



*UNIVERSITE PARIS-SUD
ÉCOLE DOCTORALE : STITS*

Laboratoire des Signaux et Systèmes

DISCIPLINE PHYSIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue publiquement le 20/12/2012

par

Mounir Bekaik

Commande des systèmes non linéaires à retard
--

Directeur de thèse	M. Frédéric MAZENC
Co-directeur de thèse	M. Silviu-Iulian NICULESCU
Composition du jury :	
Rapporteur :	M. Michael MALISOFF
Rapporteur :	M. Christophe PRIEUR
Examineur :	Mme. Woihida AGGOUNE
Examineur :	M. Arben ÇELA
Examineur :	M. Michel DAMBRINE
Examineur :	M. Hugues MOUNIER

Table des matières

1	Notations, définitions et rappels de base	7
2	Notions et résultats introductifs	11
1	Introduction	11
1.1	Positionnement des systèmes à retard	12
1.2	Organisation du travail	16
2	Divers types de systèmes	17
2.1	Equations différentielles ordinaires à temps continu	17
2.2	Systèmes à retard à temps continu et notion d'état	17
2.3	Systèmes à commande échantillonnée	20
3	Notions fondamentales de la stabilité	20
3.1	Définitions	21
3.2	Stabilité « Entrée bornée - Etat borné » : <i>Input-to-State Stability</i>	22
4	Stabilité et fonction de Lyapunov	23
4.1	Systèmes sans retard	24
4.2	Systèmes à retard	25
5	Technique d'ajout d'intégrateurs	27
5.1	Technique d'ajout d'intégrateurs : cas sans retard	27
5.2	Technique d'ajout d'intégrateurs : cas avec retard	29
6	Réduction de modèle	30
6.1	Rappels	30
6.2	Retard ponctuel : nouvelle méthode	31
3	Contributions majeures de ce mémoire	33
1	Nouveau type de réduction de modèle	33
1.1	Nouveau type de réduction de modèle : retard distribué.	33
2	<i>Backstepping</i> à retard : nouveau résultat	36

3	Stabilisation par commande échantillonnée	38
4	Conclusion générale	39
1	Résumé des travaux réalisés	39
2	Futurs axes de recherche	40
5	Systems with distributed input delay	51
1	Introduction	51
2	Main result	54
2.1	Problem statement and main result	54
2.2	Discussion of Theorem 2.1	55
2.3	Proof	56
3	Example	60
4	Conclusion	61
6	Backstepping with delay	65
1	Introduction	65
2	Particular family of systems in feedback form	68
3	Main result	69
4	ISS closed-loop systems	73
5	Illustrative example	74
6	Conclusion	76
7	Useful inequalities	79
8	Technical lemma	79
9	Technical result	79
7	Sampling and Delay	83
1	Introduction	83
2	Particular control problem	85
3	State-dependent sampling and control generation	86
4	Main result	89
5	Illustration	95
6	Conclusion	95

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement tous les membres du jury : Hugues Mounier, Christophe Prieur, Michael Malisoff, Woihida Aggoune, Arben Çela, Michel Dambrine. Ils m'ont fait grand honneur en évaluant mon travail.

Je souhaite à exprimer toute ma reconnaissance à Frédéric Mazenc et Silviu Iulian Niculescu sous la direction desquels j'ai réalisé mes travaux au sein du Laboratoire des Signaux et Systèmes. En effet, j'ai beaucoup apprécié la façon dont ils ont encadré mon travail, leur grande disponibilité et l'enthousiasme dont ils ont fait preuve tout au long de cette thèse.

Je tiens à remercier toute l'équipe-projet INRIA Disco pour m'avoir accueilli et mis à ma disposition les ressources nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier Mme Véronique Vèque, directrice de l'école doctorale STITS, pour son suivi, et sa capacité à améliorer la vie des étudiants doctorants ainsi que les membres du service administratif et plus particulièrement Mme Giron et Mme Baverel.

Je souhaite également exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement au bon déroulement de ma thèse à travers leur soutien moral et leurs encouragements. Je pense tout particulièrement à ma mère, qui est tout ce que j'ai de plus cher au monde, mon père, mes tantes, ma cousine Nawel, mon petit frère Badredine et mes amis Ines, Sara, Meriem, Mehdi, Hamid, Khalil, Imène, Lamine, ainsi que mes collègues du Laboratoire des Signaux et Systèmes Ali, Sara, Marcel, Jing, Victor, Biene.

Merci mon dieu de m'avoir permis de réaliser mon objectif, merci mon pays.

Chapitre 1

Notations, définitions et rappels de base

- τ : désigne le retard
- ISS : *input-to-state stable*.
- LMI : *linear matrix inequalities*.
- $\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels ou nuls.
- $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel de dimension n sur le corps des réels.
- $x^\top$: transposée du vecteur x , $A^\top$: transposés de la matrice A .
- Id_n : matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- $|\cdot|$: norme Euclidienne d'une matrice ou d'un vecteur de n'importe quelle dimension.
- C_{in} : ensemble des fonctions continue dans $\mathbb{R}^n$ définies sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ ($C_{in} = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$).
- Soit $V = [v_1, \dots, v_k]^\top \in \mathbb{R}^k$. $V \geq 0$ indique que pour tout $i = 1 \dots k$, $v_i \geq 0$.
- Une fonction $f(\cdot)$ à valeur réelle est concave si, pour tout réels a, b l'inégalité

$$lf(a) + (1-l)f(b) \leq f(la + (1-l)b)$$

est satisfaite pour tout $l \in [0, 1]$.

- Soit une fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et τ un réel positif. Nous noterons par x_t , la fonction définie par $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$.

- Soit $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors $\dot{z}(t)$ désigne la dérivée première de z .

- Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right).$$

où $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$ désigne la dérivée partielle de φ par rapport à la variable x_i .

- Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ quand $x \neq 0$.

- Une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est radialement non bornée si pour toute constante $m \geq 0$, il existe une constante $c \geq 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$, $V(t, x) \geq m$ si $|x| \geq c$.

- Une fonction $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$, où a est une constante strictement positive appartient à la classe des fonctions $\mathcal{K}$ si celle-ci est continue, strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Elle appartient à la classe des fonctions $\mathcal{K}_\infty$ si $a = +\infty$ et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty.$$

- Une fonction continue $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ appartient à la classe des fonctions $\mathcal{KL}$ si, pour tout s fixé, la fonction $\beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$ par rapport à r et, pour tout $r > 0$ fixé, la fonction $\beta(r, s)$ est strictement décroissante par rapport à s et

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0.$$

- Soient $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction et k un réel strictement positif. On dit que f est k -lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ est vérifiée.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\rho \in (0, \infty)$. L'inégalité

$$(a + b)^2 \leq (1 + \rho)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)b^2$$

est vérifiée. De plus si $\rho \in (0, 1)$, l'inégalité

$$\rho a^2 - \frac{\rho}{1 - \rho} b^2 \leq (a + b)^2,$$

est vérifiée.

• Soit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et définie positive et soit $c \in (0, 1]$. Alors pour tout vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$(1 - c)v_1^\top P v_1 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)v_2^\top P v_2 \leq (v_1 + v_2)^\top P (v_1 + v_2).$$

• L'inégalité de Cauchy-Schwartz est l'inégalité suivante : si $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont deux fonctions à valeur réelle continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$ alors

$$\int_a^b f(s)g(s)ds \leq \sqrt{\int_a^b f(s)^2 ds \int_a^b g(s)^2 ds}.$$

Chapitre 2

Notions et résultats introductifs

L'objectif de ce premier chapitre est d'introduire certains concepts de base qui seront utiles dans la suite de notre travail et puis de présenter des notions clefs de la théorie de la stabilité et de la stabilisation des systèmes non linéaires avec ou sans retard.

En particulier nous évoquerons certaines méthodes d'analyse de stabilité basées sur la notion fondamentale de fonction de Lyapunov, nous aborderons le problème de la construction de lois de commandes au moyen de la technique d'ajout d'intégrateurs, appelée également *backstepping* et nous décrirons brièvement la technique classique de stabilisation de systèmes à retard dans l'entrée au moyen appelée réduction de modèle.

1 Introduction

Cette thèse a pour sujet centrale l'étude de systèmes non linéaires commandés à retard à temps continu. ces systèmes sont de dimension infinie qui intervient dans de très nombreux domaines scientifiques : nous y reviendrons par la suite. Précisons encore toutefois que ces systèmes sont des équations différentielles fonctionnelles à évolution dans des espaces fonctionnels qui généralise les équations différentielles ordinaires. Comme pour tous les systèmes dynamiques, leur investigation théorique inclut des sujets comme l'existence et l'unicité des solutions, leur périodicité, l'analyse des bifurcations, les problèmes aux limites, la commande et l'estimation. Dans notre cas nous nous intéresserons au problème de la stabilité. Les enjeux de ce travail sont multiples :

- (i) ils consistent à construire des lois de commandes pour les systèmes non linéaires ayant une commande à retard distribué,
- (ii) établir de nouveaux résultats de type *backstepping* pour des systèmes ayant un retard ponctuel dans la commande,
- (iii) construire des lois de commande à des systèmes à commande échantillonnée une propriété

de stabilité pratique.

Dans ce travail, nous avons choisi de mettre l'accent sur les systèmes non linéaires possédant un retard dans la commande. Le problème de la stabilisation de systèmes de ce type est d'intérêt en raison des retards induits dans les mesures, qui se rencontrent très souvent dans les applications. Nous avons démontré la stabilité des systèmes en boucle fermée que nous avons obtenu en construisant à retards des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Nous avons fait le choix d'aborder les problèmes que nous avons considérés en utilisant un type d'outils bien spécifique : les opérateurs faisant intervenir des termes distribués. Avant nos travaux, ces outils étaient essentiellement utilisés pour stabiliser des systèmes linéaires et cela dans le cadre de la technique dite de réduction de modèle. Nous avons montré qu'ils peuvent aussi être utilisés pour stabiliser des systèmes non linéaires. Le fait que nous traitons des systèmes non linéaires mérite d'être souligné. En effet, alors qu'un grand nombre de résultats pour les systèmes à retard ont été obtenus (au moyen de l'approche fréquentielle et LMI en particulier) encore limitée sont ceux obtenus pour les systèmes non linéaires à retard.

1.1 Positionnement des systèmes à retard

Faisons maintenant un bref rappel historique en mettant l'accent en particulier sur les grandes avancées dans le domaine de l'analyse de la stabilité et de la stabilisation.

Historique

Les premières équations différentielles sans retard ont été examinées par des mathématiciens célèbres comme Euler, Lagrange, Laplace et de Poisson au dix-huitième siècle. Les systèmes à retard, également appelés systèmes héréditaires, ou système à décalage dans le temps, ont été considérés plus tardivement. Au début du XXe siècle, des premiers modèles d'équations à retard ont été proposés dans divers contextes. Citons celui de l'étude de la viscoélasticité étudiés en 1909, les problèmes de biologie étudiés en 1934 par Costyzyin et les problèmes de stabilisation des navires en 1942 par Minorsky.

Certains résultats fondamentaux concernant la stabilité des systèmes à retard et qui sont établis au moyen de l'étude des zéros de fonctions caractéristiques exprimés par des quasi polynômes ont été obtenus par Pontryagin en 1942.

Au début des années 40, Tchebotarev a publié des articles consacrés au critère de Routh-Hurwitz pour les équations quasi polynômes d'une grande importance.

Certains chercheurs ont par la suite cherché à étendre la théorie des fonctions de Lyapunov aux systèmes à retard. Les difficultés rencontrées n'ont été levées qu'avec les travaux de Krasovskii de

1951 qui procurent des fonctionnelles de Lyapunov pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires à retard. Observons au passage que Krasovskii a été le premier à souligner l'importance qu'il y a à considérer les trajectoires dans leur ensemble plutôt leur valeur à l'instant présent. A la suite de ces travaux, Razumikhin a établi le théorème ayant son nom qui permet de démontrer la stabilité d'un système non linéaire à retard au moyen d'une fonction de Lyapunov classique.

Des extensions supplémentaires ont été élaborées par Kalmanovskii et Nosov [56]. Pour plus détails concernant ces développements, nous référons au livre de Kalmanovskii et Nosov. D'autres livres dans le domaine existent. Parmi les plus classiques, il y a Bellman et Cooke [8], Hale et Verduyn Lunel [43].

L'ouvrage récent de Niculescu donne un bref aperçu de ces développements historiques.

Depuis 1990, il y a eu un grand accroissement des activités de recherche relatives aux systèmes à retard dans la communauté du contrôle. Les principales réalisations de cette période ont trait à la prise en compte des non linéarités des systèmes et à l'étude de questions de robustesse.

Système à retard

L'existence d'un ou plusieurs retards dans les procédés peut avoir une ou plusieurs causes [67] comme, par exemple :

- la mesure des variables du système ;
- la nature physique d'un composant du système ;
- la transmission d'un signal.

On peut classer les retards par rapport aux systèmes physiques où il interviennent [56] en :

- retards dus à la structure interne du système rencontré : la dynamique du système en boucle ouverte contient explicitement le retard (procédés chimiques, dynamiques de populations, modèles économiques) ;
- retards de transport rencontrés quand on a un transport à distance de substance, d'énergie ou un signal entre deux sous systèmes (par exemple : le temps de transport de fluides dans les procédés chimiques, les hormones dans le flot sanguin) ;
- retards d'information rencontrés dans les systèmes de calcul (par exemple : le temps de calcul pour l'analyse d'une image télévisuelle avec un robot, l'analyse de la composition d'un procédé chimique).

Ces systèmes sont appelés génériquement *systèmes à retard*. Il existe plusieurs manières d'aborder l'étude de ces systèmes en considérant des représentation des modèles sous-jacentes comme :

- des évolutions dans des espaces abstraits [18] : dans ce cas, l'évolution des systèmes est décrite par des opérateurs bornés ou non bornés. Cette approche nécessite l'introduction de nouveaux concepts de commandabilité, d'observabilité, de stabilisabilité et de détectabilité

exprimés en terme d'opérateurs.

- des équations différentielles fonctionnelles [6] : cette vision des systèmes à retard consiste à donner une extension des résultats obtenus pour les équations différentielles ordinaires au cas des équation différentielles fonctionnelles en fonction du contexte. Ce type d'approche permet de voir et d'interpréter les systèmes à retard comme des évolutions dans des espaces euclidiens (de dimension finie) ou comme des évolutions dans des espaces de fonctions (la condition initiale est une fonction).
- des équations différentielles sur un anneau ou sur un module [86] : cette approche permet d'avoir des notions très générales de commandabilité et d'observabilité [22], ou de stabilisabilité [40]. Cette approche intéressante nécessite implicitement la connaissance de la taille du retard.

Ce mémoire concerne des systèmes à retard représentés par des équations différentielles fonctionnelles. Comme les systèmes à retard sont de systèmes qui ne sont pas de dimensions finie, un autre type d'approche consiste à les approximer par des systèmes de dimension finie. Parmi les techniques d'approximation, on peut mentionner la technique de Padé [61], la technique par séries de Fourier-Laguerre [94], la technique des approximations optimaux rationnels de Hankel [36]. Les problèmes spécifiques à ce type d'approches résident dans le choix des dimensions et la stabilité des approximations [36], [39]. Il est relativement difficile d'étudier l'influence du retard sur les propriétés d'un système à partir de l'approximation considérée, mais toutefois ces techniques ont été employées dans de nombreuses applications.

Exemples

Nos travaux sont motivés par le fait que d'un point de vue pratique, on constate souvent de façon naturelle que les phénomènes de retard apparaissent. Citons les domaines de la biologie, de écologie et de l'économie. Les systèmes à retard peuvent également provenir de la simplification d'une équations aux dérivées partielles. Une présentation assez riche de ce sujet illustrée d'exemples se trouvent dans Soong et Tongue. Nous rappelons ici deux exemples.

Industrie chimique

On considère une réaction chimique du premier ordre, exotherme, irréversible du composant A en un produit de réaction B , réaction qui se déroule dans un réacteur infiniment mélangé avec recirculation. La transformation du composant A en produit de réaction B n'est pas instantanée. Il existe donc une quantité de A qui se transforme plus tard en B . Les bilans de matière et d'énergie sont donnés par des équations différentielles à états retardés de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} &= \frac{q}{V} [\lambda A_0 + (1 - \lambda)A(t - \tau) - A(t)] - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{1}{V} [\lambda T_0 + (1 - \lambda)T(t - \tau) - T(t)] \frac{\Delta H}{C_p} - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t) - \frac{1}{VC_p} U (T(t) - T_w) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $A(t)$ est la concentration du composant A , $T(t)$ est la température et $\lambda(0 \leq \lambda \leq 1)$ est le coefficient qui caractérise la recirculation.

Le cas $\lambda = 0$ correspond à une destruction complète et le cas $\lambda = 1$ correspond à une réaction sans recirculation et τ est le retard. Le cas $\tau = 0$ (système sans retard) a été complètement traité dans la littérature [97].

Le comportement d'un tel système, avec retard constant, a été considéré dans [64]. L'auteur a montré que si le système linéarisé (autour de la solution stationnaire) est localement asymptotiquement stable pour un retard nul, alors cette propriété est valable pour n'importe quelle taille du retard. Cet exemple montre que la stabilité asymptotique d'un système à états retardés peut être indépendante de la taille du retard.

Réseaux de communications

Un modèle général décrivant un réseau de transmission des données (*data network*) utilise les graphes. Il s'agit d'un ensemble de nœuds $N = n_j$ qui contient les paquets des données, et un ensemble $L = l_i$ de liaisons de communications qui permettent l'échange d'informations. En termes mathématiques, chaque nœud est caractérisé par une capacité de traitement de données, et chaque ligne par une capacité de transmission avec un certain retard de propagation. Pour un tel réseau, on peut associer un modèle continu linéaire sous la forme d'une fonction de transfert, et on peut interpréter les paquets de données perdus comme une information de type "*feedback*". Dans les réseaux internet à grande vitesse, les retards peuvent provoquer des oscillations et surtout causer l'instabilité du réseau (données non reçues). Par exemple, un modèle dynamique d'une file d'attente dans un goulot d'étranglement est :

$$x_{ij}(t) = \int_0^t (u_i(u(\theta - \tau_{ij}) - d_{ij}(\theta))) d\theta, \quad (1.2)$$

où u_i est le taux d'arrivée (et qui concerne le i -ème flux), τ_{ij} est le retard entre la source i et la queue j et d_{ij} est le taux des paquets de données qui quittent la queue. Une idée utilisée dans la littérature pour "réduire" ce retard [70] est basée sur le principe du prédicteur de Smith, méthode qui peut être appliquée seulement dans le cas où le retard est bien connu. Etudier l'influence du retard dans le réseau vu comme un système en boucle fermée est un problème très intéressant.

1.2 Organisation du travail

Le chapitre 2 présentent un rappel sur des notions de bases de stabilité ainsi qu'une définition des systèmes à retard et des différents types de retard. Il présente et motive l'utilisation du théorème de Lyapunov classique et du théorème de Lyapuno-Krasovskii. Le chapitre 3 est consacré à la présentation de trois grands travaux que nous avons réalisé et qui sont relatifs à la stabilisation de systèmes à retard distribué, à l'extension de la technique *backstepping* au cas des systèmes à retard et à un problème de commande de systèmes à retard échantillonnée. Dans un premier temps, nous avons présenté nos résultats en traitant des cas simples et dans deuxième temps, les résultats dans toute leur généralité dans des chapitres ultérieurs. Des conclusions générales et perspectives de recherche sont données dans le chapitre 4.

Dans le chapitre 5, nous avons exposé en détail notre nouvelle approche de réduction de modèle pour les systèmes non linéaires variant dans le temps avec retard distribué dans la commande.

Le chapitre 6, est consacré à l'adaptation de la technique de stabilisation pratique de systèmes non linéaires appelée *backstepping* au cas des systèmes ayant un retard ponctuel dans la commande. Dans le chapitre 7, nous avons présenté une nouvelle technique de stabilisation pratique de systèmes ayant des commandes échantillonnées et sujettes à un retard ponctuel constant.

2 Divers types de systèmes

2.1 Equations différentielles ordinaires à temps continu

Les équations différentielles ordinaires à temps continu sont des équations du type suivant

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

où f est un champ de vecteur. Cette famille fondamentale de systèmes a été très étudiée et de grands résultats classiques ont été établis au cours des derniers siècles pour celle-ci, voir par exemple [8], [47], [53] pour plus d'explications. Rappelons que ces systèmes sont déterministes et qu'ils admettent une et une seule solution locale si f est une fonction localement lipschitzienne en x .

Lorsque ces systèmes sont commandés, ils s'écrivent

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u). \quad (2.2)$$

où u désigne les variables de commande. Lorsque $f(t, 0, 0) = 0$ pour tout t , un problème classique consiste à construire une fonction $u(x)$ telle que le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(x(t))) \quad (2.3)$$

admet l'origine comme point d'équilibre localement ou globalement asymptotiquement stable.

2.2 Systèmes à retard à temps continu et notion d'état

Contrairement aux équations différentielles du type (2.1), les systèmes à retard ont des solutions dont l'évolution est déterminée par des valeurs "passées" de l'état : $x(t - \tau)$, $\tau > 0$. Par conséquent, il est nécessaire de mémoriser une partie de "l'histoire" du système pour connaître leurs évolutions. Cette caractéristique fait que les systèmes à retard sont également appelés systèmes héréditaires. Ces systèmes, lorsqu'ils sont à temps continu (et ne sont pas de type neutre), sont généralement représentés par des équations différentielles de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (2.4)$$

où f est une fonctionnelle, c'est-à-dire une "fonction de fonction". La fonction x_t représente l'état du système sur un certain intervalle du temps et est définie par

$$x_t : [-\tau_{max}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \theta \rightarrow x_t(\theta) = x(t + \theta). \quad (2.5)$$

où $\tau_{max} > 0$ correspond au retard maximum, c'est-à-dire la valeur de τ telle que l'instant $t - \tau_{max}$ est l'instant le plus ancien qui est nécessaire au calcul de $\dot{x}(t)$, $t \geq 0$. A l'instant $t = 0$, la fonction $x_t = x_0$ nécessite la connaissance des valeurs de $x(t)$ sur l'intervalle de temps $-\tau_{max} \leq t \leq 0$. En

d'autres termes, une condition initiale doit être précisée. Si la condition initiale à l'instant t_0 d'une équation différentielle ordinaire est un point $x(t_0)$, celle d'une équation différentielle retardée est une fonction que l'on suppose généralement appartenir à C_{in} ,

$$x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau_{max}, 0]. \quad (2.6)$$

L'ensemble C_{in} étant de dimension infinie, les systèmes à retards appartiennent à la classe des systèmes de dimension infinie. Les livres [43], [54], [90], [81] et [39] traitent de ces systèmes de façon approfondie.

Divers types de retards

Lors d'une phase de modélisation, il est nécessaire de savoir quel type de retard affecte le système. Dans certains cas, les propriétés intrinsèques au système peuvent apporter des informations sur le type de retard présent ainsi que sur la taille de celui-ci. Il est donc important de distinguer les diverses familles de retard qui existent.

Nous avons dégagé quatre familles principales :

1. *Retards inconnus* :

Dans ce premier cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérée. Qu'il soit constant ou variant dans le temps, il peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}_+$. Les articles [3], [4], [15], [32], [31], [45], [50], [51], [108], [109], [114], [91] considèrent de tel retard.

2. *Retard appartenant à un interval* :

Une large majorité des résultats [27] sur les retards variant dans le temps ne traitent que de retards présentés par une fonction qui varie entre 0 et une limite supérieure. Cependant, dans certains problèmes de transport ou dans le cas de certains systèmes commandés en réseaux, les fonctions retardées varient uniquement dans un intervalle privé de zéro. En effet, le cas où on considère que le retard est égal à 0, signifie par exemple que le transport d'un fluide ou des informations se fait instantanément, ce qui n'est pas réaliste dans la pratique. Ainsi, il est souvent pertinent de supposer que le retard qui le retard ne peuvent varier que dans un intervalle privé de zéro. On peut définir les conditions sur ce type de retard variant de la façon suivante. Il existe deux scalaires $0 \leq \tau_1 < \tau_2$ tels que

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2.$$

3. *Retards à dérivée bornés :*

Le phénomène de retard est souvent induit par le transport d'information, qui impose dans ce cas un délai (dû au temps de propagation) minimum incompressible. Dans ce cas, lorsque le retard est supposé être une fonction du temps différentiable, une contrainte supplémentaire relative à sa dérivée peut être ajoutée :

$$|\dot{\tau}(t)| \leq d, \quad d \in \mathbb{R}_+, \quad (2.7)$$

En pratique, la contrainte $d < 1$ est souvent utilisée afin d'assurer que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique. Par ailleurs, indépendamment du problème appliqué étudié et du type de retard associé, certains auteurs se sont intéressés à la robustesse de la stabilité d'un système vis-à-vis du retard. Il s'agit dans ce cas d'estimer les intervalles tels que le système reste stable si le retard appartient à ceux-ci. Certains résultats ont été obtenus en particulier pour le problème suivant : sachant qu'un système à retard est globalement asymptotiquement stable lorsque le retard est nul, déterminer une borne supérieure sur le retard qui garantit que la présence du retard ne déstabilise pas le système [74].

4. *Retards distribués :*

Le retard distribué, qui représente l'effet cumulé du passé sur la dynamique, apporte souvent une modélisation fine de certains processus physiques. Si un modèle utilisant un retard distribué est souvent plus fidèle au procédé qu'une modélisation employant un retard ponctuel, son analyse est en revanche souvent plus délicate. De tels systèmes sont généralement exprimés sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \int_{t-\tau}^t f_{\tau}(\omega, x(\omega), u(\omega)) d\omega. \quad (2.8)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p$ où τ est une constante positive. Le retard ω est un retard qui varie dans l'intervalle $[-\tau, 0]$. Des intervalles de longueur infinie sont aussi considérés. La valeur τ est généralement supposée connue, mais la fonction f_{τ} , appelée "noyau", peut contenir des termes incertains.

5. *Retard variant dans le temps par morceaux :*

Dans la pratique et plus précisément dans les systèmes commandés ou réseau, le retard est une fonction du temps qui n'est pas continue. Considérons, par exemple, le cas de l'échantillonnage sur des réseaux de communication. Échantillonner un signal en une suite croissante de temps t_k qui peut être vu comme un signal retardé avec un retard $\tau(t) = t - t_k$ [89], [30]. Ces cas sont très intéressants pour le fait que la dérivée du retard est égale à 1 presque partout.

En générale, les conditions de stabilité qu'on peut trouver dans la littérature incluent les différentes combinaison des contraintes précédentes. Il est également à noter que, la stabilité d'un système dépend fortement du type de la fonction de retard.

Par exemple, la stabilité d'un système ayant un retard constant donné τ_1 , borné par un retard connue et variant dans le temps τ_2 ou un retard échantillonné (avec une période d'échantillonnage constante) sont différents [89]. A la fin, même si les systèmes à retard ont eu déjà beaucoup d'attention, il y a encore un grand nombre de problème ouvert qui doivent être résolus.

