi, \xi, \theta) \in (C(\Re_+; H_0^1(0, L)) \cap C^1(\Re_+; L^2(0, L)))^3.$$

L'énergie associée au système (4.4) est donné par

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{ & \rho_1 \chi_t^2 + \rho_2 \xi_t^2 + \rho_3 \theta_t^2 + k(\chi_x + \xi)^2 + (b_1 - \int_0^t g_1(s)ds)\xi_x^2 \\ & + (b_2 - \int_0^t g_2(s)ds)\theta_x^2 + g_1 \circ \xi_x + g_2 \circ \theta_x \} dx, \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2 Résultat principal

Dans cette section, nous présentons le résultat principal de notre travail.

Théorème 4.2.1. *Soit* $((\chi_0, \chi_1), (\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^3$, *et supposons que* $g_i (i = 1, 2)$ *satisfont (H1) et (H2) et que les coefficients du système* (4.4) *satisfont la condition*

$$\kappa_1 = \gamma + \frac{b_1 \rho_1}{k} - \rho_2 = 0 \text{ et } \kappa_2 = \frac{\rho_3 b_1}{\rho_2} + \frac{b_1 \gamma}{k} - b_2 = 0. \tag{4.6}$$

Alors, il existe deux constantes positives c_1 *et* c_2 *telles que*

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 \int_{t_0}^{t_1} \zeta(s)ds}, \qquad \forall t \geq t_0, \tag{4.7}$$

où

$$\zeta(t) = min\{\zeta_1(t), \zeta_2(t)\}, \qquad t \geq 0.$$

La démonstration du théorème 4.2.1 se fait à travers les lemmes suivants

Lemme 4.2.1. *Soit* (χ, ξ, θ) *solution du système* (4.4)*. Alors l'énergie* E *définie par* (4.5) *satisfait*

$$
\begin{aligned}
E^{'}(t) = -\frac{1}{2}g_1(t)\int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L (g_1^{'} \circ \xi_x)dx \\
-\frac{1}{2}g_2(t)\int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L (g_2^{'} \circ \theta_x)dx \leq 0,\ t \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Preuve. Multipliant la première équation du système (4.4) par χ_t, la seconde par ξ_t et la troisième par θ_t, intégrant sur $(0, L)$, utilisant le lemme 1.3.1 et effectuant quelques manipulations nous obtenons (4.8). ♦

Dans ce qui suit nous mettons $\Omega = [0, L]$ et nous prenons c_0 une constante positive générale

Maintenant, introduisant le multiplicateur w donné par la solution de

$$
-w_{xx} = \xi_x,\ w(0) = w(L) = 0, \tag{4.9}
$$

alors nous pouvons obtenir les inégalités suivantes

$$
\int_\Omega w_t^2 dx \leq C_p \int_\Omega w_{tx}^2 dx \leq C_p \int_\Omega \xi_t^2 dx, \tag{4.10}
$$

$$
\int_\omega w_x^2 dx \leq C_p \int_\Omega \xi^2 dx \leq C_p \int_\Omega \xi_x^2 dx, \tag{4.11}
$$

Lemme 4.2.2. *Soit* (χ, ξ, θ) *solution du système* (4.5)*, alors pour* $\varepsilon_1 > 0$*, la fonctionnelle*

$$
I_1(t) = \rho_1 \int_\Omega \chi_t w dx + \rho_2 \int_\Omega \xi_t \xi dx,\ \ t \geq 0 \tag{4.12}
$$

satisfait l'estimation

$$
\begin{aligned}
I_1'(t) \leq -\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega \xi_x^2 dx + \varepsilon_1 \int_\Omega \chi_t^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{\rho_1^2 C_p}{4\varepsilon_1}\right)\int_\Omega \xi_t^2 dx \\
+c_0 \int_\Omega \theta_t^2 dx + c_0 \int_\Omega (g_1 \circ \xi_x)\, dx, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Preuve. En dérivant $I_1(t)$ et utilisant les deux premières équations du système

(4.5), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I_1'(t) = \rho_1 \int_\Omega \chi_t w_t dx + k \int_\Omega w_x^2 dx + \gamma \int_\Omega \theta_t w_x dx + \rho_2 \int_\Omega \xi_t^2 dx \\
-b_1 \int_\Omega \xi_x^2 dx - k \int_\Omega \xi^2 dx + \gamma \int_\Omega \theta_t \xi dx + \int_\Omega (g_1 * \xi_x)\, \xi_x dx.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young, l'inégalité de Poincaré, le lemme 1.3.2 et les relations (4.10), (4.11) nous concluons :

$$
\rho_1 \int_\Omega \chi_t w_t dx \leq \varepsilon_1 \int_\Omega \chi_t^2 dx + \frac{\rho_1^2 C_p}{4\varepsilon_1} \int_\Omega \xi_t^2 dx, \tag{4.15}
$$

$$
\gamma \int_\Omega \theta_t w_x dx \leq \delta \int_\Omega \xi_x^2 dx + \frac{\gamma^2 C_p}{4\delta} \int_\Omega \theta_t^2 dx, \tag{4.16}
$$

$$
\gamma \int_\Omega \theta_t \xi dx \leq \delta \int_\Omega \xi_x^2 dx + \frac{\gamma^2 C_p}{4\delta} \int_\Omega \theta_t^2 dx, \tag{4.17}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (g_1 * \xi_x)\, \xi_x dx &= \left(\int_0^t g_1(\tau)\, d\tau \right) \int_\Omega \xi_x^2 dx - \int_\Omega (g_1 \diamond \xi_x)\, \xi_x dx \\
&\leq \left(\int_0^t g_1(\tau)\, d\tau \right) \int_\Omega \xi_x^2 dx + \delta \int_\Omega \xi_x^2 dx + \frac{c_0}{\delta} \int_\Omega (go\xi_x)\, dx,
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

avec ε_1 et δ sont deux constantes positives.

