

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté des Sciences
Département de Physique

Année 2007

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT**

**LE PRINCIPE D'ACTION DE SCHWINGER VIA
LES TRANSFORMATIONS CANONIQUES
LINEAIRES**

Option
Physique Théorique

Par

M^{me} MOUNA BOULOUDENINE

DIRECTEUR DE THESE : Tahar BOUDJEDAA Professeur Université de Jijel

DEVANT LE JURY

PRESIDENT : Mokhtar GHERS Professeur Université d'Annaba

EXAMENATEURS: Lyazid CHETOUANI Professeur Université de Constantine
Zouina BELGHOBSI M.C. Université de Jijel
Houria TRIKI M.C. Université d'Annaba
Ahmed LECHEHEB M.C. Université de Constantine

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté des Sciences
Département de Physique

Année 2007

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT**

**LE PRINCIPE D'ACTION DE SCHWINGER VIA
LES TRANSFORMATIONS CANONIQUES
LINEAIRES**

Option
Physique Théorique

Par

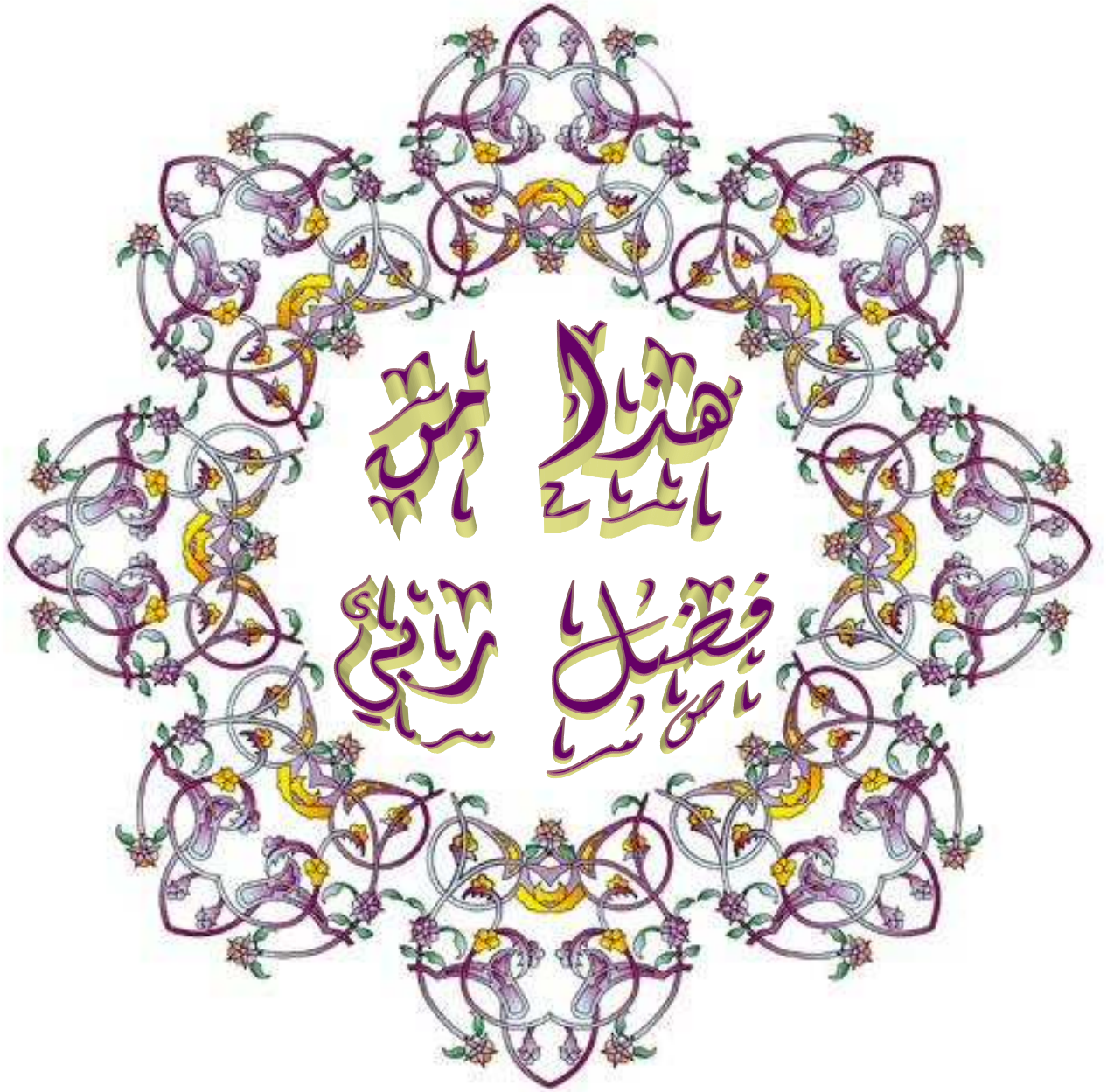
M^{me} MOUNA BOULOUDENINE

DIRECTEUR DE THESE : Tahar BOUDJEDAA Professeur Université de Jijel

DEVANT LE JURY

PRESIDENT : Mokhtar GHERS Professeur Université d'Annaba

EXAMENATEURS: Lyazid CHETOUANI Professeur Université de Constantine
Zouina BELGHOSI M.C. Université de Jijel
Houria TRIKI M.C. Université d'Annaba
Ahmed LECHEHEB M.C. Université de Constantine



ملخص

خلال أبحاثهما التي طوروا بها نظرية الميكانيك الكوانتي، قام كل من فاينمان (Feynman) وشوينغر (Schwinger)، بشكل مستقل عن الآخر، بوضع أسس لمبدأ الفعل الكوانتي؛ الأول تابعي، والآخر تأثيري. لقد امتد استعمال طريقة فاينمان، المسماة أيضا بطريقة التكاملات المسارية، إلى مختلف الميادين الفيزيائية، وصارت وسيلة حسابية فعالة، في حين لم تجد طريقة شوينغر الاهتمام الذي تستحق، بالرغم من أنها تعطي إمكانية تحديد دالة التحول بدقة أعلى وأجود من أجل حالات كثيرة التعقيد. إن الصعوبة البالغة التي تعترض التقنية الأخيرة هي وجوب حل معادلات هايزنبرغ (Heisenberg) للحركة، والتي تأخذ شكل مؤثرات في هذه الحالة. للتغلب على هذه الصعوبة تبين لنا أن التحويلات القانونية الكوانتية مناسبة على العموم لتبسيط المسائل المعقدة.

تمثل الدراسة التي قمنا بها محاولة موفقة للاستفادة من طريقة شوينغر من أجل تحديد دقيق لدالة التحول للجمل العامة المربعة أحادية البعد أو ثلاثية الأبعاد التابعة للزمن، وهذا عن طريق التحويلات القانونية الكوانتية، مما يجنبنا حل معادلات هايزنبرغ التأثيرية.

في مرحلة أولى من هذا البحث طبقنا طريقة شوينغر في حالة جملة عامة مربعة أحادية البعد تابعة للزمن ذات حدود خطية، باستعمال التحويلات القانونية الكوانتية التي تحول الدراسة العامة للجملة المعقدة إلى دراسة بسيطة لحركة جسيمة حرة. وبذلك أمكن تعميم النتيجة التي حصلنا عليها على جميع الحالات الخاصة لجملة مربعة تتحرك خطيا. من أجل تحديد دالة التحول تحديدا تاما لهاملتوني لا يحوي حدودا خطية، يستوجب استعمال التحويل القانوني حل معادلة واحدة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية فحسب. أما في الحالة التي يحتوي فيها الهاملتوني حدودا خطية يكون علينا حل جملة إضافية لمعادلتين تفاضليتين من الدرجة الأولى. لقد أبدت النتائج التي حصلنا عليها من أجل: الهزاز التوافقي البسيط، الهزاز التوافقي المتخامد، الهزاز التوافقي ذي التواتر التابع للزمن، الهزاز التوافقي ذي التواتر والكتلة التابعين للزمن، الهزاز التوافقي المتخامد المتأثر بقوة، هزاز كاليدورا-كناي (Calidora-Kanai)، توافقا تاما مع النتائج المحصل عليها بطرق أخرى مختلفة.

في المرحلة الثانية من هذه الرسالة، طورنا هذه التقنية وفق نفس المنحى الذي انتهجناه في المرحلة الأولى من أجل الجمل العامة المربعة ثلاثية الأبعاد التابعة للزمن ذات الحدود المختلطة (التي تحوي مركبات من اتجاهات مختلفة) الهجينة (بين مركبات شعاع الموضع ومركبات شعاع الاندفاع) التابعة للزمن في وجود حدود خطية. كي تتمكن من تحويل المسألة إلى دراسة حركة جسيمة حرة، نستعمل تحويلات قانونية تعمل على حذف الحدود المختلطة الهجينة بواسطة مصفوفة دوران وعلى جعل كل المصفوفات الممثلة للحدود المربعة في الهاملتوني مصفوفات قطرية. بهذا نحصل على عبارة عامة لدالة التحويل لجملة مربعة ثلاثية الأبعاد تابعة للزمن، تتعلق بعوامل تابعة للزمن تدخل عن طريق التحويلات القانونية وتحدد محل المعادلات التفاضلية الناتجة.

لقد قمنا خلال هذا البحث بدراسة ثلاثة أنواع من الجمل ثلاثية الأبعاد :

1. جملة ذات ثلاث اختلاطات متغيرة هجينة غير متماثلة المناحي
2. جملة ذات اختلاط واحد متغير هجين، حيث تبين أن النتيجة التي حصلنا عليها من أجل حالتين خاصيتين (جسيمة مشحونة واقعة تحت تأثير حقل مغناطيسي، وجسيمة مشحونة موجودة في حقل شعاعي وحقل سلمي) متوافقة تماما مع النتائج المحصل عليها بطريقة التكاملات المسارية.
3. جملة غير متماثلة المناحي لا تحوي أي حد مختلط هجين.

إن فعالية هذه التقنية من أجل هذا النوع من الجمل تتمثل في الإمكانية التي تعطىها للحصول مباشرة على عبارات دقيقة لدوال التحول لجمل عامة ثلاثية الأبعاد تحتوي اختلاطات متعددة متغيرة هجينة غير متماثلة المناحي وهذا محل أبسط المعادلات التفاضلية الممكنة، وقد كان هذا غير ممكن من قبل باستعمال طريقة شوينغر.

لقد تمكنا في هذه الدراسة أن نضيف بنجاح حجرا آخر إلى الأساس الذي نريد إنشائه من أجل التوصل إلى علاقة معممة لدوال التحول الخاصة بالجمل المربعة التابعة للزمن، وهذا بتطبيق طريقة شوينغر، باستعمال التحويلات القانونية، وهي خطوة واعدة تشق أمامنا الطريق لتمديد هذه التقنية إلى الجمل متعددة الأبعاد من أجل حالات أكثر تعقيدا وجملا أكثر تعميما ذات اختلاطات متغيرة غير متماثلة المناحي ساكنة وديناميكية. بهذا سيكون في وسعنا إن شاء الله جعل الجمل متعددة الأبعاد والجمل ذات الكمونات الكولونية مسائل قابلة للحل باتباع طريقة شوينغر واستعمال التحويلات القانونية.

**ABSTRACT**

Feynman and Schwinger, independently from each other, formulated an action principle fitting quantum mechanics; the former is functional and the later is operatorial. Feynman's method, called Path-integrals, was extended to various physical fields and turned out to be an efficient tool of calculations, whereas Schwinger method has not taken interest as it should have, nevertheless, it gives the opportunity to find transformation functions (propagators) for more complicated problems with more exactness and rigorousness. The major difficulty in this later technique is the resolution of Heisenberg equations of motion, which are operatorial ones. To overcome this difficulty, we found that quantum canonical transformations are, in general, adequate to simplify complicated problems.

The present work is a successful attempt to investigate Schwinger method to calculate the exact transformation function for general 1D and 3D time dependent quadratic system (TDQS) by means of quantum canonical transformations, what avoids us the resolution of Heisenberg equations of motion.

In a first stage, we applied Schwinger method, in the case of the general 1D time-dependent quadratic system with linear terms, via quantum canonical transformations wich transform the general problem to that of a free particle overlapping all the particular cases of the 1D dimensional quadratic systems. In the case of Hamiltonians with solely quadratic terms, the canonical transformations requires the resolution of a second order homogeneous differential equation. For quadratic systems with linear terms we have to solve a supplementary couple of one order differential equations. The results obtained for : simple harmonic oscillator, damped harmonic oscillator, harmonic oscillator with time-dependent frequency, harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency, forced damped harmonic oscillator, Calidora-Kanai oscillator show a perfect accordance with the results obtained for the same cases with other different methods.

In the second stage, we developed our technique for general 3D TDQS containing variable hybrid couplings (between coordinates and momentums) with linear terms in the same way as for 1D systems. The elimination of the existing couplings between dynamical variables, by a canonical transformation containing a rotation matrix, with the diagonalization of the matrices related to the quadratic terms in the hamiltonian, transforms the problem to that of 3D free particle. In this generalization, we obtain a general form of the transformation function for 3D TDQS, related to the temporal factors introduced by the canonical transformations and determined by the resolution of the resulting differential equations.

Three kinds of systems were treated here:

1. A system with three varying anisotropic hybrid couplings.
2. A system with one varying hybrid coupling. The solution obtained for two well known particular cases (a charged particle submitted to a constant magnetic field, and a charged particle submitted to a constant vector potential and a scalar potential) is perfectly equivalent to those obtained with Path-integrals.
3. An anisotropic system with no coupling terms.

The power of this technique for this kind of systems resides in the possibility that it gives to obtain directly exact expressions of transformation functions for general 3D systems, containing multiple varying and anisotropic hybrid couplings, with the resolution of the simpler possible differential equations, what was not possible with Schwinger method.

In this study, we have added successfully an other stone to the generalization hopped for TDQS by means of Schwinger method, using canonical transformations. This step is promising, and it paves the way to an extension of this technique to N-dimensional systems for more complicated situations, and more general systems with varying anisotropic dynamical and statistical couplings. Therefore, N-dimensional systems, and hamiltonians with coulombian potentials or singular perturbations would be solvable with Schwinger method via canonical transformations.



RESUME

Feynman et Schwinger ont formulé, indépendamment l'un de l'autre, un principe d'action conforme à la mécanique quantique; le premier est fonctionnel tandis que le deuxième est opératoirel. La méthode de Feynman, dite intégrales de chemins, a été appliquée dans de divers domaines physiques et elle est devenue un outil de calcul très efficace. En outre, la méthode de Schwinger était rarement utilisée, bien qu'elle donne l'opportunité de trouver des fonctions de transformation (propagateurs) pour des problèmes plus compliqués avec plus de précision et de rigueur. La difficulté majeure dans l'application de la méthode de Schwinger réside dans la résolution des équations d'Heisenberg de mouvement qui sont des équations opératoireslles. Pour surmonter cette difficulté, nous avons constaté que les transformations canoniques sont, en général, des outils appropriés pour transformer des problèmes complexes en systèmes simples. L'étude que nous présentons dans cette thèse est une tentative réussie de développer une technique opératoireslle quantique pure qui se base sur la méthode de Schwinger via les transformations canoniques, afin d'évaluer exactement les fonctions de transformation des systèmes quadratiques généralisés 1D et 3D dépendants du temps, ce qui nous permet d'éviter la résolution des équations d'Heisenberg.

Dans une première étape où nous avons réussi à faire une généralisation de la méthode de Schwinger par le biais des transformations canoniques linéaires, nous avons évalué facilement et exactement la fonction de transformation pour le système quadratique général 1D dépendant du temps, ce qui était difficile voir même impossible de réaliser. Dans le cas d'hamiltoniens sans termes linéaires nous devons juste résoudre une équation différentielle homogène du deuxième ordre afin de choisir la transformation canonique appropriée pour éliminer les termes quadratiques de l'hamiltonien. L'addition des termes linéaires dans l'hamiltonien quadratique nécessite la résolution de deux équations différentielles supplémentaires pour pouvoir supprimer ces termes. Dans les deux cas, le nouvel hamiltonien du système étudié contient uniquement un terme cinétique, ce qui simplifie considérablement

l'évaluation de la fonction de transformation du système linéaire général recouvrant ainsi tous les cas particuliers des systèmes quadratiques 1D. Les cas particuliers de l'oscillateur harmonique, l'oscillateur harmonique avec une fréquence qui dépend du temps, l'oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps, l'oscillateur harmonique amorti, l'oscillateur harmonique amorti forcé et l'oscillateur de Calidora-Kanai ont été facilement évalués où les résultats obtenus étaient en parfait accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes.

Dans la deuxième étape de l'étude, nous avons généralisé le résultat obtenu dans le cas 1D au cas 3D des systèmes quadratiques généraux dépendants du temps ayant des couplages hybrides (entre le vecteur position et le vecteur impulsion) avec des termes linéaires, afin de déterminer exactement les fonctions de transformations. Nous avons ajouté aux transformations linéaires qui étaient translatives dans le cas 1D, des matrices de rotation, pour résoudre le problème de couplage hybride dû au moment angulaire, ce qui a permis de transformer l'étude du système en celle d'une particule libre à trois dimensions par la diagonalisation de toutes les matrices liées aux termes quadratiques du système étudié. Trois types de systèmes ont été traités :

1. Un système à trois couplages hybrides anisotropes.
2. Un système avec un seul couplage hybride variable. Les résultats obtenus pour une particule chargée soumise à un champ magnétique constant et une particule chargée soumise à un potentiel vecteur constant et à un potentiel scalaire constant, ont montré un parfait accord avec la méthode des intégrales de chemins.
3. Un système anisotrope sans termes de couplage.

L'avantage de cette technique réside dans la possibilité d'avoir directement des expressions exactes des fonctions de transformation pour les systèmes 3D généraux contenant de multiples couplages hybrides variables et anisotropes, à travers la résolution des équations différentielles les plus simples.

Cette méthode est prometteuse du fait que l'on peut l'appliquer aux systèmes à N dimensions, pour des situations plus complexes et des systèmes plus généraux avec des couplages variables et anisotropes, dynamiques et statiques. Notre méthode représente une bonne base pour une généralisation de la méthode de Schwinger à partir des transformations canoniques quantiques dans les cas des potentiels coulombiens et des systèmes spinoriels.

DEDICACE

A mes parents

A mon mari

A Baba

A ma sœur, à mes frères

A mon beau frère

A ma belle famille

A mes adorables nièces et neveux

Et à tous ceux qui me sont chers

2011

Photo Famille

الحمد لله وحده

والصلاة والسلام على من لا نبي بعده

" رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت عليّ وعلى
والديّ وأن أعمل صالحاً ترضاه وأدخلني
برحمتك في عبادك الصالحين "

سورة الفاتحة الآية 19

REMERCIEMENT

Cette thèse est un des fruits des longues années d'amour, d'affection, et de soutien avec lesquels mes parents ont nourrit mon cœur et mon esprit chaleureusement. Je ne saurai jamais les remercier de m'avoir offert la fleur de leur jeunesse et de leur vie et la force de leurs esprits.

Ce travail de thèse a été effectué au sein de l'Université Badji Mokhtar - Annaba-, et est le fruit d'un stage de courte durée à l'Université de Haute Alsace, Mulhouse, France, et à l'Université de Louis Pasteur, Strasbourg, France.

M^r Mokhtar Ghers a bien voulu s'intéresser à ce travail et a eu l'amabilité d'accepter la présidence du jury de thèse ; qu'il en soit vivement remercié.

Il m'est très agréable de remercier les membres du jury, M^{lles} Zouina Belghobsi et Houria Triki, et M^{rs} Lyazid Chetouani et Ahmed Lecheheb pour avoir aimablement accepté de juger et d'évaluer cette thèse.

Je remercie vivement mon directeur de thèse, M^r Tahar Boudjedaa. Je vous remercie de m'avoir fait confiance et de m'avoir encadrée durant ces années. Grâce à votre aide et vos conseils, ce travail a pu être mené à bien.

J'exprime ma profonde reconnaissance à M^r Abdenacer Makhoulf, responsable du stage effectué au Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications, à l'Université de Haute Alsace, pour le chaleureux accueil au sein de son équipe, pour son aide précieuse, les discussions scientifiques fructueuses, sa disponibilité, et enfin sa grande gentillesse. Merci pour l'écoute et le coup de pouce que vous m'avez accordée et qui m'ont aidé tout au long de ce travail, bien que notre rencontre était très courte !!!

Un grand merci à M^r Michel Rausch de Traubenberg responsable du stage effectué au laboratoire de Physique Théorique à l'Université de Louis Pasteur de m'avoir accueillie dans son équipe. Je tiens à le remercier pour la confiance qu'il m'a accordée, pour sa disponibilité et pour les discussions scientifiques que j'ai eues avec lui.

Je remercie vivement M^r Nicolas Rivier pour les discussions scientifiques et les conseils très précieux qu'il m'a donnés lors de mon stage à Strasbourg.

Un merci particulier et une reconnaissance à M^{rs} Abderrezak Selmi, El Bahi Hannech, Abdel Baki Chemam, Mohamed Zouiti, Sebti Ghemid, Abdelaziz Amara, Elhacene Boulmerka pour l'aide qu'ils m'ont portée lors de la rédaction du manuscrit et de la préparation de ce travail.

Je remercie sincèrement ma collègue M^{elle} Saïda Chouf pour son aide efficace et son soutien.

J'exprime ma plus vive gratitude et reconnaissance à mon mari qui m'a beaucoup soutenue et m'a beaucoup encouragée à accomplir ce travail. Il m'est difficile d'exprimer en quelques mots ce que je lui dois.

Je tiens à remercier vivement ma très chère sœur Manel pour toutes les discussions scientifiques que nous avons partagées ensemble et pour tous les conseils. Merci petite sœur pour ta force et ta ténacité qui ont été un exemple pour moi.

J'exprime ma reconnaissance profonde à mes frères Fakher, Fares, Fateh, Favez et Faleh qui étaient toujours à mes côtés dans ma joie et dès que j'en ai besoin. Merci chers frères pour votre soutien, votre solidarité et votre affection... Merci chers frères d'être là.

Je voudrai aussi remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de travailler ou de discuter, toutes les personnes qui en fait ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse, et d'une façon générale toutes les personnes rencontrées à l'occasion de cette thèse et avec qui mes rapports furent aussi divers qu'enrichissants.

Salam alicom Tous

LISTE DES SYMBOLES

Symbole Signification

1D	unidimensionnel
3D	tridimensionnel
B	vecteur du champ magnétique
<i>B</i>	module du champ magnétique
<i>c</i>	célérité de la lumière
<i>e</i>	charge de l'électron
<i>F</i>	force
<i>F</i> ₁ , <i>F</i> ₂	fonctions génératrices des transformations canoniques
<i>G</i>	générateur de transformation infinitésimale
<i>H</i>	hamiltonien
<i>h</i>	constante de Plack
\hbar	$h/2\pi$
<i>L</i>	lagrangien
<i>m</i>	masse
p	vecteur impulsion
<i>p</i>	impulsion, moment conjugué
<i>P</i>	probabilité (Chapitre I)
	moment conjugué (Chapitre III + IV)
<i>Q, q</i>	coordonnée généralisée
R	matrice de rotation
<i>S</i>	action classique
ψ	fonction d'onde
<i>t</i>	temps
<i>t'</i>	instant initial
<i>t''</i>	Instant final
<i>U</i>	opérateur unitaire

V	potentiel
W	L'opérateur action
\mathbf{x}	vecteur position
x	coordonnée
x'	coordonnée initiale
x''	coordonnée finale
y	composante du vecteur position
z	composante du vecteur position
δ	variation différentielle
	symbole de Kronecker
Φ	annihilation d'un système
ν	nombre d'états infini
ψ	fonction d'onde
Ψ	création d'un système
θ	angle de rotation
ω	fréquence d'un oscillateur harmonique
$\xi(t)$	coefficient d'amortissement

TABLE DES MATIERES

<i>ملخص</i>	<i>i</i>
<i>ABSTRACT</i>	<i>iii</i>
<i>RESUME</i>	<i>v</i>
<i>DEDICACE</i>	<i>vii</i>
<i>REMERCIEMENT</i>	<i>viii</i>
<i>LISTE DES SYMBOLES</i>	<i>xi</i>
<i>TABLE DES MATIERES</i>	<i>xiii</i>
<i>INTRODUCTION GENERALE</i>	<i>1</i>
<i>CHAPITRE I : Formalisme du Principe d'Action Quantique</i>	<i>6</i>
1.1 Introduction	7
1.2 Définition de la fonction de transformation	7
1.3 L'algèbre de mesure microscopique	8
1.3.1 Interprétation quantique de la mesure microscopique	8
1.3.2 La fonction de transformation	10
1.3.3 La trace d'un opérateur	11
1.3.4 Probabilité d'existence	12
1.3.5 Opérateurs infinitésimaux	13

1.4	La géométrie des états quantiques	14
1.4.1	Annihilation et création d'états	14
1.4.2	Transformation d'un system de coordonnées	15
1.5	Les opérateurs unitaires	16
1.5.1	Propriétés des opérateurs unitaires	16
1.5.2	Opérateurs unitaires complémentaires	17
1.6	Les transformations unitaires	18
1.6.1	Transformations unitaires infinitésimales	18
1.6.2	Transformations unitaires successives	19
1.6.3	Groupes de transformations unitaires	20
1.6.4	Variables quantiques continues	21
1.7	Principe d'action quantique	23
1.7.1	Principe d'action stationnaire dans la représentation q	23
1.7.2	La représentation p et le changement de représentation	28
1.7.3	La fonction de transformation qp	29
1.8	Transformations canoniques	30
1.8.1	Génération d'une transformation canonique	30
1.8.2	Propriétés du groupe de transformations canoniques	31
1.8.3	Les transformations d'Hmilton-Jacobi	33
1.9	Conclusion	34
 CHAPITRE II : Applications aux Systèmes Quadratiques		35
2.1	Intoduction	36
2.2	Systèmes Elémentaires Indépendants du Temps	36
2.2.1	Particule libre	36
2.2.2	Force constante	38
2.2.3	L'oscillateur harmonique	39
2.2.4	L'oscillateur harmonique à court temps	40
2.2.5	Conclusion	42
2.3	Méthode d'Urrutia	43
2.3.1	Oscillateur harmonique amorti	43
2.3.2	Oscillateur harmonique amorti forcé	45
2.3.3	Oscillateur harmonique 3D dans un champ magnétique	47
A.	Le cas : $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$	49
B.	Le cas : $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$	51

C.	Cas général	52
2.3.4	Conclusion	54
2.4	Méthode de Nassar	55
2.4.1	Oscillateur forcé à masse dépendant du temps	55
2.4.2	Oscillateur harmonique 3D dépendant du temps	59
2.4.3	Conclusion	63
 CHAPITRE III : Généralisation aux Systèmes 1D Dépendants du Temps		64
3.1	Intoduction	65
3.2	Système Général Dépendant du Temps	66
3.2.1	Transformation du système en particule libre	66
3.2.2	Evaluation de la fonction de transformation	70
3.3	Système 1D dépendant du temps sans termes linéaires	73
3.3.1	La fonction de transformation du système	73
3.3.2	Cas particuliers	74
A.	L'oscillateur harmonique simple	74
B.	L'oscillateur harmonique avec une fréquence qui dépend du temps	76
C.	L'oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps	77
D.	L'oscillateur harmonique amorti	78
E.	L'oscillateur de Calidora-Kanai	79
3.4	L'oscillateur harmonique amorti forcé	80
3.4.1	Calcul de la fonction de transformation	80
3.4.2	Cas particuliers	81
A.	Une particule dans un champ externe constant F	82
B.	L'oscillateur harmonique simple soumis à une force externe	83
3.5	Conclusion	85
 CHAPITRE IV : Généralisation aux Systèmes 3D Dépendants du Temps		86
4.1	Intoduction	87
4.2	Système 3D Général Dépendant du Temps	87
4.2.1	Cas Général	87
4.2.2	Hamiltonien sans termes linéaires	96
4.3	Système 3D ayant trois différents couplages variables anisotropes	97
4.3.1	Cas Général	97

4.3.2	Hamiltonien sans termes linéaires	99
4.4	Système ayant un seul couplage variable	100
4.4.1	Cas Général	100
4.4.2	Hamiltonien sans termes linéaires	102
4.4.3	Cas particuliers	103
	A. Particule chargée dans un champ magnétique externe constant	103
	B. Particule chargée dans un champ magnétique et un potentiel scalaire constants	105
4.5	Système 3D anisotrope	106
4.6	Conclusion	107
 CONCLUSION GENERALE		 108
 REFERENCES		 111



INTRODUCTION GENERALE

Les fondements de la mécanique quantique sont basés sur la théorie hamiltonienne par analogie à la mécanique classique [1-6]. La méthode lagrangienne en mécanique quantique a été introduite par Dirac [7] en se basant sur l'analogie entre le groupe de transformations canoniques classique et le groupe de transformations unitaires quantiques [8-10]. Ainsi, il a mis en évidence l'analogie quantique du principe de moindre action de la mécanique classique.

L'approche lagrangienne de Dirac a été étudiée par Feynman qui l'a développée en formulant l'équation intégrale de la mécanique quantique connue sous le nom d'intégrale de chemins [11-13]. Elle représente une méthode fonctionnelle, souvent utilisée pour dériver des fonctions de transformations des systèmes quadratiques dépendants du temps [14-19]. Cette méthode qui a été appliquée à divers domaines physiques, est devenue un outil de calcul très efficace [20-24].

Schwinger a formulé ensuite un principe d'action opératoire conforme à la mécanique quantique [25-34]. En 1951, il a introduit cette méthode dans le contexte de la théorie des champs quantiques relativistes [35]. Depuis, elle est utilisée essentiellement dans des problèmes relativistes, tels que le calcul des fonctions de Green, connues aussi sous le nom de

propagateurs ou de fonctions de transformation, dans les cas des bosons [36] et des fermions [37-40] dans des champs externes. En outre, cette méthode puissante est également appropriée pour les problèmes non relativistes bien qu'elle soit rarement utilisée dans le calcul des fonctions de transformation non relativistes [41]. Seulement quelques travaux de recherches a utilisé la méthode de Schwinger dans ce contexte [42-44].

