

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTA  
ANNABA  
BADJI MOKHTAR - ANNABA  
UNIVERSITY



جامعة باجي مختار  
عنابة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

## MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

### SUR L'EXPLOSION EN TEMPS FINI DES SOLUTIONS DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS PARABOLIQUES DÉGÉNÉRÉES

Option: Mathématiques appliquées

Par:

**SAIDANE Ridha**

Sous la direction de **Dr. NISSE Lamine**  
Maître de Conférences à l'université d'ANNABA

Devant le Jury

<b>PRÉSIDENT:</b>	<b>MOUMENI Abdelkader</b>	<b>M. C</b>	<b>U.B.M. ANNABA</b>
<b>EXAMINATEUR:</b>	<b>AMIAR Rachida</b>	<b>M. C</b>	<b>U.B.M. ANNABA</b>
<b>EXAMINATEUR:</b>	<b>ZOUYED Fairouz</b>	<b>M. C</b>	<b>U.B.M. ANNABA</b>

Année: 2010-2011

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Résumé (Arabe)</b>	<b>v</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Notations et définitions . . . . .	1
1.2 Quelques inégalités utiles . . . . .	3
1.3 Opérateurs non bornés . . . . .	4
1.4 Opérateurs m-dissipatifs . . . . .	4
1.5 Semi-groupes fortement continus . . . . .	6
1.6 Opérateurs sectoriels et semi-groupes analytiques . . . . .	7
1.7 Espaces de Hölder . . . . .	8
1.8 Théorème de régularité . . . . .	10
<b>2 Théorie générale sur les équations du type parabolique</b>	<b>12</b>
2.1 Méthode du semi-groupe . . . . .	12
2.1.1 Semi-groupes engendré par un opérateur m-dissipatif . . . . .	12
2.1.2 Semi-groupes de contraction et leurs générateurs . . . . .	13
2.1.3 Equations non-homogènes . . . . .	16
2.1.4 Le lemme de Gronwall . . . . .	21
2.1.5 Problème semi-linéaire . . . . .	22
2.2 Méthode des sous-solutions et sur-solutions . . . . .	24
2.2.1 Principe de maximum . . . . .	24

2.2.2	Méthode des sous-solutions et sur-solutions . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Etude d'un système d'équations paraboliques dégénérées</b>	<b>29</b>
3.1	Position du problème . . . . .	29
3.2	Existence locale et unicité de la solution . . . . .	30
3.3	Régularité de la solution . . . . .	36
3.4	Explosion en temps fini de la solution . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>50</b>

# Résumé

Le phénomène d'explosion en temps fini des solutions des systèmes d'équations paraboliques semi-linéaires a été le sujet d'études mathématiques intenses durant ces dernières décennies. Ce phénomène se manifeste souvent par le fait que la solution cesse d'exister en un temps fini en devenant non bornée.

L'intérêt de ce travail réside dans l'étude d'un système d'équations paraboliques semi-linéaires dégénérées. Une méthode de troncature nous donne les solutions de ce système comme des limites des solutions d'un système non dégénéré. Dans notre étude, on établit l'existence locale et l'unicité de la solution de ce système et on montre que la solution construite est une solution classique moyennant la méthode de la régularité elliptique,

On étudie également l'explosion en temps fini de la solution de ce système, on établit des conditions suffisantes et on démontre que sous ces conditions la solution du système explose en temps fini (c-à-d, le temps d'existence maximal de la solution est fini).

**Mots clés :** Système parabolique semi-linéaire dégénéré, Existence locale, Explosion en temps fini, Principe de maximum, Sur et sous-solutions.

# Abstract

The phenomenon of blow-up in finite time of solutions of systems of semilinear parabolic equations has been the subject of intense mathematical studies during these last decades. This phenomenon often manifests itself in the fact that the solution ceases to exist in finite time by becoming unbounded.

The interest of this work lies in the study of a system of semilinear degenerate parabolic equations. A truncation method gives us the solutions of this system as limits of solutions of nondegenerate system. In our study, we establish the local existence and uniqueness of the solution of this system and show that the constructed solution is a classical solution by using method of elliptic regularity.

We also study the blow-up in finite time for the solution of this system, we establish sufficient conditions and prove that under these conditions the solution of the system blows up in finite time (that is, the time of maximal existence of the solution is finite).

**Key words :** Degenerate semilinear parabolic system, Local existence, Blow-up in finite time , Maximum principle, Upper and lower solutions.

# Résumé (Arabe)

# Remerciements

*Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire **Dr. NISSE Lamine**, maître de conférences à l'Université de Annaba pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.*

*Mes remerciements vont également à **Dr. MOUMENI Abdelkader**, maître de conférences à l'Université de Annaba, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.*

*De même je remercie **Dr. AMIAR Rachida**, maître de conférences à l'Université de Annaba et **Dr. ZOUYED Fairouz**, maître de conférences à l'Université de Annaba pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.*

*Je remercie également tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire, en particulier, mon collègue **Louafi. H** pour ses encouragements.*

*Enfin, Merci à toute ma famille, en particulier, ma **mère**, mon **père**, mes soeurs et mes frères, et à tous mes amis et tous mes collègues sans exception.*

# Introduction

Un grand nombre de chercheurs se sont intéressés ces dernières décennies par le phénomène d'explosion en temps fini des solutions des systèmes d'équations paraboliques semi-linéaires et un intérêt particulier a été réservé aux systèmes d'équations paraboliques semi-linéaires dégénérés.

Comme la plupart des phénomènes naturels sont gouvernés par des équations non linéaires, nous allons considérer le système d'équations paraboliques semi-linéaires dégénérées suivant :

$$(P) \begin{cases} xu_t = \Delta u + v^p & \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ (1-x)v_t = \Delta v + u^p & \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, & x \in \{0, 1\} \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

où  $p > 1$ ,  $u_0, v_0 \in C^{2+\alpha}([0, 1])$ .

A cet effet, l'étude de l'existence locale, l'unicité et l'explosion en temps fini de la solution sera notre préoccupation majeure. Le principe de maximum et la méthode des sous et sur-solutions sont les outils les plus essentiels que nous avons utilisés avec succès pour arriver à des résultats intéressants.

Pour les problèmes d'explosion en temps fini, on cite les travaux suivants :

Dans [4], **M. S. Floater** : Il a étudié l'équation parabolique dégénérée suivante :

$$\begin{cases} xu_t = \Delta u + u^p, \quad (p > 1) & \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

Il a montré que pour une donnée initiale  $u_0$  concave ( $\frac{d}{dx}(\frac{u_0(x)}{x}) \leq 0$ ) et assez grande, la solution  $u$  de l'équation explose en temps fini. Cette exemple montre bien l'effet de la dégénérescence sur le point d'explosion.

Dans [10], **M. Kouche** : Il a étudié le système parabolique dégénéré suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} xu_t = \Delta u + v^p & \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ xv_t = \Delta v + u^p & \\ u(x, t) = v(x, t) = 0 & x \in \{0, 1\} \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in ]0, 1[ \end{array} \right.$$

Il a montré que sous certaines conditions suffisantes, la solution  $(u, v)$  du système explose en temps fini et pour des données initiales  $u_0, v_0$  concaves et assez grandes et  $1 < p \leq 2$ , la solution  $(u, v)$  explose au point  $x = 0$  qui est justement le point de dégénérescence du système.

Ce mémoire se présente comme suit :

**Dans le premier chapitre** on rappelle les notations et les notions fondamentales qui sont utiles dans ce travail.

**Le deuxième chapitre** est consacré à la théorie générale dans l'étude des équations du type parabolique dans le cadre abstrait, nous citons, entre autre, la méthode du semi-groupe et la méthode des sous et sur-solutions.

**Dans le troisième chapitre** on considère un système d'équations paraboliques semi-linéaires dégénérées et on établit l'existence locale et l'unicité de la solution pour ce système. Une méthode de troncature permet de lever la dégénérescence de ce système et le ramène à un système non dégénéré. On établit aussi des conditions suffisantes sous lesquelles la solution du système explose en temps fini.

On achève ce mémoire par une conclusion et une perspective.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

### 1.1 Notations et définitions

**Définition 1.1.1** On désigne par  $L^p(\Omega)$  l'espace de fonctions (ou plus exactement des classes d'équivalence de fonctions, au sens de l'égalité presque partout)  $u$  mesurables sur  $\Omega$  telles que  $\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty$  muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

**Définition 1.1.2** On désigne par  $L^\infty(\Omega)$  l'espace des (classes) de fonctions  $u$  mesurables et vérifiant  $|u| \leq C$ , p.p (presque partout) sur  $\Omega$  où  $C$  est une constante.  $L^\infty(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C, |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

**Définition 1.1.3** On définit les espaces  $L^p(0, T, X)$  et  $L^\infty(0, T, X)$  comme suit :

$L^p(0, T, X) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty, \text{ si } 1 \leq p < \infty \right\}$   
muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(0, T, X)}^p = \int_0^T \|u\|_X^p dt$$

$L^\infty(0, T, X) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \sup_{t \in (0, T)} \|u\|_X < \infty \right\}$  muni de

la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t \in (0,T)} \operatorname{ess} \|u\|_X$$

**Définition 1.1.4**  $C(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions continues dans  $\Omega$  muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$C^k(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiable sur  $\Omega$  ( $k$  entier positif) et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega).$$

$BC$  désigne l'espace des fonctions bornées et uniformément continues dans  $\mathbb{R}$ , et on écrit :

$$BC_0 = \{u \in BC : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| = 0\}.$$

**Définition 1.1.5**  $\mathcal{D}(\Omega)$  c'est l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact contenu dans  $\Omega$ .

$\mathcal{D}'(\Omega)$  désigne l'espace des distributions sur  $\Omega$  c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$

**Définition 1.1.6** On désigne par  $H^1$  l'espace de Sobolev défini comme suit :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

**Définition 1.1.7** *D'une façon générale pour  $m \in \mathbb{N}$ , on définit*

$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$   
*muni de la norme*

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

où  $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  et  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  la dérivée au sens des distributions.  
*D'une manière plus générale, pour tout réel  $p$ , on définit l'espace*

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour toute } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$   
*muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p, 1 \leq p < +\infty$$

Donc

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

## 1.2 Quelques inégalités utiles

**Définition 1.2.1** *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue où  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .*

*On dit que  $f$  est une fonction convexe si*

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

*Cette inégalité est appelée inégalité de convexité.*

*On dit que  $f$  est une fonction concave si  $-f$  est convexe, i.e. avec les mêmes notations si*

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

**Proposition 1.2.1** *La fonction  $x \rightarrow x^p$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc  $\forall u, v \in \mathbb{R}^+$ , on a*

$$u^p + v^p \geq \frac{1}{2^{p-1}} (u + v)^p$$

**Théorème 1.2.1** (Inégalité de Jensen) *Soit  $f \in L^1 : \Omega \rightarrow ]a, b[$  et  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, on a*

$$\varphi \left( \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f d\mu \right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu$$

### 1.3 Opérateurs non bornés

Dans toute la suite  $H$  est un espace de Hilbert et  $X$  un espace de Banach, sa norme est notée  $\|\cdot\|$ .