En substituant (4.15)-(4.18) dans (4.14) et en choisissant $\delta = \dfrac{\lambda_1}{6}$, nous obtenons (4.13). ♦

Lemme 4.2.3. *Soit* (χ, ξ, θ) *solution du système* (4.5), *alors la fonctionnelle*

$$
I_2(t) = -\rho_1 \int_0^L \chi_t \chi dx - \rho_2 \int_0^L \xi_t \xi dx, \quad t \geq 0, \tag{4.19}
$$

satisfait l'estimation

$$
\begin{aligned}
I_2'(t) \leq -\rho_1 \int_\Omega \chi_t^2 dx - \rho_2 \int_\Omega \xi_t^2 dx + c_0 \int_\Omega \xi_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{2k} \int_\Omega \theta_t^2 dx \\
+ \frac{3k}{2} \int_\Omega (\chi_x + \xi)^2 dx + c_0 \int_\Omega (g_1 o \xi_x)\, dx, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Preuve. Un calcul direct, utilisant la première et la deuxième équation du système (4.5), nous aurons

$$
\begin{aligned}
I_2'(t) = -\rho_1 \int_\Omega \chi_t^2 dx - \rho_2 \int_\Omega \xi_t^2 dx + \left(b_1 + \int_0^t g_1(\tau) d\tau \right) \int_\Omega \xi_x^2 dx \\
+ k \int_\Omega (\chi_x + \xi)^2 dx - \gamma \int_\Omega \theta_t (\chi_x + \xi)\, dx - \int_\Omega (g_1 \diamond \xi_x)\, \xi_x dx.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Utilisant l'inégalité de Young et le lemme 1.3.2, nous trouvons

$$-\gamma\int_\Omega \theta_t(\chi_x+\xi)\,dx \le \frac{\gamma^2}{2k}\int_\Omega \theta_t^2dx+\frac{k}{2}\int_\Omega(\chi_x+\xi)^2\,dx, \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega (g_1\diamond\xi_x)\,\xi_x dx &\le \frac{b_1}{2}\int_\Omega \xi_x^2dx+\frac{1}{2b_1}\int_\Omega (g_1\diamond\xi_x)^2\,dx,\\ &\le \frac{b_1}{2}\int_\Omega \xi_x^2dx+c_0\int_\Omega (g_1\circ\xi_x)\,dx.\end{aligned} \tag{4.23}$$

En substituant (4.22) et (4.23) dans (4.21), l'inégalité (4.20) est vérifie.

Lemme 4.2.4. *Soit* (χ,ξ,θ) *solution du système* (4.5)*, alors la fonctionnelle*

$$I_3(t)=-\rho_2\int_\Omega \xi_t(g_1\diamond\xi)\,dx,\ \ t\ge 0, \tag{4.24}$$

satisfait, pour ε *et* δ_1*, deux constantes positives l'estimation*

$$\begin{aligned}I_3'(t)\le &-\left(\rho_2\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau-\delta_1\right)\int_0^L \xi_t^2dx+c_0\varepsilon_2\int_\Omega \xi_x^2dx\\ &+\varepsilon_2\int_\Omega \theta_t^2dx+\varepsilon_2\int_\Omega(\chi_x+\xi)^2\,dx-c_0\int_\Omega (g_1'o\xi_x)\,dx\\ &+c_0\left(\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\int_\Omega (g_1o\xi_x)\,dx,\quad t\ge 0.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Preuve. En dérivant la fonctionnelle $I_3(t)$ et en utilisant la deuxième équation du système (4.5), nous aurons

$$\begin{aligned}I_3'(t)=&-\rho_2\int_\Omega \xi_t(g_1\diamond\xi)_t\,dx-b_1\int_\Omega \xi_x(g_1\diamond\xi_x)\,dx-k\int_\Omega(\chi_x+\xi)(g_1\diamond\xi)\,dx+\\ &\gamma\int_\Omega\theta_t(g_1\diamond\xi)\,dx-\int_\Omega (g_1*\xi_x)(g_1\diamond\xi_x)\,dx\\ =&-\left(\rho_2\int_0^t g_1(s)ds\right)\int_\Omega \xi_t^2dx-\rho_2\int_\Omega \xi_t(g_1'\diamond\xi)\,dx+b_1\int_\Omega \xi_x(g_1\diamond\xi_x)\,dx\\ &+k\int_\Omega(\chi_x+\xi)(g_1\diamond\xi)\,dx-\gamma\int_\Omega\theta_t(g_1\diamond\xi)\,dx-\int_\Omega(g_1*\xi_x)(g_1\diamond\xi_x)\,dx.\end{aligned} \tag{4.26}$$

nous estimons ces derniers termes par l'utilisation d'inégalité de Young, l'inégalité de Poincaré et la remarque 1.3.1. Alors, pour toute constante $\delta_1>0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}-\rho_2\int_\Omega \xi_t(g_1'\diamond\xi)(t)dx &\le \delta_1\int_\Omega \xi_t^2dx+\frac{\rho_2^2}{4\delta_1}\int_0^t(-g_1'(s)\,ds)\int_\Omega(-g_1'\circ\xi)(t)dx\\ &\le \delta_1\int_\Omega \xi_t^2dx-\frac{c_0}{\delta_1}\int_\Omega (g_1'\circ\xi_x)(t)dx,\end{aligned} \tag{4.27}$$

et $\forall\, \varepsilon_2 > 0$. nous obtenons,

$$b_1 \int_\Omega \xi_x \left(g_1 \diamond \xi_x\right) dx \leq \varepsilon_2 \int_\Omega \xi_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_\Omega \left(g_1 \circ \xi_x\right) dx, \tag{4.28}$$

$$k \int_\Omega \left(\chi_x + \xi\right) \left(g_1 \diamond \xi\right) dx \leq \varepsilon_2 \int_\Omega \left(\chi_x + \xi\right)^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_\Omega \left(g_1 \circ \xi_x\right) dx, \tag{4.29}$$

$$-\gamma \int_\Omega \theta_t \left(g_1 \diamond \xi\right) dx \leq \varepsilon_2 \int_\Omega \theta_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_\Omega \left(g_1 \circ \xi_x\right) dx. \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
&- \int_\Omega \left(g_1 * \xi_x\right) \left(g_1 \diamond \xi_x\right) dx \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_\Omega \left(g_1 \diamond \xi_x\right) dx + \frac{\varepsilon_2}{2} \int_\Omega \left(\left(\int_0^t g_1\left(t-s\right) \left(\xi_x \ - \xi_x\left(s\right) - \xi_x\left(t\right) ds\right) \right)^2 dx \\
&\leq \varepsilon_2 \left(\int_0^t g_1(s) ds \right) \int_\Omega \xi_x^2 dx + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \right) \int_\Omega \left(g_1 \diamond \xi_x\right) dx \\
&\leq c_0 \varepsilon_2 \int_\Omega \xi_x^2 \ dx + c_0 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_\Omega \left(g_1 o \xi_x\right) dx,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Substituant (4.27)-(4.31) dans (4.26), nous obtenons (4.25). ♦