2.3 Systèmes à commande échantillonnée

La famille des systèmes non linéaires à temps continu et à commande échantillonnée est une classe de systèmes d'une grande importance appliquée et qui de ce fait a suscité de nombreux travaux [105], [7], [6], [16], [107], [83], [78], [14], [13], [33], [34].

Rappelons qu'un système à temps continu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.9)$$

est à commande échantillonnée s'il existe une suite d'instant t_k , deux constantes $c_1 > c_2 > 0$ telles que pour tout entier k , $t_{k+1} - t_k \in [c_2, c_1]$ et $u(t)$ est constante sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1})$. Une telle commande est donc discontinue, mais continue par morceaux.

Un des exemple les plus simples de commandes échantillonnées est la commande émulée, c'est à dire la commande qui consiste à bloquer sur chaque période d'échantillonnage (les intervalles $[t_k, t_{k+1})$) une commande synthétisée dans le cadre continu. En effet si $u_s(x(t))$ est une commande qui donne aux solutions du système (2.9) une certaine propriété (propriété de stabilité asymptotique par exemple) alors, au moins sur des intervalles finis du temps et sur des ensembles compacts, la commande $u(t) = u_s(x(t_k))$ pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$ donnera en général aux solutions du système (2.9) des propriétés proches de celles procurées par $u_s(x(t))$, lorsque c_1 n'est pas trop grand. Toutefois, la commande émulée n'est pas nécessairement la commande échantillonnée qui génère les solutions les plus proches de la commande continue et elle peut nécessiter une fréquence d'échantillonnage plus grande que d'autre commandes échantillonnées. Aussi d'autres types de commandes échantillonnées ont-ils été développées. En particulier, il en est certaines dont les instants d'échantillonnage sont déterminés par les valeurs prises par la variable d'état x .

3 Notions fondamentales de la stabilité

La notion de stabilité est une des notions centrales de la théorie des systèmes dynamiques. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions.

Nous allons en présenter certaines pour les systèmes à temps continu.

3.1 Définitions

Soit un système dynamique non linéaire et variant dans le temps de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) , \\ x(t, t_0) = x_0 , \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f : \mathbb{R} \times C_{in} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs continue en t et localement lipschitzien en x_t sur $[0, +\infty) \times D$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine ouvert positivement invariant qui contient l'origine $x = 0$.

Définition 3.1. *L'origine est un point d'équilibre de (3.1) si $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est une solution du système (3.1).*

Observons que si l'origine est un point d'équilibre de (3.1), alors $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 3.2. *Le point d'équilibre $x = 0$ de (3.1) est*

(i) stable si, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ tel que

$$|x(t_0, t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t, t_0)| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (3.2)$$

(ii) uniformément stable si, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, (indépendant de t_0) tel que la relation (3.2) est satisfaite.

(iii) asymptotiquement stable si il est stable et si il existe $c = c(t_0) > 0$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0) = 0$ pour tout $|x(t_0, t_0)| < c$.

(iv) uniformément asymptotiquement stable si il est uniformément stable et si il existe $c > 0$ indépendant de t_0 , tel que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $T = T(\epsilon) > 0$ tel que

$$|x(t, t_0)| < \epsilon, \forall t \geq t_0 + T(\epsilon), \forall |x(t_0, t_0)| < c.$$

Rappelons maintenant un résultat classique.

Théorème 3.1. *Le point d'équilibre $x = 0$ de (3.1) est*

(i) uniformément stable si et seulement si il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ et une constante $c > 0$ telles que

$$|x(t, t_0)| \leq \alpha(|x(t_0, t_0)|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall |x(t_0, t_0)| < c,$$

(ii) uniformément asymptotiquement stable si il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une constante $c > 0$ telles que

$$|x(t, t_0)| \leq \beta(|x(t_0, t_0)|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall |x(t_0, t_0)| < c, \quad (3.3)$$

(iii) globalement uniformément asymptotiquement stable si l'inégalité (3.3) est satisfaite pour toute condition initiale $x(t_0, t_0)$.

Il est à noter que la notion de stabilité exponentielle est importante car beaucoup de systèmes sont localement exponentiellement stables.

Définition 3.3. *L'origine du système $x = 0$ de (3.1) est exponentiellement stable si la condition (3.3) est satisfaite avec $\beta(r, s) = kre^{-ls}$ où k et l sont deux constantes strictement positives. Il est globalement exponentiellement stable si cette condition est satisfaite pour toute condition initiale.*

Nous introduisons maintenant les notions de stabilité et de stabilisabilité asymptotique globales. Les notions de stabilité et de stabilisabilité asymptotique locale sont similaires ; nous ne les rappelons pas.

Définition 3.4. *L'origine du système*

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (3.4)$$

est globalement stabilisable par retour d'état si il existe une commande $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ telle que :

1. $u(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. l'origine est un équilibre globalement uniformément stable du système

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)).$$

L'origine du système (3.4) est globalement asymptotiquement stabilisable par retour d'état si il existe une commande $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ telle que :

1. $u(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. l'origine est un équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable du système

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)).$$

3.2 Stabilité « Entrée bornée - Etat borné » : *Input-to-State Stability*

La notion de stabilité ISS, exposée en particulier dans l'article [110], offre un cadre naturel pour formuler des notions de stabilité par rapport à des perturbations sans propriété particulière. Cette notion a donc été particulièrement utile dans le cadre de l'analyse de la robustesse des systèmes non linéaires, mais elle l'a été également dans le contexte de l'analyse de systèmes interconnectés.

Nous allons rappeler quelques faits fondamentaux relatifs à cette notion.

Pour simplifier, nous considérons un système autonome et sans retard :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (3.5)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^p$, et ne considérerons que des définitions globales. Mais on doit avoir à l'esprit que cette notion a aussi des définitions locales.

Définition 3.5. *Le système (3.5) est globalement input-to-state-stable (ISS) (ou simplement ISS) si il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$, une fonction γ de classe $\mathcal{K}$ telles que*

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma \left(\sup_{m \in [0, t]} |u(m)| \right), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.6)$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et u continue par morceaux et définie sur $[0, +\infty)$.

Observons que si le système (3.5) est ISS, alors nécessairement le système $\dot{x} = f(x, 0)$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.

La propriété ISS entretient des liens étroits avec les fonctions de Lyapunov. Cela nous conduit à rappeler la définition de fonction de Lyapunov ISS :

Définition 3.6. *Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable est appelée fonction de Lyapunov ISS pour le système (3.5) si il existe des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|), \quad (3.7)$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) \leq -\alpha_3(|x|), \quad \text{lorsque : } |x| \geq \beta(|u|). \quad (3.8)$$

Rappelons un résultat fondamental.

Théorème 3.2. *Supposons que le système (3.5) admette une fonction de Lyapunov ISS. Alors le système (3.5) est ISS.*

La notion de propriété ISS a été adaptée aux systèmes à retard [111], [96], [15], [19], [118], aux systèmes à commande échantillonnée et même à celui des équations aux dérivées partielles [98].

4 Stabilité et fonction de Lyapunov

Nous allons présenter certains théorèmes fondamentaux relatifs à la stabilité des systèmes dynamiques sans et avec retard : il s'agit des théorèmes de type Lyapunov. Ces résultats ont été exposés et mis en pratique, pour la plupart, au début de la deuxième moitié du 20ème siècle

(voir par exemple [62], [63], [101], [58], [102] ou encore [41], [21] et [42]). Deux théories, désormais usuelles dans le domaine des systèmes à retards, nous intéressent particulièrement : la méthode de Lyapunov-Krasovskii, qui utilise des fonctionnelles de Lyapunov, et la méthode de Lyapunov-Razumikhin, qui emploie des fonctions de Lyapunov classiques.

4.1 Systèmes sans retard

Nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit $x = 0$, un point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert contenant $x = 0$. Soit $V : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que

$$\alpha_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|), \forall t \in [0, \infty), \forall x \in D \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)f(t, x) \leq -\alpha_3(|x|), \forall t \in [0, +\infty), \forall x \in D \quad (4.2)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des fonctions définies positives et continues sur D . Alors $x = 0$ est un point d'équilibre localement uniformément asymptotiquement stable. Si $D = \mathbb{R}^n$ et α_1 est de classe $\mathcal{K}_\infty$, alors $x = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.

Un des messages principaux de ce théorème, c'est que l'on peut démontrer la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre en déterminant une fonction définie positive dont la dérivée le long des trajectoires du système considéré est définie négative. Quand cette dernière propriété est vérifiée, la fonction V est alors appelée fonction de Lyapunov stricte. Rappelons que le théorème de Lyapunov inverse (voir par exemple [119]) assure que tout système globalement uniformément asymptotiquement stable possède une fonction de Lyapunov stricte, mais que ce théorème n'est pas constructif et que la détermination d'une fonction de Lyapunov stricte peut être difficile.

De récentes avancées concernant la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires utilisent la connaissance de fonctions de Lyapunov strictes. Ces fonctions sont très utiles dans le cadre de l'analyse de la robustesse des systèmes [68]. Aussi est il intéressant de développer des techniques de construction de fonctions de Lyapunov pour des familles de systèmes non linéaires importantes, voir par exemple [26], [68].

4.2 Systèmes à retard

Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

Rappelons un théorème fondamental en matière d'analyse de stabilité et de construction de lois de commandes pour les systèmes à retard. Il constitue une extension de la seconde méthode de Lyapunov pour les équations différentielles fonctionnelles.

Théorème 4.2. *Considérons le système (2.4) et supposons $f : \mathbb{R} \times C_{in} \rightarrow \mathbb{R}^n$, est une fonction bornée dans $\mathbb{R}^n$. Soient $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ des fonctions continuellement différentiable. Supposons que u et v sont définies positives et croissantes sur $[0, +\infty)$ et qu'il existe une fonction V continue $\mathbb{R} \times C_{in} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\phi \in C_{in}$ et $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} u(|\phi(0)|) &\leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|_\infty), \\ \dot{V}(t, \phi) &\leq -w(|\phi(0)|). \end{aligned}$$

Alors, le point d'équilibre du système (2.4) est uniformément stable.

Si $u(s) \rightarrow \infty$ quand $s \rightarrow \infty$, le point d'équilibre du système (2.4) est uniformément stable.

Si de plus $w(s) > 0$ pour $s > 0$, le point d'équilibre est uniformément asymptotiquement stable.

Il est à noter que dans [58], il est démontré qu'un système à retard globalement asymptotiquement stable et vérifiant quelques conditions techniques supplémentaires admet une fonctionnelle qui vérifie les conditions du Théorème 4.2 et qui décroît strictement le long des trajectoires non nulles (une telle fonctionnelle est alors appelée fonctionnelle Lyapunov-Krasovskii stricte). Quoiqu'il en soit, la démonstration de ce résultat ne repose pas sur une construction explicite et donc, en pratique, construire une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour un système à retard peut être difficile, même lorsque on est assuré de l'asymptotique stabilité de l'équilibre.

Exemple. Considérons le système non linéaire de dimension un :

$$\dot{x}(t) = -x^3(t) + bx^3(t - \tau), \quad (4.3)$$

où b et $\tau > 0$ sont des constantes. Nous allons analyser les propriétés de stabilité du système (4.3) au moyen de la fonctionnelle suivante :

$$V(\phi) = \frac{\phi^4(0)}{2} + \int_{-\tau}^0 \phi(\theta)^6 d\theta.$$

Elle vérifie les conditions du Théorème 4.2 et est différentiable le long des trajectoires du système (4.3). De plus un simple calcul donne

$$\dot{V}(\phi) = -\phi^6(0) + 2b\phi^3(0)\phi^3(-\tau) - \phi^6(-\tau) \leq (-1 + |b|)\phi^6(0) + (-1 + |b|)\phi^6(-\tau)$$

Si $|b| < 1$, nous déduisons du Théorème 4.2 que l'origine du système (4.3) est globalement asymptotiquement stable.

Théorème de Razumikhin

Rappelons un second théorème fondamental en matière d'analyse de stabilité et de construction de lois de commandes pour les systèmes à retard présenté dans [101]. Il constitue lui aussi une extension de la seconde méthode de Lyapunov pour les équations différentielles fonctionnelles.

Théorème 4.3. *Soient α_1, α_2 deux fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$ et α_3 une fonction définie positive. Si il existe une fonction continue $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*

1. $\alpha_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^n.$
2. $\dot{V}(t, x(t)) \leq -\alpha_3(|x(t)|)$ lorsque $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \forall \theta \in [-\tau, 0]$, où $\dot{V}$ est la dérivée de V le long des trajectoires de (2.4),

alors la solution nulle du système (2.4) est globalement uniformément stable.

Sous les mêmes hypothèses, si il existe une fonction continue croissante $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $p(w) > w$ pour tout $w > 0$ et telle que

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\alpha_3(|x(t)|) \quad \text{lorsque} \quad V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

alors la solution nulle du système (2.4) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Le résultat précédent utilise une famille de fonctions de Lyapunov qui est classique pour les équations différentielles ordinaires. Il met en évidence le fait qu'il n'est pas nécessaire pour démontrer la stabilité asymptotique du système de vérifier que $\dot{V}(t, x(t)) \leq 0$ tout au long des trajectoires. Cette méthode présente la particularité de vérifier la décroissance de la fonction $V(t, x(t))$ seulement aux instants où les trajectoires ont tendance à s'éloigner du point d'équilibre.

Exemple. Considérons le système variant dans le temps de dimension un

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(t - r_0(t)), \quad (4.4)$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues et bornées en norme par une constante β telles qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$, $a(t) > |b(t)| + c$ et $r_0(t) \geq 0$ est une fonction bornée par une constante $\tau > 0$.

Nous allons analyser les propriétés de stabilité du système (4.4) en utilisant une fonction définie positive, radialement non bornée de classe C^1

$$V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Evaluons sa dérivée le long des trajectoires du système (4.4). Un calcul simple donne

$$\dot{V}(x(t)) = -a(t)x^2(t) - b(t)x(t)x(t - r_0(t)).$$

Soit $q = 1 + \frac{c}{2\beta}$. Lorsque $q|x(t)| \geq |x(t - r_0(t))|$, on a

$$\dot{V}(x(t)) \leq -[a(t) - q|b(t)|]x^2(t).$$

Puisque $a(t) > |b(t)| + c$, on a $a(t) - q|b(t)| > (1 - q)|b(t)| + c > -\frac{c}{2\beta}|b(t)| + c \geq \frac{c}{2}$. Donc,

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\frac{c}{2}x^2(t) \leq 0 \quad \text{lorsque} \quad qV(x(t)) \geq V(x(t - r_0(t))).$$

Le Théorème 4.3 permet de conclure que l'origine du système (4.4) est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.

5 Technique d'ajout d'intégrateurs

La technique *backstepping*, appelée en français ajout d'intégrateurs, présente un grand intérêt pour la commande des systèmes non linéaires. Cette méthode est l'une des approches de construction de commandes stabilisantes les plus connues et les plus utilisées. Elle met à profit une structure triangulaire possédée par certaines équations pour construire de manière itérative une loi de commande et une fonction de Lyapunov associée stabilisante. Plus précisément, elle peut s'appliquer lorsque le système non linéaire peut être mis par changement de variables et de lois commandes sous forme *feedback* stricte : la dérivée de chaque composante du vecteur d'état doit être égale à une fonction des composantes précédentes et doit dépendre additivement de la composante suivante. De plus, et contrairement au bouclage linéarisant, le *backstepping* offre la possibilité de conserver dans le bouclage les non linéarités ayant un effet stabilisant.

5.1 Technique d'ajout d'intégrateurs : cas sans retard

Parmi les très nombreux travaux consacrés à la technique d'ajout d'intégrateurs lorsqu'aucun retard n'est présent, citons [17], [72], [73], [113], [112], [49], [93].

L'idée centrale du *backstepping* est adaptée aux systèmes ayant la forme triangulaire inférieure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u, \end{cases}$$

où u est la commande. L'objectif est de déterminer des lois de commandes qui rendent globalement asymptotiquement stable l'origine de ces systèmes. Il est atteint au moyen d'une approche récursive.

Afin de rappeler de quelle façon procède cette technique, nous allons présenter ses idées clés en ne considérant qu'une de ses étapes et donc en considérant une famille de systèmes de type *feedback* simple de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)z, \\ \dot{z} = u + h(x, z), \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z \in \mathbb{R}$, où $u \in \mathbb{R}$ est la commande et $f(x)$, $g(x)$ et $h(x, z)$ sont des fonctions non linéaires localement lipschitziennes. On suppose de plus que $f(0) = 0$.

On suppose qu'on connaît une fonction continuellement différentiable $z_s(x)$ telle que $z_s(0) = 0$ et le système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)z_s(x) \quad (5.2)$$

admet l'origine pour point d'équilibre globalement asymptotiquement stable et une fonction $V(x)$ définie positive et radialement non bornée de classe C^1 telle que la fonction

$$W(x) := -\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)z_s(x)] \quad (5.3)$$

est définie positive. On peut alors démontrer que le système (5.1) en boucle fermée avec la commande stabilisante suivante :

$$u(x, z) = -k(z - z_s(x)) - h(x, z) + \frac{\partial z_s}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)z] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x), \quad (5.4)$$

où k est un nombre réel positif, est globalement asymptotiquement stable en démontrant que la dérivée de la fonction de Lyapunov

$$U(x, z) = V(x) + \frac{1}{2}[z - z_s(x)]^2, \quad (5.5)$$

le long des trajectoires de (5.1) en boucle fermée avec (5.4) vérifie

$$\dot{U}(x, z) = -W(x) - k[z - z_s(x)]^2. \quad (5.6)$$

Notons que U est une fonction de Lyapunov stricte pour le système en boucle fermée puisque la fonction $W(x) + k[z - z_s(x)]^2$ est définie positive et que U est définie positive et radialement non bornée.

De nombreuses extensions de ce résultat de base ont été réalisées. Les multiples avantages offerts par cette approche sont bien connus. Observons en particulier que cette technique procure une grande famille de lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes, permet de garantir certaines propriétés de robustesse et de résoudre des problèmes de commande adaptative et de stabilisation par retour dynamique de sortie. Notons que pour certaines familles de systèmes, elle permet de construire des commandes bornées [73].

5.2 Technique d'ajout d'intégrateurs : cas avec retard

Un premier résultat de type *backstepping* pour des systèmes non linéaires ayant un retard dans la commande a été obtenu dans l'article [10]. Nous allons rappeler quelles sont ses grandes lignes car nous aurons à évoquer cet article dans un chapitre futur. Dans [10], des conditions suffisantes garantissant que le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))z(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) + h(x(t - \tau), z(t - \tau)) , \end{cases} \quad (5.7)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, où $u \in \mathbb{R}$ est la commande, $\tau \geq 0$ est le retard et où $f(0) = 0$ et f et g sont globalement lipschitziennes est globalement asymptotiquement stabilisables sont données. L'existence d'une loi de commande $z_s(x)$, zéro à l'origine, rendant l'origine du système $\dot{x} = f(x) + g(x)z_s(x)$ globalement asymptotiquement stable est supposée. Des hypothèses techniques sont introduites pour garantir que le système

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))z_s(x(t - \tau)) \quad (5.8)$$

admet lui aussi que le point d'équilibre du système comme point globalement asymptotiquement stable. Fondamentalement, ces hypothèses imposent des conditions de croissance sur les fonctions f et g qui empêchent que ne se produise le phénomène de l'explosion en temps finie et qui donnent la possibilité de construire une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii stricte pour le système (5.8). Dans une deuxième étape, l'introduction de l'opérateur $Z : C_{in} \mapsto \mathbb{R}$ tel que, le long des trajectoires,

$$Z(t) = z(t) - z_s(x(t - \tau)) , \quad (5.9)$$

qui joue le rôle d'un changement de coordonnées, conduit à une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii U et à la loi de commande suivante :

$$u(t - \tau) = -\varepsilon[z(t - \tau) - z_s(x(t - 2\tau))] - h(x(t - \tau), z(t - \tau)) + R(x(t - \tau), z(t - \tau)) \quad (5.10)$$

avec

$$R(x, z) = \frac{\partial z_s}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)z]$$

avec $\varepsilon > 0$, qui est telle que, pour tout $t \geq \tau$, la dérivée de U le long des trajectoires du système en boucle fermée est plus petite qu'une fonction définie négative de $x(t)$ et $z(t)$. Cette technique offre la possibilité pour la première fois de stabiliser globalement le système non linéaire sous forme *feedback* avec un retour d'état retardé de classe C^1 sans l'utilisation des termes distribués. L'expressions de la loi de commande (5.10) dépend de la valeur du retard ; les retards τ et 2τ sont présent dans celle-ci. Il est à observer que les hypothèses imposées au système (5.7) n'impliquent pas sa stabilisabilité exponentielle locale du système (5.7).

6 Réduction de modèle

6.1 Rappels

La méthode de réduction de modèle est une technique qui permet de ramener des problèmes relatifs à un système ayant un retard dans l'entrée (et donc de dimension infinie) à des problèmes identiques pour un système sans retard (et donc de dimension finie). Cette méthode permet notamment de résoudre des questions de stabilisation, d'analyse de contrôlabilité et divers problèmes d'optimisation.

Cette technique présente l'avantage majeur de permettre de traiter des systèmes ayant des retards ponctuels ou distribués de taille quelconque, mais elle a pour inconvénient de procurer des lois de commandes qui dépendent à chaque instant des valeurs qu'elles ont prises dans le passé, ce qui peut poser en pratique des problèmes en terme de robustesse. De plus cette technique est essentiellement limitée aux systèmes linéaires. Initiée par D. Mayne [71], elle a été élaborée par de nombreux chercheurs, voir en particulier [5], [69], [60], [116], [92], [59, Section 2.6], [77].

Exposons les idées maitresses de cette technique en considérant le cas des systèmes linéaires autonomes ayant un retard constant dans l'entrée :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t - \tau). \quad (6.1)$$

La paire (A, B) est supposée être stabilisable et le retard τ constant connu. La première étape consiste à déterminer la dérivée de l'opérateur

$$Z(t) = X(t) + \int_{t-\tau}^t e^{(t-m-\tau)A} Bu(m) dm \quad (6.2)$$

le long des trajectoires du système (6.1). Un simple calcul donne

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + e^{-\tau A} Bu(t). \quad (6.3)$$

Puisque la paire (A, B) est supposée être stabilisable, il en est de même de la paire $(A, e^{-\tau A} B)$. Par conséquent, il existe une matrice K telle que la matrice $A + e^{-\tau A} BK$ est Hurwitz. Par conséquent le choix

$$u(t) = KZ(t) \quad (6.4)$$

donne

$$\dot{Z}(t) = (A + e^{-\tau A} BK)Z(t) \quad (6.5)$$

et Z est solution d'un système linéaire de dimension finie exponentiellement stable. D'un autre côté, (6.2) et (6.4) impliquent que, pour tout $t \geq \tau$,

$$X(t) = Z(t) - \int_{t-\tau}^t e^{(t-m-\tau)A} BKZ(m) dm. \quad (6.6)$$

On en déduit que toutes les solutions $X(t)$ convergent exponentiellement vers l'origine.

Notons que la loi de commande construite s'écrit

$$u(t) = K \left[X(t) + \int_{t-\tau}^t e^{(t-m-\tau)A} B u(m) dm \right] \quad (6.7)$$

de sorte que $u(t)$ dépend des valeurs $u(m)$ avec $m \in (t - \tau, t)$, ce qui pose des problèmes d'implémentation [85].

6.2 Retard ponctuel : nouvelle méthode

Les auteurs de [76] ont été inspirés par la technique de réduction de modèle que nous venons d'évoquer lors de l'élaboration d'une nouvelle technique permettant de stabiliser des systèmes avec retard dans la commande au moyen de commandes sans terme distribué. Ainsi les problèmes de robuste vis-à-vis des erreurs que l'on peut avoir lors de l'implémentation du terme distribué de la commande résultant de la technique de réduction de modèle sont ils totalement évacués. Toutefois cette méthode présente l'inconvénient de ne s'appliquer que pour des retards suffisamment petit.

Nous allons rappeler certaines des idées de cette technique dans le cadre linéaire, bien qu'elle s'applique à une famille de systèmes non linéaires. En effet, nous serons amené à parler des résultats de [76] dans les chapitres qui vont suivre.

Le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (6.8)$$

est considéré. On lui associe un opérateur :

$$s(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{L(t-l-\tau)} Bu(l) dl, \quad (6.9)$$

où $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice qu'il s'agit de choisir. Un simple calcul donne :

$$\dot{s}(t) = Ls(t) + (A - L)x(t) + e^{-L\tau} Bu(t). \quad (6.10)$$

Si l'égalité matricielle

$$A - L + e^{-L\tau} BM = 0, \quad (6.11)$$

est vérifiée, alors le choix $u(t) = Mx(t)$ donne

$$\dot{s}(t) = Ls(t). \quad (6.12)$$

Si la matrice L est Hurwitz, s est solution d'un système exponentiellement stable. Il est important d'observer que même si tel est le cas, cela n'implique pas la convergence exponentielle de la solution $x(t)$ du système en boucle fermée. On peut montrer qu'il n'y a convergence exponentielle que si toutes les solutions de l'équation intégrale

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t e^{L(t-l)} (A - L)x(l) dl, \quad (6.13)$$

sont exponentiellement stable. Observons que l'analyse de stabilité de (6.13) n'est pas simple. Elle peut être effectuée en construisant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii stricte qui conduit à une borne sur la taille du retard, telle que si le retard est inférieur à cette borne, alors toutes les solutions de l'équation (6.13) convergent exponentiellement vers l'origine.

Chapitre 3

Contributions majeures de ce mémoire

1 Nouveau type de réduction de modèle

Au cours du chapitre 2, nous avons rappelé quels sont les avantages et les défauts principaux de l'approche par réduction de modèle classique et d'un nouveau type de réduction de modèle et cela dans le cas particulier où le retard est ponctuel et constant. Ces considérations nous ont amené à établir un nouveau résultat que nous allons brièvement décrire dans ce chapitre. Nous allons montrer de quelle façon nous sommes parvenus à réaliser une construction de lois de commande au moyen d'un nouveau type de réduction de modèle pour des systèmes non linéaires ayant cette fois des termes distribués en la commande. Cette méthode présente trois avantages.

- (i) Les lois de commandes procurées ont des expressions qui ne comprennent pas de terme distribué.
- (ii) Elle donne des systèmes en boucle fermée pour lesquels des solutions toujours positives peuvent facilement être trouvées.
- (iii) Les systèmes stabilisés possèdent certaines propriétés de robustesse que l'on peut quantifier en utilisant les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii construites pour démontrer la stabilité des systèmes en boucle fermée.

1.1 Nouveau type de réduction de modèle : retard distribué.

Nous proposons une nouvelle technique de construction de lois de commande par réduction du modèle pour les systèmes non linéaires variant dans le temps avec retard distribué dans la commande. Nous allons décrire succinctement cette approche. Nous considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_{t-\tau}^t f_{\tau}(\omega, x(\omega))u(\omega)d\omega. \quad (1.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ et où τ est une constante positive et où f et f_{τ} sont deux fonctions non linéaires suffisamment régulières. Notre objectif est de construire une commande qui stabilise globalement exponentiellement le système (1.1). Les résultats publiés jusque ici ne traitent que le cas particulier où (1.1) est linéaire (voir en particulier [37]). Une des contributions majeurs de notre travail vient du fait que notre technique permet de stabiliser des systèmes non linéaires variant dans le temps. Notre technique présente également l'avantage de reposer sur la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii strictes grâce aux quelles on peut établir des propriétés de robustesse.