**Définition 1.3.1** *Soit  $D \subset X$  un sous espace vectoriel. Un opérateur linéaire dans  $X$  est un couple  $(A, D)$ , et  $A : D \rightarrow X$  est une application linéaire. On dit que  $A$  est borné si  $\|Au\|$  reste bornée lorsque  $u \in \{x \in D, \|x\| \leq 1\}$ . Dans le contraire,  $A$  est dit non borné.*

**Définition 1.3.2** *l'opérateur  $(A, D(A))$  est dit fermé si et seulement si pour tout suite  $(x_n) \subset D(A)$  telle que  $x_n \rightarrow x \in X$  et  $Ax_n \rightarrow y \in X$ . Alors  $x \in D(A)$  et  $y = Ax$ .*

### 1.4 Opérateurs m-dissipatifs

**Définition 1.4.1** *Un opérateur linéaire  $A$  dans  $X$  est dit dissipatif si*

$$\forall \lambda > 0, \forall u \in D(A), \|u - \lambda Au\| \geq \|u\|$$

**Définition 1.4.2** *Un opérateur linéaire  $A$  dans  $X$  est dit m-dissipatif si  $A$  est dissipatif*

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in X, \exists u \in D(A), u - \lambda Au = f$$

**Remarque 1.4.1** *Si  $A$  est un opérateur m-dissipatif dans  $X$ , pour tout  $f \in X$  et tout  $\lambda > 0$ , l'équation  $u - \lambda Au = f$  possède une unique solution qui vérifie  $\|u\| \leq \|f\|$ .*

**Définition 1.4.3** Soit  $A$  un opérateur  $m$ -dissipatif dans  $X$  et  $\lambda > 0$ . Pour tout  $f \in X$ , on note  $J_\lambda f$  la solution  $u$  de l'équation  $u - \lambda Au = f$ .

**Proposition 1.4.1** Soit  $A$  un opérateur linéaire dissipatif dans  $X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est  $m$ -dissipatif dans  $X$ .
- (ii) il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que pour tout  $f \in X$ , il existe  $u \in D(A)$  tel que  $u - \lambda_0 Au = f$ .

**Proposition 1.4.2** Si  $A$  est  $m$ -dissipatif, alors  $G(A)$  est fermé dans  $X$ .

**Définition 1.4.4** Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ , un opérateur linéaire avec  $D(A)$  dense dans  $H$ .

(i) On appelle opérateur adjoint de  $A$ , l'opérateur  $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$  défini par

$$D(A^*) = \{v \in H, \exists u^* \in H \text{ avec : } \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle, \forall u \in D(A)\}$$

(ii) on dit que  $A$  est un opérateur symétrique si

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \forall u \in D(A) \text{ et } \forall v \in D(A) \subset D(A^*)$$

(iii) On dit que  $A$  est auto-adjoint si

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } Au = A^*u, \forall u \in D(A)$$

**Proposition 1.4.3**  $A$  est dissipatif dans  $H$  si et seulement si

$$\langle Au, u \rangle \leq 0, \text{ pour tout } u \in D(A)$$

**Proposition 1.4.4** Si  $A$  est un opérateur auto-adjoint dans  $H$ , et si  $A \leq 0$  (c-à-d,  $\langle Au, u \rangle \leq 0$  pour tout  $u \in D(A)$ ), alors  $A$  est  $m$ -dissipatif.

**Corollaire 1.4.1** Soit  $A$  un opérateur linéaire dans  $H$ , de domaine dense, tel que  $G(A) \subset G(A^*)$  et  $A \leq 0$ . Alors  $A$  est  $m$ -dissipatif si et seulement si  $A$  est auto-adjoint.

## 1.5 Semi-groupes fortement continus

**Définition 1.5.1** Soit  $X$  un espace de Banach, une famille  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires bornés de  $X$  vers  $X$  est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur  $X$  si et seulement si :

- (i)  $S(0) = I$ , l'identité dans  $X$ .
- (ii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall s, t \geq 0$ .

**Définition 1.5.2** Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit :

- (i) Uniformément continu si  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0$ .
- (ii) Fortement continu ou de classe  $C_0$  si  $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$ ,  $\forall x \in X$ .
- (iii) Semi-groupe de contraction de classe  $C_0$  s'il est de classe  $C_0$  et  $\|S(t)\| \leq 1$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Remarque 1.5.1** Si  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu, alors

$$\lim_{t \rightarrow s} \|S(t) - S(s)\| = 0$$

**Définition 1.5.3** Etant donné un fermé  $\Omega \subset X$  et  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe continu de  $\Omega$  dans  $\Omega$ , le générateur infinitésimal  $A$  du semi-groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est défini par :

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \left. \frac{dS(t)u}{dt} \right|_{t=0}, \text{ pour tout } u \in D(A)$$

où

$$D(A) = \left\{ u \in \Omega : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\}$$

**Théorème 1.5.1** Soit  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe de classe  $C_0$  sur  $X$ . Il existe une constante  $\omega \geq 0$  et  $M \geq 1$  telle que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ pour } 0 \leq t < \infty$$

**Preuve.** Voir [13] ■

**Corollaire 1.5.1** Si  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de classe  $C_0$ , alors pour tout  $x \in X$ . La fonction  $t \rightarrow S(t)x$  est continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $X$ .

**Théorème 1.5.2** Soit  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe de classe  $C_0$  sur  $X$  et soit  $A$  son générateur infinitésimal, alors

(a) Pour tout  $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x$$

(b) pour tout  $x \in X$ ,  $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$  et

$$A \left( \int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x$$

(c) Pour tout  $x \in X$ ,  $S(s)x \in D(A)$  et

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau$$

**Preuve.** Voir [13] ■

**Corollaire 1.5.2** Si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe  $C_0$  sur  $X$ , alors  $D(A)$  est dense dans  $X$  et  $A$  est un opérateur linéaire fermé.

## 1.6 Opérateurs sectoriels et semi-groupes analytiques

Soit  $X$  un espace de Banach complexe et  $\varphi_1, \varphi_2$  deux nombres complexes.

**Définition 1.6.1** Un opérateur linéaire  $A$  dans un espace de Banach  $X$  est appelé opérateur sectoriel s'il est fermé,  $D(A)$  dense dans  $X$  et il existe  $\Phi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $M \geq 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , tel que le secteur

$$\Delta_{a, \Phi} = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \Phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq 0 \} \subset \rho(A)$$

où  $\rho(A)$  est la résolvante de  $A$  et

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \forall \lambda \in \Delta_{a, \Phi}$$

**Remarque 1.6.1** ► Si  $A$  est opérateur linéaire borné dans un espace de Banach, alors  $A$  est sectoriel.

► Si  $A$  est un opérateur auto-adjoint et à domaine dense dans un espace de Hilbert, et si  $A$  est borné par dessous, alors  $A$  est sectoriel.

► Le laplacien est un exemple d'opérateur sectoriel.

**Définition 1.6.2** Soit  $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ , et soit  $S(z)$  où  $z \in \Sigma$  un opérateur linéaire borné. La famille  $\{S(z)\}_{z \in \Sigma}$  est dite semi-groupe analytique (ou holomorphe) dans  $X$ , si

(i)  $z \rightarrow S(z)$  est analytique dans  $\Sigma$ .

(ii)  $S(0) = I$  et  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Sigma}} S(z)x = x$  pour tout  $\forall x \in X$ .

(iii)  $S(z_1 + z_2) = S(z_1).S(z_2)$ ,  $\forall z_1, z_2 \in \Sigma$ .

**Définition 1.6.3** Un semi-groupe  $S(t)$  est dit analytique s'il est analytique dans un secteur  $\Sigma$  contenant le demi axe des réels non négatifs.

**Remarque 1.6.2** La restriction d'un semi-groupe analytique à l'axe des réels est un semi-groupe de classe  $C_0$ .

**Théorème 1.6.1** Si  $A$  est un opérateurs sectoriel, alors  $-A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique  $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ .

**Remarque 1.6.3** Si  $-A$  engendre un semi-groupe analytique, alors  $A$  est sectoriel.

## 1.7 Espaces de Hölder

**Définition 1.7.1** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine, une fonction  $u \in C(\Omega)$  est dite dans  $C^\alpha(\Omega)$ , pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , si

$$\sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

On munit  $C^\alpha(\Omega)$  une norme définie par :

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

On définit l'espace  $C^{m+\alpha}(\Omega)$ , pour  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $m \in \mathbb{N}$ , consiste les fonctions  $u \in C(\Omega)$  telles que :

$$\|u\|_{m+\alpha} = \|u\|_\infty + \sum_{\beta: 0 < |\beta| \leq m} \|D^\beta u\|_\alpha < \infty$$

Les espace ainsi définis sont des espaces de Banach

Les espaces  $C^{m+\alpha}(\Omega)$  sont appelés espaces de Hölder.

On définit l'analogie des espaces de Hölder pour le cas parabolique. Dans toute la suite  $D = \Omega \times ]0, T[$  désigne un cylindre borné de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on désigne par  $\partial D = \partial\Omega \times \{t = 0\}$  la frontière parabolique de  $D$  supposée “ assez régulière ”.

**Définition 1.7.2** On définit les espaces de Hölder  $C^\alpha(D)$  et  $C^{2+\alpha}(D)$  par :

$$\begin{aligned} C^\alpha(D) &= \{u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée telle que : } |u(x) - u(y)| \leq K |x - y|^\alpha \ \forall x, y \in \Omega\} \\ C^{2+\alpha}(D) &= \{u \in C^\alpha(D), \text{ telle que } D_x u, D_x^2 u, D_t u \in C^\alpha(D)\} \end{aligned}$$

Les espaces  $C^\alpha(D)$  et  $C^{2+\alpha}(D)$  munient des normes respectives :

$$\begin{aligned} \|u\|_\alpha &= \|u\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ \|u\|_{2+\alpha} &= \|u\|_\alpha + \sum_1^n \|D_{x_j} u\|_\alpha + \sum_1^n \|D_{x_j}^2 u\|_\alpha + \|D_t u\|_\alpha \end{aligned}$$

sont des espaces de Banach.

**Lemme 1.7.1** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine borné avec  $\partial\Omega$  est de classe  $C^m$  et  $A$  un opérateur sectoriel dans  $X = L^p(\Omega)$  avec un domaine  $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$  pour certain  $m \geq 1$ . Alors pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} X^\alpha &\subset W^{m,p}(\Omega) \text{ si } k - \frac{n}{p} < m\alpha - \frac{n}{p}, q \geq p \\ X^\alpha &\subset C^\nu(\Omega) \text{ si } 0 \leq \nu < m\alpha - \frac{n}{p} \\ W^{m,p} &\subset C^\nu(\Omega) \text{ si } 0 \leq \nu < m\alpha - \frac{n}{p} \end{aligned}$$

de plus les injections sont continues.

## 1.8 Théorème de régularité

On veut maintenant énoncer un résultat sur la régularité hölderienne des solutions des équations elliptiques.

