وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UniversitéBadji Mokhtar Annaba

Badji Mokhtar University - Annaba

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en sciences

Option : Probabilités et Statistiques

Poisson Pseudo Lindley Distributions et leurs applications en assurance vie

Par:

NEDJAR SIHEM

Sous la direction de

ZEGHDOUDI Halim	M.C.A	U.B.M.Annaba

Devant le jury

PRESIDENT :	**REMITA Med Riad**	Prof.	U.B.M.Annaba
EXAMINATEUR :	**SEDDIK AMEUR Nacira**	Prof.	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	**Badreddine Mansouri**	MCA	U. Biskra
EXAMINATEUR :	**Benchaabane Abbes**	MCA	U. Guelma
EXAMINATEUR :	**Djabrane Yahia**	MCA	U. Biskra

Année : 2017

Dédicace

Je dédie ce travail de longues années d'étude à

La lumière de ma vie, au cœur le plus tendre et le plus doux, à celle qui s'est tellement sacrifiée pour me voir toujours meilleure : ma très chère mère

A l'être le plus cher à mon cœur, à celui qui m'a toujours guidée par ses conseils et qui m'a encouragée à poursuivre mes études : Mon père

A mon mari, signe d'amour, de respect et surtout de courage qui était toujours patient avec moi et qui a su par sa tendresse et son sacrifice me mettre sur les bonnes rails

A Mes chers frères et sœurs

« Dr. Nedjar Sihem »

Remerciements

Mes sincères remerciements à Dieu le tout puissant, le miséricordieux qui m'a donnée la force, la volonté et le courage afin d'élaborer ce travail.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à mon encadreur **Dr. Zeghdoudi Halim** qui a bien voulu accepter de m'accorder ce privilège ; et d'avoir consacré beaucoup de temps à me « former ».

Je salue en lui ses grandes compétences, sa qualité professionnelle et surtout sa gentillesse et son soutien dont il m'a gratifiée tout au long de ce travail.

Je remercie le **Prof. Remita Mohamed Riad** qui a accepté d'être le président de ce jury.

Je remercie vivement **Prof. SEDDIK AMEUR Nacira** de l'université d'Annaba, ainsi que **Dr. Badreddine Mansouri , Djabrane Yahia** de l'université de Biskra, et **Dr. Benchaabane Abbes** de l'université de Guelma pour l'honneur d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie vivement **M. Lalam Nour Islam** de l'Ecole Préparatoire aux Sciences et Techniques Annaba, pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Je m'estime très honorée par l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à mon travail et leur saurais gré pour toutes remarques, qui va m'aider à voir les ponts qui pouvaient exister entre mon travail et d'autres perspectives mathématiques.

Enfin je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Table des matières

Table des figures

Abstract

In this thesis, we give a treatment of the mathematical properties for new distributions named respectively pseudo Lindley (PsLD), gamma Lindley (GaLD) as a generalization of the Lindley distribution (LD) and Poisson pseudo Lindley distribution (PPsLD) by compounding Poisson and pseudo Lindley distributions. The properties studied include : moments, Lorenz curve, the quantile function, maximum likelihood estimation. Simulations studies and data driven applications are also reported.

Résumé

On se propose, dans ce travail, de présenter de nouvelles distributions (continues et discrètes) appelées distributions Pseudo Lindley, Gamma Lindley et Poisson Pseudo Lindley. Ces distributions apportent un petit plus sur la modélisation des données de survie, dans le domaine de la biologie et de l'actuariat.

jljl,ljkkkkkkkkkkkkk

Introduction

Les statistiques touchent tous les aspects de la vie moderne. Elles sous-tendent de nombreuses décisions des pouvoirs publics, des entreprises et des collectivités. Elles renseignent sur les tendances et les forces qui influent sur notre vie. La qualité des procédures utilisées dans une analyse statistique dépend fortement de modèle de la probabilité supposée ou la distribution. Pour cela, des efforts considérables ont été déployés dans le développement de grandes classes de distributions de probabilité standard ainsi que des méthodologies statistiques pertinentes. Cependant, il reste beaucoup de problèmes importants où les données réelles ne suivent aucune des modèles de probabilité standard.

Soit X une variable aléatoire suivant la distribution à un paramètre avec la fonction de densité

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^2(1+x)e^{-\theta x}}{1+\theta} & x,\theta > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{L}$$

Introduite par Lindley (1958). Cette distribution a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs et a été généralisée plusieurs fois par divers auteurs. En premier lieu, Sankaran (1970) a utilisé (L) lorsque le paramètre suit une loi de Poisson pour dériver une distribution de Poisson Lindley (PLD) discrète avec fonction de densité

$$f_{PLD}(x;\theta) = \frac{\theta^2(x+\theta+2)e^{-\theta x}}{(1+\theta)^x}, \; x = 0,1,...,\theta > 0.$$

Selon Hussain(2008), la distribution de Lindley est importante pour étudier la modélisation de la fiabilité de la contrainte. Par ailleurs, certains chercheurs ont proposé de nouvelles classes de distributions basées sur des modifications de la distribution de Lindley, y compris leurs propriétés. L'idée principale est toujours dirigée en intégrant les anciennes distributions à des structures plus flexibles voir (Ghitany et al (2008, a), Mahmoudi et Zakerzadeh (2010), Dolati (2010), Asgharzadeh et al. (2013),...).

En raison de l'existence d'un seul paramètre, la distribution de Lindley ne fournit pas suffisamment de flexibilité pour analyser différents types de données de survie. Pour augmenter la flexibilité à des fins de modélisation, il serait utile d'envisager d'autres alternatives de cette distribution.

Dans cette thèse, nous introduisons des nouvelles distributions de durée de vie en utilisant les modèles de mélange et en combinant la distribution de Poisson et autres distributions à deux paramètres (Pseudo Lindley, Gamma Lindley) qui apportera un plus à la littérature existant sur la modélisation des données de survie, des sciences biologiques et des sciences actuarielles.

Ainsi, nous avons réussi à trouver des nouvelles distributions continues et une distribution discrète nommées respectivement les distributions Pseudo Lindley, Gamma Lindley et Poisson Pseudo Lindley.

Dans le premier chapitre nous rappelons certaines définitions et certains résultats que nous utiliserons par la suite. Ce rappel comporte des généralités sur quelques distributions de probabilités, fonction W de Lambert, fonction quantile, statistiques d'ordre extrêmes, estimation MM et MV, courbe de Lorenz. Dans le chapitre II, nous faisons une synthèse des résultats obtenus sur les distributions de Lindley et Poisson Lindley en nous inspirant des travaux de Lindley (1958), Ghitany et al. (2008, a) et Sankaran (1970). Le chapitre III comporte des nouvelles distributions à deux paramètres (Pseudo Lindley, Gamma Lindley) dont on donne quelques propriétés à savoir : la fonction quantile, courbe de Lorenz, méthode des moments, estimation du maximum de vraisemblance et la distribution de limitation des statistiques d'ordre extrême. Plusieurs simulations sont établies pour examiner le biais et l'erreur quadratique moyenne des estimateurs des paramètres obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et leurs applications dans l'analyse de survie. Enfin, le dernier chapitre renferme l'essentiel du notre apport regroupé dans les articles [16,17,18, 19,20] en nous inspirant des travaux originaux de Lindley (1958), et Sankaran (1970) en adaptant certains résultats. Par la suite , nous établissons une comparaison des valeurs de la fonction quantile, mode et moyenne . Adoubé, d'une simulation du biais et de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance .Enfin, nous procédons à une comparaison des distributions

.

Chapitre 1

Géneralités et quelques distributions de probabilités

Au cours de cette thèse, l'ensemble des définitions de base suivantes seront utilisées

.

1.1 Définitions de base

Soit f une application de A dans B. Soit C une partie de B .On appelle image inverse de C par f , le sous-ensemble de A noté $f^{-1}(C)$, noté par

$$f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\} \equiv \{f \in C\}.$$

1.1.1 Variable aléatoire

La notion de variable aléatoire est la notion principale de la théorie des probabilités et de la statistique.

Variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) est une application X de Ω dans R :

$$X : \omega \in \Omega \to X(\omega) \in R.$$

Lorsque l'ensemble des réalisations possibles de la variable aléatoire réelle X est fini ou dénombrable, on dit que *la variable aléatoire réelle X est discrète*. Sinon, on dit que *la variable aléatoire réelle X est continue.*

Vecteurs aléatoires réelles

Lors de l'étude d'une expérience aléatoire on utilise la plupart du temps plusieurs v.a.r $X_1, ..., X_K$ qui sont définies sur le même espace de probabilité puisqu'elles se rapportent à la même expérience. De façon équivalente, on peut considérer que les variables aléatoires réelles $X_1, ..., X_K$ définissent une v.a. X à valeurs dans R^k en posant

$$X = (X_1, ..., X_K).$$

1.1.2 Loi de probabilité

Définition 1.1. La loi de probabilité d'une v.a X, notée P_X est une application qui a toute partie A de R associe

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

De même, on notera $P(X = x)$ la probabilité $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$.

Définition 1.2. On appelle fonction de répartition (cdf) d'une variable aléatoire X, la fonction F_X telle que :

$$\begin{array}{rcl} F_X & : & R \rightarrow [0,1] \, . \\ t & \rightarrow & F_X\left(t\right) = P\left(X \leq t\right). \end{array}$$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités P_i des évènements $\{X = x_i\}$, x_i parcourant l'univers image $X(\Omega)$. La loi de probabilité est donnée par les (x_i, p_i).

Loi de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue (densité de probabilité)

Définition1.3. Une variable aléatoire absolument continue X est une variable aléatoire continue qui admet une fonction de répartition F_X continue et dérivable (sauf en un nombre dénombrable de points). Alors, sa fonction dérivée $f(x) = F_X'$ est appelée la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Définition1.4. On appelle densité de probabilité toute application continue par morceaux :

$$\begin{array}{ccc} f & : & R \rightarrow R. \\ x & \rightarrow & f(x). \end{array}$$

telle que :

1. $\forall x \in R \quad f(x) \geq 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (en supposant que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe)

Ainsi la relation entre la fonction de répartition F_X et la fonction densité de probabilité $f(x)$ est la suivante :

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(t)\, dt.$$

Les paragraphes qui suivent présentent les concepts utilisés dans ce qui suit .

1.1.3 Fonction de survie S

La fonction de survie est, pour t fixé, la probabilité de survivre jusqu'à l'instant t, c'est-à-dire

$$S(t) = P(X > t) = 1 - F_X(t), \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1 Il est arbitraire de décider que $S(t) = P(X > t)$ ou $S(t) = P(X \geq t)$. Cela n'a aucune importance quand la loi de X est continue car $P(X > t) = P(X \geq t)$.

1.1.4 Risque instantané h (ou taux de hasard)

Le risque instantané (ou taux d'incidence), pour t fixé caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après t, conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'au temps t (c'est-à-dire le risque de mort instantané pour ceux qui ont survécu) :

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(X < x + \Delta x \mid X > x\right)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{S\left(t\right)} = -\ln\left(S\left(t\right)\right)'. \tag{1.2}$$

1.2 Quantités associées à la distribution de survie

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur I, de fonction de répartition F_X et de loi de probabilité P.

1.2.1 Moment ordinaire

Le moment (ou moment ordinaire) d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de X est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r = E\left(X^r\right) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{K \in I} k^r P_K & si\ X\ est\ discrète \\ \int\limits_{x \in I} x^r f_X\left(x\right)\ dx & si\ X\ est\ continue \end{pmatrix}$$

1.2.2 Moment centré

Le moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de X est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r = E\left(\left[x - E\left(x\right)\right]^r\right) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{K \in I} \left[K - E\left(x\right)\right]^r P_K & si\ X\ est\ discrète \\ \int\limits_{x \in I} \left[x - E\left(x\right)\right]^r f\left(x\right)\ dx & si\ X\ est\ continue \end{pmatrix}$$

1.2.3 Fonction Génératrice des moments

La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est définie par :

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right), t \in R.$$

Cette relation permet de calculer très aisément les moments d'une loi dont on connaît la fonction génératrice. par exemple :

l'espérance et la variance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= M_X^{'}(0). \\ Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = M_X^{''}(0) - \left[M_X^{'}(0)\right]^2. \end{aligned}$$

Le coefficient de variation (γ), le coefficient d'asymétrie $\left(\sqrt{\beta_1}\right)$ et le coefficient d'aplatissement (β_2) sont :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\sqrt{Var(X)}}{\mathbb{E}(X)}. \\ \sqrt{\beta_1} &= \frac{\mathbb{E}(X^3)}{(Var(X))^{\frac{3}{2}}}. \\ \beta_2 &= \frac{\mathbb{E}(X^4)}{(Var(X))^2}. \end{aligned}$$

1.3 Fonction W de Lambert

La fonction W de Lambert (Lambert 1758) est une fonction complexe multivaluée définie comme étant la solution de l'équation :

$$W(z)\exp(W(z)) = z. \tag{1.3}$$

Où z est un nombre complexe. Si z est un nombre réel tel que $z \geq -1/e$ alors $W(z)$ devient une fonction réelle et il y a deux possibles branches réelles.

La branche réelle prenant des valeurs dans]-$\infty, -1]$ est appelée la branche négative et notée W_{-1}.

La branche réelle prenant des valeurs dans $[-1, \infty[$ est appelée la branche principale et notée W_0 .Tous les deux réelles branches de W sont représentés sur la figure.1.1.

En plus de l'équation. (1.2), Lémeray [4] a indiqué que d'autres équations peuvent être résolues en termes de la fonction W de Lambert. À cet égard, le lemme suivant, sera essentiel dans notre thèse.matière

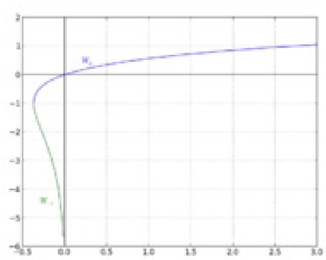

FIG. 1.1: Les deux branches de la fonction de Lambert

Lemme1.1 (Lémeray et al. [4]) Soient a, b et c des nombres complexes fixés. La solution de l'équation $z + ab^z = c$ par rapport à $z \in C$ est :

$$z = c - \frac{1}{\log(b)} W\left(ab^c \log(b)\right).$$

Où W représente la fonction W de Lambert.

Preuve. Pour tous nombres complexes a, b et c fixés, on doit résoudre l'équation $z + ab^z = c$ par rapport à la variable complexe z. Multiplier par $b^c \ln(b)$ les deux côtés de cette équation, l'équation résultante peut être écrite comme suit :

$$(c - z)\ln(b)\exp((c - z)\ln(b)) = ab^c \ln(b). \tag{1.4}$$

On considère maintenant l'équation (1.4) conjointement avec l'équation (1.3). Il est clair que $(c - z)\ln(b)$ est la fonction W de *Lambert* de l'argument complexe $ab^c \ln(b)$. Par conséquent, on a

$$W(ab^c \ln(b)) = (c - z)\ln(b).$$

Ce qui implique le résultat souhaité. Ceci termine la preuve du lemme 1.1.■

1.4 Fonction Quantile

La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition.On appelle fonction quantile de X la fonction, notée Q_X, de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, qui à $u \in]0,1[$ associe :

$$Q_X(u) = \inf\{x \text{ tel que } F_X(x) \geq u.\} \quad 0 < u < 1. \tag{1.5}$$

1.5 Estimation

Définition 1.2 Un estimateur du paramètre inconnu θ d'un modèle ou loi de probabilité est une fonction qui fait correspondre à une suite d'observations $x_1, x_2, ..., x_n$ issues du modèle ou de la loi de probabilité, la valeur $\hat{\theta}$ que l'on nomme estimateur ou estimation

$$\hat{\theta} = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

1.5.1 Qualité d'un estimateur

Biais

Une variable aléatoire fluctue autour de son espérance. On peut donc souhaiter que l'espérance de $\hat{\theta}$ soit égale à θ.

$$Biais\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\hat{\theta}\right) - \theta.$$

Lorsque $Biais\left(\hat{\theta}\right) = 0$, l'estimateur est dit sans biais , et si $Biais\left(\hat{\theta}\right) > 0$, l'estimateur est dit positivement biaisé.

Convergence

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergent s'il converge en probabilité vers θ, soit :

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \quad & \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \to 1, \forall \varepsilon > 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0.
\end{aligned}$$

Théorème1.1 Tout estimateur sans biais dont la variance tend vers 0 est convergent :

$$\left(E\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta \text{ } et \text{ } Var\left(\hat{\theta}_n\right) \to 0\right) \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta. \blacksquare$$

Erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyenne (*Mean Squared Error en anglais*) appelée aussi risque quadratique est l'espérance du carré de l'erreur entre la vraie valeur et sa valeur estimée.

$$EQM\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right).$$

Si le risque est faible , l'estimateur $\hat{\theta}$ est proche de θ.

1.5.2 Normalité asymptotique

On admettra le théorème central limite et la méthode Delta suivants

Théorème1.2.(*Théorème central limite*). Soient une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi (donc de même espérance m et de même écart-type σ).

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1).$$

La variable aléatoire Z_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite. C'est une conséquence du TCL qui assure que :

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - m\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \sigma^2\right). \blacksquare$$

Méthode Delta

Soient une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'espérance θ et d'écart-type σ Si $\sqrt{n}\,(X_n - \theta) \xrightarrow{p} N\left(0, \sigma^2\right)$, et une fonction g dérivable telle que $g^{'}(\theta) \neq 0$. Dans ce cas la méthode delta donne :

$$\sqrt{n}\,(g\,(X_n) - g\,(\theta)) \xrightarrow{D} N\left(0, \sigma^2\left[g^{'}(\theta)\right]\right).$$

Définition 1.3 Soit $\hat{\theta}$ un estimateur du paramètre θ de la loi P_θ d'une v.a. observée X. On suppose qu'il existe deux suites de fonctions réelles strictement positives, $a = a_n(\theta)$ et $b = b_n(\theta)$ telles que :

$$\frac{\hat{\theta} - a}{b} \xrightarrow{D} N\,(0, 1)\,.$$

On dit alors que $\hat{\theta}$ est un estimateur asymptotiquement normal.

1.5.3 Construction d'estimateurs

Méthode des Moments

L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc...

Autrement dit, si $\theta = E(X)$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est

$$\hat{\theta}_n = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Plus généralement, pour $\theta \in \Theta$, si $E(X) = \varphi(\theta)$, où φ est une fonction inversible, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\theta).$$

De la même manière, on estime la variance de la loi des X_i par la variance empirique de l'échantillon $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$.

Méthode du maximum de vraisemblance

Définition 1.4 Soient X_i n variables aléatoires indépendantes et de même loi. La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P\left(X = x_i; \theta\right) & si\ les\ X_i\ sont\ discrètes. \\ \prod_{i=1}^{n} f_X\left(x_i; \theta\right) & si\ les\ X_i\ sont\ continues. \end{cases}$$

Définition1.5 L'estimation de maximum de vraisemblance de θ est la valeur $\hat{\theta}_n$ de θ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $L(\theta; x_1, ..., x_n)$. L'estimateur de maximum de vraisemblance (MV) de θ est la variable aléatoire correspondante. Donc $\hat{\theta}_n$ sera en général calculé en maximisant la log-vraisemblance :

$$\hat{\theta}_n = argmax\ \ln L(\theta; x_1, ..., x_n).$$

Quand $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d) \in \Theta$ et que toutes les dérivées partielles ci-dessous existent, $\hat{\theta}_n$ est solution du système d'équations appelées équations de vraisemblance :

$$\forall j \in \{1, ..., d\},\ \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta; x_1, ..., x_n) = 0.$$

$$\text{Où} \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} \ln L(\theta; x_1, ..., x_n) < 0.$$

Dans ce cas, on le résout par des méthodes numériques, comme la méthode de Fisher Scoring.

