وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

BADJI MOKHTAR-ANNABA

UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار

ـعنابةـ

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2025/2026

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

Multi-correction des problèmes aux limites pour les équations différentielles opérationnelles.

Filière
Mathématiques

Spécialité
Equations différentielles

Par
TOUMI HABIBA

DIRECTEUR DE THÈSE: NOUAR AHMED MCA. U. Skikda

Devant le jury

PRESIDENT: CHORFI LAHCENE	Prof.	U.B.M Annaba
CO-ENCADRANT: ZOUYED FAIROUZ	Prof.	U.B.M Annaba
EXAMINATEUR : REBBANI FAOUZIA	Prof.	ESTI Annaba
EXAMINATEUR: BOUSSTILA NADJIB	Prof.	U. Guelma
EXAMINATEUR : KHEMIS RABAH	Prof.	U. Skikda

Université Badji-Mokhtar Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Multi-correction des problèmes aux limites pour les équations différentielles opérationnelles.

Encadreur : Dr. Nouar Ahmed

© 2025 Toumi Habiba

Jury :

1.	Chorfi Lahcene	**Président**	**Prof.**	**U.B.M. Annaba**
2.	Nouar Ahmed	**Rapporteur**	**M.C.A**	**Univ. Skikda**
3.	Zouyed Fairouz	**Co-encadrant**	**Prof.**	**U.B.M. Annaba**
4.	Rebbani Faouzia	**Examinateur**	**Prof.**	**ESTI d'Annaba**
5.	Bousstila Nadjib	**Examinateur**	**Prof.**	**Univ. Guelma**
6.	Khemis Rabah	**Examinateur**	**Prof.**	**Univ. Skikda**

Résumé

Dans ce travail, nous établissons des conditions suffisantes garantissant la dépendance continue de la solution du problème de Cauchy abstrait et de ses dérivées des données initiales dans un espace de Banach, puis nous traitons le cas particulier de l'espace de Hilbert. Dans le premier cas ces conditions sont exprimées en terme de décroissance de certains faisceaux opératoriels caractérisant l'équation différentielle opératorielle considérée. Dans le second cas nous démontrons la suffisance d'une condition appropriée portant sur la partie principale du faisceau opératoriel.

Mots clés : Problème de Cauchy abstrait, Multi-correction, Faisceau opératoriel.

 ©2026.Univ. Annaba

Abstract

In the present work, we establish sufficient conditions for the p-fold well-posedness of higher-order abstract Cauchy problem in Bannach espace, these conditions are expressed in terms of decay of some auxiliary pencils derived from the characteristic pencil for the considered operational differential equation. We also study the case of Hilbert space and obtain sufficient conditions on the main part of the operatorial pencil .

Key words : Abstract Cauchy problems, multiple well-posedness, operatorial pencil

ملخص

في هدا العمل قمنا بدراسة شروط كافية تضمن لنا الطرح السليم المضاعف لمسالة كوشي المجردة ذات درجة عليا في فضاء بناج كما ندرس الحالة الخاصة لفضا ء هلبرت .

في الحالة الأولى نتحصل على شروط كافية معبر عنها بتناقص بعض الحزم المؤثراتية التي تميز المعادلة التفاضلية المؤثراتية . في الحالة الثانية نتحصل على شروط كافية مرتبطة بالجزء الرئيسي للحزمة المؤثراتية .

الكلمات المفتاحية. مسائل كوشي المجردة، أشباه الزمر، الطرح الحسن لمسائل كوشي.

Remerciement

Je loue ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la vie, la santé et d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. C'e
jour.

Je tiens à exc
M. Nouar maitre de conférence
sa disponibilité, son soutien, se
à bien ce travail.

J'
adre
sieur L. Chorfi Profe
l'honneur de pré

Je voudrais également remercier vivement F. Zouyed Profe
Badji Mokhtar Annaba, F. Rebbani Profe
naba, N. Boussetila Profe
Profe
mon jury de thè
qu'il
discussions mathématique

Me
pour tout ce qu'il m'a appris, ainsi que son soutien, sa disponibilité et son humanité.

Je tiens aussi à remercier trè

20 Aout 1955 Skikda et je mentionne particulièrement M. Benhadri, A. Ieulmi, L. Starra, A. Bouakaz, L. Bouzettouta.....

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aide de près l'élaboration et la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

§**Introduction** **1**

1 Notions préliminaires **3**

1.1 Rappels d'analyse complexe 3

1.1.1 Intégrale d'une fonction complexe 3

1.1.2 Principe du maximum 6

1.1.3 Principe de Phragmen-Lindelöf 7

1.2 Rappels d'analyse fonctionnelle 7

1.2.1 L'opérateur linéaire 7

1.2.2 L'opérateur inverse 9

1.2.3 L'opérateur fermé 9

1.2.4 La notion de bornitude relative 10

1.2.5 L'opérateur Adjoint 10

1.2.6 L'opérateur symétrique 11

1.2.7 L'opérateur Auto-Adjoint 12

1.2.8 Spectre d'un opérateur linéaire 14

1.2.9 Décomposition spectrale d'un opérateur Auto-Adjoint 14

1.2.10 Les fonctions à valeurs dans un espace de Banach 16

1.2.11 Les fonctions opératorielles 18
1.2.12 L'intégrale de Stieltjes 20
1.2.13 L'intégrale de Bochner 21

2 La notion de multi-correction d'un problème de Cauchy abstrait 23

2.1 La notion de problème mal posé 23
2.2 La notion de multi-correction 25

3 Conditions suffisantes pour la p-correction d'un problème de Cauchy abstrait 28

3.1 Résultats intermédiaires 28
3.2 Les principaux resultats 34

4 Conditions suffisantes pour la p-correction d'un problème de Cauchy abstrait dans un espace de Hilbert 42

4.1 Conditions sur les coefficients opératoriels dans le cas d'un espace de Hilbert 42
4.2 Résultat principal 43
Bibliographie 50

§INTRODUCTION

Dans cette thèse nous étudions la multi-correction des problèmes de Cauchy abstraits d'ordre arbitraire n. Cette notion de multi-correction est dans un certain sens une généralisation de la notion de correction pour les problèmes de Cauchy d'ordre 1.
Certains problèmes de la physique mathématique d'ordre supérieure à 1 conduisent, dans leur formulation abstraite, à des problèmes de Cauchy pour des équations différentielles opératorielles dont la solution existe, est unique et dépend continûment des conditions initiales mais les dérivées de cette solution ne vérifient pas cette dépendance continue. Ceci a mis en avant l'intérêt scientifique pour la détermination des conditions suffisantes qui assurent la dépendance continue des conditions de Cauchy, non seulement de la solution mais aussi de l'ensemble (jusqu'à l'ordre n-1) ou de certaines de ses dérivées.
Notre intérêt pour cette thématique a commencé avec la lecture du travail de L. A. Vlasenko, A. L. Piven' et A. G. Rutkas intitulé "Criteria for the well-posedness of the Cauchy problem for differential operator equations of arbitrary order" [23].
En plus de cette introduction notre travail comporte quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons des rappels d'analyse complexe et d'analyse fonctionnelle et exposons des éléments de la théorie des fonctions abstraites et de la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires.
Dans le chapitre deux nous présentons la notion de problème de Cauchy pour les équations différentielles opératorielles puis les notions de correction et de non-correction des problèmes engendrés par ces équations. Nous clôturons ce chapitre par la présentation de la notion de multi-correction qui est l'objet de notre intérêt dans ce travail.

Le chapitre trois est consacré a l'étude de la multi-correction d'un problème de Cauchy abstrait d'ordre n. Nous déterminons des conditions suffisantes pour la p-correction et pour la correction totale des problèmes considérés. Ces conditions son exprimées en termes de norme des opérateurs coefficients de l'équation différentielle opératorielle.

Dans le chapitre quatre nous déterminons des conditions suffisantes pour la p-correction d'un problème de Cauchy abstrait dans le cas d'un espace de Hilbert.

Les résultats exposés dons les chapitres trois et quatre constituent une généralisation de certains des résultats présentés dans [23] et ont fait l'objet de publication dans [21] et [22].

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous présentons les principes et les résultats essentiels de la théorie des opérateurs linéaires et de l'analyse complexe que nous aurons à utiliser par la suite.
Toutes les affirmations de ce chapitre sont exposées sans démonstration et dans les formes directement accessibles à leurs applications dans notre travail. Des informations plus détaillées sur ces résultats peuvent être trouvées dans les références [3], [5], [6], [10], [11], [13], [19].

1.1 Rappels d'analyse complexe

1.1.1 Intégrale d'une fonction complexe

Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ on considère la courbe C de longueur finie, et reliant deux points a et b. Soit $f(z)$ une fonction vectorielle définie sur un domaine contenant la courbe C

Partageons C en n arcs à l'aide des points $z_1, z_2 ....., z_{n-1}$, arbitrairement choisis et posons $z_0 = a$, $z_n = b$. Sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k choisissons un point ξ_k. Formons la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k,$$

avec $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.
La limite de S_n quand $\Delta z \longrightarrow 0$, si elle existe s'appelle intégrale curviligne de f sur la courbe C et est notée par :

$$\int_C f(z)dz. \tag{1.1}$$

Si C est paramétrée par $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$,

alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\lambda(t))\,\lambda'(t)\,dt.$$

Théorème 1.1 (Théorème de Cauchy)**.** *Soit f une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{G}$, pour toute courbe fermée C contenue dans $\mathcal{G}$, a lieu*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Théorème 1.2. *Soient a et b deux points quelconques d'un ouvert connexe $\mathcal{G}$, et soient C_1 et C_2 deux courbes quelconques reliant a et b et contenues dans $\mathcal{G}$, si $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{G}$, alors*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Théorème 1.3. *Si f est une fonction analytique dans un domaine connexe $\mathcal{G}$, alors l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = G(z),$$

considérée comme fonction de sa borne supérieure est une fonction analytique dans $\mathcal{G}$ et de plus

$$G'(z) = f(z),\ z \in \mathcal{G}$$

Théorème 1.4. *Si a et b sont deux points quelconques de $\mathcal{G}$ et si $G'(z) = f(z)$, alors*

$$\int_a^b f(z)\,dz = G(b) - G(a).$$

Théorème 1.5 (théorème de $Morera$)**.** *Soit f une fonction continue dans un ouvert connexe $\mathcal{G}$, si*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

pour toute courbe fermée C contenue dans $\mathcal{G}$. Alors f est analytique dans $\mathcal{G}$.

Ce théorème est considéré comme étant la réciproque du théorème de $Cauchy$.

Formules intégrales de Cauchy

Soit f une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{G}$, si $C \subset \mathcal{G}$ est une courbe fermée, et si a est un point intérieur à C, alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz,$$

où la courbe C est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. De même la $n^{éme}$ dérivée de f en $z = a$ est donnée par

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Théorème 1.6 (Inégalités de Liouville)**.** *Soit f une fonction analytique sur un ouvert $\mathcal{G}$, Soient $z_0 \in \mathcal{G}$ et $R > 0$, tel que le disque $\mathcal{D}(z_0, R)$ soit contenu dans $\mathcal{G}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ et r vérifiant $0 < r < R$, on a*

$$\left| \frac{f^n(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{\sup\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|}{r^n}.$$

Théorème 1.7 (théorème de Liouville)**.** *Si f est une fonction analytique et est bornée, alors f est constante.*

Lemme 1.1. *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = Re^{i\theta},\ R > 0,\ 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, telle que*

$$\lim_{|z| \longrightarrow \infty} |zf(z)| = 0.$$

On a alors

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

où C_R est l'arc de cercle de rayon R compris entre les deux angles θ_1 et θ_2.

Lemme 1.2. *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = Re^{i\theta},\ R > 0,\ 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, si*

$$\lim_{|z| \longrightarrow 0} |zf(z)| = 0.$$

Alors

$$\lim_{R \longrightarrow 0} \int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

où C_R est l'arc de cercle de rayon R compris entre les deux angles θ_1 et θ_2.

Lemme 1.3. *(Lemme de Jordan) Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = Re^{i\theta},\ R > 0,\ 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, si*

$$\lim_{|z| \longrightarrow \infty} |f(z)| = 0.$$

Alors

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz} f(z)dz = 0,$$

où C_R est l'arc de cercle de rayon R compris entre les deux angles θ_1 et θ_2.

Définition 1.1. *Soit f une fonction d'une variable réelle t, supposée nulle pour $t < 0$, et définie sur $[0, +\infty[$, λ étant une variable complexe, considérons l'intégrale*

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t}dt.$$

Si cette intégrale est définie sur un domaine $\mathcal{G}$ de $\mathbb{C}$, non vide et non réduit à un point, on dit que $f(t)$ est transformable au sens de Laplace et que $F(\lambda)$ est sa transformée de Laplace.