La méthode de Schwinger n'a pas pris l'intérêt qu'elle devait avoir, toutefois, cette méthode opératoire qui a montré une équivalence à la méthode fonctionnelle de Feynman [45,46], et donne l'opportunité de trouver des fonctions de transformation pour des problèmes plus compliqués avec plus de précision et de rigueur par rapport aux méthodes fonctionnelles. Cependant, des fonctions de transformation, pour des systèmes quadratiques dépendants du temps, ont été déterminées exactement dans le cas non relativiste, pour quelques cas généralisés en se basant sur la méthode de Schwinger. Ici, on mentionne les calculs effectués par Urrutia et Hernandez, dans le cas d'un oscillateur harmonique forcé dépendant du temps [47] et celui d'un oscillateur harmonique chargé dans un champ magnétique constant [48] où on résout des équations différentielles numériques analogues aux équations opératoires du mouvement. La méthode de Schwinger a été utilisée aussi par Nassar et al pour des systèmes plus complexes en utilisant une technique analytique semi classique par le moyen des techniques de transformation spatiotemporelles [49-52].

La difficulté majeure dans l'application de la méthode de Schwinger réside dans la résolution des équations d'Heisenberg de mouvement qui sont des équations opératoires. Par conséquent, chaque cas et chaque système étaient traités d'une manière particulière en appliquant une technique différente utilisant la méthode de Schwinger. Cette diversité des techniques utilisées a fait du principe d'action quantique établi par Schwinger un outil de calculs plus compliqué.

Pour surmonter cette difficulté, nous avons constaté que les transformations canoniques sont, en général, des outils appropriés pour transformer des problèmes complexes en systèmes simples [19,53]. Nous avons donc suivi ce parcours de transformations canoniques pour rendre la méthode de Schwinger un outil moins rigide dans son évaluation des fonctions de transformation et avons pris les systèmes quadratiques dépendants du temps comme exemples et moyens d'investigation pour leur importance physique [54].

Les transformations canoniques quantiques sont un parmi d'autres outils familiers [55-61] utilisés pour résoudre des problèmes en mécanique quantique, seulement peu d'entre eux

représentent des transformations unitaires [62]. Principalement, elles présentent trois rôles essentiels: dans l'évolution, pour résoudre une théorie et dans une équivalence physique. Les transformations canoniques sont, en général, des applications adéquates pour transformer la fonction d'onde du système étudié en une équation plus simple dont la solution est connue [54]. Par exemple, elles peuvent réduire l'étude du mouvement des électrons de Bloch dans des champs magnétiques homogènes, dans le cas tridimensionnel général, en celui d'un mouvement à deux dimensions au plus, pour n'importe quel champ rationnel arbitraire [63], ainsi que beaucoup d'autres applications effectuées dans la même voie [19,64,65].

Dans le cas des systèmes multidimensionnels, la diagonalisation des hamiltoniens de ces systèmes quadratiques, au moyen des transformations canoniques spatiotemporelles, est d'une grande utilité voir même indispensable pour la réalisation du découplage entre les différentes composantes des vecteurs de l'espace de phase [66]. Elle a été appliquée dans différents domaines de la physique quantique tels que les systèmes dissipatifs en optique quantique et les systèmes de matières condensées [67]. La diagonalisation du système multidimensionnel réussi par exemple à éliminer l'interaction électron-phonon par les transformations canoniques afin d'obtenir la dispersion efficace électron-électron [68].

D'une part, les transformations canoniques ont été généralement utilisées pour résoudre l'équation de Schrödinger pour différents systèmes indépendants du temps. Cependant, une solution exacte de l'équation de Schrödinger est possible pour un nombre limité de potentiels. D'autre part, lorsque le système est dépendant du temps, il n'est généralement pas évident de trouver une solution exacte. Par conséquent, dans des problèmes dépendants du temps, les transformations canoniques n'ont pas été souvent utilisées qu'avec un des systèmes quadratiques dépendants du temps, qui est l'oscillateur harmonique ayant une fréquence dépendante du temps [69].

En général, les oscillateurs dépendants du temps ont plusieurs applications dans de différents domaines de la physique quantique [70,71], tels que la physique moléculaire, la chimie quantique et l'optique quantique. Par exemple, les petites vibrations des systèmes peuvent être décrites en utilisant les oscillateurs harmoniques. L'influence du milieu d'entourage sur ces vibrations est incluse, en considérant, dans l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique, des paramètres dépendants du temps, tels que la masse et la fréquence.

Bien que ce modèle d'oscillateur est pris comme description approximative de la vibration, il représente, de plus, une bonne approche pour étudier des systèmes plus complexes. En outre, dans quelques cas particuliers, il devient un modèle exact de la dynamique du système. Par

exemple, l'ion dans un piège de Paul est décrit exactement par un oscillateur harmonique avec une fréquence périodique dépendant du temps [72]. Pour ces raisons, depuis longtemps, plusieurs actions ont été tentées pour résoudre exactement l'équation de Schrödinger pour ces systèmes en utilisant différentes méthodes [73-77].

L'étude que nous avons effectuée et que nous présentons dans ce travail est une tentative réussie pour développer une technique opératoire quantique pure qui se base sur le principe d'action quantique élaboré par Schwinger, afin d'évaluer exactement les fonctions de transformation des systèmes quadratiques généralisés, unidimensionnels (1D) et tridimensionnels (3D), dépendants du temps ce qui était difficile voir même impossible [54]. Dans cette technique, nous utilisons les transformations canoniques quantiques de par leur importance, la souplesse et la rigueur qu'elles apportent.

L'objectif que nous cherchons à réaliser par cette étude est de généraliser de cette technique, en procédant par le domaine non relativiste. En appliquant la méthode de Schwinger, les équations d'Heisenberg de mouvement, sur lesquels se base essentiellement cette technique, limitent la généralisation souhaitée de cette dernière du fait qu'elles sont opératoires. L'introduction des transformations canoniques quantiques nous permet d'éviter la résolution de ces équations et de surcroît simplifie l'hamiltonien du système étudié. Dans le cas multidimensionnel, l'utilisation de ces transformations produit une diagonalisation des matrices qui représentent les termes quadratiques de l'hamiltonien.

Le travail décrit dans ce mémoire comporte quatre chapitres et une conclusion générale.

Ainsi, dans le premier chapitre, nous présentons le formalisme du principe d'action quantique, établi par Schwinger, avec les notions de bases utiles pour la bonne compréhension des fondements du principe.

Dans le second chapitre, nous allons exposer les applications les plus importantes de la méthode de Schwinger, effectuées par Schwinger, Urrutia et Nassar, pour évaluer la fonction de transformation pour de différents systèmes dans le domaine non relativiste.

Le troisième chapitre est consacré à la technique que nous avons développée pour les systèmes généraux quadratiques 1D dépendants du temps. Après l'application de certaines

transformations canoniques quantiques, l'hamiltonien du système devient équivalent à celui d'une particule libre. Cela nous permet d'évaluer la fonction de transformation du système étudié, à partir de la fonction de transformation, bien connue, de la particule libre. La précision du résultat est vérifiée dans le cas particulier d'un oscillateur harmonique simple.

Le résultat général obtenu dans le cas unidimensionnel est alors employé pour évaluer la fonction de transformation dans les cas particuliers suivants : l'oscillateur harmonique amorti, l'oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante du temps, l'oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps et l'oscillateur harmonique amorti forcé.

Notre méthode sera confrontée ensuite aux autres études, dans lesquelles la fonction de transformation a été calculée en appliquant la méthode des intégrales de chemins, pour certains cas tels que l'oscillateur harmonique forcé et l'oscillateur de Calidora-Kanai [78,79].

Dans le chapitre 4 et après avoir réalisé avec succès la généralisation de la technique que nous avons proposée dans le cas unidimensionnel [54], nous étendons cette généralisation pour englober les systèmes quadratiques généralisés tridimensionnels dépendants du temps et ayant des couplages hybrides (entre composantes de vecteur position et composantes de vecteur impulsion suivant des directions différentes). On doit éliminer les termes de couplage hybride par les transformations canoniques qui servent à diagonaliser les matrices qui représentent les termes quadratiques des hamiltoniens étudiés. On modifie ainsi les hamiltoniens des systèmes étudiés en systèmes découplés plus simples et on termine par transformer l'étude de ce type de systèmes en celle de particules libres tridimensionnelles.

Le résultat général obtenu sera appliqué dans le même chapitre en traitant les cas suivants: un système général avec trois couplages hybrides anisotropes variables, un système général avec un seul couplage hybride variable et finalement un système général avec trois mouvements linéaires indépendants.

Enfin, nous terminons le manuscrit par une conclusion générale.

CHAPITRE I

**FORMALISME DU PRINCIPE D'ACTION
QUANTIQUE**

1.1	Introduction	7
1.2	Définition de la fonction de transformation	7
1.3	L'algèbre de mesure microscopique	8
1.4	La géométrie des états quantiques	14
1.5	Les opérateurs unitaires	16
1.6	Les transformations unitaires	18
1.7	Principe d'action quantique	23
1.8	Transformations canoniques	30
1.9	Conclusion	34

1.1 INTRODUCTION

La fonction de transformation est un concept essentiel et un outil dans les théories de champ. Elle est connue aussi sous les noms de propagateur de Feynman et fonction de Green. Schwinger utilise un principe dynamique quantique afin de déterminer le développement de ces fonctions [25,33].

Trois méthodes sont utilisées pour calculer la fonction de transformation : la méthode de Feynman [13], la méthode algébrique [80-83], ainsi que celle de Schwinger [25,26,33]. C'est donc cette dernière méthode qui nous intéresse dans toute cette étude. Dans ce chapitre, nous commençons par définir la fonction de transformation [84-86], puis nous introduisons un langage mathématique approprié au domaine atomique, établi par Schwinger dans son interprétation aux lois de la mesure microscopique [25,27,28]. Une structure algébrique de la mécanique quantique était développée par Schwinger [27], où une analyse plus approfondie de l'algèbre de mesure a mené ensuite à une géométrie liée aux états des systèmes [28,29], pour pouvoir baser enfin le fondement d'un principe dynamique quantique d'action [30-32].

1.2 DEFINITION DE LA FONCTION DE TRANSFORMATION

Il est nécessaire d'abord de rappeler la définition de la fonction de transformation en mécanique quantique non relativiste. La fonction de transformation est une fonction de propagation qui décrit le développement temporel des champs quantifiés [84,85]. L'importance de cette fonction réside dans le fait qu'elle permet de présenter toute la mécanique quantique à travers la formulation lagrangienne de la mécanique quantique [86]. Pour cette raison, un grand nombre d'études était mené sur l'évaluation de cette fonction pour les systèmes quadratiques non relativistes [87-94].

L'équation de Schrödinger appropriée pour une particule de masse m se déplaçant dans un potentiel V est définie par

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V\psi(x,t) \quad (1.1)$$

Il est possible de déterminer directement la fonction d'onde $\psi(x'', t'')$ qui représente la solution de cette équation, en un point x'' et à un instant donné t'' , à partir de la connaissance de la fonction $\psi(x', t')$ à un instant antérieur t' . Elle peut donc être écrite comme

$$\psi(x'', t'') = \int K(x'', t''; x', t') \psi(x', t') dx' \quad (1.2)$$

La fonction d'onde $\psi(x'', t'')$ est donc une superposition linéaire des fonctions d'onde $\psi(x', t')$ aux positions x' et la fonction $K(x'', t''; x', t')$ est connue sous le nom de propagateur ou fonction de transformation qui décrit l'effet de la fonction d'onde $\psi(x', t')$ sur la fonction d'onde $\psi(x'', t'')$ [84,85].

1.3 L'ALGÈBRE DE MESURE MICROSCOPIQUE

Toute mesure des phénomènes atomiques implique l'amplification des effets microscopiques au niveau de l'observation macroscopique. La théorie classique de mesure est basée sur le concept d'une interaction arbitrairement petite entre le système étudié et l'appareillage de mesure, de sorte que la mesure idéalisée n'altère aucune propriété du système. Cependant, les phénomènes atomiques sont caractérisés par des interactions qui ne peuvent être indéfiniment affaiblies entre le système étudié et l'instrument de mesure. Ainsi, une mesure d'une propriété peut produire des modifications incontrôlables dans la valeur précédemment attribuée à une autre propriété [27].

1.3.1 Interprétation quantique de la mesure microscopique [27]

Pour symboliser une mesure, Schwinger a adopté l'écriture : $|a''a'$ qui fait référence au fait sélectionné et à l'action produite. Ce symbole indique une mesure sélective où seulement un atome ayant la valeur a' d'une propriété A peut entrer dans l'appareil et c'est l'atome ayant la valeur a'' qui sort. Du fait que la mesure a un début et une fin, elle peut être considérée comme processus à deux étapes : annihilation et création, c. à d. l'atome entrant a'

est détruit et un atome a'' est créé à la place, bien qu'en réalité les deux opérations sont indiscernables, et la mesure est donc exprimée en : $|a''a'\rangle = |a''\rangle\langle a'|$ [26].

Soit une quantité physique A qui admet un nombre fini de valeurs distinctes a', \dots, a'' . Le symbole $|a'a'\rangle$ représente la mesure sélective qui accepte les systèmes ayant la propriété A et rejette tous les autres. Les propriétés des mesures élémentaires sélectives sont exprimées par

$$|a'a'\rangle|a''a''\rangle = \delta(a', a'')|a'a''\rangle, \quad \text{où} \quad \delta(a', a'') = \begin{cases} 1, & a' = a'' \\ 0, & a' \neq a'' \end{cases} \quad (1.3)$$

et

$$\sum_{a'} |a'a'\rangle = 1 \quad (1.4)$$

1 et 0 représentent les mesures qui, respectivement, acceptent et rejettent tous les systèmes. Deux quantités physiques A_1 et A_2 sont compatibles quand la mesure de l'une n'altère pas la connaissance acquise par la mesure antérieure de l'autre. Les mesures sélectives $|a'_1a'_1\rangle$ et $|a'_2a'_2\rangle$ effectuées avec n'importe quel ordre produisent un ensemble de systèmes pour lesquels on peut attribuer simultanément les valeurs a'_1 à A_1 et a'_2 à A_2 , dans ce cas

$$|a'_1a'_1\rangle|a'_2a'_2\rangle = |a'_2a'_2\rangle|a'_1a'_1\rangle \quad (1.5)$$

On appelle « représentation a » la description d'un système par les états produits en effectuant des mesures sélectives sur l'ensemble complet A de quantités physiques compatibles. Pour un ensemble complet de quantités compatibles $A_1 \dots, A_k$ le symbole de mesure s'écrit

$$|a'a'\rangle = \prod_{i=1}^k |a'_i a'_i\rangle \quad (1.6)$$

et les systèmes admis par la mesure complète $|a'a'\rangle$ se trouvent ainsi dans l'état a' . N'importe quelle tentative de déterminer la valeur d'une autre quantité physique indépendante produit des variations incontrôlables dans une ou plusieurs des valeurs antérieurement attribuées à A .

Les mesures successives et sélectives dans lesquelles des systèmes sont admis seulement dans l'état a' et apparaissent dans l'état a'' sont indiquées par le symbole $|a''a'|$. Et les propriétés de ce type de mesures sont représentées par

$$|a'a''||a''a'iv| = \delta(a'', a'')|a'a'iv| \quad (1.7)$$

Par conséquent la multiplication des symboles de mesure est non commutative. On peut former d'autres ensembles complets B, C, \dots qui sont mutuellement incompatibles. Pour chaque choix de caractéristiques physiques non altérées par les mesures il y a un ensemble de mesures sélectives $|b'b''|, |c'c''|, \dots$ se rapportant à des systèmes dans les états appropriés.

1.3.2 La fonction de transformation [27]

Les mesures des propriétés B , effectuées sur un système se trouvant dans un état c' qui se rapporte à des propriétés incompatibles avec B , produisent une distribution statistique des valeurs possibles. Par conséquent, seulement une fraction déterminée des systèmes émergeant de la première étape de la mesure sera acceptée par la deuxième étape. Ceci est exprimé par la loi générale de multiplication

$$|a'b'c'd'| = \langle b'|c' \rangle |a'd'| \quad (1.8)$$

où $\langle b'|c' \rangle$ est un nombre qui caractérise la relation statistique entre les états b' et c' . En particulier

$$\langle a'|a'' \rangle = \delta(a', a'') \quad (1.9)$$

La possibilité que donnent les nombres $\langle a'|b' \rangle$, pour effectuer de telles liaisons entre des types différents de mesure, les a fait appeler « fonctions de transformation » reliant les représentations a et b .

1.3.3 La trace d'un opérateur [27]

Les éléments de l'algèbre de mesure sont appelés opérateurs. Pour qu'un ensemble d'opérateurs soit défini comme ensemble de variables quantiques fondamentales d'un système physique, ils doivent suffire pour former toutes les quantités possibles de ce système. De tels opérateurs sont donc identifiés comme générateurs d'une base complète d'opérateurs [29]. Le nombre $\langle a' | b' \rangle$ peut être considéré comme une fonction numérique et linéaire de l'opérateur $| b' a' \rangle$. Cette correspondance entre les opérateurs et les nombres est dite trace

$$\langle a' | b' \rangle = \text{tr} | b' a' \rangle \quad (1.10)$$

La trace d'un produit de symboles de mesures est

$$\text{tr} | a' b' \rangle | c' d' \rangle = \langle b' | c' \rangle \text{tr} | a' d' \rangle = \langle b' | c' \rangle \langle d' | a' \rangle \quad (1.11)$$

Une matrice d'un opérateur X est définie dans une représentation a par

$$X = \sum_{a' a''} \langle a' | X | a'' \rangle | a' a'' \rangle \quad (1.12)$$

Et les éléments de cette matrice peuvent être exprimés par

$$\langle a' | X | a'' \rangle = \text{tr} X | a'' a' \rangle \quad (1.13)$$

d'où le cas particulier

$$\langle a' | X | a' \rangle = \text{tr} X | a' a' \rangle \quad (1.14)$$

La propriété (1.4) nous permet donc de conclure que la somme des éléments diagonaux de la matrice représente la trace de l'opérateur.

1.3.4 Probabilité d'existence [27]

Pour avoir une interprétation statistique de la fonction de transformation, on considère une succession de mesures sélectives

$$|b'b'\rangle\langle a'a'|b'b'\rangle = P(a',b')|b'b'\rangle \quad (1.15)$$

où

$$P(a',b') = \langle a'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle \quad (1.16)$$

La mesure (1.15) effectuée est différente de $|b'b'\rangle$ pour la perturbation introduite par la mesure intermédiaire de A . Seulement une fraction des systèmes choisis dans la mesure initiale B est transmise par l'ensemble de l'appareillage. De ce fait $P(a',b')$ représente la probabilité d'observer l'état a' dans une mesure effectuée sur un système qui se trouve à l'état b' . Une probabilité est un nombre réel non négatif, il est exigé alors que le conjugué complexe de la fonction de transformation vérifie la condition suivante

$$\langle a'|b'\rangle^* = \langle b'|a'\rangle \quad (1.17)$$

pour aboutir à

$$P(a',b') = |\langle a'|b'\rangle|^2 \geq 0 \quad (1.18)$$

La valeur probable de la propriété A pour des systèmes se trouvant dans un état b' est la moyenne des valeurs possibles de A . Cette valeur s'exprime en fonction des probabilités qui caractérisent l'état b' comme

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{b'} &= \sum_{a'} a' P(a',b') = \text{tr} A |b'b'\rangle \\ &= \langle b'|A|b'\rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

où l'opérateur A est défini par

$$A = \sum_{a'} a' |a'a'\rangle \quad (1.20)$$

1.3.5 Opérateurs infinitésimaux [27]

Si $\delta\langle a'|b'\rangle$ était une variation quelconque possible infinitésimale de la fonction de transformation correspondante, l'ensemble des nombres $\delta\langle a'|b'\rangle$ pourrait être considéré comme la matrice d'un opérateur infinitésimal δW_{ab} dans la représentation ab . On écrit donc

$$\delta\langle a'|b'\rangle = i\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle \quad (1.21)$$

La loi de composition multiplicative des fonctions de transformation se traduit, pour les opérateurs infinitésimaux δW , en une loi de composition additive

$$\delta W_{ac} = \delta W_{ab} + \delta W_{bc} \quad (1.22)$$

De ce fait

$$\delta W_{aa} = 0 \quad (1.23)$$

donc

$$\delta W_{ba} = -\delta W_{ab} \quad (1.24)$$

D'autre part

$$\delta\langle a'|b'\rangle^* = -i\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle^* = -i\langle b'|\delta W_{ab}^+|a'\rangle \quad (1.25)$$

avec δW_{ab}^+ l'opérateur adjoint de l'opérateur δW_{ab} . L'expression précédente est égale à

$$\delta\langle b'|a'\rangle = i\langle b'|\delta W_{ba}|a'\rangle \quad (1.26)$$

Cela implique

$$\delta W_{ab}^+ = -\delta W_{ba} = \delta W_{ab} \quad (1.27)$$

Cette expression permet de conclure que les opérateurs infinitésimaux δW sont hermitiens.

1.4 LA GEOMETRIE DES ETATS QUANTIQUES

Dans cette partie on est concerné par l'introduction de la notion de vecteur d'état, afin de donner la formulation établie par Schwinger pour une géométrie quantique, dite géométrie des états, à partir de laquelle l'algèbre de mesure peut être dérivée, avec toutes ses propriétés mais définies dans un langage géométrique.

1.4.1 Annihilation et création d'états [28]

Dans une mesure sélective donnée $|a'b'\rangle$, la première étape choisit des systèmes dans l'état b' , et la dernière les produit dans l'état a' ; les états intermédiaires sont sans signification dans l'ensemble de la mesure. En effet, on a inventé un état non physique qui sert d'intermédiaire, et qui est appelé l'état nul 0. On peut décrire comme annihilation d'un système se trouvant dans l'état b' le procédé de mesure $|0b'\rangle$ qui choisit un système dans l'état b' et le produit dans l'état nul, et qu'on symbolise par

$$\Phi(b') = \langle b' | \quad (1.28)$$

D'autre part, la production d'un système dans l'état a' à partir de l'état nul dans la mesure $|a'0\rangle$ peut être considérée comme création d'un système dans l'état a' qu'on symbolise par

$$\Psi(a') = |a'\rangle \quad (1.29)$$

La mesure $|a'b'\rangle$ s'écrit alors

$$|a'b'\rangle = |a'0\rangle |0b'\rangle = \Psi(a')\Phi(b') = |a'\rangle \langle b'| \quad (1.30)$$

En particulier

$$\Phi(a')\Psi(a'') = \langle a' | a'' \rangle = \delta(a', a'') \quad (1.31)$$

La relation (1.30) permet alors de parvenir à la relation de fermeture

$$1 = \sum_{a'} |a'a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \quad (1.32)$$

Des expressions (1.20), (1.30) et (1.32) on peut déduire l'effet d'un opérateur, qui symbolise une propriété A , sur les vecteurs d'un system de coordonnées a

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad (1.33)$$

et

$$\langle a'|A = a'\langle a'| \quad (1.34)$$

ce qui permet d'attribuer aux vecteurs $|a'\rangle$ et $\langle a'|$, respectivement, la notion de vecteur propre droit et vecteur propre gauche de l'ensemble complet A d'opérateurs qui commutent.

1.4.2 Transformation d'un system de coordonnées [28]

Des expressions (1.20) et (1.32), on déduit que tout opérateur X est une combinaison linéaire du produit $\Psi\Phi$

$$X = \sum_{a'b'} |a'\rangle \langle a'| X |b'\rangle \langle b'| = \sum_{a'b'} \Psi(a') \Phi(a') X \Psi(b') \Phi(b') \quad (1.35)$$

A chacun des états physiques d'une représentation donnée, un symbole de création Ψ et un autre d'annihilation Φ sont associés. Maintenant, on peut lier linéairement les symboles d'une représentation à ceux d'une autre représentation, en introduisant l'expression (1.32), d'où

$$\Psi(b') = \sum_{a'} \Psi(a') \langle a'|b'\rangle \quad (1.36)$$

et

$$\Phi(a') = \sum_{b'} \langle a'|b'\rangle \Phi(b') \quad (1.37)$$

La condition (1.31) montre que les vecteurs $\Psi(a')$ et $\Phi(a')$ de la représentation a forment une base orthonormale de vecteurs ; d'un autre terme ils forment un system de coordonnées. Les expressions (1.36) et (1.37) décrivent donc une transformation du system des coordonnées.

1.5 LES OPÉRATEURS UNITAIRES

1.5.1 Propriétés des opérateurs unitaires [29]

Un opérateur unitaire est défini par deux systèmes de coordonnées de l'espace vectoriel des états en plus d'une règle de correspondance entre les deux systèmes. Etant donné les deux ensembles de vecteurs $\langle a^k |$, $\langle b^k |$, $k = 1, \dots, N$ et leurs adjoints, on établit les opérateurs unitaires suivants

$$U_{ab} = \sum_{k=1}^N |a^k\rangle\langle b^k| \quad \text{et} \quad U_{ba} = \sum_{k=1}^N |b^k\rangle\langle a^k| \quad (1.38)$$

d'où les relations de correspondance suivantes entre les deux représentations

$$\langle a^k | U_{ab} = \langle b^k |, \quad U_{ab} |b^k\rangle = |a^k\rangle, \quad \langle b^k | U_{ba} = \langle a^k |, \quad U_{ba} |a^k\rangle = |b^k\rangle \quad (1.39)$$

impliquant les propriétés suivantes

$$U_{ab}^+ = U_{ba} \quad \text{et} \quad U^+ = U^{-1} \quad (1.40)$$

Pour tout opérateur unitaire U , la base orthonormale suivante

$$Y(\alpha) = U^{-1} X(\alpha) U \quad (1.41)$$

obéit à la même loi de multiplication que $X(\alpha)$. En particulier, si $X(\alpha)$ est une base hermitienne, $Y(\alpha)$ l'est également.

1.5.2 Opérateurs unitaires complémentaires [29]

Considérons deux opérateurs unitaires V et U ayant, respectivement les vecteurs propres $|v^k\rangle$ et $|u^k\rangle$. Lorsque l'opérateur V ayant le spectre de valeurs propres

$$v^k = v^k = e^{\frac{2\pi ik}{N}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.42)$$

est défini à partir de la permutation cyclique

$$\langle u^k | V = \langle u^{k+1} | \quad (1.43)$$

où $\langle u^k |$ sont des vecteurs propres de l'opérateur unitaire U , qui vérifient la propriété cyclique

$$\langle u^{N+k} | = \langle u^k | \quad (1.44)$$

le vecteur unitaire U est défini à son tour par une permutation cyclique semblable, à partir de l'ensemble des vecteurs propres de V

$$\langle v^k | U^{-1} = \langle v^{k+1} | \quad (1.45)$$

et avec le même spectre périodique que celui de V

$$u^k = u^k = e^{\frac{2\pi ik}{N}} \quad (1.46)$$

Les deux opérateurs unitaires sont donc de période N

$$U^N = 1 \quad (1.47)$$

Les fonctions de transformation, qui relient les deux systèmes de coordonnées engendrés par les vecteurs propres des deux opérateurs unitaires, sont données par

$$\langle v^k | u^l \rangle = N^{-1/2} e^{-\frac{2\pi i k l}{N}}, \quad \langle u^l | v^k \rangle = N^{-1/2} e^{\frac{2\pi i k l}{N}} \quad (1.48)$$

Une conséquence de ces propriétés de périodicité est

$$V^l U^k = e^{\frac{2\pi i k l}{N}} U^k V^l \quad (1.49)$$

Les propriétés des vecteurs unitaires U et V montrent un degré maximum d'incompatibilité. De ce fait, lorsqu'un opérateur permute avec U et V c'est qu'il est certainement un multiple de l'opérateur unité.

1.6 LES TRANSFORMATIONS UNITAIRES

1.6.1 Transformations unitaires infinitésimales [30]

Nous allons considérer une transformation unitaire infinitésimale qui a les propriétés suivantes

$$\bar{\Phi} = \Phi U, \quad \bar{\Psi} = U^{-1} \Psi, \quad \bar{X} = U^{-1} X U \quad (1.50)$$

Toutes les relations algébriques contenant des vecteurs ou des opérateurs sont préservées par cette transformation. L'application d'une transformation unitaire aux vecteurs $\langle a' |$ de la base orthonormale appartenant à la représentation a liée aux quantités A , produit les vecteurs orthonormaux

$$\langle \bar{a}' | = \langle a' | U \quad (1.51)$$

qui sont les états propres d'une nouvelle représentation \bar{a}' liée aux quantités \bar{A} qui possèdent le même spectre de valeurs propres que celui des propriétés A . La transformation unitaire préserve les relations (1.50), ce qui conduit à

$$\Phi |\bar{a}'\rangle = \Phi U^{-1} |a'\rangle, \quad \langle \bar{a}' | \Psi = \langle a' | U \Psi, \quad \langle \bar{a}' | X | \bar{a}''\rangle = \langle a' | U X U^{-1} | a''\rangle \quad (1.52)$$

Un opérateur unitaire qui varie infinitésimalement de l'unité prend la forme générale suivante

$$U = 1 + iG \ , \quad U^+ = U^{-1} = 1 - iG \quad (1.53)$$

où G est un opérateur hermitien infinitésimal. La transformation des vecteurs de base créée par cet opérateur est définie par

$$\delta\langle a' | = \langle \bar{a}' | - \langle a' | = \langle a' | iG \ , \quad \delta|a'\rangle = |\bar{a}'\rangle - |a'\rangle = -iG|a'\rangle \quad (1.54)$$

G est dit ainsi générateur de la transformation unitaire. Ce changement du système de coordonnées est équivalent à un changement des opérateurs et des vecteurs relatifs au système original. Par conséquent

$$\delta\langle a' | X | a'' \rangle = \langle \bar{a}' | X | \bar{a}'' \rangle - \langle a' | X | a'' \rangle = \langle a' | \delta X | a'' \rangle \quad (1.55)$$

et

$$\delta(\Phi|a'\rangle) = \delta\Phi|a'\rangle \ , \quad \delta(\langle a'|\Psi) = \langle a'|\delta\Psi \quad (1.56)$$

où

$$\delta X = UXU^{-1} - X = \frac{1}{i}[X, G] \quad (1.57)$$

et

$$\delta\Phi = \Phi(U^{-1} - 1) = -\Phi iG \ , \quad \delta\Psi = (U - 1)\Psi = iG\Psi \quad (1.58)$$

1.6.2 Transformations unitaires successives [30]

Supposons que deux opérateurs U_1 et U_2 décrivent deux différentes transformations dans le même système de coordonnées. Lorsque la première transformation est appliquée, un système de coordonnées est produit par cette transformation. L'effet de l'opérateur qui décrit la deuxième transformation sur ce système de coordonnées se traduit par l'opérateur

$$\bar{U}_2 = U_1^{-1}U_2U_1 \quad (1.59)$$

L'opérateur qui produit la transformation complète est donc

$$U_1 \bar{U}_2 = U_2 U_1 \quad (1.60)$$

Maintenant, on suppose que la transformation suivante est combinée de deux transformations

$$U_{[12]} = (U_1 U_2)^{-1} U_2 U_1 = U_{[21]}^{-1} \quad (1.61)$$

Lorsque les deux transformations sont infinitésimales, la transformation qui les combine l'est aussi et s'écrit

$$U_{[12]} = 1 + iG_{[12]} \quad (1.62)$$

où

$$G_{[12]} = \frac{1}{i} [G_1, G_2] = -G_{[21]} \quad (1.63)$$

La variation infinitésimale que produit cette transformation sur un opérateur est

$$\delta_{[12]} X = \delta_2 \delta_1 X - \delta_1 \delta_2 X \quad (1.64)$$

Il est nécessaire de savoir que l'ordre dans lequel les transformations sont effectuées est généralement important. Et c'est l'équation (1.63) qui gère cette condition. Une autre remarque importante est à faire ici. Dans l'opérateur unitaire $U = 1 + iG$, il est clair que G est sans dimensions. Cet opérateur infinitésimal va prendre ultérieurement les dimensions d'une action, et jusqu'ici on a utilisé les unités atomiques normales. Si on veut employer les unités de la physique macroscopique, on doit introduire un facteur de conversion de telle sorte que $U = 1 + \frac{i}{\hbar} G$ où \hbar , qui a une dimension d'action, est la constante de Planck multipliée par $(2\pi)^{-1}$.