1.6 Lois de probabilités usuelles

Dans dans cette section , on procède à la présentation de quelques lois de probabilités qu 'utiles pour la suite du travail.

1.6.1 Loi Exponentielle

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure . En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.

Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre (d'intensité ou inverse de l'échelle) $\lambda > 0$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \forall\ x \in R^+ \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On note $X \rightsquigarrow EXP(\lambda)$.

La fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \forall\ x \in R^+ \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

L'espérance mathématique (ou durée de vie moyenne) et la variance de X :

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, var[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

L'estimateur $\hat{\lambda}_{MoM}$ de paramètre λ obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MoM} = \frac{1}{E[X]}.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi exponentielle est donné par

$$\ln L\left(x_i\,,\alpha,\right) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

1.6.2 Loi de Gamma

On présente la famille de lois Gamma ou d'Euler très utiles pour les propriétés de décroissance rapide de leur fonction de survie. Une variable aléatoire continue suit une loi Gamma, de paramètres $\alpha, \beta \in R_{+}^{\star}$, le premier est appelé paramètre d'échelle alors que β est le paramètre de forme, si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$\begin{aligned} f_X\left(x\right) &= \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \forall\ x > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \\ O\grave{u} \qquad \Gamma\left(\alpha\right) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

On note $X \rightsquigarrow GA\left(\alpha, \beta\right).$

L'espérance mathématique et la variance de X :

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta}, var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Les estimateurs $\left(\hat{\alpha}_{MoM}, \hat{\beta}_{MoM}\right)$ des paramètres (α, β) obtenu par la méthode des moments sont :

$$\hat{\alpha}_{MoM} = \frac{E^2[X]}{var[X]}\ ,\quad \hat{\beta}_{MoM} = \frac{E[X]}{var[X]}.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi Gamma est donné par

$$\ln L\left(x_i\ ,\alpha,\right)=n\alpha\ln\beta-n\ln\Gamma\left(\alpha\right)+\left(\alpha-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\beta\bar{X}.$$

1.6.3 Loi de Weibull

La loi de Weibull est mentionnée en premier lieu par Fréchet puis étudiée par Weibull dont elle prit le nom. Cette loi est très utile en contrôle de qualité, elle peut également modéliser le temps d'attente de la première panne, ou encore le temps écoulé entre deux pannes consécutives.

Une variable aléatoire continue suit une loi de Weibull,,de paramètres $\beta,\eta\in R_+^\star$ qui sont les paramètres de forme et d'échelle respectivement, si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\beta}{\eta^\beta}x^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} & \forall\ x>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

la fonction de répartition de X :

$$F_X\left(x\right)=1-\exp^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}\quad\forall x\in R_+^\star$$

L'espérance mathématique et la variance de X :

$$\begin{cases}E[X]=\eta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right),\\ var[X]=.\eta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-E^2[X].\end{cases}$$

On résout ce système non linéaire, pour trouver les estimateurs des moments (MoM) $\hat{\beta}$ et $\hat{\eta}$ des paramètres β et η respectivement .

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi gamma est donné par :

$$\ln L\left(x_i\ ,\beta,\eta\right)=n\ln\beta-n\beta\log\eta-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^{\beta}+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i.$$

1.6.4 Loi log-normale

La loi log-normale est aussi appelée loi de Galton . Une variable aléatoire continue X suit une loi log-normale quand son logarithme suit une loi normale c'est-à-dire $Y=\ln X$ suit une loi $N(\alpha;\beta)$ où $\alpha=\mu_Y$ et $\beta=\sigma_Y$ et donc de densité

$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{x\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(x\right)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right];\quad \forall x>0.$$

Où μ_Y est le paramètre d'échelle et σ_Y^2 est le paramètre de forme. Contrairement à la loi normale, les paramètres ne donnent pas la moyenne et la variance de la loi. L'espérance mathématique et la variance de X :

$$\begin{aligned}
E[X] &= \exp\left(\mu_{_Y}+\frac{\sigma_Y^2}{2}\right), var[X]=\left(\exp\left(\sigma_Y^2\right)-1\right)\exp\left(2\mu_{_Y}+\sigma_Y^2\right),\\
E[X^2] &= \exp\left(2\mu_{_Y}+\sigma_Y^2\right).
\end{aligned}$$

Les estimateurs $\left(\hat{\alpha}_{MoM},\hat{\beta}_{MoM}\right)$ des paramètres (α,β) obtenu par la méthode des moments sont :

$$\hat{\alpha}_{MoM}=2\ln E[X]-\frac{1}{2}\ln E[X^2],\quad \hat{\beta}_{MoM}=\sqrt{\ln\frac{E[X^2]}{E^2[X]}}.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi log-normale est donné par :

$$\ln L\left(x_i\ ,\mu,\sigma\right)=-n\ln\sigma_Y-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right)-\mu_Y\ \right)^2.$$

1.6.5 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une distribution discrète très utile dans l'étude de la survenue dans le temps d'événements homogènes (le nombre d'absents par jour dans une entreprise, le nombre de clients dans une file d'attente durant des laps de temps de même durée).

Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\in R_+^\star$ (qui est à la fois la moyenne et la variance) si :

$$P\left(X=k\right)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!};\qquad k\in\mathbb{N}.$$

L'espérance mathématique et la variance de X :

$$E[X]=var[X]=\lambda.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi gamma est donné par :

$$\ln L\left(x_i\ ,\beta,\eta\right)=n\lambda+\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(x_i!\right).$$

L'estimateur $\hat{\lambda}_{MoM}$ de paramètre λ obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MoM}=E[X].$$

1.7 Ordre stochastique

Un des principaux objectifs des statistiques est la comparaison de variables aléatoires. Bien que très populaire, le critère probabiliste « moyenne variance» ne suffit pas toujours à comparer deux variables aléatoires et peut même conduire à des aberrations. Cependant, il arrive souvent qu'on possède des informations plus détaillées concernant les variables aléatoires à comparer décrites par leurs fonctions de répartition. Une comparaison basée sur les distributions est plus informative que celle basée uniquement sur deux critères. La méthode utilisée pour comparer deux distributions est nommée « ordre stochastique».

1.7.1 Ordre stochastique usuel

L'ordre stochastique usuel est l'ordre le plus naturel pour comparer deux variables aléatoires réelles (comparer des risques). Il consiste à comparer leurs fonctions de répartition ou leurs fonctions de survie. Cet ordre est souvent appelé ordre stochastique usuel selon Shaked et Shanthikumar (2007) [17] . Ceci conduit à la définition suivante.

Définition1.6 Une variable aléatoire X est dite inférieure ou égale à une variable aléatoire Y dans :

a) L'ordre stochastique ($X \preceq_s Y$) *(Stochastic order) si* $F_X(t) \geq F_Y(t), \forall t$;

b)L'ordre de taux de risque (Hazard rate order)($X \preceq_{hr} Y$), *si* $h_X(t) \geq h_Y(t), \forall t$;

c)L'ordre de rapport de vraisemblance (Likelihood ratio order)($X \preceq_{lr} Y$), *si* $\frac{f_X(t)}{f_Y(t)}$

diminue en t.

d*)L'ordre* convexe (*Convex order) ($X \preceq_{cx} Y$), si, pour toute fonction convexe ϕ on a,* $E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$.

Remarque1.2 Les implications suivantes (Shaked et Shanthikumar [17]) sont bien connues :

$$\begin{aligned} X &\preceq {}_{lr}Y \Rightarrow X \preceq_{hr} Y. \qquad (\mathbf{1.}6) \\ X &\preceq {}_{hr}Y \Rightarrow X \preceq_{s} Y. \\ X &\preceq {}_{lr}Y \Rightarrow X \preceq_{hr} Y \Rightarrow X \preceq_{s} Y. \\ \text{Si} \quad E[X] &= E[Y], \quad alors \;\; X \preceq_{cx} Y \Leftrightarrow X \preceq_{s} Y. \end{aligned}$$

1.8 Théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes est une branche des statistiques qui s'intéresse aux valeurs extrêmes (minimum ou maximum) des distributions de probabilité.Elle a été développée par Émil Julius Gumbel [22].

1.8.1 Théorie des valeurs extrêmes maximales

L'étude des extrêmes d'un processus passe naturellement par l'analyse du maximum d'un échantillon de taille n donnée $M_n = max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est un échantillon i.i.d. de loi F. La distribution de M_n est connue exactement :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = F^n(x),$$

En pratique, F est inconnue, et la relation (1.3) n'est donc pas utilisable directement. De façon analogue au théorème central limite, la théorie des valeurs extrêmes montre qu'il existe des suites a_n, b_n (constante de normalisation) et une distribution non dégénérée, telles que

$$P(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x) = F^n \left(a_n x + b_n\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} G\left(x\right).$$

Le théorème suivant spécifie la forme de la loi limite de valeurs extrêmes du maximum $G\left(x\right).$

Théorème1.3 (**de Fisher-Tippett ou théorème des 3 types extrêmes**) La loi limite $G(x)$ peut prendre trois formes possibles avec $a_n > 0$ et $b_n \in R$ comme suit :

-La loi de Gumbel (type**I**)

$$G_X\left(x\right) = \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

-La loi de Fréchet (type**II**)

$$G_X\left(x\right) = \begin{cases} \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & \forall\, x > 0\ , \alpha > 0 \\ 0 & \forall\, x \leq 0 \end{cases}$$

-La loi de Weibull (type**III**)

$$G_X\left(x\right) = \begin{cases} \exp\left(-\left(-x\right)^{\alpha}\right), & \forall\, x < 0\ , \alpha > 0 \\ 1 & \forall\, x \geq 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Le théorème suivant nous permet de déterminer le domaine d'attraction et de son type pour notre fonction de distribution commune.

Théorème 1.4 (Leadbetter et al. [19] **).** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de la distribution commune $F(x)$, et $x_F = \sup\{x\backslash\ F(x) < 1\}$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction F appartienne au domaine d'attraction des types possibles sont :

TypeI. Il existe une fonction strictement positive $g(t) > 0$ définie sur l'ensemble $]-\infty, x_F]$,

telle que $\underset{t \to x_F}{lim} \frac{1-F(t+g(t)x)}{1-F(t)} = exp(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

TypeII. $x_F = \infty$ et $\underset{t \to \infty}{lim} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \forall\ x > 0\ et\ \alpha > 0$.

TypeIII. $x_F < \infty$ et $\underset{t \to 0}{lim} \frac{1-F(x_F - tx)}{1-F(x_F - t)} = x^{\alpha}, \forall\ x > 0\ et\ \alpha > 0$.■

Le corollaire suivant permet de trouver les constantes de normalisation.

Corollaire 1.1(Leadbetter et al. [19]) Les constantes de normalisation a_n et b_n correspondantes aux différents types de loi limite sont :

TypeI. $a_n = g\left(F^{-1}(1 - \frac{1}{n})\right)$ et $b_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$.

TypeII. $a_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$ et $b_n = 0$.

TypeIII. $a_n = x_F - F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$ et $b_n = x_F$.■

1.8.2 Théorie des valeurs extrêmes minimales

De façon similaire on note $m_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est un échantillon i.i.d. de loi F.La distribution de m_n est :

$$P(m_n \leq x) = 1 - [1 - F(x)]^n,$$

Au lieu de traiter l'échantillon minimal de X on peut le voir comme le négatif du maximum de $(-X)$.

$$min(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -max(-X_1, -X_2, \ldots, -X_n).$$

La distribution asymptotique minimale peut-être déduite de la distribution limite maximale.

La théorie des valeurs extrêmes montre qu'il existe des suites a_n, b_n (constante de normalisation) , avec $a_n > 0$, $b_n \in R$ telles que

$$P(\frac{m_n - a_n}{b_n} \leq x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} G^{\star}(x) = 1 - G(-x).$$

où $G(x)$ est la loi limite des valeurs extrêmes du maximum définie dans le théorème1.3.

Alors la loi limite des valeurs extrêmes du minimum $G^{\star}(x)$ doit être l'un des trois types :

-La loi de Gumbel (type**I**)

$$G_X^{\star}(x) = 1 - \exp(-\exp(x)), x \in \mathbb{R}.$$

-La loi de Fréchet (type**II**)

$$G_X^{\star}(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-(-x)^{-\alpha}\right), & \forall\ x \leq 0\ , \alpha > 0. \\ 1 & \forall\ x > 0. \end{cases}$$

-La loi de Weibull (type**III**)

$$G_X^{\star}(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-(x)^{\alpha}\right), & \forall\ x > 0\ , \alpha > 0 \\ 0 & \forall\ x \leq 0. \end{cases}$$

Remarque1.3 Les constantes de normalisation peuvent être obtenues à l'aide de résultats de corollaire 1.1 avec les modifications appropriées.

1.9 Courbe de Lorenz

La courbe de Lorenz est une des mesures d'inégalité la plus largement utilisée dans plusieurs domaines (épidémiologie, traitement du signal, psychologie expérimentale...etc). Elle peut être facilement transposée, notamment à la répartition d'une donnée statistique quelconque, comme les inégalités de répartition d'un actif ou de toute autre distribution de richesse, l'état de la répartition des clients au sein d'une clientèle, le revenu et la répartition des richesses. Dans le cas de l'analyse des revenus, la courbe de Lorenz $L(P)$ représente la part du revenu total détenue par la proportion $P \in [0,1]$ d'individus les plus pauvres :

$$L(P) = \frac{revenu\ total\ des\ plus\ pauvres}{revenu\ total}.$$

La courbe de Lorenz pour une variable aléatoire X positive est définie comme le graphe du rapport

$$\begin{aligned} L(P) &= \frac{\int\limits_0^x tf(t)}{\int\limits_0^{+\infty} tf(t)} \qquad 0 \leq P \leq 1 \\ Où\ P &= F(x) \\ L(P) &= \frac{E(X|X \leq x)P(X \leq x)}{E(X)}. \end{aligned}$$

$$L(P) = \frac{E(X|X \leq x)P}{E(X)}. \tag{1.7}$$

Avec les propriétés $L(p) \leq p$, $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$. Si X représente le revenu annuel, $L(p)$ est la proportion du revenu total qui revient aux personnes ayant les revenus les plus faibles de $100p\%$. Si tous les individus gagnent le même revenu alors $L(p) = p$ pour tout p. La zone située entre la ligne $L(p) = p$ et la courbe de Lorenz peut être considérée comme une mesure de l'inégalité des revenus, ou plus généralement, de la variabilité de X, voir Gail et Gastwirth [18] et Dagum [2] pour une vaste discussion des courbes de Lorenz.

Chapitre 2

Distribution de Lindley et ses applications

2.1 Introduction

Une distribution de Lindley d'un seul paramètre a attiré les chercheurs pour son usage en modelant des données de vie, et on l'a observé en plusieurs articles que cette distribution a exécuté excellemment .Cette distribution est introduit par Lindley en 1958 comme mélange d'Exp(θ) et de Gamma$(2, \theta)$. plus de détails sur la distribution de Lindley peut être trouvés en Ghitany et autres ($[11], [15]$) .

2.2 Distribution de Lindley

Soient $Y_1 \sim exp(\theta)$ et $Y_2 \sim Gamma(2, \theta)$ deux variables aléatoires indépendantes. Pour $\theta \succ 0$, on considère la variable aléatoire $X = Y_1$ et $X = Y_2$ avec les probabilités respectivement $P_1 = \frac{\theta}{1+\theta}$ et $P_2 = \frac{1}{1+\theta}$.

La fonction de densité de X est donnée par :

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^2(1+x)e^{-\theta x}}{1+\theta};\ x, \theta > 0 \tag{2.1}$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{1+\theta} e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0 \tag{2.2}$$

La première dérivée de (2.1) est :

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta}(1 - \theta - \theta x)e^{-\theta x}.$$

Il en résulte que

(i) pour $\theta < 1, \frac{d}{dx} f(x) = 0$ implique que $x_0 = \frac{1-\theta}{\theta}$ est le point critique unique à laquelle $f(x)$ est maximisée.

(ii) pour $\theta \geq 1, \frac{d}{dx} f(x) \leq 0$, c'est-à-dire.$f(x)$ diminue en x .

Par conséquent,le mode de cette distribution est :

$$Mode(X) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{\theta}, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

La figure 2.1 représente la fonction de densité. de la distribution de Lindley pour quelques valeurs de θ.

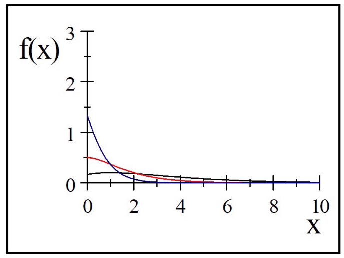

FIG. 2.1: Présentation graphique de la fonction de densité pour quelques valeurs de θ, noir(θ =0.5) ; rouge (θ =1) ; bleu (θ =2).

2.3 Moments et mesures connexes

Le moment d'ordre k de la distribution de Lindley est :

$$\mu_k^{'} = E\left(X^k\right) = \frac{k!\left(\theta+k+1\right)}{\theta^K\left(\theta+1\right)}, k = 1, 2, ...$$

d'où, on a :

$$\mu_1^{'} = \frac{(\theta+2)}{\theta\left(\theta+1\right)}, \mu_2^{'} = \frac{2\left(\theta+3\right)}{\theta^2\left(\theta+1\right)}, \mu_3^{'} = \frac{6\left(\theta+4\right)}{\theta^3\left(\theta+1\right)}, \mu_4^{'} = \frac{24\left(\theta+5\right)}{\theta^4\left(\theta+1\right)}.$$

Le moment centré d'ordre k de la distribution de Lindley est défini par :

$$\mu_k = E\left\{(X-\mu)^r\right\} = \sum_{r=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} \mu_k^{'}\left(-\mu\right)^{k-r}.$$

D'où, on a

$$\mu_2 = \frac{\theta^2+4\theta+2}{\theta^2\left(\theta+1\right)} = \sigma^2, \mu_3 = \frac{2\left(\theta^3+6\theta^2+6\theta+2\right)}{\theta^3\left(\theta+1\right)^3}, \mu_4 = \frac{3\left(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^2+32\theta+8\right)}{\theta^4\left(\theta+1\right)^4}.$$

Le coefficient de variation (γ), le coefficient de dissymétrie$\left(\sqrt{\beta_1}\right)$ et le coefficient d'aplatissement(β_2) sont :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\sqrt{\theta^2+4\theta+2}}{\theta+2}, \\
\sqrt{\beta_1} &= \frac{2\left(\theta^3+6\theta^2+6\theta+2\right)}{\left(\theta^2+4\theta+2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
\beta_2 &= \frac{3\left(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^2+32\theta+8\right)}{\left(\theta^2+4\theta+2\right)^2}.
\end{aligned}$$

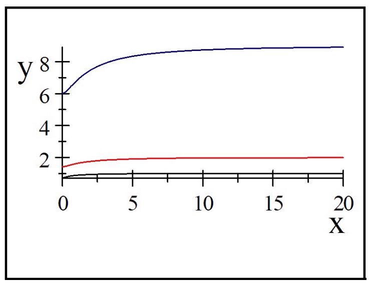

FIG. 2.2: Présentation graphique du coefficient de variation γ (noir), le coefficient de dissymétrie$\sqrt{\beta_1}\,(rouge)$ et le coefficient d'aplatissement $\beta_2\,(bleu)$.