$F(\lambda)$ est définie si

$$\int_0^{t} f(t)dt,$$

existe et si $Re(\lambda) > \alpha$, α étant fini ou égal à $-\infty$, l'intégrale $F(\lambda)$ diverge si $Re(\lambda) < \alpha$, α est appelée abscisse de convergence associée à f.
Pour que f soit transformable, il suffit que soit vérifié : $|f(t)| \leq Me^{\lambda t}$ pour $t \geq t_0$. On dit alors que f est d'ordre exponentiel.
$F(\lambda)$ étant donnée, on peut définir la fonction originale f par

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} F(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda,$$

Δ étant une parallèle à Oy d'abscisse $> \alpha$.

1.1.2 Principe du maximum

Proposition 1.1. *Si f est une fonction analytique dans $\mathcal{G}$ qui vérifie l'une des condition suivantes :*

1. *La partie réelle de f est constante,*

2. *Le module de f est constant,*

alors la fonction f est constante.

Théorème 1.8. *Soit f une fonction analytique dans $\mathcal{G}$ non constante et continue dans $\overline{\mathcal{G}}$. Alors $|f(z)|$ n'admet pas une valeur maximale dans $\mathcal{G}$.*

Lemme 1.4 (Lemme de Schwartz)**.** *Soit f une fonction analytique dans le disque $\{|z| < 1\}$ et continue dans $\{|z| \leq 1\}$ et $f(0) = 0$, si $|f(z)| \leq 1$ dans $\{|z| \leq 1\}$, alors $|f(z)| \leq |z|$ dans ce disque, et si il existe z_0 dans le cercle $\{|f(z_0)| = |z_0|\}$, alors $|f(z)| = |z|$ et $f(z) = e^{i\alpha}z$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Théorème 1.9. *Si f est une fonction deux fois continûment dérivable qui vérifie $\Delta f = 0$ dans l'ouvert $\mathcal{G}$, et si f n'est pas constante, alors f atteint son maximum sur le bord de $\mathcal{G}$.*

On peut appliquer le principe du maximum sur un domaine borné $\mathcal{G}$, si une fonction est analytique sur ce domaine, et continue sur $\overline{\mathcal{G}}$, mais il n'est pas applicable si le domaine est non borné. Dans ce dernier cas un résultat analogue est donné par le principe de Phragmen-Lindelöf.

1.1.3 Principe de Phragmen-Lindelöf

Dans ce qui suit nous ne considérerons que le cas des domaines non bornés de forme angulaire qui est en rapport direct avec les applications que nous allons en faire dans la suite de notre travail.

Soit D_α le secteur angulaire défini par

$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |\arg z| < \tfrac{\pi}{2\alpha} \right\}.$$

On suppose que ∞ est un point singulier de la frontière ∂D_α. Soit γ_r l'arc défini par

$$\gamma_r = \left\{ |z| = r,\, z \in D_\alpha \right\},$$

Pour une fonction f analytique dans D_α posons

$$M_f(r) = \max_{z \in \gamma_r} |f(z)|,$$

$$\rho = \lim_{r \longrightarrow \infty} \sup \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

Et

$$\sigma = \lim_{r \longrightarrow \infty} \sup \frac{\log M_f(r)}{r^\rho},$$

ρ et σ sont appelés respectivement l'ordre et le type de la fonction f

Théorème 1.10. *Soit f une fonction analytique dans un secteur D_α, continue aux points finis de la frontière ∂D_α, et telle que $|f(z)| \leq M$ dans tout point fini de D_α, si l'ordre angulaire ρ de f satisfait à $\rho < \sigma$, alors $|f(z)| \leq M$ partout dans D_α.*

1.2 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.2.1 L'opérateur linéaire

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces vectoriels normés, on note par $\|.\|_{\mathcal{X}}$ et $\|.\|_{\mathcal{Y}}$ les normes respectives de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

Toute application A d'une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ s'appelle opérateur de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. $\mathcal{D}$ est appellée domaine de définition de l'opérateur A, on le note $\mathcal{D}(A)$, l'ensemble des valeurs d'un opérateur A est noté par $\mathcal{R}(A)$.

Définition 1.2. *On dit que l'opérateur A de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ est linéaire si*

1. $\mathcal{D}(A)$ *est une variété linéaire dans* $\mathcal{X}$;
2. $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$.

Proposition 1.2. *Si A est un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ alors $\mathcal{R}(A)$ est une variété linéaire.*

Définition 1.3. *Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$, nous dirons que A est continu en $x_0 \in \mathcal{X}$ si :*

$$\lim_{x \to x_0} Ax = Ax_0.$$

On dit que A est continu dans $\mathcal{X}$ s'il est continu en tout x de $\mathcal{X}$.

Définition 1.4. *Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$, on dit qu'il est borné si l'ensemble $A(B'(0,1))$ est borné.*

Définition 1.5. *Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{X}$, on dit qu'il est borné sur $\mathcal{D}(A)$ si l'ensemble $A(B'(0,1) \cap \mathcal{D}(A))$ est borné.*

Proposition 1.3. *Si A est un opérateur borné alors : $\exists C > 0, \forall x \in \mathcal{X}$:*

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq C \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

Proposition 1.4. *Un opérateur linéaire A est continu dans $\mathcal{X}$, si et seulement si il est borné.*

L'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ est notée par $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Egalité de deux opérateurs

A et B deux opérateurs on dit que $A = B$ si :

1. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}$;
2. $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}$.

Définition 1.6. *Soient A et B deux opérateurs, on dira que B est un extension de A si :*

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$;
2. $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

On note alors $A \subset B$.

1.2.2 L'opérateur inverse

Définition 1.7. *Soit A un opérateur de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, un opérateur linéaire B de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$ est appelé inverse de A si :*

1. $\mathcal{D}(B) = A(\mathcal{D}(A)) = \mathcal{R}(A)$;
2. $\forall x \in \mathcal{D}(A), B(Ax) = x$.
3. $\forall y \in \mathcal{R}(A), A(By) = y$.

Cet opérateur est alors noté A^{-1}.

Proposition 1.5. *Si A est injectif alors A^{-1} existe et est unique.*

Théorème 1.11 (Théorème de Banach)**.** *Soit A un opérateur défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, et $\exists m > 0$, tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{X} : \|Ax\| \geq m \|x\|,$$

alors A^{-1} existe et est borné sur $\mathcal{R}(A)$.

Théorème 1.12 (Théorème de Banach)**.** *Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux espaces de Banach et A est un opérateur bijectif et borné de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, alors A^{-1} est borné.*

Théorème 1.13. *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach et A un opérateur linéaire borné de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$, tel que $\|A\| \leq q < 1$, alors $(I + A)^{-1}$ existe et est borné.*

Définition 1.8. *Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ l'ensemble*

$$G(A) = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, telle\, que : y = Ax\},$$

et appelé graphe de l'opérateur A.

Proposition 1.6. *$G(A)$ est une variété linéaire dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Proposition 1.7. *Si A est partout défini et continu, alors $G(A)$ est fermé.*

1.2.3 L'opérateur fermé

Définition 1.9. *On dit que l'opérateur linéaire A est fermé, si pour toute suite $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \longrightarrow y$, $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$.*

Proposition 1.8. *Un opérateur$A$ est fermé si et seulement si son graphe $G(A)$ est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Proposition 1.9. *Si A est un opérateur fermé, et A^{-1} existe, alors A^{-1} est fermé.*

Théorème 1.14. *Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, sont deux espaces de Banach et A est un opérateur de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ bijectif et fermé, alors A^{-1} est borné.*

Définition 1.10. *Soit A un opérateur linéaire, on appelle extension fermée de A, tout opérateur fermé qui est une extension de A.*

Définition 1.11. *La plus petite extension fermée de A est appelée fermeture de A est noté $\overline{A}$.*

Définition 1.12. *Un opérateur A est dit fermable s'il possède des extensions fermées.*

Théorème 1.15. *Si A est fermable et admet un inverse borné sur $\mathcal{R}(A)$, alors $\overline{A}$ admet un inverse borné sur $\overline{\mathcal{R}(A)}$, et $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$.*

1.2.4 La notion de bornitude relative

Définition 1.13. *Soient A et T deux opérateurs de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, on dit que l'opérateur A est borné relativement à T, si $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$, et il existe des constantes positives a et b telles que*

$$\|Ax\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{1.2}$$

on dit aussi que A est T-borné.

Théorème 1.16. *Soient T et A deux opérateurs de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, si A est $T-$borné, et la $T-$borne est inférieure à 1, l'opérateur $S = T + A$ est fermable si et seulement si T est fermable.*

Théorème 1.17. *Soient T et S deux opérateurs de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, tel que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S)$ et*

$$\|Sx - Tx\| \leq a\|x\| + b'\|Tx\| + b"\|Sx\|, \tag{1.3}$$

avec a, b', $b"$ des constantes positives, et $b' < 1$, $b" < 1$, alors les résultats de théorème 1.17 sont vrais.

Remarque 1.1. *Si T est un opérateur fermé, A est un opérateur fermable, et $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$, alors A est $T-$borné.*

1.2.5 L'opérateur Adjoint

Dans tout ce qui suit, nous désignons par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\|$, et le produit scalaire $\langle , \rangle$. Soit A un opérateur linéaire de domaine de définition dense dans $\mathcal{H}$.
Soit

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{D}(A), \exists y^* \in \mathcal{H}, \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle\}.$$

Proposition 1.10. *L'ensemble $\mathcal{D}$ est une variété linéaire non vide et pour tout y, y^*, s'il existe, est unique.*

Définition 1.14. *L'opérateur qui à tout élément y de $\mathcal{D}$ fait correspondre l'élément y^* s'appelle opérateur adjoint de A et est noté A^*.*

Proposition 1.11. *Soient A et B deux opérateurs, de domaines de définition denses dans $\mathcal{H}$ si $A \subset B$, alors $B^* \subset A^*$.*

Proposition 1.12. *Soit A un opérateur de domaine dense dans $\mathcal{H}$, si A admet une fermeture $\overline{A}$, alors :*

$$(\overline{A})^* = A^*.$$

Proposition 1.13. *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans $\mathcal{H}$, si A^* et A^{**} existent, alors :*

$$A \subset A^{**}.$$

Proposition 1.14. *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans $\mathcal{H}$ si $\mathcal{R}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et A^{-1} existe, alors $(A^*)^{-1}$ existe et :*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Proposition 1.15. *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans $\mathcal{H}$, si A est fermable et A^* existe, alors A^{**} existe et :*

$$\overline{A} = A^{**}.$$

Proposition 1.16. *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans $\mathcal{H}$, si A^* et A^{**} existent, alors A est fermable et :*

$$\overline{A} = A^{**} \text{ et } (A^{**})^* = A^*.$$

1.2.6 L'opérateur symétrique

Définition 1.15. *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans $\mathcal{H}$, A est dit symétrique si :*

$$A \subset A^*.$$

Autrement dit,

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle .$$

Proposition 1.17. *Si A est un opérateur symétrique de domaine dense dans $\mathcal{H}$, A^* et A^{**} existent et :*

$$\bar{A} = A^{**} \text{ et } A^* = A^{***}.$$

Définition 1.16. *Un opérateur symétrique A est dit semi borné inferieurement si l'ensemble*

$$\{\langle Ax, x\rangle \ \backslash x \in \mathcal{D}(A), \|x\| = 1\},$$

possède une borne inférieure.

Proposition 1.18. *Si A est un opérateur borné inférieurement, il existe une constante non négative M telle que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, x\rangle \geq M \|x\|^2.$$

Définition 1.17. *On dit que A est positif si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, x\rangle \geq 0.$$

Définition 1.18. *On dit que A est positivement défini si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, x\rangle > 0.$$

Proposition 1.19. *Pour que A soit symétrique, il faut et il suffit que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, x\rangle \text{ soit réel.}$$

Définition 1.19. *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans $\mathcal{H}$, A est dit anti-symetrique si :*

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, y\rangle = -\langle x, Ay\rangle.$$

1.2.7 L'opérateur Auto-Adjoint

Définition 1.20. *L'opérateur A est dit auto-adjoint si $A = A^*$; c-a-d :*

$$\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle, \forall x, y \in \mathcal{D}.$$

Proposition 1.20. *Si A est auto-adjoint et λ réel, alors $(A - \lambda I)$ est auto-adjoint.*

Proposition 1.21. *Si A est auto-adjoint et A^{-1} existe sur $\mathcal{R}(A)$, alors $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{H}$ et A^{-1} est auto-adjoint.*

Théorème 1.18. *Soient A un opérateur symétrique et B un opérateur auto-adjoint non négatif, tels que $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$, et $\|Ax\| \leq \|Bx\|$, pour $x \in \mathcal{D}(B)$ alors*

$$\forall x \in \mathcal{D}(B), \ |\langle Ax, x\rangle| \leq \langle Bx, x\rangle.$$

Proposition 1.22. *Soit A un opérateur symétrique, s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$\mathcal{R}(A - \lambda I) = \mathcal{H},$$

et

$$\mathcal{R}(A - \overline{\lambda} I) = \mathcal{H},$$

alors A est auto-adjoint.