1.6.3 Groupes de transformations unitaires [30]

Lorsqu'une transformation unitaire infinitésimale se répète d'une manière continue, elle produit une transformation unitaire finie. Quand on écrit le générateur de la

transformation unitaire infinitésimale sous la forme $\delta\tau G_k$, on constate qu'une application de la transformation, un nombre de fois $\tau/\delta\tau$, mène, dans la limite où $\delta\tau \rightarrow 0$, aux opérateurs

$$U(\tau) = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} (1 + i\delta\tau G_k)^{\tau/\delta\tau} = e^{i\tau G_k} \quad (1.65)$$

qui forment un groupe continu de transformations unitaires à un seul paramètre

$$\begin{cases} U(\tau_1 + \tau_2) = U(\tau_1)U(\tau_2) \\ U(\tau)^{-1} = U(-\tau) \\ U(0) = 1 \end{cases} \quad (1.66)$$

1.6.4 Variables quantiques continues [30]

Généralement, dans toutes les relations formelles liées aux spectres continus, les intégrales remplacent la somme. Les caractéristiques d'un système ayant un certain degré de liberté et un nombre infini ν d'états peuvent être étudiées en rendant explicites les opérateurs hermitiens dont les opérateurs complémentaires U et V (§ 1.4.2) dépendent

$$U = e^{i\varepsilon q}, \quad V = e^{i\varepsilon p}, \quad \varepsilon = (2\pi/\nu)^{(1/2)} \quad (1.67)$$

En introduisant $q' = n\varepsilon$ et $-p' = m\varepsilon$, avec : $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\nu-1)/2$, à la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$, qui correspond à un nombre infini d'états, les variables q' et p' deviennent des variables continues, et ainsi on retrouve la paire bien connue des variables canoniques complémentaires du spectre continu. Ce qui permet d'écrire à partir de (1.49) et en prenant en considération la remarque faite en § 1.5.2 concernant les dimensions

$$e^{-\frac{i}{\hbar} p' q'} e^{-\frac{i}{\hbar} p' q} e^{\frac{i}{\hbar} p q'} = e^{-\frac{i}{\hbar} p' (q - q')} \quad (1.68)$$

et

$$e^{\frac{i}{\hbar} p' q} e^{\frac{i}{\hbar} p q'} e^{-\frac{i}{\hbar} p' q} = e^{\frac{i}{\hbar} (p - p') q'} \quad (1.69)$$

Pour un nombre d'états ν infini, ces deux expressions sont équivalentes à

$$e^{-\frac{i}{\hbar}pq'} q e^{\frac{i}{\hbar}pq'} = q - q' \quad (1.70)$$

et

$$e^{\frac{i}{\hbar}p'q} p e^{-\frac{i}{\hbar}p'q} = p - p' \quad (1.71)$$

Les relations (1.70) et (1.71) permettent de conclure que la transformation

$$U(q') = e^{\frac{i}{\hbar}pq'} \quad (1.72)$$

mène à

$$\bar{q} = q - q' \quad \text{et} \quad \bar{p} = p \quad (1.73)$$

alors que la transformation

$$U(p') = e^{-\frac{i}{\hbar}p'q} \quad (1.74)$$

produit

$$\bar{q} = q \quad \text{et} \quad \bar{p} = p - p' \quad (1.75)$$

Une variation infinitésimale des variables dans les deux opérateurs unitaires ci-dessus donne

$$U(\delta q) = 1 + \frac{i}{\hbar} p \delta q \quad \text{et} \quad U(\delta p) = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta p q \quad (1.76)$$

Ainsi p et $-q$ peuvent être identifiées comme opérateurs hermitiens qui génèrent des variations en q et en p respectivement. On peut remarquer que la discussion du cas de systèmes ayant un seul degré de liberté du type $\nu \rightarrow \infty$ peut être étendue au cas de systèmes à N degrés de liberté et ayant des spectres continus en effectuant les substitutions suivantes

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n q_k, \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \sum_{k=1}^n p_k \quad (1.77)$$

1.7 PRINCIPE D'ACTION QUANTIQUE

1.7.1 Principe d'action stationnaire dans la représentation q [31]

Dans le cas d'un système physique ayant un spectre continu ν , pour établir une transformation unitaire finie à partir de transformations unitaires infinitésimales, on considère un groupe continu d'opérateurs unitaires $U(\tau)$. Pour une variation du paramètre τ jusqu'à $\tau + d\tau$

$$\begin{aligned} U(\tau + d\tau) &= (1 + id\tau G(x, \tau))U(\tau) \\ &= U(\tau)(1 + id\tau G(x(\tau), \tau)) \end{aligned} \quad (1.78)$$

où on désigne par x l'ensemble des ν paires de variables complémentaires (q_k, p_k) , avec

$$x(\tau) = U(\tau)^{-1} x U(\tau) \quad (1.79)$$

les variables quantiques du système dans la représentation produite par la transformation unitaire. Les transformations des états sont décrites par

$$\langle a' | U(\tau) = \langle a', \tau | \quad \text{et} \quad U(\tau)^{-1} | b' \rangle = | b', \tau \rangle \quad (1.80)$$

La fonction de transformation, pour deux valeurs de τ très proches l'une de l'autre, prend la forme

$$\begin{aligned} \langle a', \tau + d\tau | b', \tau \rangle &= \langle a', \tau | 1 + id\tau G(x(\tau), \tau) | b', \tau \rangle \\ &= \langle a' | 1 + id\tau G(x, \tau) | b' \rangle \end{aligned} \quad (1.81)$$

On va remplacer cette fonction de transformation par une représentation différentielle dans le cas général, en évitant toute spécification du choix des états a' et b' . La fonction de transformation dépend des paramètres τ et $\tau + d\tau$, et de la forme du générateur $G(x, \tau)$. Des variations infinitésimales de ces trois aspects, qu'on note $[\delta^n]$, induisent la variation suivante dans la fonction de transformation

$$\begin{aligned}\delta''\langle\tau+d\tau|\tau\rangle &= i\langle|\delta''[d\tau G(x,\tau)]|\rangle \\ &= i\langle\tau+d\tau|\delta''[d\tau G(x(\tau),\tau)]|\tau\rangle\end{aligned}\quad (1.82)$$

On a omis ici a' et b' pour souligner l'absence d'une dépendance explicite à ces états. Cependant une certaine variation des états doit être prise en considération si on veut obtenir une caractérisation suffisamment complète de la fonction de transformation. Pour cette raison on utilise des transformations infinitésimales, générées par un opérateur G_x , appliquées indépendamment aux états liés aux paramètres τ et $\tau+d\tau$. Cette variation on la désigne par $[\delta']$. Ainsi

$$\begin{aligned}\delta'\langle\tau+d\tau| &= i\langle\tau+d\tau|G_x(\tau+d\tau) \\ \delta'|\tau\rangle &= -iG_x(\tau)|\tau\rangle\end{aligned}\quad (1.83)$$

dans lesquelles les générateurs infinitésimaux G_x sont constitués des opérateurs appropriés à la représentation utilisée pour les vecteurs correspondants, à savoir $x(\tau)$ et $x(\tau+d\tau)$. On obtient la variation suivante de la fonction de transformation

$$\delta'\langle\tau+d\tau|\tau\rangle = i\langle\tau+d\tau|[G_x(\tau+d\tau)-G_x(\tau)]|\tau\rangle\quad (1.84)$$

Les deux types de variation peuvent être assemblés sous le symbole de variation suivant $\delta = \delta'' + \delta'$, alors on peut écrire

$$\delta\langle\tau+d\tau|\tau\rangle = i\langle\tau+d\tau|\delta W|\tau\rangle\quad (1.85)$$

où W est l'opérateur action lié à la transformation infinitésimale. Lorsqu'on utilise comme générateur G_x l'opérateur G_q qui produit une variation δq , où

$$G_q = pdq\quad (1.86)$$

alors

$$W(\tau+d\tau,\tau) = pdq + d\tau G\quad (1.87)$$

Par conséquent, si on considère une succession des transformations infinitésimales définies ci-dessus, en tenant compte de la dimension de l'opérateur action, le principe d'action quantique, établi par Schwinger et qui décrit une transformation unitaire finie, peut être

représenté par la forme différentielle suivante de la fonction de transformation

$$\delta\langle\tau_1|\tau_2\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\tau_1|\delta W_{12}|\tau_2\rangle \quad (1.88)$$

où W_{12} est l'opérateur action stationnaire lié à la transformation finie entre deux points correspondant successivement aux paramètres τ_1 et τ_2 . Comme la composition multiplicative des fonctions de transformation infinitésimales est exprimée par l'addition des opérateurs d'action correspondants, on trouve que

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{\tau_2}^{\tau_1} W(\tau + d\tau, \tau) \\ &= \int_{\tau_2}^{\tau_1} (p(\tau)dq(\tau) + d\tau G(x(\tau), \tau)) \end{aligned} \quad (1.89)$$

Dans cette expression on remarque bien que l'opérateur action W_{12} est un opérateur stationnaire qui ne dépend pas du chemin parcouru entre les valeurs τ_1 et τ_2 . Ce principe d'action stationnaire impose une condition sur les variables quantiques $q(\tau)$ et $p(\tau)$, pour pouvoir produire une transformation unitaire finie, à partir de transformations unitaires infinitésimales. Cette condition consiste à vérifier les relations

$$\frac{dq}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial q} \quad (1.90)$$

Dans le cas où il existe des paramètres multiples, on peut écrire

$$G(x, \tau) = \sum_{k=1} G_k(x, \tau) \frac{d\tau_k(\tau)}{d\tau} \quad (1.91)$$

l'opérateur action s'écrit donc

$$W_{12} = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \left(pdq + \sum_k G_k(x(\tau), \tau) d\tau_k \right) \quad (1.92)$$

Lorsque le paramètre τ indique le temps t , alors l'opérateur hamiltonien H devient le générateur de la transformation temporelle infinitésimale, dans ce cas $G = G_t = -Hdt$. L'opérateur action prend alors la forme suivante pour un système de dimension N égale ou supérieure à un

$$W_{12} = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \left(\sum_k p_k dq_k - Hdt \right) \quad (1.93)$$

Ainsi, on remarque bien que l'opérateur action est en réalité

$$W_{12} = \int_{\tau_2}^{\tau_1} L(t) dt \quad (1.94)$$

où $L(t)$ est le lagrangien du système défini par

$$L(t) = \sum_k p_k \frac{dq_k}{dt} - H \quad (1.95)$$

Le principe d'action quantique (1.88) devient, pour une variation infinitésimale des variables dynamiques et du temps de deux points de l'espace-temps

$$\delta \langle \mathbf{q}', t_1 | \mathbf{q}'', t_2 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \mathbf{q}', t_1 | \delta W_{12} | \mathbf{q}'', t_2 \rangle \quad (1.96)$$

Les variables doivent être réarrangées de sorte que chaque variable se trouve du côté de son vecteur propre, afin d'avoir la possibilité d'utiliser l'équation aux valeurs propres appropriée à chaque variable. Pour qu'il soit possible de le faire, il va falloir utiliser le commutateur des deux variables q_k'' et q_k' . On obtient ainsi l'opérateur action bien ordonné avec la valeur propre w_{12} . Ainsi, la relation (1.96) permet après intégration d'obtenir la fonction de transformation

$$\langle \mathbf{q}', t_1 | \mathbf{q}'', t_2 \rangle = C \exp \left(\frac{i}{\hbar} w_{12} \right) \quad (1.97)$$

où C est déterminé à partir de la condition de normalisation suivante

$$\lim_{t_1 \longrightarrow t_2} \langle q'_k | q''_k \rangle = \delta(q'_k - q''_k) \quad (1.98)$$

Les conditions (1.90) se transforment en

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (1.99)$$

Ces équations sont connues sous le nom d'« équations quantiques de mouvement », où d'« équations d'Heisenberg », et elles prennent une forme similaire à celle des équations classiques de mouvement dites « équations d'Hamilton ». Et ainsi on arrive, pour une variation infinitésimale de l'action, à

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2 \quad (1.100)$$

où

$$\begin{aligned} G &= G_q + G_t \\ &= \sum_k p_k \delta q_k - H \delta t \end{aligned} \quad (1.101)$$

à chacune des deux limites. On note ici que les variations δq_k sont des nombres et commutent alors avec tous les opérateurs. Etant donné que le paramètre temporel t n'est pas affecté par les transformations des opérateurs, la condition (1.57) appliquée à une fonction F de variables dynamiques et du temps mène à

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [F, H] \quad (1.102)$$

qui est la relation générale du mouvement. En remplaçant F par l'hamiltonien H , on obtient

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.103)$$

L'expression (1.57) permet aussi d'avoir la relation

$$\delta_q F = \frac{1}{i\hbar} [F, G_q] \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial q_k} = \frac{1}{i\hbar} [F, p_k] \quad (1.104)$$

où le symbole δ_q désigne la variation liée à la variable q . Maintenant on substitue la fonction F par l'hamiltonien H dans (1.104), et par l'impulsion p dans (1.102), on obtient l'équation de mouvement $dp_k/dt = -\partial H/\partial q_k$, puis en effectuant la transformation $q_k \rightarrow p_k, q_k \rightarrow -p_k$ sur cette équation on aboutit à l'autre équation de mouvement $dq_k/dt = \partial H/\partial p_k$, ce qui est en accord avec les équations (1.99). L'équation (1.104) produit les commutateurs de base

$$\frac{1}{i\hbar} [q_k, p_l] = \frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl} \quad \text{et} \quad \frac{1}{i\hbar} [p_k, p_l] = \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = 0 \quad (1.105)$$

L'effet du générateur G_q sur les états dans la représentation q est déduit des équations (1.83), on trouve

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q'_k} \langle \mathbf{q}', t | = \langle \mathbf{q}', t | p_k(t) \quad (1.106)$$

1.7.2 La représentation p et le changement de représentation [26]

Nous pourrions choisir, au début, comme ensemble complet de propriétés physiques compatibles, la représentation p . Alors nous aurions été menés au principe d'action suivant

$$\delta \langle \mathbf{p}', t_1 | \mathbf{p}'', t_2 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \mathbf{p}', t_1 | \delta \int_2^1 L_p dt | \mathbf{p}'', t_2 \rangle \quad (1.107)$$

où

$$L_p(t) = - \sum_k \frac{dp_k}{dt} q_k - H \quad (1.108)$$

L'opérateur L_p est produit, à partir du lagrangien défini dans la représentation q par (1.95) et qu'on va nommer L_q , en effectuant la substitution $q_k \rightarrow p_k, q_k \rightarrow -p_k$ et vis versa. Puisque les équations de mouvement maintiennent leur forme sous cette substitution, elles sont

également produites par le nouveau principe d'action. Ce qui est différent dans cette représentation c'est le générateur G qui apparaît maintenant sous la forme

$$\begin{aligned} G &= G_p + G_t \\ &= -\sum_k q_k \delta p_k - H \delta t \end{aligned} \quad (1.109)$$

Dans la représentation p l'équation (1.57) mène à

$$\delta_p F = \frac{1}{i\hbar} [F, G_p] \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial p_k} = \frac{1}{i\hbar} [q_k, F] \quad (1.110)$$

qui aboutit à

$$\frac{1}{i\hbar} [q_k, p_l] = \frac{\partial p_l}{\partial p_k} = \delta_{kl} \quad \text{et} \quad \frac{1}{i\hbar} [q_k, q_l] = \frac{\partial q_l}{\partial p_k} = 0 \quad (1.111)$$

Ainsi tous les commutateurs fondamentaux sont produits quand les deux lagrangiens L_q et L_p sont utilisés.

1.7.3 La fonction de transformation qp

Il est possible maintenant de définir une nouvelle représentation qui permet de déterminer la fonction de transformation liant les représentations q et p . Et pour simplifier la notation nous allons traiter le cas unidimensionnel, et le cas de systèmes multidimensionnels peut être déduit de la même manière que dans les deux derniers paragraphes

$$L_q - L_p = \frac{d(qp)}{dt} \quad (1.112)$$

d'où

$$\begin{aligned} G &= G_q - G_p \\ &= \delta(qp) \end{aligned} \quad (1.113)$$

La fonction de transformation reliant les représentations q et p peut être établie, en appliquant le principe d'action quantique, par l'intégration de l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned}\delta\langle q' | p' \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle q' | G_q - G_p | p' \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \delta(q' p') \langle q' | p' \rangle\end{aligned}\quad (1.114)$$

L'intégration de cette expression donne

$$\langle q' | p' \rangle = C e^{\frac{i}{\hbar} q' p'} \quad (1.115)$$

et la constante d'intégration C émerge de la condition de normalisation

$$\begin{aligned}\delta(q' - q'') &= \int \langle q' | p' \rangle (dp') \langle p' | q'' \rangle \\ &= |C|^2 \int dp' e^{\frac{i}{\hbar} (q' - q'') p'}\end{aligned}\quad (1.116)$$

Et ainsi la fonction de transformation est déduite

$$\langle q' | p' \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} q' p'} \quad \text{d'où} \quad \langle p' | q' \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} q' p'} \quad (1.117)$$

1.8 TRANSFORMATIONS CANONIQUES

En mécanique classique, une transformation canonique c'est une transformation qui préserve les parenthèses de Poisson $\{q, p\} = 1$. La transformation canonique en mécanique quantique, c'est celle qui préserve les relations de commutation $[q, p] = i\hbar$ [95,96].

1.8.1 Génération d'une transformation canonique [25]

L'utilisation de la forme canonique de l'opérateur lagrangien (1.95) conduit à la forme canonique correspondante du générateur G (1.101), décrivant des transformations infinitésimales en un instant spécifié t , ce qui implique les relations de commutation et les

équations canoniques de mouvement. A partir d'un générateur donné G d'autres générateurs \bar{G} peuvent être obtenus, selon

$$G - \bar{G} = \delta F_1 \quad (1.118)$$

La question qui se pose ici est si \bar{G} peut également prendre une forme canonique se rapportant aux nouvelles variables dynamiques Q et P , et le nouvel opérateur hamiltonien \bar{H} . Ces nouvelles variables doivent obéir aux relations canoniques de commutation et aux équations de mouvement, définissant ainsi la transformation des variables dynamiques à l'instant t en tant que transformation canonique. La forme différentielle suivante

$$\delta F_1 = p \delta q - H \delta t - P \delta Q + \bar{H} \delta t \quad (1.119)$$

semble être le résultat dû aux variations infinitésimales qu'on fait subir aux variables dont dépend l'opérateur F_1 . Cependant, l'opérateur F_1 qui joue ainsi le rôle d'une action, peut également contenir d'autres variables canoniques, mais superflues, v . Les équations suivantes découlent directement de l'équation différentielle (1.119)

$$p = \frac{\partial_r F_1}{\partial q}, \quad -P = \frac{\partial_r F_1}{\partial Q}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v} = 0, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (1.120)$$

Une transformation canonique est obtenue lorsque ces équations possèdent une solution. Pour cette raison, l'opérateur d'action F_1 est appelé fonction génératrice de la transformation.

1.8.2 Propriétés du groupe de transformations canoniques [25]

Les transformations canoniques constituent un groupe et l'opérateur d'action qui décrit l'inverse de la transformation est

$$F_1(Q, q) = -F_1(q, Q) \quad (1.121)$$

tandis que, pour deux transformations successives $qp \rightarrow \bar{q} \bar{p} \rightarrow \bar{\bar{q}} \bar{\bar{p}}$, l'opérateur d'action générateur de la transformation composée est

$$F_1(q, \bar{\bar{q}}) = F_1(q, \bar{q}) + F_1(\bar{q}, \bar{\bar{q}}) \quad (1.122)$$

L'équation précédente illustre le concept de variables superflues. Si les opérateurs $F_1(q, \bar{q})$ et $F_1(\bar{q}, \bar{\bar{q}})$ contiennent juste les variables indiquées, la somme va dépendre des variables q , \bar{q} , et $\bar{\bar{q}}$. Mais selon la définition de chacune des transformations canoniques

$$\frac{\partial_r F_1(q, \bar{\bar{q}})}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial_r}{\partial \bar{q}} (F_1(q, \bar{q}) + F_1(\bar{q}, \bar{\bar{q}})) = -\bar{p} + \bar{p} = 0 \quad (1.123)$$

il doit être possible d'exprimer $F_1(q, \bar{\bar{q}})$ en fonction des variables q et \bar{q} seulement. A savoir qu'il n'est pas toujours souhaitable d'éliminer les variables superflues.

Une transformation canonique donnée peut être dérivée, par différentiation par rapport à chacune des variables complémentaires de l'opérateur d'action obéissant aux équations (1.120). En usant de la propriété d'additivité du groupe de transformations canoniques, nous allons définir un autre type de fonctions génératrices, qu'on va nommer $F_2(q, P)$, et qui va nous servir ultérieurement dans les chapitres suivants. On obtient

$$F_2(q, P) = F_1(q, Q) + W(Q, P) \quad (1.124)$$

où $\delta W(Q, P) = G_Q - G_P$. A partir de l'expression (1.113) on conclut

$$W(Q, P) = QP \quad (1.125)$$

Pour trouver enfin la relation entre les deux types de fonctions génératrices, et définir l'opérateur d'action $F_2(q, P)$

$$F_2(q, P) = F_1(q, Q) + QP \quad (1.126)$$

On remarque bien que dans cette expression les variables Q apparaissent en tant que variables superflues. Les propriétés différentielles du nouvel opérateur d'action sont maintenant déduites en substituant la variable Q par P , et la variable P par $-Q$, dans l'expression différentielle (1.119)

$$p = \frac{\partial_r F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial_r F_2}{\partial P}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v} = 0, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (1.127)$$

et ces équations sont également appropriées pour décrire la transformation $qp \rightarrow QP$.

1.8.3 Les transformations d'Hamilton-Jacobi [25]

La transformation d'Hamilton-Jacobi est une transformation canonique d'une représentation à l'instant t_1 vers une autre représentation analogue à un autre instant fixe t_0 . L'opérateur d'action obéit ainsi à

$$\delta W = p \delta q - H \delta t - p_0 \delta q_0 \quad (1.128)$$

d'où

$$p = \frac{\partial_r W}{\partial q}, \quad -p_0 = \frac{\partial_r W}{\partial q_0} \quad (1.129)$$

et

$$0 = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (1.130)$$

qui est connue par l'équation d'Hamilton-Jacobi. En comparant ces deux dernières expressions avec (1.120), on constate que le nouvel hamiltonien : $\bar{H} = 0$. La transformation d'Hamilton-Jacobi peut être ainsi identifiée comme la transformation canonique lors de laquelle les nouvelles variables dynamiques $x(t_0)$ montrent une indépendance du temps.

1.9 CONCLUSION

Schwinger a élaboré une théorie générale de la dynamique quantique, en partant d'une structure mathématique fondamentale de la mécanique quantique, qui exprime symboliquement les lois physiques qui régissent le domaine microscopique [25-33]. En mécanique classique, les équations d'Hamilton de mouvement sont déduites d'un principe d'action. Des équations de mouvement équivalentes en mécanique quantique dites les équations d'Heisenberg de mouvement, découlent du principe d'action de Schwinger, pour des paires de propriétés complémentaires ayant des spectres continus. Ces équations quantiques de mouvement représentent un outil puissant pour la construction de la fonction de transformation. Ce principe d'action permet de lier différentes représentations par le moyen de fonctions de transformations.



CHAPITRE II
APPLICATIONS AUX SYSTEMES
QUADRATIQUES

2.1	Intoduction	36
2.2	Systèmes Elémentaires Indépendants du Temps	36
2.3	Méthode d'Urrutia	43
2.4	Méthode de Nassar	55

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons présenter les études précédentes qui nous ont pavé le chemin, pour développer la méthode de Schwinger et la rendre plus souple et plus applicable, avec les résultats les plus importants obtenus dans le cadre de l'évaluation des fonctions de transformations des systèmes quadratiques.

La résolution directe des équations d'Heisenberg, effectuée par Schwinger, dans des cas élémentaires 1D, permet d'évaluer les fonctions de transformation pour ces systèmes non dépendants du temps. La dépendance du temps a poussé Urrutia à transformer le problème de résolution d'équations opératoriels en celui de résolution d'équations numériques analogues. Pour avoir la possibilité de traiter des cas encore plus compliqués, Nassar a suivi une nouvelle voie par le moyen d'une technique semi classique, en transformant le problème d'évaluation de la fonction de transformation du système étudié en celui d'une particule libre

2.2 SYSTEMES ELEMENTAIRES INDEPENDANTS DU TEMPS

Avec la résolution directe des équations d'Heisenberg, Schwinger a réussi à déterminer les fonctions de transformation pour les systèmes 1D et indépendants du temps suivants : une particule libre ou soumise à une force constante, et pour un oscillateur harmonique. Dans cette partie nous allons présenter les résultats obtenus par Schwinger [26].

2.2.1 Particule libre

L'opérateur hamiltonien d'une particule libre prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (2.1)$$

Le principe d'action quantique permet d'écrire la variation suivante de la fonction de transformation

$$\delta \langle x'', t'' | x' \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x'', t'' | p'' \delta x'' - p' \delta x' - \delta t'' \frac{p'^2}{2m} | x' \rangle \quad (2.2)$$

où x' , x'' et p' , p'' sont respectivement les positions et les impulsions de la particule aux instants t' et t'' . Dans ce qui suit, on va considérer $t' = 0$ et $|x', t'\rangle \equiv |x'\rangle$. La résolution des équations d'Heisenberg correspondant à ce système

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

produit les solutions suivantes des variables quantiques

$$p(t) = p' = p, \quad x(t) = x' + \frac{p}{m}t \quad (2.4)$$

Pour évaluer la fonction de transformation $\langle x'', t'' | x' \rangle$ en appliquant le principe d'action quantique, il est nécessaire de réordonner les variables dans la variation de l'opérateur d'action, en utilisant le commutateur suivant à partir des solutions (2.4)

$$[x', x(t)] = \frac{i\hbar t}{m} \quad (2.5)$$

La variation (2.2) devient donc

$$\delta \langle x'', t'' | x' \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x'', t'' | \frac{m}{t''} (x'' - x') \delta (x'' - x') - \delta t'' \frac{m}{2t''^2} (x'' - x')^2 | x' \rangle \quad (2.6)$$

Après avoir utilisé le commutateur (2.5), on peut introduire les valeurs propres et obtenir après intégration la fonction de transformation

$$\langle x'', t'' | x' \rangle = \frac{C}{\sqrt{t''}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2t''} (x'' - x')^2\right) \quad (2.7)$$

La valeur de C est obtenue à partir de la condition de normalisation suivante

$$\lim_{t'' \rightarrow 0} \langle x'', t'' | x' \rangle = \langle x'' | x' \rangle = \delta(x'' - x') \quad (2.8)$$

La fonction de transformation prend enfin la forme correspondant au cas d'une particule libre

$$\langle x'', t'' | x' \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t''}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2t''} (x'' - x')^2\right) \quad (2.9)$$

Pour une valeur arbitraire de t' , un simple calcul permet d'obtenir l'expression suivante de la fonction de transformation

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t'' - t')}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2(t'' - t')} (x'' - x')^2\right) \quad (2.10)$$

2.2.2 Force constante

L'hamiltonien d'une particule soumise à une force constante F est

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx \quad (2.11)$$

Le principe d'action quantique permet d'écrire la variation

$$\delta \langle x'', t'' | x' \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x'', t'' | p'' \delta x'' - p' \delta x' - \delta t'' \left(\frac{p''^2}{2m} - Fx'' \right) | x' \rangle \quad (2.12)$$

Les équations d'Heisenberg de mouvement

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = F \quad (2.13)$$

sont celles du mouvement d'une particule sous l'influence de la force constante F , et elles sont résolues par

$$p(t) = p' + Ft, \quad x(t) = x' + \frac{p(t)}{m}t + \frac{F}{m}t^2 \quad (2.14)$$

En conséquence on a

$$[x', x''] = \frac{i\hbar t''}{m} \quad (2.15)$$

On utilise (2.14) pour établir

$$\begin{aligned} p' &= \frac{m}{t} \left(x(t) - x' - \frac{Ft^2}{2m} \right) \\ p(t) &= \frac{m}{t} \left(x(t) - x' + \frac{Ft^2}{2m} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

La variation (2.12) devient alors après avoir utilisé le commutateur (2.15)

$$\begin{aligned} \delta \langle x'', t'' | x' \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle x'', t'' | \frac{m}{t''} \left(x'' - x' + \frac{Ft''^2}{2m} \right) \delta x'' - \frac{m}{t''} \left(x'' - x' - \frac{Ft''^2}{2m} \right) \delta x' \\ &\quad - \delta t'' \left(\frac{m}{2t''^2} (x'' - x')^2 - \frac{i\hbar}{2t''} - \frac{F}{2} (x'' - x') + \frac{F^2 t''^2}{8m} - Fx' \right) | x' \rangle \end{aligned} \quad (2.17)$$

La dernière expression permet d'écrire la fonction de transformation, après avoir utilisé la condition de normalisation (2.8)

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t''}} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2t''} (x'' - x')^2 + \frac{1}{2} Ft'' (x'' + x') - \frac{F^2 t''^3}{24m} \right) \quad (2.18)$$

Ceci montre un parfait accord avec la fonction de transformation obtenue pour le même cas par la méthode fonctionnel de Feynman.

