

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2011

Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT
Titre

Recherche des cycles limites des centres non linéaires perturbés

Option

Systemes dynamiques et contrôles optimales

Par

BOUATTIA YASSINE

DIRECTEUR DE THESE : MAKHLOUF AMAR

Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT:

SISSAOUI HOCINE

Prof

U.B.M. ANNABA

EXAMINATEURS:

KESSI AREZKI

Prof

USTHB ALGER

DJEBALI SMAIL

Prof

ENS KOUBA

LAOUAR A. HAMID

M.C

U.B.M. ANNABA

DEDICACE

À mes parents, à ma femme,

À toute ma famille,

Et à mes amis et mes collègues .

Remerciements

Je voudrai en premier lieu remercier mon directeur de thèse monsieur Amar Makhlouf, Professeur à l'Université de Annaba et lui exprimer ma profonde gratitude du fait qu'il m'a encadré et guidé durant plusieurs années. Il m'a proposé des sujets de recherche intéressants que j'ai élaborés dans cette thèse.

Je remercie chaleureusement monsieur. H. SISSAOUI Professeur à l'Université de Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

J'aimerai aussi remercier vivement les professeurs KESSI AREZKI, DJEBALI SMAIL et LAOUAR A. HAMID pour leur participation à ce jury et pour leur intérêt à mes travaux.

Table des matières

0.1	Introduction	6
1	Notions préliminaires	11
1.1	Systèmes dynamiques, points critiques	12
1.2	Classification des points d'équilibre	13
1.3	Portrait de phase et cycles limites	16
1.4	Diagramme de bifurcation dans le plan trace-déterminant	17
1.5	Application de Poincaré	18
1.6	Stabilité	20
2	Cycles limites des systèmes de Liénard généralisés	28
2.1	Existence et unicité du cycle limite	30
2.2	Méthodologie	30
2.3	Applications	32
2.4	Résultats numériques	40
3	Cycles limites des systèmes polynomiaux quartiques et cintiques en utilisant la théorie de la moyenne	43
3.1	Introduction	44
3.2	Méthode de la moyenne de premier ordre	46
3.3	Preuve de théorème 1	47
3.3.1	Ellipse. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1$	48

3.3.2	Ellipse complexe. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 + 1$	53
3.3.3	Hyperbole. $f = (x + a)^2 - y^2 - 1$	56
3.3.4	Deux lignes droites complexes qui s'intersectent en un point réel. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2$	60
3.3.5	Deux lignes droites réelles qui s'intersectent en un point $f = (x +$ $a)(y + b)$	62
3.3.6	Parabole. $f = x - a - y^2$	67
3.3.7	Deux lignes droites réelles parallèles $f = (x + a)^2 - 1 = 0$	70
3.3.8	Deux lignes droites complexes parallèles $f = (x + a)^2 + 1$	73
3.3.9	Deux lignes droites réelles identiques $f = (x + a)^2$	77

4 Conclusion **80**

Résumé

Ce travail de thèse est consacré à l'étude du nombre des cycles limites de certains systèmes différentiels autonomes en utilisant la méthode de Lopez-Ruiz et la méthode de la moyenne. Ces deux méthodes se basent sur la perturbation des centres linéaires ou non linéaires par des fonctions, et plus particulièrement, par des polynômes. La première méthode a, d'abord, été expliquée, puis appliquée sur des exemples plus au moins compliqués par rapport aux exemples existantes dans la littérature [14]. En utilisant la méthode de la moyenne, nous avons montré que les perturbations par des polynômes quartiques et cinquièmes arbitraires de couronne périodique du centre localisé à l'origine du système différentiel polynomial cubique $\dot{x} = -yf(x, y)$, $\dot{y} = xf(x, y)$ où $f(x, y) = 0$ est une conique tel que $f(0, 0) \neq 0$, donnant respectivement, au moins, 8 et 9 cycles limites.

Abstract

This thesis is devoted to studying the number of limit cycles of some autonomous differential systems using Lopez-Ruiz method and averaging method. These last two methods are based on the perturbation of linear or nonlinear centers by functions, particularly, the polynomial ones. The first method was explained and applied on some examples more complicated than these already existing in literature [14]. Using the averaging method, we prove that the perturbations by arbitrary quartic and quintic polynomial differential systems of the period annulus of the center located at the origin of the cubic polynomial differential system $\dot{x} = -yf(x, y)$, $\dot{y} = xf(x, y)$, where $f(x, y) = 0$ is a conic such that $f(0, 0) \neq 0$, provide respectively, at least 8 and 9 limit cycles.

0.1 Introduction

(a) Historique (voir [21])

Nous allons étudier dans cette thèse des systèmes différentiels du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (0.1)$$

Le premier modèle physique publié dans la littérature qui se transforme en un système du type (0.1) admettant un cycle limite est l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon \left(\frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 - \frac{dy}{dt} \right) + y = 0 \quad (0.2)$$

établie par Rayleigh (1945) et qui modélise les oscillations d'une corde de violon.

- Dans les années vingt, Balthasar van der Pol, un ingénieur hollandais, étudiait les propriétés électriques des tubes à néon (van der Pol, 1922). A cette époque là, les oscilloscopes n'existant pas encore. Il surveillait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges et les décharges du tube par l'équation qui porte maintenant son nom :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (0.3)$$

On voit que si on dérive l'équation (0.2) par rapport à t et que si l'on note $x = \frac{dy}{dt}$, on retrouve l'équation (0.3). Ces deux équations sont donc équivalentes.

Quelques années plus tard Van Der Pol (1927) étudiera le même circuit électrique mais en régime sinusoïdal forcé. Lorsqu'il variait la fréquence du courant, il entendait dans son combiné la tonalité changer (le circuit se stabilisait donc sur la fréquence externe). Mais de temps à autre il remarquait quelque chose d'étrange, un comportement inexplicablement irrégulier : "on entend souvent au téléphone un bruit irrégulier avant que la fréquence ne saute à la valeur immédiatement inférieure" (van der Pol, 1927). Son tube à vide devait

vraisemblablement traverser une période de chaos transitoire avant de se synchroniser sur la fréquence externe.

Plus tard, en Angleterre, Mary Lucy Cartwright et John E. Littlewood poursuivront les travaux de van der Pol sur les oscillateurs forcés.

- Liénard un ingénieur français, établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour une classe générale d'équations dont fait partie l'équation (0.3) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (0.4)$$

- Levinson & Smith (1942) ont suggéré de généraliser l'équation (0.4) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (0.5)$$

et qui est connu sous le nom d'équation de Liénard généralisé.

- Le problème fondamental lié à l'équation (0.5) est le nombre de solutions périodiques isolées (i.e. cycles limites) qui peuvent exister simultanément. Imaginons que l'équation (0.5) décrit le mouvement d'un oscillateur. Si cette équation a un cycle limite globalement attracteur alors l'oscillateur va évoluer, après un régime transitoire, selon un mouvement périodique. Le point important est que la période de ce mouvement sera la même quelle que soit la condition initiale!

On voit donc que la présence d'un cycle limite peut être une propriété importante d'une équation surtout si cette équation décrit le mouvement d'une horloge.

(b) Résultats importants (voir [21])

On considère par la suite le cas où $F(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes, où $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

On note m le degré de $F(x)$, n celui de $g(x)$ et $H(m, n)$ le nombre maximal de cycles limites qui peuvent exister simultanément pour (0.5). Le théorème de Liénard a plusieurs résultats importants qui ont été publiés :

- Rychkov (1975) a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et $g(x) = x$ alors (0.5) n'a au plus que 2 cycles limites.

- Lins, de Melo & Pugh (1977) ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$ alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe. Enfin ils ont conjecturé que si $g(x) = x$, il ne pouvait y avoir plus de $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ cycles limites.
- Xianwu (1983) a prouvé la conjecture pour le cas où $m = 4$ et $n = 1$.
- Coppel (1988) a prouvé que $H(2, 2) = 1$.
- Dumortier & Li(1996) ont prouvé que $H(2, 3) = 1$.
- Dumortier & Li(1997) ont prouvé que $H(3, 2) = 1$.

D'autres chercheurs essayent de trouver des valeurs minimales à $H(m, n)$ en ne considérant que des cycles limites d'amplitude faible autour d'un point d'équilibre. Ils trouvent ainsi un nombre maximum $\hat{H}(m, n)$ de cycles limites locaux.

- Zuppa (1981) et Blows & Lloyd (1984) ont prouvé que si $G(x) = x$ et si $F(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2k+1}x^{2k+1}$ alors l'équation (0.5) a au plus k cycles limites locaux. Si de plus on choisit les coefficients a_i tels que :

$$|a_1| \ll |a_2| \ll \dots \ll |a_{2k+1}|$$

$$a_i a_{i+1} < 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq 2k$$

alors il y a exactement k cycles limites locaux.

Les cycles limites locaux sont actuellement intensément étudiés par Lynch (1997) qui remplit petit à petit la table (0.1). Christopher & Lloyd (1998) ont démontré que cette table était symétrique ($\hat{H}(n, m) = \hat{H}(m, n)$). Gasull & Torregrosa (1997) semblent avoir

amélioré les résultats de la table (0.1).

10	5	7	8							
9	4	6	8	9						
8	4	5	6	9						
7	3	5	6	8						
6	3	4	6	7						
5	2	3	4	6	6					
4	2	3	4	4	6	7	8	9	9	
3	1	2	2	4	4	6	6	6	8	8
2	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$\begin{matrix} \uparrow \\ m \ n \rightarrow \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tab.0.1- Nombre maximum de cycles limites locaux qui peuvent exister pour les équations (0.5) en fonction du degré m de $F(x)$ et du degré n de $g(x)$.

Cette thèse comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points d'équilibre et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Ensuite nous représentons les types des points singuliers par le diagramme de bifurcation, et nous définissons l'application de Poincaré. Enfin nous introduisons la stabilité d'une solution d'un système différentiel et quelques théorèmes sur la stabilité en se basant sur les fonctions de Lyapunov. Dans le 2^{ème} chapitre, nous introduisons la méthode de R. Lopez-Ruiz pour l'étude des cycles limites d'un centre perturbé. Nous commençons par le calcul de l'amplitude et la période du cycle limite de quelques équations de Liénard. Enfin nous donnons des résultats numériques. Le dernier chapitre concerne l'étude du nombre maximal des cycles limites qui peuvent bifurquer des couronnes périodiques qui entourent l'origine d'une classe

de systèmes différentiels polynomiaux cubiques en utilisant la théorie de la moyenne. Plus précisément, nous prouvons que les perturbations de la couronne périodique du centre localisé à l'origine du système différentiel polynomial cubique $\dot{x} = -yf(x, y)$, $\dot{y} = xf(x, y)$ où $f(x, y) = 0$ est une conique telle que $f(0, 0) \neq 0$, par des polynômes quartiques et cinquièmes arbitraires fournissent respectivement, au moins 8 et 9 cycles limites qui bifurquent des couronnes périodiques en utilisant seulement la méthode de la moyenne du premier ordre.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points d'équilibre et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Ensuite nous représentons les types des points singuliers par le diagramme de bifurcation. Nous définissons l'application de Poincaré. Enfin nous introduisons la stabilité d'une solution d'un système différentiel et quelques théorèmes sur la stabilité en se basant sur les fonctions de Lyapunov.

1.1 Systèmes dynamiques, points critiques

Définition 1.1.1. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ et telle que :

- $U(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, x) = x$.
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.1.2. Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x_0) = 0.$$

Définition 1.1.3. Considérons le système (1.2)

Le système

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé linéarisé de (1.2) en x_0 .

Définition 1.1.4. On appelle point critique hyperbolique de (1.2), le point critique x_0 telle que A n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

1.2 Classification des points d'équilibre

Cas des systèmes linéaires

considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3}$$

où $x = (x_1, x_2)$ et A une matrice constante inversible. Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de A .

Définition 1.2.1.

· Si les valeurs propres λ_1, λ_2 sont réelles et du même signe, la solution $x = 0$ est appelée *noeud*.

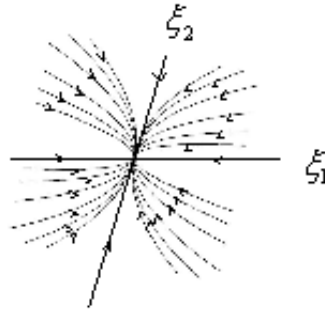


Fig 1.1 Noeud stable.

· Si les valeurs propres λ_1, λ_2 sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée *selle*.

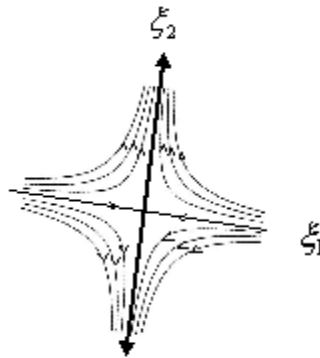


Fig 1.2- point selle.

· Si les valeurs propres λ_1, λ_2 sont complexes avec $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, 2$. La solution $x = 0$ est appelée *foyer*.

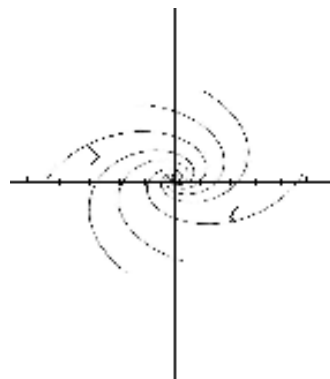


Fig 1.3- Foyer stable.

· Si les valeurs propres λ_1, λ_2 sont complexes avec $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ et $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, 2$. La

solution $x = 0$ est appelée *centre*.

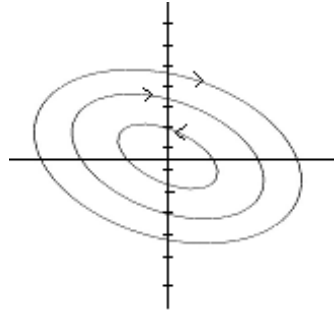


Fig 1.4- Centre.

Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire (1.2) où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Définition 1.2.2. Un point critique x_0 de (1.2) est appelé *puits* si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives ; Il est appelé *source* si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives ; Il est appelé *selle* s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Définition 1.2.3. Deux systèmes

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

et

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.5}$$

définis sur deux ouverts U et V respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que h transforme les orbites de (1.4) en celles de (1.5) et préserve le sens du mouvement.

Théorème 1.1. Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de (1.2), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est *topologiquement équivalent* à son linéarisé $\dot{x} = Ax$.

1.3 Portrait de phase et cycles limites

Définition 1.3.1. Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.6)$$

où P, Q sont des polynômes en x et y . les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.6) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 1.3.2. Une solution périodique du système (1.6) est une solution telle que :

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0.$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.3.3. Un cycle limite du système (1.6) est une orbite fermée isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 1.3.4. Soit la figure

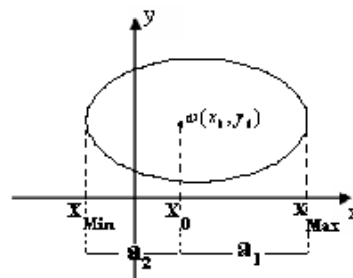


Fig 1.1- Cycle limite d'amplitudes a_1, a_2 .

On a

$$a_1 = x_{\max} - x_0$$

$$a_2 = x_0 - x_{\min}$$

On dit que Γ est un cycle limite d'amplitudes a_1, a_2 .

1.4 Diagramme de bifurcation dans le plan trace-déterminant

On vient de voir que l'allure du portrait de phase de l'équation $\dot{x} = Ax$ dépend du polynôme caractéristique de A qui s'exprime à l'aide de $\det(A)$ et $\text{tr}(A)$. On peut visualiser les résultats ci-dessus dans le plan $(\text{tr}(A), \det(A))$ (qui n'est bien sûr pas le plan (x, y) !). Dans le plan $(\text{tr}(A), \det(A))$, les axes $\text{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$ et parabole qui correspond au discriminant $\Delta = 0$ ($\det(A) = \text{tr}^2(A)/4$).

Détermination des régions où les trajectoires ont la même allure. La figure (1.6) montre pour chacune de ces régions, l'allure des trajectoires dans le plan (x, y) .

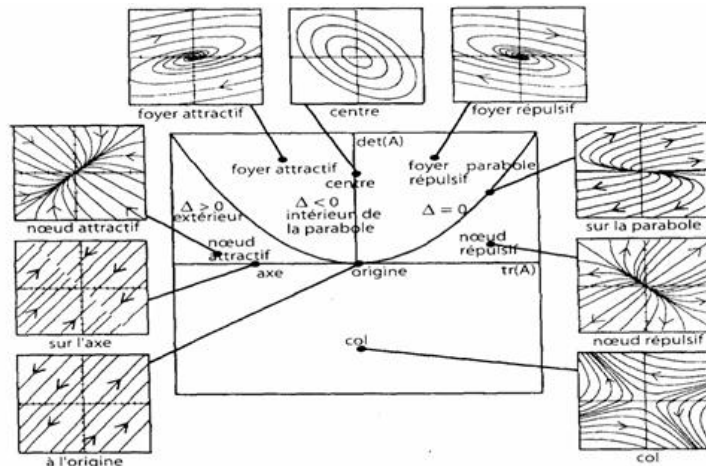


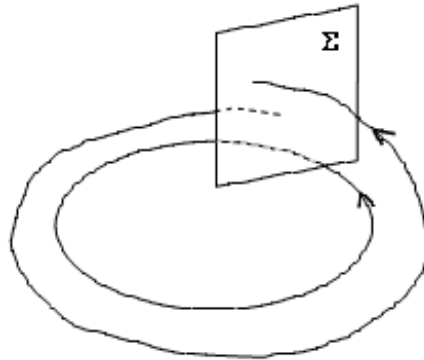
Fig.1.6- Diagramme de bifurcation dans le plan trace-déterminant.

1.5 Application de Poincaré

Soit $\phi(t)$ une solution périodique correspondante à une orbite fermée dans l'espace des phases. Nous construisons une variété V de dimension $n-1$ transversale à l'orbite fermée. L'orbite coupe V en un point a . On choisit un point $x_0 \in V$ mais suffisamment près de a , l'orbite $\Gamma(x_0)$ recoupe V en un point on l'appelle $P(x_0)$, l'application

$$\begin{aligned}x_0 &\longrightarrow P(x_0) \\ V &\longrightarrow V\end{aligned}$$

s'appelle l'application de retour ou l'application de Poincaré. Le point $P(x_0)$ trouvé peut être appliqué de nouveau on obtient $P^2(x_0) \in V$ etc. Le point a est un point fixe de P . Le concept de stabilité d'une solution périodique peut s'exprimer en terme de stabilité de l'application de Poincaré dans le voisinage du point a .



Exemple 1.5.1. Soit le système planaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

où la condition initiale est $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Posons : $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$.

On a :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}, r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0. \quad (*)$$

$r=1$ est un point fixe.

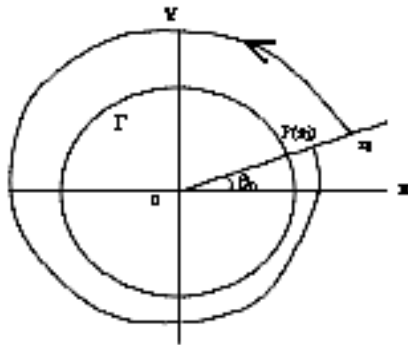
$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$ est une solution périodique. Remarquons que (*) est une équation de Bernoulli, on a :

$$\begin{cases} r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) \exp(-2t) \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta(t, \theta_0) = t + \theta_0 \end{cases},$$

Si V est le rayon, $\theta = \theta_0$, la trajectoire qui commence en (r_0, θ_0) coupe le rayon $\theta = \theta_0$ de nouveau à $t = 2\pi$. Donc l'application de Poincaré est :

$$P(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

On a $P(1) = 1$, 1 est un point fixe de P



Définition 1.5.2. Soit $P(s)$ l'application de Poincaré de cycle Γ pour un système planaire :

$$\dot{x} = f(x).$$

Soit la fonction de déplacement

$$d(s) = p(s) - s.$$

Si

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(m-1)}(0) = 0 \text{ et } d^{(m)}(0) \neq 0$$

alors Γ est un cycle limite de multiplicité m .

Si $m = 1$, Γ est dit cycle limite simple, donc

$$\int_0^T \nabla f(\gamma(t)) dt \neq 0.$$

(a)- Si m est impair avec $d^{(m)}(0) < 0$, alors le cycle limite est stable.

(b)- Si m est pair, alors le cycle limite est semi-stable.

(c)- Si m est impair avec $d^{(m)}(0) > 0$, alors le cycle limite est instable.

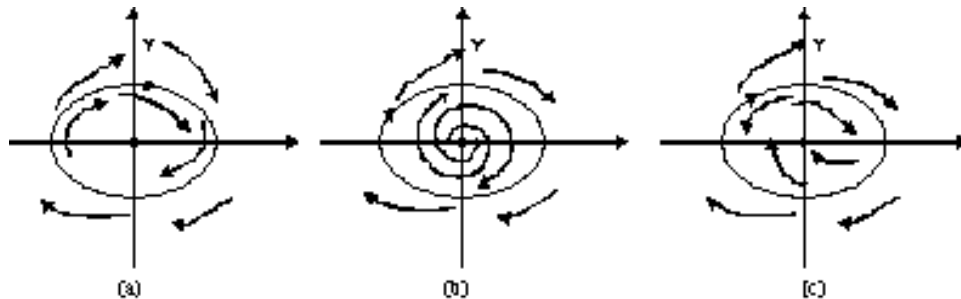


Fig 1.7- Différents types de cycles limites.

1.6 Stabilité

Soit le système d'équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définitions 1.6.1. Une solution $\Phi(t)$ du système (1.7) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.7) on a

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand $\Phi(t) = 0$ la définition devient :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.7) vérifie

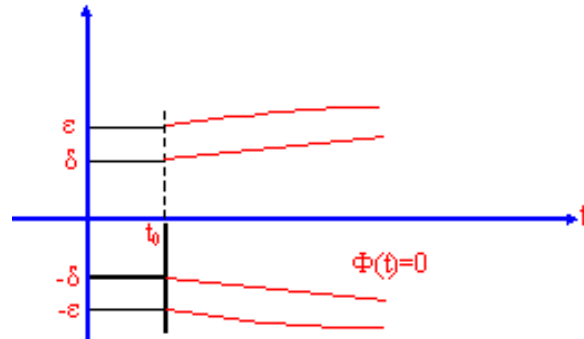
$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0,$$

alors $\Phi(t) = 0$ est asymptotiquement stable.

Pour $n = 1$ on a



L'étude de la stabilité de la solution $\Phi(t)$ peut être ramenée à celle de la solution nulle $y = 0$ d'un système (analogue) au système (1.7).

En effet, posons $y(t) = x(t) - \Phi(t)$ où $y(t)$ est la nouvelle fonction inconnue.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, y + \Phi) \\ \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, y).\end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ est une solution de ce système.

Exemple 1.6.1. ($n = 1$)

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1, \quad x(0) = 1.$$

La solution telle que $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

La solution $\Phi(t)$ telle que $\Phi(0) = 1$ est $\Phi(t) = 1$

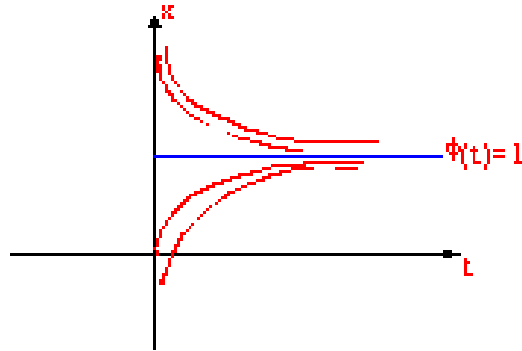
$$|x(t) - \Phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \quad \forall t > 0.$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \varepsilon$, $\delta = \varepsilon \Rightarrow \Phi(t)$ est stable.

Stabilité asymptotique.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_0 - 1)e^{-t}| = 0,$$

d'où $\Phi(t)$ est asymptotiquement stable.



Exemple 1.6.2. ($n = 2$)

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0,$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|) \\ &= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta, \quad \text{On prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

d'où $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable au sens de Lyapunov.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \not\rightarrow 0$$

donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

Remarque. Il est possible que la solution $\Phi(t)$ soit non bornée et stable et même asymptotiquement stable. De même il est possible que la solution soit bornée et non stable.

- Dans le premier cas, on a les deux exemples.

1) $\frac{dx}{dt} = 1, x(0) = 0.$

2) $\frac{dx}{dt} = -x + t + 1, x(0) = 0.$

- Dans le deuxième cas, on a l'exemple.

$\frac{dx}{dt} = \sin^2(x), x(0) = 0, \Phi(t) \equiv 0.$

Méthode des fonctions de Lyapunov

Soit $v(x_1, \dots, x_n)$ une fonction différentiable.

Soit le système autonome

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \tag{1.8}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \tag{1.9}$$

si $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ satisfait (1.8).

Théorème 1. Si pour le système (1.8), il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ défini positif telle que $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction semi définie négative ou identiquement nulle alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ est stable au sens de Lyapunov.

$v(x_1, \dots, x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.

Preuve. (Voir [22])

En général, on commence par rechercher v sous la forme $v(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$

Exemple 1.6.4. Soit le système hamiltonien

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{cases}$$

où $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. On suppose que $H(p, q)$ est définie positive.