Proposition 1.23. *Si A est un opérateur symétrique et A^{-1} existe, alors $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{H}$.*

Proposition 1.24. *Si A est auto-adjoint et positivement défini, alors A^{-1} existe et est partout défini.*

Proposition 1.25. *Si A un opérateur fermé tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$, alors A^*A est auto-adjoint et positif.*

Théorème 1.19 (Caractérisation des opérateurs à image fermée)**.** *Si A un opérateur non borné, fermé, tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{R}(A)$ est fermé,*
2. *$\mathcal{R}(A^*)$ est fermé,*
3. *$\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^{\perp}$,*
4. *$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$.*

Théorème 1.20. *Soit A un opérateur défini sur $\mathcal{H}$ non borné, et fermé, tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est surjectif,*
2. *il existe une constante C, telle que $|x| \leq C|Ax|$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$,*
3. *$\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$, et $\mathcal{R}(A^*)$ est fermé.*

Corollaire 1.1. *Soit A un opérateur défini sur $\mathcal{H}$ non borné, et fermé, tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur $\mathcal{H}$ si et seulement s'il existe deux constantes C_1 et C_2, telles que :*

$$\langle Ax, x\rangle \geq C_1 \langle x, x\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

$$\langle A^*x, x\rangle \geq C_1 \langle x, x\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.2.8 Spectre d'un opérateur linéaire

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert

Définition 1.21. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit A un opérateur défini sur $\mathcal{H}$,le nombre complexe λ est appelé valeur régulière de l'opérateur A, si l'opérateur $(A-\lambda I)$ admet un opérateur inverse, borné et partout défini sur $\mathcal{H}$.*

►L'ensemble des valeurs régulières λ est appelé ensemble résolvant de A et est noté par $\rho(A)$.
Pour $\lambda \in \rho(A)$ l'inverse $(A-\lambda I)^{-1}$ est noté par $R(\lambda)$ et est appelé résolvante de A.
► Son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est appelé spectre de A et est noté par $\sigma(A)$.
► Les éléments du spectre sont classés en trois catégories :
▪ Si $(A-\lambda I)$ n'est pas injectif, λ est appelé valeur propre de A, l'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre ponctuel et est noté par $\sigma_p(A)$.
▪ L'ensemble des nombres λ pour les quels $(A-\lambda I)$ est injectif et $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ est dense dans $\mathcal{H}$ est appelé spectre continu et est noté par $\sigma_c(A)$.
▪ L'ensemble des nombres λ pour lesquels $(A-\lambda I)$ est injectif mais $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$ est appelé spectre résiduel et est noté par $\sigma_r(A)$.

Théorème 1.21. *Soit A un opérateur auto-adjoint défini dans $\mathcal{H}$, alors :*

1. $\sigma_r(A) = \varnothing$,
2. $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$,
3. $A \geq 0 \Longleftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty[$.

1.2.9 Décomposition spectrale d'un opérateur Auto-Adjoint

Décomposition spectrale d'un opérateur borné

Définition 1.22. *Soit A un opérateur auto-adjoint borné sur l'espace $\mathcal{H}$, une famille $\{E_\lambda\}_\lambda \in \mathbb{R}$ de projections orthogonales dans $\mathcal{H}$ est appelée famille spectrale ou résolution de l'identité si elle vérifie les conditions :*

1. $E_\lambda = 0$, *si* $\lambda < m$, *et* $E_\lambda = I$, *si* $\lambda > M$,
   avec $m = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$ *et* $M = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$
2. E_λ *est non décroissante c-a-d* $\lambda < \mu \Rightarrow E_\lambda \leq E_\mu$.
3. E_λ *est continue à droite c-a-d* $\forall x \in \mathcal{H} : \lim\limits_{\mu \longrightarrow \lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x$.

Les limites sont prises au sens de la norme de $\mathcal{H}$, E_λ est une mesure, on peut alors définir les intégrales (au sens de Bochner) :

$$Ax = \int_m^M \lambda dE_\lambda x,$$

$$A = \int_m^M \lambda dE_\lambda.$$

Définition 1.23. *Soit A un opérateur auto-adjoint borné, et soit*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \text{ ,et } M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle,$$

si g est une fonction définie continue sur $[m, M]$ on peut définir la fonction opératorielle :

$$g(A) = \int_m^M g(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Décomposition spectrale d'un opérateur non borné

Définition 1.24. *A un opérateur auto-adjoint non borné, et E_λ une famille de projections orthogonales dans $\mathcal{H}$, on dit que E_λ est une fonction spectrale de A, si elle vérifie les conditions :*

1. $\mu > \lambda \Longrightarrow E_\lambda \geq E_\mu$.
2. $\lim_{\lambda \longrightarrow -\infty} E_\lambda h = 0$, $\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} E_\lambda h = h$, $h \in \mathcal{H}$,
3. $\lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \longrightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon} h = E_\lambda h$, $h \in \mathcal{H}$,
4. *Si $\lambda \leq \mu$ alors* $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$.
5. *Pour tout B appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et commutant avec A :*
$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \quad E_\lambda B x = B E_\lambda x.$$
6. $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall y \in \mathcal{H}$
$$\langle Ax, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\langle E_\lambda x, y\rangle.$$

Cette dernière intégrale èst une intégrale de Stieljes impropre dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.26. *Chaque opérateur auto-adjoint non borné possède une fonction spectrale unique.*

Remarque 1.2. 1. *Si E_λ est une fonction spectrale de A, $x \in \mathcal{D}(A)$ si et seulement si*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle,$$

existe.

2. $\forall x \in \mathcal{D}(A)$

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x,$$

Cette dernière intégrale est une intégrale de Stieljes impropre dans $\mathcal{H}$.

3. $x \in \mathcal{D}(A)$ *alors*

$$\|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\left\langle E_\lambda x, x\right\rangle.$$

Remarque 1.3. *Si A est un opérateur positivement défini, alors*

$$A = \int_{\gamma}^{+\infty} \lambda dE_\lambda,$$

avec $\gamma = \inf_{\{x\in\mathcal{D}(A),\|x\|=1\}} \langle Ax, x\rangle$.

1.2.10 Les fonctions à valeurs dans un espace de Banach

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,T]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach noté $\mathcal{X}$, muni de la norme $\|.\|$.

Définition 1.25. *On dit que la fonction f est continue au point t_0, si*

$$\|f(t) - f(t_0)\| \longrightarrow 0,$$

quand $t \longrightarrow t_0$.

Définition 1.26. *On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,T]$ si elle est continue en tout point de cet intervalle*

On note par $\mathcal{C}([0,T],\mathcal{X})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathcal{X}$. Muni de la norme

$$\|f\| = \max_{0\le t\le T} \|f(t)\|,$$

$\mathcal{C}([0,T],\mathcal{X})$ est un espace de Banach.

Définition 1.27. *La fonction f est dite différentiable en t_0, si il existe un élément $y \in \mathcal{X}$, tel que*

$$\left\| \frac{f(t_0+\delta t)-f(t_0)}{\delta t} - y \right\| \longrightarrow 0,$$

quand $\delta t \longrightarrow 0$.

On note alors

$$y = f'(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt}.$$

La fonction f est dite différentiable sur l'intervalle $[0, T]$ si elle est différentiable en tout point de cet intervalle.

Nous considérons une fonction f défini sur un ouvert connexe $\mathcal{G}$ du plan complexe $\mathbb{C}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{X}$.

Définition 1.28. *La fonction f est dite différentiable en z_0, si il existe un élément $y \in \mathcal{X}$, tel que*

$$\left\| \frac{f(z_0+\delta z)-f(z_0)}{\delta z} - y \right\| \longrightarrow 0,$$

quand $\delta z \longrightarrow 0$. On note alors

$$y = f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz}.$$

la fonction f est dite analytique en z_0 si elle est différentiable dans un voisinage de z_0, on dit qu'elle est analytique dans $\mathcal{G}$ si elle est analytique en chaque point de ce domaine.

Si f est analytique au point z_0, alors on peut la développer au voisinage du point z_0 sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où les coefficients a_n sont des éléments de l'espace $\mathcal{X}$ et sont déterminés par la formule

$$\frac{1}{n!} f^n(z_0).$$

Cette série converge dans un cercle de rayon r donné par la formule de Cauchy-Hadamard :

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}.$$

Définition 1.29. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, on appelle intégrale définie de f sur $[a, b]$ le nombre*

$$\lim_{\delta_k \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{N} f(t_k) \Delta t_k.$$

L'intégrale définie de f sur $[a, b]$ est notée

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

ici la limite est comprise dans le sens de la convergence par rapport à la norme de $\mathcal{X}$ et δ_k est le diamètre de la partition de l'intervalle $[a, b]$.

Définition 1.30. *Soit f une fonction continue en tout point z du $\mathcal{G}$ du plan complexe $\mathbb{C}$, si la courbe C est paramétrisée par $z = \lambda(t)$ où $t \in [a, b]$ alors :*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\lambda(t))\,\lambda'(t)\,dt.$$

Formules intégrales de Cauchy

Si f est une fonction analytique dans $\mathcal{G}$, alors :

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Pour tout z_0 dans $\mathcal{G}$ et toute courbe fermée simple C contenue dans $\mathcal{G}$ et contenant z_0.

Transformation de Laplace

Si f est une fonction continue sur $[0, \infty)$ à valeurs dans $\mathcal{X}$ satisfaisant la condition

$$\|f(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

alors pour $Re\lambda > \omega$, l'intégrale

$$F(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} f(t)\,dt,$$

est absolument convergente.
La fonction F a valeurs dans $\mathcal{X}$ est analytique dans le demi plan $Re\lambda > \omega$ et est appellée transformée de Laplace de la fonction f.

1.2.11 Les fonctions opératorielles

Définition 1.31. *Soit $\mathcal{A}$ une fonction de $[0, T]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, s'il existe un intervalle I inclus dans $[0, T]$, tel que $(\mathcal{A}(t))^{-1}$ existe pour tout t appartenant à I la fonction qui à t associe $(\mathcal{A}(t))^{-1}$ sera notée $\mathcal{A}^{-1}$.*

Définition 1.32. *Soit $\mathcal{A}$ une fonction définie sur $[0, T]$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ on dit que $\mathcal{A}$ est fortement continue en $t_0 \in [0, T]$, si pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\|\mathcal{A}(t)x - \mathcal{A}(t_0)x\| \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow t_0$*
.

La fonction $\mathcal{A}$ est dite fortement continue sur l'intervalle $[0, T]$ si elle est fortement continue en tout point de $[0, T]$.

Définition 1.33. *Soit $\mathcal{A}$ une fonction définie sur $[0, T]$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, on dit que $\mathcal{A}$ est continue en norme en $t_0 \in [0, T]$, si $\|\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t_0)\| \longrightarrow 0$, $quand\, t \longrightarrow t_0$).*

La fonction $\mathcal{A}$ est dite continue en norme sur l'intervalle $[0,T]$ si elle est continue en norme en tout point de $[0,T]$.
Si la fonction $\mathcal{A}$ est continue en norme, elle est fortement continue.
Si la fonction $\mathcal{A}$ est fortement continue dans $[0,T]$ elle est uniformément bornée sur $[0,T]$.