Remarque2.1 :

(i) γ est une fonction croissante en θ et $\left(1/\sqrt{2}\right) < \gamma < 1$, voir $Fig2.2$.

(ii) $\sqrt{\beta_1}$est une fonction croissante en θ et $\sqrt{2} < \sqrt{\beta_1} < 2$, voir $Fig2.2$.

(iii) $\beta_2$est une fonction croissante en θ et $6 < \beta_2 < 9$, voir $Fig2.2$.

Théorème 2.1 Soit $X \sim Lindley\,(\theta)$. Alors

$$Mode\,(X) < Median\,(X) < E\,(X)\,.$$

Preuve. Soient $M = Mode\,(X)\,,\, m = Median\,(X)$ et $\mu = E\,(X) = \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}$. Depuis la fonction de répartition de la distribution de Lindley, il en résulte que :

$$F(M) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{1+\theta} e^{-(1-\theta)}, & 0 < \theta < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad ,\; F(me) = \frac{1}{2}$$

et

$$F(\mu) = 1 - \frac{\theta^2 + 3\theta + 3}{(1+\theta)^2} e^{-\dfrac{\theta+2}{\theta+1}}.$$

Notons que $F(M)$ est une fonction décroissante en $\theta \in (0,1)$ et, pour tout $\theta > 0$, $0 \leq F(M) < 1 - 2e^{-1} < (1/2)$.

De même, $F(\mu)$ est une fonction croissante en $\theta > 0$ et $(1/2) < 1 - 3e^{-2} < F(\mu) < 1$.

Enfin, étant donné que $F(x)$ est une fonction croissante en $x > 0$. Il est facile de vérifier que $F(M) < F(me) = \frac{1}{2} < F(\mu)$, alors on a $M < m < \mu$.$\blacksquare$

2.4 Fonction de hasard et fonction de survie

Soit

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\,(X < x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta^2(1+x)}{\theta + 1 + \theta x}.$$

et

$$S\,(x) = 1 - F(x) = \frac{\theta + 1 + \theta x}{1+\theta} e^{-\theta x}.$$

La fonction de taux de hasard et la fonction de survie de la distribution de Lindley, respectivement.

Remarque2.2

(i) $h\left(0\right) = f\left(0\right) = \frac{\theta^2}{\theta+1}$.

(ii) Comme $\frac{d}{dx}h(x) = \frac{\theta^2(1+x)}{\theta+1+\theta x}$, $h(x)$ est une fonction croissante en x et θ en plus $\frac{\theta^2}{\theta+1} < h(x) < \theta$.

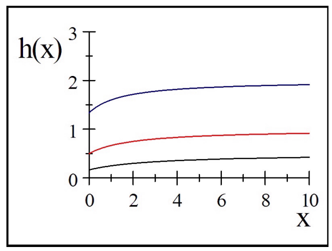

FIG. 2.3: Présentation graphique de la fonction de taux de hasard pour quelques valeurs de θ, noir(θ =0.5) ; rouge (θ =1) ; bleu (θ =2).

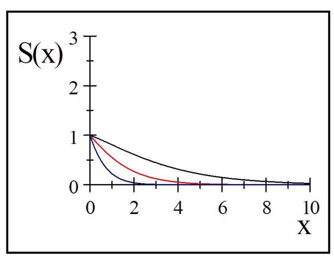

FIG. 2.4: Présentation graphique de la fonction de survie pour quelques valeurs de θ, noir(θ =0.5) ; rouge (θ =1) ; bleu (θ =2).

2.5 Ordre stochastique

Théorème2.2 *Soient* $X \sim Lindley(\theta_1)$ et $Y \sim Lindley(\theta_2)$ *: Si* $\theta_1 > \theta_2$ *alors* $X \preceq_{lr} Y$ et donc $X \preceq_{hr} Y$ *et* $X \preceq_{s} Y$.

Preuve. Notons d'abord que

$$\frac{f_X(t)}{f_Y(t)} = \frac{\theta_1^2\,(1+\theta_2)}{\theta_2^2\,(1+\theta_1)} e^{-(\theta_1-\theta_2)t}. \qquad t>0$$

On a, pour $\theta_1 > \theta_2$,

$$\frac{d}{dt}\frac{f_X(t)}{f_Y(t)} = (\theta_2-\theta_1)\,\frac{f_X(t)}{f_Y(t)} < 0,$$

$\frac{f_X(t)}{f_Y(t)}$ est décroissante en X. Alors $X \preceq_{lr} Y$. Les états restants découlent des implications dans (1.6).

2.6 Courbe de Lorenz

La courbe de Lorenz pour une variable aléatoire X positif est défini comme le graphe du rapport

$$L(F(x)) = \frac{E(X|X\leq x)F(x)}{E(X)} \tag{2.3}$$

Pour la distribution de Lindley (2.1) on a,

$$E(X|X\leq x)F(x) = \frac{2+\theta}{\theta(1+\theta)} - \frac{e^{-\theta x}}{1+\theta}\left[\frac{2}{\theta}+1+\theta x^2+2x+x\theta\right].$$

Ainsi, à partir de (2.3), on obtient la courbe de Lorenz pour la distribution de Lindley comme suit :

$$L(p) = 1 - \frac{\theta(1+\theta)(1-p)}{(2+\theta)(1+\theta+\theta x)}\left[\frac{2}{\theta}+1+\theta x^2+2x+x\theta\right].$$

Où $x = F^{-1}(p)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (2.2).

2.7 Statistiques d'ordre extrêmes

Si $X_1, ..., X_n$ un échantillon de n variables aléatores qui suivent la distribution de Lindley et si $\overline{X} = (X_1+\cdots+X_n)/n$ représente la moyenne d'échantillon alors par le théorème central limite $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-E(X)\right)}{\sqrt{Var(X)}}$ se rapproche de la distribution normale standard quand $n \to \infty$.

Théorème2.3 Parfois, on serait intéressé à étudier la loi asymptotique des valeurs extrêmes $M_n = max(X_1, ..., X_n)$ et $m_n = min(X_1, ..., X_n)$, Pour la fonction de répartition définie dans (2.2), on constate que :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(t + x)}{1 - F(t)} = exp(-\theta x).$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(tx)}{F(t)} = x.$$

Ainsi, il en résulte du *Théorème* 1.4 (Leadbetter et al. [19]) qu'il doit y avoir les constantes de normalisation $a_n > 0, b_n, c_n > 0$ et d_n de telle sorte que :

$$Pr\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \to -exp\{(-\theta x)\}.$$

et

$$Pr\{c_n(m_n - d_n) \leq x\} \to 1 - \exp\left(-x\right). \tag{2.4}$$

Comme $n \to \infty$. La forme des constantes de normalisation peut également être déterminée. Par exemple, en utilisant le *Corollaire* 1.1(Leadbetter et al. [19]), on peut voir que $a_n = 1$ et $b_n = F^{-1}(1 - 1/n)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (2.2).Ainsi, il en résulte du *théorème* 1.4 (Leadbetter et al. [19]) qu'il doit y avoir les constantes de normalisation $a_n > 0, b_n, c_n > 0$ et d_n de telle sorte que :

$$Pr\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \rightarrow -exp\{(-\theta x)\}.$$

et

$$Pr\{c_n(m_n - d_n) \leq x\} \rightarrow 1 - \exp(-x). \tag{2.4}$$

Comme $n \rightarrow \infty$. La forme des constantes de normalisation peut également être déterminée. Par exemple, en utilisant le *corollaire* 1.1(Leadbetter et al. [19]), on peut voir que $a_n = 1$ et $b_n = F^{-1}(1 - 1/n)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (2.2).

2.8 Fonction Quantile de la distribution Lindley

D'après la fonction de répartition de la distribution Lindley définie en (2.2). Il convient de noter qu'est continue et strictement croissante de sorte que la fonction de quantile X est $Q_X(u) = F_X^{-1}(u), 0 < u < 1$. Dans le résultat suivant, on donne une expression explicite de Q_X en fonction de la fonction W de Lambert.

Théorème2.4 Pour tout $\theta > 0$, la fonction quantile de la distribution Lindley X est :

$$Q_X(u) = -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(\frac{\theta+1}{\exp(\theta+1)}(u-1)\right), \qquad 0 < u < 1, \tag{2.5}$$

Où W_{-1} désigne la branche négative de la fonction W de Lambert.

Preuve. Pour tout θ fixe, $\theta > 0$, soit $u \in (0, 1)$. On doit résoudre l'équation $F_X(x) = u$ par rapport à x, pour tous $X > 0$ comme suit :.

$$(\theta + 1 + \theta x) e^{-\theta x} = (\theta + 1)(1 - u). \tag{2.6}$$

En multipliant par $-\exp(-\theta - 1)$ l'équation (2.6), on obtient :

$$-(\theta + 1 + \theta x) \exp(-\theta - 1 - \theta x) = (\theta + 1)(u - 1) \exp(-\theta - 1). \tag{2.7}$$

D'après l'équation (2.7), conjointement avec l'équation (1.3), on voit que $-(\theta + 1 + \theta x)$ est la fonction W de Lambert de l'argument réel $(\theta + 1)(u - 1) \exp(-\theta - 1)$. Alors, on a

$$W\left(\frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)}(u - 1)\right) = -(\theta + 1 + \theta x), 0 < u < 1. \tag{2.8}$$

Toujours, pour tout $\theta \succ 0$ et $x \succ 0$ il est immédiat que $(\theta + 1 + \theta x) > 1$ et il peut également être vérifié que puisque $u \in (0, 1)$. Il pour, en prenant en compte les propriétés de la branche négative de la fonction W de Lambert a présenté en première chapitre, l'équation (2.8) devient

$$W_{-1}\left(\frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)}(u - 1)\right) = -(\theta + 1 + \theta x). \tag{2.9}$$

Ce qui implique le résultat. la preuve du théorème est terminée $\blacksquare$.

2.9 Estimation

2.9.1 Estimation par la méthode des moments (MoM)

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, .., X_n$, de la distribution de Lindley (2.1), l'estimateur des moments (MoM) de θ est :

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{-\left(\overline{X}-1\right)+\sqrt{\left(\overline{X}-1\right)^2+8\overline{X}}}{2\overline{X}}, \overline{X}>0. \tag{2.10}$$

Le théorème suivant montre que l'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est biaisé.

Théorème 2.5 L'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est positivement biaisée, i.e. $E\left(\hat{\theta}\right)-\theta>0$.

Preuve. Soient $\hat{\theta}_{MoM}=g\left(\overline{X}\right)$ et $g\left(t\right)=\frac{-(t-1)+\sqrt{(t-1)^2+8t}}{2t}$, $\forall t>0$.
Comme $g''\left(t\right)=\frac{1}{t^3}\left[1+\frac{3t^3+15t^2+9t+1}{\left[(t-1)^2+8t\right]^{\frac{3}{\acute{e}}}}\right]>0$, $g(t)$ est strictement convexe.
Ainsi, par l'inégalité de Jensen, on a $E\left(g\left(\overline{X}\right)\right)>g\left[E\left(\overline{X}\right)\right]$. Enfin, étant donné que

$$E\left(g\left(\overline{X}\right)\right)=g\left(\mu\right)=g\left(\frac{\theta+2}{\theta\left(\theta+1\right)}\right)=\theta,$$

On obtient

$$E\left(\hat{\theta}_{MoM}\right)>\theta.$$

Le théorème suivant donne la loi limite de $\hat{\theta}_{MoM}$.

Théorème2.6 L'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est convergeant et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta\right)\overset{D}{\rightarrow}N\left(0,\frac{1}{\sigma^2}\right).$$

L'intervalle de confiance de θ pour un seuil de confiance $100\left(1-\alpha\right)\%$ est donné par :

$$\hat{\theta}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n\hat{\sigma}^2}}.$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le $(1-\frac{\alpha}{2})$ percentile de la distribution normale standard.

Preuve. Étant donné μ est finie, $\overline{X} \overset{P}{\to} \mu$. $g(t)$ est une fonction continue à $t=\mu$, $g\left(\overline{X}\right) \overset{P}{\to} g\ (\mu)$, c'est-à-dire $\hat{\theta} \overset{P}{\to} \theta$. Comme $\sigma^2 < \infty$, par le théorème central limite, on a

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right) \overset{D}{\to} N\left(0,\sigma^2\right).$$

En outre, puisque $g(\mu)$ est différentiable et $g^{'}(\mu) \neq 0$, par la méthode Delta, on a :

$$\sqrt{n}\left(g\left(\overline{X}\right)-g\left(\mu\right)\right) \overset{D}{\to} N\left(0,\left[g^{'}\left(\mu\right)\right]^2\sigma^2\right).$$

Enfin, étant donné que

$$g\left(\overline{X}\right)=\hat{\theta}_{MoM}, g\left(\mu\right)=\theta, \quad et \qquad g^{'}\left(\mu\right)=\frac{-1}{2\mu^2}\left[1+\frac{1+3\mu}{\sqrt{\left(\mu-1\right)^2+8\mu}}\right]=-\frac{1}{\sigma^2}.$$

2.9.2 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soient $X_i \sim LD(\theta), i=\overline{1,n}$ n variables aléatoires. La fonction de logvraisemblance est :

$$\ln l(x_i;\theta)=2n\ln\theta-n\ln(\theta+1)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(x_i+1\right)-n\theta\overline{X}.$$

L'estimateurs de la méthode du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial\ln l(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta}=\frac{2n}{\theta}-\overline{X}-\frac{n}{(\theta+1)}=0.$$

On obtient

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{-\left(\overline{X}-1\right)+\sqrt{\left(\overline{X}-1\right)^{2}+8\overline{X}}}{2\overline{X}}, \overline{X} > 0.$$

Avec

$$\frac{\partial^2 \ln l(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{2n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{(\theta x_i+\theta)^2} < 0.$$

Remarque2.3 L'estimateur de la méthode des moments $\hat{\theta}_{MoM}$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ du paramètre θ sont les mêmes.

2.10 Simulation

Cette section étudie le comportement des estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ pour un échantillon de taille finie (n). La simulation est réalisée pour chaque couple $(\theta; n)$, où $\theta = 0.1, 1, 9$ et $n = 20, 40, 60, 80, 100$. Alors on a l'algorithme suivant :

- Choisir les valeurs initiales de θ_0 pour spécifier la distribution de Lindley ;

- Choisir la taille de l'échantillon n ;

- Générer N échantillons indépendants de taille n de $LD(\theta)$;

- Calculer les estimations $\hat{\theta}_{MV}$ de θ pour chacun des N échantillons ;

- Calculer :

(i) La moyenne des estimateurs obtenus sur tous les N échantillons

$$biais\ moyen\,(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right).$$

(ii) L'erreur quadratique moyenne EQM des estimations simulées

$$EQM\,(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right)^2.$$

Tableau 2.1 : Biais moyens de l'estimateur $\hat{\theta}$

n	$\theta = 0.1$	$\theta = 1$	$\theta = 9$
20	0.00265	0.03068	0.41459
40	0.00118	0.01699	0.18019
60	0.00090	0.01060	0.13665
80	0.00061	0.00746	0.09073
100	0.00058	0.00570	0.07728

Tableau 2.2 : Erreur quadratique moyenne EQM des estimations simulées

n	$\theta = 0.1$	$\theta = 1$	$\theta = 9$
20	0.00028	0.03335	4.25425
40	0.00013	0.01543	1.91203
60	0.00009	0.01024	0.22017
80	0.00007	0.00752	0.90044
100	0.00005	0.00590	0.70490

Remarque2.4

(i) Le tableau 2.1 présente un biais positif, comme indiqué dans le *théorème 2.3*. Le tableau montre également que le biais diminue (augmente) quand $n(\theta)$ augmente respectivement.

(ii) Le tableau 2.2 montre que l'erreur quadratique moyenne diminue (augmente) lorsque n (θ) augmente respectivement .

2.11 Distribution discrète de Poisson–Lindley

Une distribution composée de Poisson peut être obtenue en composant la distribution de Poisson et une distribution due à Lindley. Cette distribution a été introduit par Sankaran [16] pour modéliser des données de comptage.

Supposons que le paramètre λ de la distribution de Poisson à une distribution appartenant à la famille exponentielle de distribution donnée par

$dF(\lambda) = e^{\lambda\Phi}h(\lambda)B(\Phi)d\lambda$,où $h(\lambda) = 1+\lambda$ et $B(\Phi) = \frac{[-\Phi]^2}{(1-\Phi)}$.

Alors la distribution de Poisson composée est :

$$\begin{aligned} P_x(\Phi) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}dF(\lambda) \\ &= \frac{B(\Phi)}{x!}\left[\int_0^\infty e^{(\Phi-1)\lambda}\lambda^x d\lambda + \beta\int_0^\infty e^{(\Phi-1)\lambda}\lambda^{x+1}d\lambda\right] \\ &= \frac{\Phi^2}{(1-\Phi)}\left(\frac{1-\Phi+x+1}{(1-\Phi)^{x+2}}\right). \end{aligned}$$

Alors on remplace Φ par $-\theta$ on trouve :

$$P_x(\theta) = \theta^2\frac{(x+2+\theta)}{(\theta+1)^{x+3}}.$$

La fonction de masse de Poisson-Lindley (PLD) est :

$$f_{PLD}(x;\theta) = P_x(\theta) = \theta^2\frac{(x+2+\theta)}{(\theta+1)^{x+3}}, \quad x = 0,1,...,\ \theta > 0. \tag{2.11}$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F_{PLD}(x) = 1 - \frac{\theta^2+3\theta+1-\theta x}{(\theta+1)^{x+3}}, \quad x = 0,1,...,\ \theta > 0. \tag{2.12}$$

Les figures $2.5, 2.6$ *et* 2.7 représentent la fonction de masse de la distribution de Poisson Lindley pour quelques valeurs de θ

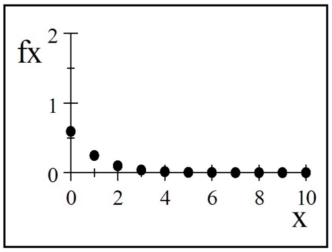

FIG 2.5 :Présentation graphique de la fonction de de masse de PLD pour $\theta = 2$.

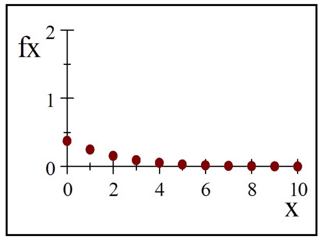

FIG 2.6 :Présentation graphique de la fonction de de masse de PLD pour $\theta = 1$.

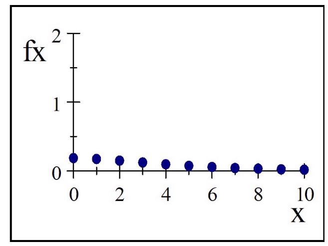

FIG 2.7 :Présentation graphique de la fonction de de masse de PLD pour θ =0.5.