**Théorème 1.8.1** (Théorème de Schauder)

Soient  $\Omega$  un domaine de frontière assez régulière,  $0 < \alpha < 1$  et  $A$  un opérateur fortement elliptique dont les coefficients sont  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  et bornés. Alors si  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ , le problème :

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\varphi \in C(\bar{\Omega})$  admet une solution  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .

**Preuve.** Voir [6] ■

**Théorème 1.8.2** Soit l'opérateur parabolique :

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c - \frac{\partial}{\partial t}$$

et soit l'application continue :  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que

(i)  $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(D), \|a_{ij}\|_\alpha \leq k, \|b_i\|_\alpha \leq k, \|c\|_\alpha \leq k$ .

(ii)  $\exists k_1 > 0$  tel que  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq k_1 |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ .

(iii)  $\|f\|_\alpha < \infty$ .

Alors pour toute  $\psi$  définie et continue sur  $\partial D$ , le problème parabolique :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } D \\ u = \psi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admet une solution  $u \in C^{2+\alpha}(D)$ . De plus :

$$\|u\|_{2+\alpha} \leq K (\|u\|_{L^\infty} + \|f\|_{C^\alpha})$$

où  $K$  ne dépend que de  $k_1, D, k$ . De plus si les dérivées  $D_x^m D_f^k a_{ij}, D_x^m D_f^k b_i, D_x^m D_f^k f$  existent et sont hölderiennes ( $0 \leq m+2k \leq p, k \leq q$ ), alors  $D_x^m D_f^k u$  existent et sont hölderiennes dans  $D$  ( $0 \leq m+2k \leq p+2, k \leq q+1$ ).

**Théorème 1.8.3** Soient  $D = \Omega \times ]0, T[$ ,  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in L^\infty$ ,  $p \geq 2$  et bornée,  $\varphi \in C^2$  et bornée. Alors si  $u$  est la solution classique du problème :

$$\begin{cases} u_t = a(x, t)u_{xx} + f(x, t) & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[ \\ u = \varphi & \text{en } t = 0 \end{cases}$$

où  $a \in C(D)$  bornée, on a sur tout compact  $Q$  de  $D$  l'inégalité suivante

$$\|u_{xx}\|_{L^p} + \|u_x\|_{L^p} + \|u_t\|_{L^p} \leq C$$

où  $C$  ne dépend que des bornes de  $f, \varphi, u$  et du domaine  $Q$ .

# Chapitre 2

## Théorie générale sur les équations du type parabolique

### 2.1 Méthode du semi-groupe

#### 2.1.1 Semi-groupes engendré par un opérateur m-dissipatif

Soit  $X$  un espace de Banach et  $A$  un opérateur m-dissipatif dans  $X$ , de domaine dense.

Pour  $\lambda > 0$ , on considère les opérateurs  $J_\lambda$  (définition (1.4.3)) et  $A_\lambda$  défini par  $A_\lambda = AJ_\lambda = \frac{J_\lambda - I}{\lambda}$ , et on pose

$$S_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}, \text{ pour } t \geq 0$$

**Théorème 2.1.1** *Pour tout  $x \in X$ , la suite de fonction  $u_\lambda(t) = S_\lambda(t)x$  converge uniformément sur tout intervalle borné  $[0, T]$  vers une fonction  $u \in C([0, \infty[, X)$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Si on pose  $S(t)x = u(t)$ , pour tout  $x \in X$  et  $t \geq 0$ , on a :*

$$\begin{cases} S(t) \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \|S(t)\| \leq 1, t \geq 0 \\ S(0) = I \\ S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \geq 0 \end{cases}$$

*De plus, pour tout  $x \in D(A)$ ,  $u(t) = S(t)x$  est l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} u \in C([0, \infty[, D(A)) \cap C^1([0, \infty[, X) \\ u' = Au, t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (2.1)$$

Enfin, pour tout  $x \in D(A)$  et  $t \geq 0$ , on a :

$$S(t)Ax = AS(t)x$$

**Preuve.** Voir [3] ■

### 2.1.2 Semi-groupes de contraction et leurs générateurs

**Définition 2.1.1** Une famille  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires bornés est dite semi-groupe de contraction sur  $X$ , si

- (i)  $\|S(t)\| = 1$  pour tout  $t \geq 0$
- (ii)  $S(0) = I$ , l'identité dans  $X$
- (iii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$  pour tout  $t, s \geq 0$
- (iv) pour tout  $x \in X$ ,  $S(t)x \in C([0, \infty[, X)$

**Définition 2.1.2** Le générateur infinitésimal de  $S(t)$  est l'opérateur linéaire  $A$  défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \frac{S(h)u - u}{h} \text{ a une limite dans } X \text{ quand } h \rightarrow 0 \right\}$$

$$Au = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u - u}{h}, \forall u \in D(A)$$

**Proposition 2.1.1** Soit  $S(t)$  un semi-groupe de contraction sur  $X$ , et  $A$  son générateur. Alors  $A$  est  $m$ -dissipatif et  $D(A)$  est dense.

**Preuve.** En trois étapes.

Étape 1.  $A$  est dissipatif. Pour tout  $u \in D(A)$ ,  $\lambda > 0$  et  $h > 0$ , on a

$$\left\| u - \lambda \frac{S(h)u - u}{h} \right\| \geq \left\| \left( 1 + \frac{\lambda}{h} \right) u \right\| - \frac{\lambda}{h} \|S(h)u\| \geq \|u\|$$

d'où le résultat, en faisant  $h \rightarrow 0$ .

CHAPITRE 2. THÉORIE GÉNÉRALE SUR LES ÉQUATIONS DU  
TYPE PARABOLIQUE

---

Etape 2.  $A$  est  $m$ -dissipatif. On définit l'opérateur  $J$  par

$$J(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} S(t) u dt, \text{ pour tout } u \in X$$

Il est clair que  $J \in \mathcal{L}(X)$ , avec  $\|J\| \leq 1$ . Pour  $u \in X$  et  $h > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} J u &= \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-t} (S(t+h)u - S(t)u) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{\infty} e^{-(t-h)} S(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-t} S(t) u dt \\ &= \frac{e^h - 1}{h} \int_0^{\infty} e^{-t} S(t) u dt - \frac{e^h}{h} \int_0^h e^{-t} S(t) u dt \end{aligned}$$

En faisant  $h \rightarrow 0$ , on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} J u = J u - u$$

et donc  $J u \in D(A)$ , avec  $A J u = J u - u$ , soit  $J u - A J u = u$ .

Etape 3. Pour tout  $u \in X$  et  $t > 0$ , on pose

$$u_t = \frac{1}{t} \int_0^t S(s) ds$$

CHAPITRE 2. THÉORIE GÉNÉRALE SUR LES ÉQUATIONS DU  
TYPE PARABOLIQUE

---

Il est clair que  $u_t \rightarrow u$ , lorsque  $t \rightarrow 0$ . Pour montrer que  $D(A)$  est dense, il suffit de montrer que  $u_t \in D(A)$  pour tout  $t > 0$ . Or on a pour tout  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} t \frac{S(t) - I}{h} u_t &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s) u ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s) u ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s) u ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s) u ds \end{aligned}$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ , le membre de droite converge vers  $S(t)u - u$ , et donc  $u_t \in D(A)$  avec

$$Au_t = \frac{S(t)u - u}{t}$$

■

**Théorème 2.1.2** (Théorème de Hille-Yosida-Phillips)

*Un opérateur linéaire  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur  $X$  si et seulement si  $A$  est  $m$ -dissipatif de domaine dense.*

**Preuve.** Si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur  $X$ , la proposition (2.1.1) montre que  $A$  est  $m$ -dissipatif de domaine dense.

Réciproquement, supposons que  $A$  est  $m$ -dissipatif de domaine dense, et soit  $S(t)$  le semi-groupe associé à  $A$  par le théorème (??). Il est immédiat que  $S(t)$  est un semi-groupe de contraction. Notons  $L$  son générateur et montrons que  $L = A$ .

Pour  $u \in D(A)$  et  $h > 0$ , on a (théorème (??))

$$S(h)u = u + \int_0^h S(s) A ds$$

et donc  $u \in D(L)$  avec  $Lu = Au$ . Par conséquent,  $G(A) \subset G(L)$ .

Finalement, soit  $v \in D(L)$ . Puisque  $A$  est m-dissipatif, il existe  $u \in D(A)$  tel que

$$u - Au = v - Lv$$

et puisque  $G(A) \subset G(L)$ , on a

$$(u - v) - L(u - v) = 0$$

$L$  étant dissipatif, on a  $u = v$ , et donc

$$G(L) \subset G(A)$$

Par suite

$$A = L$$

ce qui termine la preuve. ■

### 2.1.3 Equations non-homogènes

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $A$  un opérateur m-dissipatif et à domaine  $D(A)$  dense dans  $X$ . Etant donnée  $x \in X$  et  $f : [0, T] \rightarrow X$ . On veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X) \\ u' + Au = f(t) \\ u(0) = x \end{cases} \quad t \in [0, T] \quad (2.2)$$

**Lemme 2.1.1** *Soit  $x \in D(A)$  et  $f \in C([0, T], X)$ . On considère une solution  $u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X)$  du problème (2.2). Alors on a*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.3)$$

**Preuve.** Soit  $t \in [0, T]$ . On pose

$$w(s) = S(t - s)u(s), \text{ pour } s \in [0, t]$$

Soit  $s \in [0, t]$  et  $h \in ]0, t - s[$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{w(s+h) - w(s)}{h} &= S(t - s - h) \left\{ \frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{S(g) - I}{h} u(s) \right\} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} S(t - s) \{u'(s) - Au(s)\} \\ &= S(t - s)f(s) \end{aligned}$$

Puisque  $S(t - \cdot)f(\cdot) \in C([0, t], X)$ , on en déduit que  $w \in C^1([0, t], X)$  et

$$w'(s) = S(t - s)f(s), \text{ pour tout } s \in [0, t] \quad (2.4)$$

On intègre (2.4) entre 0 et  $\tau < t$ , puis on fait tendre  $\tau$  vers  $t$ , on obtient ainsi (2.3). ■

**Corollaire 2.1.1** *Pour tout  $x \in D(A)$  et  $f \in C([0, T], X)$ , le problème (2.2) possède au plus une solution.*

**Remarque 2.1.1** *Pour tout  $x \in X$  et  $f \in C([0, T], X)$ , la formule (2.3) définit une fonction  $u \in C([0, T], X)$ . Nous allons chercher des conditions suffisantes pour que  $u$  donnée par (2.3) soit solution de (2.2).*

**Lemme 2.1.2** *Pour tout  $x \in X$  et  $f \in L^1([0, T]; X)$ , la formule (2.3) définit une fonction  $u \in C([0, T], X)$ . De plus, on a*

$$\|u\|_{C([0, T], X)} \leq \|x\| + \|f\|_{L^1([0, T], X)}$$

**Preuve.** Le résultat est claire lorsque  $f \in C([0, T], X)$ , et s'obtient par densité dans le cas général. ■

**Proposition 2.1.2** Soit  $x \in D(A)$  et  $f \in C([0, T], X)$ . On suppose que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i)  $f \in L^1([0, T], D(A))$