Définition 1.34. *Soit $\mathcal{A}$ une fonction définie sur $[0,T]$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, on dit que $\mathcal{A}$ est fortement continûment différentiable en t, si pour tout $x\in\mathcal{X}$ la fonction $\mathcal{A}(t)\,x$ est continûment différentiable dans $\mathcal{Y}$, on note alors*

$$(\mathcal{A}(t)\,x)' = \mathcal{A}'(t)\,x$$

Proposition 1.27. *Soit f une fonction de $[0,T]$ dans $\mathcal{X}$ et soit $\mathcal{A}$ une fonction de $[0,T]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, si f est continûment différentiable en t_0 et $\mathcal{A}$ est fortement continûment différentiable en t_0, alors la fonction $\mathcal{A}f$ qui à t associe $\mathcal{A}(t)\,f(t)$, déféfie sur $[0,T]$ et à valeurs dans $\mathcal{Y}$ est continûment différentiable en t_o et*

$$(\mathcal{A}f)'(t_o) = \mathcal{A}'(t_o)f(t_o) + \mathcal{A}(t_o)\,f'(t_o)\,.$$

Proposition 1.28. *Soit $\mathcal{A}$ une fonction de $[0,T]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, si $\mathcal{A}$ est continue en norme en t_0 et si $(\mathcal{A}(t_0))^{-1}$ existe et est bornée, alors il existe un voisinage I de t_0 tel que $(\mathcal{A}(t))^{-1}$ existe et est bornée pour tout t appartenant à I, de plus la fonction $\mathcal{A}^{-1}$ définie sur I est continue en t_0 en norme.*

Proposition 1.29. *Soit $\mathcal{A}$ une fonction définie sur $[0,T]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, si $\mathcal{A}$ est fortement différentiable et $\mathcal{A}^{-1}$ existe et est uniformément borné sur $[0,T]$, alors $\mathcal{A}^{-1}$ est fortement différentiable sur $[0,T]$, et*

$$(\mathcal{A}^{-1})'(t) = -\mathcal{A}^{-1}(t)\,A'(t)\,\mathcal{A}^{-1}(t)\,.$$

Dans le cas des fonctions opèratorielles, en plus des propriétés usuelles sont vérifiées les propriétes suivantes :
Si $\mathcal{A}$ est une fonction de $[0,T]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ et $B\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, alors

$$\int_0^T \mathcal{A}(t)Bdt = \int_0^T \mathcal{A}(t)dtB,$$

$$\int_0^T B\mathcal{A}(t)dt = B\int_0^T \mathcal{A}(t)dt,$$

et

$$\int_0^T \mathcal{A}(t)xdt = \int_0^T \mathcal{A}(t)dtx, \quad x\in\mathcal{X}.$$

1.2.12 L'intégrale de Stieltjes

Soit g une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{X}$,
σ une subdivision de $[a,b]$: $a = t_0, t_1, ...t_N = b$.
On pose

$$V_\sigma(g) = \sum_{i=1}^{N} \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|,$$

et

$$V_a^b(g) = \sup_\sigma V_\sigma(g),$$

Définition 1.35. *On dit que g est une fonction à variation bornée si :*

$$V_a^b(g) < \infty. \tag{1.4}$$

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans les espaces de Banach $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement.On suppose que g est une fonction à variation bornée et qu'il existe une application linéaire p de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{Z}$ vérifiant :

$$\|p(x,y)\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

Dans tout ce qui suit $p(x,y)$ sera notée plus simplement xy.
On peut alors définir l'intégrale de Stieltjes de la fonction f par rapport à la fonction g sur l'intervalle $[a,b]$.
Soit τ une partition de $[a,b]$: $a = t_0, t_1, ...t_N = b$.
On choisit $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, et on considére

$$\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})].$$

Soit $\{\tau_n\}_1^\infty$ une suite de partitions de $[a,b]$, et λ_n le diamétre de τ_n.

Définition 1.36. *On dit que f est intégrable au sens de Stieljes par apport à g sur l'intervalle $[a,b]$ si existe la limite*

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\theta_i) [g(t_i) - g(t_{i-1})],$$

indépendemment du choix de t_i.Cette limite sera notée

$$\int_a^b f(t) dg(t).$$

Théorème 1.22. *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et g est une fonction à variation bornée sur $[a,b]$, alors f est intégrable au sens de Stieljes par rapport à g sur $[a,b]$.*

Propriétés de l'intégrale de Stieltjes

1. Si $\varphi_0 \in \mathcal{X}$:
$$\int_a^b \varphi_0 dg(t) = \varphi_0 \left[g(a) - g(b)\right],$$
2. Si φ est une fonction numérique appartenant à $C[a,b]$, et $f_0 \in \mathcal{X}$ alors
$$\int_a^b \varphi(t) f_0 dg(t) = \int_a^b \varphi(t) dg(t) f_0.;$$
3.
$$\int_a^b (f_1(t) + f_2(t)) dg(t) = \int_a^b f_1(t) dg(t) + \int_a^b f_2(t) dg(t).$$
4.
$$\int_a^b f(t) d(g_1 + g_2)(t) = \int_a^b f(t) dg_1(t) + \int_a^b f(t) dg_2(t).$$
5. pour $c \in]a,b[$
$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^c f(t) dg(t) + \int_c^b f(t) dg(t).$$

On peut définir les intégrales de Stieltjes impropres de la manière suivante

$$\int_{-\infty}^b f(t) dg(t) = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(t) dg(t).$$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dg(t) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t) dg(t).$$

Et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dg(t) = \int_{-\infty}^a f(t) dg(t) + \int_a^{+\infty} f(t) dg(t).$$

1.2.13 L'intégrale de Bochner

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{X}$. Soit $\mathcal{M}$ une mesure définie sur $[a,b]$.

Définition 1.37. *On dit que f est une fonction simple, si elle prend sur $[a,b]$ un nombre fini de*

valeurs x_i sur $\mathcal{D}_i$ avec $\mathcal{D}_i \subset [a,b]$ et $\cup \mathcal{D}_i = [a,b]$.

L'intégrale de Bochner d'une fonction simple est égale à

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{M}(\mathcal{D}_i),$$

et est notée

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{M}.$$

Définition 1.38. *Une fonction f à valeurs dans $\mathcal{X}$. est dite mesurable si elle est la limite presque partout d'une suite f_n de fonctions simples.*

Définition 1.39. *Une fonction f est dit intégrable au sens de Bochner s'il existe une suite de fonction simples f_n telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\| \, d\mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

L'intégrale de Bochner de la fonction f est notée

$$\int_a^b f(t) d\mathcal{M}$$

et est égale à

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) d\mathcal{M}.$$

CHAPITRE 2

LA NOTION DE MULTI-CORRECTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY ABSTRAIT

2.1 La notion de problème mal posé

Les problèmes des sciences et techniques conduisent souvent à la l'étude d'équations linéaires abstraites de la forme :

$$Ax = y. \tag{2.1}$$

Où A est un opérateur défini sur un espace vectoriel normé $\mathcal{X}$ à valeurs dans un autre espace vectoriel normé $\mathcal{Y}$.

A la suite du mathématicien JACQUES HADAMARD nous disons que le problème (2.1) est bien posé dans le couple d'espaces vectoriels normés $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ si les conditions suivantes sont réalisées :

1. pour tout élément $u \in \mathcal{Y}$ il existe une solution z appartenant à l'espace $\mathcal{X}$;
2. la solution est unique ;
3. le proplème est stable sur les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, c-à-d une petite perturbation du second membre u n'engendre qu'une petite variation de z.

On dit que le problème (2.1) est mal posé (ou incorrectement posé) si l'une des ces trois conditions n'est pas vérifiée.

Exemple.

4. Problème inverse pour l'opérateur de Bessel. Le problème est de trouver la température initiale $u(x, 0) = g(x)$ qui vérifie le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x},\ 0<x<1$$
$$u\left(1,t\right)=0,\ \ 0<t<T$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0} x\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,t\right)=0,$$
$$u\left(x,T\right)=f\left(x\right).$$

Soit

$$A=\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x},$$

défini sur $H_x\left[0,1\right]$ avec

$$D\left(A\right)=\left\{u\in H_x\left[0,1\right],\ u\left(1\right)=0,\ \lim_{x\longrightarrow 0} xu'\left(x\right)=0\right\}.$$

D'après la méthode de séparation des variables on trouve la solution sous la forme

$$u\left(x,t\right)=\sum_{i=1}^{+\infty} C_i\exp\left(-\lambda_i t\right)\phi_i\left(x\right),$$

avec

$$\phi_i\left(x\right)=\alpha_i J_0\left(\sqrt{\lambda_i}x\right),$$

où

$$\alpha_i=\frac{\sqrt{2}}{J_0'\left(\sqrt{\lambda_i}\right)},$$

sont les fonctions propres associées aux valeurs propres de l'opérateur de Bessel

$$\sqrt{\lambda_i}\ i=0,1,...$$

qui sont des racines positives de l'équation

$$J_0\left(x\right)=0,$$

et $J_0\left(\sqrt{\lambda_i}x\right)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro, et

$$C_i=\int_0^1 x\phi_i\left(x\right)g\left(x\right)dx.$$

Comme le problème est de trouver

$$g\left(x\right)=u\left(x,0\right),$$

en connaissant

$$f(x) = u(x,T)$$

on trouve :

$$g(x) = \int_0^1 K(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

où

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{+\infty} \xi \exp(-\lambda_i T)\, \phi_i(\xi)\, \phi_i(x).$$

Si on fait une petite perturbation dans la température finale f, sous la forme

$$f^\delta = f + \delta\phi_i,$$

on obtient une solution perturbée

$$g^\delta = g + \delta\phi_i \exp(\lambda_i T),$$

ce qui signifie que

$$\left|g^\delta - g\right| = \exp(\lambda_i T)\left|f^\delta - f\right|.$$

Dans cette dernière formule le coefficient $\exp(\lambda_i T)$ peut provoquer une perturbation arbitrairement grande dans la température initiale même avec une petite erreur dans les mesures de la température finale. Donc ce problème est mal posé.

2.2 La notion de multi-correction

Dans cette partie, on présente la notion de multi-correction d'un problème de Cauchy abstrait. On considère le problème :

$$\sum_{j=0}^{n} A_j u^j(t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2.3}$$

$$u^j(0) = u_j, \qquad j = 0, ...n-1. \tag{2.4}$$

où les A_j sont des opérateurs linéaires fermés de l'espace de Banach $\mathcal{X}$, vers l'espace de Banach $\mathcal{Y}$, on suppose de plus que l' opérateur A_n est dégénéré.
Les définitions suivantes sont reprises du travail de L. A. Vlasenko, A. L. Piven' et A. G. Rutkas [23].

Définition 2.1. *On appelle solution du problème (2.3), (2.4) chaque fonction u satisfaisant les conditions :*

(i) $u \in C^n(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{X}) \bigcap C^{n-1}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$;

(ii) $A_k u \in C^k(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{Y}) \bigcap C^{k-1}(\mathbb{R}_+, \mathcal{Y})$;

(iii) $u^j(0) = u_j, \quad j = 0, ...n-1.$

Définition 2.2. *Le problème (2.3), (2.4) est dit determiné si pour les données initiales* $u_j = 0,\ j = 1, ..., n$, *il possède uniquement la solution triviale.*

Définition 2.3. *Le problème (2.3), (2.4) est dit p-correct,* $p \in \{1, ..., n\}$, *si toute solution* $u(t)$ *vérifie l'estimation suivante :*

$$\left\| u^{p-1}(t) \right\| \leq K(t) \sum_{j=0}^{n-1} \|u_j\|, t \geq 0 \tag{2.5}$$

où $K(t)$ *est une fonction numérique non négative de* $[0, \infty)$ *dans* $[0, \infty)$.

Définition 2.4. *On dit que le problème (2.3), (2.4) est p-correct uniformément, si l'estimation (2.5) est vraie et* $K(t)$ *est localement borné.*

Définition 2.5. *On dit que le problème (2.3), (2.4) est p-correct exponentiellement si* $K(t) = Ce^{\omega t} (C \geq 0 \ et \ \omega \geq 0)$

Définition 2.6. *Si le problème (2.3), (2.4) est n-correct, on dit qu'il est totalement correct.*

Remarque 2.1. *Si le problème (2.3), (2.4) est p-correct exponentiellement, alors il est p-correct.*

Exemples.

On considère l'équation de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \ \ t > 0, \ -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = 0.$$

La solution de ce problème est donnée par

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2} [f(x - Ct) + f(x + Ct)].$$

Alors

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2} [G(-Ct) f(x) + G(Ct) f(x)].$$

Où $\{G(t)\}$ est le semi-groupe de générateur infinitésimal l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$.
Nous avons

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\| &= \left\| \frac{1}{2} \left[G(-Ct) f(x) + G(Ct) f(x) \right] \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|G(-Ct)\| \|f(x)\| + \|G(Ct)\| \|f(x)\|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme $G(-Ct)$ est fortement continu, alors il existe M et ω tel que $\|G(-Ct)\| \leq M \exp(-\omega Ct)$ et $\|G(Ct)\| \leq M \exp(\omega Ct)$, ceci implique que

$$\|u(x,t)\| \leq \tfrac{1}{2} \left(\exp(\omega Ct) + \exp(-\omega Ct) \right) \|f(x)\|,$$

ceci implique qu'il existe $K(t) = \max\left(\frac{1}{2} \left(\exp(\omega Ct) + \exp(-\omega Ct) \right), 1 \right)$, tel que :

$$\|u(x,t)\| \leq K(t) \sum_{j=0}^{1} \|u_j\|.$$

Pour u_t nous avons

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{dG(-Ct) f(x)}{dt} + \frac{dG(Ct) f(x)}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[AG(-Ct) f(x) + AG(Ct) f(x) \right], \end{aligned} \tag{2.7}$$

comme A est un opérateur non borné, alors il n'existe pas une fonction non négative $K(t)$ tel que :

$$\|u_t(x,t)\| \leq K(t) \sum_{j=0}^{1} \|u_j\|.$$

Donc le problème de la corde vibrante est correct mais n'est pas 2-fois correct.

CHAPITRE 3

CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA P-CORRECTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY ABSTRAIT

3.1 Résultats intermédiaires

Dans cette section, nous démontrons trois lemmes. qui nous seront utiles dans la démonstration des principaux résultats de ce chapitre.