La fonction génératrice de Poisson-Lindley (PLD) est :

$$M_X(s) = E\left(e^{SX}\right) = \frac{\theta^2}{\theta+1}\frac{2+\theta-s}{(\theta+1-s)^2}.$$

2.11.1 Moments et Mesures Connexes

Soit $X \rightsquigarrow PLD(\theta)$, La moyenne et la variance de X sont :

$$E(X) = \frac{2+\theta}{\theta(\theta+1)}, \tag{2.13}$$

$$E\left(X^2\right) = \frac{\theta^2+4\theta+6}{\theta^2(\theta+1)^2}, \tag{2.14}$$

$$Var(X) = \frac{\theta^3+4\theta^2+6\theta+2}{\theta^2(\theta+1)^2}. \tag{2.15}$$

le coefficient d'asymétrie$\left(\sqrt{\beta_1}\right)$ et le coefficient d'aplatissement(β_2) sont :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\beta_1} &= \frac{2(\theta+1)^4(\theta+2)-\theta^3(\theta+2)(\theta+3)}{\left[2(\theta+1)^3-\theta^2(\theta+2)\right]^{\frac{3}{2}}}, \\
\beta_2 &= 3+\frac{2(\theta+1)^5\left[(\theta+3)^2-3\right]-\theta^4(\theta+2)\left[(\theta+4)^2-3\right]}{\left[2(\theta+1)^3-\theta^2(\theta+2)\right]^2}.
\end{aligned}$$

2.11.2 Fonction Quantile de la distribution de Poisson Lindley

Notons Q_X la fonction quantile de X défini selon la formule (1.5).

Désormais, $\ln(\cdot)$ désigne le logarithme naturel et $[t]$ représente le plafond d'un nombre réel t, qui est, $t := inf\{k \in Z : k \geq t\}$. Avec la précédente notation, on est en mesure de déclarer ce qui suit.

Théorème2.7 Pour tout $\theta > 0$, la fonction quantile de la distribution de Poisson Lindley X est

$$Q_X(u) = -\frac{\theta^2+3\theta+1}{\theta} - \frac{1}{\ln(\theta+1)} W_{-1}\left(\frac{\ln(\theta+1)}{\theta(\theta+1)^{\frac{(\theta^2+1)}{\theta}}}(u-1)\right), \qquad 0 < u < 1. \tag{2.16}$$

Où W_{-1} désigne la branche négative de la fonction W de Lambert.

Preuve. Pour tout $\theta > 0$, soit $u \in (0,1)$ Afin d'obtenir l'expression de Q_X, on a pour résoudre l'équation $F_X(x) = u$ par rapport à k, pour tout $k \geq 0$, comme suit :

$$\frac{\theta^2+3\theta+1+\theta k}{(\theta+1)^k} = 1-u, k \geq 0. \tag{2.17}$$

l'équation (2.17) peut être écrit comme suit :

$$k + \frac{(\theta+1)^3}{\theta}(u-1)(\theta+1)^k = -\left(\frac{\theta^2+3\theta+1}{\theta}\right). \tag{2.18}$$

Maintenant, on applique le lemme1.1 pour résoudre l'équation (2.18) par rapport à k. Par conséquent, l'égalité suivante est réalisée :

$$W\left(\frac{\ln(\theta+1)}{\theta(\theta+1)^{\frac{\theta^2+1}{\theta}}}(u-1)\right) = -(k + \frac{\theta^2+3\theta+1}{\theta})\ln(\theta+1). \tag{2.19}$$

Voyant maintenant l'équation. (2.19). Pour tout $\theta > 0, k \geq 0$ et $u \in (0,1)$ les inégalités suivantes sont vérifiées :

(i) $\frac{-1}{e} < \frac{\ln(\theta+1)}{\theta(\theta+1)^{\frac{\theta^2+1}{\theta}}}(u-1) < 0,$

et

(ii) $(k + \dfrac{\theta^2+3\theta+1}{\theta})\ln(\theta+1) > 1.$

En vertu des inégalités (i) et (ii) ci-dessus ainsi que les propriétés de la fonction W de Lambert, la branche réelle de W impliqué dans l'équation (2.19) est précisément la branche W_{-1}, négative, ce qui conduit au résultat souhaité. Ceci achève la démonstration du théorème 2.7.■

2.11.3 Estimation

Maximum de vraisemblance

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$, de la distribution de Poisson-Lindley discrète (2.11), la fonction de logvraisemblance est :

$$\ln l(x_i; \beta, \theta) = 2n \ln \theta - n\left(\overline{x} + 3\right) \ln\left(1 + \theta\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[x_i + \theta + 2\right].$$

Sankaran [16] a montré que l'estimateur de la méthode du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial \ln l(x_i, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - n(\frac{\overline{x} + 3}{1 + \theta}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + \theta + 2} = 0. \tag{2.20}$$

Sankaran [16] a déclaré que la résolution de l'équation (2.20) est équivalente à la résolution d'un polynôme de degré $(n + 1)$, et l'équation (2.20) peuvent avoir plusieurs solutions. Dans ce qui suit, on montre que l'équation (2.20) a une solution unique pour tout n.

Théorème 2.8 l'équation (2.20) est équivalent à

$$\zeta\left(\theta\right) = 2n - n\overline{x}\theta - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i + 1\right)\theta}{x_i + \theta + 2} = 0.$$

La fonction $\zeta\left(\theta\right)$ est strictement décroissante en θ, puisque

$$\zeta'\left(\theta\right) = -n\overline{x} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i + 1\right)\left(x_i + 2\right)}{\left(x_i + \theta + 2\right)^2} < 0.$$

Comme $\zeta\left(0\right) = 2n$ et $\zeta\left(\infty\right) = -\infty$, il en résulte que $\zeta\left(\theta\right)$ traversera l'axe θ qu'une seule fois, c'est-à-dire il existe un unique $\hat{\theta}$ tel que $\zeta\left(\theta\right) = 0$.

Remarque2.6 Bien qu'efficace de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ mais ce dernier n$'$ est pas simple obtenu et il peut être suffisant pour des raisons pratiques d'utiliser l'estimation des moments

Méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$, de la distribution de Poisson-Lindley discrète (2.11), l'estimateur des moments (MoM) de θ est :

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{-\left(\overline{X}-1\right)+\sqrt{\left(\overline{X}-1\right)^2+8\overline{X}}}{2\overline{X}}, \overline{X} > 0. \tag{2.21}$$

Le théorème suivant montre que l'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est positivement biaisé.

Théorème 2.9 L'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est positivement biaisée, c'est-à-dire

$$E\left(\hat{\theta}\right) - \theta > 0$$

Preuve. Soit $\hat{\theta} = g\left(\overline{X}\right)$ *et* $g\left(t\right) = \frac{-(t-1)+\sqrt{(t-1)^2+8t}}{2t}$ $\forall t > 0$.

Comme $g''\left(t\right) = \frac{1}{t^3}\left[1+\frac{3t^3+15t^2+9t+1}{\left[(t-1)^2+8t\right]^{\frac{3}{2}}}\right] > 0$, $g(t)$ est strictement convexe.

Ainsi, par l'inégalité de Jensen, on a $E\left(g\left(\overline{X}\right)\right) > g\left[E\left(\overline{X}\right)\right]$. Enfin, étant donné que

$$E\left(g\left(\overline{X}\right)\right) = g\left(\mu\right) = g\left(\frac{\theta+2}{\theta\left(\theta+1\right)}\right) = \theta,$$

On obtient

$$E\left(\hat{\theta}_{MoM}\right) > \theta.$$

Le théorème suivant donne la loi limite de $\hat{\theta}_{MoM}$.

Théorème 2.10. L'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est convergeant et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{MoM}-\theta\right)\xrightarrow{D}N\left(0,\vartheta^{2}\left(\theta\right)\right).$$

Où

$$\vartheta^{2}\left(\theta\right)=\frac{\theta^{2}\left(\theta+1\right)^{2}\left(\theta^{3}+4\theta^{2}+6\theta+2\right)}{\left(\theta^{2}+4\theta+2\right)^{2}}.$$

Preuve. Etant donné $\mu<\infty,\overline{X}\xrightarrow{P}\mu.g\left(t\right)$ est une fonction continue à $t=\mu,g\left(\overline{X}\right)\xrightarrow{P}g$ $\left(\mu\right)$, c'est-à-dire $\hat{\theta}_{MoM}\xrightarrow{P}\theta$. Comme $\sigma^{2}<\infty$,

par le théorème central limite, on a :

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)\xrightarrow{D}N\left(0,\sigma^{2}\right).$$

En outre, puisque $g\left(\mu\right)$ est différentiable et $g^{'}\left(\mu\right)\neq0$, par la méthode Delta, on a

$$\sqrt{n}\left(g\left(\overline{X}\right)-g\left(\mu\right)\right)\xrightarrow{D}N\left(0,\left[g^{'}\left(\mu\right)\right]^{2}\sigma^{2}\right).$$

Enfin, étant donné que

$$g\left(\overline{X}\right)=\hat{\theta}_{MoM},g\left(\mu\right)=\theta,\quad et\quad g^{'}\left(\mu\right)=\frac{-1}{2\mu^{2}}\left[1+\frac{1+3\mu}{\sqrt{\left(\mu-1\right)^{2}+8\mu}}\right]=-\frac{\theta^{2}\left(\theta+1\right)^{2}}{\left(\theta^{2}+4\theta+2\right)}.$$

En conséquence du théorème2.6, L'intervalle de confiance de θ pour un seuil de confiance $100\left(1-\alpha\right)\%$ est donné par :

$$\hat{\theta}_{MoM}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n\hat{\sigma}^{2}}}.$$

où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ percentile de la distribution normale standard.

2.11.4 Simulation

Dans ce paragraphe, on étudie le comportement des estimateurs MoM pour une taille d'échantillon n fini : La simulation est réalisée pour chaque couple $(\theta; n)$, où $\theta = \frac{1}{3}, 1, 3$ et $n = 20, 40, 60, 80, 100$.

Alors on a l'algorithme suivant :

- Choisissez les valeurs initiales de θ_0 pour spécifier la distribution de PLD ;

- Choisir la taille de l'échantillon n ;

- Générer N échantillons indépendants de taille n de $LD(\theta)$;

- Calculer les estimateurs $\hat{\theta}_{MV}$ de θ pour chacun des N échantillons ;

- Calculer :

(i) La moyenne des estimateurs obtenus sur tous les N échantillons

$$average\ bais\,(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right).$$

(ii) L'erreur quadratique moyenne EQM des estimations simulées

$$EQM\,(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right)^2.$$

Tableau 2.3 : Biais moyens des estimations simulées.

n	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = 1$	$\theta = 3$
20	0.011908	0.064915	0.588291
40	0.005658	0.033095	0.230338
60	0.003531	0.021611	0.149065
80	0.002471	0.014849	0.107402
100	0.001887	0.011892	0.083455

Tableau 2.4 : Erreur quadratique moyenne EQM des estimations simulées .

n	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = 1$	$\theta = 3$
20	0.004637	0.080496	4.424323
40	0.002104	0.032186	0.963864
60	0.001349	0.020220	0.538328
80	0.000999	0.014581	0.366871
100	0.00077800	0.011507	0.278360

Remarque 2.4 :

(i) Le tableau 2.**3** présente un biais positif, comme indiqué dans le théorème 1.3. Le tableau montre également que le biais diminue (augmente) quand n (θ) augmente (respectivement).

(ii) Le tableau 2.**4** montre que l'erreur quadratique moyenne diminue (augmente)lorsque $n(\theta)$ augmente respectivement .

2.12 Distributions à deux et trois paramétres de Lindley

Dans cette section on va déterminer quelques distributions de deux et trois paramètres dont la distribution de Lindley est un cas particulier

2.12.1 Distribution Quasi Lindley

La distribution Quasi Lindley(QLD) avec deux paramètres α et θ est définie par sa fonction de densité de probabilité

$$f(x;\alpha,\theta)=\frac{\theta^2(\alpha+x\theta)e^{-\theta x}}{\alpha+1};\ x>0,\theta>0,\alpha>-1. \tag{2.22}$$

Il est facile de voir que si $\alpha=\theta$, l'équation (2.22) de QLD se réduit à la fonction de distribution de Lindley (2.1) et si $\alpha=0$, elle réduit à la distribution $Gamma$ $(2,\theta)$. La fonction de densité (2.22) de QLD peut être montré sous forme de mélange des distributions Exponentielle (θ) et $Gamma\,(2,\theta)$ comme suit :

$$f(x;\alpha,\theta)=pf_1(x)+(1-p)\,f_2(x)$$

Où $p=\frac{\alpha}{\alpha+1}$, $f_1(x)=\theta e^{-\theta x}$ et $f_2(x)=\theta^2 xe^{-\theta x}$.(pour plus de détails voir. Shanker et al.(2013) [23]).

La fonction de répartition correspondante est :

$$F(x)=1-\frac{1+\alpha+\theta x}{\alpha+1}e^{-\theta x};x>0,\theta>0,\alpha>-1. \tag{2.23}$$

Le moment d'ordre k de la distribution Quasi Lindley est :

$$\mu_k^{'} = E\left(X^k\right) = \frac{\Gamma(k+1)(\alpha+k+1)}{\theta^K(\alpha+1)},\ k = 1, 2, ...$$

d'où, on a

$$\mu_1^{'} = \frac{(\alpha+2)}{\theta(\alpha+1)}, \mu_2^{'} = \frac{2(\alpha+3)}{\theta^2(\alpha+1)}, \mu_3^{'} = \frac{6(\alpha+4)}{\theta^3(\alpha+1)}, \mu_4^{'} = \frac{24(\alpha+5)}{\theta^4(\alpha+1)}.$$

La fonction de logvraisemblance de la distribution Quasi Lindley est :

$$\ln L(x;\alpha,\theta) = n\ln\theta - n\ln(1+\alpha) + \sum_{i=0}^{n}\ln(\alpha + x_i\theta) - n\theta\bar{X}.$$

Estimation par la méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$, de QLD, les estimateurs des moments $\hat{\theta}$ de θ et $\hat{\alpha}$ de α peuvent être obtenus comme suit :

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\hat{\alpha}+2}{\hat{\alpha}+1}\right)\frac{1}{\overline{\overline{X}}}, \qquad \bar{X} > 0. \tag{2.24}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{-1}{k-2}\left[2k + \sqrt{2}\sqrt{2-k} - 4\right] \tag{2.25}$$

Où

$$\frac{\mu_2^{'}}{\mu_1^{'}} = k = \frac{2(\alpha+3)(\alpha+1)}{(\alpha+2)^2}.$$

2.12.2 Distribution de Deux-Paramètres de Lindley

La distribution de Deux Paramètres de Lindley ($Tow\ Parameter\ Lindley$ $(TowPLD)$) avec les paramètres α et θ est définie par sa fonction de densité de probabilité

$$f(x;\alpha,\theta) = \frac{\theta^2}{\theta+\alpha}(1+\alpha x)e^{-\theta x};\ x > 0, \theta > 0, \alpha > -\theta. \tag{2.26}$$

Il est facile de voir que si $\alpha = 1$, la fonction (2.26) de $TowPLD$ réduit à la fonction de distribution de LD(2.1) et si $\alpha = 0$, elle se réduit à la distribution Exponentielle (θ). La fonction de densité (2.26) de $TowPLD$ peut être montré sous forme de mélange des distributions Exponentielle (θ) et Gamma $(2, \theta)$ comme suit :

$$f(x; \alpha, \theta) = pf_1(x) + (1 - p)\, f_2(x)$$

Où $p = \frac{\theta}{\theta+\alpha}$, $f_1(x) = \theta e^{-\theta x}$ et $f_2(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$.(pour plus de détails voir. S.Sharma et al.(2013) [24]).

La fonction de répartition correspondante est :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + \alpha + \alpha\theta x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0, \alpha > -\theta. \tag{2.27}$$

Le moment d'ordre k de la distribution de Deux-Paramèteres de Lindley est :

$$\mu_k^{'} = E\left(X^k\right) = \frac{\Gamma\left(k+1\right)\left(\theta + \alpha + \alpha k\right)}{\theta^K\left(\theta + \alpha\right)}, k = 1, 2, ...$$

d'où, on a

$$\mu_1^{'} = \frac{(\alpha + 2\alpha)}{\theta\left(\theta + \alpha\right)}, \mu_2^{'} = \frac{2\left(\alpha + 3\alpha\right)}{\theta^2\left(\theta + \alpha\right)}, \mu_3^{'} = \frac{6\left(\alpha + 4\alpha\right)}{\theta^3\left(\theta + \alpha\right)}, \mu_4^{'} = \frac{24\left(\alpha + 5\alpha\right)}{\theta^4\left(\theta + \alpha\right)}.$$

La fonction de logvraisemblance de la distribution de deux-Paramètres de Lindley est:

$$\ln L(x; \alpha, \theta) = n \ln \theta^2 - n \ln\left(\alpha + \theta\right) + \sum_{i=0}^{n} \ln\left(1 + \alpha\theta x_i\right) - n\theta\bar{X}.$$

Estimation par la méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$, de Deux-Parameter de Lindley, les estimateurs des moments $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ et $\hat{\alpha}$ de α peuvent être obtenus comme suit :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\mu_2^{'}}\left(2\bar{X} + \sqrt{2}\sqrt{2\bar{X}^2 - \mu_2^{'}}\right), \qquad \overline{X} > 0. \tag{2.28}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\theta} - \bar{X}\hat{\theta}^2}{\bar{X}\hat{\theta} - 2}. \tag{2.29}$$

2.12.3 Distribution de Lindley Généralisée

La distribution de Lindley Généralisée (Generalized LindleyDistribution (GLD)) avec les paramètres α et θ est définie par sa fonction de densité de probabilité

$$f(x;\alpha,\theta,\gamma) = \frac{\theta^2 (\theta x)^{\alpha-1} (\alpha + \gamma x) e^{-\theta x}}{(\theta+\gamma)\Gamma(\alpha+1)};\ x,\theta,\alpha,\gamma > 0. \tag{2.30}$$

Il est facile de voir que si $\alpha = \gamma = 1$, la fonction (2.30) de GLD se réduit à la fonction de distribution de LD(2.1) , si $\gamma = 0$, elle se réduit à la distribution $Gamma\,(\alpha,\theta)$ et si $(\alpha,\gamma) = (1,0)$, elle se réduit à la distribution Exponentielle (θ). La fonction de densité (2.30) de GLD peut être montré sous forme de mélange des distributions $Gamma\,(\alpha,\theta)$ et $Gamma\ (\alpha+1,\theta)$ comme suit :

$$f(x;\alpha,\theta,\gamma) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x).$$

Où $p_1 = \frac{\theta}{\theta+\gamma}, p_2 = \frac{\gamma}{\theta+\gamma}$,$f_1(x) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x}$ et $f_2(x) = \frac{\theta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\theta x}$.(pour plus de détails voir. Dolati et al. (2010) [13]).