Lemme 4.2.5. *Soit* (χ, ξ, θ) *solution du système* (4.5). *Alors la fonctionnelle*

$$I_4\left(t\right) = \rho_3 \int_\Omega \theta_t \theta dx + \gamma \int_\Omega \left(\chi_x + \xi\right) \theta dx, \quad t \geq 0, \tag{4.32}$$

satisfait, pour toute ε_3, *l'estimation*

$$\begin{aligned}
I_4'\left(t\right) \leq& -\frac{\lambda_2}{2} \int_\Omega \theta_x^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_\Omega \theta_t^2 dx \\
&+\varepsilon_3 \int_\Omega \left(\chi_x + \xi\right)^2 dx + c_0 \int_\Omega \left(g_2 o \theta_x\right) dx.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Preuve. En dérivant $I_4\left(t\right)$, en utilisant la troisième équation du système (4.5) et en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_4'\left(t\right) =& -\left(b_2 - \int_0^t g_2\left(s\right) ds\right) \int_\Omega \theta_x^2 dx + \gamma \int_\Omega \left(\chi_x + \xi\right) \theta_t dx \\
&- \int_\Omega \theta_x \left(g_2 \diamond \theta_x\right) dx + \rho_3 \int_\Omega \theta_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Grâce à l'inégalité de Young et au lemme 1.3.2, nous obtenons pour tout ε_3, $\delta_2 > 0$, les deux estimations suivantes

$$\gamma \int_\Omega (\chi_x + \xi)\,\theta_t dx \leq \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_\Omega \theta_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L (\chi_x + \xi)^2\, dx, \tag{4.35}$$

$$-\int_\Omega \theta_x\,(g_2 \diamond \theta_x)\,dx \leq \delta_2 \int_\Omega \theta_x^2 dx + \frac{c_0}{\delta_2} \int_\Omega (g_2 \circ \theta_x)\,dx. \tag{4.36}$$

Substituant (4.35)-(4.36) dans (4.34) et choisissant $\delta_2 = \dfrac{\lambda_2}{2}$ nous trouvons (4.33). ♦

Lemme 4.2.6. *Soit* (χ, ξ, θ) *solution du système* (4.5). *Alors la fonctionnelle*

$$I_5\,(t) = -\rho_3 \int_\Omega \theta_t\,(g_2 \diamond \theta)\,dx,\ t \geq 0, \tag{4.37}$$

satisfait, pour ε_3 *et* $\delta_1 > 0$, *deux constantes positives l'estimation*

$$\begin{aligned} I_5'\,(t) \leq &-\left(\rho_3 \int_0^t g_2\,(\tau)\,d\tau - \delta_2\right) \int_\Omega \theta_t^2 dx + c_0\varepsilon_3 \int_\Omega \theta_x^2 dx \\ &+\varepsilon_3 \int_\Omega^2 \chi_t^2 dx + c_0 \left(\varepsilon_3 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_\Omega (g_2 \circ \theta_x)\,dx \\ &+\varepsilon_3 \int_\Omega^2 \xi_t^2 dx - \frac{c_0}{\delta_2} \int_\Omega (g_2' \circ \theta_x)\,dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Preuve. En dérivant la fonctionnelle $I_5\,(t)$ et en utilisant la troisième équation du système (4.5), nous trouvons,

$$\begin{aligned} I_5'\,(t) = &-\left(\rho_3 \int_0^t g_2\,(\tau)\,d\tau\right) \int_\Omega \theta_t^2 dx - \rho_3 \int_\Omega \theta_t\,(g_2' \diamond \theta)\,dx \\ &+b_2 \int_\Omega \theta_x\,(g_2 \diamond \theta_x)\,dx - \int_\Omega (g_2 * \theta_x)\,(g_2 \diamond \theta_x)\,dx \\ &-\gamma \int_\Omega \chi_t\,(g_2 \diamond \theta_x)\,dx - \gamma \int_\Omega \xi_t\,(g_2 \diamond \theta)\,dx. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, le lemme 1.3.2 et la remarque 1.3.1 nous obtenons :

$$-\rho_3 \int_\Omega \theta_t\,(g_2' \diamond \theta)\,dx \leq \delta_2 \int_\Omega \theta_t^2 dx + \frac{c_0}{\delta_2} \int_\Omega (-g_2' \circ \theta_x)\,dx, \tag{4.40}$$

$$b_2 \int_\Omega \theta_x\,(g_2 \diamond \theta_x)\,dx \leq \varepsilon_3 \int_\Omega \theta_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_\Omega (g_2 \circ \theta_x)\,dx, \tag{4.41}$$

$$-\gamma \int_\Omega \chi_t\,(g_2 \diamond \theta_x)\,dx \leq \varepsilon_3 \int_\Omega^2 \chi_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_\Omega (g_2 \circ \theta_x)\,dx, \tag{4.42}$$

$$-\gamma \int_\Omega \xi_t\,(g_2 \diamond \theta)\,dx \leq \varepsilon_3 \int_\Omega^2 \xi_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_\Omega (g_2 \circ \theta_x)\,dx \tag{4.43}$$

et

$$
\begin{aligned}
-&\int_\Omega (g_1 * \theta_x)(g_1 \diamond \theta_x)(t)dx \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon_3}\int_\Omega (g_1 \diamond \theta_x)\,dx + \frac{\varepsilon_3}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-s)\left(\theta_x(t)-\theta_x(s)-\theta_x(t)\,ds\right)\right)^2 dx \\
&\leq \varepsilon_3\left(\int_0^t g_1(s)ds\right)\int_\Omega \theta_x^2 dx + \left(\varepsilon_3 + \frac{1}{2\varepsilon_3}\right)\int_\Omega (g_1 \diamond \theta_x)\,dx \\
&\leq c_0\varepsilon_3 \int_\Omega \theta_x^2 dx + c_0\left(\varepsilon_3 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_\Omega (g_1 \circ \theta_x)\,dx.
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

où δ_2 et ε_3 sont deux constantes positives.