Par exemple : $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = p_1^2 + \dots + p_n^2 + q_1^2 + \dots + q_n^2$.

On suppose $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_1}(0, \dots, 0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n}(0, \dots, 0) = 0 \end{cases}$, c.à.d $(0, \dots, 0)$ point d'équilibre, alors $\Phi(t) = (0, \dots, 0)$

est stable.

Preuve. Posons $v(x_1 = p_1, \dots, x_{2n} = q_n) = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(p, q) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dH}{dp_i} - \sum_{i=1}^n \frac{dH}{dp_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (p, q) = (0, \dots, 0)$ est stable au sens de Lyapunov.

Exemple 1.6.5. Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^4 \\ \frac{dy}{dt} = yx^4 \end{cases}.$$

Soit : $v(x, y) = x^4 + y^4$ définie positive.

$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable.

Les orbites vérifient $x^4(t) + y^4(t) = c$, ($c > 0$).

Théorème 2 : Si pour le système (1.8) il existe une fonction définie positive $v(x_1, \dots, x_n)$ telle que $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction définie négative alors le point d'équilibre $x = (0, \dots, 0)$ est asymptotiquement stable.

Preuve : (Voir [22]).

Exemple 1.5.6. Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3 \end{cases} .$$

Soit $v(x, y) = x^2 + y^2$, alors $\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -(x^4 + 3y^4)$ définie négative.

$\Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est asymptotiquement stable.

Remarque. La forme des fonctions de Lyapunov sont généralement de la forme :

$$v(x, y) = ax^2 + by^2, \quad ax^4 + by^4, \quad ax^4 + by^2, \quad ax^2 + by^4, \dots\dots$$

Théorème 3. Supposons que pour le système (1.8) il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ différentiable dans un voisinage de l'origine et telle que $v(0, \dots, 0) = 0$.

Si $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine $(0, \dots, 0)$ des points dans lesquels $v(x_1, \dots, x_n) > 0$ alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ est instable.

Exemple 1.6.7. Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow (0, 0)$ est instable.

Posons $v(x, y) = x^2 - y^2, v(x, 0) = x^2 > 0 \forall x \neq 0$.

$\frac{dv}{dt} = 2x^2 + (-2y)(-y) = 2(x^2 + y^2)$ elle est définie positive $\Rightarrow (0, 0)$ instable.

Nous démontrons l'exemple de la remarque précédente $\frac{dx}{dt} = \sin^2(x)$. Soit $v(x) = x$, alors $\dot{v}(x) = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \sin^2(x)$ définie positive dans un voisinage de $x = 0 \Rightarrow x = 0$ instable d'après le théorème 3.

Application à l'équation de Liénard

Soit l'équation de Liénard généralisée

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

qui est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

où $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, $G(x) = \int_0^x g(s)ds$.

Proposition : On suppose qu'on a le système (1.10) où $f(x)$ est un polynôme pair et $g(x)$ un polynôme impair.

Si $G(x) > 0$ et $g(x).F(x) > 0$ ($g(x).F(x) < 0$) dans un voisinage de l'origine $(0, 0)$ alors $(0, 0)$ est asymptotiquement stable (respectivement $(0, 0)$ instable).

Preuve : Soit la fonction de Lyapunov $v(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x)$ qui est définie positive.

Alors

$$\begin{aligned} \dot{v}(x, y) &= y\dot{y} + g(x)\dot{x} \\ &= y(-g(x)) + g(x)(y - F(x)) \\ &= -g(x).F(x) \end{aligned}$$

$\dot{v}(x, y)$ est définie négative si $g(x).F(x) > 0$ donc $(0, 0)$ est asymptotiquement stable (théorème 2), et si $g(x).F(x) < 0$ donc $(0, 0)$ est instable (théorème 3).

Chapitre 2

Cycles limites des systèmes de Liénard généralisés

Résumé

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode d'équivalence topologique pour l'étude des cycles limites d'un centre non linéaire perturbé. Nous réduisons ces systèmes aux systèmes perturbés de la forme

$$dH(x, y) + \varepsilon(f(x, y)dy - g(x, y)dx) = 0,$$

où

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

à l'aide d'un homéomorphisme. Cette réduction nous permet de trouver la fonction de Melnikov

$$M(h) = \int_{H=h} f dy - g dx,$$

associé à chaque problème particulier. Ce qui nous permet d'utiliser la méthode de J.L. Lopez and R. Lopez-Ruiz [14]. Nous calculons l'amplitude et la période du cycle limite des équations de Liénard suivantes

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}^3 + x = 0$$

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^{2m} - 1)(\dot{x})^{2p-1} + x^{2n-1} = 0$$

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(\sum_{i=0}^m b_{2i}x^{2i}\right)(\dot{x})^{2p-1} + x^{2n-1} = 0$$

$$\ddot{x} + \varepsilon(|x|^m - 1)(\dot{x})^{2p-1} + \text{sign}(x) \cdot |x|^n = 0$$

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^{2m} - 1)(\dot{x})^{2p-1} + x^{\frac{1}{2n-1}} = 0,$$

où p, m et $n \in \mathbb{N}$. Et nous donnons des résultats numériques.

2.1 Existence et unicité du cycle limite

Théorème 1. Considérons l'équation de Liénard généralisé

$$\ddot{x} + f(x) (\dot{x})^{k+1} + g(x) = 0 \quad (2.1)$$

où k est un nombre pair, $xg(x) > 0$ quand $x \neq 0$ et il existe $x_1 < 0 < x_2$ tel que $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $f(x) < 0$ quand $x \in (x_1, x_2)$ et $f(x) > 0$ quand $x < x_1$ ou $x > x_2$. De plus, on suppose $G(x_1) = G(x_2)$ et $G(\pm\infty) = +\infty$ où $G(x) = \int_0^x g(s)ds$. Alors le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{k+1} - g(x) \end{cases}$$

admet au maximum un cycle limite. S'il existe, il est stable.

Preuve. (voir [23]).

2.2 Méthodologie

Soit le système perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = -x + \varepsilon g(x, y). \end{cases} \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (2.2)$$

En posant $\dot{x}(t) = y(x)$, $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ on obtient

$$yy' + x + \varepsilon [f(x, y)y' - g(x, y)] = 0. \quad (2.3)$$

Nous supposons que l'origine est le seul point fixe de (2.2).

On pose

$$\beta(a) = \int_{-a}^a \left[\bar{g}(x, \sqrt{a^2 - x^2}) + \frac{x \bar{f}(x, \sqrt{a^2 - x^2})}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx = 0,$$

où

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, y) &= \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x, -y) - f(-x, y) - f(-x, -y)] \\ \bar{g}(x, y) &= \frac{1}{2} [g(x, y) - g(x, -y) + g(-x, y) - g(-x, -y)]\end{aligned}\quad (2.4)$$

Chaque solution $a > 0$ de l'équation $\beta(a) = 0$ est une amplitude d'un cycle limite du système (2.2) (voir [16]).

Considérons les centres perturbés

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x^{2n-1} + \varepsilon Q(x, y), \end{cases}\quad (2.5)$$

avec $0 < |\varepsilon| \ll 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $\varepsilon = 0$, on a un centre

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x^{2n-1}, \end{cases}\quad (2.6)$$

et on obtient la solution suivante

$$\frac{x^{2n}}{2n} + \frac{y^2}{2} = c, \quad c > 0$$

En posant $\dot{x}(t) = y(x)$, (2.5) devient

$$y \frac{dy}{dx} + x^{2n-1} + \varepsilon Q(x, y) = 0. \quad (2.7)$$

Considérons l'homéomorphisme $\Gamma : (x, y) \rightarrow (X, Y) :$

$$\begin{cases} X = \text{sign}(x) \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}, \\ Y = y, \end{cases}\quad (2.8)$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = \text{sign}(X)(\sqrt{n}|X|)^{1/n}, \\ y = Y. \end{cases} \quad (2.9)$$

Il transforme la courbe fermée

$$\frac{x^{2n}}{2n} + \frac{y^2}{2} = c$$

au cercle

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} = c.$$

L'équation (2.7), dans les nouvelles variables (X, Y) , devient

$$Y \frac{dY}{dX} + X + \varepsilon \frac{|X|^{\frac{1}{n}-1}}{n^{1-\frac{1}{2n}}} Q(\text{sign}(X)(\sqrt{n}|X|)^{1/n}, Y) = 0. \quad (2.10)$$

On pose

$$\begin{cases} f(X, Y) = 0, \\ g(X, Y) = -\frac{|X|^{\frac{1}{n}-1}}{n^{1-\frac{1}{2n}}} Q(\text{sign}(X)(\sqrt{n}|X|)^{1/n}, Y). \end{cases} \quad (2.11)$$

Par conséquent, si A est l'amplitude d'un cycle limite de (2.10), quand $\varepsilon \rightarrow 0$, A vérifie l'équation suivante

$$\bar{\beta}(A) = \int_{-A}^A \bar{g}(X, Y_A(X)) dX = 0,$$

où $Y_A(X) = \sqrt{A^2 - X^2}$ et \bar{g} est donnée par (2.4). La relation entre les amplitudes A et a des systèmes (2.10) et (2.5), est donnée par

$$a^{2n} = nA^2.$$

2.3 Applications

En appliquant le théorème 1, chacune des équations suivantes peut avoir un seul cycle limite.

$$1) \ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}^3 + x = 0$$

- 2) $\ddot{x} + \varepsilon(x^{2m} - 1)(\dot{x})^{2p-1} + x^{2n-1} = 0$
- 3) $\ddot{x} + \varepsilon(\sum_{i=0}^m b_{2i}x^{2i})(\dot{x})^{2p-1} + x^{2n-1} = 0$
- 4) $\ddot{x} + \varepsilon(|x|^m - 1)(\dot{x})^{2p-1} + \text{sign}(x) \cdot |x|^n = 0$
- 5) $\ddot{x} + \varepsilon(x^{2m} - 1)(\dot{x})^{2p-1} + x^{\frac{1}{2n-1}} = 0.$

1) $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}^3 + x = 0$

ou

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(x^2 - 1)y^3. \end{cases}$$

d'après (2.11), on obtient

$$\begin{cases} f(X, Y) = 0, \\ g(X, Y) = (X^2 - 1)Y^3, \\ \bar{g}(X, Y) = 2(X^2 - 1)Y^3 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(A) &= 2 \int_{-A}^A (X^2 - 1)(A^2 - X^2)^{\frac{3}{2}} dX \\ &= 4 \int_0^A (X^2 - 1)(A^2 - X^2)^{\frac{3}{2}} dX \end{aligned}$$

En posant $X = At^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(A) &= 2A^4 \int_0^1 \left(A^2 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right) dt \\ &= 2A^4 \left(\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) A^2 - \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{8} A^4 (A^2 - 6) \end{aligned}$$

on trouve

$$a = A = \sqrt{6} \simeq 2.4495.$$

2) $\ddot{x} + \varepsilon(x^{2m} - 1)(\dot{x})^{2p-1} + x^{2n-1} = 0$ ou

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x^{2n-1} - \varepsilon(x^{2m} - 1)y^{2p-1}. \end{cases}$$

d'après (2.11), on obtient

$$\begin{cases} \bar{f}(X, Y) = 0, \\ \bar{g}(X, Y) = 2n^{\frac{1}{2n}-1} |X|^{\frac{1}{n}-1} (n^{\frac{m}{n}} |X|^{\frac{2m}{n}} - 1) Y^{2p-1}, \end{cases}$$

et

$$\bar{\beta}(A) = 4n^{\frac{1}{2n}-1} \int_0^A X^{\frac{1}{n}-1} (n^{\frac{m}{n}} X^{\frac{2m}{n}} - 1) (A^2 - X^2)^{\frac{2p-1}{2}} dX.$$

En posant $X = At^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$\bar{\beta}(A) = 2n^{\frac{1}{2n}-1} A^{2p-1+\frac{1}{n}} \left(n^{\frac{m}{n}} A^{\frac{2m}{n}} I_1 - I_2 \right)$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 t^{\frac{2m+1}{2n}-1} (1-t)^{\frac{2p-1}{2}} dt = \beta\left(\frac{2m+1}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right) \\ I_2 &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2n}-1} (1-t)^{\frac{2p-1}{2}} dt = \beta\left(\frac{1}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right) \end{aligned}$$

on obtient

$$\bar{\beta}(A) = 2n^{\frac{1}{2n}-1} A^{2p-1+\frac{1}{n}} \left(n^{\frac{m}{n}} A^{\frac{2m}{n}} \beta\left(\frac{2m+1}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right) - \beta\left(\frac{1}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right) \right).$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right), \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \quad \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$

on trouve

$$a = (nA^2)^{\frac{1}{2n}} = \left(\frac{\beta(\frac{1}{2n}, \frac{2p+1}{2})}{\beta(\frac{2m+1}{2n}, \frac{2p+1}{2})} \right)^{\frac{n}{m} \frac{1}{2n}} = \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2n}) \Gamma(p + \frac{2m+n+1}{2n})}{\Gamma(\frac{2m+1}{2n}) \Gamma(p + \frac{n+1}{2n})} \right)^{\frac{1}{2m}}$$

Si $m = p = n = 1$, nous avons

$$a = \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(2)}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{\pi})(2)}{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})(1)}} = 2,$$

qui est l'amplitude de l'équation de Van der pol $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$.

Pour $m = n = 1$, $p = 2$, on trouve l'amplitude du premier exemple

$$a = \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(4)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(3)}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{\pi})(6)}{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})(2)}} = \sqrt{6}.$$

La période du cycle limite

On a $y = \frac{1}{\sqrt{n}}(a^{2n} - x^{2n})^{\frac{1}{2}}$, $dt = -\frac{dx}{y}$

d'où

$$T = 4 \int_0^a \frac{\sqrt{n}}{(a^{2n} - x^{2n})^{\frac{1}{2}}} dx.$$

En posant $x = at^{\frac{1}{2n}}$, on obtient

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\sqrt{n}}{na^{n-1}} \int_0^1 t^{\frac{1}{2n}-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2\sqrt{n}}{na^{n-1}} \beta\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2^{\frac{1}{n}} \left(\Gamma\left(\frac{2m+1}{2n}\right)\right)^{\frac{n-1}{2m}} \left(\Gamma\left(p + \frac{n+1}{2n}\right)\right)^{\frac{n-1}{2m}}}{\sqrt{n} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^{\frac{n-4m-1}{2m}} \left(\Gamma\left(p + \frac{2m+n+1}{2n}\right)\right)^{\frac{n-1}{2m}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Si $m = p = n = 1$, nous avons

$$T = \frac{2\Gamma^0\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma^0(2)}{\sqrt{1}\Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma^0\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(1)} = \frac{2(1)(1)}{(1)(\sqrt{\pi})^{-2}(1)(1)} = 2\pi,$$

Pour $m = p = 1$ et $n = 2$, on obtient

$$T = \frac{2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}}{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma^{-3}\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{9}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}} = 2\sqrt{\frac{6\pi}{5}}.$$

Ce résultat est obtenu dans ([15]).

$$\mathbf{3)} \quad \ddot{x} + \varepsilon \left(\sum_{i=0}^m b_{2i} x^{2i} \right) (\dot{x})^{2p-1} + x^{2n-1} = 0$$

ou

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x^{2n-1} - \varepsilon \left(\sum_{i=0}^m b_{2i} x^{2i} \right) y^{2p-1}, \end{cases}$$

d'après (2.11) et (2.4), on obtient

$$\begin{cases} \bar{f}(X, Y) = 0, \\ \bar{g}(X, Y) = 2n^{\frac{1}{2n}-1} |X|^{\frac{1}{n}-1} Y^{2p-1} \sum_{i=0}^m b_{2i} n^{\frac{i}{n}} |X|^{\frac{2i}{n}}, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(A) &= 4n^{\frac{1}{2n}-1} \sum_{i=0}^m b_{2i} n^{\frac{i}{n}} \int_0^A X^{\frac{2i+1}{n}-1} (A^2 - X^2)^{\frac{2p-1}{2}} dX \\ &= 2n^{\frac{1}{2n}-1} A^{2p+\frac{1}{n}-1} \sum_{i=0}^m b_{2i} A^{\frac{2i}{n}} n^{\frac{i}{n}} \int_0^1 t^{\frac{2i-2n+1}{2n}} (1-t)^{\frac{2p-1}{2}} dt \\ &= 2n^{\frac{1-2n}{2n}} A^{2p+\frac{1}{n}-1} \sum_{i=0}^m b_{2i} (nA^2)^{\frac{i}{n}} \beta\left(\frac{2i+1}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right) \end{aligned}$$

on a $A = n^{-\frac{1}{2}} a^n$, par conséquent

$$\beta(a) = 2n^{-\frac{2p+1}{2}} a^{(2p-1)n+1} \sum_{i=0}^m b_{2i} \frac{\Gamma\left(\frac{2i+1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2i+n+1}{2n} + p\right)} a^{2i},$$

En posant $c_{2i} = b_{2i} \frac{\Gamma(\frac{2i+1}{2n})\Gamma(\frac{2p+1}{2})}{\Gamma(\frac{2i+n+1}{2n}+p)}$, on obtient

$$\beta(a) = 2n^{-\frac{2p+1}{2}} a^{(2p-1)n+1} \sum_{i=0}^m c_{2i} a^{2i}.$$

Les amplitudes sont les racines de $\beta(a) = 0$.

Remarque. Dans ce cas, nous avons au maximum m cycles limites.

$$4) \ddot{x} + \varepsilon(|x|^m - 1)(\dot{x})^{2p-1} + \text{sign}(x) \cdot |x|^n = 0,$$

ou

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \text{sign}(x) \cdot |x|^n - \varepsilon(|x|^m - 1)y^{2p-1}, \end{cases}$$

où

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

d'après (2.11) et (2.4), on a

$$\begin{cases} \bar{f}(X, Y) = 0, \\ \bar{g}(X, Y) = 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-\frac{n}{n+1}} \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{m}{n+1}} |x|^{\frac{2m-n+1}{n+1}} - |x|^{\frac{1-n}{1+n}} \right) Y^{2p-1}, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(A) &= 4\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{m}{n+1}} \int_0^A x^{\frac{2m-n+1}{n+1}} (A^2 - X^2)^{\frac{2p-1}{2}} dX - \int_0^A x^{\frac{1-n}{1+n}} (A^2 - X^2)^{\frac{2p-1}{2}} dX \\ &= 2A^{2p+\frac{1-n}{1+n}} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{-\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{m}{n+1}} A^{\frac{2m}{1+n}} \beta\left(\frac{m+1}{n+1}, \frac{2p+1}{2}\right) - \beta\left(\frac{1}{n+1}, \frac{2p+1}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$A^{\frac{2m}{n+1}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{-\frac{m}{n+1}} \frac{\beta\left(\frac{1}{n+1}, \frac{2p+1}{2}\right)}{\beta\left(\frac{m+1}{n+1}, \frac{2p+1}{2}\right)},$$

alors

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{n+1}{2} A^2 \right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{\beta\left(\frac{1}{n+1}, \frac{2p+1}{2}\right)}{\beta\left(\frac{m+1}{n+1}, \frac{2p+1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n+1}\right)} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{(2(1+n)p+n+2m+3)}{2(n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{(2(1+n)p+n+3)}{2(n+1)}\right)} \right)^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Si $n = m = 1$, on obtient

$$a = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1} (p!)^2 \pi},$$

Si $n = p = m = 1$, on obtient

$$a = \frac{3}{4} \pi,$$

c'est le même résultat obtenu dans ([15]).

Si $n = m = 1$ et $p = 2$, on obtient

$$a = \frac{15}{16} \pi.$$

La période de ce cycle limite est

$$T = 2\sqrt{\pi} \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{n-3}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2(n+1)}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n+1}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{(2(1+n)p+n+2m+3)}{2(n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{(2(1+n)p+n+3)}{2(n+1)}\right)} \right)^{\frac{1-n^2}{4m}}.$$

Si $n = 1$, on obtient

$$T = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{2p+2+m}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \right)^0 = 2\pi.$$

$$5) \quad \ddot{x} + \varepsilon(x^{2m} - 1)(\dot{x})^{2p-1} + x^{\frac{1}{2n-1}} = 0.$$

qui est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x^{\frac{1}{2n-1}} - \varepsilon(x^{2m} - 1)y^{2p-1}. \end{cases}$$

D'après (2.11) et (2.4), on obtient

$$\left\| \begin{aligned} \bar{f}(X, Y) &= 0 \\ \bar{g}(X, Y) &= 2 \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} |X|^{\frac{n-1}{n}} \left(\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{\frac{m}{n}(2n-1)} \cdot |X|^{\frac{2m}{n}(2n-1)} - 1 \right) Y^{2p-1}, \end{aligned} \right.$$

et

$$\bar{\beta}(A) = 2 \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} \int_{-A}^A |X|^{1-\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{\frac{m}{n}(2n-1)} \cdot |X|^{\frac{2m}{n}(2n-1)} - 1 \right) (A^2 - X^2)^{\frac{2p-1}{2}} dX.$$

En posant $X = At^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(A) &= \lambda \int_0^1 t^{-1/2n} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{(m/n)(2n-1)} A^{(2m/n)(2n-1)} t^{(m/n)(2n-1)} - 1 (1-t)^{\frac{2p-1}{2}} dt. \\ &= \lambda \left(\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{(m/n)(2n-1)} A^{(2m/n)(2n-1)} \beta\left(\frac{(2m+1)(2n-1)}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right) - \beta\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

où

$$\lambda = -2 \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} A^{\frac{3n-1}{n}}.$$

D'où

$$a^{2m} = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{(m/n)(2n-1)} A^{(2m/n)(2n-1)}.$$

En résoudre l'équation $\bar{\beta}(A) = 0$, on obtient

$$a^{2m} = \frac{\beta\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right)}{\beta\left(\frac{(2m+1)(2n-1)}{2n}, \frac{2p+1}{2}\right)},$$

alors

$$a = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2n-1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{(2m+1)(2n-1)}{2n}\right)} \right)^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{(2m+1)(2n-1)+(2p+1)n}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{(3+2p)n-1}{2n}\right)} \right)^{\frac{1}{2m}}. \quad (*)$$

Pour $m = p = 1$ et $n = 2$ on obtient l'équation

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x^{\frac{1}{3}} = 0,$$

d'où

$$a = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{5} \pi \sqrt{231} \frac{1}{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2} \simeq 2.0548.$$

Cette équation a été étudiée par R.E.Mickens ([17]).

La période de ce cycle limite est

$$dt = -\frac{dx}{y}, \quad y = \sqrt{\frac{2n-1}{n} \left(a^{\frac{2n}{2n-1}} - x^{\frac{2n}{2n-1}} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$T = 4 \int_0^a \frac{dx}{y} = 4 \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \int_0^a \left(a^{\frac{2n}{2n-1}} - x^{\frac{2n}{2n-1}} \right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

En posant $t = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}$, on obtient

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \frac{2n-1}{2n} a^{\frac{n-1}{2n-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2n}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 2 \sqrt{\frac{2n-1}{n}} a^{\frac{n-1}{2n-1}} \beta\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{\frac{2n+1}{n}} \pi \frac{\sqrt{n(2n-1)}}{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{n})}{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)} a^{\frac{n-1}{2n-1}}, \quad \text{où } a \text{ est donnée par } (*). \end{aligned}$$

2.4 Résultats numériques

1) $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)(\dot{x})^3 + x = 0$, on a

$$a = \sqrt{6} \simeq 2.4495.$$

$$T = 2\pi \simeq 6.2832.$$

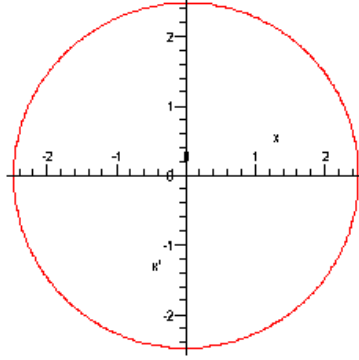


fig 2.1. Cycle limite du système (1) pour $\varepsilon=0.001$.

2) $\ddot{x} + \varepsilon(|x| - 1)(\dot{x})^3 + x = 0$, on a

$$a = \frac{15}{16}\pi \simeq 2.9452.$$

$$T = 2\pi \simeq 6.2832.$$

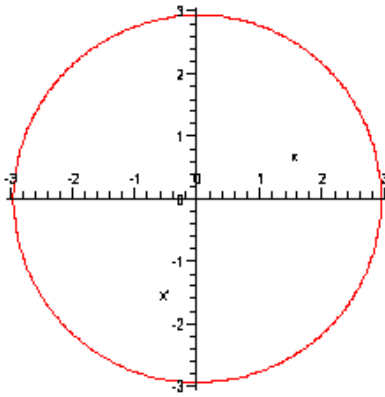


fig 2.2. Cycle limite du système (2) pour $\varepsilon=0.001$.