(ii)  $f \in W^{1,1}([0, T], X)$

Alors  $u$  donnée par (2.3) est la solution de (2.2)

**Preuve.** Elle décompose en quatre étapes. On pose

$$v_t = \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(s)f(t-s)ds, \text{ pour } t \in [0, T]$$

**Étape 1.** On a  $v \in C^1([0, T], X)$ . En effet, lorsque  $f \in L^1([0, T]; D(A))$ , on écrit pour  $t \in [0, t[$  et  $h \in [0, t-s]$

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \int_0^t S(t-s) \frac{S(h) - I}{h} f(s)ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds$$

et on fait  $h \rightarrow 0$ . On remarque que

$$\frac{S(h) - I}{h} f \rightarrow Af \text{ dans } L^1([0, T]; X) \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

et on applique le lemme (2.1.2), il vient

$$\frac{d^+v}{dt}(t) = \int_0^t S(t-s)Af(s)ds + f(t), \text{ pour tout } t \in [0, T[$$

Lorsque  $f \in W^{1,1}([0, T], X)$ , on écrit pour  $t \in [0, t[$  et  $h \in [0, t-s]$

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \int_0^t S(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds + S(h) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t-s)f(s)ds$$

et on fait  $h \rightarrow 0$ . On remarque que

$$\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} \rightarrow f'(t-s) \text{ dans } L^1 ]0, t[ \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

et on applique le lemme (2.1.2), il vient

$$\frac{d^+v}{dt}(t) = \int_0^t S(s)f'(t-s)ds + S(t)f(0), \text{ pour tout } t \in [0, T[$$

Dans les deux cas, on a

$$\frac{d^+v}{dt} \in C([0, T[, X)$$

et donc

$$v \in C^1([0, T[, X)$$

**Etape 2.**  $v \in C^1([0, T[, X)$ . De la même façon, on montre que  $\frac{d^-v}{dt}(T)$  existe est égale à  $\lim_{t \rightarrow T} v'(t)$ ,

d'où le résultat.

**Etape 3.** Soit  $t \in [0, t[$  et  $h \in [0, t-s]$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^t S(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \end{aligned}$$

En faisant  $h \rightarrow 0$ , on obtient

$$v(t) \in D(A)$$

et

$$Av(t) = v'(t) - f(t)$$

Par fermeture du graphe, ceci reste vrai pour  $t = T$ . Il résulte que

$$v \in C([0, T[, D(A))$$

et que  $v$  vérifie l'équation du problème (2.2).

**Etape 4.** On a

$$u(t) = S(t)x + v(t) \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X)$$

De plus

$$u'(t) = AS(t)x + Av(t) + f(t) = Au(t) + f(t), \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

On a donc (2.2) est immédiat. ■

**Corollaire 2.1.2** Soit  $u_0 \in X$ ,  $f \in C([0, T[, X)$  et  $u$  donnée par (2.3).

Supposons que l'une des deux conditions suivantes a lieu :

(i)  $u \in C([0, T[, D(A))$

(ii)  $u \in C^1([0, T[, X)$

Alors  $u$  est la solution de (2.2).

**Proposition 2.1.3** Soit

$$x \in X, f \in L^1([0, T], X) \text{ et } u \in L^1([0, T], X)$$

On suppose en outre que

$$u \in L^1([0, T], D(A)) \text{ et que } u \in W^{1,1}([0, T], X)$$

Alors  $u$  vérifie (2.3) si et seulement si  $u$  vérifie

$$\begin{cases} u \in L^1([0, T], D(A)) \cap W^{1,1}([0, T], X) \\ u' = Au + f(t) & \text{pour presque tout } t \in [0, T] \\ u(0) = x \end{cases} \quad (2.5)$$

**Preuve.** Voir [3] ■

### 2.1.4 Le lemme de Gronwall

On présente dans ce paragraphe un lemme qui est très utile dans l'étude des problèmes semi-linéaires, aussi bien pour monter l'unicité des solutions que pour établir des propriétés de bornage.

**Lemme 2.1.3** (Lemme de Gronwall)

Soit  $T > 0$ ,  $\lambda \in L^1]0, T[$ ,  $\lambda \geq 0$  p.p. et  $C_1, C_2 \geq 0$ . Soit  $\varphi \in L^1]0, T[$ ,  $\varphi \geq 0$  p.p, tel que  $\lambda\varphi \in L^1]0, T[$  et

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds, \text{ pour } t \in ]0, T[$$

Alors on a

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right), \text{ pour } t \in ]0, T[$$

**Preuve.** On pose

$$\psi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds, \text{ pour } t \in [0, T]$$

$\psi$  est dérivable presque (car absolument continue), et on a

$$\psi'(t) \leq C_2\lambda(t)\varphi(t) \leq C_2\lambda(t)\psi(t), \text{ p.p sur } ]0, T[$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dt} \left\{ \psi(t) \exp \left( - \int_0^t C_2 \lambda(s) ds \right) \right\} \leq 0$$

et donc

$$\psi(t) \leq C_1 \exp \left( C_2 \int_0^t \lambda(s) ds \right), \text{ pour tout } t \in ]0, T[$$

D'où le résultat, puisque  $\varphi \leq \psi$  p.p. ■

**Remarque 2.1.2** *En particulier, si  $C_1 = 0$ , on a  $\varphi = 0$  p.p.*

### 2.1.5 Problème semi-linéaire

**Définition 2.1.3** *On dit qu'une fonction  $f : X \rightarrow X$  est lipschitzienne sur les bornés de  $X$  si pour tout  $M > 0$ , il existe une constante  $K(M)$ , telle que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K(M) \|x - y\|, \forall x, y \in B_M$$

où  $B_M$  est la boule de centre 0 et de rayon  $M$ .

Soit  $f : X \rightarrow X$  est une fonction lipschitzienne sur les bornés de  $X$ . on note  $K(M)$  la constante de lipschitz de  $f$  sur  $B_M$ , pour  $M > 0$ . En particulier,  $K(M)$  est une fonction croissante de  $M$ .

Etant donné  $x \in X$ , on cherche une solution  $u$  du problème :

$$\begin{cases} u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X) \\ u'(t) = Au(t) + f(u), & t \in [0, T] \\ u(0) = x \end{cases} \quad (2.6)$$

D'après le lemme (2.1.1) toute solution du problème (2.6) est solution du problème suivant :

$$u(t) = S(t)u + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \forall t \in [0, T] \quad (2.7)$$

**Existence locale de la solution**

**Définition 2.1.4** On dit qu'une fonction  $u$  de la variable réelle  $t \geq 0$  à valeurs dans  $X$  est solution locale du problème (2.6), s'il existe  $u$  définie sur un intervalle maximal  $[0, T[$  qui pour tout  $t < T$  est l'unique solution de (2.6), dans  $C^1([0, T[, X)$ .

**Lemme 2.1.4** Soit  $T > 0$ ,  $x \in X$  et  $u, v \in C([0, T], X)$  deux solution du problème (2.7). Alors  $u = v$ .

**Preuve.** On pose

$$M = \sup_{t \in [0, T]} \max \{ \|u(t)\|, \|v(t)\| \}$$

On a alors

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \int_0^t \|f(u(s)) - f(v(s))\| ds \leq K(M) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds, \forall t \in [0, T]$$

On conclut que  $u = v$ . ■

Posons  $T_M = [2K(2M + \|f(0)\|) + 2]^{-1} > 0$ , pour  $M > 0$ . On a un résultat d'existence locale.

**Proposition 2.1.4** Soit  $M > 0$  et  $u \in X$  tel que  $\|u\| \leq M$ . Alors, il existe une unique solution  $u \in C([0, T_M], X)$  de (2.7), avec  $T = T_M$ .

**Preuve.** Voir [3] ■

**Théorème 2.1.3** Il existe une fonction  $T : X \rightarrow ]0, \infty]$  avec les propriétés suivantes. Pour tout  $x \in X$ , il existe  $u \in C([0, T(x)[, X)$  qui pour tout  $T < T(x)$  est l'unique solution de (2.7) dans  $C([0, T[, X)$ . de plus :

$$2K \left( \|f(0)\| + 2 \|u(t)\| \geq \frac{1}{T(x) - t} - 2 \right), \text{ pour tout } t \in [0, T(x)[$$

En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu :

- (i)  $T(x) = \infty$ .
- (ii)  $T(x) < \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow T(x)} \|u(t)\| = \infty$ .

**Remarque 2.1.3** *Si la propriété (i) est satisfaite, on dit que la solution  $u$  est globale. Si (ii) est satisfaite, on dit que la solution  $u$  explose en temps fini. L'alternative (i)-(ii) signifie en d'autres termes que l'existence globale de la solution  $u$  est équivalente à l'existence d'une estimation à-priori de  $\|u(t)\|$  sur  $[0, T(x)[$ .*

*Dans la pratique, on établit de telles estimations à-priori par les méthodes habituelles d'estimations dans les E.D.P (principes de maximum, principes de comparaisons, multiplications), auxquelles il convient en général d'ajouter des techniques d'inégalités différentielles ou intégrales plus spécifiques des équations d'évolution (intégrales premières, fonctions de Liapunov, et diverses variantes du lemme de Gronwall).*

**Preuve.** Voir [3] ■

## 2.2 Méthode des sous-solutions et sur-solutions

### 2.2.1 Principe de maximum

Le principe de maximum admet de nombreux formulations, on va présenter quelques une.

Soit  $D = \Omega \times ]0, T[$  est un cylindre borné de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de frontière parabolique  $\partial D = \partial\Omega \cup \{t = 0\}$ .

#### Le principe de maximum dans le cas scalaire

Considérons l'opérateur différentiel  $P$  tel que  $Pu = Lu + au = f$  où  $u = u(x, t), (x, t) \in D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  et

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) D_i D_j u + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) D_i u - u_t$$

avec les coefficients  $a_{ij}, a_i$  sont bornés dans  $D$  et  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ .

CHAPITRE 2. THÉORIE GÉNÉRALE SUR LES ÉQUATIONS DU  
TYPE PARABOLIQUE

---

**Définition 2.2.1** On dit que  $L$  est uniformément parabolique dans  $D$  s'il existe  $\mu > 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu |\xi|^2 \forall (x,t) \in D$$

**Définition 2.2.2** Soient  $(t_1, x_1)$  et  $(t_2, x_2) \in D$ , on dit que  $(t_1, x_1)$  est connecté à  $(t_2, x_2)$  par un segment horizontal si  $t_1 = t_2$  et les points peuvent être joindré par un segment dans  $(t_1 = t_2) \cap D$ . De la même façon, on dit que ces points peuvent être joindre par un segment vertical si  $x_1 = x_2, t_1 = t_2$  et le segment est continu dans  $D$ .

