

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

**Etude des Comportements Complexes de Systèmes Modélisés
par des Endomorphismes Bidimensionnels**

Option : Systèmes Dynamiques

Par
Ferchichi Mohamed Réda

Devant le jury

| | | | |
|------------------------|-----------------------------|-------|-----------------|
| PRESIDENT : | F. Rebbani | Prof. | U.B.M. ANNABA |
| RAPPORTEUR : | I. Djellit | Prof. | U.B.M. ANNABA |
| CO-RAPPORTEUR : | D. Fournier-Prunaret | Prof. | INSA – TOULOUSE |
| EXAMINATEUR : | N. Hamri | Prof. | U. CONSTANTINE |
| EXAMINATEUR : | A. Moumeni | M.C. | U.B.M. ANNABA |
| EXAMINATEUR : | A. Taha | Prof. | INSA – TOULOUSE |

Année : 2006

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à:

Madame Ilhem Djellit, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour avoir dirigé ce travail de thèse, pour ses conseils et son encouragement.

Madame Danièle Fournier-Prunaret, Professeur à l'INSA de Toulouse, pour avoir inspiré le sujet de cette thèse et codirigé ce travail, pour l'accueil qu'elle m'a réservé durant mon stage au laboratoire LESIA, pour sa disponibilité et sa compréhension.

Mademoiselle Fouzia Rebbani, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à ce travail et pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Monsieur Nasreddine Hamri, Professeur à l'université de Constantine, pour avoir lu et fait un rapport sur ma thèse, et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Monsieur Abdelkader Moumeni, Maître de Conférences à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour ses encouragements, pour avoir lu et fait un rapport sur ma thèse, et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Monsieur Abdel-Kaddous Taha, Professeur à l'INSA de Toulouse, pour m'avoir aidé scientifiquement durant mon stage au laboratoire LESIA, pour avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie de mon jury de soutenance.

«Etude des Comportements Complexes de Systèmes Modélisés
par des Endomorphismes Bidimensionnels»

Résumé: Dans cette thèse, on se propose d'étudier des systèmes dynamiques chaotiques modélisés par des endomorphismes bidimensionnels. Dans ce cas, la notion de lignes critiques est un outil mathématique, qui intervient souvent dans l'étude des propriétés et bifurcations de bassins d'attraction d'ensembles attractants et d'attracteurs. Ces bifurcations seront étudiées, pour le cas d'un endomorphisme de type $Z_0 - Z_2$ et d'un autre de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$. Ce sont des cas basiques pour d'autres types d'endomorphismes plus compliqués.

On s'intéressera aussi, aux bifurcations de contact entre la frontière d'un attracteur et la frontière de son bassin d'attraction. On montrera qu'il existe généralement un lien, entre cette bifurcation de contact et la bifurcation homocline d'un point col (ou d'un cycle col) se trouvant sur la frontière du bassin d'attraction.

Le dernier chapitre sera consacré à l'étude des systèmes dynamiques définis par des applications avec dénominateur, et à la notion de points focaux et de courbes préfocales associés à ce type d'applications. On prouvera qu'il existe un lien, entre bifurcation de bassin d'attraction "connexe \leftrightarrow non connexe" d'un attracteur d'une application T et position du point focal de T^{-1} par rapport au bassin.

«Study of Complex Behaviors of Two-Dimensional
Endomorphisms»

Abstract: In this thesis, we study chaotic dynamical systems represented by two-dimensional endomorphisms. In this case, the concept of critical lines is a mathematical tool, that often intervenes in the study of properties and bifurcations of attraction basins of attracting sets and attractors. These bifurcations will be studied, for the case of an endomorphism of type $Z_0 - Z_2$ and another of type $Z_1 - Z_3 - Z_1$. They are basic cases for other types of endomorphisms more complicated.

We also consider the contact bifurcations between the boundary of an attractor and the boundary of its basin of attraction. We show that it generally exists a link, between this contact bifurcation and homoclinic bifurcation of a saddle (or of a cycle of saddles) belonging to the boundary of the basin of attraction.

The last chapter will be consecrated at the study of dynamical systems defined by maps with denominator, and at the concept of focal points and préfocal curves associated with this type of maps. We prove that it exists a link, between bifurcation of a "connected \leftrightarrow nonconnected" attraction basins of an attractor for a map T and the position of the focal point of T^{-1} according to the basin.

TABLE DES MATIERES

| | |
|--|----|
| Introduction | 4 |
| 1 - Notions Générales sur les Systèmes Dynamiques | |
| 1.1 Définitions de Base | 7 |
| 1.2 Attracteurs et Attracteurs Chaotiques | 8 |
| 1.3 Difféomorphismes et Applications de Hénon Généralisées | 9 |
| 1.4 Systèmes Dynamiques Discrets, Singularités et Bifurcations | 11 |
| 2 - Bifurcations de Bassins d'Attraction dans le Cas des Endomor- phismes Bidimensionnels | |
| 2.1 Définitions et Propriétés Générales | 17 |
| 2.2 Endomorphismes de Type $(Z_0 - Z_2)$ | 19 |
| 2.3 Exemple d'une Bifurcation de Bassin d'Attraction avec Agrégation d'Îlots | 23 |
| 3 - Bifurcations Homoclines dans les Endomorphismes Bidimension- nels | |
| 3.1 Définitions et Propriétés Fondamentales | 30 |
| 3.2 Bifurcations Homoclines | 32 |
| 3.3 Propriétés de $W^S(S)$, de $W^U(S)$ et d'une CFI | 34 |
| 3.4 Etude d'un Endomorphisme de Type $Z_1 - Z_3 - Z_1$ | 35 |
| 4 - Systèmes Dynamiques Définis par des Applications avec Dénom- inateur | |
| 4.1 Définitions et Propriétés Générales des Points Focaux et des Courbes Préfocales | 51 |
| 4.2 Propriétés Géométriques des Points Focaux et des Courbes Préfocales | 52 |
| 4.3 Bifurcations de Bassins d'Attraction | 55 |
| 4.4 Applications avec Inverses Fractionnels Rationnels | 58 |
| 4.4.1 Application de Bogdanov (premier exemple) | 58 |
| 4.4.2 Deuxième exemple | 65 |
| 4.4.3 Troisième exemple | 68 |
| Conclusion | 71 |
| Bibliographie | 72 |

Introduction

Pour comprendre le comportement des systèmes dynamiques chaotiques, il faut d'abord étudier les systèmes mathématiques qui les modélisent. Contrairement à ce qu'on pensait pendant longtemps, ces modèles peuvent être très simples. Par exemple, il existe des systèmes dynamiques, modélisés par des itérations (ou transformations ponctuelles) unidimensionnelles, qui sont chaotiques. Autrement dit, les trajectoires de ces systèmes ne convergent ni vers un point fixe ni vers un cycle, mais convergent par exemple vers un ensemble de Cantor. Dans ce cas, deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène *sensibilité aux conditions initiales*, et il caractérise le chaos.

A partir des années quatre vingt dix, les systèmes dynamiques modélisés par des transformations ponctuelles non inversibles, ou *endomorphismes*, sont devenus un sujet de recherche important pour leurs propriétés spécifiques, par rapport aux transformations inversibles. En effet, les transformations non inversibles interviennent, en tant que modèles de systèmes dynamiques, dans plusieurs domaines d'applications, comme l'économie, la biologie, les systèmes non linéaires en électronique, la théorie du signal,

Les transformations non inversibles se différencient des transformations inversibles, dans le cas bidimensionnel, par le fait qu'il existe des régions notées Z_i dans le plan de phase pour lesquelles, un point peut posséder zéro un ou plusieurs antécédents de premier rang. Ce nombre d'antécédents est constant pour une région déterminée et égal à i . Ces différentes régions sont séparées par des singularités appelées *Lignes critiques LC*. Cette notion centrale, dans l'étude des endomorphismes définissant des systèmes dynamiques, a été introduite pour la première fois par Mira [Mir1]. C'est une généralisation de la notion de points critiques (extremums locaux) dans le cas unidimensionnel. L'équivalent des lignes critiques en dimension supérieure à deux, sont les surfaces ou hypersurfaces critiques.

On peut considérer le plan de phase, comme étant feuilleté, où chaque feuillet est associé à une détermination inverse de la transformation non inversible. Les lignes critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent.

Parmi les bifurcations où les lignes critiques interviennent, on citera les travaux de Mira, Roubellat et Gumowski [MRo], [GM] pour les bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe"; Barugola, Cathala et Mira [BCM], [Cat] pour les bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe"; ainsi que les travaux de Mira et Fournier-Prunaret [MFP] pour l'étude de la fractalisation des bassins d'attraction. Dans le cas unidimensionnel, on citera les travaux de Fournier-Prunaret [Fou] pour le rôle des points critiques dans les bifurcations du type boîtes emboîtées et boîtes en

files. On citera les travaux Frouzakis, Gardini, Kevrekidis, Millerioux et Mira [FGKMM], pour le rôle des lignes critiques dans les bifurcations d'ensembles invariants, tels les courbes fermées invariantes, les variétés stables et instables.

Cette thèse sera divisée en quatre chapitres:

Dans le premier chapitre, on rappellera les principales définitions et propriétés générales spécifiques aux systèmes dynamiques continus et discrets. On rappellera aussi les résultats de Friedland et Milnor [FM], sur les difféomorphismes polynômiaux du plan avec Jacobien constant, ceci comme applications modélisant des systèmes dynamiques. En effet, ils ont montré que ces applications étaient conjuguées à des compositions d'applications de Hénon généralisées. Une application de Hénon généralisée est définie sur plan par:

$$h(x, y) = (y + p(x), -bx)$$

où $p(x)$ est un polynôme et $b \neq 0$.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera les propriétés liées aux bifurcations de bassins d'attraction pour des endomorphismes bidimensionnels. On rappellera les deux propositions fondamentales sur les bifurcations de bassins de types "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe" et "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe", ainsi que les mécanismes qui transforment une frontière régulière de bassin en une frontière fractale; c'est le "phénomène de fractalisation". Ces bifurcations seront étudiées pour le cas d'un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$, qui est un cas basique pour d'autres types d'endomorphismes plus compliqués.

Dans le troisième chapitre, on montrera qu'il existe un lien entre les bifurcations de contact d'une aire (ou d'un attracteur) chaotique et les bifurcations homoclines d'un point col (ou d'un cycle col) se trouvant sur la frontière du bassin d'attraction de l'aire chaotique. L'étude sera faite, pour un endomorphisme bidimensionnel de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$. On montrera que les points de contact entre la frontière de l'attracteur et celle de son bassin d'attraction (bifurcation de contact), à la valeur de bifurcation, convergent vers le point col ou le cycle col. Ces points de contact sont aussi des points d'intersections entre les ensembles stable et instable du point col; autrement dit, des points homoclines (bifurcation homocline).

Le quatrième chapitre, sera consacré à l'étude des systèmes dynamiques définis par des applications avec dénominateur. On rappellera les notions de *points focaux* et de *courbes préfocales* définies pour ce type d'applications. L'originalité dans cette thèse se trouvera principalement dans ce chapitre. En effet, on démontrera deux propositions. La première proposition permet de localiser géométriquement le point focal dans le plan de phase. La seconde proposition fait le lien, entre bifurcation de bassin "connexe \leftrightarrow non connexe" d'un attracteur d'une application T et point focal de T^{-1} se situant à "l'intérieur \leftrightarrow l'extérieur" de ce bassin. On terminera ce chapitre en faisant l'étude de l'application de Bogdanov, comme application ayant un inverse fractionnel rationnel.

Chapitre 1

Notions Générales sur les Systèmes Dynamiques

Ce chapitre est un rappel des principales définitions et propriétés générales spécifiques aux systèmes dynamiques, et de certaines notions particulières que l'on utilisera dans les chapitres suivants.

1.1 Définitions de Base

Définition 1.1.1: On appelle système dynamique, un triplet (X, \mathbb{T}, f) où X est une variété topologique, \mathbb{T} est l'ensemble \mathbb{R} , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , et f est une application continue de $\mathbb{T} \times X$ dans X , vérifiant:

$$f(0, x) = x \quad \text{et} \quad f(t_2, f(t_1, x)) = f(t_1 + t_2, x).$$

X , \mathbb{T} et f sont appelés respectivement espace des phases (ou espace d'état), espace temps et flot.

Dans toute la suite on supposera que X est un sous ensemble compact de \mathbb{R}^n , ou \mathbb{R}^n lui même.

Définition 1.1.2: On appelle trajectoire ou orbite d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble des points $\{f(t, x) \mid t \in \mathbb{T}\}$. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ la trajectoire correspond à un système dynamique dit continu; si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} la trajectoire correspond à un système dynamique dit discret.

Définition 1.1.3: 1- On appelle *ensemble limite positif* d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble

$$\omega(x) = \{y \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \exists t \geq t_0 : d(y, f(t, x)) < \varepsilon\}$$

où d est une distance sur X .

2- On appelle x point *récurrent*, si $x \in \omega(x)$. Un point *transitoire* est un point qui n'est pas récurrent.

3- On appelle bassin d'attraction d'un ensemble $A \subset X$, l'ensemble

$$B(A) = \{x \in X : \omega(x) \subset A\}$$

Définition 1.1.4: Deux applications $f, g : X \rightarrow X$ de classe C^r sont dites C^k -conjuguées ($k \leq r$), s'il existe un C^k -difféomorphisme $h : X \rightarrow X$, tel que

$$h \circ f = g \circ h.$$

f et g sont dites *topologiquement conjuguées*, si elles sont C^0 -conjuguées.

Des applications topologiquement conjuguées sont complètement équivalentes par rapport à leurs dynamiques.

1.2 Attracteurs et Attracteurs Chaotiques

Attracteur

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités (états stationnaires) plus générales que les points fixes et les cycles limites; ce sont les *attracteurs*. Plusieurs définitions ont été proposées pour ce type de singularités [Wil] [Rue] [GH]. Dans ce mémoire, on se suffira de la définition donnée par Milnor [Mil] et celle donnée dans la référence [MGBC].

Définition1.2.1: Soit (X, \mathbb{T}, f) un système dynamique et soit μ la mesure de Lebesgue dans X . Un sous ensemble fermé A de X est dit *attracteur au sens de Milnor*, si

$$(i) \quad \mu(B(A)) > 0$$

où $B(A)$ est le bassin d'attraction de A .

$$(ii) \quad \text{Pour tout sous ensemble fermé } A' \text{ strictement inclus dans } A, \text{ on a: } \\ \mu(B(A) \setminus B(A')) > 0.$$

Remarque: Lorsque le sous ensemble fermé A vérifie uniquement la condition (i), A est appelé *attracteur faible*.

De la définition précédente, il résulte que l'union finie d'attracteurs est encore un attracteur, et que la fermeture d'une union infinie d'attracteurs est un attracteur. Pour rapprocher la définition de l'idée intuitive de minimalité d'un attracteur, Milnor utilise la notion suivante:

Définition1.2.2: A est un *attracteur minimal au sens de Milnor*, si A est un attracteur au sens de Milnor et s'il ne contient aucun sous-ensemble strict fermé A' , tel que $\mu(B(A'))$ soit strictement positive.

Définition1.2.3: Soit (X, \mathbb{N}, f) un système dynamique discret. Un sous ensemble fermé invariant A de X est dit *attracteur*, si

$$(i) \quad \text{il existe un voisinage } U \text{ de } A, \text{ tel que } f_{/X}(U) \subset U$$

$$(ii) \quad \forall x \in U, f(n, x) \rightarrow A \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

(iii) Pour deux sous-ensembles non vides quelconques V et W de A , il existe un entier k strictement positif tel que $f(k, V) \cap W \neq \emptyset$ (transitivité topologique de A).

L'hypothèse (iii) est équivalente à la suivante:

(iv) Il existe un point x appartenant à A , tel que son orbite est dense dans A .

Attracteur chaotique

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène *sensibilité aux conditions initiales*. Cette propriété du système est caractérisée par des coefficients, appelés *exposants de*

Lyapounov, dont on rappellera la définition dans le cas d'un système dynamique discret et ceci pour faciliter la compréhension de ces exposants.

Définition 1.2.4: Soit $(\mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret et F l'itération dans \mathbb{R}^n générée par le flot f , ($F(x) = f(1, x)$), que nous supposons différentiable. Soit $JF(x)$ la matrice jacobienne de F au point x . Soit $JF^m(x_0)$ la matrice jacobienne de la composée m fois de F au point x_0

$$JF^m(x_0) = JF(x_{m-1}) \cdot JF(x_{m-2}) \cdot \dots \cdot JF(x_1) \cdot JF(x_0)$$

où $x_i = F^i(x_0)$. Notons les valeurs absolues des valeurs propres de $JF^m(x_0)$ en ordre décroissant par

$$J_1(m, x_0) \geq J_2(m, x_0) \geq \dots \geq J_n(m, x_0).$$

Les exposants de Lyapounov de la trajectoire issue du point x_0 sont définis par:

$$\lambda_i(x_0) = \ln \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (J_i(m, x_0))^{1/m} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

et on a $\lambda_1(x_0) \geq \lambda_2(x_0) \geq \dots \geq \lambda_n(x_0)$.

On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des exposants de Lyapounov est strictement positif.

Définition 1.2.5: Un attracteur est dit chaotique, s'il a la propriété de sensibilité aux conditions initiales pour presque tout point le constituant (c'est-à-dire sauf pour un ensemble de points de mesure de Lebesgue nulle).