Substituant (4.40)-(4.44) dans (4.39), nous obtenons (4.38). ♦

Lemme 4.2.7. *En supposant que les coefficients ρ_1, ρ_2, ρ_3, k, b_1, b_2, et γ satisfont la relation* (4.7)*. Alors la fonctionnelle*

$$
\begin{aligned}
I_6(t) = \rho_2 &\int_\Omega \xi_t(\chi_x+\xi)dx + (\rho_2-\gamma)\int_\Omega \chi_t\xi_x dx \\
&-\left(\frac{\gamma}{k}+\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\int_\Omega \theta_x(g_1 * \xi_x)\,dx - \frac{\rho_1}{k}\int_\Omega \chi_t(g_1 * \xi_x)\,dx \\
&+\rho_3\int_\Omega \xi_t\theta_t dx + b_2\int_\Omega \xi_x\theta_x dx - \int_\Omega \xi_x(g_2 * \theta_x)\,dx, \quad t \geq 0,
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

satisfait, pour ε_4, constante positive l'estimation

$$
\begin{aligned}
I_6'(t) \leq -\frac{k}{2}&\int_\Omega (\chi_x+\xi)^2 dx + \rho_2\int_\Omega \xi_t^2 dx + \varepsilon_4\int_\Omega \chi_t^2 dx \\
&+\varepsilon_4\int_\Omega \theta_x^2 dx + \left[\chi_x\left(b_1\xi_x - (g_1 * \xi_x)\right)\right]_{x=0}^{x=L} \\
&+c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_\Omega \xi_x^2 dx - \frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega (g_1' \circ \xi_x)\,dx \\
&-c_0\int_\Omega (g_2' \circ \theta_x)\,dx + c_0\int_\Omega \theta_t^2 dx,\ \forall t \geq 0,
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Preuve. En utilisant la deuxième équation et la troisième équation du système

(4.5) et en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_6'(t) &= -b_1\int_\Omega \xi_x(\chi_x+\xi)_x\,dx - k\int_\Omega(\chi_x+\xi)^2\,dx + \gamma\int_\Omega\theta_t(\chi_x+\xi)\,dx \\
&\quad+\int_\Omega(g_1*\xi_x)(\chi_x+\xi)_x\,dx + \left[\chi_x\left(b\xi_x-(g_1*\xi_x)(t)\right)\right]_{x=0}^{x=L} + \rho_2\int_\Omega \xi_t^2dx \\
&\quad+\rho_2\int_\Omega \xi_t\chi_{tx}dx + (\rho_2-\gamma)\int_\Omega\chi_{tt}\xi_xdx + (\rho_2-\gamma)\int_\Omega\chi_t\xi_{tx}dx \\
&\quad-\frac{\gamma}{k}\int_\Omega\theta_{tx}(g_1*\xi_x)\,dx - \left(\frac{\gamma}{k}+\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\int_\Omega\theta_x(g_1*\xi_x)_t\,dx - \frac{\rho_1}{k}\int_\Omega\chi_{tt}(g_1*\xi_x)\,dx \\
&\quad-\frac{\rho_1}{k}\int_\Omega\chi_t(g_1*\xi_x)_t\,dx - \frac{\rho_3 b_1}{\rho_2}\int_\Omega\xi_x\theta_{tx}dx - \frac{\rho_3 k}{\rho_2}\int_\Omega\theta_t(\chi_x+\xi)\,dx + \frac{\rho_3\gamma}{\rho_3}\int_\Omega\theta_t^2dx \\
&\quad-b_2\int_\Omega\theta_x\xi_{tx}dx + \int_\Omega\xi_{tx}(g_2*\theta_x)\,dx - \gamma\int_\Omega\xi_t\chi_{tx}dx - \gamma\int_\Omega\xi_t^2dx + b_2\int_\Omega\theta_{tx}\xi_xdx \\
&\quad+b_2\int_\Omega\theta_x\xi_{tx}dx - \int_\Omega\xi_{tx}.\,(g_2*\theta_x)\,dx - \int_\Omega\xi_x.\,(g_2*\theta_x)_t\,dx,
\end{aligned}$$

et de la première équation, nous déduisons

$$\begin{aligned}
I_6'(t) &= -k\int_\Omega(\chi_x+\xi)^2\,dx + (\rho_2-\gamma)\int_\Omega\xi_t^2dx + \frac{\rho_3\gamma}{\rho_3}\int_\Omega\theta_t^2dx \\
&\quad+\left(\gamma-\frac{\rho_3 k}{\rho_2}\right)\int_\Omega\theta_t(\chi_x+\xi)\,dx - \int_\Omega\xi_x\left(g_2\theta_x - g_2'\diamond\theta_x\right)dx \\
&\quad-\left(\frac{\gamma}{k}+\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\int_\Omega\theta_x\left(g_1\xi_x-g_1'\diamond\xi_x\right)dx - \frac{\rho_1}{k}\int_\Omega\chi_t\left(g_1\xi_x-g_1'\diamond\xi_x\right)dx \\
&\quad-\underbrace{\left(\gamma+\frac{b_1\rho_1}{k}-\rho_2\right)}_{=\kappa_1}\int_\Omega\xi_x\chi_{tt}dx - \underbrace{\left(\frac{\rho_3 b_1}{\rho_2}+\frac{b_1\gamma}{k}-b_2\right)}_{=\kappa_2}\int_\Omega\xi_x\theta_{tx}dx \\
&\quad+\left[\chi_x\left(b\xi_x-(g_1*\xi_x)\right)\right]_{x=0}^{x=L}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Utilisant l'inégalité de Young et le lemme 1.3.3, nous arrivons à :

$$\left(\gamma-\frac{\rho_3 k}{\rho_2}\right)\int_\Omega\theta_t(\chi_x+\xi)\,dx \le c_0\int_\Omega\theta_t^2dx + \frac{k}{4}\int_\Omega(\chi_x+\xi)^2\,dx, \tag{4.48}$$

maintenant pour $\varepsilon_4>0$, nous aurons

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega\xi_x\left(g_2\theta_x-g_2'\diamond\theta_x\right)dx \\
&= -g_2(t)\int_\Omega\xi_x\theta_xdx + \int_\Omega\xi_x\left(g_2'\diamond\theta_x\right)dx \\
&\le \varepsilon_4\int_\Omega\theta_x^2dx + c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_\Omega\xi_x^2dx - c_0\int_\Omega\left(g_2' o\theta_x\right)dx.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Et, de la même manière, nous aurons

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{\gamma}{k}+\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\int_\Omega \theta_x\left(g_1\xi_x-g_1'\diamond\xi_x\right)dx\\
&\leq \varepsilon_4\int_\Omega \theta_x^2dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega\left(\xi_x+g_1'\diamond\xi_x\right)^2dx\\
&\leq \varepsilon_4\int_\Omega \theta_x^2dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_x^2dx-\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega\left(g_1'o\xi_x\right)dx,
\end{aligned}\tag{4.50}$$

$$-\frac{\rho_1}{k}\int_\Omega \chi_t\left(g_1\xi_x-g_1'\diamond\xi_x\right)dx\leq\varepsilon_4\int_\Omega^2 \chi_t^2dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_x^2dx-\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega\left(g_1'o\xi_x\right)dx. \tag{4.51}$$

Substituant (4.48)-(4.51) dans (4.47), utilisant la relation (4.7), nous obtenons (4.46).♦