Nous introduisons l'hypothèse suivante :

Hypothese *Il existe une matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz et une fonction localement lipschitzienne $g(t, x)$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \geq 0$.*

$$\bar{f}(t, x) = M f_{\tau}(t, x) g(t, x), \quad (1.2)$$

avec

$$M = \int_0^{\tau} e^{-Ll} dl, \quad (1.3)$$

et

$$\bar{f}(t, x) = f(t, x) - Lx. \quad (1.4)$$

Cette hypothèse joue un rôle fondamental dans notre technique, elle permet de représenter le système (1.1) de la façon suivante :

$$\dot{x}(t) = Lx(t) + \bar{f}(t, x(t)) + \int_{t-\tau}^t f_{\tau}(\omega, x(\omega))u(\omega)d\omega. \quad (1.5)$$

Cette représentation nous amène à considérer l'opérateur suivant :

$$\alpha(t) = \int_{t-\tau}^t e^{L(t-l-\tau)} \int_l^t f_{\tau}(\omega, x(\omega))u(\omega)d\omega dl. \quad (1.6)$$

Sa dérivée le long des trajectoires est :

$$\dot{\alpha}(t) = L\alpha(t) - \int_{t-\tau}^t f_{\tau}(\omega, x(\omega))u(\omega)d\omega + \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\tau-l)} f_{\tau}(t, x(t))u(t)dl. \quad (1.7)$$

Considérons maintenant l'opérateur :

$$s(t) = x(t) + \alpha(t). \quad (1.8)$$

Grâce à (1.5) et (1.7), on obtient

$$\dot{s}(t) = Ls(t) + \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\tau-l)} f_{\tau}(t, x(t))u(t)dl + \bar{f}(t, x(t)).$$

Par conséquent

$$\dot{s}(t) = Ls(t) + Mf_\tau(t, x(t))u(t) + \bar{f}(t, x(t)),$$

où M est la matrice définie en (1.3). En remplaçant $\bar{f}(t, x)$ par $Mf_\tau(t, x)g(t, x)$, on obtient

$$\dot{s}(t) = Ls(t) + Mf_\tau(t, x(t))[u(t) + g(t, x(t))]. \quad (1.9)$$

Le choix de la commande $u(t) = -g(t, x(t))$ donne

$$\dot{s}(t) = Ls(t), \quad (1.10)$$

et

$$s(t) = x(t) - \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\tau-l)} \int_l^t \bar{f}(\omega, x(\omega)) d\omega dl. \quad (1.11)$$

Le problème maintenant consiste à analyser les propriétés de stabilité d'une équation différentielle linéaire et d'une équation intégrale. Puisque L est Hurwitz, alors le système (1.10) est un système exponentiellement stable. D'un autre côté, l'intuition suggère que si $\bar{f}$ est globalement lipschitzienne, alors (1.11) est exponentiellement stable lorsque $s(t)$ n'est pas présent et τ est assez petit. Grâce à ces remarques, nous avons pu montrer que le système en boucle fermée est globalement exponentiellement stable en construisant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii stricte pour le système composé de (1.10) et de (1.11) et cela lorsque le retard τ est suffisamment petit. Notons que une borne supérieure sur les retards admissible peut être déterminée de façon explicite au moyen de nos résultats.

Exemple

On peut illustrer la technique évoquée au moyen du système suivant :

$$\dot{x}(t) = -\sin(t) \frac{x(t)^3}{1+x(t)^2} + \int_{t-\tau}^t u(\omega) d\omega. \quad (1.12)$$

Nous concluons ce chapitre en observant que nous avons étendu notre résultat principal à la famille des systèmes de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_0^\tau g(t, \ell, x(t-\ell))u(t-\ell) d\ell + w(t, x(t)), \quad (1.13)$$

où $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction qui représente les termes additifs incertains. Sous une hypothèse très proche de celle imposée au système (1.1), nous avons construit une loi de commande de la forme

$$u(t) = \mu_{\tau, L}(t, x(t)), \quad (1.14)$$

qui rend l'origine du système (1.13) globalement uniformément exponentiellement stable, lorsque w est bornée par $w_0|x|$ où w_0 est une constante suffisamment petite.

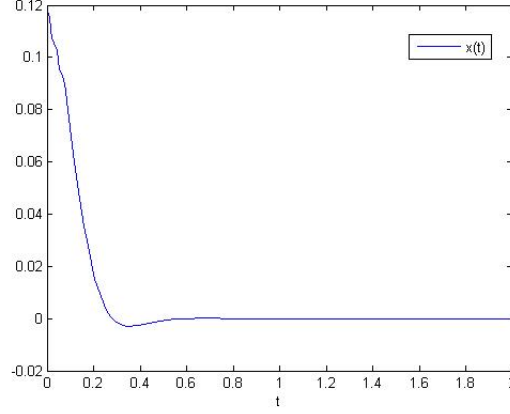


Fig. 1. L'évolution du système (1.12) en fonction du temps avec $\tau = 0.08$.

2 *Backstepping* à retard : nouveau résultat

Dans la section 5 du chapitre 2, nous avons rappelé que la technique de construction de lois de commandes appelée *backstepping* a été étendue à une famille particulière de système ayant un retard dans la commande. Ce résultat présente 3 caractéristiques :

(i) Dans la formule de la loi de commande (5.10), à la fois $x(t - \tau)$, $x(t - 2\tau)$ sont présents, alors qu'il n'y a que le retard τ dans l'entrée du système (5.7).

(ii) La dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii le long des trajectoires du système en boucle fermée n'est définie négative que pour des valeurs de temps supérieures à τ .

(iii) La fonction h dans (5.7), qui dépend des valeurs $x(t - \tau)$, $z(t - \tau)$ ne peut pas dépendre de $x(t)$, $z(t)$.

En cherchant à surmonter ces limites, nous avons établi un résultat nouveau. En particulier, nous avons parvenu à un résultat de stabilisation pour la famille des systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))z(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) + h_1(x(t), z(t)) + h_2(x(t - \tau), z(t - \tau)) , \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$. Il est à noter que cette classe de système est importante en raison de la présence du terme $h_1(x(t), z(t))$ sans retard. En effet, des systèmes de ce type se présentent fréquemment ; observons en particulier que cette famille englobe la famille des systèmes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) , \\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-1}(t) & = & x_n(t) , \\ \dot{x}_n(t) & = & z(t), \\ \dot{z}(t) & = & u(t - \tau) + h_1(x(t), z(t)) , \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, $z \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$. qui se représentent souvent lorsqu'on cherche à linéariser un système par changement de variables et de commande. Notre nouveau résultat repose sur l'introduction d'un opérateur d'un type proche de celui présenté à la section 2 du chapitre 2. Mais cette fois l'opérateur ne porte principalement que sur le sous-système en z : le long des trajectoire est de la forme $z(t) + \alpha(x_t, z_t)$ et satisfait, pour un choix de loi de commande approprié, une équation du type $\dot{z} + \dot{\alpha} = L(z + \alpha)$ avec $L < 0$, ce qui implique que $z(t) + \alpha(x_t, z_t)$ converge vers zéro quand t tend vers l'infini.

Ensuite, en utilisant cette propriété de convergence, divers hypothèses de stabilisabilité pour le sous système en x et des propriétés de croissance imposées aux termes non linéaires, on peut construire pour le système en boucle fermée une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui est stricte quand le retard est suffisamment petit. La commande qui stabilise globalement asymptotiquement le système (2.1) de la forme :

$$u(x, z) = -h_2(x, z) + Le^{\tau L}(z - z_s(x)) + e^{\tau L} \left[\frac{\partial z_s}{\partial x}(x)(f(x) + g(x)z) - h_1(x, z) \right] \quad (2.3)$$

avec $L < 0$.

Il est à noter que notre résultat s'applique à des systèmes qui ne sont pas localement linéarisable.

Dans une deuxième étape, nous avons montré de quelle façon la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii que nous avons proposé permet d'établir que le système en boucle fermée est globalement ISS vis à vis de perturbations additives, lorsqu'une hypothèse technique supplémentaire est vérifiée.

3 Stabilisation par commande échantillonnée

Les commandes qui existent actuellement sont généralement implantées sur des calculateurs numériques via un convertisseur analogique numérique qui peut être modélisé par un échantillonneur bloqueur d'ordre zéro. De telles commandes ne sont pas des fonctions continues, puisque un contrôleur travaille avec une fréquence limitée. On définit alors le pas échantillonnage comme le temps nécessaire au calculateur pour passer d'une valeur de la commande à la suivante. Une commande échantillonnée est équivalente à une commande continue lorsque la différence des effets sur le processus est négligeable. Tel est souvent le cas lorsque le temps d'échantillonnage est très faible par rapport à la dynamique du processus. Toutefois même si de nos jours les calculateurs et les ordinateurs possèdent une grande rapidité de calcul, il est intéressant de quantifier cette approximation et de vérifier pour quelles fréquences d'échantillonnage la stabilité asymptotique peut être garantie, sachant que la difficulté des études de stabilité pour ce type de systèmes provient de la discontinuité et du retard dans la commande.

Nous allons brièvement décrire le résultat que nous avons obtenu pour le système à retard :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + h(t - \tau, x(t - \tau))u(t_k - \tau), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}$ est la commande, $\tau > 0$ est un retard ponctuel, f et h sont des fonctions non linéaires lipschitziennes. Le temps t_k , avec $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $t_0 := 0$, sont les instants où une nouvelle valeur de commande est appliquée.

Pour ces systèmes nous avons mis au point une nouvelle stratégie de stabilisation qui a pour but de limiter la fréquence d'échantillonnage. La première étape de cette stratégie consiste à définir les instants d'échantillonnage en fonction de la valeur retardée du vecteur d'état : lorsque la valeur retardée d'une certaine fonction de l'état s'éloigne d'une distance $A/2$ de la valeur qu'elle avait un précédent instant d'échantillonnage t_k , alors, par définition, un nouvel instant d'échantillonnage t_{k+1} est atteint.

La deuxième étape consiste à définir la commande employée en utilisant la technique de réduction de modèle d'un type nouveau que nous avons présentés à la section 6.2 du chapitre 2. Notre résultat n'est qu'un résultat de stabilisation pratique et l'on peut se demander pourquoi. En fait, on peut démontrer que l'origine du système (3.1) ne peut en générale pas être asymptotiquement stabilisée lorsque la stratégie d'échantillonnage dépendant de l'état que nous avons évoqué est employée.

Notons toutes fois que la loi de commande que nous employons conduirait à une stabilité asymptotique globale si un échantillonnage synchrone était employé.

Chapitre 4

Conclusion générale

1 Résumé des travaux réalisés

Ce mémoire est consacré à la construction de commandes qui stabilisent globalement l'origine de systèmes non linéaires à retard dans l'entrée. Nous avons développé plusieurs résultats.

Le premier consiste en une nouvelle approche par réduction de modèle pour des systèmes non linéaires à retard distribué dans la commande. Il procure des lois de commandes dont les expressions n'ont ni retard ni terme distribué.

Le deuxième est un résultat de stabilisation obtenu au moyen d'une adaptation nouvelle de la technique *backstepping* au cas de systèmes ayant un retard ponctuel dans l'entrée.

Le troisième est un résultat de stabilisation de systèmes non linéaires à commande échantillonnée dont les instants d'échantillonnage dépendent de la variable d'état.

Ces divers travaux sont unis par le fait qu'ils emploient tous des opérateurs et conduisent à des commandes dont les expressions ne dépendent pas de valeurs passées. Nos travaux montrent le profit que l'on peut tirer de l'usage des opérateurs dans le domaine de la commande des systèmes à retard non linéaires variant dans le temps. En ce sens, ils s'inscrivent donc dans la lignée des travaux tels que [48], [59]

En plus des résultat de stabilisation que nous avons évoqué, nous avons également étudié le comportement des systèmes vis-à-vis de la présence de termes incertains entraant de façon additive dans la dynamique des systèmes.

Nos démonstrations de stabilité ont été basés sur des construction explicites de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii strictes.

2 Futurs axes de recherche

Nous n'avons réalisé que des constructions de retour d'état. Mais il est bien connu qu'en pratique il est fréquemment que certaines variables de systèmes ne sont pas mesurées. Aussi souhaitons nous étudier le problème de la construction d'observateurs et de retours de sortie pour chacune des grandes familles de systèmes que nous avons considéré. Notons que dans la littérature de nombreuses études ont été faites sur le problème de la construction d'observateurs pour les systèmes non linéaires [24], [25], [35], [34], [44], [1], [2], [11], [12], [14], [52], [66], [99], [100], [103], [115], [117].

Plusieurs travaux ont été consacrées à la construction d'observateurs pour des systèmes non linéaires à retard dans l'état dans le cas où il y a un retard ponctuel, voir [35], [1]. Le cas du retard distribué dans la commande n'a en revanche, à notre connaissance, jamais été traité. Notons aussi que le cas des systèmes de forme *feedback* semble lui non plus n'avoir jamais traité, même dans le cas particulier où le retard est ponctuel et constant. La même remarque est vrai pour les systèmes échantillonnés dont les instants d'échantillonnage dépendent des valeurs de l'état.

Dans de futures études, nous allons considérer d'autres types de systèmes commandés par des commandes échantillonnées dont les instants d'échantillonnages dépendent de l'état. Nous pensons en particulier aux systèmes de type *feedback* et aux systèmes de type *feedforward*. Par ailleurs, pour des raisons de simplicités, dans la section 3 du chapitre 3 nous avons supposé que la commande est un scalaire et le retard est une constante. Le cas de systèmes multi-entrées avec retards variants dans le temps où retard distribués, représentent des extensions intéressantes de notre résultat. Observons également qu'il serait intéressant d'étendre nos résultats au cas où sont présents plusieurs retards, notamment dans le cas où l'on est en présence d'une combinaison de retards ponctuels et distribués.

Plusieurs autres pistes sont ouvertes. Il serait intéressant de reconsidérer nos divers résultats à la lumière du théorème de Lyapunov-Razumikhin, et de voir si des résultats plus généraux, ou au moins différents, peuvent être établis. Il serait intéressant d'étendre nos résultats à des familles de systèmes non linéaires neutres et à des familles de systèmes dont le retard lui même une fonction de l'état. Il serait intéressant d'adapter nos résultat au problème de déterminer des commandes qui stabilisent le système considéré tout en respectant certaines bornes.

Bibliographie

- [1] W. Aggoune, M. Darouach, *Nonlinear observers for a class of differential delay systems*. Conference on Control and Automation (MED99) Haifa, Israel - June 28-30, (1999).
- [2] J. Ali, K. Burnham, *Discontinious observers for non-linear time-delay systems*. International journal of systems science, 40, 383-392, (2009).
- [3] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, *Delay-dependent stability analysis of linear systems with time-varying delay*. In IEEE Conference on Decision and Control, pages 2053-2058, New Orleans, USA, December 2007.
- [4] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, *Construction of lyapunov-krasovskii functional for timevarying delay systems*. In the 47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 08), pages 3995-4000, Cancun, Mexico, Dec. 2008.
- [5] Z. Artstein, *Linear Systems with Delayed Controls : A reduction*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 27, pp. 869-879, Aug. 1982.
- [6] K.J. Astrom, B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems. Theory and Design*. Printice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 3rd edition, 1997.
- [7] J.P. Barbot, S. Monaco, D. Normand-Cyrot, N. Pantalos, *Some comments about linearization under sampling*. Proc. of the 31th Conference on Decision and Control, pp. 2392-2397, 1992.
- [8] R.E. Bellman, K.L. Cooke, *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [9] S. Bhat, D. Bernstein, *Lyapunov analysis of finite-time differential equations*. Proc. Amer. Control Conf, Seattle, USA 1995.
- [10] P.-A. Bliman, *Lyapunov equation for the stability of linear delay systems of retarded and neutral type*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 47, No 2, pp. 327-335, 2002.
- [11] K. Bhat, H. Koivo, *An observer theory for time-delay systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 21, pp. 266-269, (1976).

- [12] K. Bouazza, M. Boutayeb, M. Darouach, *On state feedback observers for a class of delay discrete-time nonlinear systems*. In : IFAC/Workshop on Time Delay Systems, Louvain, Belgique, 2004.
- [13] K. Bouazza, M. Boutayeb, M. Darouach, *State feedback stabilization of a class of nonlinear discrete-time delay systems* In Proceedings of the 6th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005.
- [14] M. Boutayeb, M. Darouach. *Reduced-order observer for discrete time systems with multiple delays* IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (United States of America, Las Vegas), December 2002.
- [15] C. Briat, O. Sename, and J. F. Lafay, *H_∞ delay-scheduled control of linear systems with time-varying delays*. IEEE Transactions on Automatic Control, 42(8) :2255-2260, 2009.
- [16] L. Burlion, *Contribution à l'analyse et à la commande de systèmes non linéaires à commande échantillonnées*. Thèse de Doctorat en Sciences, Université Paris-Sud, 9 février 2007.
- [17] J.M. Coron, L. Praly, *Adding an integrator for the stabilization problem*. Systems & Control Letters, Vol. 17 pp. 89-104, 1991.
- [18] R.F. Curtain, A.J. Pritchard, *Infinite dimensional linear systems theory*, Lecture notes in Contr and Inf.sciences, 8, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [19] S. Dashkovskiy, L. Naujok, *Lyapunov-Razumikhin and Lyapunov-Krasovskii theorems for interconnected ISS time-delay systems*. In Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapest, Hungary, pp. 1179-1184, 2010.
- [20] D. Driver, *Ordinary and delay Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 1977.
- [21] L.E. El'S gol'ts, S.B. Norkin, *Introduction to the Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Arguments*, Math. Sciences Engrg. 105, Academic Press, New York, 1973.
- [22] M. Fliess, H. Mounier, *Quelques propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards constants*. C. R. Acad. Sientifique de Paris, I-319, pp. 289-294, 1994.
- [23] M. Fliess, H. Mounier, *On a class of linear delay systems often arising in practice*. Kybernetika, vol. 37, p. 295-308, 2001.
- [24] F. Fairman, A. Kumar, *Delayless Observers for Systems with Delay*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 31, no. 3, pp. 258-259, (1986).
- [25] A. Fattouh, O. Sename, J.-M. Dion, *An unknown observer design for linear time-delay systems*. 38th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 4, December 1999, pp. 4222-4227.
- [26] R. Freeman, P. Kokotovic, *Robust Nonlinear Control Design*, Birkhauser, Boston, 1996.

- [27] E. Fridman, *Stability of linear functional differential equations : a Lyapunov technique*, Proceeding of Mathematical Theory of Networks systems, September 2004.
- [28] E. Fridman, f. Gouaisbaut, M. Dambrine, J.-P. Richard, *A descriptor approach to sliding mode control of systems with time-varying delays*. ECC'03, Cambridge, England, 2003.
- [29] E. Fridman, S.-I. Niculescu, *On complete Lyapunov-Krasovskii funtional technique for uncertain systems with fast-varying delays*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol 8, p. 364-374, 2008.
- [30] E. Fridman, A.Seuret, J-P. Richard, *Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach*, Automatica, vol 40, p. 1141-1446, 2004.
- [31] E. Fridman, U. Shaked, *A descriptor system approach to H_∞ control of linear timedelay systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 47 : 253-270, February 2002.
- [32] E. Fridman, U. Shaked, *Input-output approach to stability and l_2 -gain analysis of systems with time-varying delays*. Systems & Control Letters, 55 : 1041-1053, September 2006.
- [33] H. Gao, J. Lam, C. Wang, Y. Wang, *Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay*. IEE Proceedings - Control Theory and Applications 151 (2004) 691-698.
- [34] A. Germani, P. Pepe, *A State Observer for a Class of Nonlinear Systems with Multiple Discrete and Distributed Time Delays*. European Journal of Control, Vol. 11/3, pp.196-205, (2005).
- [35] A. Germani, C. Manes, P. Pepe, *An Asymptotic State Observer for a Class of Nonlinear Delay Systems*, Kybernetika, Vol. 37, N. 4, pp. 459-478, (2001).
- [36] C. Glader, G. Hognas, P. Makila, H.T. Toivonen, *Approximation of delay systems- a case study*, Academic Press, New York, 1982.
- [37] G. Goebel, U. Munz, F. Allgower, *Stabilization of Linear Systems with Distributed Input Delay*, 2010 American Control Conference, June 30-July 02, pp. 5800-5805, 2010.
- [38] K. Gu, *Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems*, International Journal of Control, vol 68, p. 923-934, 1997.
- [39] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser Boston, 2003. Control engineering.
- [40] L. Habets, *Algebraic and computational aspects of time-delay systems*, PHD thesis, Eindhoven Univ. Technology, 1994.
- [41] A. Halanay, *Differential Equations : Stability, Oscillations, Time lags*. Academic Press, New-York, 1966.
- [42] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*. Applied Math, Sciences, 3, Springer-Verlag, New-York, 1977.

- [43] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Applied Math, Sciences, 99, Springer-Verlag, New-York, 1993.
- [44] H. Hamidi-Hashemi, C. Leondes, *Observer theory for systems with time-delay* International Journal of Systems Sciences, 10, pp. 797-806, (1979).
- [45] Y. He, Q. G. Wang, C. Lin, and M. Wu, *Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay*. Automatica, 43 :371-376, 2007.
- [46] J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, Y. Xu, *A survey of recent results in networked control systems*, Proceedings of the IEEE, vol 95, p. 138-162, 2007.
- [47] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, third edition (1989).
- [48] M. Jankovic, *Forwarding, backstepping, and finite spectrum assignment for time delay systems*, Automatica, Vol. 45, No.1, pp. 2-9, Jan. 2009.
- [49] Z.P. Jiang, H. Nijmeijer, *Tracking control of mobile robots : a case study in backstepping*, Automatica, 33 (7), pp. 1393-1399, 1997.
- [50] C. Y. Kao, A. Rantzer, *Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays*. Automatica, 43(6) : 959-970, 2007.
- [51] C. Y. Kao, A. Rantzer, *Robust stability analysis of linear systems with time-varying delays*. In 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005.
- [52] J. Kerner, A. Isidori, *A linearization by output injection and nonlinear observer*. Systems & control letters, 3, 47-52, (1983).
- [53] H. Khalil, *Nonlinear systems*. (third edition), Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 2002.
- [54] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [55] V. Kolmanovskii, S.-I. Niculescu, J.-P. Richard, *On the Lyapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems*, International Journal of Control, vol 72, p. 374-384, 1999.
- [56] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, *Stability of Functional Differential equations*, Mathematics in Science and Eng, 180, Academic Press, New York, 1986.
- [57] V. Kolmanovskii, A. Zhabko, *Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems*, Automatica, vol 39, p. 15-20, 2003.
- [58] N.N. Krasovskii, *Stability of Motion : Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*. Stanford : Stanford University Press, Stanford, CA, 1963.

- [59] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser, Boston, 2009.
- [60] W. Kwon, A. Pearson, *Feedback stabilization of linear systems with delayed control*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 25 (2), pp. 266-269, 1980.
- [61] J. Lam, *Convergence of a class of Padé approximations for delay systems* Int. J. Contr, 52, pp. 989-1008, 1990.
- [62] J.P. LaSalle, *Some extensions of Lyapunov's second method*. IRE Transaction. Circuit Theory, CT-7(4) : 520-527, December 1960.
- [63] J.P. LaSalle, S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's direct method with applications*. Academic Press, New-York, 1961.
- [64] B. Lehman, *Stability of chemical reactions in a CSTR with delayed recycle stream*. Proc. 1994 Amer. Control. Conf., Baltimore, Maryland, U.S.A (1994) 3521-3522.
- [65] I. Lopez, J. Piovesan, C. Abdallah, D. Lee, O.-M. Palafox, M. Spong, R. Sandoval, *Practical issues in networked control systems*, American Control Conference, Minneapolis, USA, June 2006.
- [66] D. Luenberger, *An introduction to observers* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 16, (1971).
- [67] M. Malek-Zavaret, M. Jamshidi, *Time Delay Systems : Analysis, Optimisation and Applications*, North-Holland Systems and Control Series, 9, Amsterdam, 1987.
- [68] M. Malisoff, M. Mazenc, *Construction of strict Lyapunov functions*. Springer-verlag, London UK, 2009.
- [69] A. Manitius, A. Olbrot, *Finite spectrum assignment problem for systems with delays*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 24 (4), pp. 541-553, 1979.
- [70] S. Mascolo, *Congestion control in high-speed communication networks using the Smith principle*, Automatica, vol. 35, pp 1921-1935, 1999.
- [71] D. Mayne, *Control of linear systems with time delay*. Electronics Letters, 4(20), 439-440. 1968.
- [72] F. Mazenc, S. Bowong. *Backstepping with bounded feedbacks for time-varying systems*. SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 43, No. 3, pp. 856-871, 2004.
- [73] F. Mazenc, A. Iggidr. *Backstepping with Bounded Feedbacks*. Systems & Control Letters, Vol. 51/3-4, pp. 235-245, 2004.
- [74] F. Mazenc, M. Malisoff, Z. Lin. *Further Results on Input-to-State Stability for Nonlinear Systems with Delayed Feedbacks*. Automatica, vol. 44, no. 9, pp. 2415-2421, Sept. 2008.

- [75] F. Mazenc, S. Mondié, R. Francisco, *Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems with Delay in the Input*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No 5, pp. 844-850, 2004.
- [76] F. Mazenc, S.-I. Niculescu, *Generating Positive and Stable Solutions through Delayed State Feedback*. Automatica, Volume 47, Issue 3, March 2010.
- [77] F. Mazenc, S.-I. Niculescu, M. Krstic. *Lyapunov-Krasovskii Functionals and Application to Input Delay Compensation for Linear Time-Invariant Systems*. Automatica , Vol. 48, Issue 7, pp. 1317-1323, July 2012.
- [78] F. Mazenc, D. Normand-Cyrot, *Reduction Model Approach for Linear Systems With Sampled Delayed Inputs*. IEEE Transactions on Automatic Control, Technical Note, to appear.
- [79] F. Mazenc, C. Prieur, *Strict Lyapunov Functions For Semilinear Parabolic Partial Differential Equations*, Mathematical Control and Related Fields (MCRF), Vol. 1, no. 2, pp. 231-250, June 2011.
- [80] F. Mazenc, C. Prieur, *Strict Lyapunov functions for nonlinear parabolic partial differential equations*, 18th IFAC World Congress, Milan 2011.
- [81] W. Michiels, S. -I. Niculescu, *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems, An Eigenvalue-Based Approach*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2007.
- [82] W. Michiels, S.-I. Niculescu, I. Moreau, *Using delays and time varying gains to improve the static output feedback stabilizability of linear systems : a composition*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol 21, p. 393-418, 2004.
- [83] S. Monaco, D. Normand-Cyrot, *Issues on nonlinear digital systems*. Special Issue, European Journal of Control, 7, 2-3, pp. 160-178 , 2001.
- [84] S. Mondié, V. Kharitonov, O. Santos, *Complete Lyapunov-Krasovskii functional with a given cross term in the time derivative*, 44th IEEE Conference Decision and Control, Sevilla, Spain, December 2005.
- [85] S. Mondié, W. Michiels, *Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay System With a Safe Implementation*, IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 48, No. 12, pp. 2207-2212, Dec. 2003.
- [86] A.S. Morse, *Ring models for delay differential systems*, Automatica, 12, pp0 529-531, 1978.
- [87] H. Mounier. *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques*. Thèse de doctorat, Université Paris-sud, Orsay, 1995.
- [88] H. Mounier, J. Rudolph, *Flatness and quasi-static state feedback in nonlinear delay systems*. Internat. J. Control, vol. 81, p. 445-456, 2008.