Généralement un attracteur chaotique est un fractal. Ceci résulte du caractère borné de l'attracteur, des phénomènes de contractions (exposants de Lyapounov négatifs) et d'étirements (exposants de Lyapounov positifs), qui conduisent à un pliage complexe et un feuilletage générant une structure fractale de l'attracteur chaotique. Sa dimension de Lyapounov [Far], qui est une dimension fractale, est alors non entière.

1.3 Difféomorphismes et Applications de Hénon Généralisées

Toute application inversible unidimensionnelle a une dynamique triviale; ceci n'est pas vrai en dimension supérieure. L'application bidimensionnelle la plus simple, dont la dynamique est non triviale, est l'application de Hénon [Hén]

$$(x', y') = (y + x^2 + a, -bx).$$

Cette application, dont le Jacobien est constant égale à b , est un difféomorphisme quand $b \neq 0$.

Les applications du plan (bidimensionnelles)

$$h(x, y) = (y + p(x), -bx)$$

où $p(x)$ est un polynôme et $b \neq 0$, s'appellent applications de Hénon généralisées. Ces applications ont été étudiées en détail par Friedland et Milnor [FM] pour leurs propriétés génériques. En effet, ils ont montré qu'en général les difféomorphismes polynômiaux du plan avec Jacobien constant, sont conjugués à des compositions d'applications de Hénon généralisées. Ce résultat est une déduction du théorème de Jung [Jun], que l'on rappellera dans la suite. Les hypothèses de ce théorème, nécessitent que l'on rappelle d'abord les définitions des ensembles suivants:

On appelle ensemble de Keller, noté K , l'ensemble des applications polynômiales du plan dont le Jacobien est non nul et constant. Ces applications s'appellent applications de Keller. L'ensemble de Keller contient deux sous ensembles particuliers. Le premier sous ensemble, noté A , est celui des applications *affines*

$$A = \{a \in K : a(x, y) = (\xi, \eta) + L(x, y)\}$$

où L est une application linéaire non singulière. A est un groupe pour la composition d'applications. Le deuxième sous ensemble, noté E , est celui des applications dites *élémentaires*

$$E = \{e \in K : e(x, y) = (\alpha x + \xi, \beta y + p(x))\}$$

où $p(x)$ est un polynôme en x de degré quelconque, et $\alpha, \beta \neq 0$. E est aussi un groupe pour la composition d'applications.

Comme systèmes dynamiques, les applications affines et élémentaires sont triviales; mais il existe des applications dans K intéressantes dynamiquement, comme par exemple les applications de Hénon généralisées.

Une application de Keller est un difféomorphisme, puisque son Jacobien ne s'annule pas. Si l'inverse d'une application de Keller est polynômiale, celle-ci est appelée application *Cremona*. L'ensemble de ces applications est un groupe, le *groupe Cremona affine*, noté C .

Notons que toute application de Hénon généralisée a un inverse polynômiale

$$h^{-1}(x, y) = \left(-\frac{y}{b}, x - p\left(-\frac{y}{b}\right)\right),$$

c'est-à-dire appartenant à C , il s'ensuit que toute composition d'applications de Hénon généralisées est une application Cremona.

Théorème 1.3.1 (Jung): Le groupe Cremona affine est généré par les sous groupes, affine A , et élémentaire E .

Ce théorème a été utilisé par Friedland et Milnor [FM], pour montrer que toute application Cremona f peut être écrite comme une "application réduite" sous la forme

$$f = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1$$

tel que chaque g_i appartient à E ou A , mais pas à $S = E \cap A$, et deux facteurs consécutifs n'appartiennent pas au même sous groupe.

Si la longueur n de l'application réduite de f est un, alors elle est soit affine soit élémentaire, et sa dynamique est triviale. Quand $n > 1$, les facteurs peuvent

toujours permuter cycliquement par conjugaison, i.e., $f \cong g_1 \circ f \circ g_1^{-1} = g_1 \circ g_n \circ \dots \circ g_2$. Si n est impaire, l'application réduite commence et finit avec des éléments du même sous groupe. Dans ce cas, nous pouvons permuter le premier élément à la fin et combiner ces deux facteurs tel que l'application réduite ait une longueur paire. Finalement, nous pouvons permuter cycliquement tel que f soit conjuguée à une application qui commence par une application affine:

$$f \cong a_k \circ e_k \circ a_{k-1} \circ \dots \circ e_1$$

où la longueur est $2k$, et chaque facteur n'appartient pas au sous groupe S . L'application f est alors dite cycliquement réduite.

Théorème 1.3.2 (Friedland et Milnor): Toute application réduite cycliquement $f \in C$ de longueur $2k$, est conjuguée à une composition de k applications de Hénon généralisées, $h_i(x, y) = (y + p_i(x), -b_i x)$, où $p_i(x)$ a un degré d_i et

$$p_i(x) = \pm x^{d_i} + O(x^{d_i-2}).$$

Ce théorème reste en général vrai, pour tout difféomorphisme polynômial non trivial du plan avec Jacobien constant, c'est-à-dire appartenant à K , si l'on tient compte de la conjecture de Keller suivante:

Conjecture Jacobienne de Keller: Toute application de Keller, a un inverse polynômial.

1.4 Systèmes Dynamiques Discrets, Singularités et Bifurcations

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est complètement déterminé par l'application F de X dans X :

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

où

$$F^n(x) \equiv \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ fois}}(x) = f(n, x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } F^0 = id.$$

L'application F est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité précédente reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Lorsque l'application F est au moins de classe C^1 sur X et a une seule détermination inverse F^{-1} (c'est-à-dire inversible), c'est un difféomorphisme. Lorsque l'application F n'a pas ou a plusieurs déterminations inverses (c'est-à-dire non inversible), c'est un endomorphisme. Dans ce cas, chaque point x_{n+1} peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents de rang un.

1.4.1 Singularités

Soit F une transformation ponctuelle dans $X \subseteq \mathbb{R}^n$, définissant un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) . On distingue deux types de singularités de dimension zéro, sur l'espace des phases X .

Point fixe

Un point fixe x^* est un point de l'espace des phases X vérifiant:

$$x^* = F(x^*)$$

Cycle d'ordre k

Un cycle d'ordre k (ou k -cycle) est un ensemble de k points (x_1^*, \dots, x_k^*) de l'espace des phases X , qui vérifie:

$$\begin{cases} x_{i+1}^* = F(x_i^*) , & i = 1, \dots, k-1 \\ x_1^* = F(x_k^*) \\ x_i^* = F^k(x_i^*) , & i = 1, \dots, k \\ x_i^* \neq F^l(x_i^*) , & i = 1, \dots, k \text{ et } 1 \leq l < k \end{cases}$$

Chaque point x_i^* d'un cycle d'ordre k est un point fixe de F^k . Un cycle d'ordre k est aussi caractérisé par l'ordre d'échange de ses k points x_i^* par applications successives de F . Il peut être désigné par le formalisme (k, j) , où k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle [MGBC]. Un cycle d'ordre $k = 1$ est évidemment un point fixe de F .

Lorsque la dimension de l'espace des phases X est supérieure à un, il existe des singularités de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation F ou F^k . Dans le plan de phases ($X = \mathbb{R}^2$), une courbe définie par l'équation $G(x, y) = C$, C une constante, est invariante par la transformation F ou F^k , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante:

$$G(F(x, y)) = G(x, y) \quad \text{ou} \quad G(F^k(x, y)) = G(x, y)$$

D'autres singularités plus générales, telles que les attracteurs et attracteurs chaotiques, seront traitées par la suite.

1.4.2 Stabilité des singularités de dimension 0

La nature stable ou instable d'un cycle d'ordre k , pour le cas d'une transformation F différentiable, est caractérisée par les valeurs propres de la matrice Jacobienne de F^k prise en un point quelconque de ce cycle. On appelle ces valeurs propres les *multiplicateurs* du cycle.

Lorsque la transformation ponctuelle F est n -dimensionnelle ($\dim X = n$), un cycle d'ordre k a évidemment n multiplicateurs S_i , $i = 1, \dots, n$. Le cycle est dit asymptotiquement stable ou *attractif*, si $|S_i| < 1$, $\forall i = 1, \dots, n$. Il est dit instable ou *répulsif*, si au moins un de ses multiplicateurs S_i est tel que $|S_i| > 1$.

Lorsque la transformation ponctuelle F est unidimensionnelle, le multiplicateur d'un point fixe ou d'un k -cycle est égale à:

$$S = \frac{dF}{dx}(x^*) \quad \text{pour } x^* \text{ un point fixe de } F$$

$$\text{et } S = \prod_{i=1}^k \frac{dF}{dx}(x_i^*) \quad \text{pour } (x_1^*, \dots, x_k^*) \text{ un cycle d'ordre } k \text{ de } F$$

Lorsque la transformation ponctuelle F est bidimensionnelle, on classe les points fixes et les cycles, selon les valeurs de leurs multiplicateurs S_1 et S_2 .

- Un point fixe ou un cycle est dit *col*, si $S_1 \in \mathbb{R}$, $S_2 \in \mathbb{R}$ et

$$|S_1| < 1 < |S_2|$$

un col est toujours répulsif.

- Un point fixe ou un cycle est dit *noeud* attractif (resp. répulsif), si $S_1 \in \mathbb{R}$, $S_2 \in \mathbb{R}$ et

$$|S_i| < 1, i = 1, 2 \quad (\text{resp. } |S_i| > 1, i = 1, 2)$$

- Un point fixe ou un cycle est dit *foyer* attractif (resp. répulsif), si $S_1 = \overline{S_2} \in \mathbb{C}$ et

$$|S_1| = |S_2| < 1 \quad (\text{resp. } |S_1| = |S_2| > 1)$$

1.4.3 Ensembles stable et instable

Considérons une transformation ponctuelle F dans \mathbb{R}^p définissant un système dynamique discret $(\mathbb{R}^p, \mathbb{N}, f)$, et soit x^* un point fixe répulsif de F et U un voisinage de x^* .

Définition 1.4.1: On appelle $W_{loc}^i(x^*)$ *ensemble instable local* ou *variété instable locale* (c'est-à-dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U , qui converge vers x^* . On appelle $W^i(x^*)$ *ensemble instable global* de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers x^* . Ces ensembles s'écrivent:

$$W_{loc}^i(x^*) = \{x \in U : x_{-n} \in F^{-n}(x) \longrightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{-n} \in U\}$$

$$W^i(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^p : x_{-n} \in F^{-n}(x) \longrightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} F^n(W_{loc}^i(x^*)).$$

Les propriétés qui suivent, découlent de la définition de l'ensemble instable global:

1 - $W^i(x^*)$ est invariant par rapport à F : $F[W^i(x^*)] = W^i(x^*)$.

2 - Si F est un endomorphisme, en général $W^i(x^*)$ n'est pas invariant par rapport à F^{-1} et on a:

$$F^{-1}[W^i(x^*)] \supseteq W^i(x^*).$$

L'invariance de $W^i(x^*)$ par rapport à F^{-1} a lieu, lorsque F est inversible.

Définition 1.4.2: Soit x^* un point fixe de F , attractif ou répulsif. On appelle $W_{loc}^s(x^*)$ *ensemble stable local* ou *variété stable locale* (c'est-à-dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives appartient à U et converge vers x^* . On appelle $W^s(x^*)$ *ensemble stable global* de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p dont la séquence d'images successives converge vers x^* . Ces ensembles s'écrivent:

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U : x_n = F^n(x) \longrightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in U\}$$

$$W^s(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^p : x_n = F^n(x) \longrightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(W_{loc}^s(x^*)).$$

Remarque 1: Si x^* est un point fixe attractif, l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.

Remarque 2: Si F est un difféomorphisme, les ensembles stable et instable global sont des variétés.

Les propriétés qui suivent, découlent de la définition de l'ensemble stable global:

1 - $W^s(x^*)$ est invariant par rapport à F^{-1} : $F^{-1}[W^s(x^*)] = W^s(x^*)$.

2 - Si F est un endomorphisme, en général $W^s(x^*)$ n'est pas invariant par rapport à F et on a:

$$F[W^s(x^*)] \subseteq W^s(x^*).$$

L'invariance de $W^s(x^*)$ par rapport à F a lieu, lorsque F est inversible.

3 - Dans le cas d'un point fixe x^* de type noeud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de x^* , lorsque F est inversible, se réduit à x^* lui-même. Lorsque F est non inversible, l'ensemble stable local de x^* se réduit à x^* lui-même, et l'ensemble stable global de x^* est constitué de tous les antécédents de tout rang de x^* . Ceci s'écrit:

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(x^*) \text{ et } \forall x \in W^s(x^*), \exists m \in \mathbb{N} : F^m(x) = x^*.$$

Remarque 3: Les définitions des ensembles stable et instable d'un cycle d'ordre k , se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de F^k .

1.4.4 Bifurcations

Lorsque le système dynamique dépend continûment d'un ou de plusieurs paramètres, la variation de ces paramètres peut entraîner des changements qualitatifs dans l'espace des phases, tels que l'apparition ou la disparition de singularités, le changement de stabilité d'une singularité, le changement de type de

singularités, etc.... Ces changements qualitatifs s'appellent *bifurcations*. Dans ce paragraphe on présentera les bifurcations fondamentales, dans le cas des transformations unidimensionnelles et bidimensionnelles, que l'on rencontrera dans les chapitres suivants.

Bifurcation fold ou pli

Elle correspond à l'apparition de deux cycles d'ordre k , de stabilités différentes. A la bifurcation, les deux cycles sont confondus et avec un multiplicateur S égal à 1. Cette bifurcation s'écrira:

- Pour $\dim X = 1$

$$\emptyset \xrightarrow[S=1]{} Cy_s^k + Cy_i^k$$

où X désigne l'espace des phases, Cy_s^k un cycle d'ordre k stable et Cy_i^k un cycle d'ordre k instable.

- Pour $\dim X = 2$

$$\emptyset \xrightarrow[S=1]{} N_s^k + C^k$$

où N_s^k désigne un cycle noeud d'ordre k stable et C^k un cycle col d'ordre k .

Bifurcation flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu, lorsqu'un cycle d'ordre k stable a un multiplicateur qui passe par la valeur $S = -1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un cycle d'ordre $2k$ stable. On écrira:

- Pour $\dim X = 1$

$$Cy_s^k \xrightarrow[S=-1]{} Cy_i^k + Cy_s^{2k}$$

- Pour $\dim X = 2$

$$N_s^k \xrightarrow[S=-1]{} N_i^k + N_s^{2k}$$

Bifurcation de Neimark-Sacker

Cette bifurcation est définie pour $\dim X \geq 2$ et a lieu lorsqu'un cycle d'ordre k stable a deux multiplicateurs complexes $S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\theta}$, dont le module ρ passe par la valeur 1. Pour $\dim X = 2$ on a:

$$F_s^k \xrightarrow[\rho=1]{} F_i^k + CFI_s^k$$

où F_s^k et F_i^k désignent deux cycles foyers d'ordre k , le premier stable et le second instable. CFI_s^k désigne un cycle de k courbes fermées invariantes stables, chacune d'elles entourant un foyer du cycle F_i^k .

Chapitre 2

Bifurcations de Bassins d'Attraction dans le Cas des Endomorphismes Bidimensionnels

La non inversibilité des applications définissant des systèmes dynamiques, est une propriété essentielle pour l'analyse des comportements compliqués ou chaotiques de ces systèmes. Dans l'espace des phases, cette propriété de non inversibilité des applications (endomorphismes) est caractérisée par la présence de singularités appelées respectivement, lignes critiques (LC_i) et surfaces ou hypersurfaces critiques, selon que l'application soit bidimensionnelle ou de dimension supérieure à deux. Ce type de singularités, introduit pour la première fois par Mira en 1964 [Mir1], est une généralisation de la notion de points critiques (extrema locaux) dans le cas unidimensionnel. Les lignes critiques constituent un outil fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. Elles interviennent dans la détermination d'aires absorbantes et d'aires chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction.

Dans ce chapitre on se propose d'étudier les propriétés liées aux bifurcations de bassins d'attraction pour des applications bidimensionnelles non inversibles. On expliquera les séquences de bifurcations, qui transforment une frontière régulière de bassin en une frontière fractale; c'est le "phénomène de fractalisation". Ces bifurcations seront étudiées pour le cas d'un endomorphisme de type ($Z_0 - Z_2$), qui est un cas basique pour d'autres types d'endomorphismes plus compliqués.

2.1 Définitions et Propriétés Générales

Définition 2.1 : Soit T une application non inversible de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On appelle *ligne critique* de l'application T , le lieu géométrique LC des points de \mathbb{R}^2 , qui ont au moins deux antécédents de premier rang confondus.

Lorsque l'application T est différentiable, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 pour lesquels le Jacobien de T est égale à zéro ($\det(DT(x, y)) = 0$), moins les points d'inflexions (c'est-à-dire les points qui annulent le Jacobien et pour lesquels T est localement inversible). Le lieu LC_{-1} est un sous ensemble de dimension un (une courbe) de \mathbb{R}^2 , avec par définition $T(LC_{-1}) = LC$. La courbe LC_{-1} est l'analogue bidimensionnel de l'ensemble des points pour lesquels une application différentiable unidimensionnel admet des extremums locaux. Dans le cas où l'application T n'est pas différentiable, la courbe de non différentiabilité [GM1] joue généralement le rôle de LC_{-1} . L'image de rang k de LC , $LC_k = T^k(LC)$, est appelée ligne critique de rang k .

Il existe des situations particulières où LC se réduit à un seul point, ou bien que le Jacobien de l'application T soit constant [Mir2].