La fonction génératrice correspondante est :

$$M(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{\theta - t + \gamma}{\theta + \gamma}\right).$$

Les moments d'ordre 1,2 et 3 de la distribution de Lindley Généralisée sont :

$$\begin{aligned} \mu_1^{\prime} &= -\frac{1}{\theta+\gamma} + \frac{\alpha+1}{\theta}, \mu_2^{\prime} = -\frac{2(\alpha+1)}{\theta(\theta+\gamma)} + \frac{\alpha^2+3\alpha+2}{\theta^2}, \\ \mu_3^{\prime} &= \frac{\alpha+1}{\theta^2}(-3\alpha+6) + \frac{(\alpha+1)(\theta+\gamma)}{\theta}\left[(\alpha+1)^2 + \frac{3\alpha+5}{\theta^2}\right]. \end{aligned}$$

La fonction de logvraisemblance de la distribution de Lindley Généralisée est :

$$\begin{aligned} \ln L(x;\alpha,\theta,\gamma) &= n(\alpha+1)\ln\theta - n\ln(\gamma+\theta) - n\ln\Gamma(\alpha+1) + \\ &\quad + (\alpha-1)\sum_{i=0}^{n}\ln(x_i) + \sum_{i=0}^{n}\ln(\alpha+\gamma x_i) - n\theta\bar{X}. \end{aligned}$$

Estimation par la méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$ de taille n de la distribution GLD (2.30), les estimateurs des moments (MoM), $\hat{\gamma}$ de γ ,$\hat{\theta}$ de θ et $\hat{\alpha}$ de α sont la solution des équations des moments :

$$\begin{aligned} \alpha(\theta+\gamma) + \gamma - \bar{X}\theta(\theta+\gamma) &= 0 \\ -2(\alpha+1)\theta + \left(\alpha^2+3\alpha+2\right)(\theta+\gamma) - n\theta^2(\theta+\gamma) &= 0 \\ \frac{\alpha+1}{\theta^2}(-3\alpha+6) + \frac{(\alpha+1)(\theta+\gamma)}{\theta}\left[(\alpha+1)^2 + \frac{3\alpha+5}{\theta^2}\right] - K &= 0 \end{aligned}$$

Il est possible de calculer $\hat{\gamma}$,$\hat{\theta}$ et $\hat{\alpha}$ numériquement.mais en utilisant $\bar{X}, n = \mu_2^{\prime}$ et $k = \mu_3^{\prime}$.

Chapitre 3

Nouvelles distributions à deux paramètres et leurs applications

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on collecte des nouvelles distributions à deux paramètres dont on donne quelques propriétés à savoir :la fonction quantile, la courbe de Lorenz, l'estimation par la méthode des moments, l'estimation du maximum de vraisemblance et les distributions limites des statistiques d'ordre. Plusieurs simulations sont établies pour examiner le biais et l'erreur quadratique moyenne des estimateurs des paramètres obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et leur application dans l'analyse de survie.a

3.2 Distribution de Pseudo Lindley($PsLD$) et quelques propriétés

Dans cette section, on introduit la distribution de Pseudo Lindley [9] et étudier ses propriétés de base. Cette distribution de deux paramètres $\theta > 0 \quad et \ \beta \geqslant 1$, le premier est appelé paramètre d'échelle alors que β est le paramètre de mélange est défini comme un mélange d'Exp(θ) et de Gamma($2, \theta$)

Soit $Y_1 \sim Exp(\theta)$ et $Y_2 \sim Gamma(2, \theta)$ deux variables aléatoires indépendantes. Pour $\beta \geq 1$, on considère la variable aléatoire $X = Y_1$ et $X = Y_2$ avec les probabilités respectivement $P_1 = \frac{\beta-1}{\beta}$ et $P_2 = \frac{1}{\beta}$.

La fonction de densité de X est donnée par :

$$f_{PsLD}(x;\theta,\beta) = \frac{\theta\left(\beta - 1 + \theta x\right)e^{-\theta x}}{\beta}, \ x > 0, \theta > 0, \beta \geqslant 1. \tag{3.1}$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F_{PsLD}(x) = 1 - \frac{\left(\beta + \theta x\right)e^{-\theta x}}{\beta}; x > 0, \beta \geq 1, \theta > 0. \tag{3.2}$$

Remarque3.1

1)Si $\beta = \theta + 1$, cette distribution est la distribution de Lindley $LD\left(\theta\right)$.

2)Si $\beta = 1$, cette distribution est la distribution de $Gamma(2, \theta)$.

La première dérivée de $f_{PsLD}(x)$ est :

$$\frac{d}{dx}f_{PsLD}(x) = \frac{\theta^2\left(2 - \beta - \theta x\right)e^{-\theta x}}{\beta} = 0 \text{ donne } x = \frac{2 - \beta}{\theta}.$$

Il en résulte que :

(i) pour $1 \leq \beta < 2$, $\frac{d^2}{dx^2} f_{PsLD}(\hat{x}) < 0$ implique que $\hat{x} = \frac{2-\beta}{\theta}$ est l'unique point critique unique à laquelle $f_{PsLD}(x;\theta,\beta)$ est maximisée.

(ii) pour $\beta \geq 2$, $\frac{d}{dx} f_{PsLD}(x;\theta,\beta) \leq 0$, c'est-à-dire $f_{PsLD}(x;\theta,\beta)$ est décroissante en x.

Par conséquent, le mode de cette distribution est :

$$Mode(X) = \begin{cases} \frac{2-\beta}{\theta} & \forall\ 1 \leq \beta < 2 \\ \\ 0 & ailleurs. \end{cases} \tag{3.3}$$

Les figures 3.1 et 3.2 représentent la fonction de densité.et la fonction de répartition de la distribution de Pseudo Lindley pour quelques valeurs de (θ, β) .

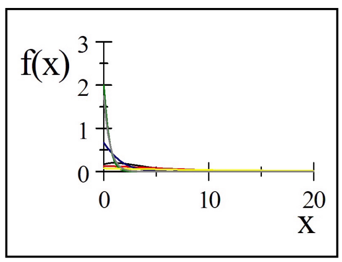

FIG. 3.1: représentation graphique la fonction de densité de PsLD pour quelques valeurs de (θ, β) .noir(0.5,1.5) ;rouge(0.25,2) ;bleu(1,3) ;vert(3,3),jaune(0.1,4) ;gris(2,8).

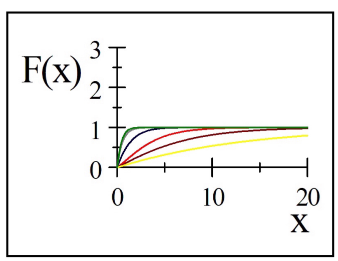

FIG. 3.2: représentation graphique la répartition de densitée de PsLD pour quelques valeurs de (θ, β) . noir(0.5,1.5) ;rouge(0.25,2) ;bleu(1,3) ;vert(3,3),jaune(0.1,4) ;gris(2,8).

3.2.1 Moments et Mesures connexes

Le moment d'ordre k de la distribution de Pseudo Lindley est :

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{k!\,(\beta+k)}{\theta^k\beta}, k = 1, 2, ...$$

Proposition 3.1 Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes de $PsLD(\theta,\beta)$. La fonction génératrice de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, est donnée par

$$M_S(t) = \frac{\theta^n\left((1-\beta)\,t+\theta\beta\right)^n}{\beta^n\,(t-\theta)^{2n}}.$$

d'où

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{\theta\left((1-\beta)\,t+\theta\beta\right)}{\beta\,(t-\theta)^2}. \tag{3.4}$$

Corollaire 3.1 *Soit* $X \sim PsLD(\theta,\beta)$, le moment d'ordre $1, 2$ et la variance de X sont :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\beta+1}{\theta\beta}, \mathbb{E}(X^2) = \frac{\beta+2}{\theta^2\beta}, Var(X) = \frac{\beta^2+2\beta-1}{\beta^2\theta^2}. \tag{3.5}$$

Théorème 3.1 *Soient* $X \sim PsLD(\theta,\beta)$*,* $M = Mode(X), me = Median(X)$ *et* $Moyenne(X) = \mu = E(X)$*. Alors*

$$M < me < \mu. \tag{3.6}$$

Preuve. Selon La fonction de répartition de $PsLD(\theta,\beta)$ pour tout x, θ et β

$$F(M) = \begin{cases} 1 - \frac{2e^{-(2-\beta)}}{\beta} & \forall\ 1 \leq \beta < 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}, \ F(me) = \frac{1}{2}.$$

et

$$F(\mu) = 1 - \frac{\left(\beta^2 + \beta + 1\right) e^{-\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)}}{\beta^2}.$$

Notons que $F(M)$ est une fonction croissante pour tous $\beta \succeq 1$. Il est facile de vérifier que $F(M) < F(me) < F(\mu)$, alors on a $M < me < \mu$.■

Le coefficient de variation (γ), le coefficient de dissymétrie$\left(\sqrt{\beta_1}\right)$ et le coefficient d'aplatissement(β_2) sont :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\sqrt{Var(X)}}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\beta - 1}}{\beta + 1}, \\
\sqrt{\beta_1} &= \frac{\mathbb{E}(X^3)}{(Var(X))^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\beta^2\,(\beta + 3)}{\left(\beta^2 + 2\beta - 1\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
\beta_2 &= \frac{\mathbb{E}(X^4)}{(Var(X))^2} = \frac{24\beta^3\,(\beta + 4)}{\left(\beta^2 + 2\beta - 1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.3 Toutes ces expressions sont indépendantes du paramètre θ et dépendantes uniquement du paramètre β, avec $6\sqrt{2} \prec \sqrt{\beta_1} \prec 6$ et $\beta_2 \succ 30$.

3.2.2 Fonction de hasard et Fonction de survie

Soit

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(X \prec x + \Delta x \mid X \succ x\right)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta\left(\beta + \theta x - 1\right)}{\beta + \theta x}.$$

et

$$S\left(x\right) = 1 - F(x) = \frac{\left(\beta + \theta x\right) e^{-\theta x}}{\beta}.$$

La fonction de taux de hasard et la fonction de survie de la distribution de Pseudo Lindley respectivement.

Proposition 3.2 Soit $h_{PsLD}(x)$ la fonction de taux hasard de X. Alors $h_{PsL}(x)$ est croissante.

Preuve. Il est facile de vérifier que $\frac{d}{dx}h_{PsLD}(x) = \frac{\theta^2}{(\beta+\theta x)^2} > 0$.

3.2.3 Ordres stochastiques

Théorème 3.2. Soient $X_i \sim PsL(\theta_i, \beta_i), i = 1, 2$ deux variables aléatoires.

Si $\theta_1 = \theta_2$ et $\beta_1 \geq \beta_2$, alors $X_1 \prec_{lr} X_2, X_1 \prec_{hr} X_2, X_1 \prec_s X_2$ et $X_1 \leq_{cx} X_2$.

Preuve . On a

$$\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)} = \frac{\theta_1\beta_2(\beta_1 - 1 + \theta_1 t)}{\theta_2\beta_1(\beta_2 - 1 + \theta_2 t)} e^{-(\theta_1-\theta_2)t}.$$

Pour simplifier, on utilise $\ln\left(\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)}\right)$ on peut trouver

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)}\right) = -\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \frac{\theta_1(\beta_2 - 1) - \theta_2(\beta_1 - 1)}{(\beta_1 - 1 + \theta_1 t)(\beta_2 - 1 + \theta_2 t)}.$$

À cet effet, si $\theta_1 = \theta_2$ et $\beta_1 \geq \beta_2$, on a $\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)}\right) \leq 0$. Cela signifie que $X_1 \prec_{lr} X_2$. Les états restants découlent des implications dans (1.6).

3.2.4 Courbe de Lorenz

La courbe de Lorenz pour la distribution de Pseudo Lindley est :

$$L(p) = 1 - (1-p)\beta\frac{\left[\beta\left(x\theta + 1\right) + x^2\theta^2 + x\theta + 1\right]}{\left[\beta + 1\right]\left[\beta + \theta x\right]}.$$

Où $x = F^{-1}(p)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (3.2).

3.2.5 Statistiques d'ordres extrêmes

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires qui suivent la distribution de Pseudo Lindley. Dans le théorème suivant on va étudier la loi asymptotique des valeurs extrêmes $M_n = max(X_1, ..., X_n)$ et $m_n = min(X_1, ..., X_n)$.

Théorème3.3 Pour la fonction de répartition définie dans (3.2), on constate que :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(t+x)}{1-F(t)} = exp(-\theta x).$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(tx)}{F(t)} = x.$$

Ainsi, il résulte du **théorème 1.4 (** Leadbetter et al.[19] **)** qu'il doit y avoir constante de normalisation $a_n > 0, b_n, c_n > 0$ et d_n de telle sorte que :

$$Pr\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \to exp\left(-\exp(-\theta x)\right).$$

et

$$Pr\{c_n(m_n - d_n) \leq x\} \to 1 - \exp\left(-x\right). \tag{3.7}$$

Comme $n \to \infty$. La forme des constantes de normalisation peut également être déterminée. Par exemple, en utilisant le **corollaire 1.1(** Leadbetter et al. [19]), on peut voir que $a_n = 1$ et $b_n = F^{-1}(1 - 1/n)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (3.2).

3.2.6 Fonction Quantile de la distribution de Pseudo Lindley

D'après la fonction de répartition de la distribution de Pseudo Lindley définie en (3.2), il convient de noter qu'est continue et strictement croissante de sorte que la fonction de quantile X est $Q_X(u) = F_X^{-1}(u), 0 \prec u \prec 1$. Dans le résultat suivant, on donne une expression explicite de Q_X en fonction de la fonction W de Lambert.

Théorème3.4 Pour tout $\theta \succ 0$ *et* $\beta \succ 1$, la fonction quantile de X qui suit la distribution de Pseudo Lindley est

$$Q_X(u) = -\frac{\beta}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(\beta e^{-\beta}(u-1)\right), \qquad 0 \prec u \prec 1, \tag{3.8}$$

Où W_{-1} désigne la branche négative de la fonction W de Lambert.

Preuve.Voir (Zeghdoudi et Nedjar (2017))[10].

3.2.7 Estimation

Estimation par la méthode des moments (MoM)

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$, de la distribution de Pseudo Lindley (3.1), en utilisant le premier moment m et la variance s^2 on a :

$$m = \frac{\beta + 1}{\theta\beta}, \quad s^2 = \frac{\beta^2 + 2\beta - 1}{\beta^2\theta^2}.$$

On résout ce système non linéaire pour tout $s \succ 0, m \succ 0$, pour trouver les estimateurs des moments $\hat{\theta}_{MoM}$ et $\hat{\beta}_{MoM}$ de θ et β respectivement comme suit :

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{2m + \sqrt{2}\sqrt{m^2 - s^2}}{m^2 + s^2} \qquad \text{et} \qquad \hat{\beta}_{MoM} = \frac{m^2 + s^2}{m^2 - s^2 + \sqrt{2}m\sqrt{m^2 - s^2}}. \tag{3.9}$$

Le théorème suivant montre que l'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est biaisé.

Théorème 3.5 L'estimateur des moments $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est positivement biaisée, c'est-à-dire

$$E\left(\hat{\theta}_{MoM}\right) - \theta \succ 0.$$

Preuve. Soient $\hat{\theta}_{MoM} = N(m)$ et $\quad N(t) = \dfrac{\beta+1}{t\beta}$, pour $t > 0$, on a

$$\frac{d^2}{dt^2}N(t) = \frac{2\left(\beta+1\right)}{\beta t^3} > 0.$$

$N(t)$ est strictement convexe. Maintenant, par l'inégalité de Jensen, on a $\mathbb{E}(N(m)) \succ N\left(\mathbb{E}(m)\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(m) = N(\mu) = N\left(\frac{\beta+1}{\theta\beta}\right) = \theta$, $E(\hat{\theta}) > \theta$. Alors $\hat{\theta}_{MoM}$ est positivement biaisé.■

Théorème 3.6 L'estimateur des moments (MoM) $\hat{\beta}_{MoM}$ de β est positivement biaisé, c'est-à-dire

$$E\left(\hat{\beta}_{MoM}\right) - \beta \succ 0$$

Preuve. Voir Théorèm4 (Zeghdoudi et Nedjar (2016))[9].■

Le théorème suivant donne la loi limite de $\hat{\theta}$.

Théorème 3.7 L'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est convergeant et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

L'intervalle de confiance de θ pour un seuil de confiance $100\left(1-\alpha\right)\%$ est donné par :

$$\hat{\theta}_{MoM} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\overset{\wedge}{\sigma}^2}}.$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le $(1-\frac{\alpha}{2})$ percentile de la distribution normale standard.

Preuve. Soient $\hat{\theta}_{MoM} = g(m)$ et $g(t) = \frac{\beta+1}{t\beta}$, étant donné aussi m est finie, $m \xrightarrow{P} \mu$. $g(t)$ est une fonction continue à $t = m$, $g(m) \xrightarrow{P} g(\mu)$, c'est-à-dire $\hat{\theta}_{MoM} \xrightarrow{P} \theta$.

Comme $\sigma^2 \prec \infty$, par le théorème central limite, on a

$$\sqrt{n}(m-\mu) \xrightarrow{D} N\left(0, \sigma^2\right).$$

En outre, puisque $g(\mu)$ est différentiable et $g^{'}(\mu) \neq 0$, par la méthode Delta, on a :

$$\sqrt{n}(g(m) - g(\mu)) \xrightarrow{D} N\left(0, \left[g^{'}(\mu)\right]^2 \sigma^2\right).$$

Enfin, étant donné que :

$$g(m) = \hat{\theta}_{MoM},\ g(\mu) = \theta,\ et\ g^{'}(\mu) = -\frac{\beta+1}{\mu\beta}.$$

Théorème3.8 L'estimateur $\hat{\beta}_{MoM}$ de β est convergeant et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{MoM} - \beta\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

L'intervalle de confiance de β pour un seuil de confiance $100(1-\alpha)\%$ est donné par :

$$\hat{\beta}_{MoM} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\overset{\wedge}{\sigma}^2}}.$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est $(1-\frac{\alpha}{2})$ le percentile de la distribution normale standard.

Preuve. Soient $\hat{\beta}_{MoM} = N(m)$ et $N(t) = \frac{1}{t\theta-1}$.

Etant donné m est finie, $m \xrightarrow{P} \mu$. $N(t)$ est une fonction continue à $t = m$, $N(m) \rightarrow \overset{P}{N}(\mu)$, c'est-à-dire $\hat{\beta}_{MoM} \xrightarrow{P} \beta$. Comme $\sigma^2 \prec \infty$, par le théorème central limite, on a :

$$\sqrt{n}(m-\mu) \xrightarrow{D} N\left(0, \sigma^2\right).$$

En outre, puisque $N(\mu)$ est différentiable et $N^{'}(\mu) \neq 0$, par la méthode Delta, on a :

$$\sqrt{n}\left(N(m) - N(\mu)\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \left[N^{'}(\mu)\right]^{2}\sigma^{2}\right).$$

Enfin, étant donné que

$$N(m) = \hat{\beta}_{MoM},\ N(\mu) = \beta, \quad et \quad N^{'}(\mu) = -\frac{\theta}{(\mu\theta - 1)^{2}}.$$

L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soient $X_i \sim PsLD(\theta, \beta)$, $i = \overline{1, n}$ n variables aléatoires. La fonction de logvraisemblance est :

$$\ln l(x_i; \theta, \beta) = n\ln\theta - n\ln\beta + \sum_{i=1}^{n}\ln(\beta - 1 + \theta x_i) - \theta\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{3.10}$$

Les équations des dérivées de $\ln l(x_i; \theta, \beta)$ par rapport à θ et β sont ainsi obtenus sous la forme :

$$\frac{\partial \ln l(x_i; \theta, \beta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta - 1 + \theta x_i}\right). \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \ln l(x_i; \theta, \beta)}{\partial\beta} = \frac{-n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\beta - 1 + \theta x_i}\right). \tag{3.12}$$

Les deux équations (3.11) et (3.12) ne peut pas résoudre directement, on doit utiliser la méthode Fisher Scoring, on a :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\theta} & \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}_{\substack{\hat{\theta}=\theta_0 \\ \hat{\beta}=\beta_0}} \begin{bmatrix} \hat{\theta} - \theta_0 \\ \hat{\beta} - \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta} \end{bmatrix}_{\substack{\hat{\theta}=\theta_0 \\ \hat{\beta}=\beta_0}} \tag{3.13}$$

Où, $\frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{(\beta-1+\theta x_i)^2}\right)$; $\frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta^2} = \frac{n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(\beta-1+\theta x_i)^2}\right)$ et $\frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\theta} = \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\beta} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta-1+\theta x_i}\right)$.