3) $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)(\dot{x})^3 + x^{\frac{1}{3}} = 0$, on a

$$a = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\sqrt{385}}{\Gamma(\frac{1}{4})5} \simeq 1.3264.$$

$$T = 8\sqrt{3}\left(\frac{77}{5}\right)^{\frac{1}{6}}\pi^{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma^{\frac{1}{3}}(\frac{3}{4})}{\Gamma^{\frac{7}{3}}(\frac{1}{4})} \simeq 6.4491$$

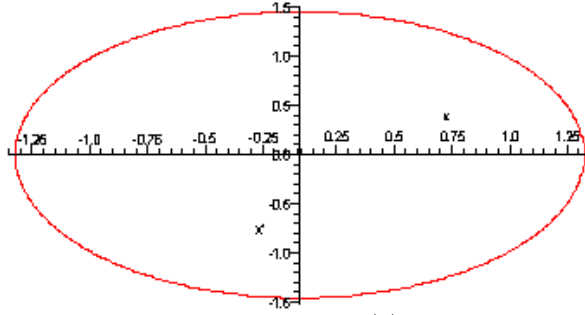


fig 2.3. Cycle limite du système (3) pour $\varepsilon=0.001$.

Conclusion 1 *On remarque que dans chaque cas, l'amplitude trouvée par cette méthode est presque la même sur le graphe dessiné par maple.*

Chapitre 3

Cycles limites des systèmes polynomiaux quartiques et cintiques en utilisant la théorie de la moyenne

Résumé

Nous étudions le nombre maximal des cycles limites qui peuvent bifurquer des couronnes périodiques qui entourent l'origine d'une classe de systèmes différentiels polynomiaux cubiques en utilisant la théorie de la moyenne. Plus précisément, nous prouvons que les perturbations de la couronne périodique du centre localisé à l'origine du système différentiel polynomial cubique $\dot{x} = -yf(x, y)$, $\dot{y} = xf(x, y)$ où $f(x, y) = 0$ est une conique telle que $f(0, 0) \neq 0$, par des polynômes quartiques et cintiques arbitraires fournissent respectivement, au moins 8 et 9 cycles limites qui bifurquent des couronnes périodiques en utilisant seulement la méthode de la moyenne du premier ordre.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude du nombre de cycles limites qui peuvent bifurquer de la couronne périodique qui entoure l'origine d'un système différentiel polynomial cubique de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x, y) \\ \dot{y} = xf(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f(x, y) = 0$ est une conique telle que $f(0, 0) \neq 0$, quand nous la perturbons avec une classe de polynômes quartiques et quintiques. Pour ε suffisamment petit nous étudions le nombre de cycles limites des systèmes

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x, y) + \varepsilon P(x, y), \\ \dot{y} = xf(x, y) + \varepsilon Q(x, y), \end{cases} \quad (3.2)$$

qui bifurquent de la couronne périodique qui entoure l'origine du système (3.1) où $P(x, y) = \sum_{k=1}^n P_k(x, y)$, et $Q(x, y) = \sum_{k=1}^n Q_k(x, y)$, pour $n = 4$ et 5 , avec P_k et Q_k des polynômes homogènes de degré k . Donc nous écrivons $P_k = \sum_{i+j=k} p_{ij}x^i y^j$ et $Q_k = \sum_{i+j=k} q_{ij}x^i y^j$. Le but de ce chapitre est d'étudier pour quels coefficients p_{ij} et q_{ij} le système (3.2) a le nombre maximal de cycles limites hyperboliques qui bifurquent de la couronne périodique du système (3.1) en utilisant la méthode de la moyenne de premier ordre.

Dans ce chapitre nous étudions le système (3.2) qui a une conique $f = f(x, y) = 0$ donnée par un cas des neuf cas suivants

- 1- Ellipse. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1 = 0$ avec $a^2 + b^2 \neq 1$.
- 2- Ellipse complexe. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 + 1 = 0$.
- 3- Hyperbole. $f = (x + a)^2 - y^2 - 1 = 0$ avec $a^2 \neq 1$.
- 4- Deux lignes droites complexes qui s'intersectent en un point réel. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 = 0$.
- 5- Deux lignes droites réelles qui s'intersectent en un point. $f = (x + a)(y + b)$ avec

$ab \neq 0$.

6- Parabole. $f = x - a - y^2$ avec $a \neq 0$.

7- Deux lignes droites réelles parallèles. $f = (x + a)^2 - 1 = 0$ avec $a^2 \neq 1$.

8- Deux lignes droites complexes parallèles. $f = (x + a)^2 + 1 = 0$.

9- Deux lignes droites réelles identiques. $f = (x + a)^2 = 0$ avec $a \neq 0$.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 1. Pour chacune des neuf coniques $f(x, y) = 0$, on trouve dans le tableau 1 les bornes inférieures et supérieures du nombre des cycles limites pour $n = 3, 4, 5$ qui bifurque des orbites périodiques du centre (3.2) avec $\varepsilon = 0$ obtenu en utilisant la théorie de la moyenne de premier ordre.

conique n°	Pour $n = 3$ sys(2) a		Pour $n = 4$ sys(2) a		Pour $n = 5$ sys(2) a	
	au moins	au plus	au moins	au plus	au moins	au plus
1	5	5	7	7	9	9
2	5	5	7	7	9	9
3	5	8	6	9	8	12
4	5	5	7	7	9	9
5	6	7	8	13	9	15
6	5	7	6	9	8	11
7	5	8	6	9	8	12
8	5	8	6	8	8	10
9	3	4	4	5	5	6

Tableau 1. Bornes inférieures et supérieures du nombre de cycles limites du système (3.2) pour $n=3,4$ et 5.

Pour $n = 3$, les résultats ne sont pas nouveaux, mais nous ajoutons la borne supérieure du cas de l'hyperbole et de la parabole.

3.2 Méthode de la moyenne de premier ordre

Théorème. *Considérons les deux équations suivantes*

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (3.3)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0. \quad (3.4)$$

où $x, y, x_0 \in D$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, F et G sont périodiques de période T par rapport à la variable t , et $f^0(y)$ est la fonction moyennée de $F(t, y)$, c.à.d.,

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

On suppose :

- (i) $F, \partial F/\partial x, \partial^2 F/\partial x^2, G$ et $\partial G/\partial x$ sont définies, continues et bornées par une constante indépendante de ε dans $[0, \infty) \times D$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.
- (ii) T est une constante indépendante de ε .
- (iii) $y(t)$ appartient à D sur l'échelle de temps $1/\varepsilon$.

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (a) Sur l'échelle de temps $1/\varepsilon$ on a $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (b) Si p est un point d'équilibre du système moyenné (3.4), tel que

$$\left. \frac{\partial f^0}{\partial y} \right|_{y=p} \neq 0, \quad (3.5)$$

alors il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (3.3) proche de p tel que $\phi(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (c) Si (3.5) est négatif, alors la solution périodique correspondante $\phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (3.4) dans l'espace (t, x) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (3.5) est positif, alors $\phi(t, \varepsilon)$ est instable.

Preuve. (voir [4])

3.3 Preuve de théorème 1

En utilisant le changement de variables $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ le système (3.2) prend la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \sum_{k=1}^n f_k(\theta) r^k, \\ \dot{\theta} = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left(1 + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{g_k(\theta)}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} r^{k-1} \right), \end{cases}$$

où $f_k(\theta) = \cos \theta P_k(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Q_k(\cos \theta, \sin \theta)$ et $g_k(\theta) = \cos \theta Q_k(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_k(\cos \theta, \sin \theta)$,

où

$$\begin{aligned} P_k(x, y) &= \sum_{i+j=k} p_{ij} x^i y^j \\ Q_k(x, y) &= \sum_{i+j=k} q_{ij} x^i y^j \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{f_k(\theta)}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} r^k \left(1 - \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{g_k(\theta) r^{k-1}}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{g_k(\theta) r^{k-1}}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} \right)^2 - \dots \right),$$

Enfin, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{f_k(\theta)}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} r^k + \varepsilon^2 G(r, \theta, \varepsilon). \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) vérifie les suppositions de la méthode de la moyenne, c.à.d. un système de la forme (3.3). Pour prouver le théorème 1, nous devons étudier le nombre des points singuliers hyperboliques du système différentiel moyenné

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon f^0(r),$$

où

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n r^k \int_0^{2\pi} \frac{f_k(\theta)}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} d\theta.$$

Alors, on obtient $f^0(r) = \sum_{k=1}^n C_k(r)r^k$, où

$$C_k(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i+j=k} (p_{ij}I_{i+1,j}(r) + q_{ij}I_{i,j+1}(r)),$$

et

$$I_{p,q} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} d\theta.$$

Le reste de cette section est consacré, en premier lieu à calculer l'intégrale $f^0(r)$, et deuxièmement à étudier le nombre de ses zéros simples.

3.3.1 Ellipse. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1$

Proposition 2 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$, $\frac{\sin \theta}{f}$ où $\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

Preuve. En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma} = \frac{[2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma] \cos^n \theta - 2br \cos^n \theta \sin \theta - \gamma \cos^n \theta}{2arf} \\ &= \frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b \cos^n \theta \sin \theta}{a f} - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f} \\ &= \frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b}{a} \frac{f \cos^{n-1} \theta \sin \theta - 2br \cos^{n-1} \theta \sin^2 \theta - \gamma \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2arf} - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f} \\ &= \frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b}{a} \left(\frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar} - \frac{b}{a} \left(\frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} \right) - \frac{\gamma \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar f} \right) - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f} \\ &= \frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b}{2a^2 r} \cos^{n-1} \theta \sin \theta + \frac{b^2 \cos^{n-1} \theta}{a^2 f} - \frac{b^2 \cos^{n+1} \theta}{a^2 f} + \frac{b\gamma \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2a^2 r f} - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\frac{\cos^{n+1} \theta}{f} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\lambda(\theta, r) + h_0(r) + \frac{b^2 \cos^{n-1} \theta}{a^2 f} + \frac{b\gamma \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2a^2 r f} - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f} \right)$$

où

$$\frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b}{2a^2r} \cos^{n-1} \theta \sin \theta = \begin{cases} h_0(r) + \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^n \theta \sin \theta}{f} &= \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar} - \frac{b}{a} \left(\frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} \right) - \frac{\gamma}{2ar} \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} \\ &= \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar} - \frac{b \cos^{n-1} \theta}{a f} + \frac{b \cos^{n+1} \theta}{a f} - \frac{\gamma}{2ar} \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} \\ &= \lambda(\theta) - \frac{b \cos^{n-1} \theta}{a f} - \frac{\gamma}{2ar} \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} + \frac{b \cos^{n+1} \theta}{a f} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^{n-1} \theta \sin^2 \theta}{f} = \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - \frac{\cos^{n+1} \theta}{f}, \quad \frac{\cos^{n-2} \theta \sin^3 \theta}{f} = \frac{\cos^{n-2} \theta \sin \theta}{f} - \frac{\cos^n \theta \sin \theta}{f}$$

$$\frac{\sin^{n+1} \theta}{f} = \begin{cases} \frac{(1-\cos^2 \theta)^{\frac{n}{2}} \sin \theta}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k C_{\frac{n}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta \sin \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(1-\cos^2 \theta)^{\frac{n+1}{2}}}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k C_{\frac{n+1}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$$

Proposition 3 *On a*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \begin{cases} \frac{2\pi}{g} & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2, \\ \frac{-2\pi}{g} & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1. \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \begin{cases} \frac{\pi a}{\alpha g} (r^2 + \alpha - 1 - g) & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2, \\ \frac{\pi a}{\alpha g} (r^2 + \alpha - 1 + g) & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1. \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)}. \end{aligned}$$

où

$$\alpha = a^2 + b^2, \quad r_1 = 1 - \sqrt{\alpha}, \quad r_2 = 1 + \sqrt{\alpha}, \quad g = \sqrt{(r^2 + \alpha - 1)^2 - 4\alpha r^2}.$$

Preuve. En posant $z = e^{i\theta}$ et $C = \{z : |z| = 1\}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \frac{1}{2r} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \cos \theta + b \sin \theta + \frac{r^2 + \alpha - 1}{2r}} \\ &= \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{(a-ib)r z^2 + (r^2 + \alpha - 1)z + (a+ib)r}. \end{aligned}$$

Les pôles sont

$$z_1 = -\frac{r^2 + \alpha - 1 - g}{2(a - ib)r}, \quad z_2 = -\frac{r^2 + \alpha - 1 + g}{2(a - ib)r}.$$

Nous avons

$$|z_1 \cdot z_2| = 1$$

Si $(r^2 + \alpha - 1)^2 - 4\alpha r^2 \leq 0$, on a $|z_1| = |z_2| = 1$.

Si $(r^2 + \alpha - 1)^2 - 4\alpha r^2 > 0$, on a

$$|z_1| = \frac{|r^2 + \alpha - 1 - g|}{2r\sqrt{\alpha}} \quad \text{et} \quad |z_2| = \frac{|r^2 + \alpha - 1 + g|}{2r\sqrt{\alpha}}.$$

(i) Si $r^2 + \alpha - 1 = 0$, on trouve $|z_1| = |z_2| = 1$.

(ii) Si $r^2 + \alpha - 1 > 0$, on trouve $|z_1| < |z_2|$, mais on a $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, ceci implique que $|z_1| < 1$ et $|z_2| > 1$.

(iii) Si $r^2 + \alpha - 1 < 0$, on trouve $|z_1| > |z_2|$, ceci implique que $|z_1| > 1$ et $|z_2| < 1$. En appliquant le théorème des résidus, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= 2\pi \sum_k \text{rés} \left(\frac{1}{(a-ib)rz^2 + (r^2 + \alpha - 1)z + (a+ib)r}, z_k \right) \\ &= \begin{cases} 2\pi r \text{rés} \left(\frac{1}{(a-ib)rz^2 + (r^2 + \alpha - 1)z + (a+ib)r}, z_1 \right) & \text{pour } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2, \\ 2\pi r \text{rés} \left(\frac{1}{(a-ib)rz^2 + (r^2 + \alpha - 1)z + (a+ib)r}, z_2 \right) & \text{pour } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{-2\pi}{2(a-ib)rz_1 - (r^2 + \alpha - 1)} = \frac{2\pi}{g} & \text{pour } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2, \\ \frac{-2\pi}{2(a-ib)rz_2 - (r^2 + \alpha - 1)} = \frac{-2\pi}{g} & \text{pour } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1, \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons

$(r^2 + \alpha - 1)^2 - 4\alpha r^2 = (r - \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} + 1)(r + \sqrt{\alpha} - 1)(r + \sqrt{\alpha} + 1)$, avec $\alpha \in]0, 1[\cup]1, \infty[$

Si $\alpha \in]1, \infty[$, $r^2 + \alpha - 1 > 0$ et $(r^2 + \alpha - 1)^2 - 4\alpha r^2 > 0$ si $(r - \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} + 1) > 0$. C'est vérifié pour $r \in]0, \sqrt{\alpha} - 1[\cup]1 + \sqrt{\alpha}, \infty[$. Si $\alpha \in]0, 1[$, $r^2 > 1 - \alpha \Rightarrow r > \sqrt{1 - \alpha}$ et $(r + \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} - 1) > 0$,

c'est vérifié si $r \in]0, r_1[\cup]r_2, \infty[$ et $r > \sqrt{1 - \alpha}$.

$$\sqrt{1 - \alpha} > 1 - \sqrt{\alpha} \Rightarrow r \in]r_2, \infty[.$$

Si $r^2 < 1 - \alpha \Rightarrow r < \sqrt{1 - \alpha}$ et $(r + \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} - 1) > 0$, c'est vérifié si $r \in]0, r_1[$, dans ce cas $|z_2| < 1$ et $|z_1| > 1$.

Nous avons

$$\begin{cases} r \in (0, \sqrt{\alpha} - 1) \cup (1 + \sqrt{\alpha}, \infty) & \text{si } \alpha > 1 \\ r \in (0, 1 - \sqrt{\alpha}) \cup (1 + \sqrt{\alpha}, \infty) & \text{si } \alpha < 1 \end{cases},$$

donc le système (3.1) a deux couronnes périodiques

$$A_1 = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < |1 - \sqrt{\alpha}|\}$$

et

$$A_2 = \{(x, y) : 1 + \sqrt{\alpha} < x^2 + y^2\}.$$

De la même façon nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \frac{1}{2r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{a \cos \theta + b \sin \theta + \frac{r^2 + \alpha - 1}{2r}} \\ &= \frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^2 + 1}{(a - ib)r z^2 + (r^2 + \alpha - 1)z + (a + ib)r} \frac{dz}{z} \\ &= \pi \sum_k \text{rés}(f(z), z_k) \\ &= \begin{cases} \pi (\text{rés}(f(z), z_1) + \text{rés}(f(z), 0)) & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2, \\ \pi (\text{rés}(f(z), z_2) + \text{rés}(f(z), 0)) & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi a}{\alpha r g} (r^2 + \alpha - 1 - g) & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2, \\ \frac{\pi a}{\alpha r g} (r^2 + \alpha - 1 + g) & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1. \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z((a - ib)r z^2 + (r^2 + \alpha - 1)z + (a + ib)r)}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{r(a \cos \theta + b \sin \theta) + r^2 + \alpha - 1} \\
&= \int_{\pi/2 - 2\pi}^{\pi/2} \frac{\cos \phi d\phi}{r(b \cos \phi + a \sin \phi) + r^2 + \alpha - 1} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{r(b \cos \phi + a \sin \phi) + r^2 + \alpha - 1} \\
&= \begin{cases} \frac{\pi b}{\alpha r g} (r^2 + \alpha - 1 - g) & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2 \\ \frac{\pi b}{\alpha r g} (r^2 + \alpha - 1 + g) & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases} \\
&= \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} \blacksquare
\end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$ on obtient (Voir appendice)

$$f^0(r) = \frac{A_n + B_n g}{2^{n+1} a \alpha^{n+1} r g},$$

où

$$\begin{aligned}
A_n &= \begin{cases} a_{2n+2} r^{2n+2} + \dots + a_2 r^2 + (1 - \alpha) b_0 & \text{if } \alpha > 1 \text{ or } r > r_2, \\ a_{2n+2} r^{2n+2} + \dots + a_2 r^2 + (\alpha - 1) b_0 & \text{if } \alpha < 1 \text{ and } r < r_1, \end{cases} \\
B_n &= \begin{cases} -a_{2n+2} r^{2n} - ((\alpha + 1) a_{2n+2} + a_{2n}) r^{2n-2} + b_{2n-4} r^{2n-4} + \dots + b_0 & \text{if } \alpha > 1 \text{ or } r > r_2, \\ a_{2n+2} r^{2n} + ((\alpha + 1) a_{2n+2} + a_{2n}) r^{2n-2} + b_{2n-4} r^{2n-4} + \dots + b_0 & \text{if } \alpha < 1 \text{ and } r < r_1, \end{cases}
\end{aligned}$$

et les coefficients a_i et b_i sont des polynômes en fonction de a , b et les coefficients de P , Q . En réalité, il existe seulement $2n$ paramètres indépendants entre les a_i et b_i donc entre les p_{ij} , q_{ij} , a et b . Par conséquent, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $2n - 1$ zéros positifs simples. Pour trouver la borne supérieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver pour l'expression

$$\begin{aligned}
h(r) &= A_n^2 - B_n^2 g^2 \\
&= r^2 (c_{4n-2} r^{4n-2} + \dots + c_2 r^2 + c_0).
\end{aligned}$$

où c_i sont des polynômes en fonction de a , b , p_{ij} et q_{ij} . D'où, nous avons que, $f^0(r)$ peut

avoir, au plus $2n - 1$ zéros simples dans $(0, r_1) \cup (r_2, \infty)$.

Le système (3.2), avec $n = 5$, $a = -1$ et $b = -2$ et les coefficients $p_{10} = 2197.5\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -335.75\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = -33.715\dots$, $p_{30} = 3$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{40} = 895.34\dots$, $p_{31} = 7$, $p_{22} = 8$, $p_{13} = 9$, $p_{04} = 10$, $p_{50} = 11$, $p_{41} = 12$, $p_{32} = -325.45\dots$, $p_{23} = 13$, $p_{14} = -315.73\dots$, $p_{05} = 14$, $q_{10} = 1281.7\dots$, $q_{01} = 1$, $q_{20} = 629.94\dots$, $q_{11} = 2$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 209.55\dots$, $q_{03} = -3770.2\dots$, $q_{40} = 6$, $q_{31} = 7$, $q_{22} = 8$, $q_{13} = 9$, $q_{04} = 10$, $q_{50} = 11$, $q_{41} = 12$, $q_{32} = -42.881\dots$, $q_{23} = 13$, $q_{14} = -66.568\dots$ et $q_{05} = 21.743\dots$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 9 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, 3, 4$ dans l'intervalle $(0, \sqrt{5} - 1)$ et $r_i = i - 1$, $i = 5, 6, \dots, 9$ dans l'intervalle $(1 + \sqrt{5}, \infty)$.

Le système (3.2), avec $n = 4$, $a = -1$ et $b = -2$ et les coefficients $p_{10} = -1.0\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -625.63\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = -278.19\dots$, $p_{30} = 3$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 0.0\dots$, $p_{31} = 1.0\dots$, $p_{22} = 7$, $p_{13} = 8$, $p_{04} = 9$, $q_{10} = -65.408\dots$, $q_{01} = 1$, $q_{20} = 1292.4\dots$, $q_{11} = 2$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = -56.410\dots$, $q_{03} = 32.455\dots$, $q_{40} = 6$, $q_{31} = 7$, $q_{22} = 8$, $q_{13} = 5$ et $q_{04} = 9$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 7 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{6+i}{2}$, $i = 1, 2, \dots, 7$ dans l'intervalle $(1 + \sqrt{5}, \infty)$. Par conséquent, ce système admet comme borne supérieure $2n - 1$ cycles limites pour le cas de l'ellipse. En résumé, nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 4 *Le système (3.2) avec $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1$ a au plus $2n - 1$ cycles limites qui bifurquent de la couronne périodique entourant l'origine du système (3.1). De plus, il existe des valeurs des coefficients p_{ij} et q_{ij} tel que le système (3.2) a $2n - 1$ cycles limites hyperboliques.*

3.3.2 Ellipse complexe. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2 + 1$

Pour le cas de l'ellipse complexe on remplace $r^2 + a^2 + b^2 - 1$ par $r^2 + a^2 + b^2 + 1$ dans les calculs du cas de l'ellipse ; On obtient $I_{p,q}$ en fonction de $\int \lambda(\theta, r)$, r , $\int \frac{1}{f}$, $\int \frac{\cos \theta}{f}$ avec

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} = \frac{2\pi}{g},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} = \frac{\pi a}{\alpha r g} (r^2 + \alpha + 1 - g).$$

où

$$g = \sqrt{(r^2 + \alpha + 1)^2 - 4\alpha r^2}.$$

Preuve. On a la même preuve dans le cas de l'ellipse avec

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{f} \equiv \frac{1}{i((a-ib)rz^2 + (r^2 + \alpha + 1)z + (a+ib)r)} dz \\ \frac{\cos\theta d\theta}{f} \equiv \frac{z^2 + 1}{2iz((a-ib)rz^2 + (r^2 + \alpha + 1)z + (a+ib)r)} dz \end{cases}$$

et

$$z_1 = -\frac{r^2 + \alpha + 1 - g}{2(a-ib)r}, \quad z_2 = -\frac{r^2 + \alpha + 1 + g}{2(a-ib)r}.$$

On a $(r^2 + \alpha + 1)^2 - 4\alpha r^2 > 0 \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$. D'où, le système (3.1) a une couronne

périodique unique, $A = \{x^2 + y^2 / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$.

$$|z_1| - |z_2| = \frac{r^2 + \alpha + 1 - \sqrt{(r^2 + \alpha + 1)^2 - 4\alpha r^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}r} - \frac{r^2 + \alpha + 1 + \sqrt{(r^2 + \alpha + 1)^2 - 4\alpha r^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}r} < 0,$$

$$|z_1 z_2| = \left| \frac{a+ib}{a-ib} \right| = 1, \text{ donc } |z_1| < 1 \text{ et } |z_2| > 1,$$

z_1 est le seul pôle contenu dans l'intérieur du disque unité ■

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$ on obtient

$$f^0(r) = \frac{A_n + B_n g}{2^{n+1} a (a^2 + b^2)^{n+1} r g},$$

où

$$A_n = a_{2n+2} r^{2n+2} + \dots + a_2 r^2 - (1 + a^2 + b^2) b_0,$$

$$B_n = -a_{2n+2} r^{2n} - ((a^2 + b^2 - 1) a_{2n+2} + a_{2n}) r^{2n-2} + b_{2n-4} r^{2n-4} + \dots + b_2 r^2 + b_0,$$

et les coefficients a_i et b_i sont des polynômes en fonction de a, b et les coefficients de P, Q .

En réalité, il existe seulement $2n$ paramètres indépendants entre les a_i et b_i donc entre les p_{ij}, q_{ij}, a et b . Par conséquent, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $2n - 1$ zéros positifs simples.