A l'équation (2.3) on associe les faisceaux opératoriels

$$\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{P}_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{j} A_k \lambda^k, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{Q}_j(\lambda) = \sum_{k=j+1}^{n} A_k \lambda^{k-j-1}, \tag{3.3}$$

pour $j \in \{0, ...n-1\}$.

Soit

$$\mathcal{G}(a,\theta) = \left\{ \lambda = a + re^{i\varphi},\ |\varphi| \leq \theta,\ a, r > 0,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right\}.$$

un secteur dans le plan complexe

Dans [23] sont démontres les résultats suivants.

Théorème 3.1 (Théorème 4). *Si $\mathcal{G}(a,\theta) \in \rho(\mathcal{P}(\lambda))$ où $C > 0$, et $p \in \{1, ..., n\}$, telles que*

$$\|R(\lambda) A_j x\| \leq \frac{C}{|\lambda|^{p-1}} \|x\|, \qquad x \in D_{\mathcal{P}},\ \ j = 0, ..., n-1. \tag{3.4}$$

pour $\lambda \in \mathcal{G}(a,\theta)$, alors le problème (2.3), (2.4) est p-fois exponentiellement correct et complètement correct.

Théorème 3.2 (Corollaire 1). *Supposons que $n>0$, $D_{\mathcal{P}}$ est dense dans $\mathcal{X}$, et $p \in \{1,...,n\}$, dans un certain angle $\mathcal{G}(a,\theta)$, $a>0$, si $S(\lambda)$ satisfait les estimations*

$$\|S(\lambda) A_j\| \leq C|\lambda|^{n-p}, j=0,...n-1.$$

$$\|S(\lambda)A_j x\| \leq C|\lambda|^{q_j}\|x\|, \lambda \in \mathcal{G}, j=0,\cdots n-2,$$

avec $q_j < n-j-1$,
alors le problème de Cauchy (2.3), (2.4) est complètement correct et p-foits exponentiellement correct.

Lemme 3.1. *S'il existe $j \in \{0,...n-1\}$ tel que*
$h_1)$ $\mathcal{G}(a,\theta) \subset \rho(\mathcal{Q}_j(\lambda))$,
$h_2)$ $\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda) A_k x\right\|_{\mathcal{X}} \leq C|\lambda|^{j+1} e^{\sigma|\lambda|}\|x\|_{\mathcal{X}}$, $k=1,...n$,
$h_3)$ $\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda) A_k x\right\|_{\mathcal{X}} \leq C_j|\lambda|^{q_{k_j}}\|x\|_{\mathcal{X}}$, $k=0,..j$, *avec* $\frac{\ln C_j}{\ln(a\sin\theta)} < q_{k_j} < j-k+1$,
alors,

$$\mathcal{G}(a,\theta) \subset \rho(\mathcal{P}(\lambda)),$$

et

$$\left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda) A_k x\right\|_{\mathcal{X}} \leq C_1 e^{\sigma|\lambda|}\|x\|_{\mathcal{X}}, \ k=1,...n. \tag{3.5}$$

pour un certain C_1 positif

Preuve :
Si $\lambda \in \mathcal{G}(a,\theta)$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{Q}_j(\lambda))$, et $\mathcal{Q}_j(\lambda)$ sont inversibles, $j=0,...n-1$.
Nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\lambda) &= \lambda^{j+1}\mathcal{Q}_j(\lambda)+\mathcal{P}_j(\lambda)\\ &= \lambda^{j+1}\mathcal{Q}_j(\lambda)\left[I+\lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_j(\lambda)\right].\end{aligned}$$

D'après (h_3), nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_j(\lambda)\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{k=0}^{j}|\lambda|^{k-j-1}\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)A_k\right\|_{\mathcal{X}}\\ &\leq C_j\sum_{k=0}^{j}|\lambda|^{k-j-1+q_{k_j}}.\end{aligned}$$

Si on pose $N_j = \max(j+1-k-q_{k,j})$, alors

$$\left\|\lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_j(\lambda)\right\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C_j(j+1)}{|\lambda|^{N_j}}.$$

Si

$$N_j > \tfrac{\ln C_j}{\ln(a\sin\theta)},$$

alors

$$\left\|\lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_j(\lambda)\right\|_{\mathcal{X}} < 1. \tag{3.6}$$

du théorème 1.14, on déduit que l'opérateur

$$I + \lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_j(\lambda),$$

possède un inverse borné. Par conséquent $\mathcal{P}(\lambda)$ est inversible et nous avons :

$$\mathcal{P}^{-1}(\lambda) = \lambda^{-j-1}\left(I + \lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_j(\lambda)\right)^{-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda). \tag{3.7}$$

Si on pose

$$\mathcal{R}_j(\lambda) = \left(I + \lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_j(\lambda)\right)^{-1}, \tag{3.8}$$

on peut écrire :

$$\mathcal{P}^{-1}(\lambda) = \mathcal{R}_j(\lambda)\lambda^{-j-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda). \tag{3.9}$$

Et donc

$$\left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_k x\right\|_{\mathcal{X}} \leq \|\mathcal{R}_j(\lambda)\|_{\mathcal{X}}|\lambda|^{-j-1}\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)A_k x\right\|_{\mathcal{X}}.$$

En utilisant l'hypothèse (h_2), on obtient

$$\left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_k x\right\|_{\mathcal{X}} \leq C\|\mathcal{R}_j(\lambda)\|_{\mathcal{X}} e^{\sigma|\lambda|}\|x\|_{\mathcal{X}}. \tag{3.10}$$

$R_j(\lambda)$ étant borné il existe C_1 positif tel que

$$\left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_k x\right\|_{\mathcal{X}} \leq C_1 e^{\sigma|\lambda|}\|x\|_{\mathcal{X}}, \quad k = 1,...n, \tag{3.11}$$

Corollaire 3.1. *Si les hypothèses (h_1), (h_2) et (h_3) sont vérifiés, alors*

$$\left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}_k(\lambda)\right\|_{\mathcal{X}} \leq Ce^{\sigma|\lambda|}f_k(|\lambda|), k = 1,...n, \tag{3.12}$$

où

$$f_k(\lambda) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda^{i-k-1}. \tag{3.13}$$

Preuve

Nous avons

$$\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{Q}_k(\lambda) = \mathcal{P}^{-1}(\lambda) \sum_{i=k+1}^{n} A_k \lambda^{i-k-1},$$

d'après le lemme 4.1, on trouve

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{Q}_k(\lambda)\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{i=k+1}^{n} |\lambda|^{i-k-1} \left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\,A_k\right\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq Ce^{\sigma|\lambda|} \sum_{i=k+1}^{n} |\lambda|^{i-k-1} = Ce^{\sigma|\lambda|} f_k(|\lambda|), \end{aligned}$$

où les f_k sont définis dans (3.13).

Lemme 3.2. *Si les hypothèses du Lemme 3.1 sont satisfaites et que u est une solution du problème (2.3), (2.4) alors il existe $M > 0$, tel que*

$$\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq Me^{(a-a\cos\theta)t} \sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\|_{\mathcal{X}}, \tag{3.14}$$

pour

$$t > -\tfrac{\sigma}{\cos\theta}, \quad m = 0, \ldots n-1.$$

Preuve les hypothèses du Lemme 4.1 sont satisfaites, alors la relation (3.5) est vraie et en appliquant le Lemme 1 dans ([23]), nous obtenons la représentation suivante pour la solution u et ses dérivées :

$$u^m(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^m e^{\lambda t} \mathcal{P}^{-1}(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{Q}_k(\lambda)\,u_k d\lambda, \tag{3.15}$$

pour $t > -\frac{\sigma}{\cos\theta}$, et Γ est la frontière de $\mathcal{G}(a,\theta)$.

Nous avons

$$\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C}{2\pi} \int_{\Gamma} |\lambda|^m e^{tRe\lambda} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{Q}_k(\lambda)\,u_k \right\|_{\mathcal{X}} d\lambda. \tag{3.16}$$

Grâce au corollaire 4.1, nous pouvons écrire

$$\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C}{2\pi} \int_{\Gamma} |\lambda|^m e^{tRe\lambda} e^{\sigma|\lambda|} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(|\lambda|)\,\|u_k\|_{\mathcal{X}}\, d\lambda, \tag{3.17}$$

Pour $\lambda \in \mathcal{G}(a,\theta)$, où

$$|\lambda| \leq a + r, \text{ et } Re\lambda = a + r\cos\theta.$$

En utilisant la paramétrisation $\lambda = a + re^{i\theta}$, l'estimation (3.17) peut s'écrire comme suit

$$\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C}{\pi}\int_0^{\infty}(a+r)^m e^{t(a+r\cos\theta)}e^{\sigma(a+r)}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(a+r)\|u_k\|_{\mathcal{X}}\,dr,$$

donc

$$\begin{aligned}\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq \frac{C}{\pi}e^{t(a-a\cos\theta)}\int_0^{\infty}e^{(\sigma+t\cos\theta)(a+r)}\sum_{k=0}^{n-1}(a+r)^m f_k(r+a)\|u_k\|_{\mathcal{X}}\,dr,\\ &\leq \frac{C}{\pi}e^{t(a-a\cos\theta)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\infty}e^{(\sigma+t\cos\theta)(a+r)}\\ &\qquad (a+r)^m f_k(r+a)\|u_k\|_{\mathcal{X}}\,dr. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Si on pose

$$\mathcal{F}_k(t) = \int_0^{\infty}e^{(\sigma+t\cos\theta)(a+r)}(a+r)^m f_k(r+a)\,dr, \qquad (3.19)$$

en remplaçant f_k par son expression dans (3.13) on obtiens

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k(t) &= \sum_{i=k+1}^{n}\int_0^{\infty}e^{(\sigma+t\cos\theta)(a+r)}(a+r)^{m+i-k-1}\,dr\\ &= \sum_{i=k+1}^{n}\frac{(m+i-k-1)!}{(\sigma+t\cos\theta)^{m+i-k}}.\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\mathcal{F}_k(t) \leq \sum_{i=k+1}^{n}\frac{(m+i-k-1)!}{\alpha^{m+i-k}}. \qquad (3.20)$$

D'après (3.20) et (3.18), on trouve

$$\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq Ne^{\omega t}\sum_{k=0}^{n-1}\|u_k\|_{\mathcal{X}},$$

pour

$$t > \tfrac{-\sigma}{\cos\theta}, \quad m = 0, \ldots n-1,$$

avec

$$N = \frac{C}{\pi} \max_{\substack{k=0,...n-1 \\ m=0,...n-1}} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(m+i-k-1)!}{\alpha^{m+i-k}},$$

et

$$\omega = a - a\cos\theta < 2a.$$

Lemme 3.3. *Si $\lambda \in \mathcal{G}(a,\theta)$, et Γ est la frontière de $\mathcal{G}(a,\theta)$, nous avons*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda = \begin{cases} 0 & k < m, \\ \frac{t^{k-m}}{(k-m)!} & k \geq m. \end{cases}$$

Preuve : Introduisons les ensembles $\Gamma_R,\ \Delta_R$ et Δ comme suit :

$$\Gamma_R = \{\lambda \in \Gamma,\ |\lambda| \leq R\}.$$

$$\Delta_R = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}(a,\theta),\ |\lambda| = R\}.$$

$$\Delta = \Gamma_R \cup \Delta_R.$$

nous avons :

$$\int_{\Delta} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda = \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda + \int_{\Delta_R} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda. \tag{3.21}$$

on pose

$$\psi(\lambda) = e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1},$$

En utilisant la paramétrisation $\lambda = re^{i\omega}$, pour $\lambda \in \Delta_R$, avec $\omega \in [\pi-\theta, \pi+\theta]$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on peut écrire :

$$|\lambda\psi(\lambda)| = \left|e^{\lambda t}\lambda^{m-k}\right| = \left|e^{\lambda t}\right|\left|\lambda^{m-k}\right| = e^{tRe\lambda}R^{m-k} = e^{tR\cos\theta}R^{m-k}.$$

Ainsi, si $k < m$, il est clair que

$$\lim_{R\to\infty} e^{tR\cos\theta}R^{m-k} = 0,$$

et en vertu du lemme de Jordan, on obtient

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Delta_R} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda = 0, \tag{3.22}$$

et

$$\int_{\Delta} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda = 0. \tag{3.23}$$

D'après (3.21),(3.22) et (3.23), nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Delta} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda - \lim_{R\to\infty}\int_{\Delta_R} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda \\ &= 0-0=0.\end{aligned}$$

Si $k\geq m$ alors $k+1>m$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{\Delta} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda &= \int_{\Delta}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{k+1-m}}d\lambda \\ &= \frac{2\pi i}{(k-m)!}\psi^{k-m}(0) \\ &= \frac{2\pi i}{(k-m)!}t^{k-m},\end{aligned} \tag{3.24}$$

qui conduit à

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Delta} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda - \lim_{R\to\infty}\int_{\Delta_R} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda \\ &= \frac{2\pi i}{(k-m)!}t^{k-m}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ainsi, grâce à (3.25), on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{m-k-1}d\lambda = \frac{t^{k-m}}{(k-m)!}, \tag{3.26}$$

pour $k\geq m$.