Une ligne critique peut être constituée d'une ou de plusieurs branches. Ces branches séparent le plan en régions ouvertes, où tous les points d'une même région, ont le même nombre d'antécédents de premier rang.

Gumowski et Mira [GM] ont développé le rôle des lignes critiques dans le cas des bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe". Bernussou, Liu Hsu et Mira [BLM]; Barugola, Cathala et Mira [BCM] et Cathala [Cat] ont étudié le cas des bifurcations du type "bassin simplement connexe

↔ bassin multiplement connexe". Ces bifurcations de base résultent toujours d'un contact entre un segment de ligne critique appartenant à la frontière d'un ensemble attractant et la frontière de son bassin d'attraction.

Définition 2.2 : Un ensemble fermé et invariant A est appelé *ensemble attractant*, s'il existe un voisinage U de A , tel que $T(U) \subset U$ et $T^n(x) \rightarrow A$ quand $n \rightarrow +\infty \forall x \in U$.

Un ensemble attractant A peut contenir un ou plusieurs attracteurs, coexistant avec des ensembles de points répulsifs. Ces derniers sont soit des frontières floues de bassins d'attraction d'attracteurs contenus dans A , soit des transitoires chaotiques. L'ensemble $D = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$ est le *bassin d'attraction* de A . Un bassin d'attraction D peut être connexe ou non connexe. S'il est non connexe, il est alors constitué d'un bassin immédiat D_0 , qui est la plus large composante connexe de D contenant A , et des autres composantes connexes, en nombre fini ou infini, antécédents de tout rang de D_0 . Ces antécédents s'appellent *îlots* selon la terminologie de Mira [MFP].

Si D est non connexe $D = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_0)$; si D est connexe $D = D_0$.

Un bassin connexe peut être simplement connexe ou multiplement connexe, c'est-à-dire connexe avec des trous ou *lacs* selon la terminologie de Mira [MFP]. Dans ce dernier cas, on appelle *frontière externe* de D , notée \mathcal{F}_e , la frontière de l'ensemble simplement connexe, noté D^* , obtenu en comblant les trous de D ($\partial D^* = \mathcal{F}_e$). On appelle *frontière interne* de D , notée \mathcal{F}_i , la frontière de l'ensemble $D^* \setminus D$ (c'est-à-dire l'union des frontières de tous les trous de D). L'union $\mathcal{F}_e \cup \mathcal{F}_i$ constitue la frontière \mathcal{F} de D .

Le bassin d'attraction D et sa frontière \mathcal{F} sont invariants par rapport à l'inverse T^{-1} de l'application T , mais pas nécessairement par rapport à T

$$\begin{aligned} T^{-1}(D) &= D, & T(D) &\subseteq D \\ T^{-1}(\mathcal{F}) &= \mathcal{F}, & T(\mathcal{F}) &\subseteq \mathcal{F}. \end{aligned}$$

L'égalité $T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ implique que les antécédents de tout rang d'un cycle appartenant à \mathcal{F} , appartiennent à cette dernière. Il en découle que la variété stable W^s de tout cycle appartenant à \mathcal{F} , appartient à cette dernière. L'inclusion $T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ implique que la demi trajectoire positive de tout point de \mathcal{F} appartient aussi à \mathcal{F} .

Un point fixe P de type noeud répulsif appartenant à \mathcal{F}_e , est dit *point cusp*, si les valeurs propres S_1 et S_2 de l'application T au point fixe P satisfaisent :

$$S_1 > 1, S_2 < -1 \text{ et } |S_2| > S_1$$

L'aspect géométrique des variétés invariantes de P , justifie que l'on appelle ce dernier point cusp. Dans un tel cas, les antécédents de tout rang du point cusp P , sont aussi des points cusps de la frontière externe \mathcal{F}_e .

La frontière du bassin immédiat d'attraction $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0e} \cup \mathcal{F}_{0i}$ est appelée *frontière faiblement fractale*, si \mathcal{F}_{0e} ne contient pas ou contient un nombre fini de points cusps et \mathcal{F}_{0i} est constituée d'arcs ayant une structure fractale, avec la

possibilité pour \mathcal{F}_{0e} d'être fractale. \mathcal{F}_0 appelée *frontière fortement fractale*, si \mathcal{F}_{0e} est constituée d'arcs ayant une structure fractale, qui contiennent des séquences arborescentes d'antécédents d'un point cusp; donc un nombre infini de points cusps appartiennent à \mathcal{F}_0 .

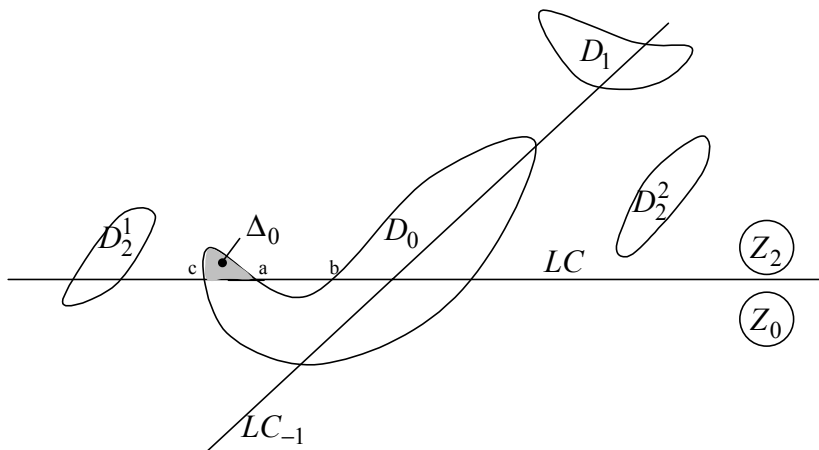


Figure 2.1

2.2 Endomorphismes de Type $(Z_0 - Z_2)$

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux critères de connexité de bassins d'attraction d'attracteurs, pour des endomorphismes bidimensionnelles de type $(Z_0 - Z_2)$. Le plan de phases de ce type d'applications est divisé en deux régions ouvertes Z_0 et Z_2 , séparées par une ligne critique LC constituée d'une seule branche. Un point x appartenant à Z_2 a deux antécédents de premier rang distincts, et un point x appartenant à Z_0 n'a aucun antécédent.

Rappelons les deux propositions fondamentales établissant les conditions d'existence d'un bassin non connexe et d'un bassin multiplement connexe. Ces propositions ont été démontrées par L. Gardini (pour la démonstration voir Mira et al. [MFP]) et leur formalisme découle des résultats donnés dans Mira & Roubellat [MR0].

Proposition 2.1 : Soit T un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$.

Alors :

- a) D est connexe $\Leftrightarrow D_0 \cap \overline{Z_2}$ est connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) = D_0 \cap LC$.
- b) D est non connexe $\Leftrightarrow D_0 \cap \overline{Z_2}$ est non connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) \subset D_0 \cap LC$.

Chaque composante connexe maximale unidimensionnelle de $(D_0 \cap LC) \setminus T(D_0 \cap LC_{-1})$ appartient à la frontière d'une composante connexe maximale bidimensionnelle de $D_0 \cap \overline{Z_2}$, un *cap* [MFP] noté Δ_0^i , i un entier fini ou infini, qui ne contient pas A . Les caps $\overline{\Delta_0^i}$ ne contiennent pas de points non errants appartenant à \overline{D} . Les antécédents de premier rang des caps Δ_0^i , $D_1^{(i)} = T^{-1}(\Delta_0^i)$, sont

des composantes connexes disjointes (îlots) de D , tel que $D_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. Le bassin total $D = D_0 \cup_i (\cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)}))$; où $\cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)})$ est une séquence finie, infinie, ou arborescente d'antécédents de D_0 .

La figure 2.1 illustre cette proposition dans le cas d'un seul cap Δ_0 ($i = 1$), et $D_1 \subset Z_2$.

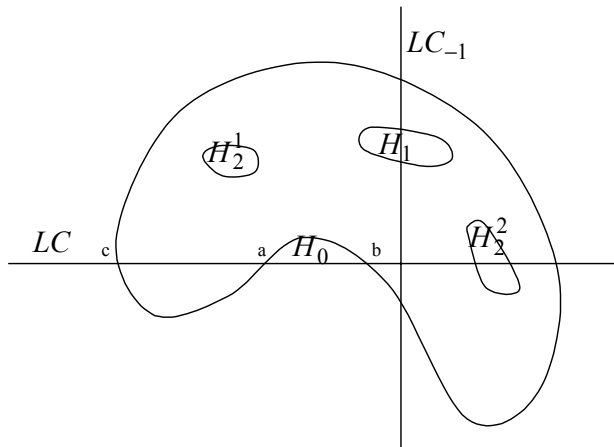


Figure 2.2

Proposition 2.2 : Soit T un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ et $D_0 \cap \overline{Z_2}$ est connexe. Alors :

a) $T^{-1}(D_0^*) = D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est simplement connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) = D_0^* \cap LC$.

b) $T^{-1}(D_0^*) \subset D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est multiplément connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) \supset D_0^* \cap LC$.

Chaque composante connexe maximale unidimensionnelle de $T(D_0^* \cap LC_{-1}) \setminus (D_0^* \cap LC)$ appartient à la frontière d'un ensemble fermé bidimensionnelle de $\mathbb{C}(D) \cap \overline{Z_2}$, une baie [MFP] notée $H_0^{(i)}$, i un entier fini ou infini. $H_0^{(i)}$ ne contient pas de points non errants appartenant à ∂D ou à $\mathbb{C}(D)$. Les antécédents de premier rang des baies $H_0^{(i)}$, $H_1^{(i)} = T^{-1}(H_0^{(i)})$, sont des ensembles fermés simplement connexes disjoints, des lacs de D , tel que $H_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ et $D = D_0^* \setminus \cup_i (\cup_{n \geq 0} T^{-n}(H_1^{(i)}))$; où $\cup_{n \geq 0} T^{-n}(H_1^{(i)})$ est une séquence finie, infinie, ou arborescente d'antécédents de $H_0^{(i)}$.

La figure 2.2 illustre cette proposition dans le cas d'une seule baie H_0 ($i = 1$), et $H_1 \subset Z_2$.

Des situations combinées des propositions 2.1 et 2.2 peuvent conduire à un bassin total D non connexe, avec chacune de ses composantes connexes multiplément connexe, c'est-à-dire des lacs dans des îlots.

Remarque 1 : Lorsqu'une infinité de cycles répulsifs existent comme ensemble limite de séquences arborescentes d'îlots, ou de lacs, c'est-à-dire comme points appartenant à la frontière du bassin, ils constituent un répulseur étrange. Ces cycles doivent être distingués de l'infinité de cycles répulsifs donnant lieu à une aire chaotique.

Remarque 2 : Les propositions 2.1 et 2.2 restent valables pour des endomorphismes d'un type différent de $(Z_0 - Z_2)$, à condition que l'on retrouve localement la situation $(Z_0 - Z_2)$, autrement dit les aires (Δ_0, H_0) des figures 2.1 et 2.2 dont les antécédents donnent un îlot ou un lac, doivent concerner deux feuilles de T^{-1} avec seulement un pli les joignant [MPF]. Par exemple, pour l'endomorphisme de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ les propositions 2.1 et 2.2 sont valables localement, si les aires (Δ_0, H_0) coupent une seule branche de LC parmi les deux branches qui délimitent Z_3 , ce qui n'est pas le cas si (Δ_0, H_0) coupent les deux branches de LC .

La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des applications du type $(Z_0 - Z_2)$; c'est une conséquence des deux propositions précédentes.

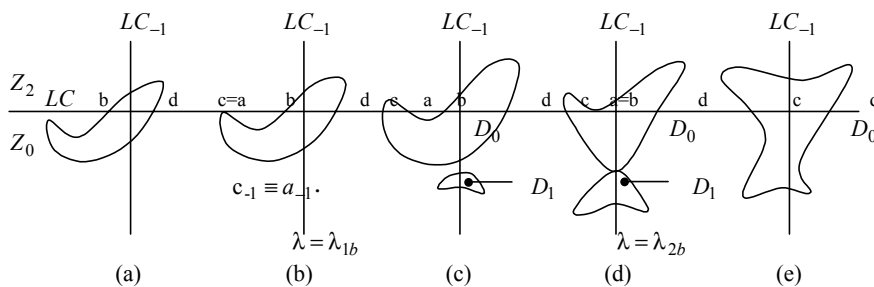


Figure 2.3

Proposition 2.3 : Soit T un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$ dépendant d'un paramètre λ . Si le nombre de composantes connexes de $D \cap LC$ change quand λ traverse une valeur de bifurcation λ_b , alors le bassin d'attraction D peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :

- a) bassin connexe \leftrightarrow bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change)
- b) bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change).
- c) augmentation ou diminution du nombre d'îlots de D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
- d) augmentation ou diminution du nombre de lacs dans D , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.
- e) transition lacs \leftrightarrow baie
- f) transition frontière externe faiblement fractale \leftrightarrow frontière externe fortement fractale.

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente, la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC .

La partie (a) de cette proposition est illustrée par la figure 2.3, sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation $\lambda = \lambda_{1b}$, correspond à un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv c$. $\{T^{-n}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, est une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour $\lambda < \lambda_{1b}$, devient non connexe pour $\lambda > \lambda_{1b}$. La seconde bifurcation $\lambda = \lambda_{2b}$, correspond à un contact tangentiel entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$, donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre ∂D_0 et la frontière ∂D_1 de l'îlot D_1 . Après cette dernière bifurcation D redevient connexe.

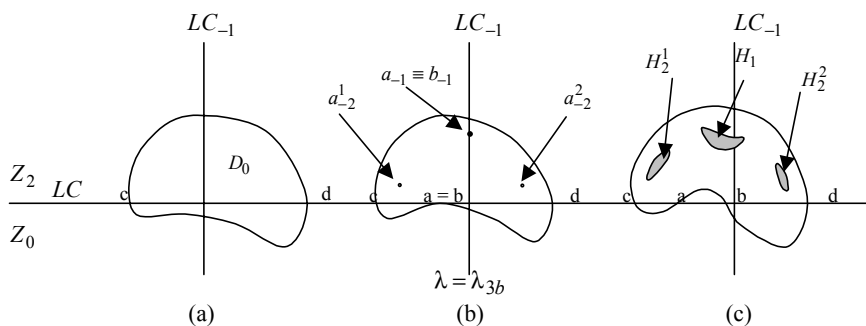


Figure 2.4

La partie (b) de cette proposition, qui est une conséquence de la proposition 2.2, est illustrée par la figure 2.4, sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur $\lambda = \lambda_{3b}$ a lieu un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$. Les antécédents de tout rang $T^{-n}(a)$ du point a , forment une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N lacs.

La partie (c) est illustrée par la figure 2.5, sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d'îlots. La première bifurcation a lieu à la valeur $\lambda = \lambda_{4b}$ (fig 2.5a) et qui correspond à un contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\alpha = D_i \cap LC$. Avant la bifurcation, $\lambda < \lambda_{4b}$, l'îlot D_i était à l'intérieur de la région Z_0 ($D_i \cap \overline{Z_2} = \emptyset$). A la bifurcation, les antécédents de tout rang $T^{-n}(\alpha)$ de α ($T^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$) constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d'îlots D_{i+n} , $D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. En continuant à faire varier le paramètre λ de manière continue, l'îlot D_i progresse dans la région Z_2 (fig 2.5b). La seconde valeur de bifurcation $\lambda = \lambda_{5b}$ (fig 2.5c), correspond à un nouveau contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\beta = D_i \cap LC$ ($D_i \subset \overline{Z_2}$). Ceci implique que le point $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$ est un

point d'intersection limite entre LC_{-1} et D_{i+1} , avant que ce dernier se divise en deux îlots $D_{i+1}^1 \subset R_1$ et $D_{i+1}^2 \subset R_2$, lorsque la valeur de λ dépasse la seconde valeur de bifurcation (fig 2.5d).

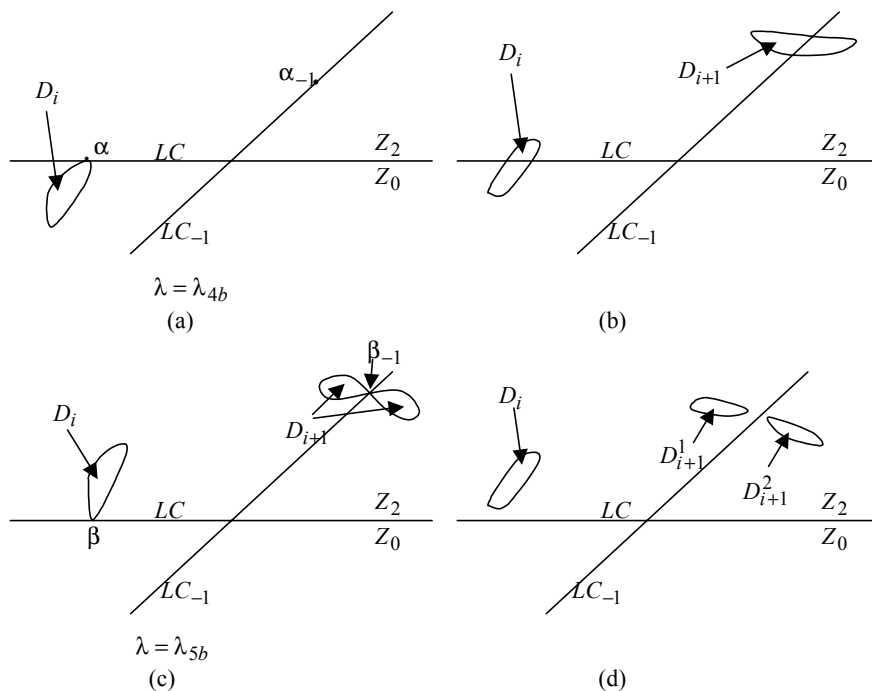


Figure 2.5

La partie (d) est analogue à la partie (c), en substituant dans le raisonnement de la partie (c) les îlots par des lacs d'un bassin multiplement connexe.