2.2.3 L'oscillateur harmonique

On considère maintenant que l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (2.19)$$

Les solutions des équations d'Heisenberg suivantes

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -m\omega^2 x(t) \quad (2.20)$$

sont

$$\begin{aligned} x(t) &= x' \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} p' \sin \omega t \\ p(t) &= p' \cos \omega t - m\omega x' \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.21)$$

d'où

$$\begin{aligned} p' &= \frac{m\omega}{\sin \omega t''} (x'' - x' \cos \omega t'') \\ p'' &= \frac{m\omega}{\sin \omega t''} (x'' \cos \omega t'' - x') \end{aligned} \quad (2.22)$$

Il en résulte le commutateur

$$[x', x''] = \frac{i\hbar}{m\omega} \sin \omega t'' \quad (2.23)$$

Selon le principe d'action quantique on a

$$\delta \langle x'', t'' | x' \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x'', t'' | p'' \delta x'' - p' \delta x' - \delta t'' \left(\frac{p''^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x''^2 \right) | x' \rangle \quad (2.24)$$

Après l'utilisation du commutateur (2.23) et la condition de normalisation, la fonction de transformation de l'oscillateur harmonique s'écrit comme

$$\langle x'', t'' | x' \rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t''}} \exp\left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega t''} \left((x''^2 + x'^2) \cos \omega t'' - 2x''x' \right)\right) \quad (2.25)$$

C'est aussi la formule de la fonction de transformation obtenue par les intégrales de chemins pour un oscillateur harmonique.

2.2.4 L'oscillateur harmonique à court temps

Lorsque $\omega t \rightarrow 0$, on retrouve la fonction de transformation de la particule libre à partir de l'expression (2.25). L'interprétation qu'on donne est que le temps n'est pas suffisant pour

que la force puisse agir. Supposons maintenant que t est assez petit pour que $\omega t \ll 1$, mais n'approche pas le zéro. On déplace l'origine au point \bar{x} , de sorte qu'on puisse faire les substitutions suivantes

$$x' \rightarrow \bar{x} + x', \quad x'' \rightarrow \bar{x} + x'', \quad \text{avec} \quad |x'|, |x''| \ll |\bar{x}| \quad (2.26)$$

Plusieurs approches sont effectuées afin d'obtenir enfin la fonction de transformation

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x' \rangle &\cong \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t''}} \exp \left(\frac{im}{\hbar} \left(\frac{(x'' - x')^2}{2t''} - \omega(\bar{x}^2 + \bar{x}(x'' + x')) \left(\frac{\omega t''}{2} + \frac{\omega^3 t''^3}{24} \right) \right) \right) \\ &\cong \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t''}} \exp \left(\frac{im}{\hbar} \left(\frac{(x'' - x')^2}{2t''} - \frac{\omega^2 t''}{2} (\bar{x}^2 + \bar{x}(x'' + x')) - \frac{\omega^4 t''^3}{24} \bar{x}^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sachant que l'énergie potentielle et la force au point $x = \bar{x}$ sont respectivement

$$\bar{V} = \frac{1}{2} m \omega^2 \bar{x}^2 \quad \text{et} \quad \bar{F} = -m \omega^2 \bar{x} \quad (2.28)$$

La formule (2.27) devient

$$\langle x'', t'' | x' \rangle \cong \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t''}} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2t''} (x'' - x')^2 + \frac{1}{2} \bar{F} t'' (x'' + x') - \frac{\bar{F}^2 t''^3}{24m} \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \bar{V} t'' \right) \quad (2.29)$$

C'est bien la fonction de transformation (2.18) pour une particule soumise à une force constante, mais avec un facteur supplémentaire contenant le potentiel \bar{V} . Dans le paragraphe précédent, l'énergie potentielle est zéro à $x=0$. Ici, à $x=\bar{x}$, qui est le point \bar{x} , l'énergie potentielle est \bar{V} dans l'équation (2.28).

Rappelons maintenant une des propriétés des transformations finies. L'opérateur unitaire pour un déplacement temporel infinitésimal de temps est $1 + \frac{i}{\hbar} (-\delta H)$. Si le système est conservateur, c'est-à-dire H indépendant de t , alors la répétition de cet opérateur un certain nombre de fois égale à $t/\delta t$ génère l'opérateur unitaire pour un déplacement fini de t

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta t H \right)^{t/\delta} = e^{-\frac{i}{\hbar} t H} \quad (2.30)$$

d'où

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \langle x'' | e^{-\frac{i}{\hbar} t'' H} | x' \rangle \quad (2.31)$$

Ainsi, faire varier H en ajoutant un potentiel constant \bar{V} , conduit à une variation de la fonction de transformation d'un facteur de phase $\exp(-it''\bar{V}/\hbar)$. Par ailleurs, bien que l'approximation à t -court ait été dérivée pour le potentiel d'oscillateur, seuls le potentiel et la force au point référentiel \bar{x} entrent en jeu

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (\bar{x} + (x - \bar{x}))^2 \\ &= \bar{V} - \bar{F}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

où

$$\bar{V} = V(\bar{x}), \quad \bar{F} = -\frac{dV}{dx}(\bar{x}), \quad m\omega^2 = \frac{d^2V}{dx^2}(\bar{x}) \quad (2.33)$$

En utilisant ces équations pour définir \bar{V} , \bar{F} , et ω^2 pour une énergie potentielle arbitraire à proximité de la position \bar{x} , on obtient « une approximation oscillatoire locale » pour n'importe quel potentiel $V(x)$.

2.2.5 Conclusion

Dans sa formulation d'une dynamique quantique, Schwinger a ouvert les portes aux physiciens vers de nouveaux et vastes horizons. Il s'est concentré beaucoup plus sur cette formulation théorique qu'aux applications. En conséquence, il a réalisé peu d'applications aux systèmes quadratiques en mécanique quantique non relativiste.

Les applications élémentaires effectuées par Schwinger ont montré que cette méthode opératoire est réellement équivalente à la méthode fonctionnelle de Feynman, et les équations d'Heisenberg ont réussi à obtenir directement les fonctions de transformations pour certains systèmes élémentaires 1D indépendants du temps. Cependant, la remarque qu'on peut

faire ici est que l'évaluation de ces fonctions de transformation devient de plus en plus difficile et rigide pour des systèmes plus compliqués, donc elle exige à faire des approximations. De plus, en suivant cette méthode directe, il n'était pas possible de traiter les cas de systèmes dépendants du temps, et de confronter cette méthode aux cas plus réels. Cela a engendré une nécessité de chercher d'autres techniques pour développer l'application de la méthode de Schwinger aux systèmes quadratiques et pouvoir l'appliquer aux systèmes dépendants du temps.

2.3 MÉTHODE D'URRUTIA

Cette méthode [47,48] consiste à éviter la résolution de l'équation auxiliaire opératorielle, qui découle directement des équations d'Heisenberg, et à résoudre à la place des équations différentielles analogues ayant des solutions numériques indépendantes. Cela devient possible en proposant une solution de l'équation auxiliaire qui dépend de ces solutions numériques, et ayant comme conditions aux limites les opérateurs position aux instants t' et t'' , instants limites de la fonction de transformation à évaluer.

2.3.1 Oscillateur harmonique amorti [47]

L'oscillateur harmonique amorti est un système 1D dépendant du temps, et décrit par l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m \exp 2\xi(t)} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) \exp 2\xi(t) x^2 \quad (2.34)$$

où la fréquence $\omega(t)$ et le coefficient d'amortissement $\xi(t)$ sont des fonctions arbitraires du temps. Les équations d'Heisenberg sont données par

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m e^{2\xi(t)}}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -m \omega^2 e^{2\xi(t)} x(t) \quad (2.35)$$

qui mènent à l'équation auxiliaire suivante

$$\ddot{x} + 2\dot{\xi} \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.36)$$

En première étape, l'équation (2.36) est résolue en introduisant les opérateurs $x' = x(t')$ et $x'' = x(t'')$ comme conditions aux limites. La solution générale de cette équation s'écrit comme

$$x(t) = a_1(t)x'' + a_2(t)x' \quad (2.37)$$

$a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont ici deux solutions indépendantes d'une équation différentielle numérique analogue à l'équation (2.36)

$$\ddot{a} + 2\dot{\xi} \dot{a} + \omega^2 a = 0 \quad (2.38)$$

qui, selon l'équation (2.37), satisfait les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} a_1' = a_1(t') = 0, & & a_1'' = a_1(t'') = 1 \\ a_2' = a_2(t') = 1, & & a_2'' = a_2(t'') = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Avec la solution générale (2.37), il est maintenant possible de déduire $p(t)$ à partir de (2.35), d'où

$$p(t) = me^{2\xi} (\dot{a}_1(t)x'' + \dot{a}_2(t)x') \quad (2.40)$$

Il en résulte le commutateur

$$[x'', x'] = \frac{i\hbar}{me^{2\xi} \dot{a}_2''} = \frac{-i\hbar}{me^{2\xi} \dot{a}_1'} \quad (2.41)$$

Il est maintenant possible de calculer la variation de la fonction de transformation, en appliquant le principe d'action quantique, et en usant de l'hamiltonien du système et l'expression de l'impulsion. On trouve

$$\begin{aligned}
\delta \ln \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \frac{mi}{\hbar} \left(e^{2\xi''} \dot{a}_1'' \delta \left(\frac{x''^2}{2} \right) - e^{2\xi'} \dot{a}_2' \delta \left(\frac{x'^2}{2} \right) + e^{2\xi''} \dot{a}_2'' \delta(x'' x') \right. \\
& \left. - \frac{\delta t''}{2} \left(e^{2\xi''} (x''^2 (\dot{a}_1'' + \omega''^2) + x'' \dot{a}_2'' + 2x'' \dot{a}_1'' \dot{a}_2'') - i \dot{a}_1'' \right) \right) \\
& \left. + \frac{\delta t'}{2} \left(e^{2\xi'} (x'^2 \dot{a}_1' + x' \dot{a}_2' + \omega'^2) + 2x' \dot{a}_1' \dot{a}_2' \right) + i \dot{a}_1' \right) \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Un calcul un peu long qui introduit deux autres équations auxiliaires indépendantes dans les expressions des fonctions a_1 et a_2 , aboutit aux formules

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1'' &= -\frac{\partial \ln(-\dot{a}_2'' e^{2\xi''})}{\partial t''} \\
\dot{a}_2' &= -\frac{\partial \ln(\dot{a}_1' e^{2\xi'})}{\partial t'} \\
\dot{a}_1' e^{2\xi'} &= -\dot{a}_2'' e^{2\xi''} \quad (2.43)
\end{aligned}$$

qui permettent en intégrant l'expression (2.42) d'obtenir la fonction de transformation de l'oscillateur amorti

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \sqrt{\frac{-m \dot{a}_2'' e^{2\xi''}}{2\pi i \hbar}} \exp \left(\frac{im}{2\hbar} \left(e^{2\xi''} \dot{a}_1'' x''^2 - e^{2\xi'} \dot{a}_2' x'^2 - 2 \dot{a}_2'' e^{2\xi''} x'' x' \right) \right) \quad (2.44)$$

Dans cette étude, la constante d'intégration a été obtenue en effectuant une comparaison avec le cas de l'oscillateur harmonique simple.

2.3.2 Oscillateur harmonique amorti forcé [47]

Dans cette partie de l'étude effectuée par Urrutia et al, ils accomplissent le calcul de la fonction de transformation de l'oscillateur harmonique amorti forcé dépendant du temps. Ils se basent sur les calculs et les résultats obtenus pour l'oscillateur amorti, en considérant celui là comme un oscillateur amorti avec une force externe nulle. L'hamiltonien est dans ce cas

$$H = \frac{p^2}{2m \exp 2\xi(t)} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) \exp 2\xi(t) x^2 - F(t) \exp(2\xi(t)) x \quad (2.45)$$

$F(t)$ ici est une force externe dépendante du temps. Les équations d'Heisenberg correspondantes sont

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m e^{2\xi(t)}}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -m \omega^2 e^{2\xi(t)} x(t) + e^{2\xi(t)} F \quad (2.46)$$

qui se réduisent à l'équation auxiliaire suivante

$$\ddot{x} + 2\dot{\xi} \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \quad (2.47)$$

Dans le paragraphe précédent on a déjà présenté la fonction de transformation de l'oscillateur amorti pour $F = 0$. Le principe d'action, et plus précisément la loi d'additivité des actions, permet dans ce cas de s'intéresser uniquement aux changements dynamiques qui apparaissent dans la fonction de transformation quand on fait varier la force externe. De ce fait, on a

$$\begin{aligned} \delta_F \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle x'', t'' | \delta_F \int_{t'}^{t''} L dt | x', t' \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle x'', t'' | \delta_F \int_{t'}^{t''} F(t) e^{2\xi(t)} x(t) dt | x', t' \rangle \end{aligned} \quad (2.48)$$

où la variation du lagrangien due à la force externe résulte uniquement du dernier terme de l'hamiltonien. Maintenant, (2.48) va être ramenée à une équation numérique et dans l'intégration par rapport à F on va prendre en considération le fait que la fonction de transformation $\langle x'', t'' | x', t' \rangle_{F=0}$ est donnée par la relation (2.44). Ceci permet de conclure que la solution générale de (2.47) est la solution générale de l'équation homogène (2.36), plus une solution particulière de (2.47). Ainsi nous pouvons écrire

$$x(t) = a_1(t) x'' + a_2(t) x' + \frac{1}{m} \int_{t'}^{t''} G(t, \tau) F(\tau) d\tau \quad (2.49)$$

où $a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont données par l'équation différentielle (2.38) et les conditions aux limites (2.39). La fonction $G(t, \tau)$ obéit à l'équation différentielle

$$\ddot{G}(t, \tau) + 2\xi\dot{G}(t, \tau) + \omega^2 G(t, \tau) = \delta(t - \tau) \quad (2.50)$$

En vérifiant certaines conditions un peu compliquées [47], il devient possible de faire le choix suivant pour la solution de l'équation différentielle (2.50)

$$G(t, \tau) = \begin{cases} a_0 a_2(t) a_1(\tau) e^{2\xi(t-\tau)} & t > \tau \\ a_0 a_1(t) a_2(\tau) e^{2\xi(\tau-t)} & t < \tau \end{cases} \quad (2.51)$$

où

$$a_0 = \left((a_1(\tau)\dot{a}_2(\tau) - a_2(\tau)\dot{a}_1(\tau)) e^{2\xi(\tau)} \right)^{-1} \quad (2.52)$$

Il est possible maintenant de substituer (2.49) dans (2.48), pour d'obtenir ainsi

$$\delta_F \ln \langle x'', t'' | x', t' \rangle = \frac{i}{\hbar} \left(\delta_F \int_{t'}^{t''} dt F(t) e^{2\xi(t)} (x'' a_1(t) + x' a_2(t)) + \int_{t'}^{t''} dt \int_{t'}^{t''} d\tau \delta F(t) e^{2\xi(t)} G(t, \tau) F(\tau) \right) \quad (2.53)$$

La fonction G est une fonction symétrique puisque $G(t, \tau) = G(\tau, t)$. Cette propriété permet enfin d'obtenir la fonction de transformation de l'oscillateur amorti forcé, après intégration, en fonction de celle de l'oscillateur amorti ($F = 0$) (2.44)

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \langle x'', t'' | x', t' \rangle_{F=0} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\int_{t'}^{t''} dt F(t) e^{2\xi(t)} (x'' a_1(t) + x' a_2(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} dt \int_{t'}^{t''} d\tau F(t) e^{2\xi(t)} G(t, \tau) F(\tau) \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.3.3 Oscillateur harmonique 3D dans un champ magnétique [48]

On passe maintenant à un système 3D, avec un couplage entre les variables dynamiques suivant deux directions différentes. On traite ici le cas d'un oscillateur harmonique anisotrope chargé soumis à un champ magnétique constant. La résolution du problème devient plus compliquée par cette méthode, c'est pour cette raison qu'on a choisi un système indépendant du temps décrit par l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \left(\left(p_x + \frac{m\omega}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega}{2} x \right)^2 + p_z^2 \right) + \frac{m}{2} (\Omega_1^2 x^2 + \Omega_2^2 y^2 + \Omega_3^2 z^2) \quad (2.55)$$

où $\omega = eB/mc$ est la pulsation cyclotron. Le système de coordonnées est choisi de telle sorte que le champ magnétique constant soit parallèle à la direction z . Le problème est bidimensionnel puisque le mouvement suivant z est découplé du mouvement dans le plan xy . Nous avons donc

$$\langle x'', y'', z'', t'' | x', y', z', t' \rangle = \langle z'', t'' | z', t' \rangle \langle x'', y'', t'' | x', y', t' \rangle \quad (2.56)$$

$\langle z'', t'' | z', t' \rangle$ est la fonction de transformation bien connue d'un oscillateur harmonique 1D avec la masse m et la fréquence ω . On est donc concernés uniquement par la fonction de transformation dans le plan xy . Les équations correspondantes du mouvement sont

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m} \left(p_x + \frac{m\omega}{2} y \right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{m\omega}{2} x \right) \\ \dot{p}_x &= \frac{\omega}{2} \left(p_y - \frac{m\omega}{2} x \right) - m\Omega_1^2 x \\ \dot{p}_y &= -\frac{\omega}{2} \left(p_x + \frac{m\omega}{2} y \right) - m\Omega_2^2 y \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ceci aboutit au système d'équations auxiliaires couplées suivantes

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Omega_1^2 x &= \omega \dot{y} \\ \ddot{y} + \Omega_2^2 y &= -\omega \dot{x} \end{aligned} \quad (2.58)$$

dont les solutions appropriées constituent la difficulté principale de la méthode. En suivant une démarche similaire à celle du paragraphe précédent, pour résoudre cette équation, on introduit comme conditions aux limites les opérateurs x'' , y'' , et x' , y'

$$\begin{aligned} x(t) &= x' a_1(t; t'', t') + x'' a_1(t; t', t'') - y' \tilde{a}_2(t; t'', t') - y'' \tilde{a}_2(t; t', t'') \\ y(t) &= x' a_2(t; t'', t') + x'' a_2(t; t', t'') + y' \tilde{a}_1(t; t'', t') + y'' \tilde{a}_1(t; t', t'') \end{aligned} \quad (2.59)$$

Et on fini par trouver que les fonctions numériques indépendantes a_1 , a_2 , \tilde{a}_1 , et \tilde{a}_2 satisfont l'équation quartique

$$\ddot{a}_i + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \omega^2)\ddot{a}_i + \Omega_1^2\Omega_2^2 a_i = 0 \quad (2.60)$$

Les solutions linéairement indépendantes sont données par $\cos(\Omega_{\pm}t)$ et $\sin(\Omega_{\pm}t)$, où Ω_{\pm} peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \\ \Omega_- &= \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Les nombres positifs ω_1 et ω_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left((\Omega_1 + \Omega_2)^2 + \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \omega_2 &= \left((\Omega_1 - \Omega_2)^2 + \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Pour calculer la fonction de transformation, on traite trois cas. Le plus simple est celui d'une force harmonique unique appliquée suivant z . On considère également le cas 3D d'une force d'isotropie partielle et celui d'une force anisotrope.

A. LE CAS : $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$

Ce cas correspond à celui d'une particule chargée qui ne subit l'influence d'aucune force harmonique dans le plan xy , on a alors : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Omega_+ = \omega$, $\Omega_- = 0$. Les fonctions a_1 et a_2 sont ainsi données par

$$\begin{aligned} a_1(t; t'', t') &= \frac{1}{\sin(\omega T/2)} \sin \frac{\omega(t'' - t)}{2} \cos \frac{\omega(t - t')}{2} \\ a_2(t; t'', t') &= \frac{1}{\sin(\omega T/2)} \sin \frac{\omega(t'' - t)}{2} \sin \frac{\omega(t - t')}{2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

où $T = t'' - t'$. La solution générale est immédiatement obtenue

$$x(t) = \frac{1}{\sin(\omega T/2)} \left(x' \sin \frac{\omega(t''-t)}{2} \cos \frac{\omega(t-t')}{2} + x'' \cos \frac{\omega(t''-t)}{2} \sin \frac{\omega(t-t')}{2} + (y' - y'') \sin \frac{\omega(t''-t)}{2} \sin \frac{\omega(t-t')}{2} \right) \quad (2.64)$$

$$y(t) = \frac{1}{\sin(\omega T/2)} \left((x'' - x') \sin \frac{\omega(t''-t)}{2} \sin \frac{\omega(t-t')}{2} + y'' \cos \frac{\omega(t''-t)}{2} \sin \frac{\omega(t-t')}{2} + y' \sin \frac{\omega(t''-t)}{2} \cos \frac{\omega(t-t')}{2} \right) \quad (2.65)$$

Il est maintenant possible de déduire les composantes de l'impulsion aux points limites à partir des équations (2.57)

$$\begin{aligned} p_x(t'') &= \frac{m\omega}{2} \left((x'' - x') \cot \frac{\omega T}{2} - y' \right) \\ p_x(t') &= \frac{m\omega}{2} \left((x'' - x') \cot \frac{\omega T}{2} - y'' \right) \\ p_y(t'') &= \frac{m\omega}{2} \left(x' + (y'' - y') \cot \frac{\omega T}{2} \right) \\ p_y(t') &= \frac{m\omega}{2} \left(x'' + (y'' - y') \cot \frac{\omega T}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

On en déduit les commutateurs

$$\begin{aligned} [x', x''] &= [y', y''] = -\frac{i\hbar}{m\omega} \sin \omega T \\ [x', y''] &= -[y', x''] = -\frac{2i\hbar}{m\omega} \sin^2 \frac{\omega T}{2} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ce qui permet en fin de compte d'aboutir à la fonction de transformation du système étudié

$$\begin{aligned} \langle x'', y'', t'' | x', y', t' \rangle &= \frac{m\omega}{4\pi i \hbar \sin(\omega T/2)} \\ &\times \exp \left(\frac{im\omega}{2\hbar} \left((x'y'' - x''y') + \frac{1}{2} \left((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 \right) \cot \frac{\omega T}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

La constante de normalisation a été obtenue ici en comparant la fonction de transformation du système étudié avec celle d'une particule libre bidimensionnelle à la limite où $T \rightarrow 0$.

B. LE CAS : $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$

Ce cas correspond à un oscillateur harmonique chargé dans le champ magnétique externe constant. On a ici : $\omega_1 = (4\Omega^2 + \omega^2)^{1/2}$ et $\omega_2 = \omega$. Les fonctions a_1 et a_2 prennent les formes

$$\begin{aligned} a_1(t; t'', t') &= \frac{1}{\sin(\omega_1 T / 2)} \sin \frac{\omega_1 (t'' - t)}{2} \cos \frac{\omega_2 (t - t')}{2} \\ a_2(t; t'', t') &= \frac{1}{\sin(\omega_1 T / 2)} \sin \frac{\omega_1 (t'' - t)}{2} \sin \frac{\omega_1 (t - t')}{2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Elles sont équivalents aux équations (2.63) à la limite où $\Omega \rightarrow 0$. La solution générale est parfaitement analogue aux équations (2.64) et (2.65). Les composantes de l'impulsion aux points limites s'écrivent alors

$$\begin{aligned} p_x(t'') &= \frac{m\omega_1}{2\sin(\omega_1 T / 2)} \left(x'' \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) - x' \cos\left(\frac{\omega_2 T}{2}\right) - y' \sin(\omega_2 T / 2) \right) \\ p_x(t') &= \frac{m\omega_1}{2\sin(\omega_1 T / 2)} \left(x'' \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) - x' \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) - y'' \sin(\omega_2 T / 2) \right) \\ p_y(t'') &= \frac{m\omega_1}{2\sin(\omega_1 T / 2)} \left(x' \sin\left(\frac{\omega_2 T}{2}\right) + y'' \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) - y' \cos(\omega_2 T / 2) \right) \\ p_y(t') &= \frac{m\omega_1}{2\sin(\omega_1 T / 2)} \left(x'' \sin\left(\frac{\omega_2 T}{2}\right) + y'' \cos\left(\frac{\omega_2 T}{2}\right) - y' \cos(\omega_1 T / 2) \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

et les commutateurs entre opérateurs position aux points limites sont donc

$$\begin{aligned} [x', x''] &= [y', y''] = \frac{2i\hbar}{m\omega_1} \sin \frac{\omega_1 T}{2} \cos \frac{\omega_2 T}{2} \\ [x', y''] &= -[y', x''] = -\frac{2i\hbar}{m\omega_1} \sin \frac{\omega_1 T}{2} \sin \frac{\omega_2 T}{2} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ces commutateurs avec la condition de normalisation permettront, après avoir appliqué le principe d'action quantique, d'obtenir finalement la fonction de transformation du système

$$\begin{aligned} \langle x'', y'', t'' | x', y', t' \rangle = & \frac{m(4\Omega^2 + \omega^2)^{1/2}}{4\pi i \hbar \sin(\omega T/2)} \exp \left(\frac{im\omega_1}{2\hbar \sin(\omega T/2)} (\sin(\omega_2 T/2)(x'y'' - x''y') \right. \\ & \left. - \cos(\omega_2 T/2)(x''x' + y''y') + \frac{1}{2} \cos(\omega T/2)(x''^2 + x'^2 + y''^2 + y'^2) \right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

C. CAS GENERAL

Maintenant les résultats obtenus dans les deux dernières parties vont être généralisés, en traitant un oscillateur harmonique ayant un potentiel constant complètement anisotrope. Dans ce cas les pulsations ω_1 et ω_2 prennent leurs valeurs générales (2.62). Pour trouver les formes appropriées aux fonctions a_1 et a_2 , on commence par la considération suivante

$$a_2(t; t'', t') = \alpha \sin \frac{\omega_1(t'' - t)}{2} \sin \frac{\omega_2(t - t')}{2} + \beta \sin \frac{\omega_2(t'' - t)}{2} \sin \frac{\omega_1(t - t')}{2} \quad (2.73)$$

où

$$\alpha = -\frac{2\omega\Omega_1\sigma_1}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}, \quad \beta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \alpha \quad (2.74)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \omega_2(\Omega_1 + \Omega_2) \sin(\omega T/2) \\ \sigma_2 &= \omega_1(\Omega_2 - \Omega_1) \sin(\omega_2 T/2) \end{aligned} \quad (2.75)$$

on arrive après calcul à l'expression suivante de a_1

$$\begin{aligned} a_1(t; t'', t') = & \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\frac{\alpha^2}{\sin(\omega T/2)} \sin \frac{\omega_1(t'' - t)}{2} \cos \frac{\omega_2(t - t')}{2} \right. \\ & - \frac{\beta^2}{\sin(\omega_2 T/2)} \sin \frac{\omega_2(t'' - t)}{2} \cos \frac{\omega_1(t - t')}{2} \\ & + \alpha\beta \left(\frac{1}{\sin(\omega_2 T/2)} \cos \frac{\omega_1(t'' - t)}{2} \sin \frac{\omega_2(t - t')}{2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sin(\omega T/2)} \cos \frac{\omega_2(t'' - t)}{2} \sin \frac{\omega_1(t - t')}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Dans le cas où $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\beta = 0$ et $\alpha = -1/\sin(\omega T/2)$. Les équations (2.76) et (2.73) se réduisent en (2.69) et permettent d'écrire les composantes du vecteur impulsion comme

$$\begin{aligned} p_x(t'') &= M_1 x' + M_2 x'' - M_3 y' + M_4 y'' \\ p_x(t') &= -M_2 x' - M_1 x'' + M_4 y' - M_3 y'' \\ p_y(t'') &= M_3 x' + M_4 x'' + \tilde{M}_1 y' + \tilde{M}_2 y'' \\ p_y(t') &= M_4 x' + M_3 x'' - \tilde{M}_2 y' - \tilde{M}_1 y'' \end{aligned} \quad (2.77)$$

Les fonctions M_i sont données par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{\omega_1 \omega_2 \Omega_1}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \left(\sigma_1 \cos\left(\frac{\omega_2 T}{2}\right) + \sigma_2 \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) \right) \\ M_2 &= \frac{\omega_1 \omega_2 \Omega_1}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \left(\sigma_1 \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) + \sigma_2 \cos\left(\frac{\omega_2 T}{2}\right) \right) \\ M_3 &= -\frac{2\omega \Omega_1 \Omega_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \\ M_4 &= \frac{\omega}{2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} \sigma_1^2 - \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} \sigma_2^2 \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Les fonctions correspondantes \tilde{M}_i sont obtenues à partir des fonctions M_i en substituant Ω_1 par Ω_2 et vis versa. Les commutateurs utilisés dans l'évaluation de la variation de la fonction de transformation liée à l'hamiltonien du système sont

$$\begin{aligned} [x', x''] &= -\frac{i \hbar \tilde{M}_1}{mM} \\ [y', y''] &= -\frac{i \hbar M_1}{mM} \\ [y', x''] &= -[x', y''] = \frac{i \hbar M_3}{mM} \end{aligned} \quad (2.79)$$

où

$$M = M_3^2 + M_1 \tilde{M}_1 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \Omega_1 \Omega_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \quad (2.80)$$

A la fin, et après tous ces calculs, le principe d'action quantique, avec la condition de normalisation, aboutit au résultat général

$$\begin{aligned}
\langle x'', y'', t'' | x', y', t' \rangle &= \frac{m}{2\pi i \hbar} \omega_1 \omega_2 (\Omega_1 \Omega_2)^{1/2} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^{-1/2} \\
&\times \exp \left(\frac{im}{\hbar} \left(\frac{1}{2} M_2 (x''^2 + x'^2) + \frac{1}{2} \tilde{M}_2 (y''^2 + y'^2) \right. \right. \\
&\left. \left. + M_1 x'' x' + \tilde{M}_1 y'' y' + M_4 (y'' x'' - y' x') + M_3 (x' y'' - x'' y') \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.81}$$

La fonction de transformation d'une particule chargée sous l'influence d'un potentiel oscillateur anisotrope en présence d'un champ magnétique externe constant est obtenue directement par la substitution de (2.81) dans (2.56).