Pour trouver la borne supérieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver

pour l'expression

$$\begin{aligned} h(r) &= A_n^2 - B_n^2 g^2 \\ &= -r^2 (c_{4n-2} r^{4n-2} + \dots + c_2 r^2 + c_0), \end{aligned}$$

où c_i sont des polynômes en fonction de a, b, p_{ij} et q_{ij} . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $2n - 1$ zéros simples.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = b = -1$ et les coefficients $p_{10} = -67.531\dots, p_{01} = 1, p_{20} = 587.58\dots, p_{11} = 2, p_{02} = -5.5057\dots, p_{30} = 3, p_{21} = 4, p_{12} = 5, p_{03} = -196.15\dots, p_{40} = 215.29\dots, p_{31} = 6, p_{22} = 7, p_{13} = 8, p_{04} = 9, p_{50} = 10, p_{41} = 11, p_{32} = 12, p_{23} = 38.0\dots, p_{14} = 13, p_{05} = 14, q_{10} = 163.61\dots, q_{01} = 1, q_{20} = -3.4944\dots, q_{11} = 2, q_{02} = 3, q_{30} = 4, q_{21} = 5, q_{12} = 6, q_{03} = -225.77\dots, q_{40} = -41.641\dots, q_{31} = 7, q_{22} = 8, q_{13} = 9, q_{04} = 10, q_{50} = 11, q_{41} = 47.885\dots, q_{32} = 12, q_{23} = 13, q_{14} = 14$ et $q_{05} = -10.979\dots$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 9 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{1}{i}, i = 2, 3, \dots, 10$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = b = -1$ et les coefficients $p_{10} = -0.989\dots, p_{01} = 1, p_{20} = 96.625\dots, p_{11} = 2, p_{02} = 3, p_{30} = 4, p_{21} = 5, p_{12} = 6, p_{03} = -87.591\dots, p_{40} = 23.944\dots, p_{31} = 7, p_{22} = 8, p_{13} = 9, p_{04} = 10, q_{10} = -32.401\dots, q_{01} = 1, q_{20} = 14.077\dots, q_{11} = 2, q_{02} = 3, q_{30} = 4, q_{21} = 5, q_{12} = 6, q_{03} = -69.549\dots, q_{40} = -17.945\dots, q_{31} = 7, q_{22} = 8, q_{13} = -9.998\dots$ et $q_{04} = 9$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 7 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{i}{2}, i = 1, 2, \dots, 7$. Par conséquent, ce système admet comme borne supérieure $2n - 1$ cycles limites.

En résumé, pour le cas de l'ellipse complexe nous apportons une proposition semblable à la proposition 4.

3.3.3 Hyperbole. $f = (x + a)^2 - y^2 - 1$

Pour le cas de l'hyperbole le système (3.1) a une couronne périodique unique

$A = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < r_1^2\}$, où

$$\begin{aligned} r_1 &= \min \{x^2 + y^2 : (x + a)^2 - y^2 = 1\} \\ &= \begin{cases} \min \{|1 - a|, |1 + a|\}, & \text{si } |a| < \sqrt{2}, \\ \sqrt{\frac{a^2 - 2}{2}}, & \text{si } |a| > \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 5 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$ où $\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{2(r \cos \theta + a/2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - 2r^2 - 2)} = \frac{f \cos^{n-1} \theta - 2ar \cos^n \theta + (r^2 + 1 - a^2) \cos^{n-1} \theta}{2r^2 f} \\ &= \frac{1}{2r^2} \cos^{n-1} \theta - \frac{a \cos^n \theta}{r f} + \frac{r^2 + 1 - a^2}{2r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \\ &= h_0(r) + \lambda(\theta, r) - \frac{a \cos^n \theta}{r f} + \frac{r^2 + 1 - a^2}{2r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f}. \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{2r^2} \cos^{n-1} \theta = \begin{cases} h_0(r) + \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

et

$$h_0(r) = 0 \text{ si } n \in 2\mathbb{N}.$$

$$\frac{\cos^{n-2l+1} \theta \sin^{2l} \theta}{f} = \frac{\cos^{n-2l+1} \theta (1 - \cos^2 \theta)^l}{f} = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \frac{\cos^{n-2l+2k+1} \theta}{f}, \quad l = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

$$\frac{\sin^{n+1} \theta}{f} = \begin{cases} \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n+1}{2}}}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k C_{\frac{n+1}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}.$$

Remarque. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^{2l+1} \theta}{f} d\theta = 0$, $\forall p, l$ où $p + 2l \leq n$.

Proposition 6 *On a*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} = \begin{cases} -\frac{\pi}{hk_1k_2} (g_1 + g_2), & \text{si } |a| < \sqrt{2}, \\ -\frac{\pi}{hk_1k_2} (g_1 - g_2), & \text{si } |a| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{f} d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2rhk_1k_2} (a(g_1 + g_2) + h(g_1 - g_2)), & \text{si } |a| < \sqrt{2}, \\ \frac{\pi}{2rhk_1k_2} (a(g_1 - g_2) + h(g_1 + g_2)), & \text{si } |a| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

où

$$h = \sqrt{2r^2 + 2 - a^2}, \quad g_1 = \sqrt{2 - 2r^2 - 2ah}, \quad g_2 = \sqrt{2 - 2r^2 + 2ah},$$

$$k_1 = \sqrt{(a-1)^2 - r^2}, \quad k_2 = \sqrt{(a+1)^2 - r^2}.$$

Preuve. Utilisons le théorème des résidus avec

$$\frac{d\theta}{f} \equiv \frac{2}{ir^2} \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz$$

$$\frac{\cos \theta d\theta}{f} \equiv \frac{1}{ir^2} \frac{z^2+1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz$$

où

$$z_{1,2} = \frac{-a-h \pm g_2}{2r}.$$

$$z_{3,4} = \frac{-a+h \pm g_1}{2r}.$$

Pour $|a| < \sqrt{2}$ on obtient $|z_1| < 1$, $|z_4| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} = \frac{2}{ir^2} \oint \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz$$

$$= \frac{4\pi}{r^2} \left(\frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{z_4}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{hk_1k_2} (g_1 + g_2).$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f} = \frac{1}{ir^2} \oint \frac{z^2+1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz$$

$$= \frac{2\pi}{r^2} \left(\frac{z_1^2+1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{z_4^2+1}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2rhk_1k_2} (a(g_1 + g_2) + h(g_1 - g_2)).$$

Pour $|a| > \sqrt{2}$ on obtient $|z_1| < 1$, $|z_3| < 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} &= \frac{2}{ir^2} \oint \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz \\
&= \frac{4\pi}{r^2} \left(\frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{z_3}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)} \right) \\
&= -\frac{\pi}{hk_1k_2} (g_1 - g_2). \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f} &= \frac{1}{ir^2} \oint \frac{z^2+1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz \\
&= \frac{2\pi}{r^2} \left(\frac{z_1^2+1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{z_3^2+1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)} \right) \\
&= \frac{\pi}{2r hk_1 k_2} (a(g_1 - g_2) + h(g_1 + g_2)).
\end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$, on obtient

$$f^0(r) = \begin{cases} \frac{A_n h k_1 k_2 + B_n h (g_1 + g_2) + C_n (g_1 - g_2)}{r h k_1 k_2}, & \text{si } |a| > \sqrt{2}, \\ \frac{A_n h k_1 k_2 + B_n h (g_1 - g_2) + C_n (g_1 + g_2)}{r h k_1 k_2}, & \text{si } |a| < \sqrt{2}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}
A_n &= a_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \dots + a_2 r^2 + a_0, \\
B_n &= b_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \dots + b_2 r^2 + b_0, \\
C_n &= c_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \dots + c_2 r^2 + \frac{(a^2-1)a_0+2ab_0}{2},
\end{aligned}$$

et les coefficients a_i , b_i et c_i sont des polynômes en fonction de a et les coefficients de P et Q . En réalité, il existe seulement $\frac{6n+5-(-1)^n}{4}$ paramètres indépendants entre les a_i , b_i et c_i donc entre les p_{ij} , q_{ij} et a . Par conséquent, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ zéros positifs simples. Pour trouver la borne supérieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver pour l'expression

$$\begin{aligned}
H(r) &= \{A_n^2 h^2 k_1^2 k_2^2 - 4h^2 B_n^2 (1-r^2) - 4C_n^2 (1-r^2) + 8a B_n C_n h^2\}^2 - 16 (B_n^2 h^2 - C_n^2)^2 k_1^2 k_2^2 \\
&= r^2 (2r^2 + 2 - a^2) \left(d_{4n+3-(-1)^n} r^{4n+3-(-1)^n} + \dots + d_2 r^2 + d_0 \right),
\end{aligned}$$

où d_i sont des polynômes en fonction de a , p_{ij} et q_{ij} . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $\frac{4n+3-(-1)^n}{2}$ zéros simples.

car

$$(g_1 \pm g_2)^2 = 4(1 - r^2 \pm k_1 k_2),$$

$$g_1^2 - g_2^2 = -4ah.$$

Remarque. On a $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{2n-1+(-1)^n}{4}$, où $[\]$ est la fonction du partie entière.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = 2$ et les coefficients $p_{10} = 192.92\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -154.01\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 27.901\dots$, $p_{30} = -375.14\dots$, $p_{21} = 3$, $p_{12} = 91.849\dots$, $p_{03} = 4$, $p_{40} = 6$, $p_{31} = 7$, $p_{22} = 8$, $p_{13} = 9$, $p_{04} = 10$, $p_{50} = 34.141\dots$, $p_{41} = 11$, $p_{32} = 12$, $p_{23} = 13$, $p_{14} = 14$, $p_{05} = 15$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = -192.92\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = 3$, $q_{02} = 4$, $q_{30} = 5$, $q_{21} = 6$, $q_{12} = 7$, $q_{03} = 8$, $q_{40} = 9$, $q_{31} = 10$, $q_{22} = 11$, $q_{13} = -183.85\dots$, $q_{04} = 12$, $q_{50} = 13$, $q_{41} = -106.14\dots$, $q_{32} = 14$, $q_{23} = 16$, $q_{14} = 17$ et $q_{05} = 18$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 8 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{1}{i+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$ et $r_i = \frac{i-1}{i+1}$, $i = 5, 6, 7, 8$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = 2$ et les coefficients $p_{10} = 18.048\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -84.193\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = -138.28\dots$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = -36.049\dots$, $p_{31} = 7$, $p_{22} = 8$, $p_{13} = 9$, $p_{04} = 10$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = -18.047\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = -87.323\dots$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = -97.461\dots$, $q_{12} = 5$, $q_{03} = 6$, $q_{40} = 7$, $q_{31} = 8$, $q_{22} = 9$, $q_{13} = 10$ et $q_{04} = 11$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 6 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{1}{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 6$ dans l'intervalle $(0, 1)$. Par conséquent, ce système admet comme borne supérieure $\frac{4n+3-(-1)^n}{2}$ cycles limites et au moins $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ cycles limites pour le cas de l'hyperbole.

En résumé, nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 7 *Le système (3.2) avec $f = (x + a)^2 - y^2 - 1$ a au plus $\frac{4n+3-(-1)^n}{2}$ cycles limites qui bifurquent de la couronne périodique entourant l'origine de système (3.1). De plus, il existe des valeurs des coefficients p_{ij} et q_{ij} tel que le système (3.2) a $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ cycles limites hyperboliques.*

3.3.4 Deux lignes droites complexes qui s'intersectent en un point réel. $f = (x + a)^2 + (y + b)^2$

Pour le cas des deux lignes droites complexes qui s'intersectent en un point réel le système (3.1) a deux couronnes périodiques $A_1 = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < a^2 + b^2\}$ et $A_2 = \{(x, y) : a^2 + b^2 < x^2 + y^2\}$ si $a^2 + b^2 \neq 0$, et une couronne périodique unique $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ si $a = b = 0$.

Proposition 8 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$ où $\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$ et

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} = \begin{cases} \frac{2\pi}{a^2+b^2-r^2} & \text{si } r < \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \frac{2\pi}{r^2-(a^2+b^2)} & \text{si } r > \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{f} d\theta = \begin{cases} -\frac{2a\pi r}{(a^2+b^2)(a^2+b^2-r^2)} & \text{si } r < \sqrt{a^2 + b^2}, \\ -\frac{2a\pi}{r(r^2-a^2-b^2)} & \text{si } r > \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Preuve. Pour le cas des deux lignes droites complexes qui s'intersectent en un point réel on remplace $r^2 + a^2 + b^2 - 1$ par $r^2 + a^2 + b^2$ dans les calculs du cas de l'ellipse.

On utilise le théorème des résidus avec

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{f} \equiv \frac{1}{i((a-ib)rz^2+(r^2+\alpha)z+(a+ib)r)} dz \\ \frac{\cos \theta d\theta}{f} \equiv \frac{z^2+1}{2iz((a-ib)rz^2+(r^2+\alpha)z+(a+ib)r)} dz. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} |z_1| < 1 \text{ et } |z_2| > 1 \text{ si } r < \sqrt{a^2 + b^2}, \\ |z_1| > 1 \text{ et } |z_2| < 1 \text{ si } r > \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

où

$$z_1 = -\frac{r}{a-ib}, \quad z_2 = -\frac{1}{r}(a+ib).$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$, on obtient

$$f^0(r) = \begin{cases} \frac{a_{2n-2}r^{2n-2} + \dots + a_2r^2 + a_0}{r(r^2 - a^2 - b^2)} & \text{si } r > \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \frac{r(b_{2n}r^{2n} + \dots + b_2r^2 + b_0)}{(a^2 + b^2)^{n+1}(a^2 + b^2 - r^2)} & \text{si } r < \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

où les coefficients a_i et b_i sont des polynômes en fonction de a et b et les coefficients de P, Q . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $2n - 1$ zéros positifs simples.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = b = 1$ et les coefficients $p_{10} = -1.0063\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -102.53\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 4$, $p_{21} = 5$, $p_{12} = 6$, $p_{03} = 7$, $p_{40} = -106.05\dots$, $p_{31} = -36.533\dots$, $p_{22} = 8$, $p_{13} = 9$, $p_{04} = 10$, $p_{50} = 11$, $p_{41} = 12$, $p_{32} = 156.39\dots$, $p_{23} = 13$, $p_{14} = -13.0$, $p_{05} = 14$, $q_{10} = 98.911\dots$, $q_{01} = 1$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = 3$, $q_{02} = 4$, $q_{30} = 5$, $q_{21} = 6$, $q_{12} = -138.11\dots$, $q_{03} = -48.3\dots$, $q_{40} = 7$, $q_{31} = 51.608\dots$, $q_{22} = 8$, $q_{13} = 9$, $q_{04} = 10$, $q_{50} = 11$, $q_{41} = 12$, $q_{32} = 39.0\dots$, $q_{23} = 13$, $q_{14} = 14$ et $q_{05} = 15$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 9 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{i+4}{i+7}\sqrt{2}$, $i = 1, 2, \dots, 5$ dans l'intervalle $(0, \sqrt{2})$ et $r_i = \sqrt{i-3}$, $i = 6, 7, 8, 9$ dans l'intervalle $(\sqrt{2}, \infty)$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = b = 1$ et les coefficients $p_{10} = -0.993\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -14.991\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 4$, $p_{21} = 5$, $p_{12} = 6$, $p_{03} = 7$, $p_{40} = -15.181\dots$, $p_{31} = -19.723\dots$, $p_{22} = 8$, $p_{13} = 9$, $p_{04} = 10$, $q_{10} = -5.173\dots$, $q_{01} = 1$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = 3$, $q_{02} = 4$, $q_{30} = 5$, $q_{21} = 6$, $q_{12} = -17.016\dots$, $q_{03} = -13.588\dots$, $q_{40} = 7$, $q_{31} = -24.904\dots$, $q_{22} = 8$, $q_{13} = 9$ et $q_{04} = 10$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 7 zéros positifs simples suivants $r_i = \sqrt{i+2}$, $i = 1, 2, 3$ dans l'intervalle $(\sqrt{2}, \infty)$ et $r_i = \frac{i}{i+3}\sqrt{2}$, $i = 4, 5, 6, 7$ dans l'intervalle $(0, \sqrt{2})$. Par conséquent, ce système admet comme borne supérieure $2n - 1$ cycles limites.

dans le cas où $n = 5$ et $a = b = 0$ on obtient $f = r^2$. En calculant $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f} = \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{r^2}$ en fonction de r on obtient

$$f^0(r) = \frac{(5p_{50} + (p_{32} + q_{41}) + (p_{14} + q_{23}) + 5q_{05})r^4 + (6p_{30} + 2(p_{12} + q_{21}) + 6q_{03})r^2 + 8(p_{10} + q_{01})}{16r}.$$

alors, $f^0(r)$ a au plus 2 zéros positifs simples.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = b = 0$ et les coefficients $p_{10} = -\frac{3}{2}$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 2$, $p_{11} = 3$, $p_{02} = 4$, $p_{30} = 5$, $p_{21} = 6$, $p_{12} = 7$, $p_{03} = 8$, $p_{40} = 9$, $p_{31} = 10$, $p_{22} = 11$, $p_{13} = 12$, $p_{04} = 13$, $p_{50} = 14$, $p_{41} = 15$, $p_{32} = 16$, $p_{23} = 17$, $p_{14} = 18$, $p_{05} = 19$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 2$, $q_{20} = 3$, $q_{11} = 4$, $q_{02} = 5$, $q_{30} = 6$, $q_{21} = -\frac{97}{2}$, $q_{12} = 7$, $q_{03} = 8$, $q_{40} = 9$, $q_{31} = 10$, $q_{22} = 11$, $q_{13} = 12$, $q_{04} = 13$, $q_{50} = 14$, $q_{41} = 15$, $q_{32} = 16$, $q_{23} = -208$, $q_{14} = 17$ et $q_{05} = 18$, a une fonction $f^0(r)$ avec les deux zéros positifs simples suivants $r_i = i$, $i = 1, 2$ dans l'intervalle $(0, \infty)$. Par conséquent, ce système a au plus 2 cycles limites pour $n = 5$ et $a = b = 0$.

dans le cas où $n = 4$ et $a = b = 0$ on obtient $f = r^2$. En calculant $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f} = \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{r^2}$ en fonction de r on obtient

$$f^0(r) = \frac{(3p_{30}+p_{12}+q_{21}+3q_{03})r^2+4(p_{10}+q_{01})}{8r}.$$

alors, $f^0(r)$ a au plus un zéro réel positif simple.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = b = 0$ et les coefficients $p_{10} = 1$, $p_{01} = 2$, $p_{20} = 3$, $p_{11} = 4$, $p_{02} = 5$, $p_{30} = 6$, $p_{21} = 7$, $p_{12} = 8$, $p_{03} = 9$, $p_{40} = 10$, $p_{31} = 11$, $p_{22} = 12$, $p_{13} = 13$, $p_{04} = 14$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 2$, $q_{20} = 3$, $q_{11} = 4$, $q_{02} = 5$, $q_{30} = 6$, $q_{21} = -62$, $q_{12} = 7$, $q_{03} = 8$, $q_{40} = 9$, $q_{31} = 10$, $q_{22} = 11$, $q_{13} = 12$ et $q_{04} = 13$, a une fonction $f^0(r)$ avec le zéro réel positif simple $r_1 = 1$ dans l'intervalle $(0, \infty)$. Par conséquent, ce système a au plus un cycle limite pour $n = 4$ et $a = b = 0$.

En résumé, pour le cas des deux lignes droites complexes qui s'intersectent en un point réel nous apportons une proposition semblable à la proposition 4.

3.3.5 Deux lignes droites réelles qui s'intersectent en un point

$$f = (x + a)(y + b)$$

Pour le cas des deux lignes droites réelles qui s'intersectent en un point le système (3.1) a une couronne périodique unique $A = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < r_1^2\}$, où $r_1 = \min\{|a|, |b|\}$.

Proposition 9 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$, $\frac{\sin \theta}{f}$ où

$\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

Preuve. En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{(r \cos \theta + a)(r \sin \theta + b)} = \frac{(r \cos \theta + a) \cos^n \theta - a \cos^n \theta}{rf} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\cos^n \theta}{r \sin \theta + b} - \frac{a \cos^n \theta}{r f}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{\cos^n \theta}{r \sin \theta + b} = \frac{(1 - \sin^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}}}{r \sin \theta + b} \cos \theta = \lambda(\theta, r) \quad \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\cos^n \theta}{r \sin \theta + b} &= \frac{(1 - \sin^2 \theta)^{\frac{n}{2}}}{r \sin \theta + b} = \frac{1}{r^n} \frac{(r^2 - b^2 + (b - r \sin \theta)(r \sin \theta + b))^{\frac{n}{2}}}{r \sin \theta + b} \\ &= \frac{1}{r^n} \left[\frac{(r^2 - b^2)^{\frac{n}{2}}}{r \sin \theta + b} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} C_{\frac{n}{2}}^k (r^2 - b^2)^{\frac{n}{2} - k} (b - r \sin \theta)^k (r \sin \theta + b)^k \right] \\ &= \frac{1}{r^n} \left[(r^2 - b^2)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{r \sin \theta + b} + \tilde{h}_0(r) + \lambda(\theta, r) \right] \\ &= \lambda(\theta, r) + h_0(r) + \frac{1}{r^n} (r^2 - b^2)^{\frac{n}{2}} \frac{r \cos \theta + a}{f} \\ &= \lambda(\theta, r) + h_0(r) + \frac{1}{r^{n-1}} (r^2 - b^2)^{\frac{n}{2}} \frac{\cos \theta}{f} + \frac{a}{r^n} (r^2 - b^2)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{f} \quad \text{if } n \in 2\mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^n \theta \sin \theta}{f} &= \frac{(r \cos \theta + a)(r \sin \theta + b) \cos^{n-1} \theta - ar \cos^{n-1} \theta \sin \theta - ab \cos^{n-1} \theta - br \cos^n \theta}{r^2 f} \\ &= \frac{1}{r^2} \cos^{n-1} \theta - \frac{a \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{r f} - \frac{ab \cos^{n-1} \theta}{r^2 f} - \frac{b \cos^n \theta}{r f} \\ &= \lambda(\theta, r) + h_0(r) - \frac{a \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{r f} - \frac{ab \cos^{n-1} \theta}{r^2 f} - \frac{b \cos^n \theta}{r f} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^{n-2l+1} \theta \sin^{2l} \theta}{f} = \frac{\cos^{n-2l+1} \theta (1 - \cos^2 \theta)^l}{f} = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \frac{\cos^{n-2l+2k+1} \theta}{f}, \quad l = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

$$\frac{\cos^{n-2l} \theta \sin^{2l+1} \theta}{f} = \frac{\cos^{n-2l} \theta (1 - \cos^2 \theta)^l \sin \theta}{f} = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \frac{\cos^{n-2l+2k} \theta \sin \theta}{f}, \quad l = 0, \dots, \left[\frac{n}{2} \right].$$

Proposition 10 *On a*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} = 2 \frac{|ab|}{ab} \pi \left(\frac{|a|h+|b|g}{(a^2+b^2-r^2)hg} \right),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f} d\theta = \frac{2 \operatorname{sign}(b)\pi}{r} \left(\frac{-|ab|+hg}{h(a^2+b^2-r^2)} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{f} d\theta = \frac{2|a|\pi}{ar} \left(\frac{-|ab|+hg}{(a^2+b^2-r^2)g} \right) = \frac{|ab|h}{abg} \int \frac{\cos \theta}{f},$$

où

$$h = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad g = \sqrt{b^2 - r^2}.$$

Preuve.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(r \cos \theta + a)(r \sin \theta + b)} = \oint_C \frac{dz}{iz \left(\frac{r}{2} \frac{z^2+1}{z} + a \right) \left(\frac{r}{2i} \frac{z^2-1}{z} + b \right)}$$

$$= \frac{4}{r^2} \oint_C \frac{z}{(z^2 + \frac{2a}{r}z + 1)(z^2 + i\frac{2b}{r}z - 1)} dz = 2 \frac{|ab|}{ab} \pi \left(\frac{|a|h+|b|g}{(a^2+b^2-r^2)hg} \right),$$

où

$$z_1 = \frac{-a-h}{r}, \quad z_2 = \frac{-a+h}{r}, \quad z_3 = \frac{-b-g}{r}i, \quad z_4 = \frac{-b+g}{r}i,$$

et

	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$	$ z_2 < 1, z_4 < 1$ $ z_1 > 1, z_3 > 1$	$ z_2 < 1, z_3 < 1$ $ z_1 > 1, z_4 > 1$
$a < 0$	$ z_1 < 1, z_4 < 1$ $ z_2 > 1, z_3 > 1$	$ z_1 < 1, z_3 < 1$ $ z_2 > 1, z_4 > 1$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{(r \cos \theta + a)(r \sin \theta + b)} d\theta = \oint_C \frac{\frac{z^2+1}{2z} dz}{iz \left(\frac{r}{2} \frac{z^2+1}{z} + a \right) \left(\frac{r}{2i} \frac{z^2-1}{z} + b \right)} \\
&= \frac{2}{r^2} \oint_C \frac{z^2+1}{\left(z^2 + \frac{2a}{r} z + 1 \right) \left(z^2 + i \frac{2b}{r} z - 1 \right)} dz \\
&= \frac{2 \operatorname{sign}(b) \pi}{r} \left(\frac{-|ab| + hg}{h(a^2 + b^2 - r^2)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin \theta}{f} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{(r \cos \theta + a)(r \sin \theta + b)} d\theta = \oint_C \frac{\frac{z^2-1}{2iz} dz}{iz \left(\frac{r}{2} \frac{z^2+1}{z} + a \right) \left(\frac{r}{2i} \frac{z^2-1}{z} + b \right)} \\
&= \frac{-2i}{r^2} \oint_C \frac{z^2-1}{\left(z^2 + \frac{2a}{r} z + 1 \right) \left(z^2 + \frac{2b}{r} iz - 1 \right)} dz \\
&= \frac{2|a|\pi}{ar} \left(\frac{-|ab| + hg}{(a^2 + b^2 - r^2)g} \right) = \frac{|ab|h}{abg} \int \frac{\cos \theta}{f}.
\end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$, on obtient

$$f^0(r) = \frac{A_n (a^2 + b^2 - r^2) hg + B_n g + C_n h}{r h g (a^2 + b^2 - r^2)},$$

où

$$\begin{aligned}
A_n &= a_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \dots + a_2 r^2 + a_0, \\
B_n &= b_{2\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} + \dots + b_2 r^2 + b_0, \\
C_n &= c_{2\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} + \dots + c_2 r^2 - |b| \left((a^2 + b^2) a_0 + \frac{1}{|a|} b_0 \right),
\end{aligned}$$

et les coefficients a_i, b_i et c_i sont des polynômes en fonction de a et b et les coefficients de P, Q . En réalité, il existe seulement $\frac{6n+11+(-1)^n}{4}$ paramètres indépendants entre les a_i, b_i et c_i donc entre les p_{ij}, q_{ij}, a et b . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $\frac{6n+7+(-1)^n}{4}$ zéros positifs

simples. Pour trouver la borne superieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver pour l'expression

$$(A_n (a^2 + b^2 - r^2) h + B_n)^2 g^2 - C_n^2 h^2 = 0,$$

qui est équivalente à

$$\left((A_n^2 (a^2 + b^2 - r^2)^2 h^2 + B_n^2) g^2 - C_n^2 h^2 \right)^2 - 4 (a^2 + b^2 - r^2)^2 A_n^2 B_n^2 h^2 g^4 = 0.$$