2.3 Exemple d'une Bifurcation de Bassin d'Attraction avec Agrégation d'Îlots

Considérons l'application quadratique T définie par

$$\begin{cases} x' = (b-a)x^2 + by^2 + (a-2b)xy + 0.5y - 0.5x \\ y' = (b-a)x^2 + by^2 + (a-2b)xy + 0.5y - 0.5x + x \end{cases} \quad (2.1)$$

où a et b sont des paramètres réels. Cette application admet deux déterminations inverses, qui sont les solutions par rapport à (x, y) du système

$$\begin{cases} x = y' - x' \\ by^2 + ((a-2b)x + 0.5)y + (b-a)x^2 - 0.5x - x' = 0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

dans le cas où le discriminant

$$\Delta = a^2(y' - x')^2 + a(y' - x') + 4bx' + 0.25 \quad (2.3)$$

de la deuxième équation de (2.2) est strictement positif. Lorsque le discriminant Δ est strictement négatif, l'application T n'a pas de détermination inverse. Par conséquent, T est une application de type $Z_0 - Z_2$, et la ligne critique LC séparant les régions Z_0 et Z_2 a pour équation $\Delta = 0$. Ce qui équivaut à :

$$LC \iff y' = \frac{-1 \pm \sqrt{-16bx'}}{2a} + x' \quad (2.4)$$

pour $-16bx' \geq 0$.

Le lieu des antécédents de premier rang confondus LC_{-1} ($T(LC_{-1}) = LC$) est déterminé par le Jacobien de l'application T égale à zéro. Ce qui équivaut à :

$$LC_{-1} \iff y = \frac{(2b - a)x - 0.5}{2b}. \quad (2.5)$$

Pour la valeur $a = 0.09$ et b variant dans le sens décroissant sur l'intervalle $[0.088, 0.091]$, l'application T a deux points fixes $O(x = y = 0)$ et $P(x = 0.5y = 0.5/(0.09 + b))$. Le point fixe O est toujours un noeud étoilé stable, le point fixe P est un noeud instable pour $b > \tilde{b} = 0.09$ et un col pour $b < \tilde{b} = 0.09$. L'application T a aussi un cycle d'ordre deux (Q_1, Q_2) , qui est de type col pour $b > \tilde{b}$ et de type noeud instable pour $b < \tilde{b}$.

Intéressons-nous aux changements dans la structure géométrique du bassin d'attraction D du point fixe O , lorsque le paramètre b varie dans le sens décroissant.

1 - Pour $b = 0.0905 > \tilde{b}$, le bassin D est simplement connexe (fig.2.6) et sa frontière est constituée par les variétés stables du cycle col (Q_1, Q_2) .

2 - Pour $b < \tilde{b}$, le bassin D n'est plus connexe. \tilde{b} est une valeur de bifurcation du type "bassin connexe \leftrightarrow bassin non connexe" caractérisée par la proposition 2.1.

3 - Pour $b = 0.0887 < \tilde{b}$, le bassin D est constitué d'un bassin immédiat D_0 (fig.2.7), et d'une séquence arborescente d'ilôts $\cup_{i \geq 1} T^{-i}(\Delta_0)$ (figs.2.8 et 2.9) résultant d'une bifurcation du type schématisée par la figure 2.3(b), où l'ilôt $D_1 = T^{-1}(\Delta_0)$ se trouve dans la région Z_2 .

4 - Parmi les ilôts de la séquence arborescente, il y en a qui coupent LC et donc génèrent d'autres séquences arborescentes d'ilôts. Ce type de bifurcation non classique "contact entre la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC " entraîne, lorsqu'on fait varier la paramètre b , une augmentation discontinue de D (augmentation non connexe). Ces ilôts subissent un phénomène d'agrégation ou de séparation correspondant à des bifurcations schématisées par les figures 2.3(d) et 2.5(c). Le nombre de ces bifurcations augmente de plus en plus, lorsque le paramètre b diminue, ce qui entraîne une augmentation de la taille des ilôts et une tendance de ces derniers vers la frontière du bassin immédiat D_0 . Une vue partielle du bassin total, représentant cette situation pour la valeur $b = 0.0884$, est donnée par la figure 2.10. Pour $b = 0.0883$ les ilôts agrègent à D_0 et donne une structure fractale à la frontière du bassin (fig.2.11).

Remarque : Pour la valeur $b = 0.1$, l'application T est conjuguée, par le difféomorphisme $h(x, y) = (y, x + y)$, à l'application $F(x, y) = (y, 0.5x + 0.1x^2 + a.x.y)$ étudiée par Mira dans la référence [MR].

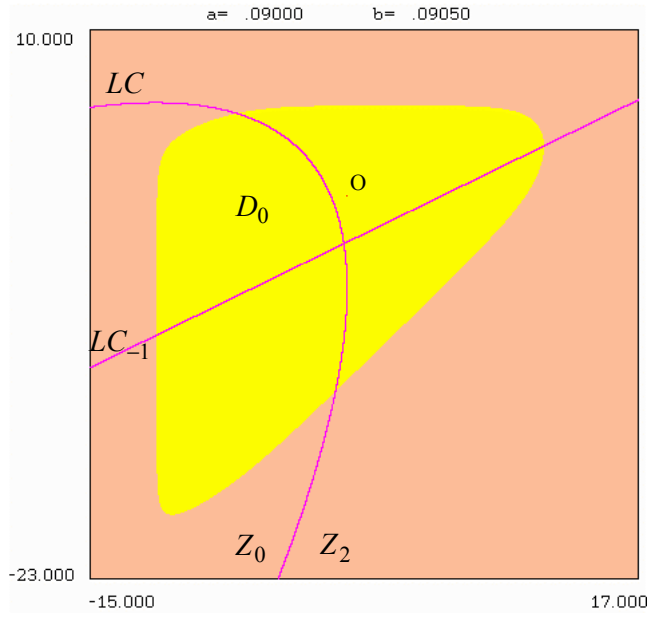


Figure 2.6

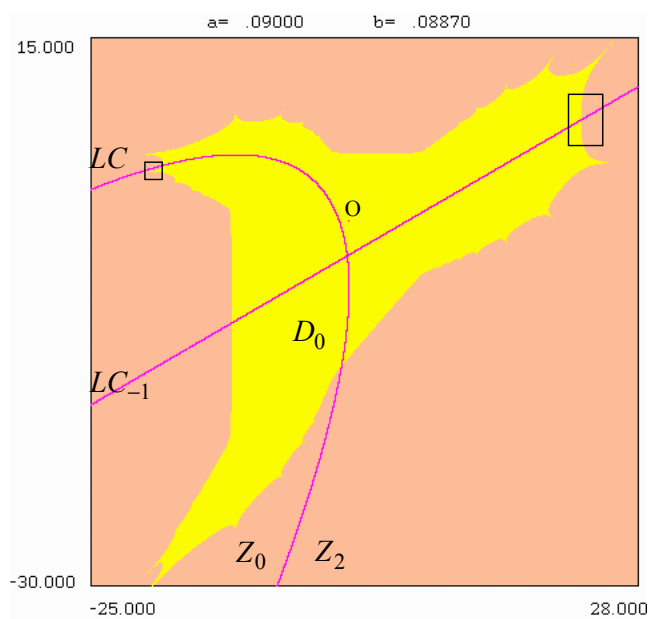
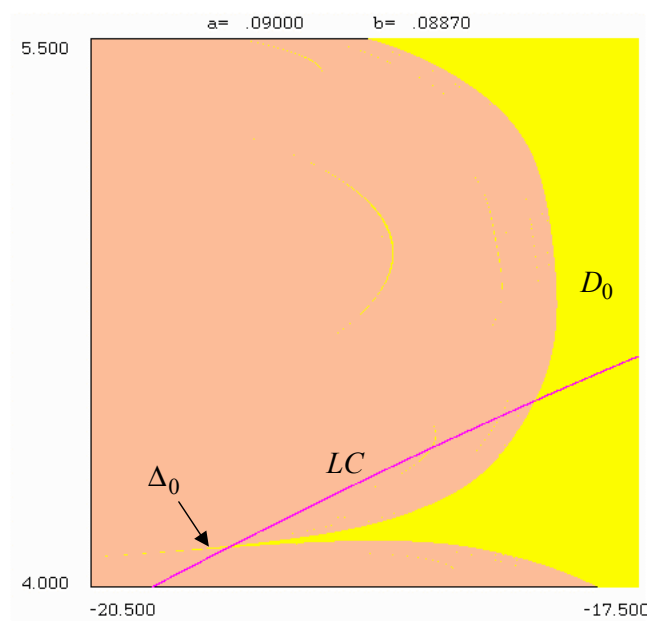
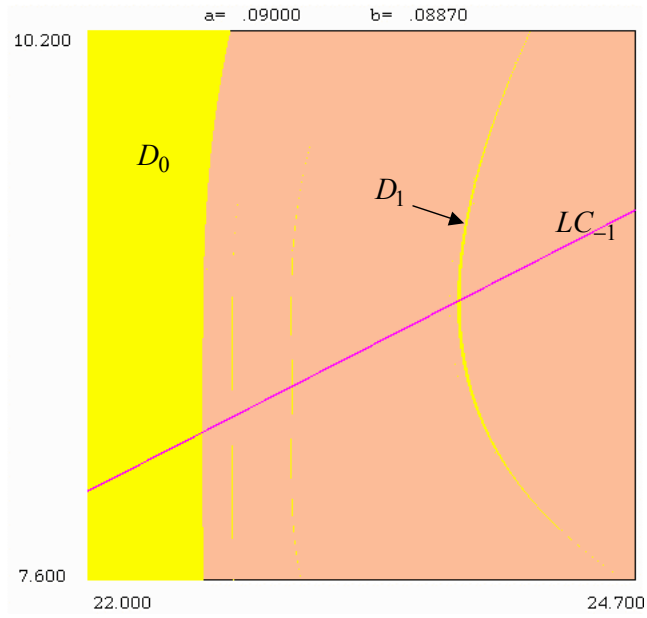


Figure 2.7



Zoom de la région encadrée à gauche dans la fig.2.7

Figure 2.8



Zoom de la région encadrée à droite dans la fig.2.7
Figure 2.9

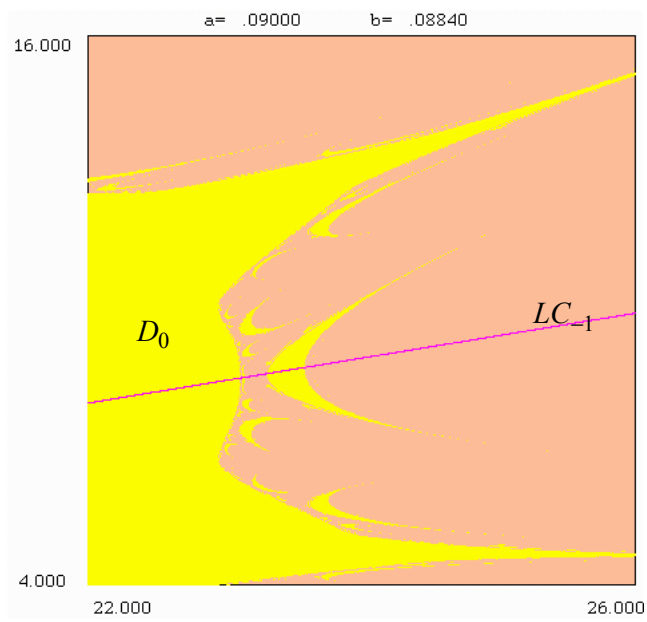


Figure 2.10

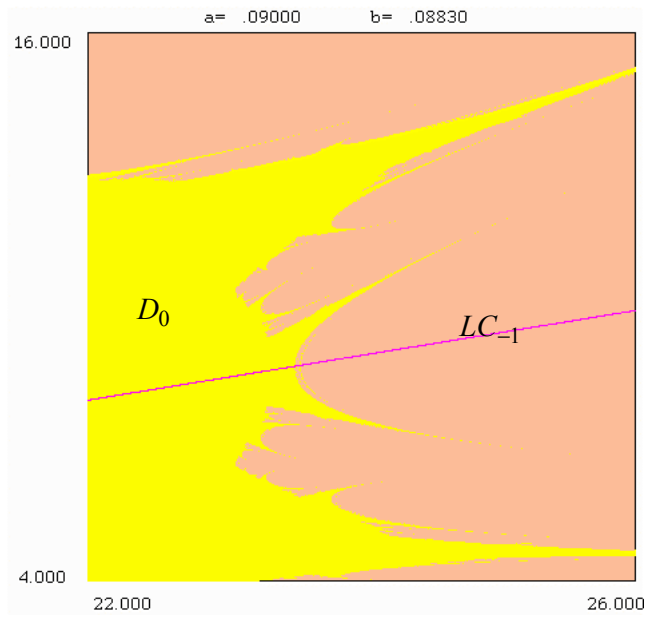


Figure 2.11

Chapitre 3

Bifurcations Homoclines dans les Endomorphismes Bidimensionnels

L'existence d'orbites homoclines d'un point fixe col est liée à la dynamique complexe d'un système. Ceci avait été déjà relevé par Poincaré, et Birkhoff [Bir] prouva les premiers résultats. Rappelons le résultat de Smale [Sm1,2], maintenant classique, dans le cas d'un difféomorphisme F . Ce résultat énonce que dans tout voisinage d'un point homocline transverse d'un point fixe col de F , il existe un entier k tel que F^k est invariant sur un ensemble Σ . De plus la restriction de F^k à Σ est topologiquement conjuguée à l'application déplacement σ sur l'ensemble Σ_2 des séquences bi-infinies de deux symboles ($\Sigma_2 = \left\{ a = (a_i)_{i=-\infty}^{+\infty}; a_i = 0 \text{ ou } 1 \right\}$ et $\sigma(\dots a_{-1} a_0 a_1 \dots) = (\dots a_0 a_1 a_2 \dots)$). L'existence d'une infinité de points périodiques a été prouvée par Birkhoff [Bir] et Shilnikov [Sh1]; dans [Sh2], [GS1,GS2], [Mos] des propriétés supplémentaires d'ensembles invariants chaotiques, dû à l'existence de points homoclines d'un point fixe col, sont prouvées.

Dans le cas des endomorphismes bidimensionnels, qui est l'objet de ce chapitre, l'existence d'orbites homoclines joue un rôle fondamental dans l'étude des dynamiques complexes. Marotto [Mar] et Gardini [Ga4] ont montré que des dynamiques chaotiques, au sens de Li & Yorke [LY], ont lieu dans tout voisinage d'un point fixe (ou cycle) répulsif de type noeud ou foyer ayant une orbite homocline. Pour le cas d'un point fixe col, Hall et Lin [HL] ont prouvé que le résultat de Smale rappelé ci-dessus, est valable pour un endomorphisme défini par des fonctions continûment différentiables.

L'étude que l'on se propose de faire dans ce chapitre, consiste à montrer qu'il existe un lien entre les bifurcations de contact d'une aire (ou d'un attracteur) chaotique et les bifurcations homoclines d'un point col (ou d'un cycle col) se trouvant sur la frontière du bassin d'attraction de l'aire chaotique. L'étude sera faite pour un endomorphisme bidimensionnel de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$. On montrera que les points de contact entre la frontière de l'attracteur et celle de son bassin d'attraction (bifurcation de contact), à la valeur de bifurcation, convergent vers le point col ou le cycle col. Ces points de contact sont aussi des points d'intersections entre les ensembles stable et instable du point col; autrement dit des points homoclines (bifurcation homocline).

Dans tout le chapitre, on considèrera un endomorphisme bidimensionnel T dans \mathbb{R}^2 ,

$$(x', y') = T_\lambda(x, y) = (f_\lambda(x, y), g_\lambda(x, y))$$

où $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont des fonctions continues, continûment différentiables par morceaux, et λ est un paramètre réel de T .

3.1 Définitions et Propriétés Fondamentales

Dans ce paragraphe, on donnera les principales définitions et propriétés en rapport avec les notions d'aires absorbantes, aires chaotiques, bifurcations de contact et bifurcations homoclines.

Définition 3.1: On appelle *aire absorbante* E , un sous ensemble fermé borné du plan tel que:

(i) $T(E) \subseteq E$

(ii) Sa frontière ∂E est constituée d'un nombre fini ou infini de segments de lignes critiques des $LC, LC_1, LC_2, \dots, LC_k$, où $LC_i = T^i(LC)$, $i \geq 1$ sont les images de rang i de LC .

(iii) Il existe un voisinage U de E tel que $T(U) \subset U$, et tout point $x \in U \setminus E$ a une image de rang fini à l'intérieur de E .

Remarque 1: Une aire absorbante peut contenir un ou plusieurs attracteurs. Une aire absorbante E est invariante, $T(E) = E$, s'il existe un entier m fini tel que:

$$\partial E \subset \cup_{k=1}^m T^k(\gamma)$$

où ∂E est la frontière de E et $\gamma = E \cap LC_{-1}$. S'il n'existe pas d'entier m fini tel que la frontière ∂E soit incluse dans $\cup_{k=1}^m T^k(\gamma)$, l'aire absorbante E n'est pas invariante. L'intersection $\cap_{n>0} T^n(E)$ (n fini ou infini) est une aire absorbante invariante.