2.3.4 Conclusion

Urrutia a pu, par la méthode qu'il a proposée, sillonner un autre chemin dans l'application de la méthode de Schwinger aux systèmes quadratiques, et surmonter ainsi l'obstacle qu'impose la résolution des équations opératorielle de mouvement. Avec sa technique, Urrutia a réussi à faire une première généralisation pour des systèmes quadratiques 1D dépendants du temps, et des systèmes quadratiques 3D indépendants du temps, et ayant un couplage hybride bidimensionnel (entre composantes du vecteur position et composantes du vecteur impulsion). Il a pu évaluer la fonction de transformation du système étudié par la résolution des équations différentielles numériques au lieu de la résolution de la fonction auxiliaire opératorielle liée au système.

Malgré la réalisation accomplie par Urrutia, l'application de sa technique reste limitée. Dans ses travaux, il commence toujours par le cas le plus simple pour aboutir à une généralisation. Mais le choix des formes des solutions numériques des équations différentielles n'est toujours pas justifié. Et sa démarche de comparer le résultat général au résultat particulier ne peut être considérée qu'une vérification de ce résultat et non pas une justification, et cette démarche ne peut aboutir à un résultat juste que si ce résultat est préalablement connu. Pour cette raison, dans le cas 3D, il lui a fallu choisir un système indépendant du temps, puisque la dépendance au temps rend le choix sélectif des solutions numériques appliquées par cette méthode inadéquat et impuissant.

2.4 MÉTHODE DE NASSAR

La technique d'Urrutia a montré que l'application de la méthode de Schwinger nécessite pour des cas compliqués ou dépendants du temps de suivre des parcours indirects. Nassar a suivi une méthode semi classique plus indirecte qui lui a permis d'aller à travers ses applications de la méthode de Schwinger aux systèmes quadratiques au-delà de ce qui a été réalisé avant. Cette technique consiste à utiliser une transformation spatiotemporelle appropriée qui simplifie considérablement l'évaluation de la fonction de transformation pour des systèmes dépendants du temps, obtenue par une méthode semi classique se référant au principe d'action de Schwinger. De façon générale, la fonction de transformation peut être obtenue à partir de celle d'une particule libre dans le nouveau système de coordonnées spatiotemporel.

2.4.1 Oscillateur forcé à masse dépendante du temps [50]

Le principe d'action permet d'écrire la fonction de transformation du système étudié après intégration comme

$$\langle x, t | x_0, t_0 \rangle = \langle 1 | 0 \rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W_{10}\right) \quad (2.82)$$

où W_{10} est la valeur propre de l'opérateur action bien ordonné, qu'on obtient en appliquant les propriétés de commutation entre x et x_0 . La constante d'intégration qu'on a rencontré ailleurs est, selon la méthode de Nassar, implicite dans la fonction W_{10} . La limite classique qui correspond à l'action quantique W_{10} est S , l'action classique. Dans le cas d'un oscillateur harmonique forcé à masse dépendante du temps, l'hamiltonien classique du système s'écrit comme

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2} m(t) \omega^2(t) x^2 - F(t)x \quad (2.83)$$

où

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} \quad (2.84)$$

est l'impulsion classique ou le moment canonique. L'action CLASSIQUE est définie comme

$$S = \int_{t_0}^t L dt \quad (2.85)$$

et dans ce cas

$$L = \frac{1}{2} m(t) (\dot{x}^2 - \omega^2(t) x^2) + F(t)x \quad (2.86)$$

est le lagrangien classique lié au système étudié. Sachant que l'action classique obéit au principe de moindre action, en la faisant varier, on obtient

$$\ddot{x} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (2.87)$$

Ensuite, on utilise la transformation spatiotemporelle suivante

$$r(\tau) = \frac{x(t)}{s(t)} + a(t) \quad (2.88)$$

$$\tau - \tau_0 = \int_{t_0}^t \mu(t) dt \quad (2.89)$$

Par la substitution de (2.88) et (2.89) dans (2.87), on veut aboutir à

$$r'' = 0 \quad (2.90)$$

avec $r'' = d^2 r / d\tau^2$. Pour la simplification, on va adopter cette notation de dérivation uniquement dans cette partie. Les conditions imposées sont donc

$$2\dot{s}\mu + s\dot{\mu} + \frac{\dot{m}}{m} s\mu = 0 \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{1}{ms^2} \quad (2.91)$$

$$\ddot{s} + \dot{s} \frac{\dot{m}}{m} + \omega^2 s = 0 \quad (2.92)$$

et

$$\ddot{a} + \left(2 \frac{\dot{s}}{s} + \frac{\dot{m}}{m} \right) \dot{a} + \frac{F}{ms} = 0 \quad (2.93)$$

En multipliant l'équation (2.90) par $r' = dr/d\tau$, et intégrant ensuite, on obtient l'invariant du nouveau système de coordonnées spatiotemporel

$$\bar{L} = \frac{1}{2} r'^2 \quad (2.94)$$

qui est le lagrangien du système dans la nouvelle représentation r . En définissant

$$\pi = \frac{\partial \bar{L}}{\partial r'} \quad (2.95)$$

le moment canonique dans le nouveau système de coordonnées, l'hamiltonien correspondant prend, selon (2.94), la forme

$$I = \frac{1}{2} \pi^2 \quad (2.96)$$

Du fait que les équations (2.87) et (2.90) sont équivalentes, les variations des actions S et \bar{S} sont équivalentes aussi, ce qui signifie qu'elles diffèrent l'une de l'autre d'un terme additif qui dépend uniquement des points limites

$$S = \bar{S} + [G(x, t) - G(x_0, t_0)] \quad (2.97)$$

La relation (2.85) est toujours applicable dans le nouveau système de coordonnées, d'où

$$\bar{S} = \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{L} d\tau = \frac{1}{2} \frac{(r - r_0)^2}{\tau - \tau_0} \quad (2.98)$$

L'expression (2.97) appliquée au lagrangien, aboutit enfin après différentiation à l'expression de S qui s'écrit alors dans l'ancien système de coordonnées

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \frac{(r - r_0)^2}{\tau - \tau_0} + \left(\frac{m\dot{s}}{2s} x^2 - \frac{m_0\dot{s}_0}{2s_0} x_0^2 \right) - ms\dot{a}x + m_0s_0\dot{a}_0x_0 - \int_{t_0}^t f(t)dt \\ &= (2\Lambda)^{-1} \left(\frac{x}{s} - a - \frac{x_0}{s_0} + a_0 \right)^2 + \left(\frac{m\dot{s}}{2s} x^2 - \frac{m_0\dot{s}_0}{2s_0} x_0^2 \right) - ms\dot{a}x + m_0s_0\dot{a}_0x_0 - \int_{t_0}^t f(t)dt \end{aligned} \quad (2.99)$$

avec $f(t) = m\dot{a}^2 s^2 / 2$ et $\Lambda = \tau - \tau_0 = \int_{t_0}^t dt / m(t) s^2(t)$. Revenons maintenant à l'action quantique

qui va s'écrire comme

$$W = \bar{S} + \phi(t) \quad (2.100)$$

avec \bar{S} l'action classique ordonnée de sorte que les x se trouvent toujours à gauche des x_0 , et ϕ une fonction qui dépend uniquement du temps, donc qui commute avec tous les opérateurs, et qui doit disparaître dans la limite classique. Pour évaluer cette fonction, on utilise l'équation d'Hamilton-Jacobi (1.130) qui donne

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2} m(t) \omega^2(t) x^2 - xF(t) = 0 \quad (2.101)$$

L'impulsion p est déduite de l'expression de \bar{S} comme

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \\ &= \left(\frac{m\dot{s}}{s} + (\Lambda s^2)^{-1} \right) x - (s s_0 \Lambda)^{-1} x_0 - ms\dot{a} + (a - a_0)(s\Lambda)^{-1} \end{aligned} \quad (2.102)$$

qui permet d'obtenir le commutateur

$$[x_0, x] = i\hbar \Lambda s s_0 \quad (2.103)$$

La substitution des expressions (2.100), (2.102), et (2.103) dans (2.101), permet à l'aide des équations (2.93) et (2.92) de trouver après intégration

$$\phi(t) = \frac{1}{2} i \hbar \ln(Cs(\tau - \tau_0)) \quad (2.104)$$

où C est la constante d'intégration. Avec (2.82) et (2.100) en plus de la condition de normalisation, on trouve la fonction de transformation du système étudié

$$\begin{aligned} \langle x, t | x_0, t_0 \rangle &= \langle r, \tau | r_0, \tau_0 \rangle_{PL} (ss_0)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\left(\frac{m\dot{s}}{2s} x^2 - \frac{m_0\dot{s}_0}{2s_0} x_0^2 \right) - ms\dot{a}x + m_0s_0\dot{a}_0x_0 - \int_{t_0}^t f(t) dt \right)\right) \end{aligned} \quad (2.105)$$

avec

$$\langle r, \tau | r_0, \tau_0 \rangle_{PL} = \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar (\tau - \tau_0)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{(r - r_0)^2}{2(\tau - \tau_0)}\right) \quad (2.106)$$

la fonction de transformation d'une particule libre à masse égale à l'unité décrite dans la représentation r .

2.4.2 Oscillateur harmonique 3D dépendant du temps [51]

Le système étudié dans ce paragraphe est celui d'un Oscillateur harmonique 3D chargé dépendant du temps dans un champ magnétique et un champ laser variables. Comme dans le paragraphe précédent, on va commencer par l'action classique S du système. Le lagrangien classique du système s'écrit en fonction du vecteur position \mathbf{x} comme

$$L = \frac{1}{2} m(t) \dot{\mathbf{x}}^2 - eV(\mathbf{x}, t) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (2.107)$$

qui décrit une particule chargée de masse dépendante du temps se mouvant dans un potentiel scalaire harmonique

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2e} m(t) \omega^2(t) \mathbf{x}^2 \quad (2.108)$$

et un potentiel vecteur composé de deux parties, la première associée à un champ magnétique \mathbf{B} suivant la direction x_3 (qu'on peut noter x_{\parallel}) et l'autre au champ laser

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_B(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_L(\mathbf{x}, t) \quad (2.109)$$

avec

$$\mathbf{A}_B(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{1}{2}B(t)y, \frac{1}{2}B(t)x, 0 \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \mathbf{A}_3(t)) \quad (2.110)$$

Selon le lagrangien lié au système étudié, la variation de l'action classique produit les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{\dot{m}}{m}\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \omega_c \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\dot{\omega}_c + \omega_c \frac{\dot{m}}{m} \right) x_2 + e_1 \\ \ddot{x}_2 + \frac{\dot{m}}{m}\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= -\omega_c \dot{x}_1 - \frac{1}{2} \left(\dot{\omega}_c + \omega_c \frac{\dot{m}}{m} \right) x_1 + e_2 \\ \ddot{x}_3 + \frac{\dot{m}}{m}\dot{x}_3 + \omega^2 x_3 &= e_3 \end{aligned} \quad (2.111)$$

où $\omega_c = eB(t)/m(t)c$ est la fréquence cyclotron, et $e_i = e\dot{A}_i/mc$. Avec ces équations différentielles le problème devient difficile et le rendre soluble, on introduit une transformation spatiotemporelle constituée d'une rotation et d'une translation

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{\perp}(t) \cos \theta(t) & \rho_{\perp}(t) \sin \theta(t) & 0 \\ -\rho_{\perp}(t) \sin \theta(t) & \rho_{\perp}(t) \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{\parallel}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\tau_{\perp}) \\ y_2(\tau_{\perp}) \\ y_3(\tau_{\parallel}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

avec

$$d\tau_{\parallel} = \mu_{\parallel}(t)dt \quad \text{et} \quad d\tau_{\perp} = \mu_{\perp}(t)dt \quad (2.113)$$

Pour que la substitution de (2.112) et (2.113) dans (2.111) aboutisse à

$$\begin{aligned} y_1(\tau_{\perp}) &= 0 \\ y_2(\tau_{\perp}) &= 0 \\ y_3(\tau_{\parallel}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.114)$$

les conditions suivantes doivent être vérifiées

$$\begin{aligned}\mu_{\perp} &= \frac{1}{m \rho_{\perp}^2} \\ \mu_{\parallel} &= \frac{1}{m \rho_{\parallel}^2}\end{aligned}\tag{2.115}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_c}{2}\tag{2.116}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}_{\perp} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\rho}_{\perp} + (\omega^2 + \omega_c^2/4) \rho_{\perp} &= 0 \\ \ddot{\rho}_{\parallel} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\rho}_{\parallel} + \omega^2 \rho_{\parallel} &= 0\end{aligned}\tag{2.117}$$

et

$$\begin{aligned}\ddot{s}_1 + (\dot{m}/m) \dot{s}_1 + \omega^2 s_1 - \omega_c \dot{s}_2 - (1/2)((\dot{m}/m) \omega_c + \dot{\omega}_c) s_2 &= e_1 \\ \ddot{s}_2 + (\dot{m}/m) \dot{s}_2 + \omega^2 s_2 + \omega_c \dot{s}_1 + (1/2)((\dot{m}/m) \omega_c + \dot{\omega}_c) s_1 &= e_2 \\ \ddot{s}_3 + (\dot{m}/m) \dot{s}_3 + \omega^2 s_3 &= e_3\end{aligned}\tag{2.118}$$

L'action classique qui correspond au système d'équations (2.114) prend la forme

$$\bar{S} = \left((y_1 - y_{01})^2 + (y_2 - y_{02})^2 \right) / 2 (\tau_{\perp} - \tau_{\perp 0}) + \left((y_3 - y_{03})^2 \right) / 2 (\tau_{\parallel} - \tau_{\parallel 0})\tag{2.119}$$

Le lagrangien du système dans la nouvelle représentation est

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \bar{L}_{\perp} + \bar{L}_{\parallel} \quad \text{avec} \\ \bar{L}_{\perp} &= (1/2) \left((y'_1 - y'_{01})^2 + (y'_2 - y'_{02})^2 \right) \quad \text{et} \quad \bar{L}_{\parallel} = (1/2) \left((y'_3 - y'_{03})^2 \right)\end{aligned}\tag{2.120}$$

L'équivalence des systèmes d'équations différentielles (2.112) et (2.113) permet d'établir la relation suivante

$$S = \bar{S} + [G(\mathbf{x}, t) - G(\mathbf{x}_0, t_0)]\tag{2.121}$$

où la fonction G est une fonction qui dépend uniquement des points final et initial. En suivant une démarche similaire à celle du paragraphe précédent, pour définir G , on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta G &= G(\mathbf{x}, t) - G(\mathbf{x}_0, t_0) \\
&= \left[(m\dot{\rho}_\perp / 2\rho_\perp)(x_1^2 + x_2^2) + (m\dot{\rho}_\parallel / 2\rho_\parallel)x_3^2 + m\rho_\perp x_1 d(s_1/\rho_\perp)/dt \right. \\
&\quad \left. + m\rho_\perp x_2 d(s_2/\rho_\perp)/dt + m\rho_\parallel x_3 d(s_3/\rho_\parallel)/dt + (m\omega_c/2)(x_2 s_1 - x_1 s_2) \right] \\
&\quad - \left[(m_0\dot{\rho}_{\perp 0} / 2\rho_{\perp 0})(x_{01}^2 + x_{02}^2) + (m_0\dot{\rho}_{\parallel 0} / 2\rho_{\parallel 0})x_{03}^2 + m_0\rho_{\perp 0} x_{01} d(s_{01}/\rho_{\perp 0})/dt \right. \\
&\quad \left. + m_0\rho_{\perp 0} x_{02} d(s_{02}/\rho_{\perp 0})/dt + m_0\rho_{\parallel 0} x_{03} d(s_{03}/\rho_{\parallel 0})/dt + (m_0\omega_{c0}/2)(x_{02}s_{01} - x_{01}s_{02}) \right] \\
&\quad - \int_{t_0}^t F(t) dt
\end{aligned} \tag{2.122}$$

où

$$\begin{aligned}
F(t) &= (m/2)\rho_\perp^2 \left(d(s_1/\rho_\perp)/dt \right)^2 + \rho_\perp^2 \left(d(s_2/\rho_\perp)/dt \right)^2 + \rho_\parallel^2 \left(d(s_3/\rho_\parallel)/dt \right)^2 \\
&\quad + (\omega_c^2/4)(s_1^2 + s_2^2) + \omega_c(s_1\dot{s}_2 - \dot{s}_1 s_2)
\end{aligned} \tag{2.123}$$

En revenant à l'action quantique $W = \bar{S} + \phi(t)$, on fini par trouver la fonction de transformation du système

$$\langle \mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}_0, t_0 \rangle = \Lambda \langle \mathbf{y}, \tau_\perp, \tau_\parallel \mid \mathbf{y}_0, \tau_{\perp 0}, \tau_{\parallel 0} \rangle_{PL} \tag{2.124}$$

avec

$$\Lambda = (\rho_\perp^2 \rho_{\perp 0}^2 \rho_\parallel^2 \rho_{\parallel 0}^2)^{1/2} \exp(i \Delta G / \hbar) \tag{2.125}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{y}, \tau_\perp, \tau_\parallel \mid \mathbf{y}_0, \tau_{\perp 0}, \tau_{\parallel 0} \rangle_{PL} &= \left((2\pi i \hbar)^3 (\tau_\perp - \tau_{\perp 0})^2 (\tau_\parallel - \tau_{\parallel 0}) \right)^{-1/2} \\
&\times \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left((y_1 - y_{01})^2 + (y_2 - y_{02})^2 \right) / 2 (\tau_\perp - \tau_{\perp 0}) + (y_3 - y_{03})^2 / 2 (\tau_\parallel - \tau_{\parallel 0}) \right)
\end{aligned} \tag{2.126}$$

la fonction de transformation pour une particule libre à masse égale à l'unité décrite dans le nouveau système spatiotemporel.

2.4.3 Conclusion

Par la technique qu'il a suivie, Nassar a fait un grand pas dans l'évaluation exacte de la fonction de transformation. Par le moyen de transformations spatio-temporelles, il a réussi à transformer le problème en celui d'une particule libre, et il a pu ainsi franchir des pistes qui étaient inaccessibles par la méthode de Schwinger. Il a réussi à évaluer les fonctions de transformations pour des systèmes 1D et 3D couplés dépendants du temps.

Cependant, cette technique demeure une technique semi-classique qui se base essentiellement sur une analyse fonctionnelle classique plutôt qu'opératoire quantique. De plus, l'utilisation directe des résultats obtenus est un peu compliquée. Il est à noter que cette technique n'a donné ni de valeur ni d'utilité à la méthode de Schwinger.

CHAPITRE III

GENERALISATION AUX SYSTEMES 1D DEPENDANTS DU TEMPS

3.1	Introduction	65
3.2	Système Général Dépendant du Temps	66
3.3	Systeme 1D dépendant du temps sans termes linéaires	73
3.4	L'oscillateur harmonique amorti forcé	80
3.5	Conclusion	85

3.1 INTRODUCTION

Il y a bien longtemps, Hertz était le premier à avoir pensé qu'il est possible d'éliminer le potentiel de la description du mouvement d'un système mécanique classique et le décrire par un lagrangien impliquant seulement une énergie du type cinématique, par le moyen d'une transformation appropriée des coordonnées. Aujourd'hui, il existe en mécanique classique deux approches utilisées pour l'intégration des équations de mouvement, la première par la résolution directe des équations du second ordre et la deuxième par l'élimination d'une des variables conjuguées en utilisant les transformations canoniques [97]. En raison de la nature opératoire des variables dynamiques quantiques et pour la non-commutativité qui en résulte, les transformations canoniques classiques, utilisées pour l'intégration des équations du mouvement [98], n'ont pas pu être étendues au domaine quantique [99] et l'efficacité des transformations canoniques qui sont un outil puissant en mécanique classique n'a pas été complètement réalisée en mécanique quantique.

Bien que les transformations canoniques ne soient pas encore devenues une technique populaire à résoudre des modèles quantiques, beaucoup de progrès ont été accomplis dans les dernières trois décennies [108-117]. Par exemple, Moshinsky, Seligman et Wolf ont converti le potentiel radial coulombien en un oscillateur harmonique via des transformations canoniques [110]. Leyvraz et Seligman ont réduit les hamiltoniens en $H(j)$ par le moyen des transformations canoniques [111]. De sa part, Anderson a montré que tous les systèmes qui peuvent être résolus par la méthode « intertwining » peuvent également être résolus par des transformations canoniques [112].

Un des objectifs du développement des transformations canoniques classiques est de transformer les hamiltoniens de systèmes particuliers en d'autres plus simples dont les équations du mouvement peuvent être résolues. Nous bénéficierons de cet outil afin d'évaluer des fonctions de transformations des systèmes étudiés en appliquant la méthode de Schwinger. Nous allons montrer que lorsqu'on utilise une transformation canonique linéaire appropriée, nous pouvons considérablement simplifier l'évaluation de la fonction de transformation du système et la transformer en celle d'une particule libre. La forme obtenue de la fonction de transformations et les équations auxiliaires prennent les formes les plus simples possibles et les plus pratiques.

Nous allons appliquer la méthode de Schwinger pour les systèmes quadratiques unidimensionnels (1D) généraux dépendants du temps en proposant une technique opératoire quantique qui se base sur les transformations canoniques linéaires quantiques qui nous ont permis la simplification des problèmes traités par cette méthode [54].

3.2 SYSTEME GENERAL DEPENDANT DU TEMPS

Le système général quadratique dépendant du temps a été souvent considéré pour ses diverses applications en optique quantique [113-115]. Dans cette partie, nous allons évaluer la fonction de transformation du système quadratique 1D dans le cas le plus général au moyen de transformations canoniques quantiques sans résoudre les équations d'Heisenberg de mouvement.

3.2.1 Transformation du système en particule libre

L'hamiltonien du système est donné par l'expression

$$H = g_1(t)p^2 + g_2(t)x^2 + g_3(t)xp + g_4(t)px + g_5(t)p + g_6(t)x + g_7(t) \quad (3.1)$$

où $g_i(t)$ sont des fonctions dépendantes du temps. Comme on peut le constater, le système est trop compliqué, il est donc impossible d'évaluer sa fonction de transformation par des méthodes directes qui nécessitent la résolution d'équations différentielles opératoires. Les fonctions $g_i(t)$ sont arbitraires ; la résolution exacte exige généralement la connaissance préalable de ces fonctions. Pour cette raison, nous n'allons pas appliquer le principe d'action quantique à ce système de coordonnées mais à un autre système où l'hamiltonien peut prendre une expression plus simple. Cependant, dans la méthode de Schwinger, il est nécessaire de connaître la variation de l'action exprimée dans le nouveau système de coordonnées afin de pouvoir l'utiliser en appliquant le principe d'action quantique qui sert à déterminer la fonction de transformation du système. Cette variation s'écrit dans la représentation x comme

$$\delta W = p'' \delta x'' - p' \delta x' - H'' \delta t'' + H' \delta t' \quad (3.2)$$

où H est l'hamiltonien du système et x' et x'' sont respectivement les coordonnées initiale et finale qui correspondent respectivement aux instants initial et final t' et t'' . Considérons maintenant la transformation canonique suivante

$$\begin{cases} x = (2mg_1)^{1/2} f_1(t)X + f_2(t) \\ p = \frac{P}{(2mg_1)^{1/2} f_1(t)} + f_3(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $f_i(t)$ une fonction arbitraire qui dépend du temps et m la masse de la particule. Les équations (1.127) nous permettent de trouver les fonctions génératrices suivantes de la transformation canonique

$$\begin{cases} F_2 = \frac{(xP + Px)}{2(2mg_1)^{1/2} f_1(t)} + f_3(t)x - \frac{f_2(t)P}{(2mg_1)^{1/2} f_1(t)} \\ = \frac{1}{2}(XP + PX) + (2mg_1)^{1/2} f_3(t)f_1(t)X + f_3(t)f_2(t) \\ F_1 = (2mg_1)^{1/2} f_3(t)f_1(t)X + f_3(t)f_2(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

Par conséquent, l'hamiltonien devient après avoir utilisé (1.127)

$$\begin{aligned} \hat{H}(P, X, t) = & \frac{P^2}{2mf_1^2} + 2mg_1g_2f_1^2X^2 + \frac{1}{2} \left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1} \right) (PX + XP) \\ & + \frac{(2g_1f_3 + g_3f_2 + g_4f_2 + g_5 - \dot{f}_2)}{(2mg_1f_1^2)^{1/2}} P + (2mg_1f_1^2)^{1/2} (2g_2f_2 + g_3f_3 + g_4f_3 + g_6 + \dot{f}_3) X \\ & + g_1f_3^2 + g_2f_2^2 + g_3f_2f_3 + g_4f_2f_3 + g_5f_3 + g_6f_2 + g_7 + f_2\dot{f}_3 + \frac{i\hbar}{2}(g_3 - g_4) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\dot{f}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t}$. Pour éliminer les termes linéaires dans ce nouvel hamiltonien, nous allons

annuler leurs coefficients c'est-à-dire résoudre le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \dot{f}_2 - f_2(g_3 + g_4) - 2g_1 f_3 = g_5 \\ \dot{f}_3 + 2g_2 f_2 + f_3(g_3 + g_4) = -g_6 \end{cases} \quad (3.6)$$

dont la solution dépend des fonctions $g_i(t)$. En conséquence, après avoir utilisé (1.119) pour réécrire la variation de l'opérateur action (3.2) dans la nouvelle représentation, nous obtenons

$$\begin{cases} \widehat{H}(P, X, t) = \frac{P^2}{2mf_1^2} + 2mg_1g_2f_1^2X^2 + \frac{1}{2}\left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1}\right)(PX + XP) + \Gamma(t) \\ \delta W = P''\delta X'' - \widehat{H}''\delta t'' - P'\delta X' + \widehat{H}'\delta t' + \delta(F_1'' - F_1') \\ = P''\delta X'' - \widehat{H}''\delta t'' - P'\delta X' + \widehat{H}'\delta t' + \delta\left[(2mg_1'')^{1/2}f_1''f_3''X'' + f_2''f_3'' \right. \\ \left. - (2mg_1')^{1/2}f_1'f_3'X' - f_2'f_3'\right] \end{cases} \quad (3.7)$$

et

$$\Gamma(t) = g_1f_3^2 + g_2f_2^2 + (g_3 + g_4)f_2f_3 + g_5f_3 + g_6f_2 + g_7 + f_2\dot{f}_3 + \frac{i\hbar}{2}(g_3 - g_4) \quad (3.8)$$

Maintenant, nous allons introduire la transformation canonique suivante

$$\begin{cases} X = X \\ \widetilde{P} = P + mf_1^2\left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1}\right)X \end{cases} \quad (3.9)$$

En considérant (1.127), les fonctions génératrices pour cette transformation sont

$$\begin{cases} \widehat{F}_2 = \frac{1}{2}(X\widetilde{P} + \widetilde{P}X) - \frac{1}{2}mf_1^2\left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1}\right)X^2 \\ \widehat{F}_1 = -\frac{1}{2}mf_1^2\left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1}\right)X^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous alors obtenons l'hamiltonien suivant en revenant toujours à (1.127)

$$\tilde{H}(\tilde{P}, X, t) = \frac{\tilde{P}^2}{2mf_1^2} + \frac{m}{2f_1^2} \Omega^2(t) X^2 + \Gamma(t) \quad (3.11)$$

où

$$\Omega^2(t) = f_1^3 \left(\ddot{f}_1 + f_1 \left(\frac{\ddot{g}_1}{2g_1} - \frac{3\dot{g}_1^2}{4g_1^2} + 4g_2g_1 - (g_3 + g_4)^2 - (\dot{g}_3 + \dot{g}_4) + \frac{\dot{g}_1}{g_1} (g_3 + g_4) \right) \right) \quad (3.12)$$

Maintenant, nous effectuons la transformation temporelle suivante

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{f_1^2} \quad (3.13)$$

où nous écrivons l'hamiltonien comme

$$H(\tilde{P}, X, \tau) = f_1^2 \tilde{H}(\tilde{P}, X, t) \quad (3.14)$$

Enfin, l'hamiltonien prend la forme

$$H = \frac{\tilde{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 X^2 + f_1^2 \Gamma \quad (3.15)$$

et la variation de l'opérateur action est exprimée dans la nouvelle représentation selon (1.119)

tel que

$$\begin{aligned} \delta W &= \tilde{P}'' \delta X'' - H'' \delta \tau'' - \tilde{P}' \delta X' + H' \delta \tau' + \delta(F_1'' - F_1' + \hat{F}_1'' - \hat{F}_1') \\ &= \tilde{P}'' \delta X'' - H'' \delta \tau'' - \tilde{P}' \delta X' + H' \delta \tau' + \delta \left[(2mg_1'')^{1/2} f_1'' f_3'' X'' + f_2'' f_3'' \right. \\ &\quad \left. - (2mg_1')^{1/2} f_1' f_3' X' - f_2' f_3' - \frac{mf_1''}{2} \left(f_1'' \left((g_3'' + g_4'') - \frac{\dot{g}_1''}{2g_1''} \right) - \dot{f}_1'' \right) X''^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{mf_1'}{2} \left(f_1' \left((g_3' + g_4') - \frac{\dot{g}_1'}{2g_1'} \right) - \dot{f}_1' \right) X'^2 \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considérons que $\Omega(t) = 0$ en (3.12), c'est à dire résoudre l'équation différentielle homogène du second degré suivante

$$\ddot{f}_1 + \zeta(t) f_1 = 0 \quad (3.17)$$

où

$$\zeta(t) = \frac{\ddot{g}_1}{2g_1} - \frac{3\dot{g}_1^2}{4g_1^2} + 4g_2g_1 - (g_3 + g_4)^2 - (\dot{g}_3 + \dot{g}_4) + \frac{\dot{g}_1}{g_1}(g_3 + g_4) \quad (3.18)$$

Il est évident que la solution de cette équation dépend des expressions des coefficients $g_i(t)$, c'est-à-dire de la nature du système étudié. Nous obtenons l'hamiltonien d'une particule libre avec un terme additif dépendant du temps

$$H = H_0 + f_1^2 \Gamma \quad \text{et} \quad H_0 = \frac{\tilde{P}^2}{2m} \quad (3.19)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire la variation de l'opérateur action comme

$$\begin{aligned} \delta W = & \tilde{P}'' \delta X'' - H_0'' \delta \tau'' - \tilde{P}' \delta X' + H_0' \delta \tau' + \delta \left[(2mg_1'')^{1/2} f_1'' f_3'' X'' + f_2'' f_3'' \right. \\ & - (2mg_1')^{1/2} f_1' f_3' X' - f_2' f_3' - \frac{mf_1''}{2} \left(f_1'' \left((g_3'' + g_4'') - \frac{\dot{g}_1''}{2g_1''} \right) - f_1'' \right) X'' \\ & \left. + \frac{mf_1'}{2} \left(f_1' \left((g_3' + g_4') - \frac{\dot{g}_1'}{2g_1'} \right) - f_1' \right) X' - \Lambda \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

où $\Lambda = \int_{\tau'}^{\tau''} f_1^2 \Gamma d\tau = \int_{t'}^{t''} \Gamma dt$ et Γ vérifie (3.8).