- [89] A. Naghshtabrizi, J.P Hespanha, A.R Teel, *exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems*. Systems & Control Letters 57(5) : pp. 378-385, 2008.
- [90] S.-I. Niculescu, *Delay effects on stability : a robust control approach*. Springer-verlag, Vol. 269, Mai 2001.
- [91] S.-I. Niculescu, C.-E. de Souza, L. Dugard, J.-M. Dion, *Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays*. Proceedings of the 33rd IEEE CDC, 1994, p. 431.
- [92] A. Olbrot, *Stabilizability, detectability and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays*, IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 23, pp. 605-618, 1978.
- [93] R. Outbib, G. Jhima, *Comments on the stabilization of nonlinear systems by Adding an integrator*. IEEE transactions on Automatic control, 41(12), pp. 1804-1807, 1996.
- [94] J.R. Partington, *Approximation of delay systems by Fourier-Laguerre series*. Automatica, 27, pp. 569-572, 1991.
- [95] M.M. Peet, A. Papachristodoulou, S. Lall, *Positive forms and stability of linear time-delay systems*. SIAM Journal on Control and Optimization, 47(6) : pp. 3227-3258, 2009.
- [96] P. Pepe, Z-P. Jiang, *A Lyapunov-Krasovskii methodology for ISS and iISS of time-delay systems*. Systems & Control Letters, 55 (12), pp. 1006-1014, 2006.
- [97] D. Perlmutter, *Stability of chemical reactors*, Prentice Hall, New Jersey, 1972.
- [98] C. Prieur, F. Mazenc. *ISS-Lyapunov functions for time-varying hyperbolic systems of balance laws*, Mathematics of Control, Signals, and Systems : Volume 24, Issue 1, Page 111-134 , (2012).
- [99] S. Raghavan, J. Hedrick, *Observer design for a class of nonlinear systems*. International Journal of Control, 59, no. 2, pp. 515-528, (1994).
- [100] R. Rajamani, *Observers for Lipschitz Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, no. 3, pp. 397-401, (1998).
- [101] B. Razumikhin, *On the stability of systems with a delay*. Prikl.Math. i Mekh., (Appl. Math & Mech.) vol. 20 N4 : pp. 500-512, 1956 (in Russian).
- [102] Y. M. Repin, *Quadratic lyapunov functionals for systems with delay*. Prikl. Mat. Meh, 29 : pp. 564-566, 1965. In russian.
- [103] D. Salamon, *Observers and duality between observation and state feedback for time delay systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 25, pp. 1187-1192, (1980).
- [104] O. Sename, *New trends in design of observers for time delay systems*. Kybernetika, 37(4) : 427-458, 2001.

- [105] A. Seuret, *Stability analysis of networked control systems with asynchronous sampling and input delay*, 2011 American Control Conference, San Francisco, CA, 29 June-1 July, 2011.
- [106] A. Seuret, C. Edwards, S. Spurgeon, E. Fridman, *Static output feedback sliding mode control design via an artificial stabilizing delay*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol 54, p. 256-265, 2009.
- [107] A. Seuret, E. Fridman, and J.-P. Richard. *Sampled-data exponential stabilization of neutral systems with input and state delays*. IEEE MED 2005, 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 2005.
- [108] A. Seuret, M. Dambrine, and J.-P. Richard, *Robust exponential stabilization for systems with time-varying delays*. 5th Workshop on Time Delay Systems, September 2004.
- [109] A. Seuret, T. Floquet, and J.-P. Richard, *Observateurs pour systèmes à retard variable et inconnu*. CIFA 2006, Bordeaux, France, 2006.
- [110] E.D. Sontag, *Input to state stability : Basic concepts and results*. In *Nonlinear and Optimal Control Theory*. Berlin : Springer-Verlag (pp. 163-220), 2008.
- [111] A.R. Teel, *Connections between Razumikhin-type theorems and the ISS nonlinear small gain theorem*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, pp. 960-964, 1998.
- [112] J. Tsinias, *Input to State Stability Properties of Nonlinear Systems and Applications to Bounded Feedback Stabilization Using Saturation*. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol.2, pp. 57-85, March 1997.
- [113] J. Tsinias, *Backstepping design for time-varying systems and application to partial-static feedback and asymptotic tracking*. Systems & Control Letters, Vol. 39 (4), pp. 219-227, 2000.
- [114] C. Wang, Y. Wang, H. Gao, *Compensation time varying delays in networked control systems via delay dependent stabilization approach*. Proceedings of the 2004 Conference on Control Applications, Taipei, Taiwan, 2004.
- [115] K. Watanabe, *Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays*. IEEE Trans. on Automatic Control. 31, 543-550, 1986.
- [116] E. Witrant, C. Canudas-de-Wit, D. Georges, M. Alamir, *Remote Stabilization via Communication Networks with a Distributed Control Law*. IEEE Trans. on Aut. Contr., vol. 52, pp. 1480-1485, Aug. 2007.
- [117] Y.X. Yao, Y.M. Zhang, R. Kovacevic, *Parameterization of observers for time delay systems and its application in observer design*. IEE Proc.-Control Theory Appl. 143 (1996), 225-232.
- [118] N. Yeganefar, P. Pepe, M. Dambrine *Input-to-state stability of time-delay systems : a link with exponential stability*. IEEE Transactions on Automatic Control, 53 (6), pp. 1526-1531, 2008.

- [119] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo (1966).
- [120] S. Zampieri, *A survey of recent results in networked control systems*, Proc, 17th IFAC World Congress, Seoul. July 2008.

Chapitre 5

Stabilization of time-varying nonlinear systems with distributed input delay by feedback of plant's state

Abstract. We address the problem of stabilizing systems belonging to a family of time-varying nonlinear systems with distributed input delay through state feedbacks without retarded term. The approach we adopt is based on a new technique that is inspired by the reduction model technique. The control laws we obtain are nonlinear and time-varying. They globally uniformly exponentially stabilize the origin of the considered system. We illustrate the design with a networked control system.

Key Words : Distributed delay, asymptotic stability, time-varying, nonlinear.

1 Introduction

Two recent contributions [2] and [5] are devoted to linear time-invariant systems with distributed inputs of the form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^\tau F(\ell)u(t-\ell)d\ell, \quad (1.1)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the system state, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a constant matrix, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ is the input, $\tau > 0$ is a constant and F is the so-called delay kernel. The authors of these papers explain their

motivations for studying systems with distributed inputs. They can be summarized as follows. (i) Only a few works are devoted to them, although their control is a challenging problem since no direct control action can be applied to them. (ii) They are important from a practical point of view : the study [2] points out that they can appear in population dynamics, in propellant rocket motors and in networked control systems. The contribution [5] explains in details how the problem of stabilizing a linear system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$

through a digital network by state feedback leads to the problem of finding a control rendering the origin of the system (1.1) globally exponentially stable.

The results of [2] and [5] significantly improve the stabilization techniques available for the system (1.1) : in [2] a new approach provides with a Lyapunov functional for the system (1.1) in closed loop with the predictor-based controller of [1] and [5] presents linear matrix inequality (LMI) conditions ensuring that a linear state feedback $u(x(t))$ globally exponentially stabilizes the origin of the system (1.1) when the delay kernel admits a linear fractional representation. However, these two papers are devoted to linear time-invariant systems only and, to the best of our knowledge, all the works devoted to the stabilizations of systems with distributed inputs are focused on linear systems. This fact and the importance of the nonlinear time-varying systems motivate us for aiming at stabilizing nonlinear time-varying systems with distributed inputs. More precisely, we shall consider systems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_0^\tau g(t, \ell, x(t-\ell))u(t-\ell)d\ell + w(t, x(t)), \quad (1.2)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the system state, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ is the input, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ are nonlinear functions bounded in norm respectively by a linear function of $|x|$ and a constant, $\tau > 0$ is a constant and $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a function which typically represents disturbances or unknown terms. This family is rather general : we notice that it incorporates both “convolution-type” and “summation-type” models (see [20] for the definition of convolution-type and summation-type) and that the delay kernel $g(t, \sigma, x)$ is not supposed to admit a linear fractional representation. To the best of our knowledge, the problem of stabilizing these systems addressed for the first time. In particular, it is worth noting that it does not seem that any finite spectrum assignment technique can be applied to the system (1.2).

Under additional assumptions, we shall design state feedbacks that globally uniformly exponentially stabilize the origin of the system (1.2), when τ is sufficiently small. Since our control does not incorporate distributed terms, the instability which may arise when is implemented a distributed control (see for instance [4], [19]) is automatically avoided. Our approach is based on an approach of a new type, which has been introduced for the first time in [16], and is inspired by the classical

reduction model approach (which originates in the contributions [17], [13], [11] and [1]). It made it possible for systems with pointwise delays of the family

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + f_\tau(t - \tau, x(t - \tau))u(t - \tau), \quad (1.3)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ is the input, and $\tau > 0$ is a pointwise delay and where f and f_τ are Lipschitz continuous functions, to design a state feedback that renders their origin globally uniformly exponentially stable. The proof of the stability of the corresponding closed loop systems is based on the construction of a Lyapunov-Krasovskii functional. Similarly, in the present work, we shall solve the stabilization problem for (1.2) we have described above by constructing a Lyapunov-Krasovskii functional with the help of an operator of a new type (the definition of Lyapunov-Krasovskii functional we adopt is the one proposed in [12, Chapt. 2], [6]).

In contrast to many contributions that are devoted to systems with distributed delay, our control design does not rely on an LMI condition and the feedbacks we propose are nonlinear. We will illustrate our main result by using a networked control system with a distributed delay transmission channel in the case where the dynamical system to be controlled is nonlinear and time-varying.

Finally, it is worth noticing that the technique of proof we adopt presents two main advantages. (i) It relies on the representation of the closed loop system which make it possible, for a fairly large family of systems, to perform a sign analysis of the solutions as done in [16]. But this study is beyond the scope of the present contribution. (ii) It provides with a strict Lyapunov-Krasovskii functional for the closed loop systems. The knowledge of a functional of this type for a system makes it possible to establish robustness properties of many types. Thus, the importance of Lyapunov functionals is more and more acknowledged by the researchers, as illustrated by the contributions [9], [7], [18], [2], [10], [15], [21], [12, Chapt. 2] and the references therein.

The remainder of this paper is organized as follows. Section 2 is devoted to the main result of the paper and its proof. An illustrating example is given in Section 3. Concluding remarks in Section 4 end the work.

Notations and definitions.

- The notations will be simplified whenever no confusion can arise from the context.
- We denote by Id the identity matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- We let $|\cdot|$ denote the Euclidean norm of matrices and vectors of any dimension.
- Given $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^p$ defined on an interval $\mathcal{I}$, let $|\phi|_{\mathcal{I}}$ denote its (essential) supremum over $\mathcal{I}$.
- We let $C_{\text{in}} = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ denote the set of all continuous $\mathbb{R}^n$ -valued functions defined on a given interval $[- \tau, 0]$.
- For a function $x : [- \tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$, for all $t \geq 0$, the function x_t is defined by $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ for all $\theta \in [- \tau, 0]$.

2 Main result

2.1 Problem statement and main result

We consider the nonlinear time-varying system (1.2). We introduce the function $G_\tau : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$,

$$G_\tau(M, t, x) = \int_0^\tau e^{-M\ell} g(\ell + t, \ell, x) d\ell \quad (2.1)$$

and a set of assumptions :

Assumption 1. *The functions f, g, w are locally Lipschitz. There exists a constant Hurwitz matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, and a function $\mu_{\tau, L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ of class C^1 such that*

$$f(t, x) - Lx + G_\tau(L, t, x)\mu_{\tau, L}(t, x) = 0, \quad (2.2)$$

for all $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ and there exists a constant $H_L > 0$ such that

$$|g(t_1, t_2, x)\mu_{\tau, L}(t_3, x)| \leq \frac{H_L}{\tau} |x|, \quad (2.3)$$

for all $(t_1, t_2, t_3, x) \in \mathbb{R}^{3+n}$.

Since the matrix L in Assumption 1 is Hurwitz, there exists a constant positive definite matrix Q such that the inequality

$$QL + L^\top Q \leq -3Id \quad (2.4)$$

is satisfied. With this remark, we can give the next assumption :

Assumption 2. *Let Q be a constant positive definite matrix such that (2.4) is satisfied. There exists a positive real number w_0 such that the inequality*

$$w_0 < \frac{1}{24|Q|} \quad (2.5)$$

is satisfied and, for all $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ the inequality

$$|w(t, x)| \leq w_0 |x| \quad (2.6)$$

is satisfied.

We are ready to state and prove the main result :

Théorème 2.1. *Assume that the system (1.2) satisfies Assumptions 1 and 2 and that $\tau \in (0, \tau_M)$, where $\tau_M > 0$ is the constant such that*

$$\tau_M e^{|\tau_M|} = \frac{1}{2H_L}. \quad (2.7)$$

Then the origin of the system (1.2) is globally uniformly exponentially stabilized by the state feedback

$$u(t) = \mu_{\tau, L}(t, x(t)). \quad (2.8)$$

2.2 Discussion of Theorem 2.1

1. Assumption 1 implies that

$$|f(t, x)| \leq (|L| + e^{|L|\tau} H_L) |x|, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \quad (2.9)$$

Therefore it ensures that the system (1.2) is forward-complete (see [10] for the definition of forward-complete system). The (implicit) assumption that f has a linear growth cannot be removed : if it does not hold, the system (1.2) may be not stabilizable by a continuous state feedback $u(t, x(t))$. This fact can be established via an example similar to the one studied in [16, Appendix C].

2. The feedback in (2.8) depends only on t and $x(t)$. Hence, it does not require the knowledge of past values. The control laws proposed in [5] have also this feature.

3. Theorem 2.1, in combination with the main result of [16], can be extended to many systems and in particular to systems of the type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \sum_{k=1}^j \int_0^{\tau_k} g_k(\ell, x(t-\ell)) u(t-\ell) d\ell + \sum_{k=1}^j h_k(t-\tau_k) u(t-\tau_k), \quad (2.10)$$

where j is a positive integer and the h_i, g_k are continuous functions, bounded in norm, which have been studied in a particular linear case in [3]. For the sake of simplicity, we shall not consider in this work systems (2.10).

4. It does not always exist a matrix L and a function $\mu_{\tau,L}$ such that the equality (2.2) is satisfied. Moreover, finding a matrix L and a function $\mu_{\tau,L}$ such that this equality is satisfied may be difficult. However, this obstacle can be overcome in some important cases. When there is a Hurwitz matrix L such that the matrix $\int_0^\tau e^{-Lm} g(m+t, m, x) dm$ is invertible for all $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, (2.2) is satisfied with $\mu_{\tau,L}(t, x) = \left(\int_0^\tau e^{-Lm} g(m+t, m, x) dm \right)^{-1} [Lx - f(t, x)]$. Moreover, since there is some flexibility in the choice of the functions f and w (only $f + w$ is imposed by the system), the robustness with respect to $w(t, x(t))$ of the stabilization result of Theorem 2.1 can be used in some cases to make it possible to find a matrix L and a functions $\mu_{\tau,L}$ such that equality (2.2) is satisfied. To understand how, we consider the basic case where $f(t, x) = Rx$, $g(t, \sigma, x) = S$, where R and S are constant matrices such that the pair (R, S) is stabilizable i.e. there exists a constant matrix K such that the matrix $R + SK$ is Hurwitz. Then the system (1.2) admits the representation

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Rx(t) + \int_0^\tau Su(t-\ell) d\ell \\ &= f(x(t)) + \int_0^\tau Su(t-\ell) d\ell + w(x(t)), \end{aligned} \quad (2.11)$$

with

$$f(x) = (R + SK)x - \int_0^\tau e^{-(R+SK)\ell} S d\ell \frac{1}{\tau} Kx$$

and $w(x) = Rx - f(x)$. Thus the matrix $L = R + SK$ is Hurwitz and such that

$$f(x) - Lx + \int_0^\tau e^{-L\ell} S d\ell \frac{1}{\tau} Kx = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

It follows that the equality (2.2) is satisfied with $\mu_{\tau,L}(x) = \frac{1}{\tau} Kx$. Finally, one can check that

$$|w(x)| \leq |Rx - f(x)| |x| \leq w_0 |x|,$$

with $w_0 = \left| SK - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-(R+SK)\ell} SK d\ell \right|$. We deduce easily that, for a given matrix Q such that (2.4) is satisfied, one can determine a constant $\bar{\tau} > 0$ such that if $\tau \in (0, \bar{\tau})$, then $w_0 < \frac{1}{24|Q|}$. It follows that, if $\tau \in (0, \bar{\tau})$, Assumptions 1 to 3 are satisfied by the system (2.11).

5. From the forthcoming proof, one can deduce that when Theorem 2.1 applies, it leads to systems in closed loop which are ISS relative to additive disturbances. However, due to length limitation, we do not prove this result.

2.3 Proof of Theorem 2.1

To begin with, we observe that the system (1.2) in closed loop with $\mu_{\tau,L}(t, x)$ can be written as

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_{t-\tau}^t g(t, t-\ell, x(\ell)) \mu_{\tau,L}(\ell, x(\ell)) d\ell + w(t, x(t)). \quad (2.12)$$

Now, to ease the stability analysis of this system, we introduce the operator $\alpha : \mathbb{R} \times C_{\text{in}} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(t, \phi) = \int_{-\tau}^0 e^{Lr} \int_{-\tau-r}^0 g(t-r, -v-r, \phi(v)) \mu_{\tau,L}(t+v, \phi(v)) dv dr. \quad (2.13)$$

Along the trajectories of (2.12), it satisfies

$$\alpha(t, x_t) = \int_{t-\tau}^t e^{L(t-m-\tau)} \int_m^t g(m+\tau, m-\ell+\tau, x(\ell)) \mu_{\tau,L}(\ell, x(\ell)) d\ell dm. \quad (2.14)$$

Elementary calculations give :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= L\alpha(t, x_t) - \int_{t-\tau}^t g(t, t-\ell, x(\ell)) \mu_{\tau,L}(\ell, x(\ell)) d\ell \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t e^{L(t-m-\tau)} g(m+\tau, m-t+\tau, x(t)) \mu_{\tau,L}(t, x(t)) dm \\ &= L\alpha(t, x_t) - \int_{t-\tau}^t g(t, t-\ell, x(\ell)) \mu_{\tau,L}(\ell, x(\ell)) d\ell \\ &\quad + \left(\int_0^\tau e^{-L\ell} g(\ell+t, \ell, x(t)) d\ell \right) \mu_{\tau,L}(t, x(t)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

It follows that the operator $\beta : \mathbb{R} \times C_{\text{in}} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\beta(t, \phi) = \phi(0) + \alpha(t, \phi), \quad (2.16)$$

satisfies, along the trajectories of (2.12),

$$\beta(t, x_t) = x(t) + \alpha(t, x_t) \quad (2.17)$$

and

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(t) &= f(t, x(t)) + L\alpha(t, x(t)) + G_\tau(L, t, x(t))\mu_{\tau, L}(t, x(t)) + w(t, x(t)) \\ &= L\beta(t, x_t) + f(t, x(t)) - Lx(t) + G_\tau(L, t, x(t))\mu_{\tau, L}(t, x(t)) + w(t, x(t)),\end{aligned}\quad (2.18)$$

where G_τ is the function defined in (2.1). It follows from (2.2) in Assumption 1 that

$$\dot{\beta}(t) = L\beta(t, x_t) + w(t, x(t)). \quad (2.19)$$

Moreover, from the expression of $\alpha(t, x_t)$ in (2.14) and the definition of β in (2.16), it follows that

$$x(t) = \beta(t, x_t) - \int_{t-\tau}^t e^{L(t-m-\tau)} \int_m^t g(m+\tau, m-\ell+\tau, x(\ell))\mu_{\tau, L}(\ell, x(\ell)) d\ell dm. \quad (2.20)$$

Next, we use (2.19), (2.20) to prove that the system (2.12) admits the origin as a uniformly exponentially stable equilibrium point when $\tau \in (0, \tau_M)$. We start our analysis by observing that (2.20) implies that

$$|x(t)| \leq |\beta(t, x_t)| + \int_{t-\tau}^t \left| e^{L(t-m-\tau)} \int_m^t |g(m-\ell+\tau, x(\ell))\mu_{\tau, L}(\ell, x(\ell))| d\ell dm. \quad (2.21)$$

From (2.3) in Assumption 1, we deduce that

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq |\beta(t, x_t)| + \int_{t-\tau}^t e^{|L|(-t+m+\tau)} \int_m^t \frac{H_L}{\tau} |x(\ell)| d\ell dm \\ &\leq |\beta(t, x_t)| + e^{|L|\tau} H_L \int_{t-\tau}^t |x(\ell)| d\ell.\end{aligned}\quad (2.22)$$

This inequality leads us to consider the functional $V_1 : C_{\text{in}} \rightarrow [0, +\infty)$,

$$V_1(\phi) = \int_{-\tau}^0 \left[\frac{1}{2} \tau |\phi(m)| + \int_m^0 |\phi(\ell)| d\ell \right] dm. \quad (2.23)$$

Then, along the trajectories of (2.12),

$$\dot{V}_1(t) = \frac{3}{2} \tau |x(t)| - \frac{1}{2} \tau |x(t-\tau)| - \int_{t-\tau}^t |x(\ell)| d\ell. \quad (2.24)$$

This equality, in combination with (2.22), gives

$$\dot{V}_1(t) \leq \frac{3}{2} \tau \left[|\beta(t, x_t)| + e^{|L|\tau} H_L \int_{t-\tau}^t |x(\ell)| d\ell \right] - \int_{t-\tau}^t |x(\ell)| d\ell. \quad (2.25)$$

Since $\tau \leq \tau_M$, the equality (2.7) implies that

$$\dot{V}_1(t) \leq \frac{3}{2} \tau |\beta(t, x_t)| - \frac{1}{4} \int_{t-\tau}^t |x(\ell)| d\ell. \quad (2.26)$$

We observe that

$$\frac{1}{2} \tau \int_{-\tau}^0 |\phi(\ell)| d\ell \leq V_1(\phi) \leq \frac{3}{2} \tau \int_{-\tau}^0 |\phi(\ell)| d\ell, \quad (2.27)$$

for all $\phi \in C_{\text{in}}$. It follows that

$$\dot{V}_1(t) \leq \frac{3}{2} \tau |\beta(t, x_t)| - \frac{1}{6\tau} V_1(x_t). \quad (2.28)$$

It follows that the derivative of the functional $V_2 : C_{\text{in}} \rightarrow [0, +\infty)$,

$$V_2(\phi) = \frac{1}{2}V_1(\phi)^2 \quad (2.29)$$

along the trajectories of (2.12) satisfies

$$\dot{V}_2(t) \leq \frac{3}{2}\tau|\beta(t, x_t)|V_1(x_t) - \frac{1}{6\tau}V_1(x_t)^2. \quad (2.30)$$

Therefore the functional $V_3 : \mathbb{R} \times C_{\text{in}} \rightarrow [0, +\infty)$,

$$V_3(t, \phi) = V_2(\phi) + c_1\beta(t, \phi)^\top Q\beta(t, \phi), \quad (2.31)$$

where $c_1 > 0$ is a constant to be chosen later and Q is the matrix defined in (2.4), has a time derivative along the trajectories of (2.12) that satisfies

$$\dot{V}_3(t) \leq \frac{3}{2}\tau|\beta(t, x_t)|V_1(x_t) - \frac{1}{6\tau}V_1(x_t)^2 - 3c_1|\beta(t, x_t)|^2 + 2c_1\beta(t, x_t)^\top Qw(t, x(t)). \quad (2.32)$$

From Assumption 2, we deduce that

$$\dot{V}_3(t) \leq \frac{3}{2}\tau|\beta(t, x_t)|V_1(x_t) - \frac{1}{6\tau}V_1(x_t)^2 - 3c_1|\beta(t, x_t)|^2 + 2c_1w_0|Q||\beta(t, x_t)||x(t)|. \quad (2.33)$$

Now, from (2.22) and (2.27) we deduce that

$$|x(t)| \leq |\beta(t, x_t)| + e^{|L|\tau}H_L\frac{2}{\tau}V_1(x_t). \quad (2.34)$$

It follows that

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) \leq & \frac{3}{2}\tau|\beta(t, x_t)|V_1(x_t) - \frac{1}{6\tau}V_1(x_t)^2 - 3c_1|\beta(t, x_t)|^2 \\ & + 2c_1w_0|Q||\beta(t, x_t)| \left(|\beta(t, x_t)| + e^{|L|\tau}H_L\frac{2}{\tau}V_1(x_t) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

By grouping the terms, we obtain

$$\dot{V}_3(t) \leq -\frac{1}{6\tau}V_1(x_t)^2 + c_1(-3 + 2w_0|Q|)|\beta(t, x_t)|^2 + \left(\frac{3}{2}\tau + \frac{4}{\tau}c_1w_0|Q|e^{|L|\tau}H_L\right)|\beta(t, x_t)|V_1(x_t). \quad (2.36)$$

Let us choose $c_1 = 6\tau^3$. Then, using Assumption 2 in combination with the equality (2.7), we obtain $w_0 < \frac{3}{4|Q|}$, $w_0 < \frac{1}{|Q|} \frac{1}{48H_L\tau_M e^{|L|\tau_M}}$,

$$c_1(-3 + 2w_0|Q|) \leq 6\tau^3 \left(-3 + 2\frac{3}{4|Q|}|Q| \right) = -9\tau^3$$

and

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\tau + \frac{4}{\tau}c_1w_0|Q|e^{|L|\tau}H_L & \leq \frac{3}{2}\tau + \frac{4}{\tau}6\tau^3 \frac{1}{48H_L\tau_M e^{|L|\tau_M}} e^{|L|\tau}H_L \\ & \leq \frac{3}{2}\tau + \tau^2 \frac{1}{2H_L\tau_M e^{|L|\tau_M}} e^{|L|\tau}H_L. \end{aligned}$$

It follows that

$$\dot{V}_3(t) \leq -\frac{1}{6\tau}V_1(x_t)^2 - 9\tau^3|\beta(t, x_t)|^2 + \left(\frac{3}{2}\tau + \tau^2 \frac{1}{2\tau_M e^{|L|\tau_M}} e^{|L|\tau}\right)|\beta(t, x_t)|V_1(x_t). \quad (2.37)$$

Since $\tau \in (0, \tau_M)$, the inequality

$$\dot{V}_3(t) \leq -\frac{1}{6\tau}V_1(x_t)^2 - 9\tau^3|\beta(t, x_t)|^2 + 2\tau|\beta(t, x_t)|V_1(x_t) \quad (2.38)$$

holds. With the usual completion of squares, we get

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &\leq -\frac{1}{24\tau}V_1(x_t)^2 - \tau^3|\beta(t, x_t)|^2 \\ &\leq -\frac{1}{12\tau}V_2(x_t) - \frac{\tau^3}{|Q|}\beta(t, x_t)^\top Q\beta(t, x_t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

It follows that

$$\dot{V}_3(t) \leq -\min\left\{\frac{1}{12\tau}, \frac{1}{6|Q|}\right\}V_3(t, x_t). \quad (2.40)$$

This inequality implies that V_3 decays exponentially to zero. However, V_3 is not a Lyapunov-Krasovskii functional because this function is not lower bounded by a function of class $\mathcal{K}_\infty$ of $|\phi(0)|$. Therefore, to establish the uniform exponential stability of the closed loop system, we need to modify V_3 to obtain a Lyapunov-Krasovskii functional. To complete our construction of a Lyapunov-Krasovskii functional, we consider first the positive definite quadratic function $V_4 : C_{\text{in}} \rightarrow [0, +\infty)$,

$$V_4(x) = \frac{1}{2}|x|^2. \quad (2.41)$$

The time derivative of this function along the solutions of (2.12) satisfies

$$\dot{V}_4(t) = x(t)^\top f(t, x(t)) + x(t)^\top \int_{t-\tau}^t g(t, t-\ell, x(\ell))\mu_{\tau,L}(\ell, x(\ell))d\ell + x(t)^\top w(t, x(t)). \quad (2.42)$$

From Assumptions 1 and 2, we deduce that

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &\leq (f_m + w_0)|x(t)|^2 + \frac{H_L}{\tau}|x(t)| \int_{t-\tau}^t |x(\ell)|d\ell \\ &\leq -\frac{1}{2}|x(t)|^2 + (f_m + w_0 + \frac{1}{2})|x(t)|^2 + \frac{H_L}{\tau}|x(t)| \int_{t-\tau}^t |x(\ell)|d\ell, \end{aligned} \quad (2.43)$$

with $f_m = |L| + e^{|L|\tau}H_L$. Using (2.34), we obtain

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &\leq -\frac{1}{2}|x(t)|^2 + (f_m + w_0 + \frac{1}{2})\left(|\beta(t, x_t)| + \frac{2e^{|L|\tau}H_L}{\tau}V_1(x_t)\right)^2 \\ &\quad + \frac{H_L}{\tau}\left(|\beta(t, x_t)| + \frac{2e^{|L|\tau}H_L}{\tau}V_1(x_t)\right) \int_{t-\tau}^t |x(\ell)|d\ell. \end{aligned} \quad (2.44)$$

From this inequality, one can determine, through lengthy but simple calculations, a constant $c_2 > 0$ such that the inequality

$$\dot{V}_4(t) \leq -V_4(x(t)) + c_2V_3(t, x_t) \quad (2.45)$$

holds. We deduce that the time derivative along the trajectories of (2.12) of the functional $V_5 : \mathbb{R} \times C_{\text{in}} \rightarrow [0, +\infty)$,

$$V_5(t, \phi) = V_4(\phi(0)) + 2\frac{c_2}{\min\left\{\frac{1}{12\tau}, \frac{1}{6|Q|}\right\}}V_3(t, \phi), \quad (2.46)$$

satisfies

$$\begin{aligned}\dot{V}_5(t) &\leq -V_4(x(t)) - c_2 V_3(t, x_t) \\ &\leq -\min\left\{1, \frac{1}{24\tau}, \frac{1}{12|Q|}\right\} V_5(t, x_t).\end{aligned}\quad (2.47)$$

Finally, through lengthy, but simple calculations, one can prove that there exists a constant $c_3 > 0$ such that

$$\frac{1}{2}|\phi(0)|^2 \leq V_5(t, \phi) \leq c_3|\phi|_{[-\tau, 0]}^2, \quad (2.48)$$

for all $t \in \mathbb{R}$ and $\phi \in C_{\text{in}}$. From (2.47) and (2.48), it follows that the origin of the system (2.12) is globally uniformly exponentially stable.