Comme dans le chapitre III, nous définissons la fonction

$$q(x)=2-\frac{4x}{L},\ x\in[0,L]$$

Lemme 4.2.8. *Soit (χ,ξ,θ) solution du système (4.5). Les fonctionnelles J_1 et J_2 définies par*

$$J_1(t)=\frac{\varepsilon_4}{k}\left(\begin{array}{l}\rho_1 l\int_\Omega \chi_t q\chi_x dx+\gamma\int_\Omega \chi_x q(b_2\theta_x-g_2*\theta_x)dx\\ +\rho_3\int_\Omega \theta_t q\left(b_2\theta_x-\left(g_2*\theta_x\right)\right)dx,\end{array}\right)\ t\geq 0, \tag{4.52}$$

et

$$J_2(t)=\frac{\rho_2}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t q\left(b_1\xi_x-\left(g_1*\xi_x\right)\right)dx,\ t\geq 0, \tag{4.53}$$

satisfont, pour $\varepsilon_4>0$, l'estimation

$$\begin{aligned}
J_1'(t)\leq&-\varepsilon_4\left[\chi_x^2(L)+\chi_x^2(0)\right]+\frac{1}{\varepsilon_3}\int_\Omega \xi_x^2dx\\
&+c_0\varepsilon_4\left(\int_\Omega \chi_x^2dx+\int_\Omega \chi_t^2dx+\int_\Omega \theta_x^2dx\right)\\
&+c_0\left(\frac{1}{\varepsilon_4}+\varepsilon_4\right)\int_\Omega \theta_t^2dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t^2dx,
\end{aligned}\tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
J_2'(t)\leq&-\frac{1}{4\varepsilon_4}\left[\left(b_1\xi_x(L)-\int_0^t g_1(t-s)\,\xi_x(L,s)\,ds\right)^2\right]\\
&-\frac{1}{4\varepsilon_4}\left[\left(b_1\xi_x(0)-\int_0^t g_1(t-s)\,\xi_x(0,s)\,ds\right)^2\right]\\
&+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \theta_t^2dx+c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_\Omega \xi_x^2dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t^2dx\\
&+k\varepsilon_4\int_\Omega\left(\chi_x+\xi\right)^2dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4^2}\right)\int_\Omega\left(g_1o\xi_x\right)dx-\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega\left(g_1'o\xi_x\right)dx.
\end{aligned}\tag{4.55}$$

Preuve. En prenant la dérivée de $J_1(t)$ et en utilisant les première et troisième équations du système (4.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
J_1'(t) &= \varepsilon_4 b_2 \int_\Omega \chi_{xx} q \chi_x dx + \varepsilon_4 b_2 \int_\Omega \xi_x q \chi_x dx + \frac{\varepsilon_4 \rho_1 b_2}{k} \int_\Omega \chi_t q \chi_{tx} dx \\
&+ \frac{\varepsilon_4}{k} \int_\Omega \left(b_2 \theta_{xx} - \int_0^t g_2(t-s)\theta_{xx}(s)\,ds \right) q \left(b_2\theta_x - \int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds \right) dx \\
&- \frac{\varepsilon_4 \gamma}{k} \int_\Omega \chi_x q (\int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds)_t dx - \frac{\varepsilon_4 \rho_3}{k} \int_\Omega \theta_t q \left(\int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds \right)_t dx \\
&+ \frac{\varepsilon_4 \rho_3 b_2}{k} \int_\Omega \theta_t q \theta_{tx} dx - \frac{\varepsilon_4 \gamma}{k} \int_\Omega \xi_t q \left(b_2 \theta_x - \int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds \right) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \chi_x q (\int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds)_t dx &= -\int_\Omega \chi_x q \int_0^t g_2'(t-s)\theta_x(s)\,ds dx - \int_\Omega \chi_x q g_2(0)\theta_x dx \\
&= +\int_\Omega \chi_x q \int_0^t g_2'(t-s)(\theta_x(t) - \theta_x(s))\,ds dx - \int_\Omega \chi_x q g_2(t)\theta_x dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \theta_t q \left(\int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds \right)_t dx \\
&\quad = -\int_\Omega \theta_t q \left(g_2(0)\theta_x + \int_0^t g_2'(t-s)\theta_x(s)\,ds \right) dx \\
&\quad = -\int_\Omega \theta_t q \left(g_2(t)\theta_x - \int_0^t g_2'(t-s)(\theta_x(t) - \theta_x(s))\,ds \right) dx,
\end{aligned}$$

et en intégrant par parties, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
J_1'(t) &\leq -\varepsilon_4 b_2 \left[\chi_x^2(0) + \chi_x^2(L) \right]_{x=0}^{x=L} + \frac{2\varepsilon_4 b_2}{L} \int_\Omega \chi_x^2 dx + \varepsilon_3 b_2 \int_\Omega \xi_x q \chi_x dx \\
&+ \frac{2\varepsilon_4 \rho_1 b_2}{Lk} \int_\Omega \chi_t^2 dx + \frac{2\varepsilon_4}{Lk} \int_\Omega \left(b_2 \theta_x - \left(\int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds \right) \right)^2 dx \\
&- \frac{\varepsilon_4 \gamma}{k} \int_\Omega \chi_x q \left(g_2(t)\theta_x - \int_0^t g_2'(t-s)(\theta_x(t) - \theta_x(s))\,ds \right) dx \\
&- \frac{\varepsilon_4 \gamma}{k} \int_\Omega \theta_t q \left(g_2(t)\theta_x - \int_0^t g_2'(t-s)(\theta_x(t) - \theta_x(s))\,ds \right) dx \\
&+ \frac{2\varepsilon_4 \rho_3 b_2}{Lk} \int_\Omega \theta_t^2 dx - \frac{\varepsilon_4 \gamma}{k} \int_\Omega \xi_t q \left(b_2 \theta_x - \left(\int_0^t g_2(t-s)\theta_x(s)\,ds \right) \right) dx.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

En considérant l'inégalité de Young, le lemme 1.3.2 et le lemme 1.3.3, nous obtenons les estimations