L'équation (3.13) peut se résoudre de façon itérative où θ_0 *et* β_0 sont les valeurs initiales de θ et β respectivement.

Les estimateurs dans le cas de l'observation unique (disons x_i) pour le vecteur de paramètres (θ, β) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{X}. \\ \widehat{\beta}_{MV} = \frac{1}{X-1}. \end{cases} \tag{3.14}$$

et

$$\begin{cases} E\left(\hat{\theta}_{MV}\right) = \frac{\beta+1}{\theta\beta} = m. \\ E\left(\widehat{\beta}_{MV}\right) = \frac{\beta+\theta+1}{\beta\theta}e^{-\theta}. \end{cases} \tag{3.15}$$

3.3 Distribution discrète de Poisson-Pseudo Lindley $(PPsLD)$

Une distribution composée de Poisson peut être obtenue en composant la distribution de Poisson et une distribution due à Pseudo Lindley.on a

$dF(\lambda) = e^{\lambda\Phi}h(\lambda)B(\Phi)d\lambda$,où $h(\lambda) = (\beta - 1 - \Phi\lambda\ )$ et $B(\Phi) = \frac{-\Phi}{\beta}$.

Alors la distribution de Poisson composée est :

$$\begin{aligned} P_x(\Phi) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} dF(\lambda) \\ &= \frac{B(\Phi)}{x!}\left[(\beta-1)\int_0^\infty e^{(\Phi-1)\lambda}\lambda^x d\lambda + (-\Phi)\int_0^\infty e^{(\Phi-1)\lambda}\lambda^{x+1}d\lambda\right] \\ &= \frac{\Phi}{\beta}\left(\frac{1-\beta-\Phi\beta-\Phi x}{(1-\Phi)^{x+2}}\right). \end{aligned}$$

Alors on remplace Φ par $-\theta$ on trouve :

$$P_x(\theta) = \frac{\theta}{\beta}\left(\frac{\beta-1+\theta\beta+\theta x}{(\theta+1)^{x+2}}\right).$$

La fonction de masse de Poisson-Pseudo Lindley $(PPsLD)$ est :

$$f_{PPsL}(x;\theta,\beta) = \frac{\theta}{\beta}\frac{\beta-1+\theta\beta+\theta x}{(\theta+1)^{x+2}}, x = 0,1,...,\ \theta > 0, \beta \geq 1. \tag{3.16}$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F_{PPL}(x) = 1 - \frac{\theta\beta+\theta x+\theta+\beta}{\beta(1+\theta)^{x+2}}, x = 0,1,...,\ \theta > 0, \beta \geq 1. \tag{3.17}$$

Pour plus de détails voir (Zeghdoudi et Nedjar[27]).

Les figures 3.5, 3.6 et 3.7 représentent la fonction de masse de la distribution de Poisson-Pseudo Lindley pour quelques valeurs de θ et β.

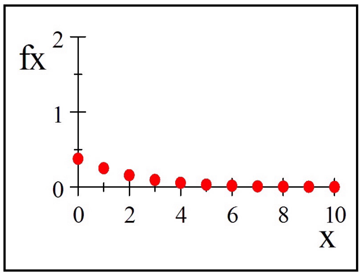

FIG 3.5 :Présentation graphique de la fonction de masse de PPsLD pour (θ, β)=(1,2).

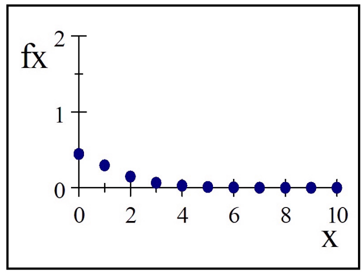

FIG 3.6 :Présentation graphique de la fonction de masse de PPsLD pour(θ, β) =(2,1).

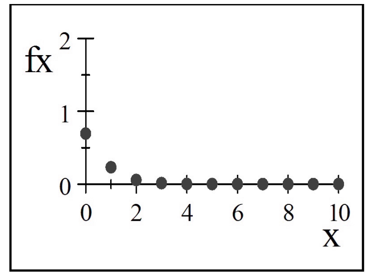

FIG 3.7 :Présentation graphique de la fonction de masse de PPsLD pour(θ, β) =(5,1).

Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 représentent la fonction de répartition de la distribution de Poisson Pseudo Lindley pour quelques valeurs de θ et β.

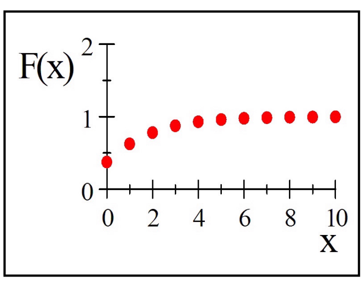

FIG 3.8 :Présentation graphique de la fonction de répartition de PPsLD pour(θ, β) =(1,2).

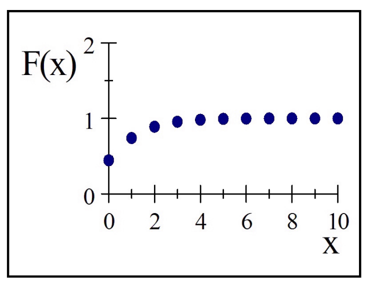

FIG 3.9.Présentation graphique de la fonction de répartition de PPsLD pour(θ, β)=(2,1).

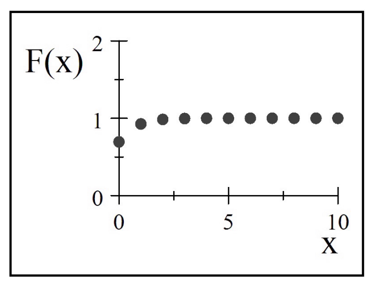

FIG 3.10 :.Présentation graphique de la fonction de répartition de PPsLD pour(θ, β) =(5,1).

Remarque 3.6 S*i* $\beta = 1$, *cette distribution est la distribution de Poisson- Lindley .*

3.3.1 Moments et Mesures connexes

Proposition 3.2 Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes de $PPsLD(\theta, \beta)$. La fonction génératrice de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, est donnée par :

$$M_S(t) = \left(\tfrac{\theta}{\beta}\right)^n \left(\tfrac{(1-\beta)e^t+\theta\beta+\beta-1}{(\theta+1-e^t)^2}\right)^n. \tag{3.18}$$

d'où

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \tfrac{\theta}{\beta}\tfrac{(1-\beta)e^t+\theta\beta+\beta-1}{(\theta+1-e^t)^2}. \tag{3.19}$$

Corollaire 3.2 *Soit* $X \sim PPsLD(\theta, \beta)$, l'espérance mathématique et la variance de X sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \tfrac{\beta+1}{\beta\theta}, \\ \mathbb{E}(X^2) &= \tfrac{\theta+2\beta+\theta\beta+4}{\beta\theta^2}, \\ Var(X) &= \left(\frac{\beta^2\theta+\beta^2+\beta\theta+2\beta-1}{\theta^2\beta^2}+\theta+\beta+1\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3.2 Courbe de Lorenz

La courbe de Lorenz pour la distribution de Poisson-Pseudo Lindley est :

$$L(p) = 1-(1-p)\beta\,(1+\theta)\,\frac{\left[(\beta-1+\beta\theta)\,(x\theta+1)+\left(x^2\theta^2+(2x+1)\,\theta+2\right)\right]}{\beta+1}.$$

Où $x = F^{-1}(p)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (3.17).

3.3.3 Fonction Quantile de la distribution de Poisson-Pseudo Lindley

De façon similaire que la distribution de Poisson-lindley, on donne le théorème suivant :

Théorème 3.9 Pour tout $\theta \succ 0$ *et* $\beta \succeq 1$, la fonction quantile de X qui suit la distribution de Poisson-Pseudo Lindley est :

$$Q_X(u) = -\frac{\theta\beta+\theta+\beta}{\theta} - \frac{1}{\ln(\theta+1)} W_{-1}\left(\frac{(\theta+1)\beta\ln(\theta+1)}{\theta(\theta+1)^{\frac{(\theta\beta+\beta)}{\theta}}}(u-1)\right), \quad 0 \prec u \prec 1. \tag{3.21}$$

Où W_{-1} désigne la branche négative de la fonction W de Lambert.

Preuve. Voir Théorème1 (Zeghdoudi et Nedjar (2016))[27].■

3.3.4 Estimation

Estimation par la méthode des moments (MoM)

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$, de la distribution de Poisson-Pseudo Lindley(3.16), en utilisant les moments d'ordre 1 et 2 respectivement on a :

$$\begin{cases} m = \frac{\beta+1}{\theta\beta} \\ n = \frac{\theta+2\beta+\theta\beta+4}{\beta\theta^2}. \end{cases} \tag{3.22}$$

On résout ce système non linéaire pour tous $n \succ 0, m \succ 0$, pour trouver les estimateurs des moments $\hat{\theta}_{MoM}$ et $\hat{\beta}_{MoM}$ de θ et β respectivement comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{MoM} = -1 + \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m-n+2m^2}} \\ \hat{\beta}_{MoM} = \frac{1}{m\theta-1}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Le théorème suivant donne la loi limite de $\hat{\theta}_{MoM}$.

Théorème 3.10 L'estimateur $\hat{\theta}_{MoM}$ de θ est convergeant et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{MoM} - \theta\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

L'intervalle de confiance de θ pour un seuil de confiance $100\,(1-\alpha)\,\%$ est donné par :

$$\hat{\theta}_{MoM} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\overset{\wedge}{\sigma}^2}}.$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le $(1-\frac{\alpha}{2})$ percentile de la distribution normale standard.

Théorème 3.11 L'estimateur $\hat{\beta}_{MoM}$ de β est convergeant et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{MoM} - \beta\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

L'intervalle de confiance de β pour un seuil de confiance $100\,(1-\alpha)\,\%$ est donné par :

$$\hat{\beta}_{MoM} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\overset{\wedge}{\sigma}^2}}.$$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le $(1-\frac{\alpha}{2})$ percentile de la distribution normale standard.

Preuve. C'est la même preuve du Théorème 3.8.■

L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soient $X_i \sim PPsLD(\theta,\beta), i=\overline{1,n}$, n variables aléatoires. La fonction de log-vraisemblance est :

$$\ln l(x_i;\theta) = n\ln\frac{\theta}{\beta} - n\left(\overline{x}+2\right)\ln\left(1+\theta\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln(\beta+\theta\beta-1+\theta x_i). \tag{3.24}$$

Les dérivées de $\ln l(x_i;\theta,\beta)$ par rapport à θ et β sont :

$$\frac{\partial \ln l(x_i;\theta,\beta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - n(\frac{\overline{x}+2}{1+\theta}) + \sum_{i=1}^{n}(\frac{\beta+x_i}{\beta+\theta\beta-1+\theta x_i}). \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial \ln l(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta} = \frac{-n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n}(\frac{1+\theta}{\beta+\theta\beta-1+\theta x_i}). \tag{3.26}$$

Les deux équations (3.25) et (3.26) ne peut pas résoudre directement, on doit utiliser la méthode de *Fisher Scoring*, on a :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\theta} & \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}_{\substack{\hat{\theta}=\theta_0 \\ \hat{\beta}=\beta_0}} \begin{bmatrix} \hat{\theta}-\theta_0 \\ \hat{\beta}-\beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta} \end{bmatrix}_{\substack{\hat{\theta}=\theta_0 \\ \hat{\beta}=\beta_0}} \tag{3.27}$$

L'équation (3.27) peut se résoudre de façon itérative où θ_0, β_0 sont les valeurs initiales de θ, β.Pour des raisons pratiques, on va utiliser l'observation singulière ou unique.

Les estimateurs dans le cas de l'observation unique (disons x_i) pour le vecteur de paramètre (θ,β) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{X}. \\ \hat{\beta}_{MV} = \frac{X}{1-X^2}. \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} E\left(\hat{\theta}_{MV}\right) = \frac{\theta}{\beta}\dfrac{(\beta-1+\beta\theta+\theta)}{(\theta+1)^2} \\ E\left(\hat{\theta}_{MV}\right) \le \frac{\theta}{\beta}\dfrac{(\beta+\beta\theta-1)}{(\theta+1)^2} \end{cases} \tag{3.29}$$

3.4 Distribution de Gamma-Lindley (GaL) et quelques propriétés

Dans cette section, on introduit la distribution de Gamma-Lindley ([8], [26]) et étudier ses propriétés de base. Cette distribution est défini comme un mélange de Gamma$(2,\theta)$ et de Lindley(θ).

Soit $Y_1 \sim Gamma(2,\theta)$ et $Y_2 \sim LD(\theta)$ deux variables aléatoires indépendantes. Pour $\theta > 0$, $\beta > \frac{\theta}{1+\theta}$ les paramètres d'échelle et de mélange respectivement , on considère la variable aléatoire $X = Y_1$ et $X = Y_2$ avec les probabilités respectivement $P_1 = \frac{\beta-1}{\beta}$ et $P_2 = \frac{1}{\beta}$.

La fonction de densité de X est donnée par :

$$f_{GaL}(x;\theta,\beta) = \frac{\theta^2((\beta+\beta\theta-\theta)x+1)e^{-\theta x}}{\beta(1+\theta)} \quad x>0, \theta>0, \beta>\tfrac{\theta}{1+\theta}. \tag{3.30}$$

Remarque 3.7 *Si $\beta = 1$, cette distribution est la distribution de Lindley $LD(\theta)$.*

Par conséquent, le mode de cette distribution est :

$$Mode(X) = \begin{cases} \dfrac{\beta\theta+\beta-2\theta}{\theta(\beta+\beta\theta-\theta)}, & \forall\beta \in \left[\dfrac{2\theta}{\theta+1}, \infty\right] \\ 0, & ailleurs. \end{cases} \tag{3.31}$$

On peut facilement trouver la fonction de répartition de GaL :

$$F_{GaL}(x) = 1 - \frac{((\theta\beta+\beta-\theta)(\theta x+1)+\theta)e^{-\theta x}}{\beta(1+\theta)}; x>0, \theta>0, \beta>\frac{\theta}{1+\theta}. \tag{3.32}$$

Pour plus détail voir($Zeghdoudi$ et $Nedjar$ [8]) .

3.4.1 Moments et mesures connexes

Proposition 3.3 Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes de $GaL(\theta, \beta)$. La fonction génératrice de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, est donnée par :

$$M_S(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^{2n} \left(\frac{\theta\beta + \beta - t}{\beta(1+\theta)}\right)^{n}. \tag{3.33}$$

d'où

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^{2} \left(\frac{\theta\beta + \beta - t}{\beta(\theta+1)}\right). \tag{3.34}$$

Remarque 3.8 La fonction génératrice des moments pour X et S existent

$(\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty)$ si seulement si $t < \theta$.

Corollaire 3.3 *Soit* $X \sim GaL(\theta, \beta)$ le moment d'ordre $1, 2$ et la variance de X sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{2\beta(1+\theta) - \theta}{\theta\beta(1+\theta)}, \mathbb{E}(X^2) = \frac{6\beta\theta + 6\beta - 4\theta}{\beta\theta^2 + \beta\theta^3}, \qquad (3.35) \\ Var(X) &= \frac{-(-2\beta\theta + \theta)^2 + (2+6\theta)\beta^2 - 2\beta(\beta\theta - 3\beta\theta^2 + 2\theta^2)}{\beta^2\theta^2(1+\theta)^2}. \end{aligned}$$

Théorème 3.12 *Soit* $X \sim GaLD(\theta, \beta)$, $M = Mode(X), me = Median(X)$ *et* $Moyenne(X) = \mu = E(X)$ *Alors*

$$M < me < \mu. \tag{3.36}$$

Preuve.Voir Théorème 1 (Zeghdoudi et Nedjar (2016))[8].■

Fonction de hasard et la La fonction de survie

Soit

$$h_{GaL}(x) = \frac{f_{GaL}(x)}{1 - F_{GaL}(x)} = \frac{((\beta + \theta\beta - \theta)x + 1)\theta^2}{\theta(\beta + \theta\beta - \theta)x + \beta + \theta\beta}.$$

et

$$S_{GaL}(x) = 1 - F_{GaL}(x) = \frac{((\theta\beta + \beta - \theta)(\theta x + 1) + \theta)e^{-\theta x}}{\beta(1+\theta)}$$

La fonction de taux de hasard et la fonction de survie de la distribution de Gamma-Lindley, respectivement.

Proposition 3.4 Soit $h_{GaL}(x)$ la fonction de taux de risque de X. Alors $h_{GaL}(x)$ est croissante.

Preuve. D'après *Glaser* (1980) et à partir de la fonction de densité (3.30)

$$\rho(x) = -\frac{f'_{GaL}(x)}{f_{GaL}(x)} = -\frac{\left(\beta - 2\theta + \theta\beta + x\theta^2 - x\theta\beta - x\theta^2\beta\right)}{x\left(\beta - \theta + \theta\beta\right) + 1}.$$

Comme $\rho'(x) = \dfrac{\left(\beta - \theta + \theta\beta\right)^2}{\left(x\beta - x\theta + x\theta\beta + 1\right)^2} \geq 0, \forall x, \beta, \theta$ alors $h_{GaL}(x)$ est croissante.$\blacksquare$

3.4.2 Ordres Stochastiques

Théorème 3.13 Soient $X_i \sim GaL(\theta_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$ deux variables aléatoires. Si $\theta_1 = \theta_2$ et $\beta_1 \geq \beta_2$, alors $X_1 \prec_{lr} X_2, X_1 \prec_{hr} X_2, X_1 \prec_s X_2$ et $X_1 \leq_{cx} X_2$.

Preuve. On a

$$\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)} = \frac{\theta_1^2\beta_2\left(1+\theta_2\right)((\beta_1 + \beta_1\theta_1 - \theta_1)\,t + 1)}{\theta_2^2\beta_1\left(1+\theta_1\right)((\beta_2 + \beta_2\theta_2 - \theta_2)\,t + 1)} e^{-(\theta_1 - \theta_2)t}.$$

Pour simplifier, on utilise $\ln\left(\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)}\right)$, on peut trouver

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)}\right) = -\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \frac{\beta_1\theta_1 - \beta_2\theta_2 + \left(\beta_1 - \beta_2\right) + \left(\theta_2 - \theta_1\right)}{\left(t\beta_1\theta_1 + t\beta_1 - t\theta_1 + 1\right)\left(t\beta_2\theta_2 + t\beta_2 - t\theta_2 + 1\right)}.$$

À cet effet, si $\theta_1 \succeq \theta_2$ et $\beta_1 \leq \beta_2$, on a $\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{f_{X_1}(t)}{f_{X_2}(t)}\right) \leq 0$. Les états restants découlent des implications dans (1.6).