**Théorème 2.2.1** (Principe de maximum fort)

Supposons que  $L$  est uniformément parabolique dans  $D$ , avec  $a \leq 0$  et  $f \geq 0$  (respectivement  $f \leq 0$ ) dans  $D$ . Soit  $\sup_D u = M$  (respectivement  $\inf_D u = m$ )

et supposons que  $u(\bar{t}, \bar{x}) = M$  pour un certain  $(\bar{t}, \bar{x}) \in D$ .

Alors  $u(t, x) = M$  en tous les points dans  $D$  qui peuvent être connecté à  $(\bar{t}, \bar{x})$  par un arc dans  $D$  qui consiste en un nombre fini des segments horizontaux et verticaux.

**Preuve.** Voir [18] ■

### Le principe de maximum dans le cas système

Considérons

$$L_\nu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} + C^{(\nu)} - \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nu = 1, 2$$

deux opérateurs paraboliques dans  $D$ .

Considérons le système parabolique faiblement couplé suivant :

$$\begin{cases} Lu = L_1u + d_1v \\ Lv = L_2v + d_2u \end{cases}$$

où  $u, v$  sont de classe  $C^{2,1}$  sur  $D$ .

Soient les deux hypothèses suivantes :

A) Les coefficients de  $L_1, L_2$  ainsi que  $d_1, d_2$  sont continues dans  $D$ .

B) Il existe  $M$ , tels que  $C^i(x, t) \leq M, d_i(x, t) \leq M$  pout tout  $(x, t) \in D$ .

**Proposition 2.2.1** *Supposons que l'hypothèse (B) est satisfaite, Si  $u, v$  sont de classe  $C^{2,1}$  dans  $D$  tel que,  $L_1u > 0, L_2v > 0$  dans  $D$  et  $u < 0, v < 0$  sur  $\partial D$  (resp.  $L_1u < 0, L_2v < 0$  dans  $D$  et  $u > 0, v > 0$  sur  $\partial D$ ), alors  $u < 0, v < 0$  dans  $D$  (resp.  $u > 0, v > 0$  dans  $D$ ).*

**Théorème 2.2.2** *Supposons que les deux hypothèses (A) et (B) sont satisfaites. Si  $u, v$  sont continues dans  $\bar{D}$  de classe  $C^{2,1}$  dans  $D$  tel que,  $L_1u \geq 0, L_2v \geq 0$  dans  $D$  et  $u \leq 0, v \leq 0$  sur  $\partial D$  (resp.  $L_1u \leq 0, L_2v \leq 0$  dans  $D$  et  $u \geq 0, v \geq 0$  sur  $\partial D$ ), alors  $u \leq 0, v \leq 0$  dans  $D$  (resp.  $u \geq 0, v \geq 0$  dans  $D$ ).*

**Preuve.** Voir [14] ■

## 2.2.2 Méthode des sous-solutions et sur-solutions

### Problèmes elliptiques

Soit le problème :

$$\begin{cases} Au + f(x, u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un domaine borné.  $A$  est un opérateur elliptique de degré 2

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec la matrice  $(a_{ij})$  définie positive.  $B$  est l'un des opérateurs frontière :

$$Bu = u \text{ ou } Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u, \quad x \in \partial\Omega$$

Ici  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  signifie la dérivée par rapport à la normale extérieure, et on suppose toujours  $\beta \geq 0$  définie sur le bord  $\partial\Omega$ . On suppose de plus que les coefficients de  $L$  sont de classe  $C^\alpha$  et  $f$  est supposée régulière au sens suivant :  $f$  est de classe  $C^1$  par rapport à  $u$  et de classe  $C^\alpha$  par rapport à  $x$ . on suppose que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^{2,\alpha}$ .

On donne les définitions des sous et sur-solutions du problème (2.8).

**Définition 2.2.3** Une fonction  $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$  est dite une sur-solution du problème (2.8) si  
 (i)  $A\bar{u} + f(x, \bar{u}) \leq 0$   
 (ii)  $B\bar{u} \geq g$

**Définition 2.2.4** Une fonction  $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$  est dite une sous-solution du problème (2.8) si  
 (i)  $A\underline{u} + f(x, \underline{u}) \geq 0$   
 (ii)  $B\underline{u} \leq g$

**Théorème 2.2.3** Soient  $\bar{u}, \underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$  deux fonctions  $\bar{u} \geq \underline{u}$  telles que

$$\begin{aligned} A\bar{u} + f(x, \bar{u}) &\leq 0, & B\bar{u} &\geq g \\ A\underline{u} + f(x, \underline{u}) &\geq 0, & B\underline{u} &\leq g \end{aligned}$$

Supposons  $f$  est  $C^1$  par rapport à  $u$  sur  $\min \underline{u} \leq u \leq \max \bar{u}$ . Alors, il existe une solution régulière  $w$  du problème

$$\begin{cases} w \in C^2(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega}) \\ Aw + f(x, w) = 0 \\ Bw = g \end{cases}$$

De plus, on a  $\underline{u} \leq w \leq \bar{u}$ .

**Preuve.** Voir [17] ■

### Problèmes paraboliques

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $D = \Omega \times ]0, T[$ . On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Au + f(x, u) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{dans } D \\ Bu = g(x, t) & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[ \\ u(x, 0) = g(x) & \text{sur } D \cap \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.9)$$

**Définition 2.2.5** Une fonction  $\bar{u}$  est dite une sur-solution du problème (2.9) si

(i)  $A\bar{u} + f(x, \bar{u}) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \leq 0$

(ii)  $B\bar{u} \geq g$

(iii)  $\bar{u}(x, 0) \geq g(x)$

**Définition 2.2.6** Une fonction  $\underline{u}$  est dite une sous-solution du problème (2.9) si

(i)  $A\underline{u} + f(x, \underline{u}) - \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \geq 0$

(ii)  $B\underline{u} \leq g$

(iii)  $\underline{u}(x, 0) \leq g(x)$

**Théorème 2.2.4** Si pour le problème (2.9), il existe une sur-solution  $\bar{u}$  et une sous-solution  $\underline{u}$ ,  $\bar{u} \geq \underline{u}$ , alors il existe une solution classique du problème (2.9).

**Preuve.** Voir [17]. ■

# Chapitre 3

## Etude d'un système d'équations paraboliques dégénérées

### 3.1 Position du problème

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence locale, l'unicité et l'explosion en temps fini de la solution du système parabolique dégénéré suivant :

$$\begin{cases} xu_t = \Delta u + v^p & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ (1-x)v_t = \Delta v + u^p \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, & x \in \{0, 1\} \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\Omega = ]0, 1[$  et  $1 < p \leq 2$ ,  $u_0, v_0 \in C^{2+\alpha}([0, 1])$  avec  $u_0, v_0 \geq 0$  et  $u_0 = v_0$  dans  $\{0, 1\}$ .

Le système (3.1) est dit dégénéré en  $x = 0$  et  $x = 1$  en ce sens que le coefficient de  $u_t$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 et le coefficient de  $v_t$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 1.

On commence par établir l'existence locale et l'unicité de la solution de ce système et on démontre que sous certaines conditions suffisantes, la solution n'est pas globale, on dit alors qu'elle explose en temps fini  $T$ .

## 3.2 Existence locale et unicité de la solution

Dans cette section, on établit l'existence locale et l'unicité d'une solution classique pour le système parabolique dégénéré suivant :

$$\begin{cases} xu_t = \Delta u + v^p & \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ (1-x)v_t = \Delta v + u^p \\ u(x, t) = v(x, t) = 0 & x \in \{0, 1\} \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.2)$$

On suppose que

$$u_0, v_0 \in C^{2+\alpha}([0, 1]), u_0, v_0 \geq 0 \text{ et } u_0 = v_0 \text{ sur } \{0, 1\}$$

Ici, l'idée consiste à tronquer l'intervalle  $]0, 1[$  en considérant l'intervalle  $]\epsilon, 1 - \epsilon[$ ,  $\epsilon > 0$  de telle sorte que le système (3.2) devient non dégénéré dans  $]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, T[$ .

On considère alors le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} xu_t = \Delta u + v^p, & \text{dans } ]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, T[ \\ (1-x)v_t = \Delta v + u^p \\ u(x, t) = v(x, t) = 0 & x \in \{\epsilon, 1 - \epsilon\} \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in ]\epsilon, 1 - \epsilon[ \end{cases} \quad (3.3)$$

**Lemme 3.2.1** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $t_0 > 0$  tel que le système (3.3) admet une solution  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  sur  $]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$ .*

Pour prouver l'existence de la solution du système (3.2), l'idée consiste à montrer que  $(u_\epsilon), (v_\epsilon)$  convergent vers des fonctions  $u, v$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  de telle sorte que les limites  $u, v$  soient solutions du système dégénéré (3.2).

**Lemme 3.2.2** *Soit  $1 > \epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$  et supposons que  $(u_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_1})$  et  $(u_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_2})$  sont solutions du système (3.3) dans  $]0, t_0[$ . Alors*

$$\begin{aligned} u_{\epsilon_1} &\leq u_{\epsilon_2} \\ v_{\epsilon_1} &\leq v_{\epsilon_2} \end{aligned} \quad \text{dans } ]\epsilon_1, 1 - \epsilon_1[ \times ]0, t_0[$$

**Preuve.** Posons

$$\begin{aligned} w_1 &= u_{\epsilon_2} - u_{\epsilon_1} \\ w_2 &= v_{\epsilon_2} - v_{\epsilon_1} \end{aligned} \quad \text{dans } ]\epsilon_1, 1 - \epsilon_1[ \times ]0, t_0[$$

Alors, on a

$$\begin{cases} x(w_1)_t - \Delta w_1 = (v_{\epsilon_2})^p - (v_{\epsilon_1})^p = p\theta_1^{p-1}w_2 \\ (1-x)(w_2)_t - \Delta w_2 = (u_{\epsilon_2})^p - (u_{\epsilon_1})^p = p\theta_2^{p-1}w_1 \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \theta_1 = \lambda(x, t)u_{\epsilon_1} + (1 - \lambda(x, t))u_{\epsilon_2} \\ \theta_2 = \lambda(x, t)v_{\epsilon_1} + (1 - \lambda(x, t))v_{\epsilon_2} \end{cases} \quad \text{pour } \lambda(x, t) \in ]0, 1[$$

De plus

$$w_1 = w_2 = 0 \text{ en } t = 0 \text{ et } w_1, w_2 \geq 0 \text{ en } x = \epsilon_1 \text{ et } x = 1 - \epsilon_1$$

Le principe de maximum, nous donne

$$\begin{cases} w_1 \geq 0 \\ w_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{dans } ]\epsilon_1, 1 - \epsilon_1[ \times ]0, t_0[$$

■

D'après le lemme (3.2.2) les suites  $(u_\epsilon)$  et  $(v_\epsilon)$  sont monotones décroissantes. On prend la limite des deux suites lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Il faut montrer qu'il existe  $t_0 > 0$  ne dépendant pas de  $\epsilon$  telles que les solutions  $(u_\epsilon)$  et  $(v_\epsilon)$  soient définies sur  $]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$  pour tout  $\epsilon > 0$ .

Pour cela nous avons besoin d'un résultat des sous et sur-solutions.