Seules les aires absorbantes invariantes sont utiles, lorsqu'on considère des contacts entre les frontières d'aires absorbantes et les frontières de leurs bassins d'attraction. Les aires absorbantes non invariantes sont, dans cette situation, généralement sans conséquence sur les ensembles invariants (exemple les attracteurs) qu'elles contiennent strictement.

Définition 3.2: Une aire invariante A , est appelée *aire chaotique*, si elle est absorbante minimale d'une certaine aire absorbante E (c'est-à-dire $A = \cap_{k \geq 0} T^k(E)$) et si une dynamique chaotique a lieu dans A tout entier.

Remarque 2: Dans la référence [MGBC] Mira & al. introduisent les notions d'aires absorbantes mixtes et d'aires chaotiques mixtes. La différence entre ces dernières notions et les notions d'aires absorbantes et d'aires chaotiques, est dans l'hypothèse (ii) de la définition d'une aire absorbante, qui est remplacée dans la définition d'une aire absorbante mixte, par l'hypothèse que la frontière est constituée d'un nombre fini ou infini de segments de lignes critiques LC_i , $i \geq 0$ et de segments de variétés instables d'un cycle col ou d'un point col, ou même de segments de variétés instables de différents cycles cols. Cependant, les raisonnements dans ce chapitre restent généralement inchangés, si à la place d'aires absorbantes standards (c'est-à-dire complètement bornées par des segments de lignes critiques), on est en présence d'aires absorbantes de type mixte.

Définition 3.3: On dit que $\lambda = \lambda^*$ est une *valeur de bifurcation de contact* d'une aire absorbante E , si en $\lambda = \lambda^*$ un contact a lieu entre la frontière de E et la frontière de son bassin d'attraction.

La proposition suivante est fondamentale pour les bifurcations de contact.

Proposition 3.1: Lorsqu'une bifurcation de contact d'une aire chaotique A a lieu, pour une valeur du paramètre $\lambda = \lambda^*$, la traversée de cette valeur conduit soit à la destruction de A donnant lieu à un répulseur étrange, soit à une modification qualitative des propriétés de A (c'est-à-dire une soudaine et importante modification de la taille de cette aire ou de son bassin d'attraction).

La destruction de l'aire chaotique A , après la traversée d'une valeur de bifurcation de contact, a été montrée par Gumowski et Mira [GM]. Il en résulte un répulseur étrange constitué d'une infinité de cycles instables, de leurs points limites et des séquences arborescentes de leurs antécédents appartenant à A avant la bifurcation. Un tel ensemble de points donne lieu à un transitoire chaotique vers l'infini ou vers un autre attracteur à distance finie.

Le changement qualitatif des propriétés de l'aire chaotique A , après la traversée d'une valeur de bifurcation de contact, a été montrée par Barugola & al. [BCM]. Parmi ces changements on citera la transformation d'une aire chaotique annulaire A (aire connexe avec un trou), soit en une aire simplement connexe (la valeur λ^* correspond à un contact entre la frontière de A et un foyer instable isolé appartenant à la frontière du bassin d'attraction de A), soit en une aire non connexe cyclique de période k . Deux autres types de changements qualitatifs des propriétés de A sont décrits par Mira et Narayaninsamy dans la référence [MN].

3.2 Bifurcations Homoclines

Définition 3.4: Soit S un point fixe répulsif de T ; un point q est appelé *homocline* à S , si $q \in W^s(S) \cap W^i(S)$ et $q \neq S$. On dit que q est un point *homocline transverse*, si $W^s(S)$ et $W^i(S)$ se coupent transversalement en q .

Définition 3.5: Soit q un point homocline à un point fixe répulsif S de T , et appartenant à un voisinage $U(S)$ de S . On appelle *orbite homocline* $O_o(q)$ associée à q , un ensemble constitué des itérés successifs de q , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse T_l^{-1} de T dans $U(S)$:

$$O_o(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où $q_n = T^n(q) \rightarrow S$, et $q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow S$.

Remarque 3: Il y a une infinité d'orbites homoclines associées à un point homocline. Celles-ci ont la même demie trajectoire positive, mais diffèrent par leur demie trajectoire négative.

Définition 3.6: Soient S_1 et S_2 deux points fixes répulsifs de T . On dit qu'un point q , appartenant à un voisinage $U(S_1)$ de S_1 , est *hétérocline* de S_1 vers S_2 , si $T^n(q) \rightarrow S_2$ quand n croît, et q appartient à l'ensemble instable local $W_{loc}^i(S_1)$ de S_1 dans $U(S_1)$.

Définition 3.7: On appelle *orbite hétérocline* $O_e(q)$ associée à $q \in U(S_1)$ et connectant S_1 à S_2 (ou orbite hétérocline de q), un ensemble constitué des itérés successifs de q , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse T_l^{-1} de T dans $U(S_1)$:

$$O_e(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où $q_n = T^n(q) \rightarrow S_2$, et $q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow S_1$.

Les orbites homoclines et hétéroclines sont classifiées par rapport à l'ensemble des antécédents de premier rang confondus LC_{-1} et l'ensemble suivant:

$$J_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \det(DT(x, y)) = 0 \text{ ou } T \text{ n'est pas différentiable en } (x, y)\}$$

Remarque 4: Il est évident que $LC_{-1} \subset J_0$.

Définition 3.8: Une orbite homocline ou hétérocline est appelée *dégénérée*, si elle contient un point de J_0 , dans le cas contraire on dit qu'elle est *non dégénérée*. Parmi les orbites dégénérées, on distingue les orbites homoclines (ou hétéroclines) dégénérées *critiques*, si elles contiennent un point de LC_{-1} , dans le cas contraire on dit qu'elles sont *non critiques*.

Définition 3.9: Soit T un endomorphisme de \mathbb{R}^2 dépendant d'un paramètre λ , et soit S un point fixe répulsif de T . On dit qu'en $\lambda = \lambda^*$ une bifurcation homocline (ou explosion homocline) de S a lieu, si en traversant la valeur λ^* il y a apparition (ou disparition) d'une infinité d'orbites homoclines.

On sait, d'après Gardini [Ga4], qu'aux valeurs de bifurcations homoclines d'un point fixe répulsif P de type noeud ou foyer, les orbites homoclines qui naissent (ou disparaissent) sont toutes critiques et le point fixe P est un point critique d'un certain rang i ($P \in LC_i$, $i \geq -1$). Par contre les orbites homoclines dégénérées non critiques et les orbites homoclines non dégénérées persistent lorsqu'on traverse une valeur de bifurcation homocline (c'est-à-dire qu'elles sont structurellement stables).

Marotto [Mar] a prouvé que si q est un point homocline non dégénéré d'un point fixe P de type noeud instable ou foyer instable d'un endomorphisme T , alors au voisinage de P il y a chaos au sens de Li et Yorke (c'est-à-dire que dans tout voisinage de P il existe une infinité de cycles répulsifs de T). Ce résultat est étendu par Gardini [Ga4], pour le cas d'un point homocline dégénéré critique ou non critique.

Une explosion d'orbites homoclines d'un point fixe répulsif S , signifie une explosion de cycles de l'application. Cette infinité de cycles naît de bifurcations connues flip et fold. Ainsi les valeurs de bifurcations homoclines, sont probablement des points d'accumulations de valeurs de bifurcations simples.

Comme les orbites homoclines critiques d'un point fixe S , impliquent la naissance de nouvelles branches dans les séquences d'antécédents de S , nous pouvons dire qu'une bifurcation homocline représente une explosion de l'ensemble stable globale $W^s(S)$.

La bifurcation de contact peut correspondre à une bifurcation homocline ou hétérocline. Ceci est prouvé par Gardini [Ga4] pour le cas d'un noeud instable ou d'un foyer instable. Dans le cas d'un point fixe col S^* sur la frontière du bassin d'attraction D d'une aire chaotique A , une bifurcation de contact, telle que $T^n(h_0) \rightarrow S^*$ où $h_0 \in \partial A \cap \partial D(A)$ à la bifurcation, peut correspondre à des naissances d'orbites homoclines de S^* . C'est une conjecture, qui a été vérifiée par Gardini [Ga3] pour le cas des systèmes dynamiques définies par des applications linéaires par morceaux. D'autres exemples de naissance d'orbites homoclines de points fixes cols, ayant lieu au cours de bifurcations de contact

d'aires chaotiques, sont donnés par Gardini & al. dans les références [Ga1], [Ga2] et [GAFPR].

On est au moins sûr qu'il n'existe pas d'orbite homocline d'un point fixe col S^* , se trouvant sur la frontière du bassin d'attraction d'une aire chaotique, avant la bifurcation de contact. En effet, comme la branche de l'ensemble instable de S^* , qui est dans le bassin d'attraction, pénètre au bout d'un certain temps (un nombre fini d'itérations) dans l'aire chaotique et que cette dernière, avant la bifurcation de contact, n'a pas de contact avec la frontière de son bassin d'attraction (la frontière étant constituée de l'ensemble stable de S^*); par conséquent il n'y a pas de contact entre les ensembles stable et instable de S^* .

3.3 Propriétés de $W^s(S)$, de $W^i(S)$ et d'une CFI

1- En général la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur A , est constituée de la variété stable globale $W^s(S)$ d'un point fixe col S (ou d'un cycle col). Dans le cas d'un difféomorphisme, $W^s(S)$ est toujours connexe, ce qui n'est pas vrai dans le cas d'un endomorphisme. En effet, comme au voisinage d'une branche de la ligne critique LC on est localement dans une situation du type $Z_0 - Z_2$, alors sous les hypothèses de la proposition 3.3 du chapitre précédent et suite à une variation d'un paramètre de l'endomorphisme, $W^s(S)$ touche puis traverse LC , il en résulte que $W^s(S)$ devient non connexe. Dans ce cas, la variété stable locale $W_{loc}^s(S)$ délimite le bassin immédiat de A , et chacune des autres composantes connexes de $W^s(S)$ se referme pour constituer la frontière d'un îlot. Ceci transforme notre bassin d'attraction connexe en un bassin non connexe.

2- Dans le cas d'un endomorphisme T , la variété instable $W^i(S)$ d'un point fixe col S peut avoir des points d'auto-intersections, lorsque celle-ci traverse LC_{-1} en un point a_0 , ce qui n'est pas vrai dans le cas d'un difféomorphisme. En effet, si à la suite d'une variation d'un paramètre de l'endomorphisme T , la tangente à $W^i(S)$ en a_0 devient colinéaire à ν_0 , vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_0 = 0$ de la transformation T_l issue de la linéarisation de T en tout point de LC_{-1} , il se produit une bifurcation donnant naissance à un point cuspidal sur $W^i(S)$ en $a_1 = T(a_0) \in LC$ et donc à une infinité de points cuspidaux sur $W^i(S)$ en $a_i = T^i(a_0) \in LC_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Ces points cuspidaux sont les germes d'une infinité de boucles de $W^i(S)$. Après cette bifurcation, $W^i(S)$ et $[W^i(S)]^{-1}$, qui se coupaient avant la bifurcation en un seul point $a_0 \in LC_{-1}$, ont deux autres points d'intersections de part et d'autre de LC_{-1} dont l'image par T est unique et constitue un point d'auto-intersection de $W^i(S)$. Par conséquent les images successives de ce point donnent une infinité de points d'auto-intersections de $W^i(S)$.

3 - On retrouve la bifurcation expliquée ci-dessus, pour le cas d'une courbe fermée invariante Γ (CFI) traversant LC_{-1} . Cette bifurcation, créant des points d'auto-intersections sur Γ , est importante car elle est responsable de la transformation d'une courbe fermée invariante Γ en un attracteur chaotique. En

effet, un point d'auto-intersection de la courbe est un point de non différentiabilité. Or, on rappelle que pour une courbe fermée invariante, le nombre de rotation associé est irrationnel. Il existe par conséquent une infinité de points d'auto-intersections et donc de points de non différentiabilité, reproduits par autosimilarité et images successives de T , ce qui signifie que Γ devient fractale. Sa dimension de Lyapounov est alors supérieure à 1 et augmentera en fonction de la variation du paramètre de bifurcation, ce qui génère d'abord une zone chaotique annulaire, puis un attracteur chaotique.

Pour un difféomorphisme, la variété instable $W^i(S)$ peut seulement converger en spirale vers une CFI, sans jamais la traverser. Ce qui n'est pas le cas pour un endomorphisme.

3.4 Etude d'un Endomorphisme de Type Z_1 - Z_3 - Z_1

Considérons l'endomorphisme T défini par

$$\begin{cases} x' = x^3 + a.x + b + y \\ y' = c.x + d.y \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des paramètres réels. La recherche des déterminations inverses permet d'affirmer que cet endomorphisme est de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$, dont les régions Z_1 et Z_3 sont délimitées par les lignes critiques $LC = LC_0 = T(LC_{-1})$ et $LC' = LC'_0 = T(LC'_{-1})$, ayant pour équations

$$\begin{cases} LC_{-1} \Leftrightarrow x = +\sqrt{\frac{c-a.d}{3d}} \\ LC'_{-1} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{c-a.d}{3d}} \\ LC \Leftrightarrow y = d.x - d.x_0^3 - (a.d - c)x_0 - d.b \\ LC' \Leftrightarrow y = d.x + d.x_0^3 + (a.d - c)x_0 - d.b \end{cases}$$

$$\text{où } x_0 = \sqrt{\frac{c-a.d}{3d}}.$$

3.4.1 Frontière fractale du bassin immédiat d'attraction

Fixons nous les valeurs des paramètres a, b, c et faisons varier le paramètre d . Pour les valeurs $a = -0.89, b = 1, c = -1$ et d variant dans le sens décroissant de la valeur -1.15 à la valeur -1.5 , on a les situations suivantes:

1 - Pour $d = -1.15$ (fig.3.1), on a un attracteur chaotique cyclique d'ordre trois, de dimension de Lyapounov égale à 1.63. Cet attracteur résulte d'une cascade de bifurcations flip de cycles d'ordre $3.2^i, i = 0, 1, 2, \dots$. Son bassin immédiat d'attraction D_0 est simplement connexe. En effet, puisque $D_0 \cap LC$ est connexe.

2 - Pour $d = -1.250$ (fig.3.2), l'attracteur est un cycle d'ordre trois de courbes fermées. Son bassin immédiat d'attraction D_0 est multiplement connexe, c'est-à-dire connexe avec des trous $H_j^{i_1, i_2, \dots}, i_k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots$ (ou lacs), puisque

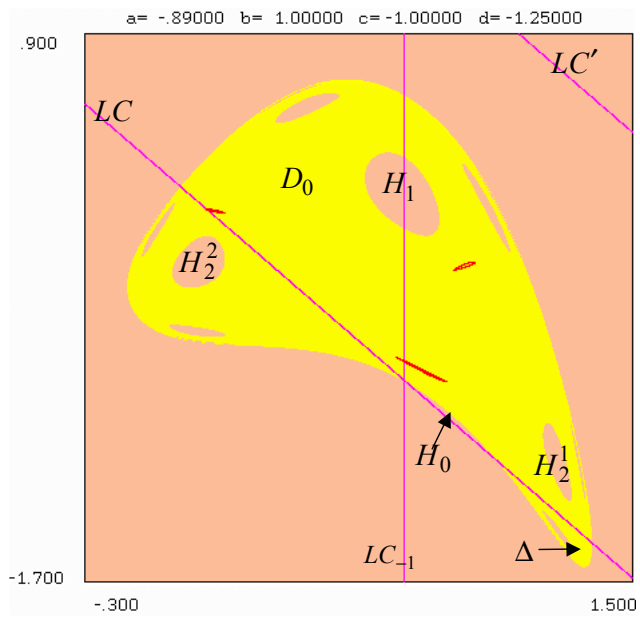
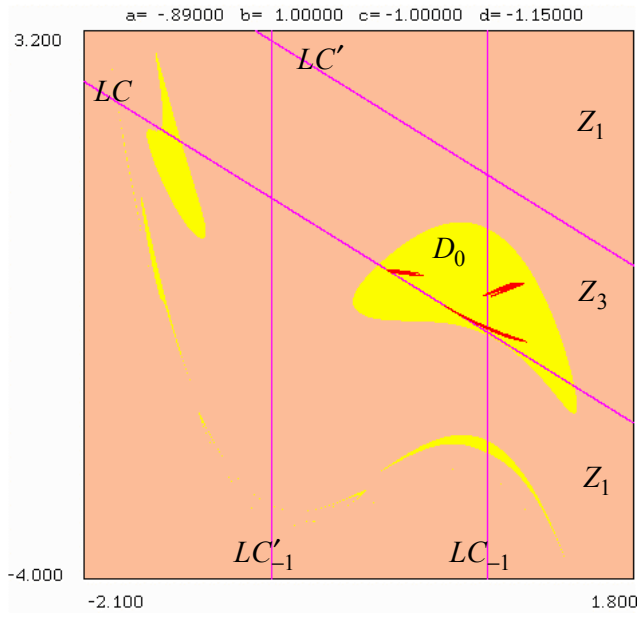
$D_0 \cap LC$ n'est plus connexe. Les $H_j^{i_1, i_2, \dots}$ sont les préimages de la baie H_0 par les déterminations inverses T^{-i} , $i = 1, 2, 3$ de l'endomorphisme T . La baie H_0 est numériquement visible à partir de la valeur $d = -1.151$, c'est-à-dire qu'on a une valeur de bifurcation "simplement connexe \leftrightarrow multiplement connexe" entre les valeurs $d = -1.150$ et $d = -1.151$.