3.4.3 Courbe de Lorenz

La courbe de Lorenz pour la distribution de Gamma-Lindley

$$L(p) = 1 - (1-p)\beta(1+\theta)\frac{\theta\left[(\beta+\beta\theta-\theta)\left(x^2\theta+2x+\frac{2}{\theta}\right)+(x\theta+1)\right]}{\left[(\beta+\beta\theta-\theta)(x\theta+1)+\theta\right]\left[2\beta(1+\theta)-\theta\right]}.$$

Où $x = F^{-1}(p)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (3.32).

3.4.4 Statistiques d'ordres extrêmes

Si $X_1, ..., X_n$ un échantillon de n variables aléatoires qui suivent la distribution de Gamma-Lindley et si $\overline{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ représente la moyenne d'échantillon alors par le théorème central limite $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-E(X)\right)}{\sqrt{Var(X)}}$ se rapproche de la distribution normale standard quand $n \to \infty$.

Théorème 3.14 On va étudier la loi asymptotique des valeurs extrêmes

$M_n = max(X_1, ..., X_n)$ et $m_n = min(X_1, ..., X_n)$, Pour la fonction de répartition définie dans(3.32), on constate que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(t+x)}{1-F(t)} = exp(-\theta x).$$

et

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(tx)}{F(t)} = x.$$

Ainsi, il résulte du **théorème 1.4** (théorème 1.6.2 dans Leadbetter et al. [19]) qu'il doit y avoir normalisation constantes $a_n > 0, b_n, c_n > 0$ et d_n de telle sorte que :

$$Pr\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \to exp\left(-\exp(-\theta x)\right).$$

et

$$Pr\{c_n(m_n - d_n) \leq x\} \rightarrow 1 - \exp(-x) . \tag{3.37}$$

Comme $n \rightarrow \infty$. La forme des constantes de normalisation peut également être déterminée. Par exemple, en utilisant le **corollaire 1.2** (Corollaire1.6.3 de Leadbetter et al. [19].), on peut voir que $a_n = 1$ et $b_n = F^{-1}(1 - 1/n)$ avec $F(\cdot)$ donnée par (3.32).

3.4.5 Fonction Quantile de la distribution de Gamma-Lindley

Dans le théorème suivant, on donne une expression explicite de Q_X en fonction de la fonction W de Lambert.

Théorème 3.15 Pour tout $\theta \succ 0, \beta > \frac{\theta}{1+\theta}$, la fonction quantile de X qui suit la distribution de Gamma-Lindley est :

$$Q_X(u) = -\frac{\beta(1+\theta)}{\theta(\beta(1+\theta)-\theta)} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(\frac{\beta(1+\theta)(y-1)}{\beta(1+\theta)-\theta} e^{-\frac{\beta(1+\theta)}{\beta(1+\theta)-\theta}}\right), \qquad 0 \prec u \prec 1. \tag{3.38}$$

Où W_{-1} désigne la branche négative de la fonction W de Lambert.

Preuve. Voir Théorème1(Zeghdoudi et Nedjar (2016))[26] ■.

3.4.6 Estimation

Estimation par la méthode des moments (MoM)

Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$, de la distribution de Gamma-Lindley (3.34), en utilisant le premier moment m et la variance s^2 on a :

$$m = \frac{2\beta(1+\theta)-\theta}{\theta\beta(1+\theta)}, s^2 = \frac{-(-2\beta\theta+\theta)^2+(2+6\theta)\beta^2-2\beta(\beta\theta-3\beta\theta^2+2\theta^2)}{\beta^2\theta^2(1+\theta)^2}.$$

On résout ce système non linéaire pour tous $s \succ 0, m \succ 0$, pour trouver les estimateurs des moments $\hat{\theta}_{MoM}$ et $\hat{\beta}_{MoM}$ de θ et β respectivement comme suit :

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{1}{s^2+m^2}\left(2m+\sqrt{2}\sqrt{-s^2+m^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \hat{\beta}_{MoM} = \frac{\hat{\theta}}{(1+\hat{\theta})\left(2-\hat{\theta}m\right)}. \tag{3.39}$$

L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soients $X_i \sim GaL(\theta,\beta), i = \overline{1,n}$, n variables aléatoires. La fonction de logvraisemblance est :

$$\ln l(x_i;\theta,\beta) = 2n\ln\theta - n\ln\beta - n\ln(\theta+1) + \sum_{i=1}^{n}\ln((\beta+\theta\beta-\theta)x_i+1) - \theta\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{3.40}$$

Les dérivées de $\ln l(x_i;\theta,\beta)$ par rapport à θet β sont :

$$\frac{\partial \ln l(x_i;\theta,\beta)}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{1+\theta} - \sum_{i=1}^{n}x_i + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{(\beta+\theta\beta-\theta)x_i+1}. \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial \ln l(x_i;\theta,\beta)}{\partial\beta} = \frac{-n}{\beta} + (1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{(\beta+\theta\beta-\theta)x_i+1}. \tag{3.42}$$

Les deux équations (3.41) et (3.42) ne peut pas résoudre directement, on doit utiliser la méthode de Fisher Scoring, on a :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\theta} & \frac{\partial^2 Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}_{\substack{\hat{\theta}=\theta_0 \\ \hat{\beta}=\beta_0}} \begin{bmatrix} \hat{\theta}-\theta_0 \\ \hat{\beta}-\beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial Lnl(x_i;\beta,\theta)}{\partial\beta} \end{bmatrix}_{\substack{\hat{\theta}=\theta_0 \\ \hat{\beta}=\beta_0}} \tag{3.43}$$

L'équation (3.43) peut se résoudre de façon itérative où θ_0, β_0 sont les valeurs initiales de θ, β.

Les estimateurs dans le cas de l'observation unique (disons x_i) pour le vecteur de paramètres (θ, β) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{x} \\ \widehat{\beta}_{MV} = \frac{1}{1+x} \end{cases}. \tag{3.44}$$

et

$$\begin{cases} E\left(\hat{\theta}_{MV}\right) = \frac{2\beta(1+\theta)-\theta}{\theta\beta(1+\theta)} = m \\ E\left(\widehat{\beta}_{MV}\right) = \frac{e^{\theta}}{\beta(\theta+1)}\left(2\beta+\beta\theta-\theta-\beta\theta^2+\theta^2\right). \end{cases} \tag{3.45}$$

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, on présente et examine de façon systématique les nouvelles distributions étudiées dans les chapitres précédents. Par ailleurs, une comparaison des valeurs de la fonction quantile, le mode et la moyenne. De plus, une simulation de biais et l'erreur quadratique moyenne des estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance. Enfin, une comparaison des distributions est obtenue.

4.1 Évaluation des Quantiles

Les tableaux $4.1, 4.2$ et 4.3 représentent quelques évaluations de quantiles des distributions Pseudo Lindley, Poisson-Pseudo Lindley et Gamma-Lindley pour différentes valeurs de θ et β respectivement.

Tableau 4.1 : Quantiles de la distribution PsLD.

y	$\theta = 0.5, \beta = 1.1$	$\theta = 3, \beta = 3$	$\theta = 1, \beta = 5$	$\theta = 5, \beta = 1$
0.01	0.163 33	5.0189×10^{-3}	1.2559×10^{-2}	2.9711×10^{-2}
0.05	0.545 86	2.5487×10^{-2}	6.4015×10^{-2}	7.1072×10^{-2}
0.1	0.890 42	5.2026×10^{-2}	0.131 28	0.106 36
0.15	1. 189 5	7.9749×10^{-2}	0.202 15	0.136 65
0.2	1. 469 5	0.108 81	0.277 08	0.164 88
0.25	1. 741 6	0.139 39	0.356 57	0.192 26
0.3	2. 012 6	0.171 71	0.441 24	0.219 47
0.35	2. 287	0.206 04	0.531 87	0.247 01
0.40	2. 569	0.242 71	0.629 39	0.275 28
0, 45	2. 862 5	0.282 12	0.734 98	0.304 69
0.5	3. 171 6	0.324 8	0.850 18	0.335 67
0.55	3. 501 6	0.371 46	0.976 99	0.368 71
0.60	3. 858 6	0.423 03	1. 118 1	0.404 46
0.65	4. 251 3	0.480 8	1. 277 3	0.443 77
0.7	4. 691 7	0.546 70	1. 460 2	0.487 84
0.75	5. 198 1	0.623 66	1. 675 3	0.538 53
0.8	5. 801 1	0.716 59	1. 936 8	0.598 86
0.85	6. 557	0.834 66	2. 271 7	0.674 49
0.9	7. 591 2	0.998 29	2. 739 5	0.777 94
0.95	9. 299 1	1. 272 2	3. 529 9	0.948 77
0.99	13. 087	1. 888 7	5. 330 9	1. 327 7

Tableau 4.2 : Quantiles de la distribution PPsLD.

x	$\theta = 0.5, \beta = 1.1$	$\theta = 3, \beta = 3$	$\theta = 1, \beta = 5$	$\theta = 5, \beta = 1$
0.01	0	0	0	0
0.05	0	0	0	0
0.1	0	0	0	0
0.15	0	0	0	0
0.2	0	0	0	0
0.25	1	0	0	0
0.3	1	0	0	0
0.35	1	0	0	0
0.40	2	0	0	0
0, 45	3	0	0	0
0.5	3	0	0	0
0.55	3	0	0	0
0.60	3	0	1	0
0.65	4	0	1	0
0.75	5	0	1	0
0.8	6	0	2	0
0.85	7	1	2	1
0.9	8	1	3	1
0.95	10	2	4	1
0.99	15	3	6	2

Tableau4.3 : Quantiles de la distribution GaLD.

x	$\theta = 0.1, \beta = 0.1$	$\theta = 0.1, \beta = 0.5$	$\theta = 3, \beta = 1$	$\theta = 5, \beta = 1$
0.01	0.110 55	0.506 76	4.4643×10^{-3}	2.4116×10^{-3}
0.05	0.564 08	2.095	2.2733×10^{-2}	1.2298×10^{-2}
0.1	1.158 4	3.695 2	4.6562×10^{-2}	2.5234×10^{-2}
0.15	1.786 3	5.129 6	7.1612×10^{-2}	3.8881×10^{-2}
0.2	2.451 9	6.491 4	9.8029×10^{-2}	5.3324×10^{-2}
0.25	3.16	7.825 3	0.125 99	6.8665×10^{-2}
0.3	3.916 6	9.159 6	0.155 71	8.5027×10^{-2}
0.35	4.728 7	10.516	0.187 44	0.102 56
0.40	5.605 3	11.912	0.221 51	0.121 45
0,45	6.557 4	13.368	0.258 31	0.141 92
0.5	7.599 5	14.904	0.298 36	0.164 29
0.55	8.750 5	16.545	0.342 35	0.188 95
0.60	10.036	18.322	0.391 19	0.216 42
0.65	11.492	20.278	0.446 16	0.247 46
0.7	13.171	22.473	0.509 13	0.283 17
0.75	15.154	24.999	0.583 01	0.325 22
0.8	17.577	28.008	0.672 63	0.376 46
0.85	20.695	31.781	0.787	0.442 16
0.9	25.080	36.946	0.946 31	0.534 16
0.95	32.549	45.477	1.214 4	0.690 00
0.99	49.785 5	64.409	1.822 2	1.046 4

4.2 Comparaison entre Mode, Moyenne et Médian

Le tableau 4.4 représente le mode(3.3), la moyenne(3.5) et le médian de la distribution de Pseudo Lindley pour différents choix des paramètres θ et β où $Médian = F_{PsLD}^{-1}\left(\frac{1}{2}, \theta, \beta\right)$.

Tableau4.4 : Mode, Moyenne et Médian de la distribution $PsLD$.

	$\theta = 0.5, \beta = 1.5$	$\theta = 1.5, \beta = 1.5$	$\theta = 3, \beta = 1.5$
$Médian = Q_2$	2.6537	0.88456	0.44228
$Moyenne$	3.33	1.11	0.55
$mode$	1	0.33	0.16
	$\theta = 1.2, \beta = 1$	$\theta = 1.2, \beta = 1.2$	$\theta = 1.2, \beta = 1.9$
$Médian = Q_2$	1.3986	1.2554	0.97867
$Moyenne$	1.66	1.52	1.271
$mode$	0.83	0.66	0.083

Le tableau 4.5 représente le mode(3.31), moyenne(3.35) et le médian de la distribution de Gamma- Lindley pour différents choix des paramètres θ et β où $Median = F_{GaLD}^{-1}\left(\frac{1}{2}, \theta, \beta\right)$.

Tableau 4.5 : Mode, Moyenne et Médian de la distribution GaL.

	$\theta = 2, \beta = 1.4$	$\theta = 2, \beta = 2$	$\theta = 2, \beta = 5$
$Médian = Q_2$	$0.585\,85$	$0.663\,42$	$0.770\,81$
$Moyenne$	$0.761\,9$	$0.833\,33$	$0.933\,33$
$Mode$	$4.\,545\,5 \times 10^{-2}$	0.25	$0.423\,08$
	$\theta = 0.6, \beta = 3$	$\theta = 3, \beta = 3$	$\theta = 5, \beta = 3$
$Médian = Q_2$	$2.\,583\,9$	$0.472\,43$	$0.277\,45$
$Moyenne$	$3.\,125$	$0.583\,33$	$0.344\,44$
$Mode$	$1.\,428\,6$	$0.222\,22$	$0.123\,08$

Interprétation.

On constate pour les deux distributions que $Mode < Médian < Moyenne$ (ce qui confirme les théorèmes 3.1 et 3.12 respectivement).

4.3 Simulations

4.3.1 Simulation de biais et l'erreur quadratique moyenne des estimateurs (MV) de la distribution PsLD

Cette section étudie le comportement des estimateurs du maximum de vraisemblance MV, pour un échantillon de taille finie (n). La simulation consiste les étapes de l'algorithme1 qui sont effectuées pour chaque triplet $(\theta, \beta; n)$ de la distribution PsLD, avec : $\theta = 0.5, 1.5, 3, 5, 8$ $\beta = 1.5, 2, 3, 5, 6$ et $n = 10, 30, 50$.

Algorithme1 :

-Choisir les valeurs initiales θ_0, β_0 correspondante au vecteur de paramètres $\Theta = (\theta, \beta)$ pour spécifier la distribution PsLD ;

- Choisir la taille de l'échantillon n ;

-Générer N échantillons indépendants de taille n de la distribution de $PsLD(\theta, \beta)$;

-Calculer les estimations $\hat{\Theta}_{MV}$ de Θ pour chacun des N échantillons ;

-Calculer la moyenne des estimateurs obtenus pour N échantillons,

$$biais\ moyen\,(\Theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right)$$

et l'erreur quadratique moyenne

$$EQM\,(\Theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right)^2.$$

Tableau 4.6 : Biais moyenne des estimations simulées de la distribution de PsLD.

	$\theta=0.5,\beta=1.5$		$\theta=1.5,\beta=1.5$		$\theta=3,\beta=1.5$	
	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$
$n=10$	0.283 33	$9.261\,2\times10^{-2}$	-$3.888\,9\times10^{-2}$	-0.110 33	$-0.244\,44$	-0.143 91
$n=30$	$9.444\,4\times10^{-2}$	$3.087\,1\times10^{-2}$	-$1.296\,3\times10^{-2}$	-$3.677\,7\times10^{-2}$	$-8.\,148\,1\times10^{-2}$	-$4.797\,2\times10^{-2}$
$n=50$	$5.666\,7\times10^{-2}$	$1.852\,2\times10^{-2}$	-$7.777\,8\times10^{-3}$	-$2.\,206\,6\times10^{-2}$	$-4.888\,9\times10^{-2}$	-$2.878\,3\times10^{-2}$
	$\theta=3,\beta=2$		$\theta=3,\beta=3$		$\theta=3,\beta=6$	
	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$
$n=10$	-0.25	-0.195 02	-0.255 56	-0.296 13	-0.261 11	-0.597 23
$n=30$	-$8.333\,3\times10^{-2}$	-$6.500\,7\times10^{-2}$	-$9.870\,9\times10^{-2}$	-$9.\,870\,9\times10^{-2}$	-$8.703\,7\times10^{-2}$	-0.199 08
$n=50$	-0.05	-$3.900\,4\times10^{-2}$	-$5.922\,6\times10^{-2}$	-$5.\,922\,6\times10^{-2}$	-$5.222\,2\times10^{-2}$	-0.119 45
	$\theta=0.5,\beta=5$		$\theta=5,\beta=5$		$\theta=8,\beta=5$	
	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta)$
$n=10$	0.26	-0.342 3	-0.476	-0.499 7	-0.785	-0.499 99
$n=30$	$6.333\,3\times10^{-2}$	-0.114 1	-0.158 67	-0.166 57	-0.261 67	-0.166 66
$n=50$	0.038	-0.068 46	-0.095 2	-$9.994\,1\times10^{-2}$	-0.157	-$9.999\,8\times10^{-2}$

Tableau 4.7 : Erreur quadratique moyenne des estimations simulées de la distribution de PsLD.

	$\theta=0.5,\beta=1.5$		$\theta=1.5,\beta=1.5$		$\theta=3,\beta=1.5$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$
$n=10$	0.802 78	0.085 77	$1.\,512\,3\times10^{-2}$	0.121 73	0.597 53	0.207 12
$n=30$	0.267 59	0.028 59	$5.\,041\,2\times10^{-3}$	$4.\,057\,7\times10^{-2}$	0.199 18	$6.\,903\,8\times10^{-2}$
$n=50$	0.160 56	$1.\,715\,4\times10^{-2}$	$3.\,024\,7\times10^{-3}$	$2.\,434\,6\times10^{-2}$	0.119 51	$4.\,142\,3\times10^{-2}$
	$\theta=3,\beta=2$		$\theta=3,\beta=3$		$\theta=3,\beta=6$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$
$n=10$	0.625	0.380 33	0.653 09	0.876 92	0.681 79	3. 566 9
$n=30$	0.208 33	0.126 78	0.217 70	0.292 31	0.227 26	1. 189 0
$n=50$	0.125	$7.\,606\,7\times10^{-2}$	0.130 62	0.175 38	0.136 36	0.713 38
	$\theta=0.5,\beta=5$		$\theta=5,\beta=5$		$\theta=8,\beta=5$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$
$n=10$	0.361	1. 171 7	2. 265 8	2. 497	6. 162 3	2. 499 9
$n=30$	0.120 33	0.390 57	0.755 25	0.832 35	2. 054 1	0.833 29
$n=50$	0.072 2	0.234 34	0.453 15	0.499 41	1. 232 5	0.499 98

Interprétation : d'après les tableaux 4.6 et 4.7 on remarque également que :

- le biais de $\left(\hat{\theta}\right)$ *et* le biais de $\left(\hat{\beta}\right)$ diminué si (θ, β) augmente.

-$\left|biais\left(\hat{\theta}\right)\right|$, $\left|biais\left(\hat{\beta}\right)\right|$, EQM $\left(\hat{\theta}\right)$ *et* EQM $\left(\hat{\beta}\right)$ diminués si n augmente.

4.3.2 Simulation de biais et l'erreur quadratique moyenne des estimateurs (MV) de la distribution PPsLD

En utilisant l'algorithme 1 pour générer des échantillons aléatoires provenant de la distribution discrète **PPsLD** . L'étude de la simulation est effectuée pour chaque triplet $(\theta, \beta; n)$ de la distribution PPsLD, où $\theta = 0.5, 1.5, 2, 3, 6$ $\beta = 1.5, 2, 3, 6$ et $n = 10, 30, 50$, avec :

$$biais\ moyen\,(\Theta) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right)$$

$$EQM\,(\Theta) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\Theta}_i - \Theta_0\right)^2$$

Tableau 4.8 : Biais moyenne des estimations simulées de la distribution de PPsLD.