3.2.2 Evaluation de la fonction de transformation

Maintenant que la variation de l'action du système étudié est connue dans le nouveau système de coordonnées, nous allons appliquer le principe d'action quantique

$$\delta \langle X'', \tau'' | X', \tau' \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle X'', \tau'' | \delta W | X', \tau' \rangle \quad (3.21)$$

Nous nous sommes servis des propriétés de commutation entre X'' et X' pour réarranger la variation de l'opérateur δW de telle sorte que la coordonnée X'' soit à la gauche de X' , afin d'obtenir la variation de l'opérateur action bien ordonnée dans le nouveau système de coordonnées ce qui permet d'écrire

$$\delta \langle X'', \tau'' | X', \tau' \rangle = \frac{i}{\hbar} \delta W (X'', X', \tau'', \tau') \langle X'', \tau'' | X', \tau' \rangle \quad (3.22)$$

$\delta W (X'', X', \tau'', \tau')$ ici est la valeur propre de la variation de l'opérateur action bien ordonnée. L'équation (3.20) nous permet d'écrire la fonction de transformation du système immédiatement au moyen de la fonction de transformation de la particule libre après intégration de (3.22)

$$\begin{aligned} \langle X'', \tau'' | X', \tau' \rangle = A \langle X'', \tau'' | X', \tau' \rangle_{FP} \exp \frac{i}{\hbar} \left[(2mg_1'')^{1/2} f_1'' f_3'' X'' + f_2'' f_3'' \right. \\ \left. - (2mg_1')^{1/2} f_1' f_3' X' - f_2' f_3' - \frac{mf_1''}{2} \left(f_1'' \left((g_3'' + g_4'') - \frac{\dot{g}_1''}{2g_1''} \right) - \dot{f}_1'' \right) X''^2 \right. \\ \left. + \frac{mf_1'}{2} \left(f_1' \left((g_3' + g_4') - \frac{\dot{g}_1'}{2g_1'} \right) - \dot{f}_1' \right) X'^2 - \Lambda \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$\langle X'', \tau'' | X', \tau' \rangle_{FP}$ est la fonction de transformation bien connue de la particule libre

$$\langle X'', \tau'' | X', \tau' \rangle_{FP} = \left(\frac{2\pi i \hbar (\tau'' - \tau')}{m} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{im}{2\hbar} \frac{(X'' - X')^2}{(\tau'' - \tau')} \right) \quad (3.24)$$

En utilisant la transformation canonique (3.3) et la transformation temporelle (3.13) qui mène à

$$\tau'' - \tau' = \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2} \quad (3.25)$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & A \left(\frac{2\pi}{m} i \hbar \int_{t', f_1'}^{t'', f_1''} dt \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\frac{(x'' - f_2'')}{g_1''/2 f_1''} - \frac{(x' - f_2')}{g_1'/2 f_1'} \right)^2 \bigg/ \int_{t', f_1'}^{t'', f_1''} \frac{dt}{f_1^2} \right) \\
 & \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(f_3'' x'' - f_3' x' - \frac{(x'' - f_2'')^2}{8g_1''} \left(2_1(g_3'' + g_4'') - \frac{\dot{g}_1''}{g_1''} - \frac{2f_1''}{f_1''} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(x' - f_2')^2}{8g_1'} \left(2_1(g_3' + g_4') - \frac{\dot{g}_1'}{g_1'} - \frac{2f_1'}{f_1'} \right) - \Lambda \right) \right)
 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Après avoir utilisé l'expression

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} (\varepsilon \pi)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(x'' - x')^2}{\varepsilon} \right) = \delta(x'' - x') \\
 \varepsilon \longrightarrow 0
 \end{aligned} \quad (3.27)$$

et les propriétés de la fonction delta, la condition de normalisation

$$\begin{aligned}
 \lim_{t'' \longrightarrow t'} \langle x'', t'' | x', t' \rangle = \delta(x'' - x') \\
 t'' \longrightarrow t'
 \end{aligned} \quad (3.28)$$

nous permet de calculer le coefficient A . Nous obtenons finalement la fonction de transformation du système

$$\begin{aligned}
 \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(4\pi i \hbar g_1''^{1/2} g_1'^{1/2} f_1'' f_1' \int_{t', f_1'}^{t'', f_1''} \frac{dt}{f_1^2} \right)^{-1/2} \\
 & \times \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\left(\frac{(x'' - f_2'')}{g_1''/2 f_1''} - \frac{(x' - f_2')}{g_1'/2 f_1'} \right)^2 \bigg/ \int_{t', f_1'}^{t'', f_1''} \frac{dt}{f_1^2} + 4(f_3'' x'' - f_3' x' \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(x'' - f_2'')^2}{8g_1''} \left(2_1(g_3'' + g_4'') - \frac{\dot{g}_1''}{g_1''} - \frac{2f_1''}{f_1''} \right) + \frac{(x' - f_2')^2}{8g_1'} \left(2_1(g_3' + g_4') - \frac{\dot{g}_1'}{g_1'} - \frac{2f_1'}{f_1'} \right) - \Lambda \right) \right)
 \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $\Lambda = \int_{t'}^{t''} \Gamma dt$, Γ satisfait (3.8) et les fonctions $f_i(t)$ sont les solutions des équations différentielles (3.17) et (3.6). L'équation (3.29) représente la fonction de transformation exacte du système quadratique 1D général dépendant du temps déterminé par l'hamiltonien

(3.1). Les termes indépendants des coordonnées résultent du commutateur et fournissent les véritables contributions quantiques au calcul. Cette fonction de transformation qui est évaluée pour la première fois pour ce type de systèmes par la méthode de Schwinger, constitue le résultat principal de ce chapitre. Les systèmes: particule libre, oscillateur harmonique, oscillateur harmonique amorti, oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante du temps, oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps, oscillateur harmonique forcé, oscillateur harmonique amorti forcé... sont inclus dans ce système général.

3.3 SYSTEME 1D DEPENDANT DU TEMPS SANS TERMES LINEAIRES

3.3.1 La fonction de transformation du système

On considère le cas du système quadratique 1D dépendant du temps sans termes linéaires

$$H = g_1(t)p^2 + g_2(t)x^2 + g_3(t)xp + g_4(t)px \quad (3.30)$$

C'est-à-dire dans l'hamiltonien (3. 1) nous prenons

$$g_5(t) = g_6(t) = g_7(t) = 0 \quad (3.31)$$

La fonction de transformation pour ce système peut être évaluée directement à partir de l'expression (3.29) et comme les fonctions $f_2(t)$ et $f_3(t)$ dans la transformation canonique (3.3) sont utilisées juste pour éliminer les termes linéaires, il devient inutile de résoudre le système d'équations différentielles (3.6). Dans ce cas, nous effectuerons la transformation canonique suivante

$$\begin{cases} x = (2mg_1)^{1/2} f_1(t) X \\ P = \frac{P}{(2mg_1)^{1/2} f_1(t)} \end{cases} \quad (3.32)$$

en considérant

$$f_2(t) = f_3(t) = 0 \quad (3.33)$$

Il en résulte l'annihilation de ces fonctions de la fonction de transformation (3.29) qui est alors exprimée comme

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(4\pi i \hbar g_1'^{1/2} g_1''^{1/2} f_1'' f_1' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\frac{x''}{g_1''^{1/2} f_1''} - \frac{x'}{g_1'^{1/2} f_1'} \right)^2 \left/ \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2} \right. \right) \times \\ & \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{x''^2}{8g_1''} \left(2_1(g_3'' + g_4'') - \frac{\dot{g}_1''}{g_1''} - \frac{2f_1''}{f_1''} \right) + \frac{x'^2}{8g_1'} \left(2(g_3' + g_4') - \frac{\dot{g}_1'}{g_1'} - \frac{2f_1'}{f_1'} \right) - \int_{t'}^{t''} \frac{i\hbar(g_3 - g_4)}{2} dt \right) \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

où $f_1(t)$ est la solution de l'équation différentielle (3.17). Il est important et utile pour les applications que nous allons faire ultérieurement de noter que la solution de la fonction de transformation (3.29, 3.34) dépend de la solubilité des équations différentielles (3.6, 3.17) qui sont linéaires. Leurs solutions générales sont des combinaisons de solutions indépendantes relatives aux constantes arbitraires d'intégration. On remarque que la fonction de transformation du système physique est indépendante du choix arbitraire de ces constantes puisque la seule condition exigée à ces solutions est qu'elles doivent éliminer les termes linéaires et les termes quadratiques dans l'hamiltonien afin de le transformer en celui de la particule libre c'est-à-dire de vérifier les équations différentielles.

3.3.2 Cas particuliers

A. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE SIMPLE

On peut vérifier l'efficacité et la validité de la méthode que nous avons proposée pour déterminer la fonction de transformation du système étudié en appliquant la méthode de Schwinger via les transformations canoniques dans le cas d'un oscillateur harmonique simple avec une fréquence constante ω , la fonction de transformation duquel est bien connue. L'opérateur hamiltonien du système prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (3.35)$$

De ce fait, les fonctions $g_i(t)$ prennent les valeurs suivantes

$$g_1(t) = \frac{1}{2m}, \quad g_2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2, \quad g_3(t) = g_4(t) = 0 \quad (3.36)$$

Maintenant nous devons sélectionner la fonction appropriée dépendante du temps pour l'employer dans une transformation canonique. Revenons à l'équation différentielle (3.17) qui devient dans notre cas une équation homogène du second ordre avec un coefficient constant

$$\ddot{f}_1 + \omega^2 f_1 = 0 \quad (3.37)$$

La solution de cette équation est : $f_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$; mais comme la fonction de transformation est indépendante du choix des constantes arbitraires, en d'autres termes toutes les solutions sont équivalentes, nous n'allons pas compliquer les calculs et nous allons choisir la solution la plus simple $f_1 = \cos \omega t$. Nous la substituons directement dans l'expression (3.34) et nous obtenons la fonction de transformation d'un oscillateur harmonique simple prenant en effet sa forme connue

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \left[\frac{2\pi i \hbar \sin \omega (t'' - t')}{m \omega} \right]^{-1/2} \\ &\times \exp \left[\frac{i m \omega}{2\hbar} \cot [\omega (t'' - t')] \left(x''^2 + x'^2 - \frac{2 x'' x'}{\cos \omega (t'' - t')} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

B. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE AVEC UNE FREQUENCE QUI DEPEND DU TEMPS

Dans cette section, nous allons évaluer la fonction de transformation d'un oscillateur harmonique avec une fréquence qui dépend du temps au moyen des transformations canoniques quantiques. L'opérateur hamiltonien du système est donné par l'expression

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) x^2 \quad (3.39)$$

avec $\omega(t)$ une fréquence dépendant du temps. Dans ce cas ci, les fonctions $g_i(t)$ sont écrites comme

$$g_1(t) = \frac{1}{2m}, \quad g_2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2(t), \quad g_3(t) = g_4(t) = 0 \quad (3.40)$$

Quand nous substituons ces fonctions dans l'équation (3.17) nous obtenons

$$\ddot{f}_1 + \omega^2(t) f_1 = 0 \quad (3.41)$$

La solution de cette équation dépend de l'expression de la fréquence $\omega(t)$. Dans ce cas, la fonction de transformation de l'oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante du temps est exprimée comme

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{2\pi i \hbar}{m} f_1'' f_1' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2} \right)^{-1/2} \\ & \times \exp \left(\frac{im}{2\hbar} \left(\left(\frac{x''}{f_1''} - \frac{x'}{f_1'} \right)^2 \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2} + \frac{f_1''}{f_1'} x''^2 - \frac{f_1'}{f_1} x'^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Lorsque nous considérons dans (3.12) $\Omega(t) = f_1^3 (\ddot{f}_1 + \omega^2(t) f_1) = \omega_0$ où ω_0 est une constante, c'est à dire transformer l'hamiltonien du système non pas en celui d'une particule libre mais en celui d'un oscillateur harmonique simple. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left[\frac{2\pi i \hbar f_1'' f_1' \sin \left(\int_{t'}^{t''} \frac{\omega_0 dt}{f_1^2} \right)}{m \omega_0} \right]^{-1/2} \\
 & \times \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \left(\omega_0 \cot \left(\int_{t'}^{t''} \frac{\omega_0 dt}{f_1^2} \right) \left(\frac{x''^2}{f_1''^2} + \frac{x'^2}{f_1'^2} - \frac{2x''x'}{f_1 f_1'' \cos \left(\int_{t'}^{t''} \frac{\omega_0 dt}{f_1^2} \right)} \right) + \frac{f_1''}{f_1'} x''^2 - \frac{f_1'}{f_1''} x'^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

qui est exactement résultat obtenu dans l'étude [53] par la méthode des intégrales de chemin pour le même système.

C. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE AVEC UNE MASSE ET UNE FREQUENCE QUI DEPENDENT DU TEMPS

Nous allons considérer l'hamiltonien suivant d'un oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps

$$H = \frac{p^2}{2m h_1(t)} + \frac{1}{2} m \omega^2 h_2(t) x^2 \tag{3.44}$$

Les fonctions $h_i(t)$ sont ici des fonctions arbitraire qui dépendent du temps, et m et ω sont, respectivement, la masse et la fréquence qui sont ici des constantes. Pour ce système, les fonctions $g_i(t)$ prennent les formes

$$g_1(t) = \frac{1}{2m h_1(t)}, \quad g_2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 h_2(t), \quad g_3(t) = g_4(t) = 0 \tag{3.45}$$

L'équation (3.17) prend alors la forme

$$\ddot{f}_1 + \left(-\frac{\dot{h}_1(t)}{2h_1(t)} + \frac{\dot{h}_1^2(t)}{4h_1^2(t)} + \omega^2 \frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right) f_1 = 0 \quad (3.46)$$

qui est plus compliquée que les précédentes. Nous rappelons la forme générale (3.34) pour écrire finalement la fonction de transformation de l'oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps tel que

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{2\pi i \hbar}{m} f_1' f_1'' h_1'^{-1/2} h_1''^{-1/2} \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2} \right)^{-1/2} \\ & \times \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\frac{h_1''^{-1/2} x'' - h_1'^{-1/2} x'}{\int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2(t)}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{f}_1''}{f_1''} - \frac{h_1''}{2h_1''} \right) h_1'' x''^2 - \left(\frac{\dot{f}_1'}{f_1'} - \frac{h_1'}{2h_1'} \right) h_1' x'^2 \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

D. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI

L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique amorti est donné par l'expression suivante

$$H = \frac{p^2}{2m \exp 2\xi(t)} + \frac{1}{2} m \omega^2 \exp 2\xi(t) x^2 \quad (3.48)$$

Nous pouvons utiliser immédiatement le résultat (3.47) lié à l'oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps, pour obtenir la fonction de transformation d'un oscillateur harmonique amorti en faisant les substitutions suivantes

$$h_1(t) = h_2(t) = \exp 2\xi(t) \quad (3.49)$$

La fonction de transformation est alors obtenue immédiatement

$$\begin{aligned}
 \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{2\pi i \hbar f_1' f_1''}{m \exp(\xi(t'') + \xi(t'))} \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2(t)} \right)^{-1/2} \\
 & \times \exp \left(\frac{im}{2\hbar} \left(\left(\frac{x'' \exp(\xi(t''))}{f_1''} - \frac{x' \exp(\xi(t'))}{f_1'} \right)^2 \right) / \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2(t)} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\dot{f}_1''}{f_1''} - \dot{\xi}(t'') \right) x''^2 \exp(2\xi(t'')) - \left(\frac{\dot{f}_1'}{f_1'} - \dot{\xi}(t') \right) x'^2 \exp(2\xi(t')) \right)
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

où la fonction f_1 est la solution de l'équation différentielle suivante

$$\ddot{f}_1 + (-\ddot{\xi}(t) - \dot{\xi}^2(t) + \omega^2) f_1 = 0 \tag{3.51}$$

E. L'OSCILLATEUR DE CALIDORA-KANAI

L'oscillateur de Calidora-Kanai [33] est un cas particulier de l'oscillateur harmonique amorti. Son hamiltonien est exprimé comme

$$H = \frac{p^2}{2m \exp(2\alpha t)} + \frac{1}{2} m \exp(2\alpha t) \omega^2 x^2 \tag{3.52}$$

Par conséquent, nous allons considérer $\xi(t)$ dans (3.50) une fonction linéaire telle que $\xi(t) = \alpha t$. Ainsi, l'équation différentielle (3.51) devient

$$\ddot{f}_1 + (\omega^2 - \alpha^2) f_1 = 0 \tag{3.53}$$

La solution la plus simple est alors

$$f = \cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t) \tag{3.54}$$

Nous la substituons dans (3.50), nous obtenons ainsi la fonction de transformation de l'oscillateur de Calidora-Kanai

$$\begin{aligned}
\langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{2\pi i \hbar \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} (t'' - t'))}{m \exp(\alpha(t'' + t')) \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \right)^{-1/2} \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \cot\left[\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} (t'' - t') \right] \times \left(x''^2 \exp(2\alpha t'') + x'^2 \exp(2\alpha t') - \frac{2x''x' \exp(\alpha(t'' + t'))}{\cos\left[\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} (t'' - t') \right]} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha (\exp(2\alpha t'') x''^2 - \exp(2\alpha t') x'^2) \right) \right) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Cette expression est parfaitement conforme au résultat obtenu dans la référence [79] en appliquant les intégrales de chemin.

3.4 L'OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI FORCÉ

3.4.1 Calcul de la fonction de transformation

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la transformation canonique linéaire à l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique amorti, forcé par une fonction arbitraire $F(t)$ qui dépend du temps

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2 x^2 - \exp(2\xi(t))F(t)x \quad (3.56)$$

où

$$m(t) = m_0 \exp(2\xi(t)) \quad (3.57)$$

et $\xi(t)$ est une fonction qui dépend du temps. Les fonctions $g_i(t)$ dans l'hamiltonien général (3.1) prennent les formes suivantes

$$\begin{aligned}
g_1(t) = \frac{1}{2m_0 \exp(2\xi(t))}, \quad g_2(t) = \frac{1}{2}m_0\omega^2 \exp(2\xi(t)), \quad g_6(t) = -\exp(2\xi(t))F(t), \\
g_3(t) = g_4(t) = g_5(t) = g_7(t) = 0 \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Le choix approprié des fonctions $f_i(t)$, solutions des équations (3.17) et (3.6), nous permettra de déterminer la transformation canonique convenable, afin de calculer la fonction

de transformation exacte de l'oscillateur harmonique amorti forcé. Dans ce cas le système (3.6) des équations différentielles prend la forme

$$\begin{cases} f_1'' + (-\ddot{\xi}(t) - \dot{\xi}^2(t) + \omega^2)f_1 = 0 \\ f_2'' + 2\dot{\xi}(t)f_2' + \omega^2 f_2 = \frac{F(t)}{m_0} \\ f_3 = m_0 \exp(2\xi(t))f_2' \end{cases} \quad (3.59)$$

La solution de ces équations différentielles dépend des fonctions $F(t)$ et $\xi(t)$. En conséquence, la fonction de transformation de l'oscillateur harmonique amorti forcé est exprimée comme

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{2\pi i \hbar f_1''}{m_0 \exp(\xi'' + \xi')} \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2(t)} \right)^{-1/2} \\ & \exp \left(\frac{im_0}{2\hbar} \left(\left(\frac{(x'' - f_2'')}{f_1'' \exp(-\xi'')} - \frac{(x' - f_2')}{f_1' \exp(-\xi')} \right)^2 \right) / \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{f_1^2(t)} + \frac{2}{m_0} (f_3'' x'' - f_3' x') \right. \\ & \left. + \left(\frac{f_1''}{f_1'} - \dot{\xi}(t'') \right) (x'' - f_2'')^2 \exp 2\xi'' - \left(\frac{f_1'}{f_1} - \dot{\xi}(t') \right) (x' - f_2')^2 \exp 2\xi' - \frac{2}{m_0} \Lambda \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

où

$$\Lambda = \int_{t'}^{t''} \left(\frac{f_3^2}{2m_0 \exp(2\xi(t))} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \exp(2\xi(t)) f_2^2 - \hbar \exp(2\xi(t)) f_2 + f_2 f_3 \right) dt \quad (3.61)$$

3.4.2 Cas particuliers

Afin de vérifier la validité et la précision du résultat ci-dessus, nous considérerons les cas suivants

A. UNE PARTICULE DANS UN CHAMP EXTERNE CONSTANT F

L'hamiltonien de la particule prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx \quad (3.62)$$

où m est une constante et $\xi(t)$ et ω en (3.56) sont nuls. En conséquence, les équations (3.59) deviennent

$$\begin{cases} \ddot{f}_1 = 0 \\ \ddot{f}_2 = \frac{F}{m} \\ f_3 = m\dot{f}_2 \end{cases} \quad (3.63)$$

d'où les solutions $f_i(t)$ suivantes

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = \frac{Ft^2}{2m} \\ f_3 = Ft \end{cases} \quad (3.64)$$

Ce qui nous permet d'obtenir la fonction de transformation dans le cas d'une particule dans un champ externe constant

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{2\pi i\hbar(t'' - t')}{m} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x'' - x')^2}{2(t'' - t')} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} F(t'' - t')(x'' + x') - \frac{F^2(t'' - t')^3}{24m} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Le même résultat a été obtenu en utilisant la méthode des intégrales de chemins [13].

B. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE SIMPLE SOUMIS A UNE FORCE EXTERNE

Lorsqu'on considère la fonction $\xi(t)$ nulle dans l'équation (3.56), nous obtenons l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique simple soumis à une force externe tel que

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - F(t)x \quad (3.66)$$

Par conséquent, les équations (3.59) sont écrites comme

$$\begin{cases} \ddot{f}_1 + \omega^2 f_1 = 0 \\ \ddot{f}_2 + \omega^2 f_2 = \frac{F(t)}{m} \\ f_3 = m\dot{f}_2 \end{cases} \quad (3.67)$$

Ainsi, les solutions $f_i(t)$ prennent les formes

$$\begin{cases} f_1 = \cos \omega t \\ f_2 = \int_{t'}^t \frac{F(s)}{m\omega} \sin \omega(t-s) ds \\ f_3 = \int_{t'}^t F(s) \cos \omega(t-s) ds \end{cases} \quad (3.68)$$

En remplaçant ces fonctions dans (3.60), cela nous permet d'obtenir la fonction de transformation dans le cas d'un oscillateur harmonique simple soumis à une force arbitraire externe comme

$$\begin{aligned}
 \langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{m \omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega T} \left(\cos \omega T (x''^2 + x'^2) - 2x''x' \right. \right. \\
 & + \frac{2x''}{m\omega} \int_{t'}^{t''} F(t) \sin \omega(t-t') dt + \frac{2x'}{m\omega} \int_{t'}^{t''} F(t) \sin \omega(t''-t) dt \\
 & \left. \left. - \frac{2}{m^2 \omega^2} \int_{t'}^{t''} \int_{t'}^t F(t) F(s) \sin \omega(t''-t) \sin \omega(s-t') ds dt \right) \right) \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

où $T = t'' - t'$. Le même résultat a été obtenu par la méthode des intégrales de chemins[13]. Nous supposons maintenant, que la fréquence est nulle: $\omega = 0$. L'hamiltonien prend alors la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} - F(t)x \quad (3.70)$$

Par conséquent, les équations différentielles (3.59) deviennent

$$\begin{cases} \ddot{f}_1 = 0 \\ \ddot{f}_2 = \frac{F(t)}{m} \\ \dot{f}_3 = m\dot{f}_2 \end{cases} \quad (3.71)$$

Les solutions suivantes vérifient ces équations

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = \int_{t'}^t \frac{F(s)}{m} (t-s) ds \\ f_3 = \int_{t'}^t F(s) ds \end{cases} \quad (3.72)$$

menant à la fonction de transformation d'une particule soumise à une force externe arbitraire

$$\begin{aligned}
\langle x'', t'' | x', t' \rangle = & \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{im}{2\hbar T} \left((x'' - x')^2 + \frac{2x''}{m} \int_{t'}^{t''} F(t)(t-t') dt \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2x'}{m} \int_{t'}^{t''} F(t)(t''-t) dt - \frac{2}{m^2} \int_{t'}^{t''} \int_{t'}^t F(t)F(s)(t''-t)(s-t') ds dt \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

On vérifie donc facilement que la fonction de transformation (3.69) tend vers l'expression (3.73) d'une particule soumise à une force externe arbitraire pour $\omega = 0$.

3.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de Schwinger, dans le cas général des systèmes quadratiques 1D dépendant du temps avec des termes linéaires via les transformations canoniques quantiques sans résoudre les équations opératoriels d'Heisenberg. Et pour la première fois, la fonction de transformation de ce type général de systèmes a été évaluée exactement par la méthode opératorielle de Schwinger.

Le résultat que nous avons obtenu a été vérifié dans les cas de l'oscillateur harmonique simple, l'oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante du temps, l'oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps, l'oscillateur harmonique amorti, l'oscillateur de Calidora-Kanai et l'oscillateur forcé. Nous avons constaté que le résultat est parfaitement conforme à ceux obtenus au moyen des intégrales de chemins.

CHAPITRE IV

**GENERALISATION AUX SYSTEMES 3D
DEPENDANTS DU TEMPS**

4.1	Introduction	87
4.2	Système 3D General Dépendant du Temps	87
4.3	Système 3D ayant trois différents couplages variables anisotropes	97
4.4	Système ayant Un Seul Couplage Variable	100
4.5	Systeme 3D Anisotrope	106
4.6	Conclusion	107

4.1 INTRODUCTION

La fonction de transformation était évaluée pour une diversité de systèmes quadratiques tridimensionnels anisotropes ou isotropes pour l'importance de ce type de systèmes en mécanique quantique non relativiste [110-112].

Dans ce chapitre, nous utilisons le principe d'action quantique, au moyen des transformations canoniques quantiques dans le but de découpler l'hamiltonien des systèmes quadratiques tridimensionnels (3D) dépendants du temps avec des termes linéaires, le transformer en celui de trois particules libres indépendantes et déterminer ensuite la fonction de transformation exacte du système. Le problème est alors simplifié et converti en celui d'une particule qui se meut librement en trois dimensions.

Dans ce chapitre, la généralisation est faite pour les systèmes 3D dans le cas général avec trois couplages variables anisotropes hybrides, pour les systèmes 3D avec un seul couplage hybride variable et pour les systèmes 3D sans aucun couplage. Deux exemples physiques sont présentés pour illustrer l'application concrète de la formule générale obtenue dans cette étude : ceux de particules chargées dans des potentiels vecteurs et dans des potentiels scalaires.