3.2 Les principaux resultats

Dans cette section, nous utilisons les résultats de la section précédente pour obtenir de conditions appropriées garantissant la dépendance continue de la solution du problème (2.3), (2.4) et de ses dérivées $u',...,u^{(p-1)}$ des données initiales (2.4) en chaque point fixe $t_0>0$.

Théorème 3.3. *Si les hypothèses* (h_1) *et* (h_3) *du Lemme 4.1. sont satisfaites et a lieu*

$$\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda) A_k x\right\|_{\mathcal{X}} \leq C|\lambda|^{j-p+2}\|x\|_{\mathcal{X}}, \tag{3.27}$$

pour p *fixé dans* $\{1,...n\}$ *et* $k=1,...n-1$ *alors le problème (2.3), (2.4) est* $n-$*fois correct.*

Preuve : De (3.3), nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda) A_n &= \lambda^{j-n+1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\left(\mathcal{Q}_j(\lambda)-\sum_{k=j+1}^{n-1} A_k\lambda^{k-j-1}\right)\\ &= \lambda^{j-n+1}I-\sum_{k=j+1}^{n-1}\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\lambda^{k-n}A_k.\end{aligned}$$

De la condition (3.27), nous obtenons

$$\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda) A_n\right\|_{\mathcal{X}} \leq |\lambda|^{j-n+1}+C\sum_{k=j+1}^{n-1}|\lambda|^{k+j-n-p+2}. \tag{3.28}$$

À partir de l'inégalité (3.28), on peut écrire

$$\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda) A_n\right\|_{\mathcal{X}} \leq |\lambda|^{j-p+1}\left(|\lambda|^{p-n}+C\sum_{k=j+1}^{n-1}|\lambda|^{k-n+1}\right). \tag{3.29}$$

Puisque $p\leq n$ et $k\leq n-1$, il existe $C>0$ tel que :

$$\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda) A_n\right\|_{\mathcal{X}} \leq C|\lambda|^{j-p+1}. \tag{3.30}$$

Les relations (3.27) et (3.30) prouvent que les hypothèses du lemme 4.1 sont vérifiés.
En vertu du lemme 3.3, si u est une solution du problème (2.3), (2.4), pour tout $\sigma>0$

$$\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq Me^{a(1+\cos\theta)t}\sum_{k=0}^{n-1}\|u_k\|_{\mathcal{X}}, \tag{3.31}$$

pour $t>-\frac{\sigma}{\cos\theta}$, et $m=0,1...n-1$. Pour t positif arbitraire, nous prenons $t_0=\frac{t}{2}$, et $\sigma_0=-t_0\cos\theta$. on a $t>\frac{-\sigma_0}{\cos\theta}$, ceci implique que :

$$\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq Me^{at(1+\cos\theta)}\sum_{k=0}^{n-1}\|u_k\|_{\mathcal{X}}, \quad t>0, \tag{3.32}$$

pour $m=0,...n-1$.

Si $\cos\theta < 0$ alors $1+\cos\theta < 1$. La relation (3.32) peut s'écrire comme suit :

$$\left\|u^m(t)\right\|_{\mathcal{X}} \leq Me^{at}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}, \quad t>0, \tag{3.33}$$

pour $m=0,...n-1$. Ce qui signifie que le problème (2.3), (2.4) est $n-$fois correcte.

Théorème 3.4. *Si les conditions du théorème 4.1 sont satisfaites, alors le problème (2.3), (2.4) est $p-$fois exponentiellement correct.*

Preuve. De la même manière que la preuve du théorème 4.1,on trouve qu'il existe $M'>0$, tel que

$$\left\|u^m(t)\right\|_{\mathcal{X}} \leq M'e^{at}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}, \tag{3.34}$$

pour $t\geq 1$, et $m=0,1...n-1$. Supposons maintenant $t\in\left]0,1\right[$, à partir de (3.2) et (3.3), nous pouvons obtenir

$$\mathcal{Q}_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{k+1}}\left(\mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{P}_k(\lambda)\right), \tag{3.35}$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-2}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}_k(\lambda)u_k &= \sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{-k-1}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\left(\mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{P}_k(\lambda)\right)u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{-k-1}u_k - \sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{-k-1}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_k(\lambda)u_k. \end{aligned}\tag{3.36}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} u^m(t) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^m e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}_k(\lambda)u_k d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^m e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}_k(\lambda)u_k d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^m e^{\lambda t}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_n u_{n-1}d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{m-k-1}e^{\lambda t}u_k d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{m-k-1}e^{\lambda t}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\mathcal{P}_k(\lambda)u_k d\lambda - \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^m e^{\lambda t}\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_n u_{n-1}d\lambda. \end{aligned}\tag{3.37}$$

De (3.37) et (3.9), nous avons

$$\begin{aligned} u^m(t) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{m-k-1}u_k d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{m-k-j-2}\mathcal{R}_j(\lambda)\,\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\,\mathcal{P}_k(\lambda)\,u_k d\lambda \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{m-j-1}e^{\lambda t}\mathcal{R}_j(\lambda)\,\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\,A_n u_{n-1}d\lambda. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Du lemme 4.3, on trouve

$$\begin{aligned} u^m(t) &= -\sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}u_k \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{m-k-j-2}\mathcal{R}_j(\lambda)\,\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\,\mathcal{P}_k(\lambda)\,u_k d\lambda \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{m-j-1}e^{\lambda t}\mathcal{R}_j(\lambda)\,\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\,A_n u_{n-1}d\lambda. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Soit Γ_t le secteur du plan complexe défini par

$$\Gamma_t = \left\{\lambda = \frac{a}{t} + re^{i\varphi},\ |\arg| \le \theta\right\},$$

pour $t \in]0,1[$.
Les fonctions sous le signe de l'intégration dans (3.39) sont analytiques, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} u^m(t) &= -\sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}u_k \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_t} e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{m-k-j-2}\mathcal{R}_j(\lambda)\,\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\,\mathcal{P}_k(\lambda)\,u_k d\lambda \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_t} \lambda^{m-j-1}e^{\lambda t}\mathcal{R}_j(\lambda)\,\mathcal{Q}_j^{-1}(\lambda)\,A_n u_{n-1}d\lambda. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Si nous posons $\mathcal{Z}=\lambda t$ Alors :

$$\begin{aligned} u^m(t) &= -\sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}u_k \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mathcal{Z}}}{t}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)^{m-k-j-2}\mathcal{R}_j\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\mathcal{P}_k\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)u_k d\mathcal{Z} \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mathcal{Z}}}{t}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)^{m-j-1}\mathcal{R}_j\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)A_n u_{n-1}d\mathcal{Z}, \end{aligned}$$

Cela conduit à l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\|u_k\|_{\mathcal{X}} \\ &+ \frac{G_0}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{Re\mathcal{Z}}}{t}\sum_{k=0}^{n-2}\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{m-k-j-2}\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\mathcal{P}_k\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\right\|_{\mathcal{X}}\|u_k\|_{\mathcal{X}}\,d\mathcal{Z} \\ &+ \frac{G_0}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{Re\mathcal{Z}}}{t}\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{m-j-1}\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)A_n\right\|_{\mathcal{X}}\|u_{n-1}\|_{\mathcal{X}}\,d\mathcal{Z}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

En utilisant la relation (3.27), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\mathcal{P}_k\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\right\|_{\mathcal{X}} = \left\|\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\sum_{s=0}^{k}A_s\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)^s\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{s=0}^{k}\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^s\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}A_s\right\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq C\sum_{s=0}^{k}\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{j-p+2+s}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2}\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{m-k-j-2}\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\mathcal{P}_k\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)\right\|_{\mathcal{X}} &\leq C\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{k}\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{m-k+s-p} \\ &= C\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{k}\left|\frac{t}{\mathcal{Z}}\right|^{p-m+k-s}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

De la même manière, nous avons

$$\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)A_n\right\|_{\mathcal{X}} \leq G_2\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{j+1-p}.$$

Donc

$$\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{m-j-1}\left\|\mathcal{Q}_j^{-1}\left(\frac{\mathcal{Z}}{t}\right)A_n\right\|_{\mathcal{X}}\leq G_2\left|\frac{\mathcal{Z}}{t}\right|^{m-p}=G_2\left|\frac{t}{\mathcal{Z}}\right|^{p-m}. \tag{3.43}$$

En remplaçant(3.42) et (3.43) dans (3.41), on trouve

$$\begin{aligned}\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\|u_k\|_{\mathcal{X}}\\ &+ \frac{G_3}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{Re\mathcal{Z}}}{|\mathcal{Z}|}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{t}{|\mathcal{Z}|}\right)^{p-m+k-s-1}\|u_k\|_{\mathcal{X}}\,d\mathcal{Z}\\ &+ \frac{G_4}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{Re\mathcal{Z}}}{t}\frac{t^{p-m}}{|\mathcal{Z}|^{p-m}}\|u_{n-1}\|_{\mathcal{X}}\,d\mathcal{Z},\end{aligned}$$

où $G_3=CG_0$, et $G_4=G_2G_0$. Cela conduit à :

$$\begin{aligned}\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\|u_k\|_{\mathcal{X}}\\ &+ \frac{G_3}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{Re\mathcal{Z}}}{t}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{t}{|\mathcal{Z}|}\right)^{p-m+k-s}\|u_k\|_{\mathcal{X}}\,d\mathcal{Z}\\ &+ \frac{G_4}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{Re\mathcal{Z}}}{t}\frac{t^{p-m}}{|\mathcal{Z}|^{p-m}}\|u_{n-1}\|_{\mathcal{X}}\,d\mathcal{Z}.\end{aligned}$$

En utilisant la paramétrisation $\mathcal{Z}=at+tre^{i\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|u^m(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\|u_k\|_{\mathcal{X}}\\ &+ \frac{G_3}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{at+tr\cos\theta}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{1}{a+r}\right)^{p-m+k-s}\|u_k\|_{\mathcal{X}}\,dr\\ &+ \frac{G_4}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{at+tr\cos\theta}\left(\frac{1}{a+r}\right)^{p-m}\|u_{n-1}\|_{\mathcal{X}}\,dr.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons que

$$\begin{aligned}\left\|u^m(t)\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}} \\ &+ \frac{G_3}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{at+tr\cos\theta}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{k}(a+r)^{m-p+s-k}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}dr \\ &+ \frac{G_4}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{at+tr\cos\theta}(a+r)^{m-p}\left\|u_{n-1}\right\|_{\mathcal{X}}dr.\end{aligned}$$

nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}\left\|u^m(t)\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}} \\ &+ \frac{G_3}{2\pi}e^{(a-a\cos\theta)t}\int_0^{\infty} e^{t\cos\theta(a+r)}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{k}(a+r)^{m-p+s-k}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}dr \\ &+ \frac{G_4}{2\pi}e^{(a-a\cos\theta)t}\int_0^{\infty} e^{t\cos\theta(a+r)}(a+r)^{m-p}\left\|u_{n-1}\right\|_{\mathcal{X}}dr. \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Pour $m<p$, nous avons $m-p+s-k<0$, donc

$$(a+r)^{m-p+s-k}<(a)^{m-p+s-k}.$$

Si on pose $M_k=\max\limits_{s=0,\ldots k}a^{m-p+s-k}$, nous obtenons

$$\int_0^{\infty} e^{t\cos\theta(a+r)}\sum_{s=0}^{k}(a+r)^{m-p+s-k}dr\leq(k+1)M_k\int_0^{\infty} e^{t\cos\theta(a+r)}dr=\frac{-(k+1)M_k e^{ta\cos\theta}}{t\cos\theta}.$$

De la même manière, nous pouvons écrire

$$\int_0^{\infty} e^{t\cos\theta(a+r)}(a+r)^{m-p}dr\leq a^{m-p}\int_0^{\infty} e^{(a+r)t\cos\theta}dr=\frac{-a^{m-p}e^{ta\cos\theta}}{t\cos\theta}.$$

Et finalement

$$\left\|u^m(t)\right\|_{\mathcal{X}}\leq\sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}+\frac{G_3}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{-(k+1)M_k e^{ta\cos\theta}}{t\cos\theta}\left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}+\frac{G_4}{2\pi}\left(\frac{-a^{m-p}}{t\cos\theta}\right)e^{at}\left\|u_{n-1}\right\|_{\mathcal{X}}.$$

Nous avons $t > 0$ et $\cos\theta < 0$, alors il existe K_1 et K_2 tels que :

$$\left\|u^m(t)\right\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{k=m}^{n-2} \frac{t^{k-m}}{(k-m)!} \left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}} + K_1 e^{ta} \sum_{k=0}^{n-2} \left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}} + K_2 e^{at} \left\|u_{n-1}\right\|_{\mathcal{X}}.$$

Nous avons également

$$\sum_{k=m}^{n-2} \frac{t^{k-m}}{(k-m)!} \left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{k=m}^{n-2} \left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}.$$

Si nous posons $K = \max(1, K_1, K_2)$, nous obtenons

$$\left\|u^m(t)\right\|_{\mathcal{X}} \leq K e^{ta} \sum_{k=0}^{n-1} \left\|u_k\right\|_{\mathcal{X}}.$$

De cette relation et de la relation (3.34) nous concluons que le problème (2.3), (2.4) est $p-$fois exponentiellement correct.