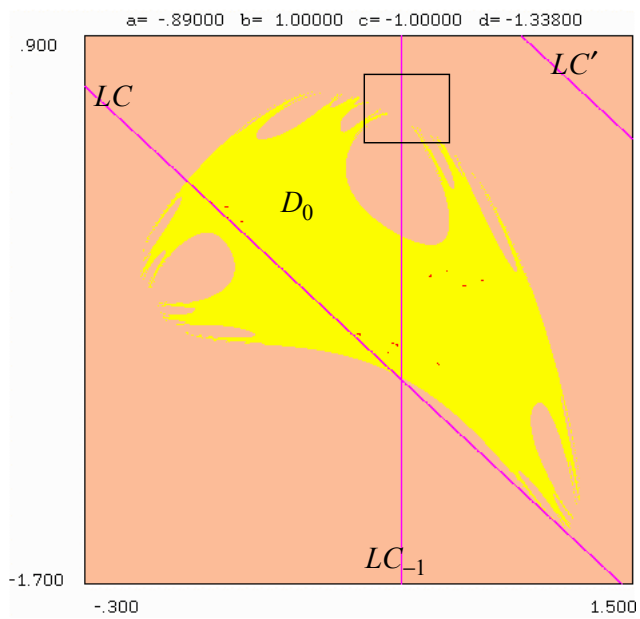
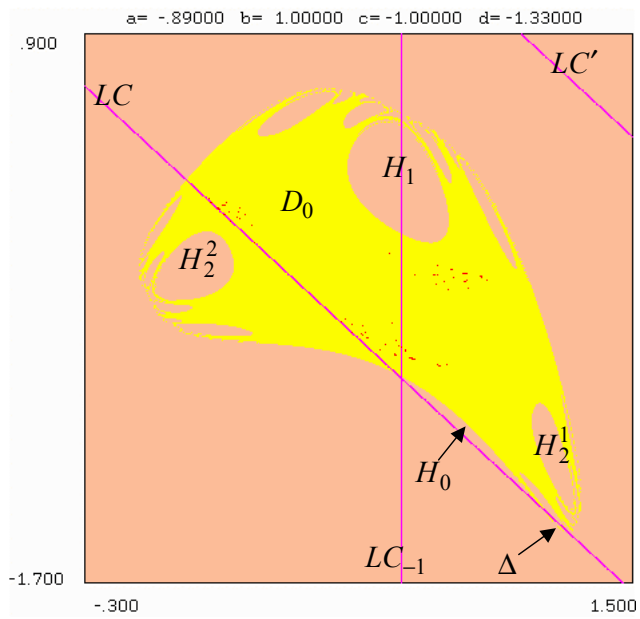
3 - En diminuant encore la valeur du paramètre d , les lacs se rapprochent de la frontière externe de D_0 (fig.3.3). Ceci est lié au déplacement du cap Δ , qui tend à se situer entièrement dans la région Z_3 , quand le paramètre d diminue. Autrement dit, la baie H_0 tend à disparaître et $D_0 \cap LC$ à redevenir connexe.

4 - On voit sur la figure 3.4 que les lacs du bassin immédiat se sont transformés en baies. Cette bifurcation a eu lieu entre les valeurs $d = -1.335$ et $d = -1.336$. Elle résulte du fait que le cap Δ a traversé LC , entre les deux valeurs précédentes, et se trouve entièrement dans la région Z_3 ; autrement dit $D_0 \cap LC$ est redevenu connexe.

Les sommets des baies sont des points de rebroussements de deuxième espèce (fig.3.5). Ils constituent une séquence arborescente de préimages d'un cycle d'ordre deux de noeuds instables, se trouvant sur la frontière de D_0 , et qui sont eux même des points de rebroussements de deuxième espèce. Les valeurs propres S_1 et S_2 de ce cycle sont de signes différents, $S_1 < 0$, $S_2 > 0$, et $|S_1| < S_2$. Jusqu'à la valeur $d = -1.5$, on a $S_1 < 0$ et $S_2 > 0$; de plus pour $d > -1.36522$ on a $|S_1| < S_2$, pour $d = -1.36522$ on a $|S_1| = S_2$ et pour $d < -1.36522$ on a $|S_1| > S_2$. Autrement dit les points du cycle et leur séquence arborescente de préimages, qui étaient des points de rebroussements de deuxième espèce pour $d > -1.36522$, deviennent des points de rebroussements de première espèce (des points cusps) pour $d < -1.36522$. Ces points cusps, en nombre infini, se trouvent sur des arcs fractals de la frontière du bassin immédiat D_0 (fig.3.6); ainsi on peut affirmer que la frontière de D_0 est fortement fractale.

Si on fixe $b = 1$, $c = -1$, $d = -1.5$ et on fait varier a de -0.89 à -1 , l'attracteur qui est une courbe fermée invariante pour $a = -0.89$ (fig.3.6), évolue pour devenir attracteur chaotique annulaire pour $a = -0.95$ (fig.3.7) et attracteur chaotique pour $a = -1$ (fig.3.8) avec une dimension de Lyapounov égale à 2.





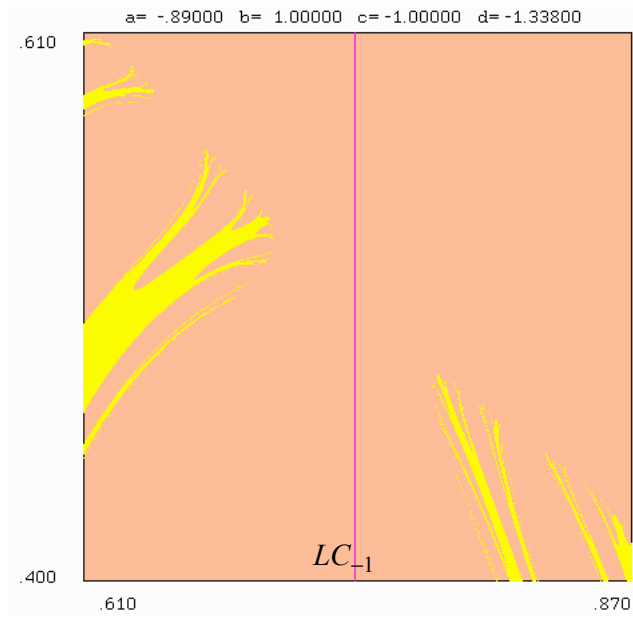


Figure 3.5

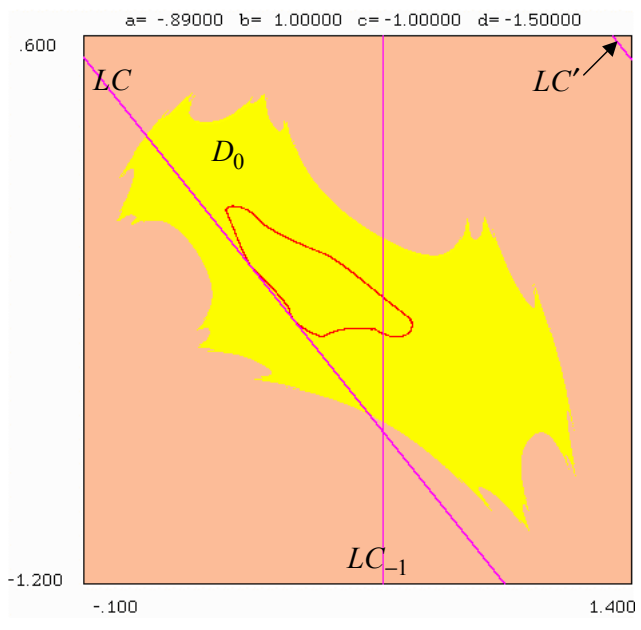


Figure 3.6

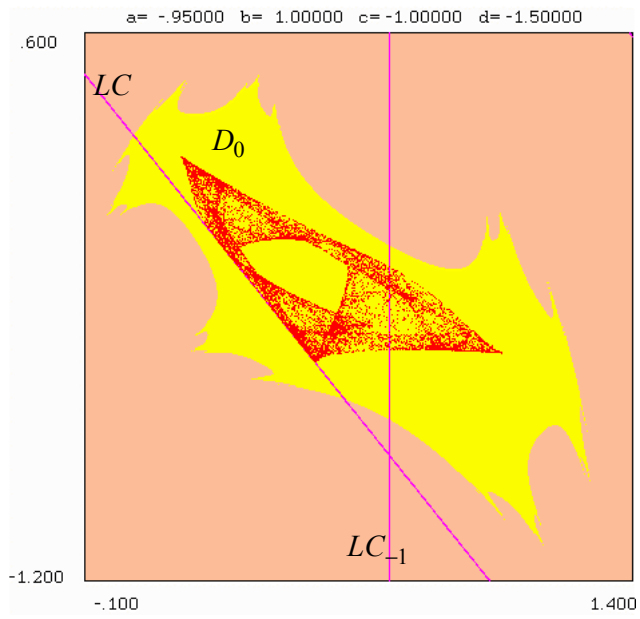


Figure 3.7

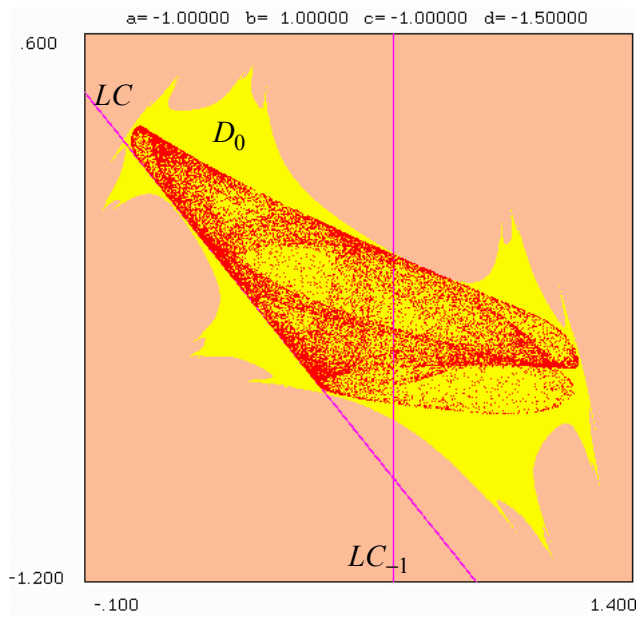


Figure 3.8

3.4.2 Bifurcation hétérocline

Pour les valeurs $a = -1$, $b = 1.004$, $c = -1.088$ et $d = -0.46$ (fig.3.9), on a un attracteur chaotique cyclique d'ordre quatre, de dimension de Lyapounov égale à 1.19, autour d'un point fixe foyer instable O . Le bassin immédiat d'attraction D_0 de l'attracteur chaotique est multiplement connexe et est délimité par l'ensemble stable $W^s(S)$ d'un point fixe col S . $W^s(S)$ est non connexe et sa composante connexe contenant S est la frontière externe de D_0 . Les autres composantes connexes sont les frontières des trous ou lacs H_{-i} , $i \geq 1$, se trouvant dans D_0 et qui sont les préimages de la baie H_0 ($H_{-1} = T_1^{-1}(H_0) \cup T_2^{-1}(H_0)$, $H_{-i} = T_2^{-i}(H_0)$, $i = 2, 3$). Les lignes critiques $LC_i = T^{i+1}(LC_{-1})$, $i = 0, 1, 2$, délimitent une zone dont l'intersection avec le bassin immédiat D_0 donne une zone absorbante E contenant l'attracteur chaotique.

En faisant diminuer la valeur du paramètre b on a les situations suivantes: Pour $b = 1.0024$ on voit, sur la figure 3.10 et sur un zoom dans la région du foyer instable O (fig.3.11), que l'on a une infinité de trous qui convergent vers O . Cette situation résulte de la bifurcation suivante:

A la valeur $b^* \simeq 1.00305$ un contact a lieu respectivement entre les lignes critiques LC_i et les frontières ∂H_{i-3} en des points (critiques) a_i , $i = 0, 1, 2$. En cette valeur de bifurcation l'ensemble stable $W^s(S)$ est constitué des frontières $\partial_e D_0$, ∂H_{-i} , $i \geq 1$, et des préimages du point critique $a_0 \in LC \equiv LC_0$. La préimage $a_{-1} = T_2^{-1}(a_0) = T_3^{-1}(a_0) \in LC_{-1}$ se trouve dans la région qu'occupait la zone absorbante E avant la bifurcation. Il en découle qu'une séquence de préimages $a_{-n} = T_2^{-n+1}(a_{-1})$, $n > 1$, de a_{-1} converge vers le foyer instable O . Autrement dit, à la valeur de bifurcation b^* il y a apparition de la première orbite hétérocline connectant O à S . Cette orbite hétérocline, constituée de a_{-1} , de ses images $T^n(a_{-1})$, $n > 0$, convergeant vers S , et de ses préimages a_{-n} , $n > 1$, convergeant vers O , est dégénérée critique puisque $a_{-1} \in LC_{-1}$. La naissance de cette orbite hétérocline critique est suivie d'une explosion d'orbites hétéroclines pour $b < b^*$. En effet, pour $b < b^*$, une avancée (après le contact) de H_{-1} , dans la région de l'ancienne zone absorbante E , génère à partir des a_{-n} , $n > 0$, une infinité de trous U_{-n} qui convergent vers O (fig.3.12). L'ensemble stable $W^s(S)$ est donc constitué des frontières $\partial_e D_0$, ∂H_{-i} , $i \geq 1$ et ∂U_{-n} , $n > 0$. Ainsi la frontière ∂U_{-1} est constituée de points hétéroclines appartenant à différentes orbites hétéroclines connectant O à S ; chaque orbite étant formée d'un point $q \in \partial U_{-1}$, de ses images et de ses préimages par T_2^{-1} .

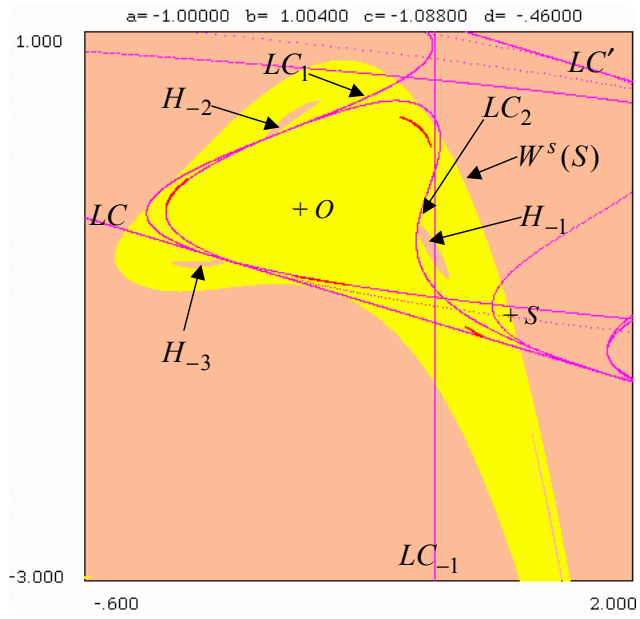


Figure 3.9

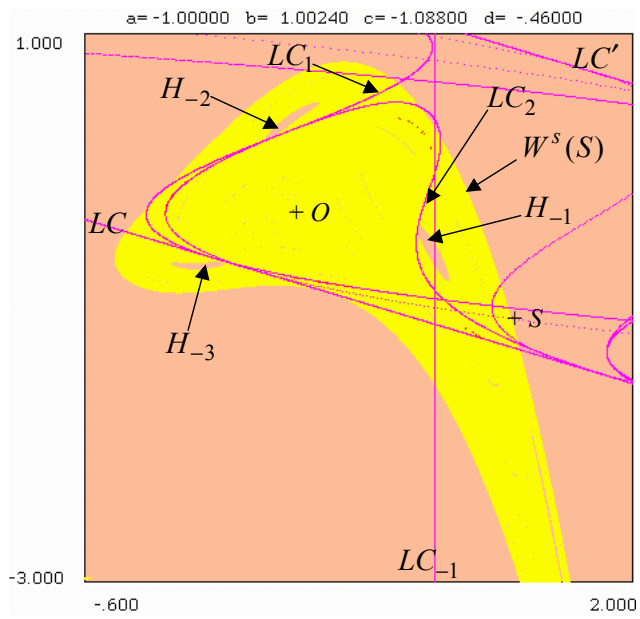


Figure 3.10

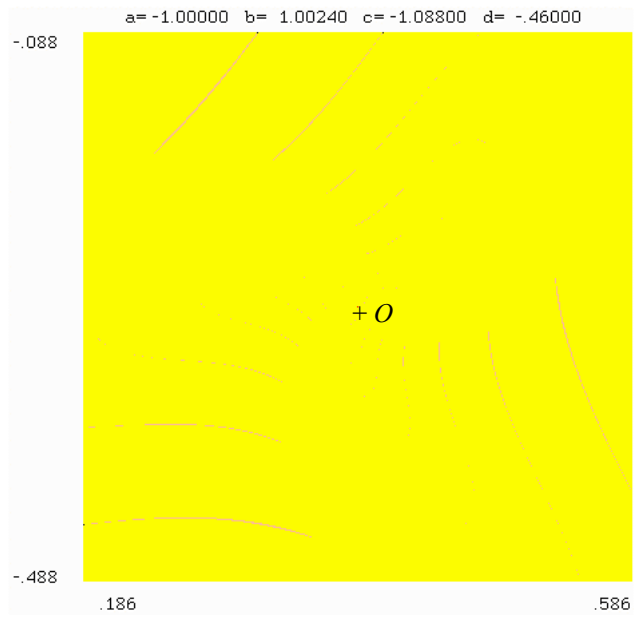


Figure 3.11

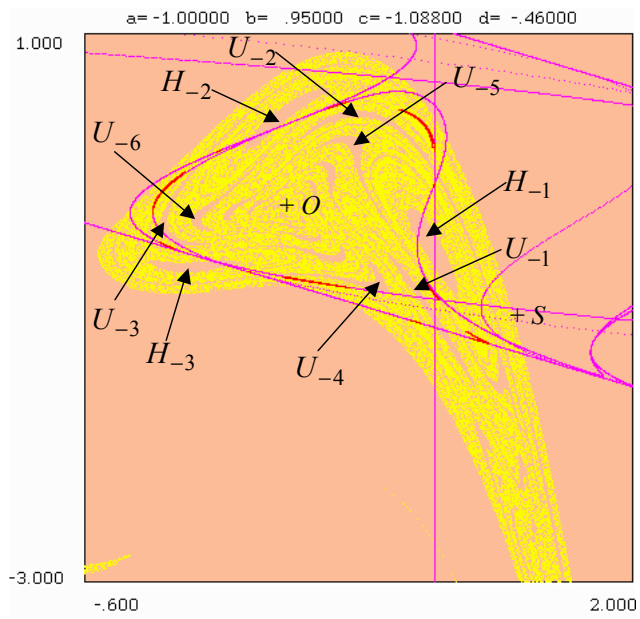


Figure 3.12

3.4.3 Bifurcation de contact et bifurcation homocline

Pour les valeurs $a = -1$, $b = 1$, $d = -0.9$ et c variant dans le sens décroissant, on a les situations suivantes:

1 - Pour $c = -0.92$ (fig.3.13), on a un attracteur chaotique résultant d'une suite de bifurcations flip de cycles d'ordre $3 \cdot 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Sa dimension de Lyapounov est égale à 1.81. Des langues de l'attracteur, de sommet h_i , $i = 1, 2, \dots$, convergent vers la frontière du bassin, c'est-à-dire vers $W^s(S)$, alternativement de part et d'autre de S , et ceci lorsque le paramètre c diminue (fig.3.14). La branche de $W^i(S)$ entrante dans le bassin, pénètre dans l'attracteur après un nombre fini d'itérations. Cette branche de $W^i(S)$ est dense dans l'attracteur et de ce fait converge aussi vers $W^s(S)$.