**Définition 3.2.1** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et soient  $L_i = \sum_{k,j=1}^n a_{kj}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} +$

$\sum_{k=1}^n b_k^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k}$ ,  $i = 1, 2$  deux opérateurs fortement elliptiques à coefficient de classe  $C^1$  bornés sur  $\Omega$ . Considérons le système parabolique suivant :

$$\begin{cases} \begin{cases} u_t = L_1 u + f_1(t, x, u, v) \\ v_t = L_2 v + f_2(t, x, u, v) \end{cases} & x \in \Omega, t \in ]0, T[ \\ \begin{cases} u(x, t) = h_1(x, t) \\ v(x, t) = h_2(x, t) \end{cases} & x \in \partial\Omega, t \in ]0, T[ \\ \begin{cases} u(0, x) = u_0(x) \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases} & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

CHAPITRE 3. ETUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS  
PARABOLIQUES DÉGÉNÉRÉES

---

où  $u_0, v_0$  sont de classe  $C^1(\Omega)$  et positives,  $h_i$  continues sur  $\partial\Omega \times ]0, T[$  et positives,  $f_i$  sont localement lipschitziennes et croissantes par rapport à  $(u, v)$ . On dit que les deux couples de fonctions  $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  et  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  de classe  $C^{2,1}(\Omega \times ]0, T[)$  sont sous-solutions et sur-solutions respectivement si elles vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\bar{u}_i)_t - L_i \bar{u}_i - f_i(t, x, \bar{u}_1, \bar{u}_2) &\geq 0 \geq (\underline{u}_i)_t - L_i \underline{u}_i - f_i(t, x, \underline{u}_1, \underline{u}_2), \quad \forall i = 1, 2 \\ u_j|_{\partial\Omega} &\geq h_i \geq u_i|_{\partial\Omega}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \bar{u}_1 &\geq u_0 \geq \underline{u}_1 \\ \bar{u}_2 &\geq v_0 \geq \underline{u}_2 \end{aligned} \quad \text{en } t = 0$$

Le théorème suivant nous donne une propriété importante des sous et sur-solutions.

**Théorème 3.2.1** Désignons par  $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  et  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  les sous-solutions et les sur-solutions respectivement du système (3.4) sur  $\Omega \times ]0, T[$ . Alors le système (3.4) admet une solution unique  $(u, v)$  dans  $\Omega \times ]0, T^*[$ , pour  $T^* > T$  tel que :

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &\leq u \leq \bar{u}_1 \\ \underline{u}_2 &\leq v \leq \bar{u}_2 \end{aligned}$$

De plus si les sous et sur-solutions existent dans  $\Omega \times ]0, T^*[$ , alors la solution  $(u, v)$  se prolonge en  $t = T^*$ .

**Preuve.** Voir [12] ■

**Théorème 3.2.2** Il existe  $t_0 > 0$  et une fonction  $h \in C^{2,1}([0, 1], [0, t_0])$  telle que  $\forall \epsilon > 0$ , il existe deux solutions  $(u_\epsilon)$  et  $(v_\epsilon)$  du système (3.3) dans  $]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$  et vérifient :

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\leq h \\ v_\epsilon &\leq h \end{aligned}$$

**Preuve.** Supposons qu'il existe  $k_0 > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} u_0(x) &\leq k_0 \psi(x) \\ v_0(x) &\leq k_0 \psi(x) \end{aligned}, \quad x \in ]0, 1[$$

CHAPITRE 3. ETUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS  
PARABOLIQUES DÉGÉNÉRÉES

---

où

$$\psi(x) = \frac{x(1-x)}{2}$$

Fixons  $\epsilon > 0$  et choisissons  $\delta \in ]0, \frac{1}{2}[$  telle que

$$\delta \leq (2k_0)^{\frac{-(p-1)}{p}}$$

Considérons le système suivant

$$k' = \frac{k^p}{4^{p-1}\delta}$$

avec

$$k(0) = k_0$$

Il existe  $t_0 > 0$  tel que le système admet une solution  $(k, k)$  dans  $]0, t_0[$   
Posons alors

$$h(x, t) = k(t)\psi(x) \quad (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, t_0[$$

Montrons maintenant que  $(h, h)$  est une sur-solution du système tronqué (3.3)  
dans  $] \epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$ .

Posons

$$\begin{aligned} J_1 &= xh_t - \Delta h - h^p \\ &= xk'\psi + k - k^p\psi^p \end{aligned}$$

Pour  $x \in ]0, \delta[ \cup ]1 - \delta, 1[$ ,  $t \in ]0, t_0[$

$$\begin{aligned} J_1 &\geq k - k^p\psi^p \\ &\geq k \left( 1 - \frac{k^p\psi^p}{k} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. ETUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS  
PARABOLIQUES DÉGÉNÉRÉES

---

Pour  $x \in ]\delta, 1 - \delta[, t \in ]0, t_0[$

$$\begin{aligned}
 J_1 &= xh_t - \Delta h - h^p \\
 &= xk'\psi + k - k^p\psi^p \\
 &\geq xk'\psi - k^p\psi^p \\
 &\geq \delta k'\psi - k^p\psi^p \\
 &= \psi (\delta k' - k^p\psi^{p-1}) \\
 &\geq \psi \left( \delta k' - \frac{k^p}{4^{p-1}} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De plus

$$h(x, 0) = k_0\psi(x) \geq u_0(x) \text{ et } h(0, t) = h(1, t) = 0$$

Posons encore

$$\begin{aligned}
 J_2 &= (1-x)h_t - \Delta h - h^p \\
 &= (1-x)k'\psi + k - k^p\psi^p
 \end{aligned}$$

Pour  $x \in ]0, \delta[ \cup ]1 - \delta, 1[, t \in ]0, t_0[$

$$\begin{aligned}
 J_2 &\geq k - k^p\psi^p \\
 &\geq k \left( 1 - \frac{k^p\psi^p}{k} \right) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Pour  $x \in ]\delta, 1 - \delta[, t \in ]0, t_0[$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= (1-x)h_t - \Delta h - h^p \\
 &= (1-x)k'\psi + k - k^p\psi^p \\
 &\geq (1-x)k'\psi - k^p\psi^p \\
 &\geq \delta k'\psi - k^p\psi^p \\
 &= \psi(\delta k' - k^p\psi^{p-1}) \\
 &\geq \psi\left(\delta k' - \frac{k^p}{4^{p-1}}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De plus

$$h(x, 0) = k_0\psi(x) \geq v_0(x) \text{ et } h(0, t) = h(1, t) = 0$$

Donc  $(h, h)$  est sur-solution du système (3.3) et :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq u_\epsilon \leq h \\
 0 &\leq v_\epsilon \leq h
 \end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.2.1** *Les suites  $(u_\epsilon)$  et  $(v_\epsilon)$  convergent simplement vers des fonctions  $u$  et  $v$  dans  $]0, 1[ \times ]0, t_0[$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . De plus  $u, v \in L^p(]0, 1[ \times ]0, t_0[)$ .*

**Preuve.** D'après le théorème (3.2.2), les fonctions  $(u_\epsilon)$  et  $(v_\epsilon)$  sont définie dans  $]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$ .

De plus

$$0 \leq u_\epsilon \leq h \text{ et } 0 \leq v_\epsilon \leq h \text{ dans } ]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$$

Définissons  $u, v$  par

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t) & \text{pour } x \in ]0, 1[, t \in [0, t_0[ \\ 0 & \text{pour } x = 0 \text{ ou } x = 1, t \in [0, t_0[ \end{cases} \\
 v(x, t) &= \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_\epsilon(x, t) & \text{pour } x \in ]0, 1[, t \in [0, t_0[ \\ 0 & \text{pour } x = 0 \text{ ou } x = 1, t \in [0, t_0[ \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le théorème de la convergence dominée nous donne

$$u, v \in L^p ]0, 1[ \times ]0, t_0[$$

■

### 3.3 Régularité de la solution

On veut montrer maintenant dans cette section que les fonctions  $u, v$  du corollaire (3.2.1) sont des solutions classiques du système dégénéré (3.2). Pour cela nous avons besoins de deux lemmes suivants :

**Lemme 3.3.1** *Soit  $Q = ]a, b[ \times ]0, t_2[$  un domaine carré tel que  $0 < a < b < 1$  et  $0 < t_2 < t_0$ , il existe  $C' > 0$  ne dependant pas de  $\epsilon$  tel que :*

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_{C^\alpha(Q)} &\leq C' \\ \|v_\epsilon\|_{C^\alpha(Q)} &\leq C' \end{aligned}$$

**Preuve.** D'après le théorème (3.2.2), on a

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_\infty &\leq C \\ \|v_\epsilon\|_\infty &\leq C \end{aligned}$$

où  $C$  ne depend pas de  $\epsilon$ .

D'où

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_{L^p(Q)} &\leq C_1 \\ \|v_\epsilon^p\|_{L^p(Q)} &\leq C_1 \end{aligned}$$

où  $C_1$  ne depend pas de  $\epsilon$ .

En utilisant l'inégalité du théorème (1.8.3), on obtient :

$$\|(u_\epsilon)_x\|_{L^p(Q)} + \|(u_\epsilon)_{xx}\|_{L^p(Q)} + \|(u_\epsilon)_t\|_{L^p(Q)} \leq C_2$$

où  $C_2$  ne depend pas de  $\epsilon$ .

D'après le lemme (1.7.1) de l'injection de Sobolev, on a pour  $p > \frac{2}{1-\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_{C^\alpha(Q)} &\leq C \|u_\epsilon\|_{W^{1,p}(Q)} \\ &= C \left( \|u_\epsilon\|_{L^p(Q)} + \|(u_\epsilon)_x\|_{L^p(Q)} + \|(u_\epsilon)_t\|_{L^p(Q)} \right) \\ &\leq C' \end{aligned}$$

où  $C'$  ne depend pas de  $\epsilon$ .

De même pour  $v_\epsilon$ , c-à-d :

$$\|v_\epsilon\|_{C^\alpha(Q)} \leq C'$$

■

**Lemme 3.3.2** *Soit  $Q = ]a, b[ \times ]0, t_2[$  un domaine carré tel que  $0 < a < b < 1$  et  $0 < t_2 < t_0$ , il existe  $C'' > 0$  ne dependant pas de  $\epsilon$  tel que*

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} &\leq C'' \\ \|v_\epsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} &\leq C'' \end{aligned}$$

**Preuve.** D'après le théorème (1.8.2) de la régularité classique des solutions des équations paraboliques appliqué à chacune des deux équations du système (3.3) dans le domaine  $Q$

$$\|u_\epsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leq C \left( \|u_\epsilon\|_\infty + \|v_\epsilon^p\|_{C^\alpha(Q)} \right)$$

or

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_\infty &\leq \|h\|_\infty \\ \|v_\epsilon\|_\infty &\leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{|v_\epsilon^p(x) - v_\epsilon^p(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \leq C \left( \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \right), \forall x, y \in Q$$

Soit

$$\begin{aligned} \|v^p\|_{C^\alpha(Q)} &\leq C \left( \|v_\epsilon\|_{C^\alpha(Q)} \right) \\ &\leq C_1 \end{aligned}$$

où  $C_1$  ne dépend pas de  $\epsilon$  (d'après le lemme précédent).  
finalement, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \|v_\epsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} &\leq C'' \\ \|u_\epsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} &\leq C'' \end{aligned}$$

où  $C''$  ne dépend pas de  $\epsilon$ . ■

**Théorème 3.3.1** *Sous les suppositions que  $u_0, v_0 \in C^{2+\alpha}([0, 1])$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $u, v$  sont des solutions classiques du système (3.2) dans  $]0, 1[ \times ]0, t_0[$ .*

**Preuve.** Montrons d'abord que  $u, v$  sont  $C^{2,1}$  dans  $]0, 1[ \times ]0, t_0[$  et continues dans  $[0, 1] \times [0, t_0]$ .