Finalement, pour borner le nombre des zéros de l'expression précédente on doit borner les zéros du polynôme

$$\begin{aligned} k(r) &= \left((A_n^2 (a^2 + b^2 - r^2)^2 h^2 + B_n^2) g^2 - C_n^2 h^2 \right)^2 - 4 (a^2 + b^2 - r^2)^2 A_n^2 B_n^2 h^2 g^4 \\ &= r^2 (d_{4n+10} r^{4n+10} + \dots + d_2 r^2 + d_0), \end{aligned}$$

où d_i sont des polynômes en fonction de a, b, p_{ij} et q_{ij} . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $2n + 5$ zéros simples dans l'intervalle $(0, r_1)$.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = -2$, $b = -1$ et les coefficients $p_{10} = -282.2\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 233.1\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 4$, $p_{21} = 5$, $p_{12} = 6$, $p_{03} = 18426.0\dots$, $p_{40} = -47.0\dots$, $p_{31} = 7$, $p_{22} = 8$, $p_{13} = 9$, $p_{04} = 10$, $p_{50} = 11$, $p_{41} = 12$, $p_{32} = 13$, $p_{23} = 14$, $p_{14} = -9172.3\dots$, $p_{05} = 15$, $q_{10} = -1087.4\dots$, $q_{01} = 858.75\dots$, $q_{20} = 1$, $q_{11} = 2$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = 7$, $q_{40} = 8$, $q_{31} = 9$, $q_{22} = 10$, $q_{13} = 11$, $q_{04} = 12$, $q_{50} = 13$, $q_{41} = 23.034\dots$, $q_{32} = -94.898\dots$, $q_{23} = 14$, $q_{14} = -13.0339\dots$ et $q_{05} = -15.932\dots$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 9 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{1}{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 9$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = -2$, $b = -1$ et les coefficients $p_{10} = 22.000\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -17.000\dots$, $p_{11} = -18.500\dots$, $p_{02} = 2$, $p_{30} = 3$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 0.634\dots$, $p_{31} = -11.500\dots$, $p_{22} = 7$, $p_{13} = 8$, $p_{04} = 9$, $q_{10} = -23.000$, $q_{01} = -22.000$, $q_{20} = 1$, $q_{11} = 2$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = -49.0$, $q_{03} = 19.000$, $q_{40} = 6$, $q_{31} = 7$,

$q_{22} = 8$, $q_{13} = -13.3659$ et $q_{04} = -1.4746$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 8 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{1}{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 8$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Dans [3], la meilleure borne supérieure pour le nombre de cycles limites du système (3.2) qui bifurquent de la couronne périodique qui entoure l'origine de système (3.1) est 10 pour $n = 5$ et 7 pour $n = 4$. Par conséquent, ce système admet comme borne supérieure $2n + 5$ cycles limites et au moins $\frac{6n+7+(-1)^n}{4}$ cycles limites. En résumé, nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 11 *Le système (3.2) avec $f = (x + a)(y + b)$ a au plus $2n + 5$ cycles limites qui bifurquent de la couronne périodique entourant l'origine du système (3.1). De plus, il existe des valeurs des coefficients p_{ij} et q_{ij} tel que le système (3.2) a $\frac{6n+7+(-1)^n}{4}$ cycles limites hyperboliques.*

3.3.6 Parabole. $f = x - a - y^2$

Pour le cas de la parabole le système (3.1) a une couronne périodique unique

$$A = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < r_1^2\}$$

$$\text{où } r_1 = \min \{x^2 + y^2 : x - a - y^2 = 0\} = \begin{cases} |a| & \text{si } a > -1/2, \\ \frac{\sqrt{-4a-1}}{2} & \text{si } a \leq -1/2. \end{cases}$$

Proposition 12 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$ où $\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

Preuve. En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{\left(r \cos \theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \delta} = \frac{\left(\left(r \cos \theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \delta\right) \cos^{n-1} \theta - r \cos^n \theta + (r^2 + a) \cos^{n-1} \theta}{r^2 f} \\ &= \frac{1}{r^2} \cos^{n-1} \theta - \frac{1}{r} \frac{\cos^n \theta}{f} + \frac{r^2 + a}{r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \\ &= h_0(r) + \lambda(\theta, r) - \frac{1}{r} \frac{\cos^n \theta}{f} + \frac{r^2 + a}{r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \end{aligned}$$

où

$$\delta = r^2 + a + \frac{1}{4}$$

$$\frac{\cos^{n-2l+1}\theta \sin^{2l}\theta}{f} = \frac{\cos^{n-2l+1}\theta (1-\cos^2\theta)^l}{f} = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \frac{\cos^{n-2l+2k+1}\theta}{f}, \quad l = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

$$\frac{\sin^{n+1}\theta}{f} = \begin{cases} \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(1-\cos^2\theta)^{\frac{n+1}{2}}}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k C_{\frac{n+1}{2}}^k \frac{\cos^{2k}\theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}.$$

Remarque. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p\theta \sin^{2l+1}\theta}{f} d\theta = 0, \forall p, l$ où $p + 2l \leq n$

Proposition 13 On a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} = \begin{cases} -\frac{\pi}{hk} (g_1 + g_2), & \text{si } a > -1/2, \\ -\frac{\pi}{hk} (g_1 - g_2), & \text{si } a \leq -1/2, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{f} d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2rhc} ((g_1 + g_2) + (g_1 - g_2)h), & \text{si } a > -1/2, \\ \frac{\pi}{2rhc} ((g_1 - g_2) + (g_1 + g_2)h), & \text{si } a \leq -1/2, \end{cases}$$

où

$$h = \sqrt{4r^2 + 4a + 1}, \quad k = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad g_1 = \sqrt{4a + 2 - 2h}, \quad g_2 = \sqrt{4a + 2 + 2h}.$$

Preuve. On utilise le théorème des résidus avec $|z_2| < 1, |z_3| < 1, |z_1| > 1$ et $|z_4| > 1$ pour $a > -1/2$, et $|z_1| < 1, |z_4| < 1, |z_2| > 1$ et $|z_3| > 1$ pour $a \leq -1/2$, où

$$\frac{d\theta}{f} \equiv \frac{4}{i} \frac{z}{(rz^2+z+r)^2 - (4r^2+4a+1)z^2} dz$$

$$\frac{\cos\theta d\theta}{f} \equiv \frac{2}{i} \frac{z^2+1}{(rz^2+z+r)^2 - (4r^2+4a+1)z^2} dz$$

et

$$z_{1,2} = \frac{-1+h \pm g_1}{2r}, \quad z_{3,4} = \frac{-1-h \pm g_2}{2r}.$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p\theta \sin^q\theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$, on obtient

$$f^0(r) = \begin{cases} \frac{A_n kh + B_n(g_1+g_2) + C_n(g_1-g_2)h}{rhc}, & \text{si } a > -\frac{1}{2}, \\ \frac{A_n kh + B_n(g_1-g_2) + C_n(g_1+g_2)h}{rhc}, & \text{si } a \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A_n &= a_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \dots + a_2 r^2 + a_0, \\ B_n &= b_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \dots + b_2 r^2 + b_0, \\ C_n &= c_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \dots + c_2 r^2 + \frac{a}{2} a_0 + b_0, \end{aligned}$$

et les coefficients a_i , b_i et c_i sont des polynômes en fonction de a et les coefficients de P, Q . En réalité, il existe seulement $\frac{6n+5-(-1)^n}{4}$ paramètres indépendants entre les a_i , b_i et c_i donc entre les p_{ij}, q_{ij} et a . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ zéros positifs simples. Pour trouver la borne supérieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver pour l'expression

$$\begin{aligned} K(r) &= A_n^2 k^2 h^2 - [B_n (g_1 \pm g_2) + C_n h (g_1 \mp g_2)]^2 \\ &= A_n^2 k^2 h^2 - 4B_n^2 (2a + 1 \pm 2k) - 4C_n^2 (2a + 1 \mp 2k) + 8B_n C_n h^2, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} (g_1 \pm g_2)^2 &= 4(2a + 1 \pm 2k), \\ g_1^2 - g_2^2 &= -4h, \end{aligned}$$

Finalement, pour borner le nombre des zéros de l'expression précédente on doit borner les zéros du polynôme

$$\begin{aligned} L &= (A_n^2 k^2 h^2 + 8B_n C_n h^2 - 4(2a + 1)(B_n^2 + C_n^2 h^2))^2 - 64(B_n^2 - C_n^2 h^2)^2 k^2 \\ &= r^2 (4r^2 + 4a + 1) (d_{4n+2} r^{4n+2} + \dots + d_2 r^2 + d_0). \end{aligned}$$

où d_i sont des polynômes en fonction de a, p_{ij} et q_{ij} . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $2n+1$ zéros simples.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = 1$ et les coefficients $p_{10} = -12.945\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = -49.38\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 31.411\dots$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 7$, $p_{31} = 8$, $p_{22} = 9$, $p_{13} = 10$, $p_{04} = 11$, $p_{50} = -2.065\dots$, $p_{41} = 12$, $p_{32} = 13$, $p_{23} = 14$, $p_{14} = -61.674$, $p_{05} = 15$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = -38.834\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = -34.876\dots$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = 8$, $q_{40} = 9$, $q_{31} = 10$, $q_{22} = 11$, $q_{13} = -63.057\dots$, $q_{04} = 12$, $q_{50} = 13$, $q_{41} = -20.194\dots$, $q_{32} = 14$, $q_{23} = 15$, $q_{14} = 16$ et $q_{05} = 17$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 8 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{i}{i+1}$ $i = 1, 2, 3, 4$ et $r_i = \frac{1}{i-2}$ $i = 5, 6, 7, 8$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = 1$ et les coefficients $p_{10} = 5.444\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 23.066\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = -18.610\dots$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 1$, $p_{31} = 7$, $p_{22} = 8$, $p_{13} = 9$, $p_{04} = 10$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 16.334\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = -25.627\dots$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = 7$, $q_{40} = 8$, $q_{31} = 9$, $q_{22} = 10$, $q_{13} = -21.084\dots$ et $q_{04} = 11$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 6 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{i}{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 6$ dans l'intervalle $(0, 1)$. Par conséquent, ce système a au moins $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ cycles limites. En résumé, nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 14 *Le système (3.2) avec $f = x - a - y^2$ a au plus $2n + 1$ cycles limites qui bifurquent de la couronne périodique entourant l'origine du système (3.1). De plus, il existe des valeurs des coefficients p_{ij} et q_{ij} tel que le système (3.2) a $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ cycles limites hyperboliques.*

3.3.7 Deux lignes droites réelles parallèles $f = (x + a)^2 - 1 = 0$

Pour le cas des deux lignes droites réelles parallèles le système (3.1) a une couronne périodique unique $A = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < r_1^2\}$, où $r_1 = \min\{|a - 1|, |a + 1|\}$.

Proposition 15 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$ où $\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{(r \cos \theta + a)^2 - 1} = \frac{f \cos^{n-1} \theta - 2ar \cos^n \theta + (1-a^2) \cos^{n-1} \theta}{r^2 f} \\ &= \frac{1}{r^2} \cos^{n-1} \theta - \frac{2a}{r} \frac{\cos^n \theta}{f} + \frac{1-a^2}{r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \\ &= h_0(r) + \lambda(\theta, r) - \frac{2a}{r} \frac{\cos^n \theta}{f} + \frac{1-a^2}{r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f}. \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{r^2} \cos^{n-1} \theta = \begin{cases} h_0(r) + \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

et

$$h_0(r) = 0 \text{ si } n \in 2\mathbb{N}.$$

$$\frac{\cos^{n-2l+1} \theta \sin^{2l} \theta}{f} = \frac{\cos^{n-2l+1} \theta (1-\cos^2 \theta)^l}{f} = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \frac{\cos^{n-2l+2k+1} \theta}{f}, \quad l = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

$$\frac{\sin^{n+1} \theta}{f} = \begin{cases} \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(1-\cos^2 \theta)^{\frac{n+1}{2}}}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k C_{\frac{n+1}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}.$$

Remarque. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^{2l+1} \theta}{f} d\theta = 0$, $\forall p, l$ où $p + 2l \leq n$.

Proposition 16 On a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} &= \frac{\text{sign}(a-1)h - \text{sign}(a+1)g}{hg} \pi, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f} d\theta &= \frac{\pi}{rhg} ((a-3) \text{sign}(a+1)g - |a-1|h), \end{aligned}$$

où

$$h = \sqrt{(a+1)^2 - r^2}, \quad g = \sqrt{(a-1)^2 - r^2},$$

et "sign" signifie la fonction du signe.

Preuve. Utilisons le théorème des résidus avec $|z_2| < 1$, $|z_4| < 1$, $|z_1| > 1$ et $|z_3| > 1$ pour $a < -1$ et $|z_2| < 1$, $|z_3| < 1$, $|z_1| > 1$ et $|z_4| > 1$ pour $a \in]-1, 1[$ et $|z_1| < 1$, $|z_3| < 1$,

$|z_2| > 1$ et $|z_4| > 1$ pour $a > 1$, où

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{f} &\equiv \frac{4}{i} \frac{z}{(rz^2+2az+r)^2-4z^2} dz \\ \frac{\cos\theta d\theta}{f} &\equiv \frac{2}{i} \frac{z^2+1}{(rz^2+2az+r)^2-4z^2} dz\end{aligned}$$

et

$$z_{1,2} = \frac{1-a \pm g}{r}, \quad z_{3,4} = \frac{-1-a \pm h}{r}.$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$, on obtient

$$f^0(r) = \frac{A_n g h + B_n h + C_n g}{r g h},$$

où

$$\begin{aligned}A_n &= a_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \dots + a_0, \\ B_n &= b_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \dots + b_0, \\ C_n &= \gamma r^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + c_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \dots + |1+a| a_0 + \frac{(a+1)(3-a)}{|1+a||a-1|} b_0, \\ \gamma &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} c_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \frac{(-1)^n - 1}{2} b_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor},\end{aligned}$$

et les coefficients a_i , b_i et c_i sont des polynômes en fonction de a et les coefficients de P, Q . En réalité, il existe seulement $\frac{6n+5-(-1)^n}{4}$ paramètres indépendants entre les a_i , b_i et c_i donc entre les p_{ij}, q_{ij} et a . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ zéros positifs simples. Pour trouver la borne supérieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver pour l'expression

$$k = A_n^2 g^2 h^2 - (B_n h + C_n g)^2$$

Finalement, pour borner le nombre des zéros de l'expression précédente on doit borner les zéros du polynôme

$$\begin{aligned} L &= (A_n^2 g^2 h^2 - B_n^2 h^2 - C_n^2 g^2)^2 - 4B_n^2 C_n^2 g^2 h^2 \\ &= r^2 \left(d_{(4n+3-(-1)^n)} r^{(4n+3-(-1)^n)} + \dots + d_2 r^2 + d_0 \right), \end{aligned}$$

où d_i sont des polynômes en fonction de a, p_{ij} et q_{ij} . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $\frac{4n+3-(-1)^n}{2}$ zéros simple.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = 2$ et les coefficients $p_{10} = 67.558\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 266.74\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 236.19\dots$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 7$, $p_{31} = 8$, $p_{22} = 9$, $p_{13} = 10$, $p_{04} = 11$, $p_{50} = -13.847\dots$, $p_{41} = 12$, $p_{32} = 13$, $p_{23} = 14$, $p_{14} = 15$, $p_{05} = 16$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 609.74\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = 592.38\dots$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = 7$, $q_{40} = 8$, $q_{31} = 9$, $q_{22} = 10$, $q_{13} = -16.385\dots$, $q_{04} = 11$, $q_{50} = 12$, $q_{41} = 13$, $q_{32} = 14$, $q_{23} = -11.610\dots$, $q_{14} = 15$ et $q_{05} = 0.394\dots$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 8 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{i}{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 8$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = 2$ et les coefficients $p_{10} = 513.89\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 658.34\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 143.26\dots$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 7$, $p_{31} = 8$, $p_{22} = 9$, $p_{13} = 10$, $p_{04} = 11$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 20.485\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = 29.078\dots$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = -0.998\dots$, $q_{40} = 7$, $q_{31} = 8$, $q_{22} = 9$, $q_{13} = -8.250\dots$ et $q_{04} = 10$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 6 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{i}{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 6$ dans l'intervalle $(0, 1)$. Par conséquent, ce système a au moins $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ cycles limites.

En résumé, pour le cas des deux lignes droites réelles parallèles nous apportons une proposition semblable à la proposition 7.

3.3.8 Deux lignes droites complexes parallèles $f = (x + a)^2 + 1$

Pour le cas des deux lignes droites complexes parallèles le système (3.1) a une couronne périodique unique $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Proposition 17 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$ où $\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

Preuve. En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{(r \cos \theta + a)^2 + 1} = \frac{((r \cos \theta + a)^2 + 1) \cos^{n-1} \theta - 2ar \cos^n \theta - (a^2 + 1) \cos^{n-1} \theta}{r^2 f} \\ &= \frac{1}{r^2} \cos^{n-1} \theta - \frac{2a \cos^n \theta}{r f} - \frac{a^2 + 1}{r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \\ &= h_0(r) + \lambda(\theta, r) - \frac{2a \cos^n \theta}{r f} - \frac{a^2 + 1}{r^2} \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^{n-2l+1} \theta \sin^{2l} \theta}{f} = \frac{\cos^{n-2l+1} \theta (1 - \cos^2 \theta)^l}{f} = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \frac{\cos^{n-2l+2k+1} \theta}{f}, \quad l = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

$$\frac{\sin^{n+1} \theta}{f} = \begin{cases} \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n+1}{2}}}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k C_{\frac{n+1}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}.$$

Remarque. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^{2l+1} \theta}{f} d\theta = 0$, $\forall p, l$ où $p + 2l \leq n$.

Proposition 18 On a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} &= \begin{cases} \frac{i\pi}{k_1 k_2} (g_1 - g_2), & \text{si } a > 0, \\ \frac{i\pi}{k_1 k_2} (g_1 + g_2), & \text{si } a < 0, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{f} d\theta &= \begin{cases} \frac{\pi}{rk_1 k_2} ((g_1 + g_2) - ia(g_1 - g_2)), & \text{si } a > 0, \\ \frac{\pi}{rk_1 k_2} ((g_1 - g_2) - ia(g_1 + g_2)), & \text{si } a < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$g_1 = \sqrt{(a - i)^2 - r^2}, \quad g_2 = \sqrt{(a + i)^2 - r^2}, \quad k_1 = \sqrt{(a - r)^2 + 1}, \quad k_2 = \sqrt{(a + r)^2 + 1}.$$

Preuve. On utilise le théorème des résidus avec $|z_1| < 1$, $|z_3| < 1$, $|z_2| > 1$ et $|z_4| > 1$ pour $a > 0$, et $|z_2| < 1$, $|z_4| < 1$, $|z_1| > 1$ et $|z_3| > 1$ pour $a < 0$, où

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{f} &\equiv \frac{4}{i} \frac{z}{(rz^2+2az+r)^2+4z^2} dz \\ \frac{\cos\theta d\theta}{f} &\equiv \frac{2}{i} \frac{z^2+1}{(rz^2+2az+r)^2+4z^2} dz\end{aligned}$$

et

$$z_{1,2} = \frac{-a-i\pm g_2}{r}, \quad z_{3,4} = \frac{-a+i\pm g_1}{r}.$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p\theta \sin^q\theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$, on obtient

$$f^0(r) = \begin{cases} \frac{A_n k_1 k_2 + B_n (g_1 + g_2) + C_n i (g_1 - g_2)}{r h k} & \text{si } a > 0, \\ \frac{A_n k_1 k_2 + B_n (g_1 - g_2) + C_n i (g_1 + g_2)}{r h k} & \text{si } a < 0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}A_n &= a_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \dots + a_0, \\ B_n &= b_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \dots + b_0, \\ C_n &= c_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \dots + c_2 r^2 - \frac{1}{2} ((a^2 + 1) a_0 + 2ab_0),\end{aligned}$$

et les coefficients a_i , b_i et c_i sont des polynômes en fonction de a et les coefficients de P, Q . En réalité, il existe seulement $\frac{6n+5-(-1)^n}{4}$ paramètres indépendants entre les a_i , b_i et c_i donc entre les p_{ij}, q_{ij} et a . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ zéros positifs simples. Pour trouver la borne supérieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver pour l'expression

$$k = A_n^2 k_1^2 k_2^2 - (B_n (g_1 \pm g_2) + i C_n (g_1 \mp g_2))^2$$

Finalement, pour borner le nombre des zéros de l'expression précédente on doit borner les zéros du polynôme

$$\begin{aligned} L &= (A_n^2 k_1^2 k_2^2 - 8aB_n C_n - 2B_n^2 (a^2 - r^2 - 1) + 2C_n (a^2 - r^2 - 1))^2 - 4(C_n^2 - B_n^2)^2 k_1^2 k_2^2 \\ &= r^2 \left(d_{8\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r^{8\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \dots + d_2 r^2 + d_0 \right), \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} (g_1 \pm g_2)^2 &= 2(a^2 - r^2 - 1 \pm k_1 k_2), \\ g_1^2 - g_2^2 &= -4ai, \end{aligned}$$

où d_i sont des polynômes en fonction de a, p_{ij} et q_{ij} . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $2n + 1 - (-1)^n$ zéros simples.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = 1$ et les coefficients $p_{10} = 40183.0\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 51595.0\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 27691.0\dots$, $p_{21} = 5$, $p_{12} = 6$, $p_{03} = 7$, $p_{40} = 8$, $p_{31} = 9$, $p_{22} = 10$, $p_{13} = 11$, $p_{04} = -133.84\dots$, $p_{50} = -3648.7\dots$, $p_{41} = 12$, $p_{32} = 13$, $p_{23} = 14$, $p_{14} = 15$, $p_{05} = 16$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = -39176.$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = -21858.$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = 7$, $q_{40} = 8$, $q_{31} = 9$, $q_{22} = 10$, $q_{13} = 11$, $q_{04} = 12$, $q_{50} = 13$, $q_{41} = 14$, $q_{32} = 15$, $q_{23} = 3602.5$, $q_{14} = 16$ et $q_{05} = 0.25$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 8 zéros positifs simples suivants $r_i = i$, $i = 1, 2, \dots, 8$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = 1$ et les coefficients $p_{10} = 3499.3\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 3281.0\dots$, $p_{11} = 2$, $p_{02} = 3$, $p_{30} = 1846.9\dots$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 7$, $p_{31} = 8$, $p_{22} = 9$, $p_{13} = 10$, $p_{04} = 11$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = -3395.5\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = -1674.2\dots$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = -614.39\dots$, $q_{40} = 7$, $q_{31} = 8$, $q_{22} = 9$, $q_{13} = -626.39\dots$ et $q_{04} = 10$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 6 zéros positifs simples suivants $r_i = i$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Par conséquent, ce système a au moins $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ cycles limites. En résumé, nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 19 *Le système (3.2) avec $f = (x + a)^2 + 1$ a au plus $2n + 1 - (-1)^n$ cycles*

limites qui bifurquent de la couronne périodique entourant l'origine du système (3.1). De plus, il existe des valeurs des coefficients p_{ij} et q_{ij} tel que le système (3.2) a $\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$ cycles limites hyperboliques.

3.3.9 Deux lignes droites réelles identiques $f = (x + a)^2$

Pour le cas des deux lignes droites réelles identiques le système (3.1) a une couronne périodique unique $A = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < a^2\}$.

Proposition 20 $\frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$ peut être exprimée en fonction de $\lambda(\theta, r)$, r , $\frac{1}{f}$, $\frac{\cos \theta}{f}$ où $\lambda(\theta, r)$ est une fonction telle que $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

Preuve. En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{(r \cos \theta + a)^2 \cos^{n-1} \theta - 2ar \cos^n \theta - a^2 \cos^{n-1} \theta}{r^2 f} \\ &= \frac{1}{r^2} \cos^{n-1} \theta - \frac{2a \cos^n \theta}{r f} - \frac{a^2 \cos^{n-1} \theta}{r^2 f} \\ &= h_0(r) + \lambda(\theta, r) - \frac{2a \cos^n \theta}{r f} - \frac{a^2 \cos^{n-1} \theta}{r^2 f}. \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^{n-2l+1} \theta \sin^{2l} \theta}{f} = \frac{\cos^{n-2l+1} \theta (1 - \cos^2 \theta)^l}{f} = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \frac{\cos^{n-2l+2k+1} \theta}{f}, \quad l = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

$$\frac{\sin^{n+1} \theta}{f} = \begin{cases} \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n+1}{2}}}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k C_{\frac{n+1}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}.$$

Remarque. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^{2l+1} \theta}{f} d\theta = 0$, $\forall p, l$ où $p + 2l \leq n$.