CHAPITRE 4

CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA P-CORRECTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY ABSTRAIT DANS UN ESPACE DE HILBERT

Dans ce chapitre, nous étudions le problème (2.3), (2.4) dans un espace de Hilbert et nous obtenons des conditions suffisantes pour la multi-correction de ce problème.
Ces conditions portent sur les normes des coefficients opératoriels A_j.

4.1 Conditions sur les coefficients opératoriels dans le cas d'un espace de Hilbert

Dans ([23]) sont démontrés les résultats suivants.

Théorème 4.1 (Théorème 5). *Nous supposons $n > 1$, A_n est un opérateur auto-adjoint non négatif borné, et de plus $A_{n-1} = F + B$, où F est un opérateur auto-adjoint et B est symétrique ou anti-symétrique. Nous supposons de même que $\bigcap_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}(A_j)$ est dense dans $\mathcal{H}$, que $\mathcal{D}(F) \subset \bigcap_{j=0}^{n-2} \mathcal{D}\left(A_j^*\right) \bigcap \mathcal{D}(B)$, et que pour un certain $b \geq 0$, l'opérateur $F + bA_n$ est positivement défini et*

$$q = \left\| B\left(F + bA_n\right)^{-1} \right\| < 1. \tag{4.1}$$

Alors le problème de Cauchy (2.3), (2.4) est complètement correct et $(n-1)-$fois exponentiellement correct, si en plus A_n est positivement défini, alors le problème de Cauchy (2.3), (2.4) est totalement exponentiellement correct.

Théorème 4.2 (Théorème 6). *Pour $n>1,\ \mathcal{D}_L$, dense dans $\mathcal{H},\ A_n=A_n^*\geq 0,\ , A_{n-1}=F+B$, avec $F=F^*,\ B$ est un opérateur symétrique ou anti-symétrique, et pour certain nombre $b\geq 0$, l'estimation (4.1) est vraie, de plus $F+bA_n\geq mI>0,\ \mathcal{D}((F+bA_n)^{\frac{1}{2}})\subset\mathcal{D}(A_n)\bigcap\left(\bigcap_{j=0}^{n-2}\mathcal{D}(A_j^*)\right)\bigcap\mathcal{D}(B)$. Le problème de Cauchy (2.3), (2.4) est alors complètement correct et (n-1)-foits exponentiellement correct. Si en plus A_n est positivement défini et borné, le problème est totalement exponentiellement correct.*

Remarquons que dans le théorème 5.2 l'opérateur A_n n'est pas supposé borné.

4.2 Résultat principal

Dans cette section, nous pressentons le résultat principal de ce chapitre qui détermine des conditions suffisantes pour la multi-correction du problème (2.3), (2.4) dons le cas où l'opérateur A_n est non borné et non auto-adjoint.

Théorème 4.3. *On suppose $n>1$, et sont vérifiéer les hypothèses suivantes :*
h_1. $A_n=K+C$, *avec K un opérateur positif auto-adjoint et C un opérateur symétrique*
h_2. $\overline{A_{n-1}}$ *est un opérateur symétrique,*
h_3. $\bigcap_{j=0}^{n-1}\mathcal{D}(A_j)=\mathcal{H}$
h_4. $\mathcal{D}(C^*)\subset\bigcap_{j=0}^{n-2}\mathcal{D}\left(A_j^*\right)\cap\mathcal{D}(A_{n-1}),\ \mathcal{D}(K)\subset\mathcal{D}(C)$,
h_5. *Il existe $b\geq 0$, tel que l'opérateur $A_{n-1}+bK$ est positivement défini*

$$q=\left\|C\left(A_{n-1}+bK\right)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{|\lambda|} \tag{4.2}$$

et

$$\left\|\left(A_{n-1}+bK\right)K^{-1}\right\|\leq b. \tag{4.3}$$

Alors le problème de Cauchy (2.3), (2.4) est totalement exponentiellement correct.

Preuve. Pour $\lambda\in G(b,\theta)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left((\lambda A_n+A_{n-1})^*\right) &= \mathcal{D}\left((\lambda K+\lambda C+A_{n-1})^*\right)\\ &= \mathcal{D}(\lambda K)\cap\mathcal{D}(\lambda C)\cap\mathcal{D}\left(A_{n-1}^*\right).\end{aligned}$$

D'après les hypothèses h_1 et h_4 $\mathcal{D}(C)\subset\mathcal{D}(C^*)$ et $\mathcal{D}(K)\subset\mathcal{D}(C)$, ce qui signifie que

$$\mathcal{D}(K)\subset\mathcal{D}(C^*).$$

Dans ce cas

$$\mathcal{D}\left((\lambda K+\lambda C+A_{n-1})^{*}\right)=\mathcal{D}\left(K\right)\cap\mathcal{D}\left(A_{n-1}^{*}\right)$$

et

$$\mathcal{D}\left(K\right)\subset\mathcal{D}\left(A_{n-1}^{*}\right).$$

Nous avons donc

$$\mathcal{D}\left((\lambda K+\lambda C+A_{n-1})^{*}\right)=\mathcal{D}\left(K\right) \tag{4.4}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left((\lambda K+\lambda C^{*}+A_{n-1})\right) &= \mathcal{D}\left(K\right)\cap\mathcal{D}\left(C^{*}\right)\cap\mathcal{D}\left(A_{n-1}\right)\\ &= \mathcal{D}\left(K\right)\cap\mathcal{D}\left(A_{n-1}\right).\end{aligned}$$

Comme C est un opérateur symétrique, en utilisant h_4, on trouve

$$\mathcal{D}\left(K\right)\subset\mathcal{D}\left(C\right)\subset\mathcal{D}\left(C^{*}\right)\subset\mathcal{D}\left(A_{n-1}\right),$$

ce qui implique que :

$$\mathcal{D}\left((\lambda K+\lambda C^{*}+A_{n-1})\right)=\mathcal{D}\left(K\right), \tag{4.5}$$

et en vertu de (4.4) et (4.5) :

$$\mathcal{D}\left((\lambda K+\lambda C+A_{n-1})^{*}\right)=\mathcal{D}\left(\lambda K+\lambda C^{*}+A_{n-1}\right).$$

Nous avons aussi , $\forall x\in\mathcal{D}\left(\lambda K+\lambda C^{*}+A_{n-1}\right)$, C et A_{n-1} sont des opérateurs symétriques et K est un opérateur auto-adjoint, donc on peut écrire

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\lambda K+\lambda C^{*}+A_{n-1}\right)x,x\right\rangle &= \left\langle\left(\lambda K+\lambda C^{*}+A_{n-1}^{*}\right)x,x\right\rangle\\ &= \left\langle\left(\lambda K+\lambda C+A_{n-1}\right)^{*}x,x\right\rangle.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\left(\lambda K+\lambda C+A_{n-1}\right)^{*}=\lambda K+\lambda C^{*}+A_{n-1}.$$

Comme $A_{n-1}+bK$ est un opérateur positivement défini,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left((A_{n-1}+bK)^{*}\right) &= \mathcal{D}\left(A_{n-1}^{*}\right)\cap\mathcal{D}\left(K\right)\\ &= \mathcal{D}\left(K\right).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(\left(A_{n-1}+bK\right)\right) &= \mathcal{D}\left(A_{n-1}\right)\cap\mathcal{D}\left(K\right) \\ &= \mathcal{D}\left(K\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Alors

$$\mathcal{D}((A_{n-1}+bK)^{*}) = \mathcal{D}(A_{n-1}+bK).$$

d'après h_1 et h_2
$\forall x,\, y \in \mathcal{D}\left(\left(A_{n-1}+bK\right)^{*}\right),$

$$\left\langle \left(A_{n-1}+bK\right)x, y\right\rangle = \left\langle x, \left(A_{n-1}+bK\right)y\right\rangle.$$

Cela implique que $A_{n-1}+bK$ est un opérateur auto-adjoint,et on obtient

$$\mathcal{D}\left(\left(A_{n-1}+bK\right)\right) = \mathcal{D}\left(K\right).$$

l'hypothèse h_4 nous permet d'écrire

$$\mathcal{D}\left(\left(A_{n-1}+bK\right)\right) \subset \mathcal{D}\left(C\right).$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \|C\| &= \left\|C\left(A_{n-1}+bK\right)^{-1}\left(A_{n-1}+bK\right)\right\| \\ &\leq \left\|C\left(A_{n-1}+bK\right)^{-1}\right\| \|(A_{n-1}+bK)\| \\ &\leq q\,\|(A_{n-1}+bK)\|. \end{aligned}$$

D'après h_1 et h_5 et la relation (4.6) nous avons

$$\begin{aligned} \|(A_{n-1}+bK)\| &= \left\|\left(A_{n-1}+bK\right)K^{-1}K\right\| \\ &\leq \left\|\left(A_{n-1}+bK\right)K^{-1}\right\| \|K\| \\ &\leq b\,\|K\|. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème 4.12 in ([6]), on obtient

$$\left|\langle Cx, x\rangle\right| \leq q\left\langle \left(A_{n-1}+bK\right)x, x\right\rangle, \tag{4.7}$$

$$\left\langle \left(A_{n-1}+bK\right)x, x\right\rangle \leq \langle bKx, x\rangle \tag{4.8}$$

pour tout $x \in \mathcal{D}\left(K\right)$ et $\lambda \in G\left(b,\theta\right).$

En utilisant (4.7) et (4.8), pour tout $x \in \mathcal{D}(K)$ et pour tout $\lambda \in G(b,\theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle(\lambda A_n + A_{n-1})x, x\rangle| &= |\langle(\lambda K + \lambda C + A_{n-1})x, x\rangle| \\
&\geq |\langle(\lambda K + A_{n-1})x, x\rangle| - |\lambda|\,|\langle Cx, x\rangle| \\
&\geq |\langle(\lambda K + A_{n-1} - bK + bK)x, x\rangle| - |\lambda|\, q\,\langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle \\
&\geq |\langle\lambda Kx, x\rangle| - \langle(bK - (A_{n-1} + bK))x, x\rangle - |\lambda|\, q\,\langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle \\
&\geq |\langle\lambda Kx, x\rangle| - \langle bKx, x\rangle + \langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle - |\lambda|\, q\,\langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle .
\end{aligned}$$

Comme $|\lambda| \geq b$, alors $-\langle bKx, x\rangle \geq -|\lambda|\langle Kx, x\rangle$, ce que implique que :

$$\begin{aligned}
|\langle(\lambda A_n + A_{n-1})x, x\rangle| &\geq |\lambda|\langle Kx, x\rangle - |\lambda|\langle Kx, x\rangle + \langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle - |\lambda|\, q\,\langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle \\
&\geq (1 - |\lambda|\, q)\,\langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle .
\end{aligned}$$

Puisque $q < \frac{1}{|\lambda|}$, nous avons $q|\lambda| < 1$, ce qui nous donne $0 < 1 - q|\lambda| < 1$, donc $\exists \alpha_0 \in]0,1[$ avec

$$1 - q|\lambda| \geq \alpha_0,$$

$A_{n-1} + bK$ est un opérateur positivement défini, c'est-à-dire,

$$\forall x \in \mathcal{D}(A_{n-1} + bK),\ \exists C_0 > 0 :\ \langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle \geq C_0\langle x, x\rangle ,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
|\langle(\lambda A_n + A_{n-1})x, x\rangle| &\geq (1 - |\lambda|\, q)\,\langle(A_{n-1} + bK)x, x\rangle \\
&\geq \alpha_0 C_0\langle x, x\rangle .
\end{aligned}$$

Nous déduisons

$$|\langle(\lambda A_n + A_{n-1})x, x\rangle| \geq C_1\langle x, x\rangle , \tag{4.9}$$

$$\lambda \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{D}(K),$$

avec $C_1 = 0 + \alpha_0 C_0$.
D'autre part, nous avons

$$(\lambda A_n + A_{n-1})^* = \lambda K + \lambda C^* + A_{n-1}.$$

$A_{n-1} + bK$ est un opérateur positivement défini et C est un opérateur symétrique, donc

$$\mathcal{D}(A_{n-1} + bK) = \mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(C^*)$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\|C^*\| &= \left\|C^*\left(A_{n-1}+bK\right)^{-1}\left(A_{n-1}+bK\right)\right\| \\ &\leq \left\|C^*\left(A_{n-1}+bK\right)^{-1}\right\| \|(A_{n-1}+bK)\| \\ &\leq q\,\|(A_{n-1}+bK)\|\,.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 4.12 dans ([6]), on peut facilement obtenir

$$|\langle C^*x,x\rangle| \leq q\,\langle(A_{n-1}+bK)\,x,x\rangle\,. \tag{4.10}$$

De la même manière que la preuve de l'inégalité (4.9) et en utilisant la relation (4.10), on peut prouver ce qui suit :

$$|\langle(\lambda A_n+A_{n-1})^*\,x,x\rangle| \geq C_2\,\langle x,x\rangle\,, \quad \lambda\in\mathcal{G},\ \ x\in\mathcal{D}(K)\,. \tag{4.11}$$

De plus, d'après (4.9) et (4.11) nous trouvons que l'opérateur $(\lambda A_n+A_{n-1})^{-1}$. existe et est borné.