Choisissons un point  $(x_1, t_1) \in ]0, 1[ \times ]0, t_0[$ , et un domaine  $Q = ]a, b[ \times ]0, t_2[$  telle que :

$$0 < a < x_1 < b < 1 \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < t_0$$

Le lemme (3.3.2) nous donne alors :

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x) - u_\epsilon(y)| &\leq C'' \|x - y\|^\alpha \\ |D_x u_\epsilon(x) - D_x u_\epsilon(y)| &\leq C'' \|x - y\|^\alpha \\ |D_x^2 u_\epsilon(x) - D_x^2 u_\epsilon(y)| &\leq C'' \|x - y\|^\alpha \\ |D_t u_\epsilon(x) - D_t u_\epsilon(y)| &\leq C'' \|x - y\|^\alpha \end{aligned} \quad \forall x, y \in \bar{Q}$$

Les suites  $(u_\epsilon), (D_x u_\epsilon), (D_x^2 u_\epsilon), (D_t u_\epsilon)$  sont équicontinues dans  $\bar{Q}$ .

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut extraire des sous suites notées aussi  $(u_\epsilon), (D_x u_\epsilon), (D_x^2 u_\epsilon), (D_t u_\epsilon)$  qui convergent uniformément.

Ceci veut dire que la suite  $(u_\epsilon)$  est de Cauchy dans  $C^{2,1}(Q)$ , donc elle converge vers  $u \in C^{2,1}(Q)$ .

De même  $v \in C^{2,1}(Q)$ .

CHAPITRE 3. ETUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS  
PARABOLIQUES DÉGÉNÉRÉES

---

De plus  $D_x^2 u_\epsilon \rightarrow D_x^2 u$ ,  $D_x^2 v_\epsilon \rightarrow D_x^2 v$ ,  $D_t u_\epsilon \rightarrow D_t u$ ,  $D_t v_\epsilon \rightarrow D_t v$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . En passant à la limite dans le système (3.3) lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient que  $u, v$  sont des solutions du système (3.2) dans  $]0, 1[ \times ]0, t_0[$ .  
Montrons maintenant que  $u, v$  sont continues dans  $[0, 1] \times [0, t_0[$ .

Comme

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\rightarrow u \\ v_\epsilon &\rightarrow v \end{aligned}$$

uniformement sur  $\overline{Q}$ ,  $u, v$  sont continues en  $t = 0$   
de plus

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq h \\ 0 &\leq v \leq h \end{aligned} \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, t_0[$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow 1} v(x, t) = 0$$

qui est donc continues en  $x = 0$  et  $x = 1$ . ■

**Proposition 3.3.1** *La solution du système (3.2) est unique et positive dans  $]0, 1[ \times ]0, t_0[$ .*

**Preuve.** Montrons que la solution  $(u, v)$  est positive.  
On a déjà le fait que :

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\geq 0 \\ v_\epsilon &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{dans } ]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} u &\geq 0 \\ v &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, t_0[$$

Le principe de maximum fort montre que

$$\begin{aligned} u &> 0 \\ v &> 0 \end{aligned} \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, t_0[$$

à moins que

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \end{aligned}$$

Pour montrer que la solution  $(u, v)$  est unique, soient  $(u, v), (u_1, v_1)$  deux solutions du système (3.2) dans  $]0, 1[ \times ]0, t_0[$ .

Posons

$$\begin{aligned} w_1 &= u - u_1 \\ w_2 &= v - v_1 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} x(w_1)_t - \Delta w_1 = p\theta_1^{p-1}w_2 \\ (1-x)(w_2)_t - \Delta w_2 = p\theta_2^{p-1}w_1 \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda(x, t)u_1 + (1 - \lambda(x, t))u \\ \theta_2 &= \lambda(x, t)v_1 + (1 - \lambda(x, t))v \end{aligned} \quad \text{pour } \lambda(x, t) \in ]0, 1[$$

De plus

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 = 0 && \text{en } t = 0 \\ w_1 &= w_2 = 0 && \text{en } x = 0, x = 1 \end{aligned}$$

Le principe de maximum nous donne

$$w_1 = w_2 = 0 \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, t_0[$$

■

### 3.4 Explosion en temps fini de la solution

Cette section est consacré à l'étude de l'explosion en temps fini de la solution du système parabolique dégénéré (3.1). On montre que sous certaines

conditions suffisantes, le temps d'existence maximal  $T$  de la solution est fini on dit alors que cette solution explose en temps fini  $T$ . (c-à-d, la solution n'est pas globale).

Désignons par  $(u, v)$  la solution maximale du système (3.1) dans  $]0, 1[ \times ]0, T[$ .

**Définition 3.4.1** *On dit que  $u$  (resp  $v$ ) de (3.1) explose en temps fini  $T$  ( $T < \infty$ ), s'il existe  $x_0 \in [0, 1]$  et une suite  $(x_n, t_n) \subset ]0, 1[ \times ]0, T[$  tel que  $t_n \rightarrow t$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  et  $u(x_n, t_n) \rightarrow \infty$  (resp  $v(x_n, t_n) \rightarrow \infty$ ) quand  $n \rightarrow \infty$ .*

**Définition 3.4.2** *On dit que la solution  $(u, v)$  du système (3.1) explose en temps fini  $T$  ( $T < \infty$ ) si  $u$  ou bien  $v$  explose en temps  $T$ .*

Des définitions précédentes il découle qu'un temps d'explosion est toujours un temps d'existence maximal. Le théorème suivant montre que l'inverse est également vraie pour le système (3.1).

**Théorème 3.4.1** *Soit  $T$  le temps d'existence maximal du système (3.1), si  $T$  est fini alors la solution  $(u, v)$  explose en temps fini  $T$ .*

**Preuve.** Supposons que  $T < \infty$  et  $(u, v)$  n'explose pas en temps  $T$ . On a besoin de montrer que  $(u, v)$  peut se prolonger jusqu'à  $(0, T + t_0)$ . Supposons qu'il existe  $M$  tel que :

$$u(x, t) \leq M, v(x, t) \leq M \text{ dans } ]0, 1[ \times ]0, T[$$

et définissons

$$\psi(x) = Kx(1-x) \text{ où } K = \max \left\{ \frac{M^p}{2}, \sup_{x \in (0,1)} \left( \frac{u_0(x)}{x(1-x)} \right), \sup_{x \in (0,1)} \left( \frac{v_0(x)}{x(1-x)} \right) \right\}$$

Montrons que  $\psi$  est sur solution du système (3.1) :

$$\begin{cases} x\psi_t - \Delta\psi - v^p = 2K - v^p \geq 2K - M^p \geq 0 \\ (1-x)\psi_t - \Delta\psi - u^p = 2K - u^p \geq 2K - M^p \geq 0 \end{cases}$$

De plus  $\psi = 0$  en  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $\psi(x) \geq u_0(x)$ ,  $\psi(x) \geq v_0(x)$  en  $t = 0$ , alors  $\psi \geq u$ ,  $\psi \geq v$  dans  $]0, 1[ \times ]0, T[$ .

En particulier  $u, v$  sont bornées par  $\psi$  en  $t = T$ , et ainsi  $u, v$  se prolongent en  $t = T$ .

Maintenant montrons que  $u, v$  se prolongent en  $T + t_0$ .

Revenons au système tronqué (3.3), la même technique utilisée que celle dans le théorème (3.2.2) permet de construire une sur-solution  $(h, h)$  du système (3.3) dans  $] \epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, T[$ .

Le théorème (3.2.1) permet de prolonger la solution  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  jusqu'à  $T + t_0$ .  
d'où

$$u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t)$$

et

$$v(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_\epsilon(x, t)$$

se prolongent en  $T + t_0$ . Ce qui contredit la définition de  $T$  (c-à-d, le fait que  $T$  est maximal). ■

On veut trouver maintenant des conditions suffisantes sous lesquelles la solution du système (3.1) explose en temps fini. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.4.1** *Les dérivées  $u_t$  et  $v_t$  sont continues en  $x = 0, x = 1$ .*

**Preuve.** Revenons au système non dégénéré (3.3). Dérivons les deux équations du système par rapport à  $t$ , on obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} x((u_\epsilon)_t)_t - \Delta(u_\epsilon)_t = p v_\epsilon^{p-1} (v_\epsilon)_t \\ (1-x)((v_\epsilon)_t)_t - \Delta(v_\epsilon)_t = p u_\epsilon^{p-1} (u_\epsilon)_t \\ (u_\epsilon)_t = (v_\epsilon)_t = 0 \end{array} & \text{dans } ] \epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[ \\ \begin{array}{l} x(u_\epsilon)_t = u_0'' + v_0^p \\ (1-x)(v_\epsilon)_t = v_0'' + u_0^p \end{array} & \begin{array}{l} x \in \{ \epsilon, 1 - \epsilon \} \\ \text{en } t = 0 \end{array} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Construisons maintenant une sur-solution pour le système (3.5).

Choisissons  $t_0 \in ]0, T[$ . Alors  $u \leq M, v \leq M$  dans  $]0, 1[ \times ]0, T[$ .

CHAPITRE 3. ETUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS  
PARABOLIQUES DÉGÉNÉRÉES

---

Définissons  $h$  comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \psi &= \frac{1}{2}x(1-x) \\ \text{Choisissons } \delta &\leq \frac{1}{pM^{p-1}} \\ \text{Soit } k(t) &= k_0 \exp\left(\frac{pM^{p-1}t}{\delta}\right) \\ \text{Posons } h(x, t) &= k(t)\psi(x) \end{aligned}$$

Pour  $x \in ]0, \delta[ \cup ]1 - \delta, 1[$ ,  $t \in ]0, t_0[$

$$\begin{aligned} xh_t - \Delta h - pv^{p-1}h &= xk'\psi + k - pv^{p-1}k\psi \\ &\geq k - pv^{p-1}k\psi \\ &\geq k\left(1 - pM^{p-1}\frac{\delta(1-\delta)}{2}\right) \\ &\geq k(1 - pM^{p-1}\delta) \\ &\geq 0 \\ (1-x)h_t - \Delta h - pu^{p-1}h &= (1-x)k'\psi + k - pu^{p-1}k\psi \\ &\geq k + pu^{p-1}k\psi \\ &\geq k(1 - pu^{p-1}\psi) \\ &\geq k(1 - pM^{p-1}\delta) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour  $x \in ]\delta, 1 - \delta[$ ,  $t \in ]0, t_0[$

$$\begin{aligned} xh_t - \Delta h - pv^{p-1}h &= xk'\psi + k - pv^{p-1}k\psi \\ &\geq xk'\psi - pM^{p-1}k\psi \\ &\geq \psi(\delta k' - pM^{p-1}k) \\ &= 0 \\ (1-x)h_t - \Delta h - pu^{p-1}h &= (1-x)k'\psi + k - pu^{p-1}k\psi \\ &\geq (1-x)k'\psi - pM^{p-1}k\psi \\ &\geq \psi(\delta k' - pM^{p-1}k) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

De plus  $h \geq 0$  en  $x = 1 - \epsilon$ ,  $h \geq 0$  en  $x = \epsilon$ .