Proposition 21 On a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} &= \frac{2\pi|a|}{g^3} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{f} d\theta &= -\frac{2\pi r|a|}{ag^3} \end{aligned}$$

où

$$g = \sqrt{a^2 - r^2}$$

Preuve. On utilise le théorème des résidus avec $|z_1| < 1$ et $|z_2| > 1$ pour $a > 0$ et $|z_2| < 1$ et $|z_1| > 1$ pour $a < 0$, où

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{f} &\equiv \frac{4}{i} \frac{z}{(rz^2+2az+r)^2} dz \\ \frac{\cos\theta d\theta}{f} &\equiv \frac{2}{i} \frac{z^2+1}{(rz^2+2az+r)^2} dz\end{aligned}$$

et

$$z_{1,2} = \frac{-a \pm g}{r}.$$

Enfin, en remplaçant toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p \theta \sin^q \theta}{f}$, pour $2 \leq p+q \leq n+1$, on obtient

$$f^0(r) = \frac{A_n (a^2 - r^2) g + B_n}{r (a^2 - r^2) g},$$

où

$$\begin{aligned}A_n &= a_{2[\frac{n-1}{2}]} r^{2[\frac{n-1}{2}]} + \dots + a_2 r^2 + a_0, \\ B_n &= b_{2[\frac{n+2}{2}]} r^{2[\frac{n+2}{2}]} + \dots + b_2 r^2 - a^3 a_0,\end{aligned}$$

et les coefficients a_i et b_i sont des polynômes en fonction de a et en fonction des coefficients de P et Q . En réalité, il existe seulement $n+1$ paramètres indépendants entre les a_i et b_i donc entre les p_{ij}, q_{ij} et a . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus n zéros positifs simples. Pour trouver la borne supérieure des zéros du numérateur de f^0 , il suffit de la trouver pour l'expression

$$\begin{aligned}k &= A_n^2 (a^2 - r^2)^2 g^2 - B_n^2 \\ &= -r^2 (d_{2n+2} r^{2n+2} + \dots + d_2 r^2 + d_0),\end{aligned}$$

où d_i sont des polynômes en fonction de a, p_{ij} et q_{ij} . D'où, $f^0(r)$ peut avoir, au plus $n+1$ zéros simples.

Le système (3.2), avec $n = 5$ et $a = 2$ et les coefficients $p_{10} = -257.71\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 2$, $p_{11} = 3$, $p_{02} = 4$, $p_{30} = -99.483\dots$, $p_{21} = 5$, $p_{12} = 6$, $p_{03} = 7$, $p_{40} = 8$, $p_{31} = 9$, $p_{22} = 10$, $p_{13} = 11$, $p_{04} = 12$, $p_{50} = 45.239\dots$, $p_{41} = 13$, $p_{32} = 14$, $p_{23} = 15$, $p_{14} = 16$, $p_{05} = 17$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 257.71\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = -663.02\dots$, $q_{02} = 3$, $q_{30} = 4$, $q_{21} = 5$, $q_{12} = 6$, $q_{03} = 7$, $q_{40} = 8$, $q_{31} = 9$, $q_{22} = 10$, $q_{13} = -59$, $q_{04} = 11$, $q_{50} = 12$, $q_{41} = 13$, $q_{32} = 14$, $q_{23} = 15$, $q_{14} = 16$ et $q_{05} = 17$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 5 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{2}{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

Le système (3.2), avec $n = 4$ et $a = 2$ et les coefficients $p_{10} = -394.88\dots$, $p_{01} = 1$, $p_{20} = 2$, $p_{11} = 3$, $p_{02} = -224.71\dots$, $p_{30} = 113.87\dots$, $p_{21} = 4$, $p_{12} = 5$, $p_{03} = 6$, $p_{40} = 7$, $p_{31} = 8$, $p_{22} = 9$, $p_{13} = 10$, $p_{04} = 11$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 394.88\dots$, $q_{20} = 2$, $q_{11} = 3$, $q_{02} = 4$, $q_{30} = 5$, $q_{21} = 6$, $q_{12} = 7$, $q_{03} = 8$, $q_{40} = 9$, $q_{31} = 10$, $q_{22} = 11$, $q_{13} = -11.5\dots$ et $q_{04} = 12$, a une fonction $f^0(r)$ avec les 4 zéros positifs simples suivants $r_i = \frac{2}{i+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Par conséquent, ce système a au moins n cycles limites. En résumé, nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 22 *Le système (3.2) avec $f = (x + a)^2$ a au plus $n + 1$ cycles limites qui bifurquent de la couronne périodique entourant l'origine du système (3.1). De plus, il existe des valeurs des coefficients p_{ij} et q_{ij} tel que le système (3.2) a n cycles limites hyperboliques.*

Chapitre 4

Conclusion

Nous avons montré que le tableau suivant est vrai pour $n \leq 5$.

Conique n°	a au moins	a au plus
1	$2n - 1$	$2n - 1$
2	$2n - 1$	$2n - 1$
3	$\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$	$\frac{4n+3-(-1)^n}{2}$
4	$2n - 1$	$2n - 1$
5	$\frac{6n+7+(-1)^n}{4}$	$2n + 5$
6	$\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$	$2n + 1$
7	$\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$	$\frac{4n+3-(-1)^n}{2}$
8	$\frac{6n+1-(-1)^n}{4}$	$2n + 1 - (-1)^n$
9	n	$n + 1$

Tableau 2 : Nombre de cycles limites en utilisant la méthode de la moyenne de premier ordre.

Nous conjecturons qu'il est vrai pour $n \geq 6$.

Bibliographie

- [1] **Y. Bouattia and A. Makhlouf**, Limit cycles of generalized Liénard systems. AIP Conference Proceedings, Volume 1124, pp. 60-70 (2009).
- [2] **Y. Bouattia and A. Makhlouf**, Limit cycles of quartic and quintic polynomial differential systems via the averaging theory, Ann. of Dif. Eqs.27 :1(2011); 70-85.
- [3] **A. Buica and J. Llibre**, Limit cycles of a perturbed cubic polynomial differential center. Chaos, Solitons and Fractals 32 (2007) 1059–1069.
- [4] **B. Coll, A. Gasull and R. Prohens**. Bifurcation of limit cycles from two families of centers. Dyn Contin Discrete Impuls Syst 2005 ;12 :275–88.
- [5] **H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano**, On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, Nonline arity 9 (1996) 501–516.
- [6] **H. Giacomini and S. Neukirch**, Number of limit cycles of the Liénard equation, Phys. Rev. E 56, 3809, (1997).
- [7] **J. Giné and J. Llibre**, Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory, Nonlinear Analysis 66 (2007) 1707–1721.
- [8] **A. Lins, W. de Melo and C. Pugh**, "On Lienard's equation", Lecture Notes in Mathematic, 597, Springer-Verlag (1977),335-357.
- [9] **J. Llibre, J. S. Pérezdel Rio and J. A. Rodríguez**, Averaging analysis of a perturbed quadratic center, NonlinearAnal. 46 (2001) 45–51.

- [10] **J. Llibre and X. Zhang**, The number of limit cycles of some perturbed Hamiltonian polynomial systems, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* 8, 161-181 (2001).
- [11] **N. G. Lloyd**, Liénard systems with several limit cycles, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1987), 102, 565.
- [12] **J. L. Lopez and R. Lopez-Ruiz**, Number and amplitude of limit cycles emerging from topologically equivalent perturbed centers. 'Chaos, Solitons and Fractals 17, 135-143 (2003)'.
- [13] **J. L. Lopez and R. Lopez-Ruiz**, The limit cycles of Liénard equations in the strongly nonlinear regime, *Chaos, Solitons & Fractals* 11, 747-756 (2000).
- [14] **R. Lopez-Ruiz and J.L. Lopez**, Bifurcation curves of limit cycles in some Liénard systems, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* 10, 971-980 (2000).
- [15] **A. Makhlof and Y. Bouattia**. Limit cycles of Liénard systems. Proceeding of the conference on differential & difference equations and applications. Hindaoui Publishing Corporation (2006), pp 743-755.
- [16] **A. Makhlof and Y. Bouattia**. Limit cycles of Liénard system in the weak and strong regimes. Proceeding of neural. Parallel and scientific computations 3(2006) 157-161. Dynamic publishers.Inc.
- [17] **R. E. Mickens**, A combined equivalent linearization and averaging perturbation method for nonlinear oscillator equation. *Journal of Sound and Vibration* 264 (2003) 1195-1200.
- [18] **L. Perko** : "Differential equations and dynamical systems", Texts in Applied Mathematics, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, (2001).
- [19] **Rychkov, G.S.** The maximum number of limit cycles of the system $\dot{y} = x$, $\dot{x} = y - \sum_{i=0}^2 a_i x^{2i+1}$ is two, *Differential Equations* (1975),11, 301.
- [20] **J. A. Sanders, F. Verhulst**, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, in : *Applied Mathematical Sci.*, vol. 59, Springer-Verlag, New York, (1985).

- [21] **Sébastien Neukirch**, Thèse de doctorat de l'université Paris 6, Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard, nombre, forme et localisation. Soutenue le 06 Novembre (1998).
- [22] **F. Verhulst**, Nonlinear differential equations and dynamical systems, Universitext. Springer- Verlag, Berlin (1990).
- [23] **YE, YAN and QIAN** : Theory of limit cycles. American Mathematical Society. (1986), p 149-150.

1 Detail calculations of A_n and B_n in the relation $f^0(r) = \frac{A_n+B_n g}{2^{n+1}a(a^2+b^2)^{n+1}rg}$, ($n \leq 5$) case

3.1 of the ellipse

In this file we mean by f , $\int_0^{2\pi}$

$$M = \int \frac{c}{f} = \frac{\pi a}{\alpha r g} (g - \gamma), \quad N = \int \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{g}, \quad \alpha = a^2 + b^2, \quad \gamma = r^2 + \alpha - 1, \quad g = \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha r^2}$$

$$\frac{c^2}{f} = \underbrace{\frac{1}{2\alpha r} (a \cos \theta - b \sin \theta)}_{=\lambda(\theta,r)} + \frac{1}{2\alpha r} \left(2b^2 r \frac{1}{f} + b\gamma \frac{s}{f} - a\gamma \frac{c}{f} \right) \Rightarrow \int \frac{c^2}{f} = \frac{1}{2\alpha r} \left((b^2 - a^2) \gamma M + 2ab^2 r N \right)$$

$$\frac{cs}{f} = \underbrace{\frac{1}{2\alpha r} (b \cos \theta - a \sin \theta)}_{=\lambda(\theta,r)} - \frac{1}{2\alpha r} \left(2abr \frac{1}{f} + a\gamma \frac{s}{f} + b\gamma \frac{c}{f} \right) \Rightarrow \int \frac{cs}{f} = \frac{1}{\alpha r} (-b\gamma M - abrN)$$

$$\frac{s^2}{f} = \frac{1}{f} - \frac{c^2}{f} = \underbrace{\frac{1}{2\alpha r} (b \sin \theta - a \cos \theta)}_{=\lambda(\theta,r)} + \frac{1}{2\alpha r} \left(2a^2 r \frac{1}{f} - b\gamma \frac{s}{f} + a\gamma \frac{c}{f} \right) \Rightarrow \int \frac{s^2}{f} = \frac{1}{2\alpha r} \left((a^2 - b^2) \gamma M + 2a^3 r N \right)$$

$$\int \frac{c^3}{f} = \frac{1}{4a^2 r^2} (2\alpha r \pi + (4b^2 \alpha r^2 + (a^2 - 3b^2) \gamma^2) M - 4ab^2 \gamma r N)$$

$$\int \frac{c^2 s}{f} = \frac{b}{4a\alpha^2 r^2} (2\alpha r \pi - (4a^2 \alpha r^2 + (b^2 - 3a^2) \gamma^2) M + 2a(a^2 - b^2) \gamma r N)$$

$$\int \frac{cs^2}{f} = \frac{1}{4\alpha^2 r^2} (-2\alpha r \pi + (4a^2 \alpha r^2 + (3b^2 - a^2) \gamma^2) M + 4ab^2 \gamma r N)$$

$$\int \frac{s^3}{f} = \frac{b}{4a\alpha^2 r^2} (-2\alpha r \pi + (4(2a^2 + b^2) \alpha r^2 + (b^2 - 3a^2) \gamma^2) M + 2a(b^2 - a^2) \gamma r N)$$

$$\int \frac{c^4}{f} = \frac{1}{8a\alpha^3 r^3} (2a(b^4 - a^4) \gamma r \pi - (4b^2(3a^2 - b^2) \alpha \gamma r^2 + (b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^3) M + 2ab^2(4b^2 \alpha r^3 + (3a^2 - b^2) \gamma^2 r) N)$$

$$\int \frac{c^3 s}{f} = \frac{b}{4a^2 \alpha^3 r^3} (-2a^3 \alpha \gamma r \pi + 2(a^2 - b^2) ((a^4 - b^4) \gamma r^2 - a^2 \gamma^3) M + a^3 ((3b^2 - a^2) \gamma^2 r - 4b^2 \alpha r^3) N)$$

$$\int \frac{c^2 s^2}{f} = \frac{1}{8a\alpha^3 r^3} (2a(a^4 - b^4) \gamma r \pi + (4a^2(3b^2 - a^2) \alpha \gamma r^2 + (b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^3) M + 2ab^2(4a^2 \alpha r^3 + (b^2 - 3a^2) \gamma^2 r) N)$$

$$\int \frac{cs^3}{f} = \frac{b}{4a^2 \alpha^3 r^3} (2a^3 \alpha \gamma r \pi - 2((3a^4 + b^4) \alpha \gamma r^2 - a^2(a^2 - b^2) \gamma^3) M + a^3((a^2 - 3b^2) \gamma^2 r - 4a^2 \alpha r^3) N)$$

$$\int \frac{s^4}{f} = \frac{1}{8a\alpha^3 r^3} (2a(b^4 - a^4) \gamma r \pi - (4\alpha(b^4 + 3a^2 b^2 - 2a^4) \gamma r^2 + (b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^3) M + 2a(4a^4 \alpha r^3 + b^2(3a^2 - b^2) \gamma^2 r) N)$$

$$\int \frac{c^5}{f} = \frac{2a^3((a^2 - 3b^2) \alpha \gamma r^2 + (3a^2 + 7b^2) \alpha^2 r^3) \pi + (a^2(a^4 - 10a^2 b^2 + 5b^4) \gamma^4 + 4b^2(a^2 - b^2)(5a^2 - b^2) \alpha r^2 \gamma^2 + 16a^2 b^4 \alpha^2 r^4) M + 8a^3 b^2((b^2 - a^2) r \gamma^3 - 4b^2 \alpha r^3 \gamma) N}{16a^2 \alpha^4 r^4}$$

$$\int \frac{c^4 s}{f} = \frac{b(2a((3a^2 - b^2) \alpha \gamma r^2 + (3b^2 - a^2) \alpha^2 r^3) \pi + ((5a^4 - 10a^2 b^2 + b^4) \gamma^4 + 16b^2(2b^2 - a^2) \alpha r^2 \gamma^2 - 16a^2 b^2 \alpha^2 r^4) M + 2a((4b^2(b^2 - a^2) + (a^2 - 3b^2) \alpha) r \gamma^3 + 4b^2(3a^2 - b^2) \alpha r^3 \gamma) N)}{16a\alpha^4 r^4}$$

$$\int \frac{c^3 s^2}{f} = \frac{(2a^3(3b^2 - a^2)(\alpha \gamma r^2 - \alpha^2 r^3) \pi + (a^2(-a^4 + 10a^2 b^2 - 5b^4) \gamma^4 + 4(a^6 - 7a^4 b^2 + 3a^2 b^4 - b^6) \alpha r^2 \gamma^2 + 16a^4 b^2 \alpha^2 r^4) M + 8a^3 b^2(a^2 - b^2)(r \gamma^3 - 2\alpha r^3 \gamma) N)}{16a^2 \alpha^4 r^4}$$

$$\int \frac{c^2 s^3}{f} = \frac{b(2a((b^2 - 3a^2) r \gamma^2 + (b^2 + 5a^2) \alpha r^3) \alpha \pi + ((-5a^4 + 10a^2 b^2 - b^4) \gamma^4 + 12(a^2 - b^2)(a^2 + 3b^2) \alpha r^2 \gamma^2 - 16a^4 \alpha^2 r^4) M + 2a((-a^4 + 6a^2 b^2 - b^4) r \gamma^3 + 4a^2(a^4 - 2a^2 b^2 - 3b^4) r^3 \gamma) N)}{16a\alpha^4 r^4}$$

$$\int \frac{cs^4}{f} = \frac{(2a^3((a^2 - 3b^2) \alpha \gamma r^2 - (5a^2 + b^2) \alpha^2 r^3) \pi + (a^2(a^4 - 10a^2 b^2 + 5b^4) \gamma^4 + 4(b^6 + 9a^4 b^2 - 2a^6) \alpha r^2 \gamma^2 + 16a^6 \alpha^2 r^4) M + 8a^3 b^2((b^2 - a^2) r \gamma^3 + 4a^2 \alpha r^3 \gamma) N)}{16a^2 \alpha^4 r^4}$$