2 - Pour $c = c_1 = -0.94643$ (fig.3.15), les sommets h_i , $i = 1, 2, \dots$, touchent quasiment la frontière du bassin (c'est-à-dire $W^s(S)$), et convergent dans la direction de $W^s(S)$ vers S alternativement des deux côtés de celui-ci. c_1 est une valeur très proche de la valeur de bifurcation de contact, puisque pour $c_2 = -0.94644 < c_1$ l'attracteur dégénère (disparaît). On voit sur un zoom au voisinage de S , qu'à la valeur $c = c_1$ (fig.3.16) la branche de $W^i(S)$, qui est dans le bassin, est très proche mais ne touche pas $W_{loc}^s(S)$. Cette branche se comporte dynamiquement comme l'attracteur, puisqu'elle est dense dans celui-ci. Pour $c = c_2$ (fig.3.17), on voit dans le voisinage de S , que $W^i(S)$ traverse $W_{loc}^s(S)$. On en déduit qu'une bifurcation homocline a lieu entre les valeurs c_1 et c_2 . Celle-ci coïncide avec la dégénérescence de l'attracteur; autrement dit, les points de contact entre $W^i(S)$ et $W_{loc}^s(S)$, à la bifurcation homocline, coïncident avec les sommets h_i , $i = 1, 2, \dots$, des langues de l'attracteur, à la bifurcation de contact. Ainsi, la conjecture donnée par Gardini [Ga3] se vérifie pour le cas de notre endomorphisme de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$.

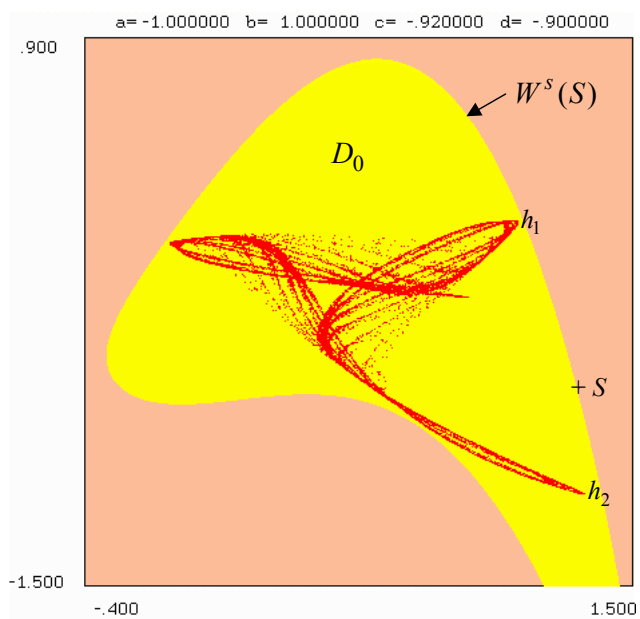


Figure 3.13

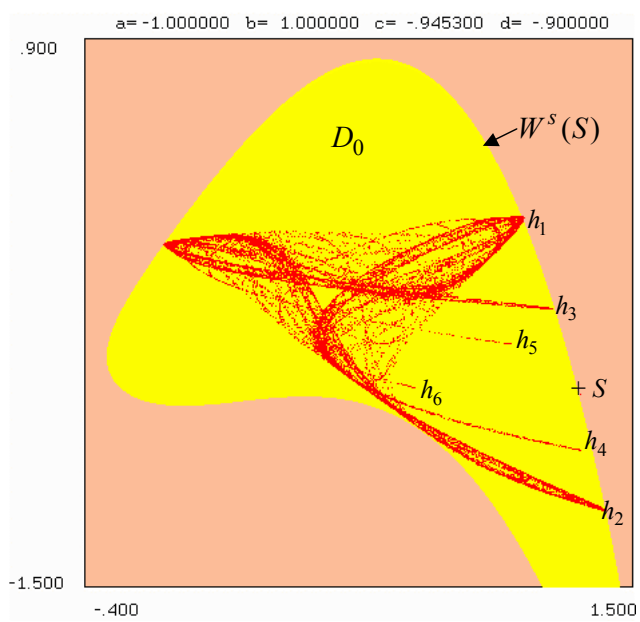


Figure 3.14

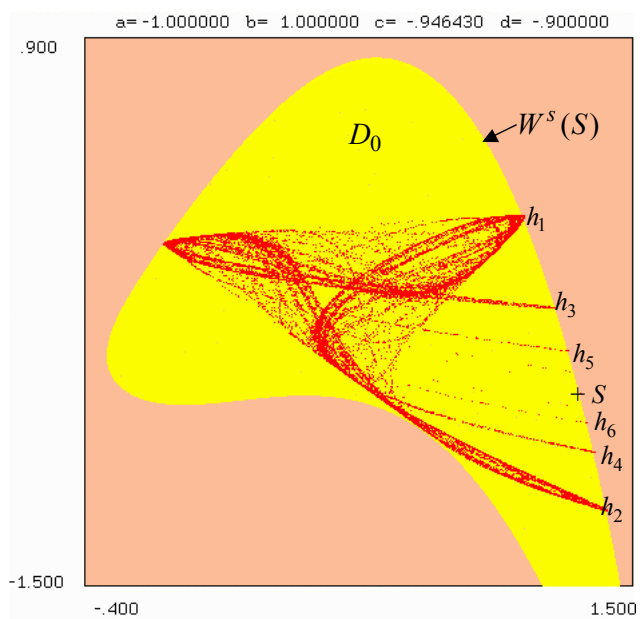


Figure 3.15

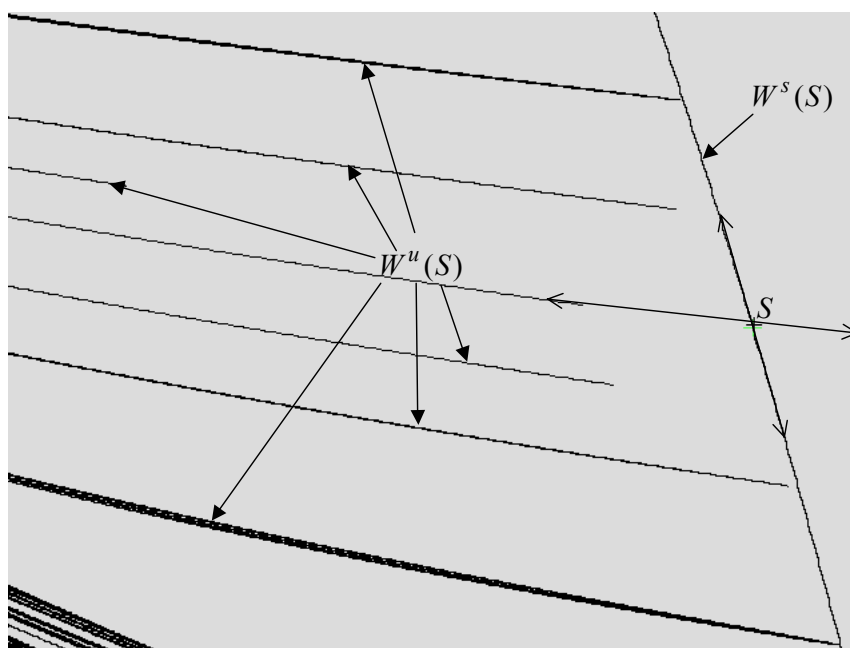


Figure 3.16

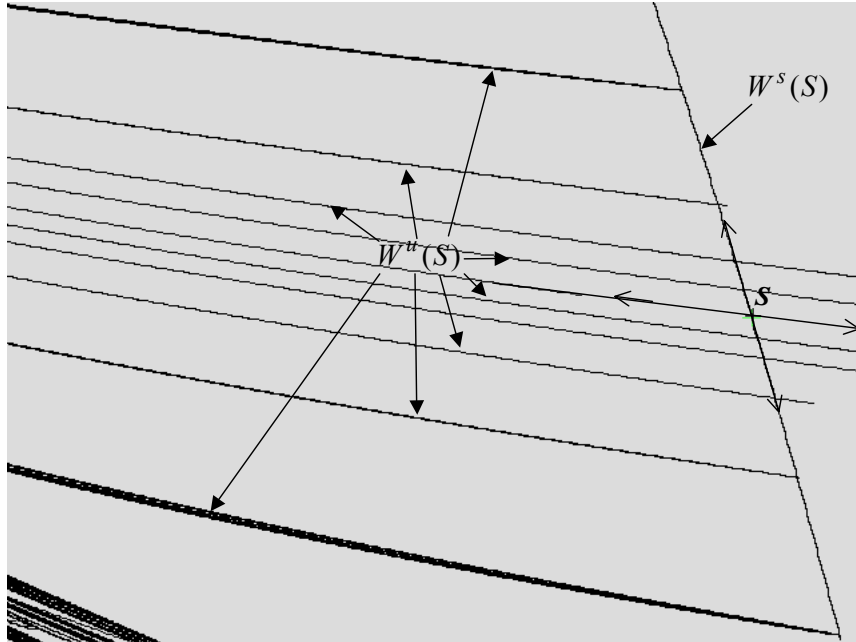


Figure 3.17

3.4.4 Balayage des plans paramétriques

Le balayage des plans paramétriques $(a, b, -1, -1.5)$ (fig.3.18), $(a, 1, c, -1.5)$ (fig.3.19) et $(a, 1, -1, d)$ (fig.3.20), nous donne les zones d'existence et de stabilité, avec différentes couleurs, des cycles d'ordre un jusqu'à l'ordre quatorze. Les zones de couleur noire, dans ces figures, correspondent soit à des cycles stables d'ordre supérieur ou égal à quinze soit à des attracteurs chaotiques. Les zones de couleur blanche correspondent à la non existence d'attracteurs dans le plan de phase. La frontière d'une zone, correspond à des courbes de bifurcations des cycles ou des attracteurs chaotiques associés à cette zone. Le balayage du plan paramétrique $(a, 1, c, -1.5)$ de notre récurrence cubique, présente de grandes similitudes avec le balayage du plan paramétrique de la récurrence quadratique $(x', y') = (a.x + y, x^2 + b)$ étudiée par Mira, Fournier-Prunaret & al. [MFP]. En effet, on remarque que dans la zone noire des deux plans paramétriques, on a le même alignement des zones d'existence et de stabilité des cycles. Autrement dit, un agrandissement de la figure11(a) des auteurs cités ci-dessus et de notre figure 3.19, permet de voir que ces zones sont disposées suivant une même séquence dans l'ordre des cycles suivants:

(...,13,11,9,7,12,10-5-10,13,8,11,14,6-12,3-6-12,
13,10,7,11,8-4-8,13,9,14,5,12-6,11,6,13,7,8,9,10,....).

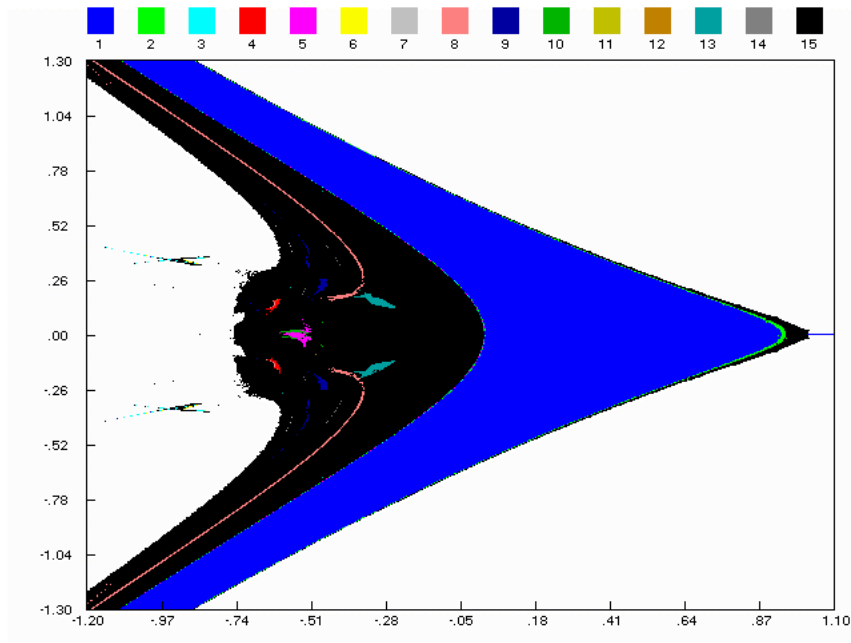


Figure 3.18

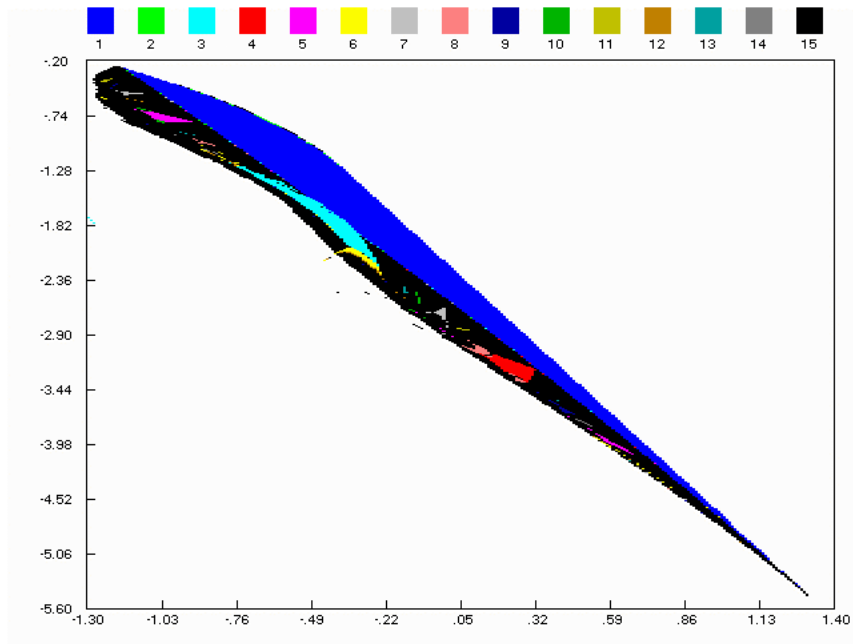


Figure 3.19

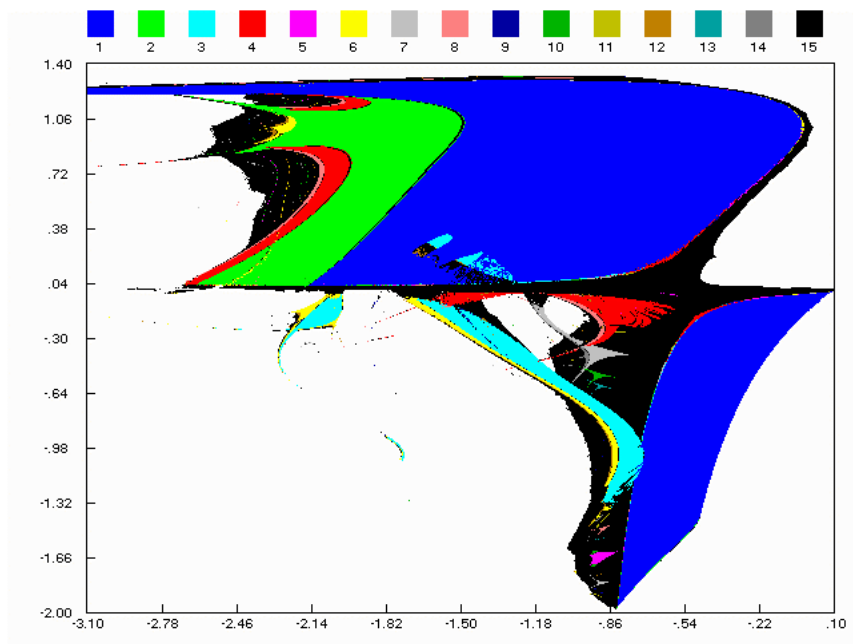


Figure 3.20

Chapitre 4

Systemes Dynamiques Définis par des Applications avec Dénominateur

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier les propriétés dynamiques et les bifurcations de contact liées aux applications bidimensionnelles dans \mathbb{R}^2 , et dont au moins une de leurs composantes est avec dénominateur pouvant s'annuler. On rappellera les notions de points focaux et de courbes préfocales [BGM] définies pour ce type d'application, lorsqu'une de ses composantes prend la forme $0/0$ en un point de \mathbb{R}^2 . On montrera le lien qui existe entre la connexité du bassin d'attraction d'un attracteur et la localisation du point focal, à l'intérieur ou à l'extérieur de ce bassin d'attraction. On terminera ce chapitre, en faisant l'étude des notions citées ci-dessus, pour le cas de certaines applications ayant une inverse fractionnel rationnel, en particulier l'application de Bogdanov.