Donc  $(h, h)$  est une sur-solution du système précédent (3.5) dans  $]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$ .

D'où :

$$0 \leq (u_\epsilon)_t \leq h \text{ et } 0 \leq (v_\epsilon)_t \leq h \text{ dans } ]\epsilon, 1 - \epsilon[ \times ]0, t_0[$$

Puisque

$$(u_\epsilon)_t \rightarrow u_t \text{ et } (v_\epsilon)_t \rightarrow v_t \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

On obtient alors :

$$(u_\epsilon)_t \rightarrow u_t \text{ et } (v_\epsilon)_t \rightarrow v_t \text{ dans } ]0, 1[ \times ]0, t_0[$$

Ce qui entraîne que  $u_t$  et  $v_t$  sont continues en  $x = 0$  et  $x = 1$ . ■

Pour établir des conditions suffisantes sous lesquelles la solution  $(u, v)$  du système (3.1) explose en temps fini  $T$ . La technique qu'on va utiliser est une adaptation de la méthode des fonctions propres de Kaplan qui consiste à introduire le problème suivant :

$$\begin{cases} \phi'' = -\lambda x(1-x)\phi & \text{dans } ]0, 1[ \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \\ \phi > 0 & \text{dans } ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $\lambda$  s'appelle la valeur propre principale et  $\phi$  la fonction propre du problème (3.6).

Ce problème admet une solution unique  $\phi$ , voir [15].

Posons alors :

$$\begin{cases} U(t) = \int_0^1 x\phi(x)u(x,t)dx \\ V(t) = \int_0^1 (1-x)\phi(x)v(x,t)dx \end{cases}, \quad t \in ]0, T[$$

avec

$$\begin{cases} U(0) = \int_0^1 x\phi(x)u_0(x)dx \\ V(0) = \int_0^1 (1-x)\phi(x)v_0(x)dx \end{cases}$$

où  $T$  désigne le temps d'existence maximal de la solution  $(u, v)$ .

Posons aussi :

$$\begin{cases} w(t) = U(t) + V(t) \\ w(0) = U(0) + V(0) \end{cases}$$

**Lemme 3.4.2** *Pour  $p > 1$ , il existe  $C > 0$  tel que :*

$$w'(t) \geq -\lambda w(t) + \frac{C}{2^{p-1}}w^p(t), \quad t \in ]0, T[$$

**Preuve.** Multiplions la première équation du système (3.1) par  $\phi$  et en intégrant sur  $x$ , on obtient :

$$\int_0^1 x\phi u_t dx = \int_0^1 \phi \Delta u dx + \int_0^1 \phi v^p dx$$

L'intégration par parties et l'inégalité de Jensen, nous donne :

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 x\phi u dx \right)_t &= \int_0^1 \Delta \phi u dx + \int_0^1 \phi v^p dx \\ &= -\lambda \int_0^1 x(1-x)\phi u dx + \int_0^1 \phi v^p dx \\ &\geq -\lambda \int_0^1 x\phi u dx + \int_0^1 \phi v^p dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left( \int_0^1 x \phi u dx \right)_t &\geq -\lambda \int_0^1 x \phi u dx + \int_0^1 (1-x) \phi v^p dx \\
 &= -\lambda U(t) + \int_0^1 (1-x) \phi v^p dx \\
 &\geq -\lambda U(t) + \left( \int_0^1 (1-x) \phi dx \right) \left( \frac{1}{\int_0^1 (1-x) \phi dx} \int_0^1 (1-x) \phi v dx \right)^p \\
 &= -\lambda U(t) + C_1 \left( \int_0^1 (1-x) \phi v dx \right)^p
 \end{aligned}$$

où

$$C_1 = \left( \int_0^1 (1-x) \phi dx \right)^{1-p}$$

Donc

$$U'(t) \geq -\lambda U(t) + C_1 V^p(t)$$

Multiplions la deuxième équation du système (3.1) par  $\phi$  et en intégrant sur  $x$ , on obtient :

$$\int_0^1 (1-x) \phi v_t dx = \int_0^1 \phi \Delta v dx + \int_0^1 \phi u^p dx$$

L'intégration par parties et l'inégalité de Jensen, nous donne :

$$\begin{aligned}
 \left( \int_0^1 (1-x)\phi v dx \right)_t &= \int_0^1 \Delta \phi v dx + \int_0^1 \phi u^p dx \\
 &= -\lambda \int_0^1 x(1-x)\phi v dx + \int_0^1 \phi u^p dx \\
 &\geq -\lambda \int_0^1 (1-x)\phi v dx + \int_0^1 \phi u^p dx \\
 &\geq -\lambda \int_0^1 (1-x)\phi v dx + \int_0^1 x\phi u^p dx \\
 &= -\lambda V(t) + \int_0^1 x\phi u^p dx \\
 &\geq -\lambda V(t) + \left( \int_0^1 x\phi dx \right) \left( \frac{1}{\int_0^1 x\phi dx} \int_0^1 x\phi u dx \right)^p \\
 &= -\lambda V(t) + C_2 \left( \int_0^1 x\phi u dx \right)^p
 \end{aligned}$$

où

$$C_2 = \left( \int_0^1 x\phi dx \right)^{1-p}$$

Donc

$$V'(t) \geq -\lambda V(t) + C_2 U^p(t)$$

On a

$$\begin{aligned}
 w'(t) &= U'(t) + V'(t) \\
 &\geq -\lambda w(t) + C_1 V^p(t) + C_2 U^p(t) \\
 &\geq -\lambda w(t) + C (V^p(t) + U^p(t)) \\
 &\geq -\lambda w(t) + \frac{C}{2^{p-1}} (V(t) + U(t))^p \\
 &= -\lambda w(t) + \frac{C}{2^{p-1}} w^p(t)
 \end{aligned}$$

où

$$C = \min \{C_1, C_2\}$$

■

**Théorème 3.4.2** *Si*

$$\int_0^1 x\phi(x)u_0(x)dx + \int_0^1 (1-x)\phi(x)v_0(x)dx > 2C'\lambda^{\frac{1}{p-1}}$$

*Alors la solution  $(u, v)$  du système (3.1) explose en temps fini  $T$ .*

**Preuve.** Il suffit de montrer que le temps d'existence maximal  $T$  est fini.

Posons :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \frac{C}{2^{p-1}}\varphi^p(t) - \lambda\varphi(t), & t \in ]0, T[ \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} w'(t) \geq \frac{C}{2^{p-1}}w^p(t) - \lambda w(t), & t \in ]0, T[ \\ w(0) \geq \varphi(0) \end{cases}$$

Alors

$$w(t) \geq \varphi(t), \quad t \in ]0, T[$$

On a

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(T)} \frac{d\varphi}{\varphi \left( \frac{C}{2^{p-1}} \varphi^{p-1} - \lambda \right)} = \int_0^T dt = T$$

Si  $\varphi_0 > \delta = 2C'\lambda^{\frac{1}{p-1}}$ , où  $C' = \frac{1}{C^{\frac{1}{p-1}}}$  et pour  $p > 1$ , on obtient :

$$\int_{\varphi_0}^{+\infty} \frac{d\varphi}{\varphi \left( \frac{C}{2^{p-1}} \varphi^{p-1} - \lambda \right)} < \infty$$

d'où

$$T < \infty$$

On peut dire alors

$$\lim_{t \rightarrow T} \varphi(t) = +\infty$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow T} w(t) = +\infty$$

Donc  $u$  ou bien  $v$  explose en temps fini. ■

# Chapitre 4

## Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'étude de l'existence locale, l'unicité et l'explosion en temps fini de la solution d'un système parabolique semi-linéaire dégénéré (3.1), notre objectif principal dans ce travail était de montrer que si les données initiales sont assez grandes ( $1 < p \leq 2$ ) et sous certaines conditions suffisantes la solutions du système (3.1) explose en temps fini. La méthode utilisée est de tronquer l'intervalle  $]0, 1[$  pour lever la dégénérescence du système et le ramener à un système non dégénéré.

Bien que l'existence locale, l'unicité et l'explosion en temps fini de la solution pour le système (3.1) ont été réalisées, une question importante et intéressante reste ouverte concernant l'ensemble des points d'explosion de ce système : Est-ce-que si les données initiales sont concaves et assez grandes et  $1 < p \leq 2$ , la solution  $(u, v)$  de ce système explose aux points  $x = 0$  et  $x = 1$  qui sont justement les deux points de dégénérescence du système ou bien elle explose à l'intérieur de l'intervalle  $]0, 1[$  ?.

Un travail dans ce sens est en cours dans le cadre d'une formation doctorale dirigée par Mr. L. Nisse, voir [11].

# Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [2] J. M. Ball, *Remarks on Blow-up and non existence Theorems for Nonlinear Evolution Equations*, Quart, J-Math, Oxford (2) 28, 1977, 473-486.
- [3] T. Cazenave et A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, ellipses, 1990.
- [4] M. S. Floater, *Blow-up at the Boundary for Degenerate Semilinear Parabolic Equations*, Preprint, Heriott-Watt University, Edinburgh, 1989.
- [5] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall Englewood Chiffs, N. J, 1964.
- [6] D. Gilbard and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Classics in Mathematics, 1998.
- [7] V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Chile (Temu, 1999), Pitman, 2000, 1-39.
- [8] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., 840, Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [9] O. A. Ladyženskaja. V. A. Solonnikov. and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc, Rothe Island, 1968.
- [10] M. Kouche, *Caractérisation de l'ensemble des points d'explosion d'un système parabolique dégénéré*, Mémoire de Magister, Univ. Annaba, 1996.
- [11] L. Nisse, *Characterization of the blow-up set for degenerate semilinear parabolic system*, 4<sup>ème</sup> Collogue TAMTAM'09, Kenitra, 6 au 8 mai 2009.
- [12] C. V. Pao, *On Non Linear Réaction-Diffusion Systems*, J. Math.Analysis. App. 87, 1982, 165-198.

- [13] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [14] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1967.
- [15] W. T. Ried, *Sturmian Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1980.
- [16] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris, 1998.
- [17] D. H. Sattinger, *Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems*, Indiana univ. Math. J, Vol. 21, No. 11, 1972, 979-1000.
- [18] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.