3 Example

The example we consider is similar to the one given in [5]. Instead of the one-dimensional system

$$\dot{x}(t) = 0.36x(t) + v(t), \quad v(t) = \int_0^\tau F(\ell)u(\ell)d\ell, \quad (3.1)$$

with $\tau = 0.045$ and $F(\ell) = \frac{3542\ell(1-21\ell)}{1-21\ell+352\ell^2}$, we consider the one dimensional system

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}[\cos(t) + 1]\sin(x(t))x(t) + \int_0^\tau 3542\ell e^{-\frac{1771}{120}\ell}u(t-\ell)d\ell, \quad (3.2)$$

with $\tau \in (0, 0.045)$. Then, with the notation of the previous section,

$$G_\tau(L, t, x) = \int_0^\tau e^{-L\ell} 3542\ell e^{-\frac{1771}{120}\ell} d\ell. \quad (3.3)$$

It follows that the choice $L = -\frac{1}{120}$ gives

$$\begin{aligned}G_\tau(L, t, x) &= 3542 \int_0^\tau \ell e^{-(-\frac{1}{120} + \frac{1771}{120})\ell} d\ell \\ &= 3542 \int_0^\tau \ell e^{-\frac{177}{12}\ell} d\ell \\ &= 3542 \left[-\frac{0.54}{177} e^{-\frac{177}{12}\tau} + \frac{12^2}{177^2} (1 - e^{-\frac{177}{12}\tau}) \right].\end{aligned}\quad (3.4)$$

This leads us to consider

$$\mu_\tau(t, x) = \frac{177 \left[(\cos(t) + 1) \sin(x) + \frac{1}{60} \right] x}{85008 \left[\frac{12}{177} - (0.045 + \frac{12}{177}) e^{-\frac{177}{12} \cdot 0.045} \right]}. \quad (3.5)$$

Since $g(t, \ell, x) = 3542\ell e^{-\frac{1771}{120}\ell}$, we deduce that one can take

$$H_L \geq \frac{16107.177}{75274584.e \left[12 - 19.965 e^{-\frac{7.965}{12}} \right]}. \quad (3.6)$$

So we can choose $H_L = \frac{1}{123}$.

Now, let us check that $\tau \in (0, \tau_M)$ with $\tau_M > 0$ defined by the equality $\tau_M e^{\frac{\tau_M}{120}} = \frac{123}{2}$.

Observe that

$$\tau e^{\frac{\tau}{120}} = 0.045e^{\frac{0.045}{120}} < 0.046 < \frac{123}{2} = \tau_M e^{\frac{\tau_M}{120}}.$$

It follows that $\tau \in (0, \tau_M)$. Therefore Theorem 2.1 applies to the system (3.2), which implies that the origin of the system (3.2) is globally uniformly exponentially stabilized by the feedback defined in (3.5).

4 Conclusion

For nonlinear systems with distributed input delay, we have proposed a new stabilization technique. It provides with state feedbacks which globally uniformly exponentially stabilize the origin of the systems. The proof of stability we have adopted relies on the construction of a Lyapunov-Krasovskii functional. Much remains to be done. We plan to perform robustness analyses with respect to uncertainties on the delay and to additive disturbances on the inputs. We plan to use our new approach to perform sign analyses of the solutions of the system (1.2) as done in [16]. We plan to adapt use the result to establish a result of global practical stabilization for the (1.2) with state-dependent sampling, as done in [14] for systems with pointwise delay in the inputs.

Bibliographie

- [1] Z. Artstein, *Linear systems with delayed controls : A reduction*. IEEE Trans. Aut. Contr., AC-27, pp. 869-879, 1982.
- [2] N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic, *Lyapunov Stability of Linear Predictor Feedback for Distributed Input Delays*. IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 56, no.3, pp. 655-660, 2011.
- [3] Ki Ahn Choon, *Stabilization of Linear Systems With Distributed Input Delay Using Reduction Transformation*. Chinese Science Bulletin, vol. 56, no. 13, pp. 1413-1416, May 2011.
- [4] K. Engelborghs, M. Dambrine, D. Roose, *Limitations of a class of stabilization methods for delay systems*. IEEE Trans. Aut. Contr. vol. 46, pp. 336-339, Feb. 2001.
- [5] G. Goebel, U. Munz, F. Allgower, *Stabilization of Linear Systems with Distributed Input Delay*. 2010 American Control Conference, June 30-July 02, pp. 5800-5805, 2010.
- [6] K. Gu, S.-I. Niculescu, *Stability analysis of time-delay systems : A Lyapunov approach*. In A. Loria and F. Lamnhabu-Lagarigue, editors, Advanced Topics in Control Systems Theory. Lectures Notes from FAP 2005, volume 328 of Lectures Notes in Control and Information Sciences, pp. 139-170. Springer Berlin, Heidelberg, 2006.
- [7] H. Ito, P. Pepe, Z.-P. Jiang, *A small-gain condition for iISS of interconnected retarded systems based on Lyapunov-Krasovskii functionals*. Automatica, vol. 46 Issue 10, pp. 1646-1656, Oct., 2010.
- [8] I. Karafyllis, *Stabilization by Means of Time-Varying Distributed Delay Feedback*. SIAM Journal on Control and Optimization. vol. 45, Issue 1, pp. 320-342, 2006.
- [9] I. Karafyllis, Z.-P. Jiang, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*. Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag London Ltd., London, UK, 2011.
- [10] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser, Boston, 2009.
- [11] W.H. Kwon, A.E. Pearson, *Feedback stabilization of linear systems with delayed control*. IEEE Trans. Aut. Contr., AC-25 (2), pp. 266-269, 1980.

- [12] M. Malisoff, F. Mazenc, *Constructions of Strict Lyapunov Functions*. Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag London Ltd., London, ISBN : 978-1-84882-534-5 (Print), UK, 2009.
- [13] A. Manitius, A. Olbrot, *Finite spectrum assignment problem for systems with delays*. IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 24, pp. 541-553, 1979.
- [14] F. Mazenc, C. de Persis, *Practical stabilization of nonlinear systems with state-dependent sampling and retarded inputs*. Submitted.
- [15] F. Mazenc, M. Malisoff, Z. Lin, *Further results on input-to-state stability for nonlinear systems with delayed feedbacks*. Automatica, vol. 44, Issue 9, pp. 2415-2421, Sept. 2008.
- [16] F. Mazenc, S.-I. Niculescu, *Generating Positive and Stable Solutions through Delayed State Feedback*. Automatica, vol. 47, pp. 525-533, 2011.
- [17] A. Olbrot, *Stabilizability, detectability and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays*. IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 23, pp. 605-618, 1978.
- [18] P. Pepe, E.I. Verriest, *On the Stability of Coupled Delay Differential and Continuous Time Difference Equations*. IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 48, No. 8 pp. 1422-1427, Aug. 2003.
- [19] V. Van Assche, M. Dambrine, J.-F. Lafay, J.-P. Richard, *Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws*. 38th Conference on Decision and Control, pp.4668-4672, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [20] L. Xie, E. Fridman, U. Shaked, *Robust H_∞ Control of Distributed Delay Systems With Application to Combustion Control*. IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 46, no. 12, pp. 1930-1935, 2001.
- [21] B. Zhou, Z. Lin, G. Duan, *Stabilization of linear systems with input delay and saturation - A parametric Lyapunov equation approach*. International Journal of Robust and Nonlinear Control vol. 20, Issue 13, pp. 1502-1519, 10 Sept. 2010.

Chapitre 6

Stabilization of nonlinear systems with delay in the input through *Backstepping*

abstract We propose a new solution to the problem of globally asymptotically stabilizing a nonlinear system in feedback form with a known pointwise delay in the input. The result covers a family of systems wider than those studied in the literature and endows with control laws with a single delay, in contrast to those given in previous works which include two distinct pointwise delays or distributed delays. The strategy of design is based on the construction of an appropriate Lyapunov-Krasovskii functional.

1 Introduction

Time-delay systems represent an important family of systems spanning a wide range of application including network control, population dynamics, biological systems to cite only a few. Most of the literature on systems with delay is devoted to linear systems (see, for instance [4], [25], [23] and the references therein). Nevertheless, especially in the last two decades, some important results for nonlinear systems with delay have appeared. In particular, extensions to systems with delays of the two techniques of recursive design of control laws called *Backstepping* and *forwarding* have been obtained. Forwarding in [11] and the *Backstepping* in [3], [24] have been adapted to important families of systems with pointwise delays and delay-free inputs. It is worth mentioning that the problem of stabilizing nonlinear systems with time delayed inputs is also of interest due to the transport and measurement delays that naturally arise in control applications (see, e.g.,

[23]). Although such a problem appears as being difficult, a few papers present extensions of the forwarding approach to the case of retarded inputs ([14], [2], [28] and [20]). For *Backstepping*, the situation is different : although *Backstepping* is one of the most popular techniques of design of stabilizing control laws for nonlinear systems, which has been largely developed in the literature (see, for instance, [16], [13], [17], [1], [15] and the references therein), to the best of our knowledge, only two contributions [18], [12] are devoted to the problem of extending the *Backstepping* approach to the case where there are delays in the inputs. More precisely, stabilization is achieved in [12], via a control law with distributed terms over some time interval and in [18], stabilization is achieved via a control law with two pointwise delays.

Motivated by the precedent considerations, the present work continues the efforts to extend the *Backstepping approach* to nonlinear systems with a delay in the input. Since it owes a great deal to [18], we briefly describe its main result. Systems of the form :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))z(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) + h(x(t - \tau), z(t - \tau)) , \end{cases} \quad (1.1)$$

with $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, where $u \in \mathbb{R}$ is the input and $\tau \geq 0$ is the delay and appropriate initial conditions, are considered. The existence of a control law $z_s(x)$ which globally asymptotically stabilizes the system $\dot{x} = f(x) + g(x)z_s(x)$ is assumed. Technical assumptions are introduced to guarantee that the system

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))z_s(x(t - \tau)) \quad (1.2)$$

admits also the origin as a globally asymptotically stable equilibrium point. Basically, these assumptions are growth conditions on the functions f and g which prevent the finite escape time phenomenon from happening and make it possible to construct a strict Lyapunov-Krasovskii functional for the system (1.2). With these considerations in mind, the introduction of the operator $Z : C_{in} \mapsto \mathbb{R}$ defined on the dynamics of (1.1) by

$$Z(t) = z(t) - z_s(x(t - \tau)) , \quad (1.3)$$

which plays the role of a change of coordinates, leads to a Lyapunov functional U and a control law

$$u(t - \tau) = -\varepsilon[z(t - \tau) - z_s(x(t - 2\tau))] - h(x(t - \tau), z(t - \tau)) + R(x(t - \tau), z(t - \tau)) \quad (1.4)$$

with

$$R(x, z) = \frac{\partial z_s}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)z]$$

with $\varepsilon > 0$, which ensures that, for all $t \geq \tau$, the derivative of U along the trajectories of the closed-loop system is smaller than a negative definite function of $x(t)$, $z(t)$. To the best of the

authors' knowledge, this pioneer technique made it possible for the first time to globally stabilize nonlinear systems in feedback form by retarded feedbacks of class C^1 without using distributed terms. However, it has three limitations : (i) in the formula of the control law (1.4), both $x(t - \tau)$ and $x(t - 2\tau)$ are present, although there is only the delay τ in the input of (1.1) through $u(t - \tau)$, (ii) the derivative of the Lyapunov-Krasovskii functional along the trajectories of the closed loop system is negative definite only for values of time larger than τ and therefore this functional does not offer all the advantages inherent to classical Lyapunov-Krasovskii functionals (see for instance [26] and [7] for more information on the usefulness of Lyapunov-Krasovskii functionals) (iii) finally, the function h in (1.1), which depends on the retarded values $x(t - \tau)$, $z(t - \tau)$, cannot depend on $x(t)$, $z(t)$. If it does, the technique of construction *does not apply*.

In the present work, we overcome these limitations. In particular, we wish to point out that the main result of stabilization we are deriving applies to systems of the family

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))z(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) + h_1(x(t), z(t)) + h_2(x(t - \tau), z(t - \tau)) , \end{cases} \quad (1.5)$$

with $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, under appropriate initial conditions. It is worth mentioning that such a class of systems is important due to the presence of the term without delay $h_1(x(t), z(t))$ and because this family encompasses the family of the systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) , \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) , \\ \dot{x}_n(t) &= z(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) + h_1(x(t), z(t)) , \end{cases} \quad (1.6)$$

with $x = (x_1, \dots, x_n)$, which may result from the attempt to linearize a single-input single-output system including a single delay only in the input, which cannot be completed when $\tau > 0$ because the term $h_1(x(t), z(t))$ cannot be removed through a change of feedback. Interestingly, the contribution [5] presents results for the systems (1.6), sous divers hypothèses sur les critères de croissance du terme h_1 . contrairement aux retours d'état qu'on va voir dans ce travail, la loi de commande [5] dépend des valeurs passées de la commande.

The Lyapunov based technique we will expose relies on the use of an *operator* of a *new type*. It is reminiscent of the one introduced for the first time in [21] and [22] and also shares some features with the one used in [9] and [10] to reduce a system with delay to another one without delay. However neither the approach of [21] nor the one of [9] and [10] can be applied to stabilize systems of the form (1.5) : the assumptions imposed in [21] are not satisfied by (1.5) (notice in particular that the main result of [21] is a result of exponential stabilization whereas (1.5) is not

necessarily locally exponentially stabilizable) and the contributions [9] and [10] are not concerned with retarded inputs. The operator leads to the construction of a Lyapunov-Krasovskii functional whose derivative along the trajectories of (1.5) can be made negative definite by an appropriate choice of state feedback of class C^1 . Using this strict Lyapunov-Krasovskii functional, we shall prove for a family of systems with additive disturbances that the control laws we propose give to the systems the desirable ISS property (see for instance [27], [17] for a detailed presentation of the notion of ISS) with respect to additive disturbances.

The remaining of the paper is organized as follows. In Section 2, we introduce the general family of systems that will be studied and the assumptions that will be used throughout the paper. Next, the main result is stated and proved in Section 3. A result of ISS robustness is established in Section 4. A second-order example in Section 5 illustrates the control design of the previous section. Some concluding remarks in Section 6 complete the work.

Notations and definitions.

- Denote $|\cdot|$ the Euclidean norm of matrices and vectors of any dimension.
- Given $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ defined on an interval I , denote its (essential) supremum over I by $|\phi|_I$.
- Let p be any positive integer. We denote $C_{\text{in}} = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^p)$ the set of all continuous $\mathbb{R}^p$ -valued functions defined on a given interval $[-\tau, 0]$.
- For a continuous function $\varphi : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$, for all $t \geq 0$, the function φ_t defined by $\varphi_t(\theta) = \varphi(t + \theta)$ for all $\theta \in [-\tau, 0]$ is sometimes called translation operator.
- A function $\kappa : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ is of class $\mathcal{K}_\infty$ if $\kappa(0) = 0$, κ is continuous, increasing and unbounded.
- The notations will be simplified whenever no confusion can arise from the context.

2 Particular family of systems in feedback form

We consider the nonlinear systems :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))z(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) + h_1(x(t), z(t)) + h_2(x(t - \tau), z(t - \tau)) , \end{cases} \quad (2.1)$$

with $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, where $u \in \mathbb{R}$ is the input, where $\tau > 0$ is a constant, where f , g , h_1 , h_2 are functions of class C^1 , under appropriate initial conditions. The main goal of the section is to develop a method for deriving stabilizing feedbacks for systems (2.1). To achieve it, we introduce a set of assumptions :

Assumption H1. *There exist a positive definite, radially unbounded function V of class C^1 and a function $z_s(x)$ of class C^2 such that $z_s(0) = 0$ and the function*

$$W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} , \quad W(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x)F(x) , \quad (2.2)$$

where

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x) = f(x) + g(x)z_s(x), \quad (2.3)$$

is positive definite.

Assumption H2. There exist a constant $c_1 \geq 0$ and a nonnegative locally Lipschitz function G_1 such that the function

$$\begin{aligned} H & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ H(x, Z) & = -\frac{\partial z_s}{\partial x}(x)[F(x) + g(x)Z] + h_1(x, Z + z_s(x)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

satisfies, for all $x \in \mathbb{R}^n, Z \in \mathbb{R}$, the inequality

$$|H(x, Z)| \leq c_1|Z| + G_1(x). \quad (2.5)$$

There exist constants $c_2 > 0$ and $c_3 > 0$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^n$, the inequalities

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) \right|^2 \leq c_2 W(x), \quad (2.6)$$

$$G_1(x)^2 \leq c_3 W(x), \quad (2.7)$$

are satisfied.

Assumption H3. The delay τ and the constants $c_i, i = 1, 2, 3$, in Assumption H2 satisfy

$$\tau < \begin{cases} \min \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}c_1}, \frac{1}{\sqrt{6}c_2c_3} \right\} & \text{if } c_1 > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{6}c_2c_3} & \text{if } c_1 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

3 Main result

We are ready to state and prove the following result :

Théorème 3.1. Consider the system (2.1). Assume that it satisfies Assumptions H1 to H3. Then for all $L \in \mathbb{R}$ such that

$$L \in \left[c_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}\tau}, 0 \right) \quad (3.1)$$

the system (2.1) in closed-loop with

$$u(x, z) = -h_2(x, z) + Le^{\tau L}(z - z_s(x)) + e^{\tau L} \left[\frac{\partial z_s}{\partial x}(x)(f(x) + g(x)z) - h_1(x, z) \right] \quad (3.2)$$

admits the origin as a globally asymptotically stable equilibrium point.

Discussion of Theorem 3.1.

– Assumption H1 is one of the fundamental assumptions of the *Backstepping* method : it ensures the stabilizability of the x -subsystem of (2.1) with z as virtual input.

– There are in Assumption H2 growth restrictions on the functions f , g , h_1 . They allow us performing our Lyapunov design. However, they are not simple technical assumptions which might be removed without changing the result : in [18], it is proved that there are some systems (1.1), which do not satisfy Assumption H2 and for which there exists no feedback $u(x(t - \tau), z(t - \tau))$ so that the finite escape time phenomenon does not occur.

– Since in the absence of delay, globally asymptotically stabilizing feedbacks can be determined through the *Backstepping* approach, the result of [19], which is a result of robustness with respect to the presence of a delay in the input, applies in some cases when extra assumptions, which pertain in particular to the growth of $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial h_1}{\partial x}$, $\frac{\partial h_1}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 z_s}{\partial^2 x}$, are satisfied.

– A restriction on the size of τ must be imposed, otherwise the problem does not always admit a solution. However, there is a subfamily of systems (2.1), for which for any delay $\tau > 0$, one can select a “fictitious” feedback z_s such that Assumptions H1 to H3 are satisfied. Typically, these systems have no term h_1 and are such that, for all $\delta > 0$, there exists z_s satisfying Assumptions H1 and H2 such that $|\frac{\partial z_s}{\partial x}(x)| \leq \delta$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

– One can easily check that if the system (2.1) is linear and asymptotically stabilizable, then there always exists a quadratic Lyapunov function V and a linear function z_s such that Assumptions H1 and H2 are satisfied.

– Assumptions H1 to H3 do not imply that the system (2.1) with $\tau = 0$ admits an exponentially stabilizable linear approximation at the origin : they are satisfied for instance by the two-dimensional system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= x(t)z(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) , \end{cases} \quad (3.3)$$

studied in [18] with $V(x) = \ln(1 + x^2)$, $z_s(x) = -\frac{\omega x^2}{1+x^2}$, $\omega > 0$, where τ is sufficiently small relative to ω . This is a remarkable feature of Theorem 3.1 because most of the stabilization results for systems with delays apply only to systems that can be locally exponentially stabilized by a feedback of class C^1 .

Proof. To begin with, we observe that Assumption H3 ensures that there exist negative constants L such that the inequality (3.1) is satisfied. Now, to ease the control design, we perform the change of coordinate $Z = z - z_s(x)$ and take u under the form $u(t - \tau) = v(x(t - \tau), z(t - \tau) - z_s(x(t - \tau))) - h_2(x(t - \tau), z(t - \tau))$, where v is a function to be determined later. With these transformations, the system (2.1) rewrites as :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= F(x(t)) + g(x(t))Z(t) , \\ \dot{Z}(t) &= v(x(t - \tau), Z(t - \tau)) + H(x(t), Z(t)) , \end{cases} \quad (3.4)$$

with F defined in (2.3) and H defined in (2.4). Then we start the construction of a Lyapunov

functional candidate by introducing the operator $\alpha : C_{in} \mapsto \mathfrak{R}$ defined by

$$\alpha(\phi_x, \phi_Z) = \int_{-\tau}^0 e^{-L(m+\tau)} v(\phi_x(m), \phi_Z(m)) dm, \quad (3.5)$$

where L is the constant in Theorem 3.1. Along the trajectories of (3.4), it satisfies

$$\alpha(x_t, Z_t) = \int_{t-\tau}^t e^{L(t-m-\tau)} v(x(m), Z(m)) dm, \quad (3.6)$$

and its time-derivative, denoted simply $\dot{\alpha}(t)$, satisfies

$$\dot{\alpha}(t) = L\alpha(x_t, Z_t) + e^{-\tau L} v(x(t), Z(t)) - v(x(t-\tau), Z(t-\tau)). \quad (3.7)$$

It follows that the operator $\beta : C_{in} \mapsto \mathfrak{R}$ defined by

$$\beta(\phi_x, \phi_Z) = \phi_Z(0) + \alpha(\phi_x, \phi_Z) \quad (3.8)$$

is such that, for all $t \geq 0$,

$$\dot{\beta}(t) = L\alpha(x_t, Z_t) + e^{-\tau L} v(x(t), Z(t)) + H(x(t), Z(t)). \quad (3.9)$$

Selecting the function

$$v(x, Z) = -e^{\tau L} H(x, Z) + L e^{\tau L} Z, \quad (3.10)$$

which corresponds to the control (3.2), we obtain

$$\dot{\beta}(t) = L\beta(x_t, Z_t) \quad (3.11)$$

We note that $\beta(x_t, Z_t)$ is a solution of an exponentially stable system since $L < 0$. We shall use later this property implicitly. For the time being, we observe that the equality

$$Z(t) = \beta(x_t, Z_t) - \int_{t-\tau}^t e^{L(t-m-\tau)} v(x(m), Z(m)) dm \quad (3.12)$$

with v defined in (3.10) and the negativity of L imply that, for all $t \geq 0$, the inequality

$$|Z(t)| \leq \int_{t-\tau}^t |H(x(m), Z(m)) - LZ(m)| dm + |\beta(x_t, Z_t)| \quad (3.13)$$

holds. From (2.5) in Assumption H2 and the definition of H in (2.4), we deduce that, for all $t \geq 0$,

$$|Z(t)| \leq \int_{t-\tau}^t [c_4 |Z(m)| + G_1(x(m))] dm + |\beta(x_t, Z_t)|, \quad (3.14)$$

with $c_4 = c_1 - L$. This inequality together with the inequality (7.1), Cauchy-Schwartz inequality imply that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Z(t)^2 &\leq \frac{5}{4} \tau \int_{t-\tau}^t [c_4 |Z(m)| + G_1(x(m))]^2 dm + 5\beta(x_t, Z_t)^2 \\ &\leq \frac{5}{2} \tau \int_{t-\tau}^t [c_4^2 Z(m)^2 + G_1(x(m))^2] dm + 5\beta(x_t, Z_t)^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Then, we introduce a new operator $\gamma : C_{in} \mapsto \mathfrak{R}$ defined by

$$\gamma(\phi_Z) = \int_{-\tau}^0 \int_{\ell}^0 \phi_Z(m)^2 dm d\ell \quad (3.16)$$

which satisfies, along the trajectories of (3.4), for all $t \geq 0$, $\gamma(Z_t) = \int_{t-\tau}^t \int_{\ell}^t Z(m)^2 dm d\ell$ and

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \tau Z(t)^2 - \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm \\ &= -\tau Z(t)^2 - \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm + 2\tau Z(t)^2 . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Combining this equality with (3.15), we obtain, for all $t \geq 0$, the inequality

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &\leq -\tau Z(t)^2 - \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm + 2\tau \frac{5}{2} \int_{t-\tau}^t [c_4^2 Z(m)^2 + G_1(x(m))^2] dm \\ &\quad + 19\tau \beta(x_t, Z_t)^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

which rewrites, by grouping the terms, as

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &\leq -\tau Z(t)^2 + (5\tau^2 c_4^2 - 1) \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm + 5\tau^2 \int_{t-\tau}^t G_1(x(m))^2 dm \\ &\quad + 10\tau \beta(x_t, Z_t)^2 . \end{aligned} \quad (3.19)$$

The inequality (3.1) implies that $5\tau^2 c_4^2 - 1 \leq -3\tau^2 c_4^2$. It follows that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &\leq -\tau Z(t)^2 - 3c_4^2 \tau^2 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm + 5\tau^2 \int_{t-\tau}^t G_1(x(m))^2 dm \\ &\quad + 10\tau \beta(x_t, Z_t)^2 . \end{aligned} \quad (3.20)$$

We continue our Lyapunov construction by considering the functional $U_1 : C_{in} \mapsto \mathfrak{R}$ defined by

$$U_1(\phi_x, \phi_Z) = V(\phi_x(0)) + c_5 \gamma(\phi_Z) , \quad (3.21)$$

where V is the function given by Assumption H1 and where $c_5 > 0$ is a constant to be chosen later.