4.2 SYSTEME 3D GENERAL DEPENDANT DU TEMPS

4.2.1 Cas Général

L'hamiltonien d'un système quadratique général 3D dépendant du temps avec des termes linéaires est exprimé comme

$$H = \mathbf{pG}_1\mathbf{p} + \mathbf{xG}_2\mathbf{x} + \mathbf{xG}_3\mathbf{p} + \mathbf{pG}_4\mathbf{x} + \mathbf{z}_1\mathbf{x} + \mathbf{z}_2\mathbf{p} + \delta(t) \quad (4.1)$$

où \mathbf{x} et \mathbf{p} sont respectivement le vecteur position et le vecteur impulsion exprimés respectivement par

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$\delta(t)$ est une fonction arbitraire dépendante du temps, \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 sont des vecteurs dépendants du temps, \mathbf{G}_1 et \mathbf{G}_2 sont des matrices diagonales et \mathbf{G}_3 et \mathbf{G}_4 sont des matrices antisymétriques de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_4^T, \quad \mathbf{G}_1 &= \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & g_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & g_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & h_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & h_3(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_{31} + \mathbf{G}_{32}, \quad \mathbf{G}_{31} &= \begin{pmatrix} k_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{32} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & l_3(t) & -l_2(t) \\ -l_3(t) & 0 & l_1(t) \\ l_2(t) & -l_1(t) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

D'une manière similaire à la démarche suivie dans le chapitre précédent, nous allons utiliser des transformations canoniques quantiques 3D, $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{P})$, pour l'évaluation exacte des fonctions de transformations. Le principe d'action quantique est donc appliqué pour trouver la fonction de transformation dans la nouvelle représentation qui est ensuite converti vers l'ancien ensemble de coordonnées. Pour cette raison nous allons exprimer la variation de l'opérateur action en fonction des nouvelles coordonnées

$$\delta W(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t) = \mathbf{P}'' \delta \mathbf{X}'' - \mathbf{P}' \delta \mathbf{X}' - \tilde{H}'' \delta t'' + \tilde{H}' \delta t' + \delta(F_1'' - F_1') \quad (4.3)$$

Dans la généralisation faite pour un système 1D dépendant du temps qui se meut linéairement [54], nous avons juste introduit une translation dans les transformations canoniques. Pour le système 3D décrit ci-dessus, le couplage hybride est dû au moment angulaire, pour cette raison nous établissons les transformations canoniques suivantes à partir d'une translation et d'une rotation

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (2m)^{1/2} \mathbf{DRTX} + \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{p} = (2m)^{-1/2} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{RT}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{f}_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

où m est la masse de la particule, \mathbf{R} une matrice antisymétrique de rotation de matrice transposée $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ utilisée pour supprimer les termes des couplages hybrides, \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont des vecteurs dépendants du temps utilisés pour supprimer les termes linéaires, \mathbf{D} et \mathbf{T} sont des matrices diagonales qui dépendent du temps

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \rho_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}^2 = \mathbf{G}_1 \quad (4.5)$$

L'équation (1.127) nous permet de trouver les fonctions génératrices suivantes

$$\begin{cases} F_2 = (8m)^{-1/2} (\mathbf{x}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{RT}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{RT}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x}) + \mathbf{f}_2\mathbf{x} - (2m)^{-1/2} \mathbf{PT}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{f}_1 \\ = \frac{1}{2} (\mathbf{XP} + \mathbf{PX}) + (2m)^{1/2} \mathbf{f}_2\mathbf{DRTX} + \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \\ F_1 = (2m)^{1/2} \mathbf{f}_2\mathbf{DRTX} + \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Par conséquent, l'hamiltonien est transformé, selon (1.127) après avoir utilisé les propriétés des matrices transposées, celles des matrices de rotation et des matrices diagonales, en

$$\begin{aligned} \widehat{H}(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t) = & (2m)^{-1} \mathbf{PD}_1\mathbf{P} + 2m\mathbf{XD}_2\mathbf{X} + \mathbf{XD}_3\mathbf{P} + \mathbf{PD}_4\mathbf{X} + (2m)^{1/2} \mathbf{XTR}^{-1}\mathbf{DK}_1 \\ & + (2m)^{-1/2} \mathbf{PT}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}_2 + \Gamma(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

où

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{T}^{-2} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{TR}^{-1}\mathbf{DG}_2\mathbf{DRT} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{TR}^{-1}\mathbf{D} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}^{-1} + \mathbf{G}_3\mathbf{D}^{-1} \right) \mathbf{RT}^{-1} + \frac{1}{2} \mathbf{T} (\mathbf{R}^{-1}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{T}^{-1} + \dot{\mathbf{T}}^{-1}) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{D}_4 = \mathbf{D}_3^T = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{G}_4 \right) \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{T} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R} + \dot{\mathbf{T}} \right) \mathbf{T} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{K}_1 = \dot{\mathbf{f}}_2 + 2\mathbf{G}_3 \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{G}_2 \mathbf{f}_1 + \mathbf{z}_1 \quad (4.12)$$

$$\mathbf{K}_2 = -\dot{\mathbf{f}}_1 + 2\mathbf{G}_4 \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{G}_1 \mathbf{f}_2 + \mathbf{z}_2 \quad (4.13)$$

et

$$\Gamma(t) = \dot{\mathbf{f}}_2 \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_1 \mathbf{G}_3 \mathbf{f}_2 + \mathbf{z}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{z}_2 \mathbf{f}_2 + \delta(t) \quad (4.14)$$

On définit $\dot{\mathbf{f}}_i = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial t}$, $\dot{\mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, $\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$, $\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}$. Maintenant, nous allons résoudre le système d'équations suivant afin de supprimer les termes linéaires dans le nouvel hamiltonien (4.7) en annulant leurs coefficients, d'où

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}_1 - 2\mathbf{G}_4 \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{G}_1 \mathbf{f}_2 = \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{f}}_2 + 2\mathbf{G}_3 \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{G}_2 \mathbf{f}_1 = -\mathbf{z}_1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Les solutions de ces équations dépendent des valeurs des éléments de matrices. Et pour supprimer les termes de couplage, c'est-à-dire les éléments de la matrice \mathbf{G}_{32} , nous allons annuler, dans la matrice \mathbf{D}_3 , les éléments D_{3ij} générés par l'existence de la matrice \mathbf{G}_{32} , pour $i \neq j$, de sorte qu'à ne laisser que les éléments diagonaux dans l'hamiltonien. Pour le faire nous considérons

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_3^T = \mathbf{D}_4 = \frac{1}{2} \mathbf{T} \left(\dot{\mathbf{T}}^{-1} + \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{D} \dot{\mathbf{D}}^{-1} + 2\mathbf{G}_{31} \right) \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1} \right) \quad (4.16)$$

Cette étape élimine le couplage qui existe dans la dynamique du système, mais la matrice \mathbf{R} , qui est une matrice non diagonale, produit, dans le cas général, de nouveaux couplages, dynamiques ou statiques, ce qui complique le problème. Pour cette raison, comme pour le moment cette technique est développée uniquement dans le cas des couplages hybrides, pour cette raison, le choix du système est limité aux systèmes contenant une isotropie dans les termes quadratiques de l'hamiltonien suivant les mêmes directions des couplages hybrides. Ceci signifie que le cas des systèmes ayant trois différents couplages

variables exige une isotropie quadratique 3D afin que ce soit un problème soluble. D'autre part, l'anisotropie 3D dans les termes quadratiques ne permet pas l'existence de couplage hybride dans l'hamiltonien. Cette condition d'isotropie n'est pas imposée aux termes linéaires. En vérifiant cette condition, la matrice \mathbf{A} devient diagonale. Nous obtenons alors l'équation suivante

$$\dot{\mathbf{R}} = -2\mathbf{D}\mathbf{G}_{32}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R} \quad (4.17)$$

Une fois cette équation différentielle résolue le système sera découplé. Par conséquent, nous écrivons l'hamiltonien simplifié et la variation de l'opérateur action dans le nouveau système de coordonnées

$$\begin{cases} \widehat{H}(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t) = (2m)^{-1} \mathbf{P}\mathbf{D}_1\mathbf{P} + 2m\mathbf{X}\mathbf{D}_2\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X} + \Gamma(t) \\ \delta W = \mathbf{P}''\delta\mathbf{X}'' - \widehat{H}''\delta t'' - \mathbf{P}'\delta\mathbf{X}' + \widehat{H}'\delta t' + \delta[F_1'' - F_1'] \end{cases} \quad (4.18)$$

On introduit maintenant la transformation canonique suivante

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \\ \widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + 2m\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} \end{cases} \quad (4.19)$$

\mathbf{T} et \mathbf{A} sont les matrices diagonales, de ce fait $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{A} = (\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{A})^T$. Nous déterminons à partir de (1.127) les fonctions génératrices de cette transformation

$$\begin{cases} \widetilde{F}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{X}\widetilde{\mathbf{P}} + \widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{X}) - m\mathbf{X}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} \\ \widetilde{F}_1 = -m\mathbf{X}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} \end{cases} \quad (4.20)$$

Alors (1.135) nous permet de transformer l'hamiltonien exprimé par (4.18) en

$$\widetilde{H}(\widetilde{\mathbf{P}}, \mathbf{X}, t) = \frac{1}{2m}\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{D}_1\widetilde{\mathbf{P}} + \frac{m}{2}\mathbf{X}\mathbf{D}_1\mathbf{A}\mathbf{X} + \Gamma(t) \quad (4.21)$$

où

$$\Delta = 4\mathbf{D}_1^{-1} \left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{A}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{A} - \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{D}_1^{-1}\dot{\mathbf{A}}) \right) \quad (4.22)$$

Nous substituons les équations (4.8), (4.9), et (4.10) en (4.22) en prenant en considération le fait que les matrices \mathbf{D} , \mathbf{G}_2 , \mathbf{G}_{31} et \mathbf{T} sont diagonales, avec la condition d'isotropie qui doit être vérifiée totalement ou partiellement selon le type de couplage, comme nous l'avons expliqué ci-dessus. La matrice \mathbf{R} n'a donc aucune influence sur la matrice \mathbf{A} exprimée en (4.16), nous obtenons alors

$$\Delta = \mathbf{T}^3 \left(\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \left(4\mathbf{D}^2\mathbf{G}_2 - 4\mathbf{G}_{31}^2 + 4\mathbf{D}^{-1}\dot{\mathbf{D}}\mathbf{G}_{31} - 2\mathbf{D}^{-2}\dot{\mathbf{D}}^2 + \mathbf{D}^{-1}\ddot{\mathbf{D}} - 2\dot{\mathbf{G}}_{31} \right) \right) \quad (4.23)$$

qui est également une matrice diagonale. A ce stade, nous avons découplé l'hamiltonien, avec succès, en trois systèmes linéaires indépendants, ce qui nous permet d'écrire le nouvel hamiltonien comme

$$\tilde{H}(\tilde{\mathbf{P}}, \mathbf{X}, t) = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 + \Gamma(t) = \Gamma(t) + \sum_{i=1}^3 \tilde{H}_i \quad (4.24)$$

où \tilde{H}_i est l'hamiltonien partiel du système quadratique suivant la direction x_i . Des équations (4.5) et (4.21) cet hamiltonien partiel prend la forme

$$\tilde{H}_i = \frac{1}{2m\rho_i^2} \tilde{P}_i^2 + \frac{m}{2\rho_i^2} X_i \Delta_{ii} X_i$$

Afin d'éliminer la matrice \mathbf{D}_1 de l'expression (4.21) de l'hamiltonien, pour avoir une forme plus simple semblable à celle d'une particule libre se mouvant en 3D, nous appliquons aux trois hamiltoniens partiels la transformation temporelle partielle suivante

$$\frac{d\tau_i}{dt} = \frac{1}{\rho_i^2} \quad (4.25)$$

où chaque hamiltonien s'écrit comme

$$H_i(\tilde{P}_i, X_i, \tau_i) = \rho_i^2 \tilde{H}_i(\tilde{P}_i, X_i, t) \quad (4.26)$$

pour obtenir enfin l'hamiltonien dans la nouvelle représentation

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + \Gamma(t) \\
 \text{et} \\
 H_0 &= \sum_{i=1}^3 H_i = \frac{1}{2m} \tilde{\mathbf{P}}^2 + \frac{m}{2} \mathbf{X} \Lambda \mathbf{X}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

La variation de l'opérateur action est exprimée alors dans la nouvelle représentation par

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 (\tilde{P}_i \delta X_i'' - H_i'' \delta \tau_i'' - \tilde{P}_i' \delta X_i' + H_i' \delta \tau_i') + \delta [F_1'' - F_1' + \tilde{F}_1'' - \tilde{F}_1' + \Lambda(\tau)] \tag{4.28}$$

avec $\Lambda = \int_{t'}^{t''} \Gamma dt$, Γ vérifiant l'expression (4.14).

Si on considère $\Lambda = \mathbf{0}$ dans (4.23) cela va exiger la résolution de l'équation du second degré suivante

$$\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \Omega(t) = \mathbf{0} \tag{4.29}$$

et

$$\Omega(t) = 4\mathbf{D}^2 \mathbf{G}_2 - 4\mathbf{G}_{31}^2 + 4\mathbf{D}^{-1} \dot{\mathbf{D}} \mathbf{G}_{31} - 2\mathbf{D}^{-2} \dot{\mathbf{D}}^2 + \mathbf{D}^{-1} \ddot{\mathbf{D}} - 2\dot{\mathbf{G}}_{31} \tag{4.30}$$

La solution de cette équation différentielle est liée à la nature du système étudié puisqu'elle dépend des expressions des matrices \mathbf{G}_i . Le système est finalement transformé en une combinaison de trois particules libres qui se déplacent linéairement suivant trois directions différentes

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1}^3 H_i + \Gamma(t) \quad \text{avec} \\
 H_i &= \frac{\hat{P}_i^2}{2m}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Donc nous pouvons écrire la variation de l'opérateur action tel que

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 \delta W_i + \delta [F_1'' - F_1' + \tilde{F}_1'' - \tilde{F}_1' + \Lambda(\tau)] \tag{4.32}$$

avec δW_i la variation de l'opérateur action pour une particule libre se déplaçant suivant la direction x_i . Le principe d'action permet d'écrire la fonction de transformation dans le nouveau système de coordonnées en fonction de la valeur propre de l'action bien ordonnée

$$\langle \mathbf{X}'', t'' | \mathbf{X}', t' \rangle = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} w(\mathbf{X}'', \mathbf{X}', t'', t')\right) \quad (4.33)$$

où A est déterminé ultérieurement à partir de la condition de normalisation.

En utilisant le principe d'action après le découplage de l'hamiltonien du système en trois mouvements indépendants, nous obtenons la fonction de transformation sous la forme d'une multiplication de trois fonctions de transformation indépendantes de particules libres avec un facteur additionnel

$$\langle \mathbf{X}'', t'' | \mathbf{X}', t' \rangle = \prod_{i=1}^3 (\langle X_i'', \tau_i'' | X_i', \tau_i' \rangle_{PL}) \exp\frac{i}{\hbar} [F_1'' - F_1' + \tilde{F}_1'' - \tilde{F}_1' - \Lambda] \quad (4.34)$$

Sachant que la fonction de transformation d'une particule libre se déplaçant suivant une direction x_i prend la forme

$$\langle X_i'', \tau_i'' | X_i', \tau_i' \rangle_{PL} = \left(\frac{2\pi i \hbar (\tau_i'' - \tau_i')}{m}\right)^{-1/2} \exp\frac{im (X_i'' - X_i')^2}{2\hbar (\tau_i'' - \tau_i')} \quad (4.35)$$

et de la transformation temporelle partielle (4.25) qui mène à

$$\tau_i'' - \tau_i' = \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} \frac{dt}{\rho_i^2} \quad (4.36)$$

Les transformations canoniques (4.4) permettent d'écrire la fonction de transformation du système sous la forme

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle &= A \left(\frac{2\pi i\hbar}{m} \right)^{-3/2} \exp \left(\mathbf{f}_2'' \mathbf{x}'' - \mathbf{f}_2' \mathbf{x}' - \frac{i}{\hbar} \Lambda \right) \times \\
 &\prod_{i=1}^3 \left(\int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_i^2} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sum_{j=1}^3 \frac{R_{ij}''^{-1} (x_j'' - f_{1_j}'')}{\rho_i'' g_i''^{1/2}} - \frac{R_{ij}'^{-1} (x_j' - f_{1_j}')}{\rho_i' g_i'^{1/2}} \right)^2 \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{g_i''} \left(2k_i'' - \frac{\dot{\rho}_i''}{\rho_i''} - \frac{\dot{g}_i''}{2g_i''} \right) (x_i'' - f_{1_i}'')^2 + \frac{1}{g_i'} \left(2k_i' - \frac{\dot{\rho}_i'}{\rho_i'} - \frac{\dot{g}_i'}{2g_i'} \right) (x_i' - f_{1_i}')^2 \right) \right) \Bigg/ \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_i^2}
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Comme pour le chapitre précédent, nous allons utiliser l'expression

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} (\varepsilon\pi)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(x_i'' - x_i')^2}{\varepsilon} \right) = \delta(x_i'' - x_i') \quad (4.38)$$

avec la condition de normalisation

$$\lim_{t'' \longrightarrow t'} \langle x_i'', t'' | x_i', t' \rangle = \delta(x_i'' - x_i') \quad (4.39)$$

pour calculer le coefficient A . Nous obtenons ainsi la fonction de transformation exacte d'un système 3D dépendant du temps avec des termes linéaires dans sa forme finale

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle &= (4\pi i\hbar)^{-3/2} \exp \left(\mathbf{f}_2'' \mathbf{x}'' - \mathbf{f}_2' \mathbf{x}' - \frac{i}{\hbar} \Lambda \right) \times \\
 &\prod_{i=1}^3 \left(\rho_i' \rho_i'' g_i'^{1/2} g_i''^{1/2} \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_i^2} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sum_{j=1}^3 \frac{R_{ij}''^{-1} (x_j'' - f_{1_j}'')}{\rho_i'' g_i''^{1/2}} - \frac{R_{ij}'^{-1} (x_j' - f_{1_j}')}{\rho_i' g_i'^{1/2}} \right)^2 \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{g_i''} \left(2k_i'' - \frac{\dot{\rho}_i''}{\rho_i''} - \frac{\dot{g}_i''}{2g_i''} \right) (x_i'' - f_{1_i}'')^2 + \frac{1}{g_i'} \left(2k_i' - \frac{\dot{\rho}_i'}{\rho_i'} - \frac{\dot{g}_i'}{2g_i'} \right) (x_i' - f_{1_i}')^2 \right) \right)
 \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.2.2 Hamiltonien sans termes linéaires

Les vecteurs \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont utilisés dans les transformations canoniques (4.4) juste pour supprimer les termes linéaires dans l'hamiltonien (4.1) du system général 3D. Dans le cas d'un hamiltonien quadratique sans termes linéaires, il devient inutile de résoudre les équations différentielles (4.15). Pour cette raison, avec ce type de systèmes nous n'allons pas appliquer directement l'expression (4.40), mais nous allons chercher une forme plus simple qui n'exige pas la résolution du système d'équations (4.15). Considérons alors le cas particulier suivant

$$H = \mathbf{pG}_1\mathbf{p} + \mathbf{xG}_2\mathbf{x} + \mathbf{xG}_3\mathbf{p} + \mathbf{pG}_4\mathbf{x} \quad (4.41)$$

avec $\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$ et $\delta(t) = 0$ dans l'hamiltonien (4.1). La transformation canonique (4.4) devient, après l'annihilation des vecteurs \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (2m)^{1/2} \mathbf{DRTX} \\ \mathbf{p} = (2m)^{-1/2} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{RT}^{-1}\mathbf{P} \end{cases} \quad (4.42)$$

Compte tenu des étapes du paragraphe précédent, nous utiliserons le résultat (4.40) obtenu après la résolution des équations (4.17) et (4.29) mais avec les considérations ci-dessus. La fonction de transformation du système prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle &= (4\pi i\hbar)^{-3/2} \prod_{i=1}^3 \left(\rho'_i \rho''_i g_i'^{1/2} g_i''^{1/2} \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_i^2} \right)^{-1/2} \\ &\times \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sum_{j=1}^3 \frac{R_{ij}''^{-1} x_j''}{\rho_i'' g_i''^{1/2}} - \frac{R_{ij}'^{-1} x_j'}{\rho_i' g_i'^{1/2}} \right)^2 \bigg/ \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_i^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{g_i''} \left(2k_i'' - \frac{\dot{\rho}_i''}{\rho_i''} - \frac{\dot{g}_i''}{2g_i''} \right) x_i''^2 + \frac{1}{g_i'} \left(2k_i' - \frac{\dot{\rho}_i'}{\rho_i'} - \frac{\dot{g}_i'}{2g_i'} \right) x_i'^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

où ρ_i est la solution de l'équation différentielle (4.29).

Comme applications des résultats généraux (4.40) et (4.43) nous allons traiter dans ce qui suit les trois cas généraux suivants : un système avec trois différents couplages variables, un système avec un seul couplage variable, et un système anisotrope sans aucun couplage.

4.3 SYSTEME 3D AYANT TROIS DIFFERENTS COUPLAGES VARIABLES ANISOTROPES

4.3.1 Cas Général

Dans cette section, nous allons évaluer la fonction de transformation pour un système ayant trois couplages variables différents. Ce type de systèmes n'a pas été traité avant par la méthode de Schwinger. Avec les transformations canoniques que nous avons introduites jusqu'à présent, seule l'isotropie 3D dans les termes quadratiques de l'hamiltonien du système nous donne la possibilité d'introduire trois couplages variables anisotropes. Notre technique, utilisant la méthode de Schwinger au moyen des transformations canoniques, permet de déterminer immédiatement et facilement la fonction de transformation du système, en dépit de la complexité impliquée par ces trois couplages. Avec ce système, les matrices \mathbf{G}_i dans l'hamiltonien (4.1) auront la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= g(t)\mathbf{I}, & \mathbf{G}_2 &= h(t)\mathbf{I}, & \mathbf{G}_3 &= \mathbf{G}_4^T, \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{G}_{31} + \mathbf{G}_{32}, & \mathbf{G}_{31} &= k(t)\mathbf{I}, & \mathbf{G}_{32} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & l_3(t) & -l_2(t) \\ -l_3(t) & 0 & l_1(t) \\ l_2(t) & -l_1(t) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.44)$$

\mathbf{I} est la matrice identité. Ceci implique dans des transformations canoniques (4.4)

$$\mathbf{T} = \rho(t)\mathbf{I} \text{ et } \mathbf{D} = g^{1/2}\mathbf{I} \text{ où } \mathbf{D}^2 = \mathbf{G}_1 \quad (4.45)$$

Les termes de couplage sont exprimés par la matrice \mathbf{G}_{32} qui contient trois couplages différents. Comme la rotation dans les transformations canoniques est choisie dans les mêmes directions que les couplages afin de les supprimer de la forme de l'hamiltonien, la matrice de rotation dans les transformations canoniques (4.4) est exprimée par

$$R = \prod_{l=1}^3 R_l = (R^T)^{-1}$$

$$\text{où } R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, l'équation différentielle (4.17) se transforme en

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -l_1 - (l_2 \sin \theta_1 + l_3 \cos \theta_1)tg \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -l_2 \cos \theta_1 + l_3 \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_3 = -l_2 \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_2} - l_3 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \end{cases} \quad (4.47)$$

L'équation différentielle (4.29) est donc réduite

$$\ddot{\rho} + \Omega(t)\rho = 0 \quad (4.48)$$

avec

$$\Omega(t) = 4g(t)h(t) - 4k^2(t) + 2\frac{\dot{g}(t)k(t)}{g(t)} + \frac{\ddot{g}(t)}{2g(t)} - 2\dot{k}(t)$$

Finalement, à partir de la fonction de transformation générale (4.40), la fonction de transformation exacte pour ce système général ayant un couplage 3D anisotrope variable prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle &= \left(4\pi i \hbar g'^{1/2} g''^{1/2} \rho' \rho'' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} \right)^{-3/2} \\
&\exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(\left(\frac{\mathbf{R}''^{-1}(\mathbf{x}'' - \mathbf{f}_1'')}{2\rho'' g''^{1/2}} - \frac{\mathbf{R}'^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{f}_1')}{2\rho' g'^{1/2}} \right)^2 \right) \left/ \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} - \frac{1}{4g''} \left(2k'' - \frac{\dot{\rho}''}{\rho''} - \frac{\dot{g}''}{2g''} \right) (\mathbf{x}'' - \mathbf{f}_1'')^2 \right. \\
&\left. + \frac{1}{4g'} \left(2k' - \frac{\dot{\rho}'}{\rho'} - \frac{\dot{g}'}{2g'} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{f}_1')^2 + \mathbf{f}_2'' \mathbf{x}'' - \mathbf{f}_2' \mathbf{x}' - \Lambda \right) \quad (4.49)
\end{aligned}$$

où \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 , \mathbf{R} , et ρ , sont obtenus par la résolution directe des équations différentielles (4.15), (4.47) et (4.68). Ce résultat est d'une grande importance, du fait que ce soit la première fois qu'on arrive à évaluer la fonction de transformation exacte pour ce type de systèmes ayant trois couplages différents, par la méthode de Schwinger. Malgré la complexité provoquée par l'anisotropie variable dans les termes de couplages et les termes linéaires de l'hamiltonien, nous avons réussi à obtenir un résultat immédiat avec la moindre difficulté possible dans la résolution des équations différentielles par rapport à d'autres techniques.

4.3.2 Hamiltonien sans termes linéaires

L'hamiltonien de ce système est exprimé par (4.41). l'application dans l'expression (4.43) de la condition d'isotropie liée à ce genre de systèmes, comme nous l'avons expliqué ci-dessus dans le paragraphe précédent, nous mène à la fonction de transformation du système

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle &= \left(4\pi i \hbar g'^{1/2} g''^{1/2} \rho' \rho'' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(\left(\frac{\mathbf{R}''^{-1} \mathbf{x}''}{2\rho'' g''^{1/2}} - \frac{\mathbf{R}'^{-1} \mathbf{x}'}{2\rho' g'^{1/2}} \right)^2 \right) \left/ \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} \right. \\
&\left. - \frac{1}{4g''} \left(2k'' - \frac{\dot{\rho}''}{\rho''} - \frac{\dot{g}''}{2g''} \right) \mathbf{x}''^2 + \frac{1}{4g'} \left(2k' - \frac{\dot{\rho}'}{\rho'} - \frac{\dot{g}'}{2g'} \right) \mathbf{x}'^2 \right) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer ici également que la différence entre ce résultat et celui du paragraphe précédent est la suppression des vecteurs \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 , qui sont des vecteurs utilisés dans les transformations canoniques pour éliminer les termes linéaires du nouvel hamiltonien transformé.

4.4 SYSTEME AYANT UN SEUL COUPLAGE VARIABLE

4.4.1 Cas général

Il est exigé au couplage dans ce système d'avoir les mêmes directions que l'isotropie partielle afin d'appliquer directement l'expression (4.40). Ainsi, nous introduisons dans ce paragraphe le couplage et l'isotropie partielle dans les termes quadratiques suivant les directions x_1 et x_2 , tandis que l'anisotropie 3D est préservée pour les termes linéaires. Dans ce cas, les matrices \mathbf{G}_i (4.2) de l'hamiltonien (4.1) prennent les formes suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_4^T, \quad \mathbf{G}_1 &= \begin{pmatrix} g(t) & 0 & 0 \\ 0 & g(t) & 0 \\ 0 & 0 & g_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} h(t) & 0 & 0 \\ 0 & h(t) & 0 \\ 0 & 0 & h_3(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_{31} + \mathbf{G}_{32}, \quad \mathbf{G}_{31} &= \begin{pmatrix} k(t) & 0 & 0 \\ 0 & k(t) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{32} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & l(t) & 0 \\ -l(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Nous allons appliquer à l'hamiltonien de ce système les mêmes transformations canoniques que les transformations (4.4) où les matrices dépendantes du temps \mathbf{D} et \mathbf{T} vérifient les formules

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \rho(t) & 0 & 0 \\ 0 & \rho(t) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} g^{1/2}(t) & 0 & 0 \\ 0 & g^{1/2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & g_3^{1/2}(t) \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathbf{D}^2 = \mathbf{G}_1 \quad (4.52)$$

Comme le moment angulaire qui engendre le couplage dans la dynamique du système est parallèle à la direction x_3 , la rotation dans les transformations canoniques sera choisie dans la même direction afin d'éliminer ce couplage. La matrice \mathbf{R} prend alors la forme

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

l'équation différentielle (4.17) est alors réduite à

$$\dot{\theta}(t) = -l(t) \quad (4.54)$$

Nous faisons toutes ces substitutions dans (4.40) pour obtenir finalement la fonction de transformation d'un système 3D général avec un seul couplage hybride variable et des termes linéaires

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}'' , t'' | \mathbf{x}' , t' \rangle &= (4\pi i \hbar)^{-3/2} \left(g''^{n/2} g''^{n/2} \rho'' \rho' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} \right)^{-1} \left(g_3''^{n/2} g_3''^{n/2} \rho_3'' \rho_3' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_3^2} \right)^{-1/2} \\ &\times \exp \left(f_2'' x_1'' - f_2' x_1' + f_2'' x_2'' - f_2' x_2' + f_2'' x_3'' - f_2' x_3' - \frac{i}{\hbar} \Lambda \right) \\ &\times \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\left(\left[(x_1'' - f_{1_1}'') \cos \theta'' - (x_2'' - f_{1_2}'') \sin \theta'' \right] / \rho'' g''^{n/2} \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \left[(x_1' - f_{1_1}') \cos \theta' - (x_2' - f_{1_2}') \sin \theta' \right] / \rho' g'^{n/2} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left(\left[(x_1'' - f_{1_1}'') \sin \theta'' + (x_2'' - f_{1_2}'') \cos \theta'' \right] / \rho'' g''^{n/2} \right. \right. \\ &- \left. \left. \left[(x_1' - f_{1_1}') \sin \theta' + (x_2' - f_{1_2}') \cos \theta' \right] / \rho' g'^{n/2} \right)^2 \right) / \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} \\ &- \frac{1}{g''} \left(2k'' - \frac{\dot{\rho}''}{\rho''} - \frac{\dot{g}''}{2g''} \right) \left((x_1'' - f_{1_1}'')^2 + (x_2'' - f_{1_2}'')^2 \right) \\ &+ \frac{1}{g'} \left(2k' - \frac{\dot{\rho}'}{\rho'} - \frac{\dot{g}'}{2g'} \right) \left((x_1' - f_{1_1}')^2 + (x_2' - f_{1_2}')^2 \right) \Bigg) \times \\ &- \frac{1}{g_3''} \left(2k_3'' - \frac{\dot{\rho}_3''}{\rho_3''} - \frac{\dot{g}_3''}{2g_3''} \right) \left(x_3'' - f_{1_3}'' \right)^2 + \frac{1}{g_3'} \left(2k_3' - \frac{\dot{\rho}_3'}{\rho_3'} - \frac{\dot{g}_3'}{2g_3'} \right) \left(x_3' - f_{1_3}' \right)^2 \Bigg) \\ &\times \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\left(\frac{(x_3'' - f_{1_3}'')}{\rho_3'' g_3''^{n/2}} - \frac{(x_3' - f_{1_3}')}{\rho_3' g_3'^{n/2}} \right)^2 \right) / \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_3^2} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

où $\Lambda = \int_{t'}^{t''} \Gamma dt$, et Γ vérifie (4.14) et les vecteurs \mathbf{f}_i et les valeurs ρ_i sont, respectivement, les solutions des équations différentielles (4.15) et (4.29).

Comme dans le système étudié les deux premiers degrés de liberté sont découplés du troisième degré de liberté, la fonction de transformation est, en effet, la multiplication de deux

fonctions de transformations pour deux systèmes indépendants: un système quadratique bidimensionnel ayant un couplage hybride variable suivant les directions x_1 et x_2 et un système quadratique général unidimensionnel suivant la direction x_3 . On peut remarquer que la fonction de transformation de ce dernier prend exactement la forme obtenue dans notre première généralisation pour les systèmes 1D [54] et que nous avons détaillée dans le chapitre précédent. Par conséquent, nous devrions traiter uniquement le problème bidimensionnel.