	$\theta = 0.5, \beta = 1.5$		$\theta = 1.5, \beta = 1.5$		$\theta = 3, \beta = 1.5$	
	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$
$n = 10$	-2.4074×10^{-2}	-0.13148	-0.082	-0.106	-0.2	-0.0875
$n = 30$	-8.0247×10^{-3}	-4.3827×10^{-2}	-2.7333×10^{-2}	-3.5333×10^{-2}	-6.6667×10^{-2}	-2.9167×10^{-2}
$n = 50$	-4.8148×10^{-3}	-2.6296×10^{-2}	-0.0164	-0.0212	-0.04	-0.0175
	$\theta = 3, \beta = 2$		$\theta = 3, \beta = 3$		$\theta = 3, \beta = 6$	
	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$
$n = 10$	-0.20625	-0.13438	-0.2125	-0.23125	-0.21875	-0.52813
$n = 30$	-0.06875	-4.4792×10^{-2}	-7.0833×10^{-2}	-7.7083×10^{-2}	-7.2917×10^{-2}	-0.17604
$n = 50$	-0.04125	-2.6875×10^{-2}	-0.0425	-0.04625	-0.04375	-0.10563
	$\theta = 0.5, \beta = 2$		$\theta = 2, \beta = 2$		$\theta = 6, \beta = 2$	
	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$	$biais\,(\theta)$	$biais\,(\beta) \leq$
$n = 10$	-2.2222×10^{-2}	-0.17778	-0.12222	-0.14444	-0.48367	-0.12041
$n = 30$	-7.4074×10^{-3}	-5.9259×10^{-2}	-4.0741×10^{-2}	-4.8148×10^{-2}	-0.16122	-4.0136×10^{-2}
$n = 50$	-4.4444×10^{-3}	-3.5556×10^{-2}	-2.4444×10^{-2}	-2.8889×10^{-2}	-9.6735×10^{-2}	-2.4082×10^{-2}

Tableau 4.9 : Erreur quadratique moyenne des estimations simulées de la distribution de PPsLD.

	$\theta = 0.5, \beta = 1.5$		$\theta = 1.5, \beta = 1.5$		$\theta = 3, \beta = 1.5$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$
$n = 10$	5.7956×10^{-3}	0.17287	0.06724	0.11236	0.4	7.6563×10^{-2}
$n = 30$	1.9319×10^{-3}	5.7625×10^{-2}	2.2413×10^{-2}	3.7453×10^{-2}	0.13333	2.5521×10^{-2}
$n = 50$	1.1591×10^{-3}	3.4575×10^{-2}	1.3448×10^{-2}	2.2472×10^{-2}	0.08	1.5313×10^{-2}
	$\theta = 3, \beta = 2$		$\theta = 3, \beta = 3$		$\theta = 3, \beta = 6$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$
$n = 10$	0.42539	0.18057	0.45156	0.53477	0.47852	2.7892
$n = 30$	0.14180	6.0189×10^{-2}	0.15052	0.17826	0.15951	0.92972
$n = 50$	8.5078×10^{-2}	3.6113×10^{-2}	9.0313×10^{-2}	0.10695	9.5703×10^{-2}	0.55783
	$\theta = 0.5, \beta = 2$		$\theta = 2, \beta = 2$		$\theta = 6, \beta = 2$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta) \leq$
$n = 10$	4.9383×10^{-3}	0.31605 :	0.14938	0.20864	2.3394	0.14498
$n = 30$	1.6461×10^{-3}	0.10535	4.9794×10^{-2}	6.9547×10^{-2}	0.7798	4.8327×10^{-2}
$n = 50$	9.8765×10^{-4}	6.3210×10^{-2}	2.9877×10^{-2}	4.1728×10^{-2}	0.46788	2.8996×10^{-2}

Interprétation : selon les tableaux **4.8** et **4.9** on remarque que :

- le biais de $\left(\hat{\theta}\right)$ *et* le biais de $\left(\hat{\beta}\right)$ diminué si (θ,β) augmente.

4.3.3 Simulation de biais et l'erreur quadratique moyenne des estimateurs de la distribution GaL

De façon similaire , on utilise l'algorithme 1 pour générer des échantillons aléatoires provenant de la distribution GaL . L'étude de cette simulation est effectuée pour chaque triplet $(\theta,\beta;n)$ de la distribution GaLD, où $\theta = 1, 0.1, 0.5, 3$, $\beta = 6, 1, 0.75$,0.55, 0.5 et $n = 10, 30, 50$.

Tableau4.10 : Biais moyenne des estimations simulées de la distribution de *GaL*.

	$\theta=1,\beta=6$		$\theta=1,\beta=0.75$		$\theta=1,\beta=0.55$	
	biais(θ)	biais(β)	biais(θ)	biais(β)	biais(θ)	biais(β)
$n=10$	0.091	-0.328	0.028	0.196	9.090×10^{-3}	0.216
$n=30$	0.030	-0.109	0.009	0.065	3.030×10^{-3}	7.22×10^{-2}
$n=50$	0.018	-0.065	0.005	0.039	1.81×10^{-3}	4.33×10^{-2}
	$\theta=0.1,\beta=1$		$\theta=0.5,\beta=1$		$\theta=3,\beta=1$	
	biais(θ)	biais(β)	biais(θ)	biais(β)	biais(θ)	biais(β)
$n=10$	1.899	0.100	0.283	0.119	-0.258	0.904
$n=30$	0.633	0.033	0.094	0.039	-0.086	0.301
$n=50$	0.379	0.020	0.056	0.023	-0.051	0.180
	$\theta=3,\beta=0.5$		$\theta=0.5,\beta=0.5$		$\theta=0.1,\beta=0.5$	
	biais(θ)	biais(β)	biais(θ)	biais(β)	biais(θ)	biais(β)
$n=10$	-0.283	3.967	0.216	0.142	1.808	0.141
$n=30$	-0.094	1.322	0.072	0.047	0.602	0.047
$n=50$	-0.056	0.793	0.043	0.028	0.361	0.028

Tableau 4.11 : Erreur quadratique moyenne des estimations simulées de la distribution de GaL.

	$\theta = 1, \beta = 6$		$\theta = 1, \beta = 0.75$		$\theta = 1, \beta = 0.55$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$
$n = 10$	0.084	1.077	1.600	0.685	8.264×10^{-4}	0.470
$n = 30$	0.028	0.359	0.533	0.228	2.754×10^{-4}	0.156
$n = 50$	0.016	0.215	0.320	0.137	1.652×10^{-4}	9.40×10^{-2}
	$\theta{=}0.1,\beta{=}1$		$\theta{=}0.5,\beta{=}1$		$\theta{=}3,\beta{=}1$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$
$n = 10$	36.065	0.101	0.802	0.143	0.667	8.177
$n = 30$	12.022	0.033	0.267	0.047	0.222	2.725
$n = 50$	7.213	0.0203	0.160	0.028	0.133	1.635
	$\theta{=}3,\beta{=}0.5$		$\theta{=}0.5,\beta{=}0.5$		$\theta{=}0.1,\beta{=}0.5$	
	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$	$EQM\,(\theta)$	$EQM\,(\beta)$
$n = 10$	0.802	15.380	0.469	0.202	3.695	0.201
$n = 30$	0.267	5.460	0.156	0.067	1.898	0.067
$n = 50$	0.160	3.476	0.093	0.040	0.653	0.040

Interprétation : d'après les tableaux **4.10** et **4.11** on constate également que :

- Le biais de $\left(\hat{\theta}\right)$ et le biais de $\left(\hat{\beta}\right)$ diminue si (θ, β) augmente.

-L'EQM $\left(\hat{\theta}\right)$ *et* l'EQM $\left(\hat{\beta}\right)$ diminué si(θ, β)augmente.

-$\left|biais\left(\hat{\theta}\right)\right|$, $\left|biais\left(\hat{\beta}\right)\right|$, EQM $\left(\hat{\theta}\right)$ et EQM $\left(\hat{\beta}\right)$ diminué si n augmente.

4.4 Comparaison des distributions

4.4.1 Comparaison des nouvelles distributions continues avec d'autres

Cette section montre la flexibilité des distributions GaL et $PsLD$ en considérant deux ensembles de données différentes utilisées par différents chercheurs (données de durée de survie). On étudie également les distributions GaL, PsLD, Quasi Lindley, Deux-paramètres Lindley, Lindley Généralisée, Weibull et Log-normale. Dans chacune de ces distributions, les paramètres sont estimés en utilisant la méthode des moments. Pour donner une signification à cette comparaison, on utilise la valeurs de log-vraisemblance négative ($-LL$), le critère d'information Akaike (AIC) et le critère d'information Bayésienne (BIC) qui sont définis par

$$AIC = -2LL + 2q \qquad et \qquad BIC = -2LL + qlog(n)$$

Où q est le nombre de paramètres estimés et n est la taille de l'échantillon. Ainsi que la valeur du test statistique de Kolmogorov-Smirnov ($K - S$) est définie comme $K - S = sup_x |F_n(x) - F(x)|$, où $F_n(x)$, $F(x)$ sont la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition respectivement.

Illustration1

On considère de Lawless (2003) [6] deux séries de données réelles. La première, représente les temps de défaillances (*en minutes*) pour un échantillon de quinze composants électroniques dans un test de la survie .

$1.4, 5.1, 6.3, 10.8, 12.1, 18.5, 19.7, 22.2, 23, 30.6, 37.3, 46.3, 53.9, 59.8, 66.2.$

La deuxième série des données, représente les nombres des cycles à la rupture de 25 spécimens ($100cm$) de fil, testés à un niveau de contrainte particulière :

$15, 20, 38, 42, 61, 76, 86, 98, 121, 146, 149, 157, 175, 176, 180, 180, 198, 220, 224, 251, 264, 282, 321, 325, 653.$

Les résultats de ces données sont présentés dans le tableau suivant

Tableau4.12 Comparaisons des distributions continues

$Data$	$Distribution$	β	θ	γ	$-LL$	$K-S$	AIC	BIC
$Serie1$	Generalized-Lindley	1.203	0.064	0.083	64.080	0.095	134.16	136.28
	PsL	1. 063 4	0.0684		62.075	0.082	128.15	129.57
$n=15$	$GaLD$	1.129	0.0684		64.015	0.094	132.03	133.45
$m=27.546$	QLD	4.016	-0.99		1504	0.93	3012	3013.4
$s=20.059$	$TwoPLD$	0.0704	1.110		-169.12	0.196	342. 24	343.66
	$Gamma$	1.442	0.052		64.197	0.102	132.39	133.81
	$Weibull$	1.306	0.034		64.026	0.450	132.05	133.47
	$Lognormal$	1.061	2.931		65.626	0.163	135.25	136.67
$Serie2$	Generalized-Lindley	1.505	0.012	0.018	152.369	0.137	310.74	314.39
	PsL	1. 086	0.010		150.232	0.128	304.464	306.9
$n=25$	GaL	0. 05	0.010		152.132	0.129	308.26	310.7
$m=178.32$	QLD	0.0107	8.514		1045.9	0.94	2131.8	2156.2
$s=131.097$	$TwoPLD$	0.0107	0, 125		-283.41	0.232	570. 82	573. 26
	$Gamma$	1.794	0.010		152.371	0.135	308.74	311.18
	$Weibull$	1.414	0.005		152.440	0.697	308.88	310.7
	$Lognormal$	0.891	4.880		154.092	0.155	312.18	314.62

Interprétation : A Partir de ces résultats on constate que

− les valeurs de log-vraisemblance négatives confirment que les distributions GaLD et PsLD sont beaucoup mieux que les distributions quasi Lindley, deux paramètres Lindley, Lindley Généralisée, Weibull et lognormale pour les deux séries.

-Selon les valeurs BIC et AIC les meilleures distributions sont GaLD et PsLD. Aussi, on peut observer que les distributions Gamma Lindley et PsLD fournissent plus petit k - S par rapport à quasi Lindley, deux-paramètres Lindley, Lindley généralisé, Weibull et log-normale.

4.4.2 Comparaisons entre la distribution PPsLD et les distributions Poisson Lindley ,Poisson

Dans cette section, on illustre, l'applicabilité de la distribution PPsLD en considérant une série de données utilisées par différents chercheurs. On équipe également les distributions PPsLD, Poisson Lindley, et Poisson.

Dans chacune de ces distributions, les paramètres sont estimés en utilisant la méthode des moments.

Illustration

Ce tableau donne la comparaison des fréquences observées, la valeur de log-vraisemblance négative $(-LL)$, le critère d'information Akaike (AIC) et le critère d'information Bayésienne (BIC) pour les distributions, Poisson, Poisson-Lindley, et Poisson -Pseudo Lindley, en utilisant les données de survie (en jours) de 77 individus Guinéen vacciner qui sont déjà infecté par virus Ebola.

Tableau4.13 Comparaisons des fréquences observées

Données de survie	Obs freq m=1.08,n=2.87	Poisson-Lindley $\hat{\theta} = 1.3243$	Poisson $\hat{\theta} = 1.08$	Poisson -Pseudo Lindley $\hat{\theta} = 1.0731, \hat{\beta} = 6.2914$
0	34	35.7	26.15	36.801
1	22	20.01	28.24	19.34
2	10	10.6	15.25	10.1
3	5	5.43	5.49	5,24
4	4	2.71	1.48	2.7
5	2	1.33	0.32	1.39
Total	77	77	77	77
χ^2	_	2.7695	18.678	1.4834
-LL	_	211.42	206.93	139.99
AIC	_	424	415.86	283.98
BIC	_	427.18	418.2	28867

Interprétation1 : Il est évident que la distribution de PPsLD donne un meilleur fit que les distributions de Poisson lindley et Poisson

− la valeur de log-vraisemblance négative confirme que la distribution de Poisson PsLD est beaucoup mieux que la distribution Poisson-Lindley et Poisson pour modéliser les données de survie,

-Selon les valeurs BIC et AIC la meilleure distribution est la distribution PPsLD

Donc cette distribution peut être considérée comme un outil important pour modéliser les données de l'analyse de survie.

Conclusion et Perspectives

Ainsi, nous avons réussi à introduire des nouvelles distributions, ensuite, à étudier quelques propriétés à savoir : la fonction quantile, la courbe de Lorenz, l'estimation par la méthode des moments, l'estimation du maximum de vraisemblance et les distributions limites des statistiques d'ordre.

Par la suite, il serait intéressant d'utiliser des données censurées. Aussi, nous pourrons dans nos recherches futures proposer d'autres distributions à savoir :

- Poisson pseudo Lindley distribution.

- Size baised gamma Lindley distribution

- Size baised pseudoLindley distribution .

Bibliographie

[1] Asgharzadeh Hassan A., Bakouch,S.,& Esmaeili ,L. (2013). Pareto poisson-lindley distribution and its application, Journal of Applied Statistics, pp. 1-18.

[2] C. Dagum, Lorenz curve, in : S. Kotz, N.L. Johnson, C.B. Read (Eds.), in : Encyclopedia of Statistical Sciences, vol. 5,Wiley, New York, 1985,pp. 156–161.

[3] E.M. Lémeray, Racines de quelques équations transcendantes. Intégration d'une équation aux différences mèlées. Racines imaginaires,Nouvelles Ann. Math. 16 (1897) 540–546.

[4] .F. Lawless, Statistical Models and Methods for Lifetime Data, Wiley, New York, 2003

[5] Jodrá, P. (2010). Computer generation of random variables with Lindley or Poisson Lindley distribution via the Lambert W function. Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM), Vol. 81, issue 4, pages 851-859.

[6] J. F. Lawless , 2003. Statistical models and methods for lifetime data. Wiley, New York pp 204 - 263.

[7] Hussain, E. The Non-Linear Functions of Order Statistics and their Properties in Selected Probability Models (Doctoral dissertation, University of Karachi, Karachi) (2008).

[8] H. Zeghdoudi, S. Nedjar (2016a). Gamma Lindley distribution and its application. J*ournal of Applied Probability and Statistics* Vol **11**, N° **1**, 129-138.

[9] H. Zeghdoudi, S. Nedjar (2016b) A Pseudo Lindley distribution and its application., J. Afrika Statistika Vol **11** N°**1**, 923_932.

[10] H. Zeghdoudi, S. Nedjar (2017). On Pseudo Lindley Distribution : Properties and Applications. *Journal of* New Trends in Mathematical SciencesVol 5,N°**1**, 59-65

[11] M. E. Ghitany, B. Atieh, S. Nadarajah (2008a). Lindley distribution and its applications. *Math. Comput. Simulation , **78**, pp. 493-506 ..*

[12] H. S. Bakouch, B. M. Al-Zahrani, A. Al-Shomrani, V. A. Marchi and F. Louzada (2012). An extended Lindley distribution, *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol **41**, 75-85.

[13] H. Zakerzadah, A. Dolati (2010). Generalized Lindley distribution. J. Math. Ext. 3(2),pp. 13-25.

[14] Glaser, R. E. (1980). Bathtub and related failure rate characterizations. J. Amer. Statist. Assoc., 75, 667-672

[15] Lindley, D. V. (1958). Fiducial distributions and bayes theorem. Journal of the Royal Society, series B, 20, 102-107

[16] M. Sankaran (1970). The discrete Poisson-Lindley distribution. *Biometrics, **26**, pp. 145-149.*

[17] M. Shaked, J.G. Shanthikumar, Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, New York, 1994..

[18] M. H. Gail and J. L.Gastwirth (1978). A scale-free goodness of fit test for the exponential distribution based on the Lorenz curve. *Journal of the American Statistical Association* **73** 787–793.

[19] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootz´en, Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes, Springer Verlag, New York,1987.

[20] M.E.Ghitany.D.K Almutairi(2009) : Estimation methods for the discrete Poisson–Lindley distribution, Journal of Statistical Computation and Simulation, 79 :1, 1-9

[21] M.E. Ghitany, D.K. Al-Mutairi, S. Nadarajah (2008b). Zero-truncated Poisson–Lindley distribution and its application, *Math. Comput.*

[22] M. H. Gail and J. L.Gastwirth (1978). A scale-free goodness of fit test for the exponential distribution based on the Lorenz curve. *Journal of the American Statistical Association* **73** 787–793.

[23] R. Shanker and A. Mishra (2013). A quasi Lindley distribution. African Journal of Mathematics and Computer Science Research,Vol. 6, N°4, pp. 64-71.

[24] R.Shanker, S.Sharma, R.Shanker. (2013). A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data. *Applied Mathematics, vol. 4, pp. 363-368.*

[25] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey, D.E. Knuth (1996). On the Lambert W function, *Adv. Comput. Math.* **5** 329–359.

[26] S. Nedjar,H. Zeghdoudi (2016c). On Gamma Lindley distribution : proprieties and simulation. J*ournal of Computational and Applied Mathematics* **298**, pp167-174.

[27] S. Nedjar,H. Zeghdoudi (2017). A Poissson pseudo Lindley distribution and its application . *Journal of Probability and Statistical Sciences* . Vol. 15, N° 1, 19-28

[28] NTMSCI 5, No. 1, 59-65 (2017)