Then, from Assumption H1 and (3.20), we deduce that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(t) &\leq -W(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t))g(x(t))Z(t) - c_5 \tau Z(t)^2 - c_6 \tau^2 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm \\ &\quad + 5c_5 \tau^2 \int_{t-\tau}^t G_1(x(m))^2 dm + 10c_5 \tau \beta(x_t, Z_t)^2 , \end{aligned} \quad (3.22)$$

with $c_6 = 3c_5 c_4^2$. From the inequality (2.6) in Assumption H2, we deduce that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(t) &\leq -W(x(t)) + \sqrt{c_2 W(x(t))} |Z(t)| - c_5 \tau Z(t)^2 - c_6 \tau^2 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm \\ &\quad + 5c_5 c_3 \tau^2 \int_{t-\tau}^t W(x(m)) dm + 10c_5 \tau \beta(x_t, Z_t)^2 . \end{aligned} \quad (3.23)$$

This inequality leads us to consider the functional $U_2 : C_{in} \mapsto \mathfrak{R}$ defined by

$$U_2(\phi_x, \phi_Z) = k\beta(\phi_x, \phi_Z)^2 + U_1(\phi_x, \phi_Z) + 6c_5 c_3 \tau^2 \int_{-\tau}^0 \int_{\ell}^0 W(\phi_x(m)) dm d\ell \quad (3.24)$$

with $k = \frac{1+10c_5\tau}{-2L}$ (since $L < 0$, $k > 0$). Bearing in mind (3.11), through elementary calculations, we obtain that for all $t \geq 0$, the following inequality holds :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2(t) \leq & (6c_5c_3\tau^3 - 1)W(x(t)) + \sqrt{c_2W(x(t))}|Z(t)| - c_5\tau Z(t)^2 \\ & - \beta(x_t, Z_t)^2 - c_6\tau^2 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm - c_5c_3\tau^2 \int_{t-\tau}^t W(x(m))dm . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Therefore there exists a constant $c_7 > 0$ such that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}_2(t) \leq & -c_7W(x(t)) - c_7Z(t)^2 - \beta(x_t, Z_t)^2 - c_6\tau^2 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm \\ & - c_5c_3\tau^2 \int_{t-\tau}^t W(x(m))dm \end{aligned} \quad (3.26)$$

if there exists $c_5 > 0$ such that the inequality

$$c_2 + 4c_5\tau(6c_5c_3\tau^3 - 1) < 0 \quad (3.27)$$

holds. Since Assumption H3 ensures that $\tau < \frac{1}{\sqrt{6c_2c_3}}$, the constant $c_5 = \frac{1}{12c_3\tau^3}$ is such that (3.27) is satisfied because this value for c_5 leads to $c_2 + 4c_5\tau(6c_5c_3\tau^3 - 1) = c_2 - \frac{1}{6c_3\tau^2} < 0$. Then (3.26) holds with for instance $c_7 = \min \left\{ \frac{1-6c_2c_3\tau^2}{4}, \frac{1-6c_2c_3\tau^2}{12c_3\tau^2(1+6c_2c_3\tau^2)} \right\}$. However, although the right hand side of (3.26) is nonpositive, we cannot apply the Lyapunov-Krasovskii Theorem yet (see for instance [6], [17]) because we do not know if there is a function λ of class $\mathcal{K}_\infty$ such that, for all functions $(\phi_x, \phi_Z) \in C_{\text{in}}$ the inequality

$$\lambda(|\phi_x(0)|^2 + \phi_Z(0)^2) \leq U_2(\phi_x, \phi_Z) \quad (3.28)$$

is satisfied. To overcome this obstacle, we replace U_2 by the functional

$$U_3(\phi_x, \phi_Z) = U_2(\phi_x, \phi_Z) + \frac{c_7}{2} \int_{-\tau}^0 [W(\phi_x(m)) + \phi_Z(m)^2] dm . \quad (3.29)$$

The rest of the proof is omitted.

4 ISS closed-loop systems

In this section, we use the Lyapunov-Krasovskii functional constructed in the previous section to establish that, under extra assumptions, the control (3.2) gives an ISS property to the system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))z(t) + w_1(t) , \\ \dot{z}(t) &= u(t - \tau) + h_1(x(t), z(t)) + h_2(x(t - \tau), z(t - \tau)) + w_2(t) , \end{cases} \quad (4.1)$$

with $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, where $u \in \mathbb{R}$ is the input, under appropriate initial conditions, where $\tau > 0$ is a constant, and f, g, h_1, h_2 are functions of class C^1 and where w_1 and w_2 are disturbances. More precisely, we establish the following result :

Théorème 4.1. *Consider the system (4.1). Assume that it satisfies Assumptions H1 to H3 with a function W that is radially unbounded. Assume that there exists a constant $c_8 > 0$ such that, for all $x \in \mathfrak{R}$,*

$$\left| \frac{\partial z_s}{\partial x}(x) \right| \leq c_8 . \quad (4.2)$$

Then for all $L \in \mathfrak{R}$ such that (3.1) holds, the system (4.1) in closed-loop with the control (3.2) is ISS with respect to (w_1, w_2) .

Proof. The proof is omitted.

5 Illustrative example

In this section, we illustrate Theorem 4.1. We consider the pendulum equations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) + w_1(t) \\ \dot{z}(t) = u(t - \tau) + a \sin(x(t)) - bz(t) + w_2(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

where $a \neq 0$, b and τ are positive constants, $x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathfrak{R}$, where $u \in \mathfrak{R}$ is the input and where w_1 , w_2 are disturbances. Due to the presence of the term $a \sin(x) - bz$, the technique of [18] does not apply to (5.1).

For this system, with the notations of Section 4, $f(x) = 0$, $g(x) = 1$, $h_1(x, z) = a \sin(x) - bz$, $h_2(x, z) = 0$. We apply Theorem 4.1 with the following functions $z_s(x) = -rx$, where $r > 0$ and $r \neq b$ and $V : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 . \quad (5.2)$$

Then, with the notation of Section 3,

$$W(x) = rx^2 , \quad F(x) = -rx , \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) = x \quad (5.3)$$

and $H(x, Z) = r[-rx + Z] + a \sin(x) - b(Z - rx)$

.

It follows that, for all $(x, Z) \in \mathfrak{R}^2$,

$$|H(x, Z)| \leq c_1|Z| + G_1(x) , \quad (5.4)$$

with $c_1 = |b - r|$, $G_1(x) = |(b - r)rx + a \sin(x)|$. Finally, noticing that W is positive definite and radially unbounded, $\frac{\partial z_s}{\partial x}(x) = -r$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) \right)^2 = x^2 = c_2 W(x) \quad (5.5)$$

with $c_2 = \frac{1}{r}$ and

$$G_1(x)^2 \leq [r^2(b - r)^2 + a^2]x^2 = c_3 W(x) , \quad (5.6)$$

with $c_3 = \frac{r^2(b-r)^2+a^2}{r}$, we deduce from Theorem 4.1 that if

$$\tau < \min \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}|b-r|}, \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{r}{\sqrt{r^2(b-r)^2+a^2}} \right\},$$

then the system (5.1) in closed-loop with the control law

$$u_r(x, z) = Le^{\tau L}(z + rx) + e^{\tau L}[-rz - a \sin(x) + bz] , \quad (5.7)$$

with

$$L \in \left[|b-r| - \frac{1}{2\sqrt{2}\tau}, 0 \right) \quad (5.8)$$

is globally ISS with respect to (w_1, w_2) . Observe that, rewriting u_r as

$$u_r(x, z) = e^{\tau L} [Lrx - a \sin(x) + (L + b - r)z] \quad (5.9)$$

and choosing $r < b$ and $L = r - b$, we obtain the feedback

$$u_r(x, z) = e^{\tau(r-b)} [(r-b)rx - a \sin(x)] \quad (5.10)$$

which is independent from z . This feature may be of interest in cases where the variable of velocity z cannot be measured. Of course, ISS for the system (5.1) can be also achieved by linear output feedbacks

$$u_l(x) = -sx, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.11)$$

when the delay τ is sufficiently small. However, the families of stabilizing feedbacks (5.11) and (5.10) do not have the same features. Since, for all $(x, z) \in \mathbb{R}^2$,

$$|u_r(x, z)| \leq e^{\tau(r-b)} [(b-r)r|x| + |a|] \quad (5.12)$$

and since r can be chosen arbitrary close to b (independently from τ), for any $\epsilon > 0$, the family (5.10) contains elements which satisfy, for all $(x, z) \in \mathbb{R}^2$,

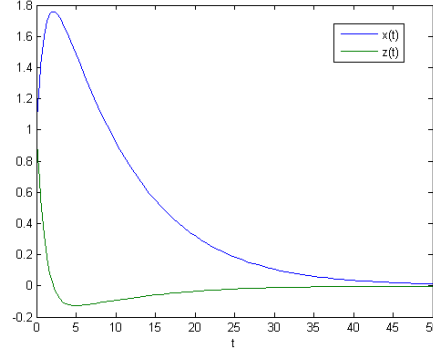
$$|u_r(x, z)| \leq \epsilon|x| + |a|. \quad (5.13)$$

(For instance, a possible choice for obtaining this is

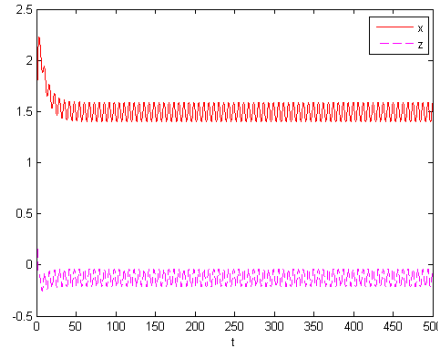
$r = b - \min \left\{ \frac{\epsilon}{b}, \frac{b}{2} \right\}$). By contrast, one can prove that if a feedback $u_l(x) = -sx$ stabilizes the system (5.1), then there exists $x_l \in \mathbb{R}$ such that $|u_l(x_l)| > \epsilon_0|x_l| + 2|a|$ with $\epsilon_0 = \frac{|a|}{9}$. We omit this demonstration.

We conclude that the family of stabilizing control laws u_r given in (5.10) has an advantage over the family of the stabilizing linear control laws u_l given in (5.11), relative to the size of their elements : roughly speaking, outside a compact set, no stabilizing linear feedback will be smaller than some of the feedbacks provided by Theorem 4.1 .

Simulation for $a = b = 1, \tau = 0.1080$ is :



Example With the same parameters and in the presence of the following additive terms : $w_1(t) = 1 + \frac{\sin(t)}{8}$ et $w_2(t) = -\frac{\cos(t)}{8}$, we obtain



6 Conclusion

We have developed a new *Backstepping* method for a new family of systems with delay in the input. We have obtained state feedbacks of class C^1 whose analytic expressions include delay information, and explicit expressions of strict Lyapunov-Krasovskii functionals for the closed-loop systems. Much remains to be done.

Bibliographie

- [1] A. Astolfi, D. Karagiannis, R. Ortega, *Nonlinear and Adaptive Control with Application. Communications and Control Engineering Series*, Springer, London Ltd., 2007.
- [2] N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic, *Delay-adaptive feedback for linear feedforward systems*. Systems and Control Letters, vol. 59, pp. 277-283, 2010.
- [3] Changchun Hua, Xinping Guan, Peng Shi, *Robust Backstepping Control for a Class of Time Delayed Systems*. IEEE Trans. on Aut. Contr., vol. 50, no. 6, pp. 894-899, 2005.
- [4] K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser, Boston, 2003.
- [5] Ho-Lim Choi, Jong-Tae Lim, *Asymptotic stabilization of an input-delayed chain of integrators with nonlinearity*. Systems and Control Letters, pp. 374-379, 2010.
- [6] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*. (AMS, vol.99, Springer : New York, 1993).
- [7] H. Ito, P. Pepe, Z.-P. Jiang, *A small-gain condition for iISS of interconnected retarded systems based on Lyapunov-Krasovskii functionals*. Automatica, vol. 46, no. 10, pp. 1646-1656, 2010
- [8] S.B. Hsu, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Series on Applied Mathematics Volume 16, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2006.
- [9] M. Jankovic, *Forwarding, backstepping, and finite spectrum assignment for time delay systems*. Proceedings of the 2007 American Control Conference, New York, NY, pp. 5618-5624, 2007.
- [10] M. Jankovic, *Recursive predictor design for linear systems with time delay*. Proceedings of the 2008 American Control Conference, Seattle, Washington, pp. 4904 - 4909, 2008.
- [11] M. Jankovic, *Cross-Term Forwarding for Systems With Time Delay*. IEEE Trans. on Aut. Contr., vol. 54, no. 3, pp. 498-511, 2009.
- [12] I. Karafyllis, *Finite time stabilization by means of a time-varying distributed delayed feedback*. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 45, pp. 320-342, 2006.
- [13] H. Khalil, *Nonlinear systems*. (third edition), Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 2002.

- [14] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser, Boston, 2009.
- [15] M. Krstic, H. Deng, *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. Communications and Control Engineering Series*, Springer, London Ltd., 1998.
- [16] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York : Wiley, 1995.
- [17] M. Malisoff, F. Mazenc, *Constructions of Strict Lyapunov Functions*. Communications and Control Engineering Series, Springer, London Ltd., London, ISBN : 978-1-84882-534-5 (Print), UK, 2009.
- [18] F. Mazenc, P.A. Bliman, *Backstepping Design for Time-Delay Nonlinear Systems*. IEEE Trans. on Aut. Contr., vol. 51, no.1, pp. 149-154, Jan. 2006.
- [19] F. Mazenc, M. Malisoff, Z. Lin. *Further Results on Input-to-State Stability for Nonlinear Systems with Delayed Feedbacks*. Automatica, vol. 44, no. 9, pp. 2415-2421, Sept. 2008,
- [20] F. Mazenc, S. Mondié, R. Francisco, *Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems with Delay in the Input*. IEEE Trans. on Aut. Contr., vol. 49, no. 5, pp. 844-850, 2004.
- [21] F. Mazenc, S.-I. Niculescu, *Stabilizing Controllers for Delays Systems subject to Positivity Constraints*. 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems, TDS 2010.
- [22] F. Mazenc, S.-I. Niculescu, *Generating Positive and Stable Solutions through Delayed State Feedback*. Automatica, accepted.
- [23] W. Michiels, S.-I. Niculescu (2007) *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based approach*. Advances in Design and Control, SIAM.
- [24] S.K. Nguang, *Robust Stabilization of Time Delay Nonlinear Systems With a Triangular Structure*. Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, San Diego, California, USA, pp. 4006 - 4011, 1997.
- [25] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability : A Robust Control Approach*. Springer-Verlag : Heidelberg, LNCIS, vol. 269, 2001.
- [26] P. Pepe, Z.-P. Jiang, *A Lyapunov-Krasovskii Methodology for ISS and iISS of Time-Delay Systems*. Systems and Control Letters, vol. 55, no. 12, pp. 1006-1014, 2006.
- [27] E.D. Sontag, *Input to State Stability : Basic Concepts and Results*. In *Nonlinear and Optimal Control Theory*, pp. 163-220, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [28] Xianfu Zhang, E.K. Boukas, Yungang Liu, L. Baron, *Asymptotic stabilization of high-order feedforward systems with delays in the input*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 20, pp. 1395-1406, 2010.

7 Useful inequalities

For all real numbers A, B and $\rho \in (0, +\infty)$ the inequality

$$(A + B)^2 \leq (1 + \rho)A^2 + (1 + \frac{1}{4\rho})B^2, \quad (7.1)$$

is satisfied. For all real numbers A, B and for all $\rho \in (0, 1)$, the inequality

$$(A + B)^2 \geq \rho A^2 - \frac{\rho}{1 - \rho} B^2 \quad (7.2)$$

is satisfied.

8 Technical lemma

Lemme 8.1. *Let κ be a function of class $\mathcal{K}_\infty$. Then, for all $A \geq 0, B \geq 0$,*

$$\kappa(A) + B \geq \kappa_s(A + B) \quad (8.1)$$

where

$$\kappa_s(m) = \min \left\{ \kappa\left(\frac{m}{2}\right), \frac{m}{2} \right\}. \quad (8.2)$$

Moreover, κ_s is a function of class $\mathcal{K}_\infty$.

Proof. Consider the case of constants $A \geq 0$ and $B \geq 0$ such that $A > B$. Then

$$\kappa(A) + B \geq \kappa(A) \geq \kappa\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \geq \kappa_s(A + B). \quad (8.3)$$

Consider the case of the constants $A \geq 0$ and $B \geq 0$ such that $A \leq B$. Then

$$\kappa(A) + B \geq B \geq \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \geq \kappa_s(A + B). \quad (8.4)$$

Now, $\kappa_s(0) = 0$ and $\lim_{m \rightarrow +\infty} \kappa_s(m) = +\infty$. Finally, we prove that κ_s is increasing. Let $m_1 \geq 0$ and $m_2 \geq 0$ be such that $m_1 > m_2$. Then $\kappa(\frac{m_1}{2}) > \kappa(\frac{m_2}{2})$. Therefore $\kappa(\frac{m_1}{2}) > \min\{\kappa(\frac{m_2}{2}), \frac{m_2}{2}\}$. Moreover, $\frac{m_1}{2} > \frac{m_2}{2} \geq \min\{\kappa(\frac{m_2}{2}), \frac{m_2}{2}\}$. We deduce that $\kappa_s(m_1) > \kappa_s(m_2)$.

9 Technical result

The analytic expression of U_3 is

$$\begin{aligned} U_3(\phi_x, \phi_Z) = & k\beta(\phi_x, \phi_Z)^2 + V(\phi_x(0)) + c_5 \int_{-\tau}^0 \int_{\ell}^0 \phi_Z(m)^2 dm d\ell \\ & + 6c_9 \int_{-\tau}^0 \int_{\ell}^0 W(\phi_x(m)) dm d\ell + \frac{c_7}{2} \int_{-\tau}^0 W(\phi_x(m)) dm + \frac{c_7}{2} \int_{-\tau}^0 \phi_Z(m)^2 dm. \end{aligned} \quad (9.1)$$

It follows that, for all functions $(\phi_x, \phi_Z) \in C_{\text{in}}$,

$$\begin{aligned} U_3(\phi_x, \phi_Z) &\leq k\beta(\phi_x, \phi_Z)^2 + V(\phi_x(0)) + (c_5\tau + \frac{c_7}{2}) \int_{-\tau}^0 \phi_Z(m)^2 dm \\ &\quad + (6c_9\tau + \frac{c_7}{2}) \int_{-\tau}^0 W(\phi_x(m)) dm . \end{aligned} \quad (9.2)$$

This allows us to conclude that there exists $c_{11} > 0$ such that, for all functions $(\phi_x, \phi_Z) \in C_{\text{in}}$, the inequality

$$\begin{aligned} c_{11}U_3(\phi_x, \phi_Z) &\leq \frac{1}{2}\beta(\phi_x, \phi_Z)^2 + V(\phi_x(0)) + \frac{c_7}{2}\phi_Z(0)^2 \\ &\quad + \tau^2 c_6 \int_{-\tau}^0 \phi_Z(m)^2 dm + c_9 \int_{-\tau}^0 W(\phi_x(m)) dm \end{aligned} \quad (9.3)$$

is satisfied.

End of the proof of Theorem 4.1

We first observe that the functional U_2 satisfies, for all functions $(\phi_x, \phi_Z) \in C_{\text{in}}$

$$\begin{aligned} U_2(\phi_x, \phi_Z) &= k[\phi_Z(0) + M(\phi_x, \phi_Z)]^2 + V(\phi_x(0)) + c_5 \int_{-\tau}^0 \int_{\ell}^0 \phi_Z(m)^2 dm d\ell \\ &\quad + 6c_5 c_3 \tau^2 \int_{-\tau}^0 \int_{\ell}^0 W(\phi_x(m)) dm d\ell . \end{aligned} \quad (9.4)$$

with

$$M(\cdot) = \int_{-\tau}^0 e^{-Lm} [-H(\phi_x(m), \phi_Z(m)) + L\phi_Z(m)] dm .$$

Next, using successively the inequality (7.2), Cauchy-Schwartz inequality and the inequality (7.1), we deduce that for all $\rho \in (0, 1)$ and for all functions $(\phi_x, \phi_Z) \in C_{\text{in}}$,

$$\begin{aligned} U_2(\phi_x, \phi_Z) &\geq V(\phi_x(0)) + k\rho\phi_Z(0)^2 - \frac{k\rho}{1-\rho} M(\phi_x, \phi_Z)^2 \\ &\geq V(\phi_x(0)) + k\rho\phi_Z(0)^2 - \frac{2k\tau\rho}{1-\rho} N(\phi_x, \phi_Z) . \end{aligned} \quad (9.5)$$

with

$$N(\cdot) = \int_{-\tau}^0 e^{-2Lm} [H(\phi_x(m), \phi_Z(m))^2 + L^2\phi_Z(m)^2] dm .$$

From the inequality (2.5) in Assumption H2, we deduce that

$$U_2(\phi_x, \phi_Z) \geq V(\phi_x(0)) + k\rho\phi_Z(0)^2 - \frac{2k\tau\rho}{1-\rho} O(\phi_x, \phi_Z) \quad (9.6)$$

with

$$O(\phi_x, \phi_Z) = \int_{-\tau}^0 e^{-2Lm} [(c_1|\phi_Z(m)| + G_1(\phi_x(m)))^2 + L^2\phi_Z(m)^2] dm .$$

Therefore

$$U_2(\phi_x, \phi_Z) \geq V(\phi_x(0)) + k\rho\phi_Z(0)^2 - \frac{2k\tau\rho}{1-\rho} e^{-2L\tau} P(\phi_x, \phi_Z) \quad (9.7)$$

with

$$P(\phi_x, \phi_Z) = \int_{-\tau}^0 [(2c_1^2 + L^2)\phi_Z(m)^2 + 2G_1(\phi_x(m))^2] dm .$$

From the inequality (2.7) in Assumption H2, we deduce that

$$\begin{aligned} U_3(\phi_x, \phi_Z) &\geq V(\phi_x(0)) + k\rho\phi_Z(0)^2 - \frac{2k\tau\rho}{1-\rho}e^{-2L\tau}Q(\phi_x, \phi_Z) \\ &\quad + \frac{c_7}{2} \int_{-\tau}^0 W(\phi_x(m))dm + \frac{c_7}{2} \int_{-\tau}^0 \phi_Z(m)^2 dm \end{aligned} \quad (9.8)$$

with

$$Q(\cdot) = \int_{-\tau}^0 [(2c_1^2 + L^2)\phi_Z(m)^2 + 2c_3W(\phi_x(m))]dm .$$

Therefore, selecting ρ sufficiently small, we obtain

$$U_3(\phi_x, \phi_Z) \geq V(\phi_x(0)) + k\rho\phi_Z(0)^2 . \quad (9.9)$$

Since V is positive definite and radially unbounded, there is a function κ_1 of class $\mathcal{K}_\infty$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) \geq \kappa_1(|x|)$ and next, from the inequality (9.9) and Lemma 8.1 in Appendix 8, we deduce that there exists a function κ_s of class $\mathcal{K}_\infty$ such that, for all functions $(\phi_x, \phi_Z) \in C_{\text{in}}$, the inequality

$$\kappa_s \left(\sqrt{|\phi_x(0)|^2 + \phi_Z(0)^2} \right) \leq U_3(\phi_x, \phi_Z) \quad (9.10)$$

is satisfied. Moreover, one can easily verify that there exists a function κ_l of class $\mathcal{K}_\infty$ such that, for all functions $(\phi_x, \phi_Z) \in C_{\text{in}}$, the inequality

$$U_3(\phi_x, \phi_Z) \leq \kappa_l(|(\phi_x, \phi_Z)|_{[-\tau, 0]}) \quad (9.11)$$

is satisfied. Finally, the inequality (3.26) implies that, for all $t \geq 0$, the inequality

$$\begin{aligned} \dot{U}_3(t) &\leq -\frac{c_7}{2}W(x(t)) - \frac{c_7}{2}Z(t)^2 - \beta(x_t, Z_t)^2 \\ &\quad - \tau^2 c_6 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm - c_5 c_3 \tau^2 \int_{t-\tau}^t W(x(m)) dm \end{aligned} \quad (9.12)$$

is satisfied. Since the function $-\frac{c_7}{2}W(x) - \frac{c_7}{2}Z^2$ is negative definite with respect to (x, Z) , the conditions of the Lyapunov-Krasovskii theorem are satisfied (see for instance [6], [17]). We deduce that the origin of the system (3.4) in closed-loop with the control (3.10) is globally asymptotically stable. Since Assumption H1 ensures that $z_s(0) = 0$, it follows that the origin of the system (2.1) in closed-loop with the control (3.2) is globally asymptotically stable.