$$\int \frac{s^5}{f} = \frac{b(2a((3a^2 - b^2) r \gamma^2 - (9a^2 + 5b^2) \alpha r^3) \alpha \pi + ((b^4 - 10a^2 b^2 + 5a^4) \gamma^4 + 8(5b^4 - 4a^2 b^2 - 3a^4) \alpha r^2 \gamma^2 + 16(b^4 + 3a^2 b^2 + 3a^4) \alpha^2 r^4) M + 2a((b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) r \gamma^3 + 4(b^4 + 3a^2 b^2 - 2a^4) \alpha r^3 \gamma) N)}{16a\alpha^4 r^4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^6}{f} &= \frac{(2a((-b^4+6a^2b^2-a^4)\alpha r\gamma^3+(7b^4-12a^2b^2-3a^4)\alpha^2 r^3\gamma)\pi+((b^2-a^2)(b^4-14a^2b^2+a^4)\gamma^5+8b^2(3b^4+4a^2b^2-3a^4)\alpha r^2\gamma^3+16b^4(b^2-5a^2)\alpha^2 r^4\gamma)M+2ab^2((b^4-10a^2b^2+5a^4)r\gamma^4+8b^2(5a^2-b^2)\alpha r^3\gamma^2+16b^4\alpha^2 r^5)N}{32a\alpha^5 r^5} \\ \int \frac{e^5 s}{f} &= \frac{b(4a^3(2(b^2-a^2)\alpha r\gamma^3-(7b^2-a^2)\alpha^2 r^3\gamma)\pi+2(a^2(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)\gamma^5+2(a^6-7a^4b^2-a^2b^4-b^6)\alpha r^2\gamma^3+16a^2b^2(2a^2-b^2)\alpha^2 r^4\gamma)M+2a^3((-a^4+10a^2b^2-5b^4)r\gamma^4+24b^2(b^2-a^2)\alpha r^3\gamma^2-16b^4\alpha^2 r^5)N)}{32a^2\alpha^5 r^5} \\ \int \frac{e^4 s^2}{f} &= \frac{(2a((b^4-6a^2b^2+a^4)\alpha r\gamma^3-(3b^4-12a^2b^2+a^4)\alpha^2 r^3\gamma)\pi+(a^2-b^2)((a^4-14a^2b^2+b^4)\gamma^5+4(7b^4+10a^2b^2-a^4)\alpha r^2\gamma^3-48a^2b^2\alpha^2 r^4\gamma)M+2ab^2((-b^4+10a^2b^2-5a^4)r\gamma^4+4(b^4-8a^2b^2+3a^4)\alpha r^3\gamma^2+16a^2b^2\alpha^2 r^5)N)}{32a\alpha^3 r^5} \\ \int \frac{e^3 s^3}{f} &= \frac{b(2a^3(2(a^2-b^2)\alpha r\gamma^3+(3b^2-5a^2)\alpha^2 r^3\gamma)\pi+(a^2(3a^2-b^2)(a^2-3b^2)\gamma^5+2(b^6+5a^2b^4+7a^4b^2-5a^6)\alpha r^2\gamma^3+8(b^6+a^2b^4-5a^4b^2+a^6)\alpha^2 r^4\gamma)M+a^3((5b^4-10a^2b^2+a^4)r\gamma^4-4(3b^4-8a^2b^2+a^4)\alpha r^3\gamma^2-16a^2b^2\alpha^2 r^5)N)}{16a^2\alpha^3 r^5} \\ \int \frac{e^2 s^4}{f} &= \frac{(2a((-b^4+6a^2b^2-a^4)\alpha r\gamma^3-(b^4+12a^2b^2-5a^4)\alpha^2 r^3\gamma)\pi+((a^2-b^2)(-b^4+14a^2b^2-a^4)\gamma^5+8(4b^6-a^2b^4-8a^4b^2+a^6)\alpha r^2\gamma^3+16a^4(5b^2-a^2)\alpha^2 r^4\gamma)M+2ab^2((b^4-10a^2b^2+5a^4)r\gamma^4+24a^2(b^2-a^2)\alpha r^3\gamma^2+16a^4\alpha^2 r^5)N)}{32a r^5 \alpha^5} \\ \int \frac{e s^5}{f} &= \frac{b(2a^3(2(b^2-a^2)\alpha r\gamma^3+(b^2+9a^2)\alpha^2 r^3\gamma)\pi-(a^2(a^2-3b^2)(3a^2-b^2)\gamma^5+2(b^6+9a^2b^4+7a^4b^2-9a^6)\alpha r^2\gamma^3+16(b^2+2a^2)(b^4-a^2b^2+a^4)\alpha^2 r^4\gamma)M-a^3((5b^4-10a^2b^2+a^4)r\gamma^4+8a^2(5b^2-a^2)\alpha r^3\gamma^2+16a^4\alpha^2 r^5)N)}{16a^2 r^5 \alpha^5} \\ \int \frac{e^6}{f} &= \frac{(2a((-b^4-6a^2b^2+a^4)\alpha r\gamma^3+(5b^2-3a^2)(3a^2+b^2)\alpha^2 r^3\gamma)\pi+((a^2-b^2)(b^4-14a^2b^2+a^4)\gamma^5-4(9b^6-7a^2b^4-21a^4b^2+3a^6)\alpha r^2\gamma^3-16(b^6+4a^2b^4+6a^4b^2-3a^6)\alpha^2 r^4\gamma)M-(2ab^2(b^4-10a^2b^2+5a^4)r\gamma^4+8ab^2(b^4+4a^2b^2-9a^4)\alpha r^3\gamma^2-32a^7\alpha^2 r^5)N)}{32a r^5 \alpha^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^2}{f} &= \frac{\pi}{2\alpha^2 r^2 g} ((a^2-b^2)\gamma^2+4\alpha b^2 r^2-(a^2-b^2)\gamma g) \\ \int \frac{e s}{f} &= \frac{\pi}{2\alpha^2 r^2 g} (2ab\gamma^2-4ab\alpha r^2-2ab\gamma g) \\ \int \frac{s^2}{f} &= \frac{\pi}{2\alpha^2 r^2 g} ((b^2-a^2)\gamma^2+4\alpha a^2 r^2-(b^2-a^2)\gamma g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^3}{f} &= \frac{(-a(a^2-3b^2)\gamma^3-12ab^2\alpha r^2\gamma+(a(a^2-3b^2)\gamma^2+2a(2b^2+\alpha)\alpha r^2)g)\pi}{4\alpha^3 r^3 g} \\ \int \frac{e^2 s}{f} &= \frac{\pi(b(b^2-3a^2)\gamma^3+4b(2a^2-b^2)\alpha r^2\gamma+(-b(b^2-3a^2)\gamma^2+2b(b^2-a^2)\alpha r^2)g)}{4\alpha^3 r^3 g} \\ \int \frac{e s^2}{f} &= \frac{\pi(a(a^2-3b^2)\gamma^3+4a(2b^2-a^2)\alpha r^2\gamma+(-a(a^2-3b^2)\gamma^2+2a(a^2-b^2)\alpha r^2)g)}{4\alpha^3 r^3 g} \\ \int \frac{s^3}{f} &= \frac{\pi(b(3a^2-b^2)\gamma^3-12a^2b\alpha r^2\gamma+(-b(3a^2-b^2)\gamma^2+2b(3a^2+b^2)\alpha r^2)g)}{4\alpha^3 r^3 g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^4}{f} &= \frac{\pi((a^4-6a^2b^2+b^4)\gamma^4+8b^2(3a^2-b^2)\alpha r^2\gamma^2+16b^4\alpha^2 r^4+(-b^4-6a^2b^2+a^4)\gamma^3+2(3b^4-6a^2b^2-a^4)\alpha r^2\gamma)g)}{8\alpha^4 r^4 g} \\ \int \frac{e^3 s}{f} &= \frac{\pi b(a^2(a^2-b^2)\gamma^4-(b^4-5a^2b^2+2a^4)\alpha r^2\gamma^2-4a^2b^2\alpha^2 r^4+(-a^2(a^2-b^2)\gamma^3+b^2(b^2-3a^2)\alpha r^2\gamma)g)}{2a\alpha^4 r^4 g} \\ \int \frac{e^2 s^2}{f} &= \frac{\pi(-b^4-6a^2b^2+a^4)\gamma^4+4(b^4-6a^2b^2+a^4)\alpha r^2\gamma^2+16a^2b^2\alpha^2 r^4+((b^4-6a^2b^2+a^4)\gamma^3-2(b^4-6a^2b^2+a^4)\alpha r^2\gamma)g)}{8\alpha^4 r^4 g} \\ \int \frac{e s^3}{f} &= \frac{\pi(a^2b(b^2-a^2)\gamma^4+b(b^4-3a^2b^2+4a^4)\alpha r^2\gamma^2-4a^4b\alpha^2 r^4+(-a^2b(b^2-a^2)\gamma^3-b(b^4-a^2b^2+2a^4)\alpha r^2\gamma)g)}{2a\alpha^4 r^4 g} \\ \int \frac{s^4}{f} &= \frac{\pi((b^4-6a^2b^2+a^4)\gamma^4+8a^2(3b^2-a^2)\alpha r^2\gamma^2+16a^4\alpha^2 r^4+(-b^4-6a^2b^2+a^4)\gamma^3+2(-b^4-6a^2b^2+3a^4)\alpha r^2\gamma)g)}{8\alpha^4 r^4 g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^5}{f} &= \frac{\pi(a^2(-5b^4+10a^2b^2-a^4)\gamma^5+4b^2(a^2-b^2)(b^2-9a^2)\alpha r^2\gamma^3-80a^2b^2\alpha^2 r^4\gamma+a^2(5b^4-10a^2b^2+a^4)\gamma^4+2(2b^6-15a^2b^4+8a^4b^2+a^6)\alpha r^2\gamma^2+2a^2(15b^4+10a^2b^2+3a^4)\alpha^2 r^4)g)}{16a\alpha^5 r^5 g} \\ \int \frac{e^4 s}{f} &= \frac{\pi(-b(b^4-10a^2b^2+5a^4)\gamma^5-4b(7b^4+2a^2b^2-a^4)\alpha r^2\gamma^3+16b^3(4a^2-b^2)\alpha^2 r^4\gamma+b(b^4-10a^2b^2+5a^4)\gamma^4+2b(15b^4-6a^2b^2+3a^4)\alpha r^2\gamma^2+2b(3b^4-6a^2b^2-a^4)\alpha^2 r^4)g)}{16\alpha^5 r^5 g} \\ \int \frac{e^3 s^2}{f} &= \frac{\pi(a^2(5b^4-10a^2b^2+a^4)\gamma^5+4(b^6-7a^2b^4+11a^4b^2-a^6)\alpha r^2\gamma^3+16a^2b^2(2b^2-3a^2)\alpha^2 r^4\gamma+(-a^2(5b^4-10a^2b^2+a^4)\gamma^4+(-4b^6+18a^2b^4-24a^4b^2+2a^6)\alpha r^2\gamma^2+2a^2(-3b^4+6a^2b^2+a^4)\alpha^2 r^4)g)}{16a\alpha^5 r^5 g} \\ \int \frac{e^2 s^3}{f} &= \frac{\pi(b(b^4-10a^2b^2+5a^4)\gamma^5+16b(2b^4-a^4)\alpha r^2\gamma^3+16a^2b(2a^2-3b^2)\alpha^2 r^4\gamma+(-b(b^4-10a^2b^2+5a^4)\gamma^4-2b(17b^4-10a^2b^2-3a^4)\alpha r^2\gamma^2+2b(b^4+6a^2b^2-3a^4)\alpha^2 r^4)g)}{16\alpha^5 r^5 g} \\ \int \frac{e s^4}{f} &= \frac{\pi(-a^2(5b^4-10a^2b^2+a^4)\gamma^5-4(b^6-4a^2b^4+13a^4b^2-2a^6)\alpha r^2\gamma^3+16a^4(4b^2-a^2)\alpha^2 r^4\gamma+(a^2(5b^4-10a^2b^2+a^4)\gamma^4+(4b^6-6a^2b^4+32a^4b^2-6a^6)\alpha r^2\gamma^2-2a^2(b^4+6a^2b^2-3a^4)\alpha^2 r^4)g)}{16a\alpha^5 r^5 g} \\ \int \frac{s^5}{f} &= \frac{\pi(-b(b^4-10a^2b^2+5a^4)\gamma^5+4b(a^2-b^2)(7a^2+9b^2)\alpha r^2\gamma^3-80a^4b\alpha^2 r^4\gamma+b(b^4-10a^2b^2+5a^4)\gamma^4+2b(19b^4-14a^2b^2-9a^4)\alpha r^2\gamma^2+2b(3b^4+10a^2b^2+15a^4)\alpha^2 r^4)g)}{16\alpha^5 r^5 g} \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^6}{f} = \frac{\pi((a^2-b^2)(b^4-14a^2b^2+a^4)\gamma^6-4b^2(5b^4+18a^2b^2-11a^4)\alpha r^2\gamma^4+48b^4(5a^2-b^2)\alpha^2 r^4\gamma^2+64b^6\alpha^3 r^6+((b^2-a^2)(b^4-14a^2b^2+a^4)\gamma^5+2(11b^6+21a^2b^4-7a^4b^2-a^6)\alpha r^2\gamma^3+2(15b^6-45a^2b^4-15a^4b^2-3a^6)\alpha^2 r^4\gamma)g)}{32a^6 r^6 g}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{c^5 s}{f} &= \frac{\pi(a^2 b(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2)\gamma^6 + 2b(b^6 - 4a^2 b^4 + 17a^4 b^2 - 2a^6)\alpha r^2 \gamma^4 + 16a^2 b^3(4b^2 - 5a^2)\alpha^2 r^4 \gamma^2 - 32a^2 b^5 \alpha^3 r^6 + (a^2 b(b^2 - 3a^2)(a^2 - 3b^2)\gamma^5 - 2b(b^6 - a^2 b^4 + 7a^4 b^2 + a^6)\alpha r^2 \gamma^3 + 2a^2 b(-15b^4 + 10a^2 b^2 + a^4)\alpha^2 r^4 \gamma)g}{16a\alpha^6 r^6 g} \\
\int \frac{c^4 s^2}{f} &= \frac{\pi((b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2 b^2 + a^4)\gamma^6 + 4(6b^6 + 13a^2 b^4 - 16a^4 b^2 + a^6)\alpha r^2 \gamma^4 + 16b^2(b^4 - 11a^2 b^2 + 6a^4)\alpha^2 r^4 \gamma^2 + 64a^2 b^4 \alpha^3 r^6 + ((a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2 b^2 + a^4)\gamma^5 - 2(13b^6 + 11a^2 b^4 - 17a^4 b^2 + a^6)\alpha r^2 \gamma^3 - 2(3b^6 - 33a^2 b^4 + 13a^4 b^2 + a^6)\alpha^2 r^4 \gamma)g}{32\alpha^6 r^6 g} \\
\int \frac{c^3 s^3}{f} &= \frac{\pi(a^2 b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)\gamma^6 - 2b(b^6 + 17a^4 b^2 - 6a^6)\alpha r^2 \gamma^4 + 8b(2a^2 - b^2)(b^4 + 6a^2 b^2 - a^4)\alpha^2 r^4 \gamma^2 - 32a^4 b^3 \alpha^3 r^6 + (a^2 b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)\gamma^5 + b(2b^6 + 6a^2 b^4 + 14a^4 b^2 - 6a^6)\alpha r^2 \gamma^3 + b(8b^6 + 14a^2 b^4 - 44a^4 b^2 - 2a^6)\alpha^2 r^4 \gamma)g}{16a\alpha^6 r^6 g} \\
\int \frac{c^2 s^4}{f} &= \frac{\pi((a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4)\gamma^6 - 4(7b^6 + 8a^2 b^4 - 21a^4 b^2 + 2a^6)\alpha r^2 \gamma^4 + 16a^2(6b^4 - 11a^2 b^2 + a^4)\alpha^2 r^4 \gamma^2 + 64a^4 b^2 \alpha^3 r^6 + ((b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4)\gamma^5 + 2(15b^6 + a^2 b^4 - 27a^4 b^2 + 3a^6)\alpha r^2 \gamma^3 - 2(b^6 + 13a^2 b^4 - 33a^4 b^2 + 3a^6)\alpha^2 r^4 \gamma)g}{32\alpha^6 r^6 g} \\
\int \frac{cs^5}{f} &= \frac{\pi(a^2 b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)\gamma^6 + 2b(b^6 + 4a^2 b^4 + 17a^4 b^2 - 10a^6)\alpha r^2 \gamma^4 + 16b(b^6 + a^2 b^4 - 6a^4 b^2 + 3a^6)\alpha^2 r^4 \gamma^2 - 32a^6 b \alpha^3 r^6 + (a^2 b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)\gamma^5 - 2b(b^6 + 7a^2 b^4 + 7a^4 b^2 - 7a^6)\alpha r^2 \gamma^3 - 2b(8b^6 + 7a^2 b^4 - 18a^4 b^2 + 7a^6)\alpha^2 r^4 \gamma)g}{16a\alpha^6 r^6 g} \\
\int \frac{s^6}{f} &= \frac{\pi((b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4)\gamma^6 + 4(8b^6 + 3a^2 b^4 - 26a^4 b^2 + 3a^6)\alpha r^2 \gamma^4 + 48a^4(5b^2 - a^2)\alpha^2 r^4 \gamma^2 + 64a^6 \alpha^3 r^6 + ((a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4)\gamma^5 - 2(17b^6 - 9a^2 b^4 - 37a^4 b^2 + 5a^6)\alpha r^2 \gamma^3 + 2(-3b^6 - 15a^2 b^4 - 45a^4 b^2 + 15a^6)r^4 \gamma)g}{32\alpha^6 r^6 g}
\end{aligned}$$

$$2\pi f^0(r) = \sum_{k=1}^n \sum_{i+j=k}^n [p_{ij} I_{i+1,j}(r) + q_{ij} I_{i,j+1}(r)] r^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i+1} (\lambda_{i,j} \cdot I_{i+1-j,j}) \cdot r^i, \text{ for } n \leq 5,$$

where

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} p_{i,0} & \text{if } j = 0 \\ q_{0,i} & \text{if } j = i + 1 \\ p_{i-j,j} + q_{i+1-j,j-1} & \text{if } 1 \leq j \leq i \end{cases}$$

$$I_{i,j} = \frac{2\pi}{f} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^i \theta \sin^j \theta d\theta}{f}$$

$\alpha > 1$ or $r > r_2 = 1 + \sqrt{\alpha}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned}
& a(2\alpha)^4 \left((a^2 - b^2) \gamma^2 + 4\alpha b^2 r^2 - (a^2 - b^2) \gamma g \right) \lambda_{1,0} \\
& + a(2\alpha)^4 (2ab\gamma^2 - 4ab\alpha r^2 - 2ab\gamma g) \lambda_{1,1} \\
& + a(2\alpha)^4 \left((b^2 - a^2) \gamma^2 + 4\alpha a^2 r^2 - (b^2 - a^2) \gamma g \right) \lambda_{1,2} \\
& + a(2\alpha)^3 \left(-a(a^2 - 3b^2) \gamma^3 - 12ab^2 \alpha r^2 \gamma + (a(a^2 - 3b^2) \gamma^2 + 2a(2b^2 + \alpha) \alpha r^2) g \right) \lambda_{2,0} \\
& + a(2\alpha)^3 \left(b(b^2 - 3a^2) \gamma^3 + 4b(2a^2 - b^2) \alpha r^2 \gamma + (-b(b^2 - 3a^2) \gamma^2 + 2b(b^2 - a^2) \alpha r^2) g \right) \lambda_{2,1} \\
& + a(2\alpha)^3 \left(a(a^2 - 3b^2) \gamma^3 + 4a(2b^2 - a^2) \alpha r^2 \gamma + (-a(a^2 - 3b^2) \gamma^2 + 2a(a^2 - b^2) \alpha r^2) g \right) \lambda_{2,2} \\
& + a(2\alpha)^3 \left(b(3a^2 - b^2) \gamma^3 - 12a^2 b \alpha r^2 \gamma + (-b(3a^2 - b^2) \gamma^2 + 2b(3a^2 + b^2) \alpha r^2) g \right) \lambda_{2,3} \\
& + a(2\alpha)^2 \left((a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) \gamma^4 + 8b^2(3a^2 - b^2) \alpha r^2 \gamma^2 + 16b^4 \alpha^2 r^4 + (-b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^3 + 2(3b^4 - 6a^2 b^2 - a^4) \alpha r^2 \gamma \right) g \lambda_{3,0} \\
& + 4b(2\alpha)^2 \left(a^2(a^2 - b^2) \gamma^4 - (b^4 - 5a^2 b^2 + 2a^4) \alpha r^2 \gamma^2 - 4a^2 b^2 \alpha^2 r^4 + (-a^2(a^2 - b^2) \gamma^3 + b^2(b^2 - 3a^2) \alpha r^2 \gamma) g \right) \lambda_{3,1} \\
& + a(2\alpha)^2 \left(-(b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^4 + 4(b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \alpha r^2 \gamma^2 + 16a^2 b^2 \alpha^2 r^4 + ((b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^3 - 2(b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \alpha r^2 \gamma) g \right) \lambda_{3,2} \\
& + 4(2\alpha)^2 \left(a^2 b(b^2 - a^2) \gamma^4 + b(b^4 - 3a^2 b^2 + 4a^4) \alpha r^2 \gamma^2 - 4a^4 b \alpha^2 r^4 + (-a^2 b(b^2 - a^2) \gamma^3 - b(b^4 - a^2 b^2 + 2a^4) \alpha r^2 \gamma) g \right) \lambda_{3,3} \\
& + a(2\alpha)^2 \left((b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^4 + 8a^2(3b^2 - a^2) \alpha r^2 \gamma^2 + 16a^4 \alpha^2 r^4 + (-b^4 - 6a^2 b^2 + a^4) \gamma^3 + 2(-b^4 - 6a^2 b^2 + 3a^4) \alpha r^2 \gamma \right) g \lambda_{3,4} \\
& + (2\alpha) \left(\begin{aligned}
& a^2(-5b^4 + 10a^2 b^2 - a^4) \gamma^5 + 4b^2(a^2 - b^2)(b^2 - 9a^2) \alpha r^2 \gamma^3 - 80a^2 b^4 \alpha^2 r^4 \gamma \\
& + (a^2(5b^4 - 10a^2 b^2 + a^4) \gamma^4 + 2(2b^6 - 15a^2 b^4 + 8a^4 b^2 + a^6) \alpha r^2 \gamma^2 + 2a^2(15b^4 + 10a^2 b^2 + 3a^4) \alpha^2 r^4) g \right) \lambda_{4,0} \\
& + (2a\alpha) \left(\begin{aligned}
& -b(b^4 - 10a^2 b^2 + 5a^4) \gamma^5 - 4b(7b^4 + 2a^2 b^2 - a^4) \alpha r^2 \gamma^3 + 16b^3(4a^2 - b^2) \alpha^2 r^4 \gamma \\
& + (b(b^4 - 10a^2 b^2 + 5a^4) \gamma^4 + 2b(15b^4 - 6a^2 b^2 + 3a^4) \alpha r^2 \gamma^2 + 2b(3b^4 - 6a^2 b^2 - a^4) \alpha^2 r^4) g \right) \lambda_{4,1} \\
& + (2\alpha) \left(\begin{aligned}
& a^2(5b^4 - 10a^2 b^2 + a^4) \gamma^5 + 4(b^6 - 7a^2 b^4 + 11a^4 b^2 - a^6) \alpha r^2 \gamma^3 + 16a^2 b^2(2b^2 - 3a^2) \alpha^2 r^4 \gamma \\
& + (-a^2(5b^4 - 10a^2 b^2 + a^4) \gamma^4 + (-4b^6 + 18a^2 b^4 - 24a^4 b^2 + 2a^6) \alpha r^2 \gamma^2 + 2a^2(-3b^4 + 6a^2 b^2 + a^4) \alpha^2 r^4) g \right) \lambda_{4,2} \\
& + (2a\alpha) \left(\begin{aligned}
& b(b^4 - 10a^2 b^2 + 5a^4) \gamma^5 + 16b(2b^4 - a^4) \alpha r^2 \gamma^3 + 16a^2 b(2a^2 - 3b^2) \alpha^2 r^4 \gamma \\
& + (-b(b^4 - 10a^2 b^2 + 5a^4) \gamma^4 - 2b(17b^4 - 10a^2 b^2 - 3a^4) \alpha r^2 \gamma^2 + 2b(b^4 + 6a^2 b^2 - 3a^4) \alpha^2 r^4) g \right) \lambda_{4,3} \\
& + (2\alpha) \left(\begin{aligned}
& -a^2(5b^4 - 10a^2 b^2 + a^4) \gamma^5 - 4(b^6 - 4a^2 b^4 + 13a^4 b^2 - 2a^6) \alpha r^2 \gamma^3 + 16a^4(4b^2 - a^2) \alpha^2 r^4 \gamma \\
& + (a^2(5b^4 - 10a^2 b^2 + a^4) \gamma^4 + (4b^6 - 6a^2 b^4 + 32a^4 b^2 - 6a^6) \alpha r^2 \gamma^2 - 2a^2(b^4 + 6a^2 b^2 - 3a^4) \alpha^2 r^4) g \right) \lambda_{4,4} \\
& + (2a\alpha) \left(\begin{aligned}
& -b(b^4 - 10a^2 b^2 + 5a^4) \gamma^5 + 4b(a^2 - b^2)(7a^2 + 9b^2) \alpha r^2 \gamma^3 - 80a^4 b \alpha^2 r^4 \gamma \\
& + (b(b^4 - 10a^2 b^2 + 5a^4) \gamma^4 + 2b(19b^4 - 14a^2 b^2 - 9a^4) \alpha r^2 \gamma^2 + 2b(3b^4 + 10a^2 b^2 + 15a^4) \alpha^2 r^4) g \right) \lambda_{4,5}
\end{aligned} \right) \\
& + \left(\begin{aligned}
& a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2 b^2 + a^4) \gamma^6 - 4ab^2(5b^4 + 18a^2 b^2 - 11a^4) \alpha r^2 \gamma^4 + 48ab^4(5a^2 - b^2) \alpha^2 r^4 \gamma^2 + 64ab^6 \alpha^3 r^6 \\
& + (a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2 b^2 + a^4) \gamma^5 + 2a(11b^6 + 21a^2 b^4 - 7a^4 b^2 - a^6) \alpha r^2 \gamma^3 + 2a(15b^6 - 45a^2 b^4 - 15a^4 b^2 - 3a^6) \alpha^2 r^4 \gamma) g \right) \lambda_{5,0} \\
& + \left(\begin{aligned}
& 2a^2 b(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2) \gamma^6 + 4b(b^6 - 4a^2 b^4 + 17a^4 b^2 - 2a^6) \alpha r^2 \gamma^4 + 32a^2 b^3(4b^2 - 5a^2) \alpha^2 r^4 \gamma^2 - 64a^2 b^5 \alpha^3 r^6 \\
& + (2a^2 b(b^2 - 3a^2)(a^2 - 3b^2) \gamma^5 - 4b(b^6 - a^2 b^4 + 7a^4 b^2 + a^6) \alpha r^2 \gamma^3 + 4a^2 b(-15b^4 + 10a^2 b^2 + a^4) \alpha^2 r^4 \gamma) g \right) \lambda_{5,1} \\
& + \left(\begin{aligned}
& a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2 b^2 + a^4) \gamma^6 + 4a(6b^6 + 13a^2 b^4 - 16a^4 b^2 + a^6) \alpha r^2 \gamma^4 + 16ab^2(b^4 - 11a^2 b^2 + 6a^4) \alpha^2 r^4 \gamma^2 + 64a^3 b^4 \alpha^3 r^6 \\
& + (a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2 b^2 + a^4) \gamma^5 - 2a(13b^6 + 11a^2 b^4 - 17a^4 b^2 + a^6) \alpha r^2 \gamma^3 - 2a(3b^6 - 33a^2 b^4 + 13a^4 b^2 + a^6) \alpha^2 r^4 \gamma) g \right) \lambda_{5,2} \\
& + \left(\begin{aligned}
& 2a^2 b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) \gamma^6 - 4b(b^6 + 17a^4 b^2 - 6a^6) \alpha r^2 \gamma^4 + 16b(2a^2 - b^2)(b^4 + 6a^2 b^2 - a^4) \alpha^2 r^4 \gamma^2 - 64a^4 b^3 \alpha^3 r^6 \\
& + (2a^2 b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2) \gamma^5 + 2b(2b^6 + 6a^2 b^4 + 14a^4 b^2 - 6a^6) \alpha r^2 \gamma^3 + 2b(8b^6 + 14a^2 b^4 - 44a^4 b^2 - 2a^6) \alpha^2 r^4 \gamma) g \right) \lambda_{5,3} \\
& + \left(\begin{aligned}
& a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4) \gamma^6 - 4a(7b^6 + 8a^2 b^4 - 21a^4 b^2 + 2a^6) \alpha r^2 \gamma^4 + 16a^3(6b^4 - 11a^2 b^2 + a^4) \alpha^2 r^4 \gamma^2 + 64a^3 b^2 \alpha^3 r^6 \\
& + (a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4) \gamma^5 + 2a(15b^6 + a^2 b^4 - 27a^4 b^2 + 3a^6) \alpha r^2 \gamma^3 - 2a(b^6 + 13a^2 b^4 - 33a^4 b^2 + 3a^6) \alpha^2 r^4 \gamma) g \right) \lambda_{5,4} \\
& + \left(\begin{aligned}
& 2a^2 b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2) \gamma^6 + 4b(b^6 + 4a^2 b^4 + 17a^4 b^2 - 10a^6) \alpha r^2 \gamma^4 + 32b(b^6 + a^2 b^4 - 6a^4 b^2 + 3a^6) \alpha^2 r^4 \gamma^2 - 64a^6 b \alpha^3 r^6 \\
& + (2a^2 b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) \gamma^5 - 4b(b^6 + 7a^2 b^4 + 7a^4 b^2 - 7a^6) \alpha r^2 \gamma^3 - 4b(8b^6 + 7a^2 b^4 - 18a^4 b^2 + 7a^6) \alpha^2 r^4 \gamma) g \right) \lambda_{5,5} \\
& + \left(\begin{aligned}
& a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4) \gamma^6 + 4a(8b^6 + 3a^2 b^4 - 26a^4 b^2 + 3a^6) \alpha r^2 \gamma^4 + 48a^5(5b^2 - a^2) \alpha^2 r^4 \gamma^2 + 64a^7 \alpha^3 r^6 \\
& + (a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2 b^2 + b^4) \gamma^5 - 2a(17b^6 - 9a^2 b^4 - 37a^4 b^2 + 5a^6) \alpha r^2 \gamma^3 + 2a(-3b^6 - 15a^2 b^4 - 45a^4 b^2 + 15a^6) r^4 \gamma) g \right) \lambda_{5,6}
\end{aligned} \right)
\end{aligned} \right)
\end{aligned}
\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned}
& a(2\alpha)^4 ((a^2 - b^2)\gamma^2 + 4\alpha b^2 r^2) \lambda_{1,0} + a(2\alpha)^4 (2ab\gamma^2 - 4ab\alpha r^2) \lambda_{1,1} + a(2\alpha)^4 ((b^2 - a^2)\gamma^2 + 4\alpha a^2 r^2) \lambda_{1,2} \\
& + a(2\alpha)^3 (-a(a^2 - 3b^2)\gamma^3 - 12ab^2\alpha r^2\gamma) \lambda_{2,0} + a(2\alpha)^3 (b(b^2 - 3a^2)\gamma^3 + 4b(2a^2 - b^2)\alpha r^2\gamma) \lambda_{2,1} + a(2\alpha)^3 (a(a^2 - 3b^2)\gamma^3 + 4a(2b^2 - a^2)\alpha r^2\gamma) \lambda_{2,2} + a(2\alpha)^3 (b(3a^2 - b^2)\gamma^3 - 12a^2 b\alpha r^2\gamma) \lambda_{2,3} \\
& + a(2\alpha)^2 ((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)\gamma^4 + 8b^2(3a^2 - b^2)\alpha r^2\gamma^2 + 16b^4\alpha^2 r^4) \lambda_{3,0} + 4b(2\alpha)^2 (a^2(a^2 - b^2)\gamma^4 - (b^4 - 5a^2b^2 + 2a^4)\alpha r^2\gamma^2 - 4a^2b^2\alpha^2 r^4) \lambda_{3,1} \\
& + a(2\alpha)^2 (- (b^4 - 6a^2b^2 + a^4)\gamma^4 + 4(b^4 - 6a^2b^2 + a^4)\alpha r^2\gamma^2 + 16a^2b^2\alpha^2 r^4) \lambda_{3,2} + 4(2\alpha)^2 (a^2b(b^2 - a^2)\gamma^4 + b(b^4 - 3a^2b^2 + 4a^4)\alpha r^2\gamma^2 - 4a^4b\alpha^2 r^4) \lambda_{3,3} \\
& + a(2\alpha)^2 ((b^4 - 6a^2b^2 + a^4)\gamma^4 + 8a^2(3b^2 - a^2)\alpha r^2\gamma^2 + 16a^4\alpha^2 r^4) \lambda_{3,4} \\
& + (2\alpha) (a^2(-5b^4 + 10a^2b^2 - a^4)\gamma^5 + 4b^2(a^2 - b^2)(b^2 - 9a^2)\alpha r^2\gamma^3 - 80a^2b^4\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{4,0} + (2\alpha) (-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)\gamma^5 - 4b(7b^4 + 2a^2b^2 - a^4)\alpha r^2\gamma^3 + 16b^3(4a^2 - b^2)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{4,1} \\
& + (2\alpha) (a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)\gamma^5 + 4(b^6 - 7a^2b^4 + 11a^4b^2 - a^6)\alpha r^2\gamma^3 + 16a^2b^2(2b^2 - 3a^2)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{4,2} + (2\alpha) (b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)\gamma^5 + 16b(2b^4 - a^4)\alpha r^2\gamma^3 + 16a^2b(2a^2 - 3b^2)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{4,3} \\
& + (2\alpha) (-a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)\gamma^5 - 4(b^6 - 4a^2b^4 + 13a^4b^2 - 2a^6)\alpha r^2\gamma^3 + 16a^4(4b^2 - a^2)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{4,4} + (2\alpha) (-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)\gamma^5 + 4b(a^2 - b^2)(7a^2 + 9b^2)\alpha r^2\gamma^3 - 80a^4b\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{4,5} \\
& + (a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)\gamma^6 - 4ab^2(5b^4 + 18a^2b^2 - 11a^4)\alpha r^2\gamma^4 + 48ab^4(5a^2 - b^2)\alpha^2 r^4\gamma^2 + 64ab^6\alpha^3 r^6) \lambda_{5,0} \\
& + (2a^2b(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2)\gamma^6 + 4b(b^6 - 4a^2b^4 + 17a^4b^2 - 2a^6)\alpha r^2\gamma^4 + 32a^2b^3(4b^2 - 5a^2)\alpha^2 r^4\gamma^2 - 64a^2b^5\alpha^3 r^6) \lambda_{5,1} \\
& + (a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)\gamma^6 + 4a(6b^6 + 13a^2b^4 - 16a^4b^2 + a^6)\alpha r^2\gamma^4 + 16ab^2(b^4 - 11a^2b^2 + 6a^4)\alpha^2 r^4\gamma^2 + 64a^3b^4\alpha^3 r^6) \lambda_{5,2} \\
& + (2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)\gamma^6 - 4b(b^6 + 17a^4b^2 - 6a^6)\alpha r^2\gamma^4 + 16b(2a^2 - b^2)(b^4 + 6a^2b^2 - a^4)\alpha^2 r^4\gamma^2 - 64a^4b^3\alpha^3 r^6) \lambda_{5,3} \\
& + (a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)\gamma^6 - 4a(7b^6 + 8a^2b^4 - 21a^4b^2 + 2a^6)\alpha r^2\gamma^4 + 16a^3(6b^4 - 11a^2b^2 + a^4)\alpha^2 r^4\gamma^2 + 64a^5b^2\alpha^3 r^6) \lambda_{5,4} \\
& + (2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)\gamma^6 + 4b(b^6 + 4a^2b^4 + 17a^4b^2 - 10a^6)\alpha r^2\gamma^4 + 32b(b^6 + a^2b^4 - 6a^4b^2 + 3a^6)\alpha^2 r^4\gamma^2 - 64a^6b\alpha^3 r^6) \lambda_{5,5} \\
& + (a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)\gamma^6 + 4a(8b^6 + 3a^2b^4 - 26a^4b^2 + 3a^6)\alpha r^2\gamma^4 + 48a^5(5b^2 - a^2)\alpha^2 r^4\gamma^2 + 64a^7\alpha^3 r^6) \lambda_{5,6}
\end{aligned} \right) \\
& + \left(\begin{aligned}
& a(2\alpha)^4 (- (a^2 - b^2)\gamma) \lambda_{1,0} + a(2\alpha)^4 (-2ab\gamma) \lambda_{1,1} + a(2\alpha)^4 (- (b^2 - a^2)\gamma) \lambda_{1,2} \\
& + a(2\alpha)^3 (a(a^2 - 3b^2)\gamma^2 + 2a(2b^2 + \alpha)\alpha r^2) \lambda_{2,0} + a(2\alpha)^3 (-b(b^2 - 3a^2)\gamma^2 + 2b(b^2 - a^2)\alpha r^2) \lambda_{2,1} + a(2\alpha)^3 (-a(a^2 - 3b^2)\gamma^2 + 2a(a^2 - b^2)\alpha r^2) \lambda_{2,2} \\
& + a(2\alpha)^3 (-b(3a^2 - b^2)\gamma^2 + 2b(3a^2 + b^2)\alpha r^2) \lambda_{2,3} \\
& + a(2\alpha)^2 (- (b^4 - 6a^2b^2 + a^4)\gamma^3 + 2(3b^4 - 6a^2b^2 - a^4)\alpha r^2\gamma) \lambda_{3,0} + 4b(2\alpha)^2 (-a^2(a^2 - b^2)\gamma^3 + b^2(b^2 - 3a^2)\alpha r^2\gamma) \lambda_{3,1} \\
& + a(2\alpha)^2 ((b^4 - 6a^2b^2 + a^4)\gamma^3 - 2(b^4 - 6a^2b^2 + a^4)\alpha r^2\gamma) \lambda_{3,2} + 4(2\alpha)^2 (-a^2b(b^2 - a^2)\gamma^3 - b(b^4 - a^2b^2 + 2a^4)\alpha r^2\gamma) \lambda_{3,3} \\
& + a(2\alpha)^2 (- (b^4 - 6a^2b^2 + a^4)\gamma^3 + 2(-b^4 - 6a^2b^2 + 3a^4)\alpha r^2\gamma) \lambda_{3,4} \\
& + (2\alpha) (a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)\gamma^4 + 2(2b^6 - 15a^2b^4 + 8a^4b^2 + a^6)\alpha r^2\gamma^2 + 2a^2(15b^4 + 10a^2b^2 + 3a^4)\alpha^2 r^4) \lambda_{4,0} \\
& + (2\alpha) (b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)\gamma^4 + 2b(15b^4 - 6a^2b^2 + 3a^4)\alpha r^2\gamma^2 + 2b(3b^4 - 6a^2b^2 - a^4)\alpha^2 r^4) \lambda_{4,1} \\
& + (2\alpha) (-a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)\gamma^4 + (-4b^6 + 18a^2b^4 - 24a^4b^2 + 2a^6)\alpha r^2\gamma^2 + 2a^2(-3b^4 + 6a^2b^2 + a^4)\alpha^2 r^4) \lambda_{4,2} \\
& + (2\alpha) (-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)\gamma^4 - 2b(17b^4 - 10a^2b^2 - 3a^4)\alpha r^2\gamma^2 + 2b(b^4 + 6a^2b^2 - 3a^4)\alpha^2 r^4) \lambda_{4,3} \\
& + (2\alpha) (a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)\gamma^4 + (4b^6 - 6a^2b^4 + 32a^4b^2 - 6a^6)\alpha r^2\gamma^2 - 2a^2(b^4 + 6a^2b^2 - 3a^4)\alpha^2 r^4) \lambda_{4,4} \\
& + (2\alpha) (b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)\gamma^4 + 2b(19b^4 - 14a^2b^2 - 9a^4)\alpha r^2\gamma^2 + 2b(3b^4 + 10a^2b^2 + 15a^4)\alpha^2 r^4) \lambda_{4,5} \\
& + (a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)\gamma^5 + 2a(11b^6 + 21a^2b^4 - 7a^4b^2 - a^6)\alpha r^2\gamma^3 + 2a(15b^6 - 45a^2b^4 - 15a^4b^2 - 3a^6)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{5,0} \\
& + (2a^2b(b^2 - 3a^2)(a^2 - 3b^2)\gamma^5 - 4b(b^6 - a^2b^4 + 7a^4b^2 + a^6)\alpha r^2\gamma^3 + 4a^2b(-15b^4 + 10a^2b^2 + a^4)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{5,1} \\
& + (a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)\gamma^5 - 2a(13b^6 + 11a^2b^4 - 17a^4b^2 + a^6)\alpha r^2\gamma^3 - 2a(3b^6 - 33a^2b^4 + 13a^4b^2 + a^6)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{5,2} \\
& + (2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)\gamma^5 + 2b(2b^6 + 6a^2b^4 + 14a^4b^2 - 6a^6)\alpha r^2\gamma^3 + 2b(8b^6 + 14a^2b^4 - 44a^4b^2 - 2a^6)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{5,3} \\
& + (a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)\gamma^5 + 2a(15b^6 + a^2b^4 - 27a^4b^2 + 3a^6)\alpha r^2\gamma^3 - 2a(b^6 + 13a^2b^4 - 33a^4b^2 + 3a^6)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{5,4} \\
& + (2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)\gamma^5 - 4b(b^6 + 7a^2b^4 + 7a^4b^2 - 7a^6)\alpha r^2\gamma^3 - 4b(8b^6 + 7a^2b^4 - 18a^4b^2 + 7a^6)\alpha^2 r^4\gamma) \lambda_{5,5} \\
& + (a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)\gamma^5 - 2a(17b^6 - 9a^2b^4 - 37a^4b^2 + 5a^6)\alpha r^2\gamma^3 + 2a(-3b^6 - 15a^2b^4 - 45a^4b^2 + 15a^6)r^4\gamma) \lambda_{5,6}
\end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$f^0(r) = \frac{A_n + B_n g}{2^{n+1} a(a^2 + b^2)^{n+1} r g},$$