Nous avons aussi :

$$\mathcal{D}\left((\lambda A_n+A_{n-1})^*\right)=\mathcal{D}(K)\,,$$

et

$$\mathcal{D}\left(\lambda A_n+A_{n-1}\right)=\mathcal{D}(K)\,,$$

alors

$$\mathcal{D}\left((\lambda A_n+A_{n-1})^*\right)=\mathcal{D}\left(\lambda A_n+A_{n-1}\right).$$

Donc, $\forall x\in\mathcal{D}\left(\lambda A_n+A_{n-1}\right)$,

$$\begin{aligned}\langle(\lambda A_n+A_{n-1})\,x,x\rangle &= \langle(\lambda K+\lambda C+A_{n-1})\,x,x\rangle \\ &= |\lambda|\,\langle Kx,x\rangle+|\lambda|\,\langle Cx,x\rangle+\langle A_{n-1}x,x\rangle\,.\end{aligned}$$

Comme K est un opérateur auto-adjoint et A_{n-1} est un opérateur symétrique, on peut écrire

$$\begin{aligned}\langle(\lambda A_n+A_{n-1})\,x,x\rangle &= |\lambda|\,\langle x,Kx\rangle+|\lambda|\,\langle x,Cx\rangle+\langle x,A_{n-1}x\rangle\,, \\ &= \langle x,(\lambda A_n+A_{n-1})\,x\rangle\,.\end{aligned}$$

Cela implique que (λA_n+A_{n-1}) est un opérateur auto-adjoint et que $(\lambda A_n+A_{n-1})^{-1}$ existe et est borné sur $R\left(\lambda A_n+A_{n-1}\right)$. D'après la proposition 1.21, nous concluons que $R\left(\lambda A_n+A_{n-1}\right)$

est dense dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}(\lambda A_n + A_{n-1})$ est dense dans $\mathcal{H}$. D'après la proposition 1.14, on trouve que $((\lambda A_n + A_{n-1})^*)^{-1}$ existe avec

$$((\lambda A_n + A_{n-1})^*)^{-1} = \left((\lambda A_n + A_{n-1})^{-1}\right)^* = (\lambda A_n + A_{n-1})^{-1}. \tag{4.12}$$

D'après (4.9), (4.11) et (4.12), et pour $\mathcal{Q}(\lambda) = ((\lambda A_n + A_{n-1})^*)^{-1}$, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\|\mathcal{Q}(\lambda)\| \leq C_3, \quad \lambda \in \mathcal{G}. \tag{4.13}$$

Nous avant $\mathcal{D}(C^*) \subset \bigcap_{j=0}^{n-2} \mathcal{D}(A^*)_j$ et $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(C)$, comme $C \subset C^*$, alors $\mathcal{D}(K) \subset \bigcap_{j=0}^{n-2} \mathcal{D}(A^*)_j$ et

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}^*(\lambda)) = \mathcal{D}(\lambda K + \lambda C + A_{n-1})^* = \mathcal{D}(\lambda K + \lambda C^* + A_{n-1}) = \mathcal{D}(K).$$

Ainsi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}^*(\lambda)) \subset \bigcap_{j=0}^{n-2} \mathcal{D}(A^*)_j.$$

Comme $\mathcal{P}^*(\lambda)$ et A_j^* sont fermés alors d'après la remarque 1.5 dans [19], nous avons A_j^* sont $\mathcal{P}^*(\lambda)$-bornés, où $j = 0, ..., n-2$, cela nous donne

$$\left\|A_j^*\right\| \leq a + b\|\mathcal{P}^*(\lambda)\|. \quad \lambda \in \mathcal{G} \;\; a > 0, \;\; b > 0, \;\; j = 0, ..., n-2, \tag{4.14}$$

Et ainsi

$$\begin{aligned} \left\|A_j^*\mathcal{Q}(\lambda)\right\| &\leq \left\|A_j^*\right\| \|\mathcal{Q}(\lambda)\| \\ &\leq (a + b\|\mathcal{P}^*(\lambda)\|)\|\mathcal{Q}(\lambda)\|, \\ &\leq a\|\mathcal{Q}(\lambda)\| + b\|\mathcal{P}^*(\lambda)\|\|\mathcal{Q}(\lambda)\|, \end{aligned}$$

avec $j = 0, ..., n-2$. on a

$$\mathcal{Q}(\lambda) = (\mathcal{P}^*(\lambda))^{-1},$$

donc

$$\|\mathcal{P}^*(\lambda)\|\|\mathcal{Q}(\lambda)\| = 1.$$

Alors

$$\left\|A_j^*\mathcal{Q}(\lambda)\right\| \leq a\|\mathcal{Q}(\lambda)\| + b, \quad \lambda \in \mathcal{G}. \tag{4.15}$$

des relations (4.13) et (4.15), nous déduisons qu'il existe $C_4 > 0$, tel que

$$\left\|A_j^*\mathcal{Q}(\lambda)\right\| \leq C_4, \quad \lambda \in \mathcal{G} \quad j = 0, ..., n-2, \tag{4.16}$$

et

$$\left\|A_j^*\mathcal{Q}(\lambda)\right\| = \left\|A_j^*\left(\mathcal{P}^{-1}(\lambda)\right)^*\right\| = \left\|\left(\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_j\right)^*\right\| = \left\|\left(\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_j\right)\right\|.$$

Donc

$$\left\|\left(\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_j\right)\right\| \leq C_4, \quad \lambda \in \mathcal{G}(b,\theta), \ j = 0, ..., n-2. \tag{4.17}$$

On a $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(A_{n-1})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{P}^*(\lambda)) = \mathcal{D}(K)$, donc :

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}^*(\lambda)) \subset \mathcal{D}(A_{n-1}) \subset \mathcal{D}(A_{n-1}^*).$$

Comme A_{n-1}^* est fermable, alors il est $\mathcal{P}^*(\lambda)$-borné, et donc

$$\left\|A_{n-1}^*\right\| \leq c + d\left\|\mathcal{P}^*(\lambda)\right\|, \quad \lambda \in \mathcal{G}, c > 0, \ d > 0. \tag{4.18}$$

Cela implique que :

$$\begin{aligned}\left\|A_{n-1}^*\mathcal{Q}(\lambda)\right\| &\leq \left\|A_{n-1}^*\right\|\left\|\mathcal{Q}(\lambda)\right\| \\ &\leq \left(c + d\left\|\mathcal{P}^*(\lambda)\right\|\right)\left\|\mathcal{Q}(\lambda)\right\|, \\ &\leq c\left\|\mathcal{Q}(\lambda)\right\| + d\left\|\mathcal{P}^*(\lambda)\right\|\left\|\mathcal{Q}(\lambda)\right\|,\end{aligned}$$

ce que nous pouvons réécrire

$$\left\|A_{n-1}^*\mathcal{Q}(\lambda)\right\| \leq C_5, \quad \lambda \in \mathcal{G},$$

où $C_5 = c\left\|\mathcal{Q}(\lambda)\right\| + d$.
Donc on a

$$\left\|\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_{n-1}\right\| \leq C_5, \quad \lambda \in \mathcal{G}. \tag{4.19}$$

De (4.17) et (4.19), on déduit

$$\left\|\left(\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_j\right)\right\| \leq C_6, \quad \lambda \in G(b,\theta), \ j = 0, ..., n-1, \tag{4.20}$$

où $C_6 = \max(C_4, C_5)$.
Donc, (4.17) conduit à l'estimation

$$\left\|\left(\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_j\right)\right\| \leq C_4|\lambda|^{q_j}, \quad \lambda \in G(b,\theta), \ j = 0, ..., n-2, \tag{4.21}$$

où $q_j = 0$.
De (4.20), nous obtenons l'estimation

$$\left\|\left(\mathcal{P}^{-1}(\lambda)A_j\right)\right\| \leq C_6|\lambda|^{n-p}, \quad \lambda \in G(b,\theta), \ j = 0, ..., n-1. \tag{4.22}$$

Pour $n = p$, selon (4.21), (4.22) et le corollaire 3.1, nous concluons que le problème de Cauchy est complètement exponentiellement correct.

Bibliographie

[1] V. Adamjan, V. I. Pivovarchik, and C. Tretter, On a class of non-selfadjoint quadratic matrix operator pencils arising in elasticity theory, J. Operator Theory, Vol. 47, No. 2, 325-341, (**2002**).

[2] H. O. Fattorini, Extension and behavior at infinity of solutions of certain linear operational differential equations, Pacif. J. Math, Vol 33, No. 3, 583-615, (**1970**).

[3] A. Jeffrey Advanced engineering mathematics, Harcourt/Academic Press (**2001**).

[4] L. Jin, Integrated semi-groups and higher-order abstract equations, J. Math. Ana. App, Vol. 222, No. 1, 110-125, (**1998**).

[5] C. Johm B Functions of one complex variable, Second Edition (**1978**).

[6] T. Kato, Perturbation theory for linear operators[Russian translation], Mir, Moscow (**1972**).

[7] T. D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong and J.-C. Yao An abstract Cauchy problem for higher-order functional differential inclusions with infinite delay, Di. Math. Ana. App, Vol. 31, No. 2, 199-229, (**2011**).

[8] H. Kellermann and M. Hieber, Integrated semigroups, J. Funct. Anal, Vol. 84, 160-180, (**1989**).

[9] N. Kishimoto, well-posedness for the Cauchy problem of the korteweg-de vries equation at the critical regularity, Dep. Math, Kyoto. Uni, Vol 22, No 5-6, 447-464, (**2009**).

[10] N. D. Kopatchevsky, Spectral theory of operator pencils., Tavrida National V.I. Vernaversity. Simferopol, (**2009**).

[11] S. G. Krein, Linear differential equations in Banach space., A. M. S, (**1971**).

[12] P. Lancaster and A. Shkalikov, Damped vibrations of beams and related spectral problems, Can. Appl. Math. Quart. Vol. 2, No. 1, 45-90, (**1994**).

[13] LD. Lemle Semi-groupes intégrés d'opérateurs, l'unicité des pré-générateurs et applications, Theses.hal.science (**2007**).

[14] J. Liang and T. J. Xiao, well-posedness results for certain classes of higher order abstract Cauchy problems connected with integrated semigroups, 56 84-103 (**1998**).

[15] A. I. Miloslavskii, On the substantiation of the spectral approach to nonconservative problems of the theory of elastic stability, Funkts. Anal. Prilozhen, Vol. 17, No. 3, 83-84, (**1983**).

[16] F. Neubrander, Well-posedness of higher order abstract Cauchy problems, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 295, No. 1, 257-290, (**1989**).

[17] F. Neubrander, Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem, Pacif. J. Math, Vol. 135, No. 1, 111-155, (**1996**).

[18] J. C. Saut and N. Tzverkov, The Cauchy problem for of higher-order KP equations, J. Diff. Equa, vol. 5, No. 153, 32-37, (**1998**).

[19] V. I. Smirnov, Cour de mathématiques supérieures tome V, Mir, Moscou, (**1975**)

[20] X. Tijun and L. Jin, Differential operators and C-wellposedness of complete second order abstract Cauchy problems, Pacific Journal of Mat, Vol. 186, No. 1, 167-200, (**1998**).

[21] H. Toumi and A. Nouar, Multiple well-posedness of higher-order abstract Cauchy problem, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 23(4) 447-460, (**2023**).

[22] H. Toumi and A. Nouar, On the p-fold well-posedness of higher-order abstract Cauchy problem, Univ. Math. Phys, 17(3) 304-317, (**2024**).

[23] L. A. Vlasenko, A. L. Piven' and A. G. Rutkas, Criteria for the well-posedness of the Cauchy problem for differential operator equations of arbitrary order, Ukrain. Math. Vol. 56, No. 10, 1766-1781, (**2004**).

[24] L. A. Vlasenko and A. G. Rutkas, Uniquenss and approximation theorems for a degenerate operator-differential equation, Mat. Zamerki, Vol. 60, No. 4, 597-600, (**1996**).