Proof of Theorem 4.1

We consider the system (4.1) in closed-loop with the control (3.2) after the coordinate transformation $Z = z - z_s(x)$. We infer from the proof of Theorem 4.1 that the derivative of the Lyapunov functional U_3 defined in (3.29) along the trajectories of this system satisfies, for all $t \geq 0$, the inequality :

$$\begin{aligned} \dot{U}_3(t) &\leq -\frac{c_7}{2}W(x(t)) - \frac{c_7}{2}Z(t)^2 - \beta(x_t, Z_t)^2 - \tau^2 c_6 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm \\ &\quad - c_9 \int_{t-\tau}^t W(x(m)) dm + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t))g(x(t))w_1(t) \\ &\quad + 2k\beta(x_t, Z_t) \left[w_2(t) - \frac{\partial z_s}{\partial x}(x)w_1(t) \right] , \end{aligned} \quad (9.13)$$

where β is the functional given in (3.8) and $c_9 = \tau^2 c_5 c_3$. From (2.6) in Assumption H2 and (4.2), it follows that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}_3(t) \leq & -\frac{c_7}{2}W(x(t)) - \frac{c_7}{2}Z(t)^2 - \beta(x_t, Z_t)^2 \\ & - \tau^2 c_6 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm - c_9 \int_{t-\tau}^t W(x(m)) dm \\ & + \sqrt{c_2 W(x(t))} |w_1(t)| + 2k |\beta(x_t, Z_t)| [|w_2(t)| + c_8 |w_1(t)|] . \end{aligned} \quad (9.14)$$

Using Young's inequality, we deduce that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}_3(t) \leq & -\frac{c_7}{4}W(x(t)) - \frac{c_7}{2}Z(t)^2 - \frac{1}{2}\beta(x_t, Z_t)^2 - \tau^2 c_6 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm \\ & - c_9 \int_{t-\tau}^t W(x(m)) dm + \frac{c_2}{c_7} |w_1(t)|^2 + 2k^2 [|w_2(t)| + c_8 |w_1(t)|]^2 . \end{aligned} \quad (9.15)$$

Since both V and W are positive definite and radially unbounded, there exists a $\mathcal{K}_\infty$ function μ and of class C^1 such that for all $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{c_7}{4}W(x) \geq \mu(V(x)) . \quad (9.16)$$

From Lemma 8.1 in Appendix 8, we deduce that

$$\begin{aligned} \frac{c_7}{4}W(x(t)) + \frac{c_7}{2}Z(t)^2 + \frac{1}{2}\beta(x_t, Z_t)^2 + \tau^2 c_6 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm + c_9 \int_{t-\tau}^t W(x(m)) dm \\ \geq \mu_s(\psi(x_t, Z_t)) \end{aligned} \quad (9.17)$$

with the function $\mu_s(m) = \min\{\mu(\frac{m}{2}), \frac{m}{2}\}$, which is of class $\mathcal{K}_\infty$ and

$$\psi(x_t, Z_t) = V(x(t)) + \frac{c_7}{2}Z(t)^2 + \frac{1}{2}\beta(x_t, Z_t)^2 + \tau^2 c_6 \int_{t-\tau}^t Z(m)^2 dm + c_9 \int_{t-\tau}^t W(x(m)) dm .$$

We deduce that, for all $t \geq 0$,

$$\dot{U}_3(t) \leq -\mu_s(\psi(x_t, Z_t)) + c_{10}(|w_1(t)|^2 + w_2(t)^2) \quad (9.18)$$

with $c_{10} = \max\left\{\frac{c_2}{c_7} + 4k^2 c_8^2, 4k^2\right\}$. We show in Appendix 9 that there is a constant $c_{11} > 0$ such that, for all $t \geq 0$,

$$\dot{U}_3(t) \leq -\mu_s(c_{11}U_3(x_t, z_t)) + c_{10}(|w_1(t)|^2 + w_2(t)^2) . \quad (9.19)$$

It follows that U_3 is a ISS Lyapunov-Krasovskii functional (see [7], [26]). Using [7] or [26], we can complete the proof.

Chapitre 7

Practical stabilization of nonlinear systems with state-dependent sampling and retarded inputs

Abstract. A solution to the problem of stabilizing nonlinear systems with input with a constant pointwise delay and state-dependent sampling is proposed. It relies on a recursive construction of the sampling instants and on a recent variant of the classical reduction model approach. State feedbacks without distributed terms are obtained. A lower bound on the maximal allowable delay is determined via a Lyapunov-Krasovskii analysis.

1 Introduction

The importance of control problems of systems with sampled input and output is a well acknowledged fact in the control community. This importance is clearly explained in particular in [8], [17]. A large body of literature is devoted to these control problems as sampling significantly increases the complexity. A similar comment applies to systems with delay : for more information on systems with delay, see [10]. Consequently, some studies are devoted to systems that are affected both by sampling and delay. Most of them present results that rely on delay-dependent conditions [7], [18] and the very recent paper [9] presents, for a wide family of nonlinear systems, a new control strategy based on a predictor-based compensation of delays that allows to cope with arbitrarily large delays. Related methods have been employed in control systems under communication constraints to cope with sampling, quantization and delays (see e.g. [13, 3, 5]). The stabilizing control laws in [9] are given by expressions that incorporate past values of the controls. However, to the best of our

knowledge, no work addresses the problem of the stabilization of a system with delay in the inputs and state-dependent sampling. This problem, which is motivated by the fact that state-dependent sampling may potentially lead to a reduced sampling rate, is the one we address in the present work. Its difficulty arises from the fact that state-dependent sampling precludes the utilization of the classical reduction model approaches (see for instance [14], [1], [11]), even in the linear case. This leads us to use another technique : the main result we propose relies on the recent contribution [16]. Let us briefly recall its main features. The nonlinear system with delay

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + f_\tau(t - \tau, x(t - \tau))u(t - \tau), \quad (1.1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $\tau > 0$ is a pointwise delay and f and f_τ are globally Lipschitz functions, is considered. For it, a new strategy of design of stabilizing state feedbacks is presented. It consists of a variant of the reduction model approach. Two of its main desirable features are : (i) it leads to continuous globally asymptotically stabilizing control laws of the form $u(t, x(t - \tau))$ and (ii) it provides a Lyapunov-Krasovskii functional for the closed-loop system, from which some robustness properties can be derived. Its main limitation is that it applies only if suitable delay dependent conditions are satisfied.

The main result of the present work has both the advantages and the limitation of the main result of [16] we have mentioned. Another advantage of our approach is that it is based on a state-dependent sampling technique that avoids unnecessary samplings by taking into account the difference between the actual value of the sampled control and the value of the desired control. It is inspired by the quantized control problems studied in [4, 6, 12]. One can easily prove that systems of the family (1.1) cannot be asymptotically stabilized when it is used. However, we will determine control laws that globally *practically* stabilize the origin of the considered system, relative to the sampling period. In other words, we will determine control laws that render attractive a neighborhood of the origin whose size is proportional to the accuracy of the sampling.

The control design and the stability analysis for the closed-loop system we propose can be decomposed into three steps. In a first step, we give the analytic expression of the stabilizing control laws we consider and we describe the sampling procedure we adopt. In a second step, we prove that this control strategy results in a forward-complete system (see [10] for the definition of forward-complete system) for which there is no solution whose corresponding sequence of sampling times accumulate in finite time. In a third step, we prove the stability of the closed-loop system by revisiting the proof of the main result of [16]. This last step is needed because the stability analysis of [16] cannot be directly adapted to the closed-loop system we obtain because the sampling procedure introduces terms that preclude the use of the Lyapunov-Krasovskii functional provided in [16]. From the new Lyapunov-Krasovskii functional we construct, we will determine a lower bound on the maximal delay for which a feedback that is independent of the past values of the

inputs and globally practically stabilizes the system can be designed.

To the best of our knowledge, the result we propose is new, even when particularized to the family of the linear time-invariant systems and it does not seem to us that other techniques of control are more suitable than the one we adopt. We presume that the technique of [6], where we solved the problem of stabilizing a family of nonlinear systems with discontinuous retarded inputs by using a Lyapunov construction of the control laws that is reminiscent of ideas of the construction of [15], can be applied to solve the problem that is investigated in the present study. But we do not think that it would lead to a simpler or less conservative result.

The paper is organized as follows. Section 2 presents the control problem we consider. In Section 3, the sampling strategy and the control law are described and studied. The main result is stated and proved in Section 4. An illustration is given in Section 5. Concluding remarks in Section 6 end the paper.

Notation and definitions.

- Denote $|\cdot|$ the Euclidean norm of matrices and vectors of any dimension.
- Given $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ defined on an interval I , denote its (essential) supremum over I by $|\phi|_I$.
- Let p be any positive integer and τ be a positive real number. We denote C_{in} the set of all $\mathbb{R}^p$ -valued Lipschitz functions defined on a given interval $[-\tau, 0]$.
- For a continuous function $\xi : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$, for all $t \geq 0$, the function ξ_t defined by $\xi_t(m) = \xi(t + m)$ for all $m \in [-\tau, 0]$ is sometimes called translation operator.
- For any real number $\Delta > 0$, let $\Delta = \{i\Delta, i \in \mathbb{Z}\}$.
- The notations will be simplified whenever no confusion can arise from the context.

2 Particular control problem

We consider the nonlinear time-varying system

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + h(t - \tau, x(t - \tau))u(t_k - \tau), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (2.1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $u \in \mathbb{R}^p$ is the input, with $p = 1$ for the sake of simplicity, $\tau > 0$ is a constant delay and f and h are nonlinear Lipschitz system functions. The times t_k , with $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $t_0 := 0$, are the times at which a new zero-order control value is applied. The notation $u(t_k - \tau)$ refers to the fact that the (feedback) control value applied during the interval $[t_k, t_{k+1})$ depends on the state available at time $t_k - \tau$. The state is sampled at times $t_k - \tau$ and the corresponding control value is applied τ units of time later. Thus, the delay τ in $u(t_k - \tau)$ takes into account the difference between the time the control law is computed and the time it is actually applied (for instance due to the presence of a delayed communication channel). Having the same delay τ in u (due to computation and transmission) and h (due to the nature of the process to control) may be unrealistic. However, we observe that in those cases where the delay in h is larger than the one

in u , one can always introduce an artificial delay in u to match the difference. Although this may cause some loss of performance, it allows us to deal with the two sources of delays in a unified manner.

The problem we consider is to design a sequence of sampling times and a zero-order control law u that result in a practically stable closed-loop system. We solve it under the following assumptions :

Assumption 1. *There exist a continuously differentiable function $g(t, x)$ and a constant Hurwitz matrix L such that, for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \geq -\tau$, the equality*

$$\bar{f}(t, x) = e^{-L\tau} h(t, x) g(t, x) , \quad (2.2)$$

where

$$\bar{f}(t, x) = f(t, x) - Lx , \quad (2.3)$$

is satisfied.

Assumption 2. *There exists a real number $f_0 > 0$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\sup_{t \geq -\tau} |f(t, x)| \leq f_0 |x| , \quad (2.4)$$

$$\sup_{t \geq -\tau} |\bar{f}(t, x)| \leq f_0 |x| , \quad (2.5)$$

$$\sup_{t \geq -\tau} |h(t, x)| \leq f_0 (|x| + 1) . \quad (2.6)$$

Observe for later use that Assumption 1 implies that there is a symmetric and positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and a positive real number c such that the inequality

$$PL + L^\top P \leq -cP \quad (2.7)$$

holds. Let q_p denote the smallest eigenvalue of P . Notice for later use that $q_p > 0$. Let us introduce the constant

$$r_p = \frac{q_p}{|P|} . \quad (2.8)$$

In the next section we define sequences of sampling times and control values leading to practically stable systems.

3 State-dependent sampling and control generation

The sequence of sampling times is iteratively designed relying on the initial condition of the system and its response. The control value is initialized as a function of the initial condition of the system and when a function of the state exceeds certain thresholds, which depend on the current

control value, a new sampling time and a new control value are determined. We describe the process rigorously below.

Let Δ be an arbitrary positive constant and $\varphi \in C_{\text{in}}$ be the initial condition of a solution x of the system (2.1) such that $x(t) = \varphi(t)$ for all $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, where $t_0 = 0$. Let

$$\mathcal{B} = \max_{m \in [-\tau, 0]} |\varphi(m)| \quad (3.1)$$

and $\mathcal{C}$ be a constant such that, for all $(t_1, t_2) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$,

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \mathcal{C}|t_1 - t_2|. \quad (3.2)$$

First of all, identify that number $\mu_0 \in \Delta\mathbb{Z}$ such that

$$\mu_0 - \frac{\Delta}{2} \leq -g(t_0 - \tau, \varphi(t_0 - \tau)) < \mu_0 + \frac{\Delta}{2}$$

and set accordingly

$$u(t_0 - \tau) = \mu_0 \text{ if } \mu_0 - \frac{\Delta}{2} < -g(t_0 - \tau, \varphi(t_0 - \tau)) < \mu_0 + \frac{\Delta}{2}$$

and

$$u(t_0 - \tau) = \mu_0 - \frac{\Delta}{2} \text{ if } \mu_0 - \frac{\Delta}{2} = -g(t_0 - \tau, \varphi(t_0 - \tau))$$

Observe that, as a consequence of the design of $u(t_0 - \tau)$,

$$u(t_0 - \tau) - \frac{\Delta}{2} < -g(t_0 - \tau, \varphi(t_0 - \tau)) < u(t_0 - \tau) + \frac{\Delta}{2}. \quad (3.3)$$

The control value $u(t_0 - \tau)$ is applied during the interval $[t_0, t_1]$, where the time t_1 is a real number in $(t_0, \tau]$ that is equal to τ if

$$u(t_0 - \tau) - \frac{\Delta}{2} < -g(l - \tau, \varphi(l - \tau)) < u(t_0 - \tau) + \frac{\Delta}{2}$$

for all $l \in [0, \tau]$ or is such that

$$u(t_0 - \tau) - \frac{\Delta}{2} < -g(l - \tau, \varphi(l - \tau)) < u(t_0 - \tau) + \frac{\Delta}{2}, \forall l \in [0, t_1)$$

and either $u(t_0 - \tau) + \frac{\Delta}{2} = -g(t_1 - \tau, \varphi(t_1 - \tau))$ or $u(t_0 - \tau) - \frac{\Delta}{2} = -g(t_1 - \tau, \varphi(t_1 - \tau))$. Moreover, if the former equality holds, then we set $u(t_1 - \tau) = u(t_0 - \tau) + \frac{\Delta}{2}$, otherwise $u(t_1 - \tau) = u(t_0 - \tau) - \frac{\Delta}{2}$. The rest of the sampling times t_k and the values of u are defined similarly : given the increasing sequence of times $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ in $[0, \tau]$, with $k \geq 2$, the next time t_k

(i) does not belong to $[0, \tau]$ if $t_{k-1} = \tau$,

(ii) is τ if $t_{k-1} < \tau$ and for all $l \in [t_{k-1}, \tau]$,

$$u(t_{k-1} - \tau) - \frac{\Delta}{2} < -g(l - \tau, \varphi(l - \tau)) < u(t_{k-1} - \tau) + \frac{\Delta}{2}, \quad (3.4)$$

(iii) is the smallest value $r \in (t_{k-1}, \tau]$ such that either $u(t_{k-1} - \tau) + \frac{\Delta}{2} = -g(r - \tau, \varphi(r - \tau))$ or $u(t_{k-1} - \tau) - \frac{\Delta}{2} = -g(r - \tau, \varphi(r - \tau))$ if $t_{k-1} < \tau$ and (3.4) is not satisfied for all $l \in [t_{k-1}, \tau]$.

Then,

- in the case (ii), $u(t_k - \tau) = u(t_{k-1} - \tau)$,

- and in the case (iii),

$$u(t_k - \tau) = u(t_{k-1} - \tau) + \frac{\Delta}{2}$$

if $-g(t_k - \tau, \varphi(t_k - \tau)) = u(t_{k-1} - \tau) + \frac{\Delta}{2}$ and

$$u(t_k - \tau) = u(t_{k-1} - \tau) - \frac{\Delta}{2}$$

if $-g(t_k - \tau, \varphi(t_k - \tau)) = u(t_{k-1} - \tau) - \frac{\Delta}{2}$. Observe for later use that by construction, for all $t \in [t_{k-1}, t_k]$,

$$u(t_{k-1} - \tau) - \frac{\Delta}{2} < -g(t - \tau, \varphi(t - \tau)) < u(t_{k-1} - \tau) + \frac{\Delta}{2}. \quad (3.5)$$

Now, we give a technical result, which will be instrumental in proving that an accumulation in finite time of the t_k 's does not occur.

Lemme 3.1. *Assume that the system (2.1) satisfies Assumptions 1 and 2. Then, when the control constructed above is applied, there is a finite number ℓ_0 of times t_k in $[0, \tau)$.*

Démonstration. The proof is omitted. □

Let us establish the following fact, which will allow us to prove by induction the forward-completeness of the closed-loop system we consider.

Lemme 3.2. *Assume that the system (2.1) satisfies Assumptions 1 and 2. Then, when the control constructed above is applied, the solution $x(t)$ exists for all $t \in [-\tau, \tau]$ and is globally Lipschitz on $[-\tau, \tau]$.*

Démonstration. To begin with, we prove that $x(t)$ exists over $[0, \tau]$, $\mathcal{X}_1 := \max_{t \in [0, \tau]} |x(t)|$ is finite and there exists a constant $\mathcal{X}_2$ such that, for all $t_1 \in [0, \tau]$, $t_2 \in [0, \tau]$,

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \mathcal{X}_2 |t_1 - t_2|.$$

From Lemma 3.1, we deduce that $[0, \tau] = \cup_{i=0}^{\ell_0-1} [t_i, \min\{\tau, t_{i+1}\}]$. Let $t \in [0, \tau]$ be such that $x(\cdot)$ is defined over $[-\tau, t)$. Let $k \in \{0, \dots, \ell_0 - 1\}$ be such that $t \in [t_k, t_{k+1})$. Bearing Assumptions 1 and 2 in mind, and using the Lyapunov function $S(x) = x^\top x$, we deduce through elementary calculations that for $l \in [t_k, t)$, we have the bound

$$S(x(l)) \leq e^{4f_0(t-t_k)} S(x(t_k)) + \frac{1}{2} f_0^2 (t - t_k) e^{4f_0(t-t_k)} (\mathcal{B} + 1)^2 |u(t_k - \tau)|^2,$$

with $\mathcal{B}$ defined in (3.1).

From this property, we deduce that $x(t)$ is defined for all $t \in [t_k, \min\{\tau, t_{k+1}\})$ and bounded. Hence, for all $t \in [0, \tau]$ the solution $x(t)$ exists, is bounded and satisfies, at each instant t ,

$$|x(t)| \leq \sqrt{2}e^{2f_0\tau}|x(t_k)| + f_0\sqrt{\tau}e^{2f_0\tau}(\mathcal{B} + 1)|u(t_k - \tau)|$$

for some integer $k \in \{0, 1, \dots, \ell_0 - 1\}$, $\ell_0 \geq 1$. Moreover, whenever $\dot{x}(t)$ exists,

$$|\dot{x}(t)| = |f(t, x(t)) + h(t - \tau, x(t - \tau))u(t_k - \tau)|,$$

which, in combination with Assumption 2, implies that

$$|\dot{x}(t)| \leq f_0|x(t)| + f_0|x(t - \tau)||u(t_k - \tau)|.$$

Therefore there exists a constant $\mathcal{X}_3 > 0$ such that

$$|\dot{x}(t)| \leq \mathcal{X}_3,$$

for all $t \in [0, \tau)$ such that there is no integer k such that $t = t_k$. We deduce that the restriction of $x(\cdot)$ to the interval $[0, \tau]$ is a Lipschitz function. We easily deduce that the restriction of $x(\cdot)$ to the interval $[-\tau, \tau]$ is a Lipschitz function. $\square$

We can now iterate. Assume that, for an integer $j \geq 1$ the numbers t_k are defined over $[0, (j + 1)\tau]$, the feedback u is defined over $[0, j\tau]$ and the solution $x(t)$ is defined over $[-\tau, (j + 1)\tau]$ and Lipschitz over this interval. Then we can define values t_k over $[0, (j + 1)\tau]$, u over $[0, (j + 1)\tau]$ using the constructions above and that way obtain a corresponding solution $x(t)$ defined over $[-\tau, (j + 2)\tau]$, which, according to Lemma 3.2, is Lipschitz over $[j\tau, (j + 1)\tau]$. We easily deduce that it is Lipschitz over $[-\tau, (j + 1)\tau]$.

Observe that, as a consequence of this construction, no accumulation in finite time of the sampling times t_k is possible and the solution $x(t)$ of (2.1) starting from the initial condition $\varphi \in C_{\text{in}}$ exists for all $t \geq 0$. The asymptotic behavior of the solution is studied in the next section.

4 Main result

In this section, we give the main result of our work, which requires the following extra assumption :

Assumption 3. *The delay $\tau > 0$ satisfies the inequalities*

$$\begin{aligned} \tau &\leq \frac{1}{|L|} \ln \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{|L|}{2} \sqrt{\frac{r_p}{f_0}}} \right), \\ \tau &\leq \frac{\sqrt{r_p}}{\sqrt{2}f_0 \sqrt{5 + \left(1 + \sqrt{1 + 2|L| \sqrt{\frac{r_p}{f_0} + \frac{c\sqrt{r_p}}{4f_0}}}\right)^2}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

where f_0 , L are the constant and matrix introduced in Assumptions 1 and 2, P is the matrix introduced in Section 2 and r_p is the constant defined in (2.8).

The constant $\Delta > 0$ satisfies the inequality

$$\Delta \leq \frac{c\sqrt{r_p}}{4f_0} . \quad (4.2)$$

We state and prove the following result :

Théorème 4.1. *Consider the system (2.1). Assume that it satisfies Assumptions 1 to 3. Then there exists a real number $w > 0$ (independent of Δ and τ) such that all the solutions with initial conditions in C_{in} of the system (2.1) in closed-loop with the control law defined in Section 3 enter the set $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq w\Delta\}$ and stay in it thereafter.*

Discussion of Theorem 4.1.

- (i) Discussions on the important Assumption 1 are given in [16].
- (ii) If we consider the particular case of the linear time-invariant systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t_k - \tau)$$

where A and B are constant matrices, then Assumption 1 is satisfied if and only if there exist matrices M and L so that

$$A - L = e^{-\tau L} B M . \quad (4.3)$$

Moreover Assumption 2 is automatically satisfied and Assumption 3 is satisfied for sufficiently small values of τ and Δ . Detailed discussions about the solutions of the matrix equation (4.3) are given in [16]. From them, we deduce that Theorem 4.1 applies to a rather large family of linear systems.

(iii) For the sake of simplicity, we did not address the case where the system (2.1) is subject to additive disturbances. However, Theorem 4.1 can be adapted to this case by combining the proof we give below and the one of Theorem 2 in [16]. As explained in the paper, this result can be used for instance to apply the technique when only an approximate solution of the matrix equation (4.3) can be found.

(iv) The proof of Theorem 4.1 provides an explicit expression for the constant w .

(v) In contrast to [16], in the present paper we do not address the problem of determining positive solutions for the closed-loop system. From the forthcoming proof, it appears that this problem does not admit a solution similar to the one presented in [16]. However, it is possible that constructions of sampled feedbacks different from the one of Section 3 may lead to closed-loop systems for which positive solutions may be exhibited. This may be the subject of future studies.

(vi) For reasons explained in [16] and [18], the growth conditions imposed in Assumption 2 cannot be removed without being replaced by another assumption that prevents the finite escape time phenomenon from happening.

(vii) The requirement (4.1) can be relaxed by using the fact that, for any invertible matrix R , the matrix L satisfies the equality $L = RGR^{-1}$ with $G = R^{-1}LR$ and then arguing as in [16]. For the sake of simplicity, we do consider the requirement (4.1) only.

(viii) Increasing Δ leads to a slower sampling rate (see for instance rule (iii) before Lemma 3.1 and, for a more explicit statement, Remark 1 after the proof of Theorem 4.1) and reduces the accuracy of the stability induced by the controller.

Démonstration. To begin with, we observe that the arguments of Section 3 ensure that, under the standing assumptions, the solutions of (2.1) are defined over $[-\tau, +\infty)$ i.e. the system (2.1) is forward-complete.

Since we select the increasing sequence of times t_k and the feedback defined in Section 3 and Assumption 1 is satisfied, the system (2.1) can be rewritten as :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Lx(t) + h(t - \tau, x(t - \tau))u(t_k - \tau) \\ &\quad + e^{-L\tau}h(t, x(t))g(t, x(t)) , \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.4)$$

and as

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) - e^{L\tau}\bar{f}(t - \tau, x(t - \tau)) \\ &\quad + h(t - \tau, x(t - \tau))[u(t_k - \tau) + g(t - \tau, x(t - \tau))] , \\ &\quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Both the representations (4.4) and (4.5) will be useful. Next, to ease our analysis, we introduce the operator $\varsigma : \mathbb{R} \times C_{\text{in}} \mapsto \mathbb{R}^n$,

$$\varsigma(t, \phi) = \phi(0) - \int_{-\tau}^0 e^{L(-\ell-\tau)}h(\ell + t, \phi(\ell))g(\ell + t, \phi(\ell))d\ell \quad (4.6)$$

and the simplifying notation

$$s(t) = \varsigma(t, x_t) \quad (4.7)$$

where x is any solution of (4.4). Then the equality

$$x(t) = s(t) + \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell-\tau)}h(\ell, x(\ell))g(\ell, x(\ell))d\ell \quad (4.8)$$

is satisfied for all $t \geq 0$ and, for all t such that it does not exist an integer m such that $t = t_m$,

$$\dot{s}(t) = Ls(t) + h(t - \tau, x(t - \tau))[u(t_k - \tau) + g(t - \tau, x(t - \tau))] . \quad (4.9)$$

If the term $h(t - \tau, x(t - \tau))[u(t_k - \tau) + g(t - \tau, x(t - \tau))]$ was not present in (4.9) or was satisfying Assumption H4 in [16], then the equations (4.8), (2.8), with the help of the main result of [16],

would lead straightforwardly to a strict Lyapunov-Krasovskii functional for the closed-loop system. However, the presence of the term $h(t - \tau, x(t - \tau)) [u(t_k - \tau) + g(t - \tau, x(t - \tau))]$ forces us to conduct another construction of Lyapunov-Krasovskii functional because this term does not satisfy Assumption H4 in [16].

In what follows, whenever we take the derivatives of functions depending explicitly on $s(t)$ and/or $x(t)$, these derivatives must be intended to hold everywhere except at the times t_k , where the functions are only continuous. This is enough to infer our conclusions.