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\varepsilon_4\gamma}{k}\int_\Omega \chi_x q\left(g_2(t)\theta_x-\int_0^t g_2'\left(t-s\right)\left(\theta_x\left(t\right)-\theta_x\left(s\right)\right)ds\right)dx\\
&=\frac{\varepsilon_3\gamma}{k}\int_\Omega \chi_x q\left(\int_0^t g_2'\left(t-s\right)\left(\theta_x\left(t\right)-\theta_x\left(s\right)\right)ds\right)dx \quad -\frac{\varepsilon_4\gamma}{k}\int_\Omega \chi_x q g_2(t)\theta_x dx\\
&\leq \varepsilon_4 c_0\int_\Omega \chi_x^2 dx+\varepsilon_4 c_0\int_\Omega \theta_x^2 dx-\varepsilon_4 c_0\int_\Omega \left(g_2' o\theta_x\right)dx
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

de la même façon, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\varepsilon_4\gamma}{k}\int_\Omega \theta_t q\left(g_2(t)\theta_x-\int_0^t g_2'\left(t-s\right)\left(\theta_x\left(t\right)-\theta_x\left(s\right)\right)ds\right)dx\\
&=-\frac{\varepsilon_4\gamma}{k}\int_\Omega \theta_t g_2(t)q\theta_x dx+\frac{\varepsilon_4\gamma}{k}\int_\Omega \theta_t q\left(\int_0^t g_2'\left(t-s\right)\left(\theta_x\left(t\right)-\theta_x\left(s\right)\right)ds\right)dx\\
&\leq \varepsilon_4 c_0\int_\Omega \theta_t^2 dx+\varepsilon_4 c_0\int_\Omega \theta_x^2 dx-\varepsilon_4 c_0\int_\Omega \left(g_2' o\theta_x\right)dx,
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

En fin,

$$
\varepsilon_4\int_\Omega \xi_x q\chi_x dx\leq \varepsilon_4\int_\Omega \chi_x^2 dx+\frac{1}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_x^2 dx, \tag{4.59}
$$

$$
-\frac{\varepsilon_4\beta}{k}\int_\Omega \theta_t q\theta_x dx\leq \varepsilon_4\int_\Omega \theta_x^2 dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \theta_t^2 dx, \tag{4.60}
$$

$$
-\frac{\varepsilon_4\gamma}{k}\int_\Omega \xi_t q\theta_x dx\leq \varepsilon_4\int_\Omega \theta_x^2 dx+\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t^2 dx. \tag{4.61}
$$

Substituant (4.57)-(4.61) dans (4.56)), nous obtenons (4.54)).

Et de la deuxième équation du système (4.5) et en intégrant par parties nous trouvons

$$
\begin{aligned}
J_2'\left(t\right)=&\frac{1}{2L\varepsilon_4}\int_\Omega \left(b_1\xi_x-\int_0^t g_1\left(t-s\right)\xi_x\left(t,s\right)ds\right)^2 dx\\
&-\frac{1}{4\varepsilon_4}\left[\left(b_1\xi_x\left(L\right)-\int_0^t g_1\left(t-s\right)\xi_x\left(L,s\right)ds\right)^2\right]\\
&-\frac{1}{4\varepsilon_4}\left[\left(b_1\xi_x\left(0\right)-\int_0^t g_1\left(t-s\right)\xi_x\left(0,s\right)ds\right)^2\right]\\
&+\frac{\gamma}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \theta_t q\left(b_1\xi_x-\int_0^t g_1\left(t-s\right)\xi_x\left(t,s\right)ds\right)dx\\
&-\frac{k}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \left(\chi_x+\xi\right)q\left(b_1\xi_x-\int_0^t g_1\left(t-s\right)\xi_x\left(t,s\right)ds\right)dx\\
&+\frac{\rho_2}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t q\left(b_1\xi_x-\int_0^t g_1\left(t-s\right)\xi_x\left(t,s\right)ds\right)_t dx.
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

En utilisant l'inégalité de Young, le lemme 1.3.2 et le lemme 1.3.3 et le fait que $q^2(x) \leq 4,\ \forall x \in [0, L]$, nous estimons les termes de (4.62) comme suit

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \theta_t q(x)\left(b_1\xi_x - \int_0^t g_1(t-s)\,\xi_x(t,s)\,ds\right)dx \\
&\quad \leq +\frac{\gamma^2 L}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \theta_t^2 dx + \frac{1}{4L\varepsilon_3}\int_\Omega\left(b_1\xi_x - \int_0^t g_1(t-s)\,\xi_x(t,s)\,ds\right)^2 dx \\
&\quad \leq +\frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \theta_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3}\int_\Omega \xi_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3}\int_\Omega (go\xi_x)\,dx,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{k}{4\varepsilon_4}\int_\Omega (\chi_x+\xi)\,q(x)\left(b_1\xi_x - \int_0^t g_1(t-s)\,\xi_x(t,s)\,ds\right)dx \\
&\quad \leq k\varepsilon_4\int_\Omega (\chi_x+\xi)^2 dx + \frac{k}{16\varepsilon_4^3}\int_\Omega\left(b_1\xi_x - \int_0^t g_1(t-s)\,\xi_x(t,s)\,ds\right)^2 dx \\
&\quad \leq k\varepsilon_4\int_\Omega (\chi_x+\xi)^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_4^3}\int_\Omega \xi_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_4^3}\int_\Omega (go\xi_x)\,dx \qquad ,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho_2}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t q(x)\left(b_1\xi_x - \int_0^t g_1(t-s)\,\xi_x(t,s)\,ds\right)_t dx \\
&\qquad = \frac{\rho_2}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t q b \xi_{xt} dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t q\left(g(t)\xi_x - g'\diamond\xi_x\right)dx \\
&\qquad = \frac{\rho_2 b_1}{4L\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t q g(t)\xi_x dx - \frac{\rho_2}{4\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t q\left(g'\diamond\xi_x\right)dx \\
&\qquad \leq \frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega \xi_x^2 dx - \frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_\Omega (g'o\xi_x)\,dx \qquad .
\end{aligned} \tag{4.65}$$

En substituant (4.63)-(4.65) dans (4.62), nous obtenons (4.54). ♦

Preuve du Theorem 4.2.1. Pour certaines constantes positives ; N, N_1, N_2, N_3 et N_4 qui vont être choisis de manière appropriée. nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov par

$$\begin{aligned}
\pounds(t) &= NE(t) + N_1 I_1(t) + \frac{1}{4}I_2(t) + N_2 I_3(t) + N_3 I_4(t) \\
&\quad + N_4 I_5(t) + I_6(t) + J_1(t) + J_2(t), \qquad \forall\, t > 0.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Ensuite, en prenant en compte (4.8), (4.13), (4.20) , (4.25), (4.33), (4.38), (4.46), (4.54), (4.55) et les relations suivantes