4.4.2 Hamiltonien sans termes linéaires

Comme dans la section précédente nous allons considérer le cas particulier de l'hamiltonien (4.41) ayant un seul couplage hybride variable. Pour cela, nous allons supprimer les vecteurs \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 dans les transformations canoniques (4.4). Dans ce cas, la fonction de transformation (4.55) devient

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle &= (4\pi i \hbar)^{-3/2} \left(g''^{n/2} g'^{n/2} \rho'' \rho' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} \right)^{-1} \left(g_3''^{n/2} g_3'^{n/2} \rho_3'' \rho_3' \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_3^2} \right)^{-1/2} \\
&\times \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\left(\frac{x_3''}{\rho_3'' g_3''^{n/2}} - \frac{x_3'}{\rho_3' g_3'^{n/2}} \right)^2 \right) / \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_3^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{g_3''} \left(2k_3'' - \frac{\dot{\rho}_3''}{\rho_3''} - \frac{\dot{g}_3''}{2g_3''} \right) x_3''^2 + \frac{1}{g_3'} \left(2k_3' - \frac{\dot{\rho}_3'}{\rho_3'} - \frac{\dot{g}_3'}{2g_3'} \right) x_3'^2 \right) \\
&\times \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \left(\left(\frac{x_1'' \cos \theta'' - x_2'' \sin \theta''}{\rho'' g''^{n/2}} - \frac{x_1' \cos \theta' - x_2' \sin \theta'}{\rho' g'^{n/2}} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{x_1'' \sin \theta'' + x_2'' \cos \theta''}{\rho'' g''^{n/2}} - \frac{x_1' \sin \theta' + x_2' \cos \theta'}{\rho' g'^{n/2}} \right)^2 \right) / \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{g''} \left(2k'' - \frac{\dot{\rho}''}{\rho''} - \frac{\dot{g}''}{2g''} \right) (x_1''^2 + x_2''^2) + \frac{1}{g'} \left(2k' - \frac{\dot{\rho}'}{\rho'} - \frac{\dot{g}'}{2g'} \right) (x_1'^2 + x_2'^2) \right)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

où ρ_i sont les solutions de l'équation différentielle (4.29). Comme pour le résultat du paragraphe précédent, on remarque ici que la fonction de transformation du système étudié est

constituée de deux fonctions de transformations indépendantes bidimensionnelle et unidimensionnelle.

4.4.3 Cas particuliers

A. PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE EXTERNE CONSTANT

Nous allons considérer ce cas bien connu d'une particule de charge e et de masse m , soumise à un champ magnétique constant B parallèle à la direction x_3 , afin de vérifier la validité de notre résultat général et le confronter aux résultats obtenus par d'autres études. L'hamiltonien du système est

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\left(p_1 + \frac{eB}{2c} x_2 \right)^2 + \left(p_2 - \frac{eB}{2c} x_1 \right)^2 + p_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{m}{2} \left(\frac{eB}{2mc} \right)^2 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{eB}{2mc} (p_2 x_1 - p_1 x_2) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Cet hamiltonien est celui d'un système quadratique sans termes linéaires ayant un seul couplage hybride suivant les directions x_1 et x_2 avec une isotropie partielle dans les mêmes directions. Par conséquent, il est utile, dans ce cas, d'appliquer directement le résultat (4.56). A partir des expressions (4.41) et (4.51) nous pouvons considérer

$$l = -\frac{eB}{2mc} = -\frac{\omega_c}{2}, \quad g_i = \frac{1}{2m}, \quad h = \frac{m}{2} \left(\frac{\omega_c}{2} \right)^2, \quad h_3 = k_i = 0 \quad (4.58)$$

pour déterminer les quantités θ et ρ_i de l'expression de la fonction de transformation (4.56). Il est nécessaire que nous trouvions les transformations canoniques appropriées en utilisant les équations (4.54) et (4.29) ; celles-ci deviennent après substitution des expressions (4.58)

$$\dot{\theta} = -l = \frac{\omega_c}{2} \quad (4.59)$$

et

$$\begin{cases} \ddot{\rho} + \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 \rho = 0 \\ \ddot{\rho}_3 = 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

Les solutions de ces équations sont

$$\theta = \frac{\omega_c}{2} t \quad (4.61)$$

et

$$\begin{cases} \rho = \cos\left(\frac{\omega_c}{2} t\right) \\ \rho_3 = 1 \end{cases} \quad (4.62)$$

On substitue (4.61) et (4.62) dans la fonction de transformation (4.56) pour obtenir finalement la fonction de transformation d'une particule chargée soumise à un champ magnétique constant

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}'' , t'' | \mathbf{x}' , t' \rangle &= \left(\frac{2\pi i \hbar T}{m} \right)^{-3/2} \left(\frac{\omega_c T}{2 \sin(\omega_c T / 2)} \right) \\ &\exp \left(\frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\omega_c}{2} \left(\cot(\omega_c T / 2) \left((x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 \right) + 2(x_2'' x_1' - x_1'' x_2') \right) + \left(\frac{x_3'' - x_3'}{T} \right)^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

où $T = t'' - t'$. Ceci est exactement le même résultat obtenu avec les intégrales de chemin [13]. C'est donc une confirmation de la validité et la précision de notre technique. La remarque qui peut être faite ici, est qu'il n'était pas nécessaire de substituer ρ_3 dans la fonction de transformation (4.56) et que nous pouvions, dès le début, considérer la fonction de transformation du système une multiplication immédiate d'une fonction de transformation pour une particule qui se déplace librement suivant la direction x_3 et celle d'un système 2D se mouvant suivant les directions x_1 et x_2 .

B. PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE ET UN POTENTIEL SCALAIRE CONSTANTS

Nous considérerons le cas d'une particule de charge e et de masse m soumise à un champ magnétique constant B parallèle à la direction x_3 , et à un potentiel scalaire de sorte que

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\left(p_1 + \frac{eB}{2c} x_2 \right)^2 + \left(p_2 - \frac{eB}{2c} x_1 \right)^2 + p_3^2 \right) + \frac{m}{2} \Omega^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{m}{2} \left(\left(\frac{eB}{2mc} \right)^2 + \Omega^2 \right) (x_1^2 + x_2^2) - \frac{eB}{2mc} (p_2 x_1 - p_1 x_2) \end{aligned} \quad (4.64)$$

L'unique différence avec le cas précédent est que

$$h = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{\omega_c}{2} \right)^2 + \Omega^2 \right) = \frac{m}{2} \bar{\omega}^2 \quad (4.65)$$

ce qui introduit un changement dans la solution de l'équation différentielle (4.29) qui devient

$$\ddot{\rho} + \bar{\omega}^2 \rho = 0 \quad (4.66)$$

En conséquence, la solution est exprimée par

$$\rho = \cos \bar{\omega} t \quad (4.67)$$

Par conséquent, la fonction de transformation (4.63) d'une particule chargée soumise uniquement à un champ magnétique constant, devient avec l'existence du potentiel scalaire constant

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle &= \left(\frac{2\pi i \hbar T}{m} \right)^{-3/2} \left(\frac{\varpi T}{\sin(\varpi T)} \right) \\
&\exp \left(\frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\varpi}{\sin(\varpi T)} \left(\cos(\varpi T) (x_1''^2 + x_1'^2 + x_2''^2 + x_2'^2) - 2 \cos(\varpi_c T / 2) (x_1'' x_1' + x_2'' x_2') \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + 2 \sin(\varpi_c T / 2) (x_2'' x_1' - x_1'' x_2') \right) + \left(\frac{x_3'' - x_3'}{T} \right)^2 \right) \right) \quad (4.68)
\end{aligned}$$

où $T = t'' - t'$. Urrutia, dans son évaluation de la fonction de transformation, par résolution des équations d'Heisenberg à partir de la méthode de Schwinger, a obtenu le même résultat pour le même cas [48]. La remarque que nous pouvons faire ici, est que le résultat ci-dessus est valable dans le cas où le champ magnétique est variable. Dans ce cas, sa dépendance du temps apparaît dans ω_c .

De la fonction de transformation (4.55) nous trouvons directement une diversité de fonctions de transformations pour des systèmes quadratiques 3D tels que: l'oscillateur harmonique à fréquence qui dépend du temps, l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence qui dépendent du temps, l'oscillateur harmonique amorti et l'oscillateur de Calidora-Kanai, soumis à de variables champs magnétiques dépendants du temps, dans des potentiels scalaires variables et sous l'influence de forces externes variables.

4.5 SYSTEME 3D ANISOTROPE

Pour ce système avec la condition d'anisotropie tridimensionnelle, toutes les matrices \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 et \mathbf{G}_3 , liées aux termes quadratiques, sont anisotropes. Par conséquent, elles préservent leurs formes exprimées en (4.2). La condition qui doit être vérifiée afin de pouvoir utiliser directement le résultat (4.40), est qu'il ne doit y avoir aucun couplage. Cela signifie

$$\mathbf{G}_{32} = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

et qu'il ne doit pas y avoir une rotation les transformations canoniques (4.4) existent. La matrice \mathbf{R} est alors égale à la matrice identité. Avec toutes ces considérations, \mathbf{D} et \mathbf{T} dans

ces transformations sont également anisotropes et vérifient l'expression (4.5). Ainsi, la fonction de transformation (4.40) devient

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle = & (4\pi i\hbar)^{-3/2} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\mathbf{f}_2'' \mathbf{x}'' - \mathbf{f}_2' \mathbf{x}' - \frac{i}{\hbar} \Lambda \right) \times \\
 & \prod_{i=1}^3 \left(\rho_i' \rho_i'' g_i'^{1/2} g_i''^{1/2} \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_i^2} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{i}{4\hbar} \sum_{i=1}^3 \left(\left(\frac{(x_i'' - f_{1_i}'')}{\rho_i'' g_i''^{1/2}} - \frac{(x_i' - f_{1_i}')}{\rho_i' g_i'^{1/2}} \right)^2 \right) \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{\rho_i^2} + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{g_i''} \left(2k_i'' - \frac{\dot{\rho}_i''}{\rho_i''} - \frac{\dot{g}_i''}{2g_i''} \right) (x_i'' - f_{1_i}'')^2 + \frac{1}{g_i'} \left(2k_i' - \frac{\dot{\rho}_i'}{\rho_i'} - \frac{\dot{g}_i'}{2g_i'} \right) (x_i' - f_{1_i}')^2 \right)
 \end{aligned} \quad (4.70)$$

C'est la fonction de transformation des systèmes 3D anisotropes avec des termes linéaires et sans aucun couplage. On peut voir, ici, que cette fonction de transformation est constituée de trois fonctions de transformations indépendantes et de systèmes quadratiques linéaires généraux se mouvant en trois directions différentes, chacun prend exactement l'expression obtenue dans notre première généralisation pour les systèmes 1D dépendants du temps [54]. Cela confirme l'efficacité de la généralisation que nous avons réalisée par la méthode de Schwinger en utilisant les transformations canoniques.

4.6 CONCLUSION

Dans l'évaluation exacte des fonctions de transformation pour des systèmes 3D généraux dépendants du temps avec des termes linéaires, par l'élimination des couplages qui existent dans l'hamiltonien du système étudié par une transformation canonique contenant une matrice de rotation et par la diagonalisation des matrices liées aux termes quadratiques de l'hamiltonien, nous avons réussi à transformer le problème en celui d'une particule se mouvant librement en trois dimensions.

Nous avons obtenu une forme générale de la fonction de transformation pour des systèmes 3D généraux dépendants du temps, ce qui nous permet d'avoir directement des expressions exactes des fonctions de transformation pour : les systèmes 3D ayant trois couplages hybrides anisotropes avec une isotropie 3D dans les termes quadratiques du système, les systèmes 3D ayant un seul couplage hybride variable avec une isotropie partielle dans les termes quadratiques suivant les mêmes directions et des systèmes 3D anisotropes sans couplage.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans l'étude que nous avons effectuée, nous nous sommes intéressés au développement d'une technique utilisant la méthode de Schwinger à partir des transformations canoniques quantiques, afin de déterminer les fonctions de transformations exactes pour des systèmes quadratiques généraux dépendants du temps, 1D et 3D, avec des termes qui dépendent linéairement des coordonnées et des impulsions.

Cette technique nous a épargné la résolution des équations de mouvements d'Heisenberg qui deviennent compliquées dans le domaine quantique vu leur nature différentielle opératorielle qui limite la généralisation de la méthode de Schwinger et la rend de plus en plus rigide.

Nous avons suivi deux étapes pour réaliser la généralisation souhaitée de la méthode que nous avons développée. Dans une première étape, nous avons évalué les fonctions de transformation exactes des systèmes quadratiques 1D dépendants du temps, puis nous avons étendu la méthode au cas des systèmes quadratiques 3D dépendants du temps et là, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème des couplages hybrides entre coordonnées et impulsions de directions différentes.

Dans la première étape, la fonction de transformation exacte a été évaluée, pour le système quadratique général 1D dépendant du temps avec des termes linéaires, pour la première fois, en appliquant la méthode de Schwinger, recouvrant ainsi tous les cas particuliers des systèmes quadratiques 1D.

La fonction de transformation était évaluée pour le système quadratique général 1D sans termes linéaires. Dans ce cas nous devons résoudre uniquement une équation différentielle homogène du deuxième ordre afin de choisir la transformation canonique appropriée pour éliminer les termes quadratiques de l'hamiltonien. L'addition des termes linéaires dans l'hamiltonien quadratique nécessite la résolution de deux équations différentielles supplémentaires pour pouvoir supprimer ces termes. Dans les deux cas, le nouvel hamiltonien du système étudié contient uniquement un terme cinétique, ce qui a simplifié considérablement l'étude du système.

Pour vérifier la validité de cette méthode, il a fallu confronter les résultats obtenus par la méthode que nous avons développée aux résultats obtenus par d'autres méthodes. Les cas particuliers de l'oscillateur harmonique avec une fréquence constante, l'oscillateur harmonique avec une fréquence qui dépend du temps, l'oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps, l'oscillateur harmonique amorti, l'oscillateur harmonique amorti forcé, et l'oscillateur de Calidora-Kanai, ont été facilement évalués où les résultats obtenus étaient parfaitement en accord avec ceux obtenus par la méthode des intégrales de chemin.

Dans la deuxième étape de l'étude, nous avons généralisé le résultat, obtenu dans le cas 1D, au cas 3D, afin de déterminer les fonctions de transformations exactes pour des systèmes quadratiques généraux 3D dépendants du temps avec des termes linéaires. Nous avons ajouté aux transformations linéaires qui étaient translatives dans le cas 1D, des matrices de rotation, afin de résoudre le problème de couplage hybride dû au moment angulaire, ce qui a permis de transformer l'étude du système en celle d'une particule libre à trois dimensions.

Dans cette généralisation, nous avons obtenu une forme générale de la fonction de transformation pour les systèmes quadratiques 3D dépendants du temps, liée à quelques facteurs temporels introduits par les transformations canoniques et déterminés par la résolution des équations différentielles qui en résultent.

Avec les résultats que nous avons atteints jusqu'à présent, afin de déterminer la fonction de transformation d'un système 3D général dépendant du temps, l'existence de couplages dans certaines directions impose l'isotropie dans les termes quadratiques pour les

mêmes directions. Sinon, des couplages dynamiques ou statiques émergent avec les transformations canoniques que nous appliquons. Une fois cette condition est vérifiée, quelle que soit l'anisotropie dans les termes linéaires, le problème reste soluble. Pour cette raison, trois types de systèmes ont été traités dans l'étude des systèmes 3D:

1. Un système à trois couplages hybrides anisotropes avec une isotropie 3D dans les termes quadratiques du système. Cette isotropie n'est pas imposée aux termes linéaires.

2. Un système ayant un seul couplage hybride variable avec une isotropie partielle dans les termes quadratiques suivant les mêmes directions. La conformité de la solution générale que nous avons obtenue a été vérifiée pour le cas 3D, en comparant nos résultats avec d'autres travaux, pour deux cas particuliers : une particule chargée soumise à un champ magnétique constant, et une particule chargée soumise à un potentiel vecteur constant et à un potentiel scalaire constant.

3. Un système anisotrope sans termes de couplage : la fonction de transformation de ce système est constituée de trois fonctions de transformations 1D indépendantes.

L'avantage de cette technique réside dans la possibilité d'avoir directement des expressions exactes des fonctions de transformation pour les systèmes 3D généraux, contenant de multiples couplages hybrides variables et anisotropes, à travers la résolution des équations différentielles les plus simples.

Dans cette étude, nous avons réalisé avec succès une généralisation de la méthode de Schwinger pour les systèmes quadratiques 1D et 3D dépendants du temps, en utilisant des transformations canoniques. Cette étape est prometteuse du fait que l'on peut appliquer cette technique aux systèmes à N dimensions, pour des situations plus complexes et des systèmes plus généraux avec des couplages variables et anisotropes, dynamiques et statiques.

Notre méthode représente une bonne base pour une généralisation de la méthode de Schwinger à partir des transformations canoniques quantiques dans les cas des potentiels coulombiens et des systèmes spinoriels.



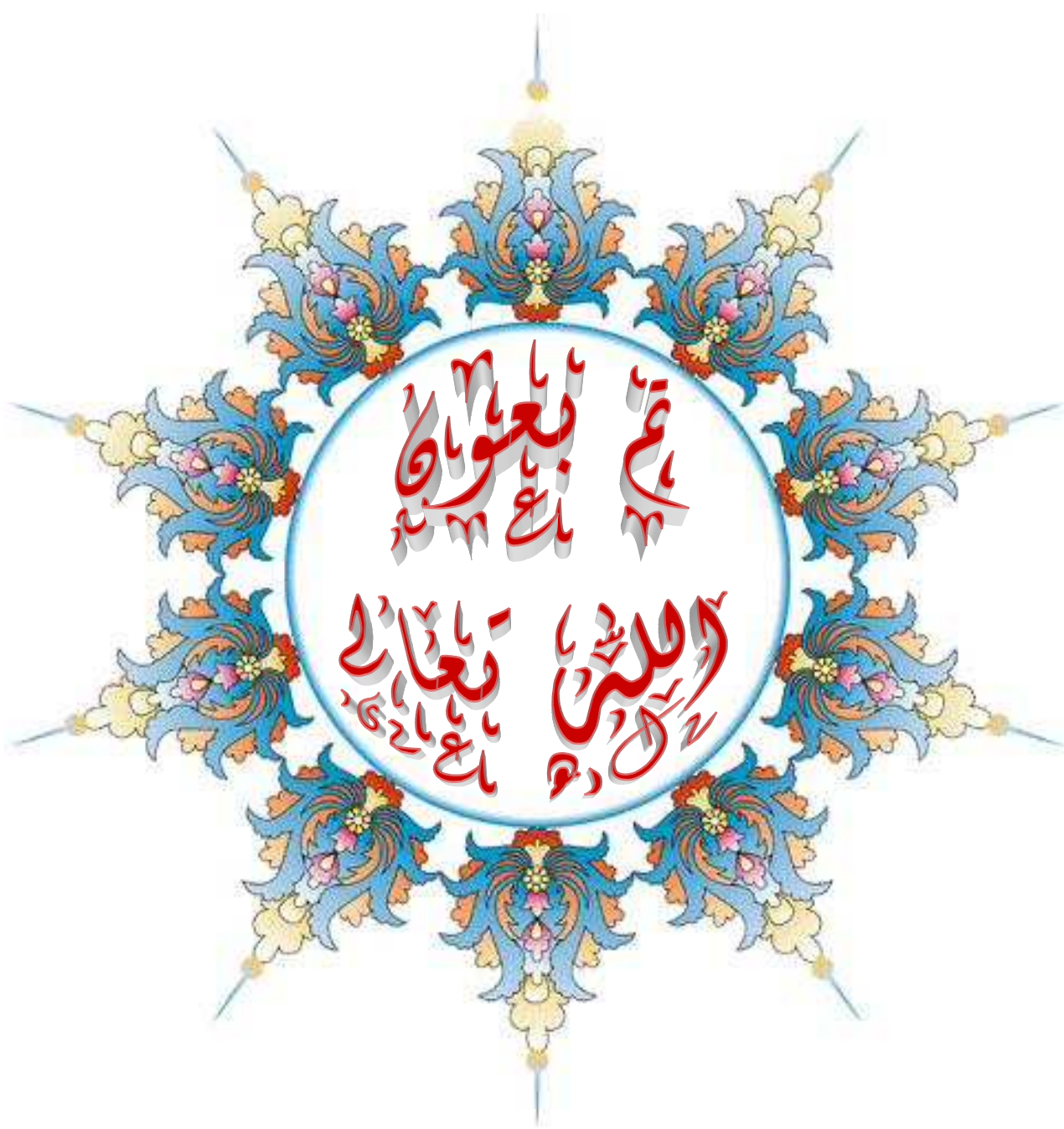
RÉFÉRENCES

- [1] Y. G. Yi, Phys. **v12** (2001) 0005044.
- [2] W. Yourggrau, S. Mandelstam, "Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory", Ed. Dover Publ., New-York (1968).
- [3] R. J. Finkelstein, "Nonrelativistic Mechanics", Ed. W. A. Benjamin Reading, (1973).
- [4] F. Strocchi, Rev. Mod. Phys. **38** (1996) 36.
- [5] R. Camporesi, Phys. Rep. C. **196** (1990) 1.
- [6] M. S. Swanson, Phys. Rev. A **50 N° 6** (1994) 4538.
- [7] P. A. M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", Oxford (1958).
- [8] G. I. Ghandour, Phys. Rev. D **35 N° 4** (1986) 1289.
- [9] R. Shankar, "Principles of Quantum Mechanics", Ed. Plenum, New York (1994).
- [10] J. J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics", Ed. Addison-Wesley, (1994).
- [11] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367.
- [12] R. Feynman, "The theory of fundamental processes", Ed. W. A. Benjamin, New-York (1961).
- [13] R. Feynman, A. Hibbs., "Quantum Mechanics and Path Integrals", Ed. Mc Graw-Hill, New-York (1965).
- [14] E. G. Thrapsaniotis, Quant. Ph. (2004) 1043T.
- [15] D. Han, Y. S. Kim, M. E. Noz, Am. J. Phys. **67** (1999) 61.
- [16] K. M. Poon, G. Muñoz, Am. J. Phys., 67 Iss. 6 (1999) 547.

- [17] Y. Tikochinsky, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 888.
- [18] I. M. Davis., *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** (1985) 2737.
- [19] L. Chetouani, L. Guechi, F. Hammann, *Phys. Rev. A* **40** (1989) 1157.
- [20] S. Ansoldi, A. Aurilia, E. Spallucci, *Eur. J. Phys.* **21** (2000) 1.
- [21] S. Ansoldi, A. Aurilia, E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 2352.
- [22] S. Ansoldi, A. Aurilia, E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 870.
- [23] A. Aurilia, E. Spallucci, I. Vanzetta, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 6490.
- [24] A. Aurilia, A. Smailagic, E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 2536.
- [25] J. Schwinger, “Quantum Kinematics and dynamics”, Ed. Addison-Wesley Publishing (1991)
- [26] J. Schwinger, “Quantum Mechanics”, Ed. Springer (2001).
- [27] J. Schwinger, *Proc. N. A. S.* **45** (1959) 1542.
- [28] J. Schwinger, *Proc. N. A. S.* **46** (1960) 257.
- [29] J. Schwinger, *Proc. N. A. S.* **46** (1960) 570.
- [30] J. Schwinger, *Proc. N. A. S.* **46** (1960) 883.
- [31] J. Schwinger, *Proc. N. A. S.*, **46** (1960) 1401.
- [32] J. Schwinger, *Proc. N. A. S.* **47** (1961) 1075.
- [33] J. Schwinger, *Proc. N. A. S.* **88** (1991) 6537
- [34] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407.
- [35] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [36] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, V. I. Man’ko, *Lett. Nuovo Cim.* **14** (1975) 241.
- [37] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, V. I. Man’ko, *Physica A* **82** (1976) 113.
- [38] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man’ko, *J. Phys. A* **9** (1976) 1791.
- [39] J. D. Likken, J. Sonnenschein, N. Weiss, *Int. J. Mod. Phys. A* **6** (1991) 5155.
- [40] H. Boschi-Filho, C. Farina, A. N. Vaidya, *Phys. Lett. A* **215** (1996) 109.
- [41] F. A. Barone, H. Boschi-Filho, C. Farina, *Quant. Ph.* **v2** (2003) 0205085.
- [42] N. J. M. Horing, H. L. Cui, G. Fiorenza, *Phys. Rev. A* **34** (1986) 612.
- [43] C. Farina, A. Segui-Santonja, *Phys. Lett. A* **184** (1993) 23.
- [44] S. Rabello and C. Farina, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 2614.
- [45] P. Bracken, *Can. J. Phys.* **75** (1997) 261.
- [46] F. A. Barone, C. Farina, *Phys.* **v1** (2005) 0508201.
- [47] L. F. Urrutia and E. Hernandez, *Int. J. Theo. Phys.* **23** (1984) 1105.
- [48] L. F. Urrutia and C. Monterola, *Int. J. Theo. Phys.* **25** (1986) 75.
- [49] A. B. Nassar, R. T. Berg, *Phys. Rev. A* **34 N°3** (1986) 9.

- [50] A. B. Nassar, F. L. A. Machado, Phys. Lett. A **123** N°1 (1987) 9.
- [51] A. B. Nassar, L. C. L. Botelho, J. M. F. Bassalo, P. T. S. Alencar, Physica Scripta **42** (1990) 9.
- [52] A. B. Nassar, Phys. Lett. A **141** (1987) 24.
- [53] G. Crespo, A. N. Proto, A. Plastino, D. Otero, Phys. Rev. A, **39** (1989) 2133.
- [54] M. Boudjema-Bouloudenine, T. Boudjedaa, A. Makhlouf, Eur. Phys. J. C. **46** N° 3 (2006) 807.
- [55] Y. S. Kim, E. P. Wigner, Am. J. Phys. **58** N° 5 (1990) 439.
- [56] K. H. Yeon, D. H. Kim, C. I. Um, T. F. George, L. N. Pandey, Phys. Rev. A **55** N° 6 (1997) 4023.
- [57] A. Y. Schiekh, Quant. Ph. (1994) 9411199.
- [58] A. Anderson, Ann. Phys. **232** (1994) 292.
- [59] A. Anderson, Hep-Th. (1994) 9310168.
- [60] A. Anderson, Hep-Th. (1993) 9302061.
- [61] K. H. Yeon, D. F. Walls, T. F. George, L. N. Pandey, Phys. Rev. A **58** N°3 (1998) 1765.
- [62] E. D. Davis, G. I. Ghandour, Phys. Lett. A **278** (2001) 239.
- [63] H. J. Schellnhuber, Phys. Rev. **25** N° 4 (1982) 2358.
- [64] P. G. L. Leach, J.Math.Phys. **18** N° 10 (1977) 1902.
- [65] M. H. Lee, J.Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 9475.
- [66] D. A. Trifonov, Quant. Ph. v1 (2000) 0012044.
- [67] M. Rosenau da Costa, A. O. Caldeira, S. M. Dutra, H. Westfahl, Jr. Phys. Rev. A **61**(2000) 022107
- [68] V. L. Safonov, Quant. Ph. (2002) 2095 S.
- [69] T. J. Park, Bull. Korean Chem. Soc. **25** N° 2 (2004) 285.
- [70] C. I. Um, I. H. Kim, K. H. Yeon, D. H. Kim, J. Korea Phys. Soc. **29** (1996) 145.
- [71] K. H. Yeon, C. I. Um, W. H. Kahng, T. F. George, Phys. Rev. A **38** (1988) 6224.
- [72] W.Paul, Rev. Mod. Phys. **62** (1990) 531.
- [73] H.R. Lewis, Jr., W.B. Riesenfeld, J.Math.Phys. **10** (1969) 1458.
- [74] I.A. Pedrosa, Phys. Rev. A, **55** (1997) 3219.
- [75] I.A. Pedrosa, Phys. Rev. A **56** (1997) 4300.
- [76] O. Castanosn, A. Frank and R. Lopez-Pena, J.Phys. A: Math. Gen. **23** (1990) 5141.
- [77] O. Castanosn, R. Lopez-Pena and V.I. Man'ko, J.Phys. A: Math. Gen. **27** (1994) 1751.
- [78] B. K. Cheng, Int. J. Theo. Phys. **23** N° 12 (1984)1099.

- [79] M. C. Huang, M. C. Wu, Ch. J. Phys. **36** N° 4 (1998)566.
- [80] W. Qinmou, J. Phys. A **20** (1987) 5041.
- [81] K. Yonei, J. Phys. A **22** (1989) 2415.
- [82] R. M. Wilcox, J. Math. Phys. **8** (1967) 962.
- [83] E. Merzbacher, "Quantum Mechanics", Wiley, New York (1970).
- [84] R. Greiner, "Quantum Electrodynamics", Springer, (1994).
- [85] J. R. Klauder, Quant. Ph. **v1** (2003) 0303034.
- [86] C. C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "Mécanique quantique", Hermann, Paris (1977).
- [87] V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **72** (1979) 10.
- [88] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, Phys. Lett. A **67** (1978) 175.
- [89] G. J. Papadopoulos, Math. Gen. Phys. **7** (1974) 209.
- [90] G. Junker, A. Inomata, Phys. Lett. A **110** (1985) 195.
- [91] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, Phys. Rep. **137** (1986) 115.
- [92] A. K. Dhara, S. V. Lawande, J. Math. Phys. **27** (1986) 1331.
- [93] I. M. Manoyan, J. Phys. A **19** (1986) 3013.
- [94] N. H. March., M. P. Tosi, J. Phys. A **18** (1985) L643.
- [95] M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, Z. Phys. **35** (1926) S557.
- [96] S. Banerjee, J. Kupsch, J. Phys. A : Math. Gen. **38** (2005) 5237.
- [97] H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley, (1980).
- [98] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, "Physique théorique", Mir, Moscou (1982).
- [99] G. Y. Tsaur, J. Wang, Phys. Rev. A **65** (2001) 012104.
- [100] L. F. Landovitz, A. M. Levine, Phys. Rev. A **20** (1979) 1162.
- [101] L. F. Landovitz, A. M. Levine, W. H. Shreiber, Phys. Rev. **21** (1979) 2159.
- [102] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **20** (1979) 550.
- [103] L. S. Brown, Phys. Rev. Lett. A **66** (1991) 527.
- [104] D. M. Greenberger, J. Math. Phys. **20** (1979) 762.
- [105] M. Sebawe Abdalla, R. K. Colegrave, Phys. Rev. A **15** (1982) 1549.
- [106] M. Sebawe Abdalla, R. K. Colegrave, Phys. Rev. A **32** (1985) 1958.
- [107] C. I. Um, K. H. Yeon, W. H. Kahng, J. Phys. A **20** (1987) 611.
- [108] K. H. Yeon, C. I. Um, T. F. George, Phys. Rev. A **36**(1987) 5287.
- [109] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, J. Math. Phys. **16** (1975) 384.
- [110] B. K. Cheng, J. Phys. A: Math. Gen **17** (1984) 819.
- [111] G. J. Papadopoulos, J. Phys : Math. Gen. **4** (1971) 773.
- [112] N. Kokiantonis, D. L. P. Castringiano, J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985) 45.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