The first part of our construction consists in determining the derivative along the trajectories of the closed-loop system of several functionals. First we notice that the derivative of the nonnegative functional $Q_0 : \mathbb{R} \times C_{\text{in}} \mapsto \mathbb{R}$,

$$Q_0(t, \phi) = \varsigma(t, \phi)^\top P \varsigma(t, \phi) , \quad (4.10)$$

where $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the matrix in (2.7), along the trajectories of (4.4) satisfies, for a.e. $t \geq 0$,

$$\dot{Q}_0(t) \leq -cQ_0(t, x_t) + 2s(t)^\top Ph(t - \tau, x(t - \tau)) [u(t_k - \tau) - g(t - \tau, x(t - \tau))] . \quad (4.11)$$

Recall that the control value $u(t_k - \tau)$ and the sampling time t_k satisfy (3.5). It follows that

$$-\frac{\Delta}{2} < u(t_k - \tau) + g(t - \tau, \varphi(t - \tau)) < \frac{\Delta}{2} \quad (4.12)$$

for all $t \in [t_k, t_{k+1})$. Hence, for $t \in [t_k, t_{k+1})$,

$$|u(t_k - \tau) + g(t - \tau, x(t - \tau))| \leq \frac{\Delta}{2} . \quad (4.13)$$

Since there is a symmetric positive definite matrix $P^{\frac{1}{2}}$ such that $P = P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}$, from the triangle inequality and (4.13), it follows that

$$\dot{Q}_0(t) \leq -\frac{1}{2}cQ_0(t, x_t) + \frac{1}{c}|P||h(t - \tau, x(t - \tau))|^2 \frac{\Delta^2}{4} . \quad (4.14)$$

From (2.6) in Assumption 2, we deduce that

$$\dot{Q}_0(t) \leq -\frac{c}{2}Q_0(t, x_t) + \frac{|P|}{c}f_0^2(|x(t - \tau)| + 1)^2 \frac{\Delta^2}{4} . \quad (4.15)$$

From the inequalities $(|x(t - \tau)| + 1)^2 \leq 2(|x(t - \tau)|^2 + 1) \leq 2\left(\frac{1}{q_p}x(t - \tau)^\top Qx(t - \tau) + 1\right)$, it follows that

$$\dot{Q}_0(t) \leq -\frac{c}{2}Q_0(t, x_t) + \frac{\Delta^2}{2cr_p}f_0^2Q_1(x(t - \tau)) + \frac{|P|}{2c}f_0^2\Delta^2 , \quad (4.16)$$

where r_p is the constant defined in (2.8) and Q_1 is the quadratic function

$$Q_1(x) = x^\top Px , \quad (4.17)$$

which is positive definite because P is symmetric and positive definite.

Next, using (4.5), we deduce that, for all $t \in [t_k, t_{k+1})$,

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1(t) &= 2x(t)^\top P [f(t, x(t)) - e^{L\tau} \bar{f}(t - \tau, x(t - \tau))] \\ &+ 2x(t)^\top P [h(t - \tau, x(t - \tau)) [u(t_k - \tau) + g(t - \tau, x(t - \tau))]] . \end{aligned} \quad (4.18)$$

From Assumption 2 and (4.13), we deduce that

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1(t) &\leq 2|x(t)^\top P| [f_0|x(t)| + f_0 e^{L|\tau|} |x(t - \tau)|] \\ &+ 2|x(t)^\top P| f_0 (|x(t - \tau)| + 1) \frac{\Delta}{2} . \end{aligned} \quad (4.19)$$

By reorganizing the terms and using the inequality $P \geq q_p Id$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{r_p}{2f_0} \dot{Q}_1(t) &\leq Q_1(x(t)) + (e^{L|\tau|} + \frac{\Delta}{2}) \sqrt{Q_1(x(t))} \sqrt{Q_1(x(t - \tau))} \\ &+ \sqrt{Q_1(x(t))} \frac{\sqrt{q_p} \Delta}{2} . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Using the triangle inequality, we obtain

$$\frac{r_p}{2f_0} \dot{Q}_1(t) \leq 2Q_1(x(t)) + (e^{L|\tau|} + \frac{\Delta}{2})^2 Q_1(x(t - \tau)) + \frac{q_p \Delta^2}{4} . \quad (4.21)$$

Next, we consider the functional $Q_2 : C_{\text{in}} \mapsto \mathbb{R}$,

$$Q_2(\phi) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \left(\int_m^0 Q_1(\phi(\ell)) d\ell \right) dm + \int_{-\tau}^0 Q_1(\phi(\ell)) d\ell . \quad (4.22)$$

It is nonnegative and, for all $t \geq 0$, $Q_2(x_t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\int_m^t Q_1(x(\ell)) d\ell \right) dm + \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell$. It follows that

$$\dot{Q}_2(t) = 2Q_1(x(t)) - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell - Q_1(x(t - \tau)) . \quad (4.23)$$

Next, we observe that, it follows from (4.8) and Assumption 1 that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q_1(x(t)) &= \left(s(t) + \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell)} \bar{f}(\ell, x(\ell)) d\ell \right)^\top \times P \left(s(t) + \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell)} \bar{f}(\ell, x(\ell)) d\ell \right) \\ &= s(t)^\top P s(t) + 2s(t)^\top P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell)} \bar{f}(\ell, x(\ell)) d\ell \\ &+ \left(\int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell)} \bar{f}(\ell, x(\ell)) d\ell \right)^\top P \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell)} \bar{f}(\ell, x(\ell)) d\ell . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Using the triangle inequality, we obtain

$$\begin{aligned} Q_1(x(t)) &\leq 2s(t)^\top P s(t) \\ &+ 2 \left(\int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell)} \bar{f}(\ell, x(\ell)) d\ell \right)^\top P \int_{t-\tau}^t e^{L(t-\ell)} \bar{f}(\ell, x(\ell)) d\ell . \end{aligned} \quad (4.25)$$

From (2.5) in Assumption 2, it follows that, for all $t \geq 0$,

$$Q_1(x(t)) \leq 2Q_0(t, x_t) + 2|P| e^{2L|\tau|} f_0^2 \left(\int_{t-\tau}^t |x(\ell)| d\ell \right)^2 . \quad (4.26)$$

Using successively the Cauchy-Schwartz inequality and $q_p Id \leq P$, we deduce that, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q_1(x(t)) &\leq 2Q_0(t, x_t) + 2|P| f_0^2 e^{2L|\tau|} \tau \int_{t-\tau}^t |x(\ell)|^2 d\ell \\ &\leq 2Q_0(t, x_t) + \frac{2}{r_p} f_0^2 e^{2L|\tau|} \tau \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell . \end{aligned} \quad (4.27)$$

So, to summarize, we have, for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\dot{Q}_0(t) &\leq -\frac{c}{2}Q_0(t, x_t) + \frac{\Delta^2}{2cr_p}f_0^2Q_1(x(t-\tau)) + \frac{|P|}{2c}f_0^2\Delta^2, \\ \dot{Q}_1(t) &\leq \frac{4f_0}{r_p}Q_1(x(t)) + \frac{2f_0}{r_p}\left(e^{|L|\tau} + \frac{\Delta}{2}\right)^2Q_1(x(t-\tau)) + |P|f_0\frac{\Delta^2}{2}, \\ \dot{Q}_2(t) &= 2Q_1(x(t)) - \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell))d\ell - Q_1(x(t-\tau)), \\ Q_1(x(t)) &\leq 2Q_0(t, x_t) + \frac{2f_0^2}{r_p}e^{2|L|\tau}\tau\int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell))d\ell.\end{aligned}\tag{4.28}$$

These inequalities lead us to consider the functional $U : \mathbb{R} \times C_{\text{in}} \mapsto \mathbb{R}$,

$$U(t, \phi) = Q_0(t, \phi) + \frac{a_1}{|P|f_0}Q_1(\phi(0)) + a_2Q_2(\phi),\tag{4.29}$$

where a_1 and a_2 are positive real numbers to be selected later. According to the inequalities in (4.28), for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\dot{U}(t) &\leq -\frac{c}{2}Q_0(t, x_t) + \frac{f_0^2\Delta^2}{2cr_p}Q_1(x(t-\tau)) + \frac{|P|f_0^2}{2c}\Delta^2 + \frac{4a_1}{q_p}Q_1(x(t)) \\ &\quad + \frac{2a_1}{q_p}b_1Q_1(x(t-\tau)) + a_1\frac{\Delta^2}{2} + 2a_2Q_1(x(t)) - \frac{a_2}{\tau}\int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell))d\ell - a_2Q_1(x(t-\tau)),\end{aligned}\tag{4.30}$$

with $b_1 = \left(e^{|L|\tau} + \frac{\Delta}{2}\right)^2$. Due to space limitation, we omit the choices and the calculations that lead to the inequality

$$\dot{U}(t) \leq -b_8U(t, x_t) + b_2\Delta^2,\tag{4.31}$$

with

$$b_8 = \min\left\{\frac{c}{8}, \frac{f_0}{r_p}, \frac{f_0|P|}{b_7}\right\}.$$

It follows that there exists $T \geq 0$ such that, for all $t \geq T$,

$$U(t, x_t) \leq 2\frac{b_2}{b_8}\Delta^2.\tag{4.32}$$

From the definition of U , we deduce that, for all $t \geq T$,

$$q_p|x(t)|^2 \leq Q_1(x(t)) \leq 2\frac{|P|f_0b_2}{a_1b_8}\Delta^2.\tag{4.33}$$

It follows that

$$|x(t)| \leq w\Delta,\tag{4.34}$$

for all $t \geq T$, with

$$w = \sqrt{\frac{2f_0b_2}{r_p a_1 b_8}}.$$

Observing that the constants present in the formula of w are independent from τ and Δ , we deduce that w is independent from τ and Δ . This allows us to conclude.

Remarque 1. *From the proof of Theorem 4.1 and Lemmas 3.1 and 3.2 we can obtain, through lengthy but simple calculations, an upper bound for the sampling rate over each interval $[j\tau, (j+1)\tau]$. In the special case of time-invariant systems, these bounds do not depend explicitly on the time.*

□

5 Illustration

To illustrate Theorem 4.1, we consider the one-dimensional system

$$\dot{x}(t) = \sin(x(t)) + u(t_k - \tau) . \quad (5.1)$$

Then, using the notation of Section 2, Assumption 1 is satisfied with $L = -1$, $P = \frac{1}{2}$ and

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, x) &= \sin(x) + x , \\ h(t, x) &= 1 , \quad g(t, x) = e^{-\tau}(\sin(x) + x) . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Moreover, $c = 1$ and Assumption 2 is satisfied with $f_0 = 2$. Finally, Assumption 3 is satisfied with

$$\Delta = \frac{1}{8\sqrt{2}} , \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{22}\sqrt{5 + \left(\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \frac{9}{8}\right)^2}} \quad (5.3)$$

and therefore Theorem 4.1 applies to (5.1) when the two equalities in (5.3) are satisfied.

6 Conclusion

We have established a result of global practical stabilization for a family of nonlinear time-varying systems with state-dependent sampling and delay in the inputs. In further studies, we shall consider other types of discontinuous systems, which in particular include systems in feedback form and feedforward systems. Moreover, for the sake of simplicity, in this paper we have assumed that the input is scalar, the sampling is driven by a function of the state and the delay is constant. The case of multi-input systems in which the sampling depends on any component of the state (independently of the others) and the delays are time-varying represents an interesting extension.

Bibliographie

- [1] Z. Artstein, *Linear systems with delayed controls : A reduction*. IEEE Trans. Aut. Contr., AC-27, pp. 869-879, 1982.
- [2] F. Ceragioli, C. De Persis, P. Frasca, *Discontinuities and hysteresis in quantized average consensus*. Automatica, vol. 47, pp. 1916-1928, 2011.
- [3] C. De Persis. *On stabilization of nonlinear systems under data rate constraints using output measurements*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 16 (6), 315-332, 2006.
- [4] C. De Persis. *Robust stabilization of nonlinear systems by quantized and ternary control*. Systems & Control Letters, 58 (8) : pp. 602–608, 2009.
- [5] C. De Persis. *Minimal data rate stabilization of nonlinear systems over networks with large delays*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 20 (10), 1097-1111, 2010.
- [6] C. De Persis, F. Mazenc, *Stability of quantized time-delay nonlinear systems : A Lyapunov-Krasovskii-functional approach*. Mathematics of Control, Signals, and Systems, vol. 21, Issue 4, pp. 337-370, 2010.
- [7] H. Gao, T. Chen, J. Lam, *A new delay system approach to network-based control*. Automatica, vol. 44, pp. 39-52, 2008.
- [8] I. Karafyllis, C. Kravaris, *Robust global stabilisability by means of sampled-data control with positive sampling rate*. International Journal of Control, vol. 82, No. 2, April 2009, pp. 755-772.
- [9] I. Karafyllis, M. Krstic, *Nonlinear Stabilization under Sampled and Delayed Measurements, and with Inputs Subject to Delay and Zero-Order Hold*. Submitted, arXiv :1012.2316v1 [math.OC].
- [10] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser, Boston, 2009.
- [11] W.H. Kwon, A.E. Pearson, *Feedback stabilization of linear systems with delayed control*. IEEE Trans. Aut. Contr., AC-25 (2), pp. 266-269, 1980.
- [12] D. Liberzon. *Quantization, time delays, and nonlinear stabilization*. IEEE Trans. Aut. Contr. 51 (7), pp. 1190-1195, 2006.

- [13] D. Liberzon and J.P. Hespanha, *Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback*. IEEE Trans. Aut. Contr. 50 (6), pp. 910-915, 2005.
- [14] D.Q. Mayne, *Control of linear systems with time delay*. Electronics Letters, vol. 4. No. 20, 4th October 1968.
- [15] F. Mazenc, P.A. Bliman, *Backstepping Design for Time-Delay Nonlinear Systems*. IEEE Trans. on Aut. Contr., vol. 51, no.1, pp. 149-154, Jan. 2006.
- [16] F. Mazenc, S.I. Niculescu, *Generating Positive and Stable Solutions through Delayed State Feedback*. Automatica, vol. 47, pp. 525-533, 2011.
- [17] S. Monaco, D. Normand-Cyrot, *Issues on Nonlinear Digital Control*. European Journal of Control, vol. 7, pp. 160-177, 2011.
- [18] M. Yu, L. Wang, T. Chu, F. Hao, *Stabilization of Networked Control Systems with Data Packet Dropout and Transmission Delays : Continuous-Time Case*. European Journal of Control, vol. 11, pp. 40-49, 2005.

of Lemma 3.1

Without loss of generality, we can restrict our attention to the case $\ell_0 \geq 4$ (if $\ell_0 < 4$, ℓ_0 is finite). Observe for later use that this assumption and Assumption 1 on the function g imply that the constant

$$\mathcal{G}_M := \max_{m \in [-\tau, 0], |\xi| \leq \mathcal{B}} \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial x}(m, \xi) \right| \right\} \mathcal{C} + \max_{m \in [-\tau, 0], |\xi| \leq \mathcal{B}} \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial t}(m, \xi) \right| \right\}, \quad (6.1)$$

with $\mathcal{B}$ defined in (3.1) and $\mathcal{C}$ the Lipschitz constant of φ , is a well-defined nonnegative real number.

Next, we determine a lower bound on $t_m - t_{m-1}$ where $m \in \{2, \dots, \ell_0 - 2\}$. Since $m - 1 > 0$ and $m < \ell_0 - 1$, we know that, necessarily, both t_{m-1} and t_m are defined by (iii) and therefore

$$\begin{aligned} |u(t_m - \tau) - u(t_{m-1} - \tau)| &= \frac{\Delta}{2}, \\ u(t_m - \tau) &= -g(t_m - \tau, \varphi(t_m - \tau)), \\ u(t_{m-1} - \tau) &= -g(t_{m-1} - \tau, \varphi(t_{m-1} - \tau)). \end{aligned}$$

It follows that

$$|g(t_m - \tau, \varphi(t_m - \tau)) - g(t_{m-1} - \tau, \varphi(t_{m-1} - \tau))| = \frac{\Delta}{2}. \quad (6.2)$$

On the other hand, since, for all $a \in [-\tau, 0]$, $b \in [-\tau, 0]$,

$$\begin{aligned} |g(a, \varphi(a)) - g(b, \varphi(b))| &\leq |g(a, \varphi(a)) - g(a, \varphi(b))| + |g(a, \varphi(b)) - g(b, \varphi(b))| \\ &\leq \max_{|\xi| \leq \mathcal{B}} \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial x}(a, \xi) \right| \right\} \mathcal{C} |a - b| \\ &\quad + \max_{m \in [a, b], |\xi| \leq \mathcal{B}} \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial t}(m, \xi) \right| \right\} |a - b| \end{aligned} \quad (6.3)$$

and $t_{m-1} \in [t_0, t_0 + \tau]$, $t_m \in [t_0, t_0 + \tau]$, we deduce that

$$|g(t_m - \tau, \varphi(t_m - \tau)) - g(t_{m-1} - \tau, \varphi(t_{m-1} - \tau))| \leq (t_m - t_{m-1}) \mathcal{G}_M \quad (6.4)$$

with $\mathcal{G}_M$ defined in (6.1). Combining (6.2) and (6.4), we obtain

$$(t_m - t_{m-1})\mathcal{G}_M \geq \frac{\Delta}{2} . \quad (6.5)$$

We deduce that

$$t_m - t_{m-1} \geq \frac{\Delta}{2(\mathcal{G}_M + 1)} . \quad (6.6)$$

Since, for all $l \in \{1, \dots, \ell_0 - 3\}$, $[t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_l, t_{l+1}]$, is included in $[t_0, t_0 + \tau]$, we deduce that

$$(t_2 - t_1) + \dots + (t_{l+1} - t_l) \leq (t_0 + \tau) - t_0 = \tau \quad (6.7)$$

for all $l \in \{1, \dots, \ell_0 - 3\}$. From (6.6), we deduce that

$$l \leq \tau \frac{2(\mathcal{G}_M + 1)}{\Delta} \quad (6.8)$$

for all $l \in \{1, \dots, \ell_0 - 3\}$. It follows that necessarily ℓ_0 is a finite integer.

Extra part of the proof of Theorem 4.1

Choosing

$$a_2 = \frac{\Delta^2}{2cr_p} f_0^2 + \frac{2a_1}{q_p} b_1 \quad (6.9)$$

and reorganizing the terms, we obtain, for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) \leq & -\frac{c}{2} Q_0(t, x_t) - \frac{a_1}{q_p} Q_1(x(t)) + \left[\frac{5a_1}{q_p} + \frac{f_0^2 \Delta^2}{cr_p} + \frac{4a_1 b_1}{q_p} \right] Q_1(x(t)) \\ & - \frac{a_2}{\tau} \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell + b_2 \Delta^2 , \end{aligned} \quad (6.10)$$

with

$$b_2 = \frac{|P|f_0^2}{2c} + \frac{a_1}{2} .$$

Using the last inequality in (4.28), we deduce that, for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) \leq & \left[-\frac{c}{2} + 2 \left(\frac{5a_1}{q_p} + \frac{|P|\Delta^2}{cq_p} f_0^2 + \frac{4a_1 b_1}{q_p} \right) \right] Q_0(t, x_t) \\ & - \frac{a_1}{q_p} Q_1(x(t)) - \frac{|P|f_0}{q_p \tau} b_3 \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell + b_2 \Delta^2 , \end{aligned} \quad (6.11)$$

with

$$\begin{aligned} b_3 = & -2 \left[\frac{5a_1}{q_p} + \frac{\Delta^2}{cr_p} f_0^2 + \frac{4a_1 b_1}{q_p} \right] \\ & f_0 e^{2|L|\tau} \tau^2 + \frac{\Delta^2}{2c} f_0 + \frac{2a_1}{|P|f_0} e^{2|L|\tau} . \end{aligned}$$

From (4.2) it follows that $2 \frac{|P|\Delta^2}{cq_p} f_0^2 \leq \frac{c}{8}$. Using this inequality, we obtain, for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) \leq & \left[-\frac{3c}{8} + \frac{2a_1}{q_p} (5 + 4b_1) \right] Q_0(t, x_t) \\ & - \frac{a_1}{q_p} Q_1(x(t)) - \frac{f_0 b_3}{r_p \tau} \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell + b_2 \Delta^2 . \end{aligned} \quad (6.12)$$

By grouping the terms, we obtain

$$b_3 = 2a_1 e^{2|L|\tau} \left[-5 \frac{f_0}{q_p} \tau^2 - \frac{4f_0 b_1}{q_p} \tau^2 + \frac{1}{|P|f_0} \right] + \frac{\Delta^2 f_0}{2c} \left[-\frac{4}{r_p} f_0 e^{2|L|\tau} \tau^2 + 1 \right].$$

The first inequality in (4.1) implies that $-\frac{4}{r_p} f_0 e^{2|L|\tau} \tau^2 + 1 \geq 0$. We deduce that, for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &\leq \left[-\frac{3c}{8} + \frac{2a_1}{q_p} (5 + 4b_1) \right] Q_0(t, x_t) - \frac{a_1}{q_p} Q_1(x(t)) \\ &\quad - \frac{2a_1}{q_p \tau} e^{2|L|\tau} b_4 \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell + b_2 \Delta^2, \end{aligned} \quad (6.13)$$

with

$$b_4 = 1 - \frac{f_0^2}{r_p} (5 + 4b_1) \tau^2.$$

From the first inequality in (4.1) and (4.2), we deduce that

$$\begin{aligned} b_1 &\leq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{|L|}{2} \sqrt{\frac{r_p}{f_0}} + \frac{c\sqrt{r_p}}{8f_0}} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{|L|}{2\sqrt{f_0}} + \frac{c}{8f_0}} \right)^2 \\ &\leq \left(2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{|L|}{2\sqrt{f_0}}} + \frac{c}{8f_0} \right)^2 \end{aligned}$$

and therefore

$$b_1 \leq 2 + \frac{4|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{32f_0^2}.$$

It follows that, for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &\leq \left[-\frac{3c}{8} + \frac{2a_1}{q_p} \left(13 + \frac{16|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{8f_0^2} \right) \right] Q_0(t, x_t) \\ &\quad - \frac{a_1}{q_p} Q_1(x(t)) - \frac{2}{q_p \tau} a_1 e^{2|L|\tau} b_5 \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell + b_2 \Delta^2, \end{aligned} \quad (6.14)$$

with

$$b_5 = 1 - \frac{1}{r_p} \left(13f_0^2 + 16|L|f_0\sqrt{f_0} + \frac{c^2}{8} \right) \tau^2.$$

Choosing

$$a_1 = \frac{cq_p}{104 + \frac{128|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{f_0^2}}$$

and noticing that (4.1) implies that $b_4 \geq \frac{1}{2}$, we obtain, for a.e. $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &\leq -\frac{c}{8} Q_0(t, x_t) - \frac{a_1}{q_p} Q_1(x(t)) \\ &\quad - \frac{f_0 a_1}{r_p \tau} \int_{t-\tau}^t Q_1(x(\ell)) d\ell + b_2 \Delta^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Now, recall that

$$\begin{aligned} U(t, \phi) &= Q_0(t, \phi) + \frac{a_1}{|P|f_0} Q_1(\phi(0)) \\ &\quad + \left[\frac{\Delta^2}{2cr_p} f_0^2 + \frac{2a_1}{q_p} \left(e^{|L|\tau} + \frac{\Delta}{2} \right)^2 \right] Q_2(\phi) \end{aligned} \quad (6.16)$$

and observe that, for all $\phi \in C_{\text{in}}$, the inequality

$$Q_2(\phi) \leq 2 \int_{-\tau}^0 Q_1(\phi(\ell)) d\ell$$

is satisfied. It follows that, for all $t \in \mathbb{R}$ and for all $\phi \in C_{\text{in}}$, the inequality

$$\begin{aligned} U(t, \phi) &\leq Q_0(t, \phi) + \frac{a_1}{|P|f_0} Q_1(\phi(0)) \\ &\quad + \frac{b_6}{\tau} \int_{-\tau}^0 Q_1(\phi(\ell)) d\ell, \end{aligned} \quad (6.17)$$

with $b_6 = \frac{\Delta^2}{cr_p} f_0^2 + \frac{a_1}{q_p} \left(8 + \frac{16|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{8f_0^2} \right) \tau$, is satisfied. By using (4.2) and (4.1), we obtain

$$\begin{aligned} b_6 &\leq \frac{1}{cr_p} f_0^2 \frac{c^2 r_p}{16f_0^2} + \frac{a_1}{q_p} \left(8 + \frac{16|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{8f_0^2} \right) \frac{1}{|L|} \ln \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{|L|}{2} \sqrt{\frac{r_p}{f_0}}} \right) \\ &\leq \frac{c}{16} + \frac{a_1}{q_p} \left(8 + \frac{16|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{8f_0^2} \right) \frac{1}{|L|} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{|L|}{2\sqrt{f_0}}} \right) \\ &\leq \frac{c}{16} + \frac{a_1}{q_p} \left(8 + \frac{16|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{8f_0^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{|L|}f_0^{\frac{1}{4}}} \\ &\leq \frac{a_1}{q_p} \left(\frac{13}{3} + \frac{8|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{16f_0^2} \right) \\ &\quad + \frac{a_1}{q_p} \left(8 + \frac{16|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{8f_0^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{|L|}f_0^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{a_1}{q_p} b_7, \end{aligned} \quad (6.18)$$

with $b_7 = \left(\frac{26}{3} + \frac{16|L|}{\sqrt{f_0}} + \frac{c^2}{8f_0^2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{|L|}f_0^{\frac{1}{4}}} \right)$. Therefore, for all $t \in \mathbb{R}$ and for all $\phi \in C_{\text{in}}$, the inequality

$$\begin{aligned} U(t, \phi) &\leq Q_0(t, \phi) + \frac{a_1}{|P|f_0} Q_1(\phi(0)) \\ &\quad + \frac{b_7}{q_p} \frac{a_1}{\tau} \int_{-\tau}^0 Q_1(\phi(\ell)) d\ell \end{aligned} \quad (6.19)$$

is satisfied. We deduce that, for a.e. $t \geq 0$, the inequality (4.31) is satisfied.

Résumé. Ce doctorat est centré sur trois objectifs principaux. Le premier est le développement d'une stratégie de construction de retours d'état sans terme à retard qui stabilisent globalement asymptotiquement uniformément l'origine de systèmes variant dans le temps non linéaires ayant un retard distribué dans la commande. Le deuxième est l'adaptation de la célèbre technique de construction de lois de commande appelée *backstepping* au cas de systèmes non linéaires de forme *feedback* ayant dans la commande un retard ponctuel constant. Le troisième est la résolution d'un problème de stabilisation pratique pour une famille de systèmes non linéaires ayant un retard ponctuel dans l'entrée constant et ayant des commandes échantillonnées dont les instants d'échantillonnage dépendent de la valeur de la variable d'état du système. Chacun de ces trois objectifs est atteint au moyen de technique qui utilisent certains opérateurs d'un nouveau type. Des résultats de robustesse de type *Input-to-State-Stability* sont établis au moyen de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

Mots-clefs : Commande, retard, Lyapunov-Krasovskii, systèmes non linéaires.

Abstract. This PhD thesis is focused on three main objectives. The first goal is to develop a method of construction of state feedbacks without retarded terms that render the origin of time-varying nonlinear systems with a distributed input delay globally uniformly asymptotically stable. The second objective is the adaptation of the celebrated technique of construction of state feedbacks called 'backstepping' to the case of nonlinear systems in feedback form with a pointwise constant delay in the input. The third aim of this thesis is to solve a problem of practical stabilization for a family of nonlinear systems with sampled retarded state feedbacks whose sampling instants depend on the value of the state variable of the system. Each of these three goals relies on the introduction of operators of a new type. Robustness results of Input-to-State-Stability type are established by using Lyapunov-Krasovskii functionals.

Keywords : Control, delay, Lyapunov-Krasovskii, nonlinear systems.