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \chi_x^2 dx \leq 2\int_\Omega (\chi_x+\xi)^2 dx + 2C_p \int_\Omega \xi_x^2 dx,\\
&\left[\chi_x\left(b\xi_x - \int_0^t g(t-s)\,\xi_x(x,s)\,ds\right)\right]_{x=0}^{x=L} \leq \varepsilon_3\left[\chi_x^2(L)+\chi_x^2(0)\right]\\
&\quad +\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[\left(b\xi_x(L) - \int_0^t g(t-s)\,\xi_x(L,s)\,ds\right)^2\right]\\
&\quad +\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[\left(b\xi_x(0) - \int_0^t g(t-s)\,\xi_x(0,s)\,ds\right)^2\right],
\end{aligned}$$

nous obtenons,

$$\pounds'(t) \leq \begin{array}{l}
-\left[\frac{\lambda_1 N_1}{2} - \frac{3b_1}{8} - N_2 c_0 \varepsilon_2 - c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right) - \frac{1}{\varepsilon_3} - c_0\varepsilon_4\right]\int_\Omega \xi_x^2 dx\\
-\left[N_2\left(\rho_2\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau - \delta_1\right) - \frac{3\rho_2}{4} - N_1\left(\rho_2 + \frac{\rho_1^2 C_p}{4\varepsilon_1}\right) - N_4\varepsilon_3 - \frac{c_0}{\varepsilon_4}\right]\int_\Omega \xi_t^2 dx\\
-\left[\begin{array}{l} N_4\left(\rho_3\int_0^t g_2(\tau)\,d\tau - \delta_2\right) - N_1 c_0 - \frac{\gamma^2}{8k} - c_0\\ -N_2\varepsilon_2 - N_3 c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right) - c_0\left(\frac{1}{\varepsilon_4}+\varepsilon_4\right)\end{array}\right]\int_\Omega \theta_t^2 dx\\
-\left[\frac{k}{8} - N_2\varepsilon_2 - N_3\varepsilon_3 - c_0\varepsilon_4\right]\int_\Omega (\chi_x+\xi)^2 dx\\
-\left[\frac{\rho_1}{4} - N_1\varepsilon_1 - N_4\varepsilon_3 - c_0\varepsilon_4\right]\int_\Omega \chi_t^2 dx\\
-\left[\frac{\lambda_2 N_3}{2} - N_4 c_0\varepsilon_3 - c_0\varepsilon_4\right]\int_\Omega \theta_x^2 dx\\
+\left[N_1 c_0 + c_0 + N_2 c_0\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) + \frac{c_0}{\varepsilon_4}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4^2}\right)\right]\int_\Omega (g_1 o \xi_x)\,dx\\
+\left[N_3 c_0 + N_4 c_0\left(\varepsilon_3 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right)\right]\int_\Omega (g_2 o \theta_x)\,dx\\
+\left[\frac{N}{2} - N_2 c_0 - \frac{c_0}{\varepsilon_4}\right]\int_\Omega (g_1' o \xi_x)\,dx\\
+\left[\frac{N}{2} - \frac{c_0 N_4}{\delta_2} - c_0\right]\int_\Omega (g_2' o \theta_x)\,dx
\end{array} \tag{4.67}$$

Puisque g_1 et g_2 sont continues et positives, alors pour tout $t \geq t_0 > 0$, nous avons

$$g_0 = \min\left\{\int_0^{t_0} g_1(s)\,ds,\ \int_0^{t_0} g_2(s)\,ds\right\}.$$

Si nous sélectionnons nos constantes très soigneusement, tous les termes du côté droit de (4.67) deviennent négatifs. Prenant $\delta_1 = \frac{\rho_2}{4N_2}$, $\delta_2 = \frac{\gamma^2}{8N_4 k}$ et choisissant ε_1

assez petit tel que

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\rho_1}{12N_1}.$$

Deuxièmement, nous sélectionnons N_1 assez grand pour que

$$\frac{\lambda_1 N_1}{2} - \frac{3b_1}{8} - N_2 c_0 \varepsilon_2 - c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) - \frac{1}{\varepsilon_3} - c_0\varepsilon_4 > 0,$$

et N_3 assez grand pour que

$$\frac{\lambda_2 N_3}{2} - N_4 c_0 \varepsilon_3 - c_0 \varepsilon_4 > 0.$$

Maintenant, nous choisissons ε_2 si petit que

$$\varepsilon_2 < \frac{k}{24N_2},$$

et N_4 assez grand pour que

$$N_4 g_0 - N_1 c_0 - \varepsilon_2 N_2 - N_3 c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) - c_0\left(\frac{1}{\varepsilon_4} + \varepsilon_4\right) - c_0 > 0.$$

Après cela, nous prenons N_2 assez grand pour que

$$N_2 g_0 - \rho_2 - N_1\left(\rho_2 + \frac{\rho_1^2 C_p}{4\varepsilon_1}\right) - N_4\varepsilon_3 - \frac{c_0}{\varepsilon_4} > 0,$$

et nous choisissons ε_3 si petit tel que

$$\varepsilon_3 \leq \min\left(\frac{k}{12N_3}, \frac{\rho_1}{24N_4}\right).$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que

$$\frac{N}{2} - N_2 c_0 - \frac{c_0}{\varepsilon_4} > \ 0,$$

et

$$\frac{N}{2} - \frac{c_0 N_4}{\delta_2} - c_0 > 0.$$

Par conséquent, (4.67) prend la forme

$$\pounds'(t) \leq -k_0 E(t) + c_1 \int_\Omega (g_1 o\xi_x + g_2 o\theta_x)\, dx, \ \forall t \geq t_0, \tag{4.68}$$

pour deux constantes positives k_0 et c_1.

En multipliant(4.68) par $\zeta(t)$ et en utilisant (H_1) et $(H2)$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\zeta(t)\, \pounds'(t) &\leq -k_0 \zeta(t)\, E(t) + c_1 \zeta(t) \int_\Omega (g_1 o\xi_x + g_2 o\theta_x)\, dx \\
&\leq -k_0 \zeta(t)\, E(t) - c_2 \int_\Omega (g_1' o\xi_x + g_2' o\theta_x)\, dx \\
&\leq -k_0 \zeta(t)\, E(t) - c_2 E'(t) \\
[\zeta(t)\, \pounds(t) + c_2 E(t)]' - \zeta'(t)\, E(t) &\leq -k_0 \zeta(t)\, E(t), \ \forall t \geq t_0.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\zeta'(t) \leq 0$, nous aurons

$$(\zeta(t)\, \pounds(t) + c_2 E(t))' \leq -k_0 \zeta(t)\, E(t), \ \forall t \geq t_0.$$

Encore une fois, en notant que

$$R(t) = \zeta(t)\, \pounds(t) + c_2 E(t) \sim E(t).$$

nous obtenons pour une constante positive α,

$$R'(t) \leq -\alpha \zeta(t)\, R(t), \ \forall t \geq t_0. \tag{4.69}$$

Une simple intégration de (4.69) sur (t_0, t) conduit à

$$R(t) \leq R(t_0)\, e^{-c_3 \int_{t_0}^t \zeta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.70}$$

Finalement, l'affirmation du Théorème 4.2.1. est obtenue au fait que $R \sim E$. ♦

Bibliographie

[1] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera and R. Racke, *Energy decay for Timoshenko systems of memory type.* J. Differential Equations 194, 82–115(2003).