where

$$\begin{aligned} A_n &= a_{2n+2}r^{2n+2} + \dots + a_2r^2 + (1-\alpha)b_0, \\ B_n &= -a_{2n+2}r^{2n} - ((\alpha+1)a_{2n+2} + a_{2n})r^{2n-2} + b_{2n-4}r^{2n-4} \dots + b_2r^2 + b_0, \end{aligned}$$

if $\alpha > 1$ or $r > r_2 = 1 + \sqrt{\alpha}$

$$\begin{aligned} A_n &= a_{2n+2}r^{2n+2} + \dots + a_2r^2 + (\alpha-1)b_0, \\ B_n &= a_{2n+2}r^{2n} + ((\alpha+1)a_{2n+2} + a_{2n})r^{2n-2} + b_{2n-4}r^{2n-4} \dots + b_2r^2 + b_0, \end{aligned}$$

if $\alpha < 1$ and $r < r_1 = 1 - \sqrt{\alpha}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \left(\begin{array}{l} a(2\alpha)^4 \left((a^2 - b^2)(\alpha - 1)^2 \right) \lambda_{1,0} + \left(a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^6 \right) \lambda_{5,0} + \left(a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(\alpha - 1)^6 \right) \lambda_{5,6} + \left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)(\alpha - 1)^6 \right) \lambda_{5,5} \\ + \left(a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(\alpha - 1)^6 \right) \lambda_{5,4} + \left(2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)(\alpha - 1)^6 \right) \lambda_{5,3} + \left(a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^6 \right) \lambda_{5,2} + \left(2a^2b(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2)(\alpha - 1)^6 \right) \lambda_{5,1} \\ + a(2\alpha)^4 \left(2ab(\alpha - 1)^2 \right) \lambda_{1,1} + a(2\alpha)^4 \left((b^2 - a^2)(\alpha - 1)^2 \right) \lambda_{1,2} + a(2\alpha)^3 \left(-a(a^2 - 3b^2)(\alpha - 1)^3 \right) \lambda_{2,0} + a(2\alpha)^3 \left(b(b^2 - 3a^2)(\alpha - 1)^3 \right) \lambda_{2,1} + a(2\alpha)^3 \left(a(a^2 - 3b^2)(\alpha - 1)^3 \right) \lambda_{2,2} \\ + a(2\alpha)^3 \left(b(3a^2 - b^2)(\alpha - 1)^3 \right) \lambda_{2,3} + a(2\alpha)^2 \left((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)(\alpha - 1)^4 \right) \lambda_{3,0} + 4b(2\alpha)^2 \left(a^2(a^2 - b^2)(\alpha - 1)^4 \right) \lambda_{3,1} + a(2\alpha)^2 \left(-(b^4 - 6a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \lambda_{3,2} \\ + 4(2\alpha)^2 \left(a^2b(b^2 - a^2)(\alpha - 1)^4 \right) \lambda_{3,3} + a(2\alpha)^2 \left((b^4 - 6a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \lambda_{3,4} + (2\alpha) \left(a^2(-5b^4 + 10a^2b^2 - a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \lambda_{4,0} + (2a\alpha) \left(-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \lambda_{4,1} \\ + (2\alpha) \left(a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \lambda_{4,2} + (2a\alpha) \left(b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \lambda_{4,3} + (2\alpha) \left(-a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \lambda_{4,4} + (2a\alpha) \left(-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \lambda_{4,5} \end{array} \right) \\ a_{10} = \left(\begin{array}{l} (2\alpha) \left(a^2(-5b^4 + 10a^2b^2 - a^4) \right) \lambda_{4,0} + \left(a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(6(\alpha - 1)) \right) \lambda_{5,6} + \left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)(6(\alpha - 1)) \right) \lambda_{5,5} + \left(a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(6(\alpha - 1)) \right) \lambda_{5,4} \\ + \left(2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)(6(\alpha - 1)) \right) \lambda_{5,3} + \left(a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(6(\alpha - 1)) \right) \lambda_{5,2} + \left(2a^2b(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2)(6(\alpha - 1)) \right) \lambda_{5,1} + \left(a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(6(\alpha - 1)) \right) \lambda_{5,0} \\ + \left(4b(b^6 - 4a^2b^4 + 17a^4b^2 - 2a^6) \right) \alpha \lambda_{5,1} + \left(-4ab^2(5b^4 + 18a^2b^2 - 11a^4) \right) \alpha \lambda_{5,0} + \left(-4b(b^6 + 17a^4b^2 - 6a^6) \right) \alpha \lambda_{5,3} + \left(4a(6b^6 + 13a^2b^4 - 16a^4b^2 + a^6) \right) \alpha \lambda_{5,2} \\ + \left(-4a(7b^6 + 8a^2b^4 - 21a^4b^2 + 2a^6) \right) \alpha \lambda_{5,4} + \left(+4b(b^6 + 4a^2b^4 + 17a^4b^2 - 10a^6) \right) \alpha \lambda_{5,5} + \left(4a(8b^6 + 3a^2b^4 - 26a^4b^2 + 3a^6) \right) \alpha \lambda_{5,6} + (2a\alpha) \left(-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4) \right) \lambda_{4,5} \\ + (2\alpha) \left(-a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4) \right) \lambda_{4,4} + (2a\alpha) \left(b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4) \right) \lambda_{4,3} + (2\alpha) \left(a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4) \right) \lambda_{4,2} + (2a\alpha) \left(-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4) \right) \lambda_{4,1} \\ a_{12} = \left(\begin{array}{l} \left(a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4) \right) \lambda_{5,0} + \left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2) \right) \lambda_{5,5} + \left(a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4) \right) \lambda_{5,6} + \left(2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) \right) \lambda_{5,3} + \left(a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4) \right) \lambda_{5,4} \\ + \left(2a^2b(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2) \right) \lambda_{5,1} + \left(a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4) \right) \lambda_{5,2} \end{array} \right) \\ b_0 = \left(\begin{array}{l} a(2\alpha)^4 \left(-(a^2 - b^2)(\alpha - 1) \right) \lambda_{1,0} + \left(\left(a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(\alpha - 1)^5 \right) \right) \lambda_{5,6} + \left(\left(2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)(\alpha - 1)^5 \right) \right) \lambda_{5,5} + \left(\left(a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(\alpha - 1)^5 \right) \right) \lambda_{5,4} \\ + \left(\left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)(\alpha - 1)^5 \right) \right) \lambda_{5,3} + \left(\left(a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \right) \lambda_{5,2} + \left(\left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(a^2 - 3b^2)(\alpha - 1)^5 \right) \right) \lambda_{5,1} \\ + \left(\left(a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^5 \right) \right) \lambda_{5,0} + (2a\alpha) \left(\left(b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \right) \lambda_{4,5} + (2\alpha) \left(\left(a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \right) \lambda_{4,4} \\ + (2a\alpha) \left(\left(-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \right) \lambda_{4,3} + (2\alpha) \left(\left(-a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \right) \lambda_{4,2} + (2a\alpha) \left(\left(b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \right) \lambda_{4,1} \\ + (2\alpha) \left(\left(a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^4 \right) \right) \lambda_{4,0} + a(2\alpha)^2 \left(\left(-(b^4 - 6a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^3 \right) \right) \lambda_{3,4} + 4(2\alpha)^2 \left(\left(-a^2b(b^2 - a^2)(\alpha - 1)^3 \right) \right) \lambda_{3,3} + a(2\alpha)^2 \left(\left((b^4 - 6a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^3 \right) \right) \lambda_{3,2} \\ + 4b(2\alpha)^2 \left(\left(-a^2(a^2 - b^2)(\alpha - 1)^3 \right) \right) \lambda_{3,1} + a(2\alpha)^2 \left(\left(-(b^4 - 6a^2b^2 + a^4)(\alpha - 1)^3 \right) \right) \lambda_{3,0} + a(2\alpha)^3 \left(\left(-b(3a^2 - b^2)(\alpha - 1)^2 \right) \right) \lambda_{2,3} + a(2\alpha)^3 \left(\left(-a(a^2 - 3b^2)(\alpha - 1)^2 \right) \right) \lambda_{2,2} \\ + a(2\alpha)^3 \left(\left(-b(b^2 - 3a^2)(\alpha - 1)^2 \right) \right) \lambda_{2,1} + a(2\alpha)^3 \left(\left(a(a^2 - 3b^2)(\alpha - 1)^2 \right) \right) \lambda_{2,0} + a(2\alpha)^4 \left(-2ab(\alpha - 1) \right) \lambda_{1,1} + a(2\alpha)^4 \left(-(b^2 - a^2)(\alpha - 1) \right) \lambda_{1,2} \\ b_8 = \left(\begin{array}{l} (2\alpha) \left(\left(a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4) \right) \right) \lambda_{4,0} + \left(\left(a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(5(\alpha - 1)) - 2a(17b^6 - 9a^2b^4 - 37a^4b^2 + 5a^6) \right) \right) \alpha \lambda_{5,6} \\ + \left(\left(2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)(5(\alpha - 1)) - 4b(b^6 + 7a^2b^4 + 7a^4b^2 - 7a^6) \right) \right) \alpha \lambda_{5,5} + \left(\left(a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4)(5(\alpha - 1)) + 2a(15b^6 + a^2b^4 - 27a^4b^2 + 3a^6) \right) \right) \alpha \lambda_{5,4} \\ + \left(\left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2)(5(\alpha - 1)) + 2b(2b^6 + 6a^2b^4 + 14a^4b^2 - 6a^6) \right) \right) \alpha \lambda_{5,3} + \left(\left(a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(5(\alpha - 1)) - 2a(13b^6 + 11a^2b^4 - 17a^4b^2 + a^6) \right) \right) \alpha \lambda_{5,2} \\ + \left(\left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(a^2 - 3b^2)(5(\alpha - 1)) - 4b(b^6 - a^2b^4 + 7a^4b^2 + a^6) \right) \right) \alpha \lambda_{5,1} + \left(\left(a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4)(5(\alpha - 1)) + 2a(11b^6 + 21a^2b^4 - 7a^4b^2 - a^6) \right) \right) \alpha \lambda_{5,0} \\ + (2a\alpha) \left(\left(b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4) \right) \right) \lambda_{4,1} + (2\alpha) \left(\left(-a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4) \right) \right) \lambda_{4,2} + (2a\alpha) \left(\left(-b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4) \right) \right) \lambda_{4,3} + (2\alpha) \left(\left(a^2(5b^4 - 10a^2b^2 + a^4) \right) \right) \lambda_{4,4} + (2a\alpha) \left(\left(b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4) \right) \right) \lambda_{4,5} \\ b_{10} = \left(\begin{array}{l} \left(\left(a(b^2 - a^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4) \right) \right) \lambda_{5,0} + \left(\left(a(a^2 - b^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4) \right) \right) \lambda_{5,6} + \left(\left(2a^2b(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) \right) \right) \lambda_{5,5} + \left(\left(a(b^2 - a^2)(a^4 - 14a^2b^2 + b^4) \right) \right) \lambda_{5,4} + \left(\left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(3b^2 - a^2) \right) \right) \lambda_{5,3} \\ + \left(\left(a(a^2 - b^2)(b^4 - 14a^2b^2 + a^4) \right) \right) \lambda_{5,2} + \left(\left(2a^2b(b^2 - 3a^2)(a^2 - 3b^2) \right) \right) \lambda_{5,1} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a_0 - (1 - \alpha) b_0 = 0 \\ b_{10} + a_{12} = 0 \\ b_{10} + ((\alpha + 1) a_{12} + a_{10}) = 0 \end{cases}$$

Remark. For obtaining the case $n = 4$, we must put equal to zero the coefficients of $\lambda_{5,0}, \lambda_{5,1}, \dots, \lambda_{5,6}$ in the expression of $f^0(r)$. For obtaining the case $n = 3$, we must put equal to zero the coefficients of $\lambda_{4,0}, \lambda_{4,1}, \dots, \lambda_{4,5}$...

Appendice

Bibliographie

- [1] **Y. Bouattia and A. Makhoulf**, Limit cycles of generalized Liénard systems. AIP Conference Proceedings, Volume 1124, pp. 60-70 (2009).
- [2] **Y. Bouattia and A. Makhoulf**, Limit cycles of quartic and quintic polynomial differential systems via the averaging theory, Annals of Differential Equations.
- [3] **A. Buica, J. Llibre**, Limit cycles of a perturbed cubic polynomial differential center. Chaos, Solitons and Fractals 32 (2007) 1059–1069.
- [4] **B. Coll, A. Gasull, R. Prohens**. Bifurcation of limit cycles from two families of centers. Dyn Contin Discrete Impuls Syst 2005 ;12 :275–88.
- [5] **H. Giacomini, J. Llibre, M. Viano**, On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, Nonlinearity 9 (1996) 501–516.
- [6] **Giacomini, H. & Neukirch, S.** [1997], Number of limit cycles of the Liénard equation, Phys. Rev. E 56, 3809.
- [7] **J. Giné, J. Llibre**, Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory, Nonlinear Analysis 66 (2007) 1707–1721.
- [8] **A. Lins, W. de Melo and C. Pugh**, "On Liénard's equation", Lecture Notes in Mathematics, 597, Springer-Verlag (1977), 335-357.
- [9] **J. Llibre, J.S. Pérezdel Río, J.A. Rodríguez**, Averaging analysis of a perturbed quadratic center, Nonlinear Anal. 46 (2001) 45–51.

- [10] **J. Llibre and X. Zhang**, The number of limit cycles of some perturbed Hamiltonian polynomial systems, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* 8, 161-181 (2001).
- [11] **Lloyd, N.G. [1987]**, Liénard systems with several limit cycles, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 102, 565.
- [12] **J.L. Lopez and R. Lopez-Ruiz**, Number and amplitude of limit cycles emerging from topologically equivalent perturbed centers. 'Chaos, Solitons and Fractals 17, 135-143 (2003)'.
- [13] **J.L. Lopez and R. Lopez-Ruiz**, The limit cycles of Liénard equations in the strongly nonlinear regime, *Chaos, Solitons & Fractals* 11, 747-756 (2000).
- [14] **R. Lopez-Ruiz and J.L. Lopez**, Bifurcation curves of limit cycles in some Liénard systems, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* 10, 971-980 (2000).
- [15] **A. Makhlouf and Y. Bouattia**. Limit cycles of Liénard systems. Proceeding of the conference on differential & difference equations and applications pp 743-755. Hindaoui Publishing Corporation.
- [16] **A. Makhlouf and Y. Bouattia**. Limit cycles of Liénard system in the weak and strong regimes. Proceeding of neural. Parallel and scientific computations 3[2006] 157-161. Dynamic publishers.Inc.
- [17] **R.E. Mickens**, A combined equivalent linearization and averaging perturbation method for nonlinear oscillator equation. *Journal of Sound and Vibration* 264 (2003) 1195-1200.
- [18] **L Perko** : "Differential equations and dynamical systems", Texts in Applied Mathematics, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, (2001).
- [19] **Rychkov, G.S.** [1975], The maximum number of limit cycles of the system $\dot{y} = x$, $\dot{x} = y - \sum_{i=0}^2 a_i x^{2i+1}$ is two, *Differential Equations* 11, 301.
- [20] **J.A. Sanders, F. Verhulst**, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, in : *Applied Mathematical Sci.*, vol. 59, Springer-Verlag, New York, 1985.

- [21] **Sébastien. Neukirch**, Thèse de doctorat de l'université Paris 6, Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard, nombre, forme et localisation. Soutenue le 06 Novembre 1998.
- [22] **F. Verhulst**, Nonlinear differential equations and dynamical systems, Universitext. Springer- Verlag, Berlin 1990.
- [23] **YE. YAN. QIAN** : Theory of limit cycles. American mathematical society. 1986 p 149-150.