[2] F. Ammar-Khodja, S. Kerbal and A. Soufyane, *Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam,* J. Math. Anal. Appl 327(1), 525–538 (2007).

[3] H. Brezis, *Functional analysis Sobolev spaces and partial dierential equations,* Universitext, Springer, New York, (2011).

[4] P.S. Casa and R. Quintanilla , *Exponential decay in one-dimentional porous thermo-elasticity,* Mech. Res. Comm. 32, 652-658(2005).

[5] S.C. Cowin and J.W. Nunziato, *Linear elastic materials with voids.* J. Elasticity, 13, 125–147(1983).

[6] A. Djebabla, N.E. Tatar, *Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermo-viscoelastic damping.* J. Dyn. Control Syst. 16(2), 189–210(2010).

[7] J. M. C. Duhamel, *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides.* Mémoirs par Divers Savans (Acad. Sci. Paris), 5, 440-498(1838).

[8] H.M.Eller, J.E. Lagnese, and S. Nicaise, *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping,* Comput. Appl. Math. 21, (1), 135-

165(2002). Special issue in memory of Jacques-Louis Lions.

[9] L.H.Fatori and J.E. Muñoz Rivera, *Energy decay for hyperbolique thermoelastic systems of memory type.* Quart. Appl. Math., 59(3), 441-458(2001).

[10] H.D. Fernàndez Sare and J.E Muñoz Rivera, *Exponential decay of Timoshenko systems with indefinite memory dissipation.* Elect. Adv. Differ. Eqs. 13(7–8), 733–752(2009).

[11] M.A. Goodman and S.C.A Cowin, *continuum theory for granular materials.* Arch Rational. Mech.Anal. 44(4), 249-266(1972).

[12] A. E. Green and P. M. Naghdi, *A re-examination of the basic postulates of thermomechanics,* Proc. Royal Soc. London. Series A : Mathematical and Physical Sciences, 432(1885), 171-194(1991).

[13] A. E. Green and P. M. Naghdi, *On undamped heat waves in an elastic solid,* J. Thermal Stresses, 15(2), 253-264 (1992).

[14] A. Guesmia, S.A. Messaoudi and A. Soufyane, *On the stabilization for a linear Timoshenko system with infinite history and applications to the coupled Timoshenko-heat systems.* Elect. J. Diff. Eqs. 193, 1–45 (2012).

[15] A. Guesmia, S.A. Messaoudi and A. Wehbe, *Uniform decay in mildly damped Timoshenko system with non-equal wave speed propagation.* Dynamic Systems and Applications, 21, 133-146(2012).

[16] S.W. Hansen, *Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod.* J. Math. Anal 167, 429-442(1992).

[17] A. Haraux, *Comportement à l'infini pour une équation d'ondes non lineaire dissipative*, C. R. Acad. Sci.Paris Ser I Math. 287 , 507-509(1978)

[18] D.A. Ieşan, *A theory of thermoelastic material with voids.* Artal. Mech. 60, 67-89(1986).

[19] D.A. Ieşan, *On a theory of micromorphic elastic solids with microtemperature.* J. Themal Stresses. 24, 737-752(2001).

[20] D.A. Ieşan, *Thermoelastic models of continua.* Bertin : Springer, (2004).

[21] M. kafini, *General energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with a viscoelastic damping.* J. Math. Anal. Appl 375, 523-537(2011).

[22] V. Komornik *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, Masson, Paris, (1994).

[23] A. Magaña and R. Quintanilla, *On the exponential decay of solution in one-dimensional generalized porous-thermo-elasicity.* Asymptot. Anal. 49, 173-187(2006).

[24] A. Magaña and R. Quintanilla, *On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials.* Internat. J. Solids Struct. 43, 3414-3427(2006).

[25] S.A. Messaoudi and M.I Mustafa, *A stability result in a memory-type Timoshenko system.* Dyn. Syst. Appl. 18(3–4), 457–468(2009).

[26] S.A. Messaoudi and A. Fareh, *General decay for a porous thermoelastic system with memory : The case of equal speeds.* Dyn.Nonlinear analysis : TMA, 74, 6895-6906(2011).

[27] S.A. Messaoudi and Belkacem Said-Houari, *General decay for a porous thermoelastic system with memory : The case of nonequal speeds.* Acta Mathimatica Scientia, 33 ,23-40(2013).

[28] S.A. Messaoudi and T.A. Apalara, *General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III,* Arab. J. Maths. Sci 20(2). 213-232(2014).

[29] S.A. Messaoudi and A. Fareh, *Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history.* J. Math. Anal. Appl. 360 (2009) 459–475.

[30] J.E. Muñoz Rivera , *Energy decay for hyperbolique thermoelastic systems of memory type*, Quart. Appl. Math, 35, 19-30(1992).

[31] J.E. Muñoz Rivera and H.D. Fernandez Sare,, *Stability of Timoshenko systems with past history.* J. Math. Anal. Appl. 339, 482–502(2008).

[32] J.E Muñoz Rivera and J.E. Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems - global existence and exponential stability.* J. Math. Anal. Appl. 276, 248-278(2002).

[33] J.E Muñoz Rivera and J.E. Racke, *Timoshenko systems with indefinite damping.* J. Math. Anal. Appl. 341, 1068–1083(2008).

[34] K. E. Neumann, *Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in comprimirten oder ungleichformig erwarmten unkrystallinischen Korpern.* Pogg. Ann. Phys. Chem,54, 449-476(1841).

[35] J.W. Nunziato and S.C. Cowin, *Nunziato J.W, Cowin S.C. A nonlinear theory of elastic material with voids,* Arch. Rational Mech. Anal, 72(2), 175-201(1979).

[36] M.L. Santos, A.D.S Campelo and D.S. Júnior, *Decay rates of porous elastic systems.* J. elasticity. 127(1), 79–101(2017).

[37] M.L. Santos , D.S. Júnior and J.E. Muñoz Rivera, *The stability number of the Timoshenko system with second sound* J. Diff. Equ. 253, 2715–2733(2012).

[38] A. Soufiane, *Energy decay for porous-thermo-elasticity systems of memory type* Appl. Anal. 87, 451-464(2008).

[39] A. Wehbe and W. Youssef, *Stabilization of the uniform Timoshenko beam by one locally distributed feedback*. Appl. Anal, 88(7), 1067–1078(2009).

[40] S. Timoshenko, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars*. Philos. Mag. 41, 744–746(1921).