4.1 Définitions et Propriétés Générales des Points Focaux et des Courbes Préfocales

On considère une application dans \mathbb{R}^2 , définie par $(x', y') = T(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$, où x et y sont des variables réelles et au moins une des composantes de T est une fonction rationnelle avec dénominateur pouvant s'annuler. Pour simplifier l'étude, on supposera qu'une seule composante est avec dénominateur, par exemple $G(x, y) = N(x, y)/D(x, y)$; ainsi l'application T s'écrit

$$T(x, y) = \begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) = \frac{N(x, y)}{D(x, y)} \end{cases} \quad (4.1)$$

où $F(x, y)$, $N(x, y)$ et $D(x, y)$ sont des fonctions polynômiales définies dans \mathbb{R}^2 . L'ensemble de non-définition de T est donné par:

$$\delta_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(x, y) = 0\}. \quad (4.2)$$

On supposera, dans toute la suite, que δ_s est une courbe régulière du plan. La récurrence bidimensionnelle, obtenue par l'application T , sera bien définie, si les conditions initiales appartiennent à l'ensemble E donné par

$$E = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\delta_s) \quad (4.3)$$

Définition 4.1: On appelle $Q = (x_0, y_0)$ un *point focal* de l'application T définie en (4.1), si au moins une composante de l'application T prend la forme $0/0$ en Q et s'il existe des arcs simples réguliers $\gamma(\tau)$ transverse à δ_s , avec $\gamma(0) = Q$, tel que $\lim_{\tau \rightarrow 0} T(\gamma(\tau))$ est finie. L'ensemble de toutes ces valeurs finies, obtenues en prenant différents arcs $\gamma(\tau)$ passant par Q , est appelé *courbe préfocale* δ_Q .

Remarque 1: On parlera de point focal simple, si l'intersection des courbes $N(x, y) = 0$ et $D(x, y) = 0$ au point focal $Q = (x_0, y_0)$ est transverse. Ce qui équivaut à:

$$\partial N / \partial x(x_0, y_0) \partial D / \partial y(x_0, y_0) - \partial N / \partial y(x_0, y_0) \partial D / \partial x(x_0, y_0) \neq 0 \quad (4.4)$$

Remarque 2: L'application T n'est pas définie au point $\gamma(0) = Q$, point d'intersection de $\gamma(\tau)$ et de δ_s , donc lorsqu'on prend l'image $T(\gamma(\tau))$, on suppose que l'arc $\gamma(\tau)$ est privé du point en lequel il coupe δ_s .

Remarque 3: Si l'inverse T^{-1} est connu explicitement, on pourra alors calculer analytiquement la courbe pré focale et le point focal. Pour cela, on recherche l'ensemble des points qui annulent le Jacobien $\det(DT^{-1})$. Si cet ensemble contient une courbe δ telle que $T^{-1}(\delta)$ se réduit à un point Q , alors δ est une courbe pré focale pour l'application T et Q le point focal associé.

la proposition qui suit, montre que $\lim_{\tau \rightarrow 0} T(\gamma(\tau))$ dépend uniquement de la pente m de l'arc $\gamma(\tau)$ au point Q , et non pas de $\gamma(\tau)$ lui même. Cette proposition a été démontrée par Bischi & al. [BGM].

Proposition 4.1: Soit T une application fractionnelle rationnelle de la forme (4.1), et soit Q un point focal simple associé à la courbe pré focale δ_Q . Alors il existe une correspondance biunivoque entre la pente m d'un arc γ passant par Q , transverse à δ_s , et le point $(F(Q), y = \lim_{\tau \rightarrow 0} G(\gamma(\tau)))$ par lequel $T(\gamma)$ traverse δ_Q . Cette correspondance est donnée par

$$m \rightarrow (F(Q), y(m)) = \left(F(Q), \frac{\overline{N_x} + m\overline{N_y}}{\overline{D_x} + m\overline{D_y}} \right) \quad (4.5)$$

et

$$(F(Q), y) \rightarrow m(y) = \frac{\overline{D_x} \cdot y - \overline{N_x}}{\overline{N_y} - \overline{D_y} \cdot y} \quad (4.6)$$

où $\overline{N_x} = \partial N / \partial x(x_0, y_0)$ et analogiquement pour les autres dérivées partielles.

4.2 Propriétés Géométriques des Points Focaux et des Courbes Pré focales

Dans ce paragraphe on étudie le changement qualitatif de l'image $T(\gamma)$ (respectivement de $T^{-1}(\gamma)$, en supposant que T^{-1} existe et est unique) d'un segment de courbe γ , lorsque ce dernier a un contact, suite à une variation d'un paramètre de T , avec l'ensemble de non-définition δ_s de T (respectivement avec une courbe pré focale δ_Q).

Considérons un segment de courbe borné régulier γ , entièrement contenu dans une région où le dénominateur de l'application T ne s'annule pas, et telle que l'application est continue en tout points de γ . Puisque γ est un sous ensemble compact de \mathbb{R}^2 , son image $T(\gamma)$ est aussi compact. Supposons qu'après un déplacement de γ vers δ_s , un contact tangentiel entre γ et δ_s a lieu en un point $A_0 = (x_0, y_0)$ non focal. Il en découle que l'image $T(\gamma)$ n'est plus compact et est l'union de deux branches non bornées disjointes asymptotiques à la droite σ d'équation $x = F(x_0, y_0)$ (fig.4.1). En effet, $T(\gamma) = T(\gamma_1) \cup T(\gamma_2)$, où γ_1 et

γ_2 sont les deux portions de γ séparées par le point $A_0 = \gamma \cap \delta_s$, et la limite de $T(x, y)$ quand $(x, y) \rightarrow A_0$ le long de γ_1 et γ_2 est égale à:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow A_0} T(x, y) = (F(x_0, y_0), \infty)$$

Dans une telle situation, il en résulte que toute image $T^k(\gamma)$ de γ de rang $k > 1$, contient deux branches non bornées disjointes asymptotiques à l'image $T^k(\sigma)$ de rang k de la droite σ .

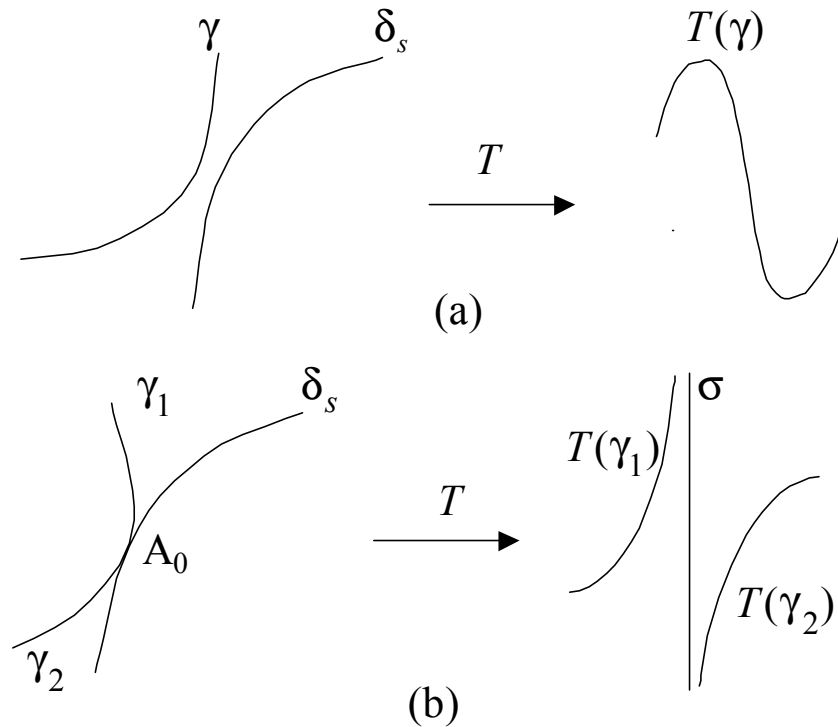


Figure 4.1

Le changement qualitatif de l'image de l'arc γ , comme décrit ci-dessus, peut représenter une importante bifurcation de contact, quand γ est la variété instable locale W_{loc}^i d'un point col ou d'un cycle col. En effet l'apparition d'une branche non bornée de $W^i = \cup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^i)$, au contact de W_{loc}^i avec δ_s , peut donner naissance à des points homoclines, résultant d'une intersection transverse entre les variétés stable et instable W^s et W^i . Autrement dit, ce type de points homoclines que l'on trouve dans le cas d'applications avec dénominateur, ne provient pas de la tangence homoclinique connue entre W^s et W^i .

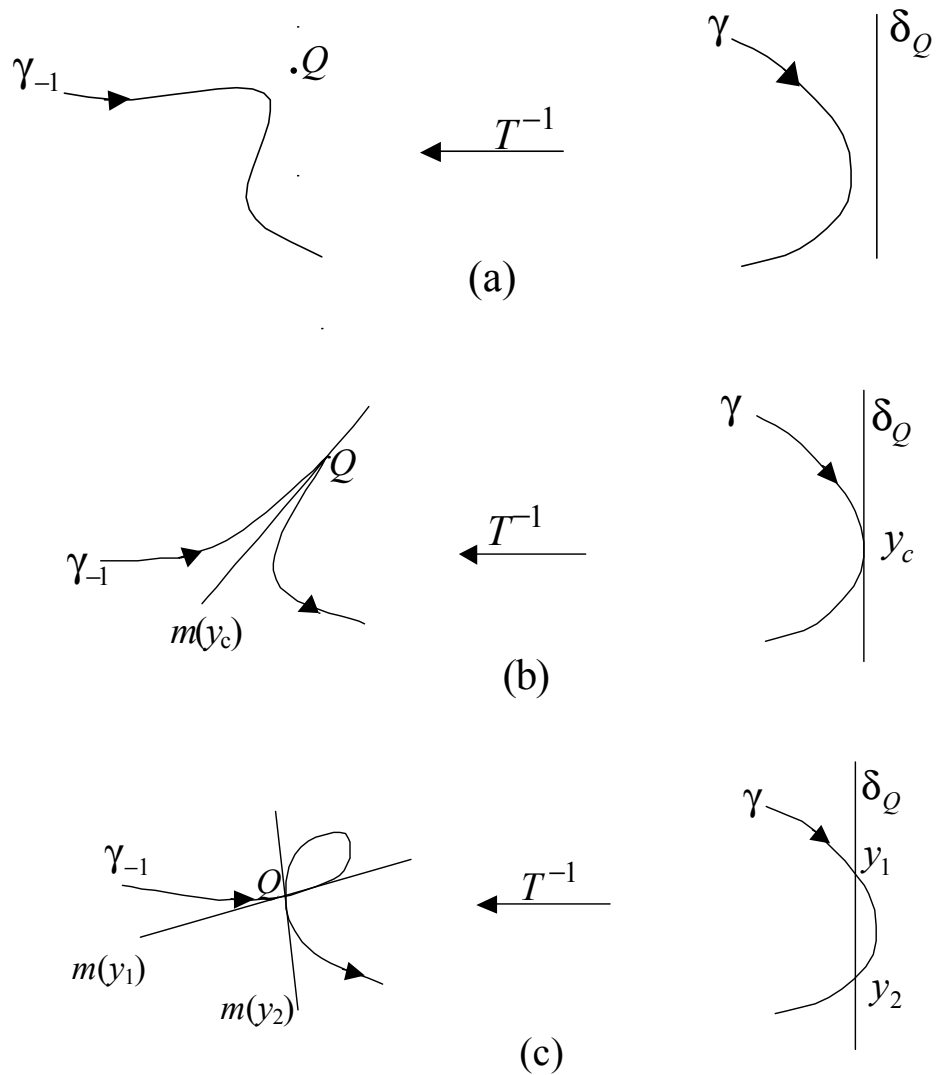


Figure 4.2

Examinons maintenant l'image de l'arc γ par l'application inverse de T , lorsque γ atteint puis traverse une courbe pré focale δ_Q , suite à une variation d'un paramètre de T . On suppose que δ_Q est incluse dans la droite d'équation $x = F(Q)$ et que la correspondance donnée par les formules (4.5) et (4.6) est vérifiée. Le déplacement de γ vers δ_Q , implique un étirement de sa préimage $\gamma_{-1} = T^{-1}(\gamma)$ vers le point focal Q . Lorsque γ devient tangent à δ_Q en un point $C = (F(Q), y_c)$, alors γ_{-1} atteint le point focal Q , qui devient aussi un point cusp de γ_{-1} (fig.4.2a & 4.2b). La pente de la tangente commune aux deux arcs qui se joignent en Q , est donnée par la formule (4.6). La traversée de δ_Q

par γ , donne naissance à une boucle sur γ_{-1} , dont le point double se trouve sur le point focal Q (fig.4.2c). En fait les images par T^{-1} des deux portions de γ , qui coupent δ_Q en deux points $(F(Q), y_1)$ et $(F(Q), y_2)$, sont deux arcs de γ_{-1} passant par Q , avec des tangentes différentes et dont les pentes, $m(y_1)$ et $m(y_2)$, sont données par la formule (4.6).

Le changement qualitatif de $T^{-1}(\gamma)$, comme décrit ci-dessus, peut être une importante bifurcation, lorsque γ est un segment d'une frontière \mathcal{F} d'un bassin d'attraction (\mathcal{F} étant par exemple, la variété stable d'un point col ou une courbe invariante fermée issue d'une bifurcation de Neimark-Hopf). En effet, comme par définition la frontière \mathcal{F} d'un bassin d'attraction est invariante par application inverse, alors $T^{-1}(\gamma)$ est inclus dans \mathcal{F} ($T^{-k}(\gamma) \subset T^{-k}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$). Ceci implique que, si γ touche tangentiellement δ_Q , alors $T^{-1}(\gamma)$ a un point cusp au point focal Q et la frontière \mathcal{F} peut avoir une infinité de points cusp si les préimages de tout rang de Q existent. Il en découle que, si la frontière \mathcal{F} est régulière avant de toucher δ_Q , au contact avec cette dernière, elle ne l'est plus aux points cusps. Après le contact, la traversée de δ_Q par \mathcal{F} , donne naissance à des boucles sur \mathcal{F} , et même en nombre infini si les préimages $T^{-k}(\gamma)$ de tout rang de γ existent, dont les points doubles se trouvent sur le point focal Q et sur les préimages de ce dernier. Par conséquent, une bifurcation de bassin d'attraction a lieu, lorsque sa frontière traverse une courbe pré focale δ_Q , qui donne naissance à des lobes délimités par les boucles de la frontière.

4.3 Bifurcations de Bassins d'Attraction

Dans ce paragraphe on démontrera deux propositions. La première proposition permet de localiser géométriquement le point focal dans le plan [FD]. La seconde proposition fait le lien entre connexité (respectivement non connexité) du bassin d'attraction d'un attracteur de l'application T et point focal de T^{-1} se trouvant à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) de ce bassin [FD].

Proposition 4.2: Soit $T = \left(F(x, y), \frac{N(x, y)}{D(x, y)} \right)$ une application fractionnelle rationnelle ayant un inverse unique polynômiale $T^{-1} = (H(x, y), K(x, y))$ et soit δ_s l'ensemble de non-définition de T . Si $T^{-1}(\delta_s)$ coupe transversalement δ_s en un point $Q = (x_0, y_0)$, alors ce point est un point focal de T .

Démonstration: Nous voulons montrer que si $Q \in \delta_s \cap T^{-1}(\delta_s)$, alors Q est un point focal de T . Comme $Q = (x_0, y_0) \in T^{-1}(\delta_s)$, il existe alors $(x_l, y_l) \in \delta_s$ tel que $(x_0, y_0) = T^{-1}(x_l, y_l)$.

Supposons que dans un voisinage du point (x_l, y_l) , l'ensemble de non-définition δ_s soit représenté par les équations paramétriques suivantes:

$$\delta_s = \begin{cases} x(\tau) = x_l + \xi_1\tau + \xi_2\tau^2 + \dots = x_l + \xi_1\tau + O_1(\tau) \\ y(\tau) = y_l + \eta_1\tau + \eta_2\tau^2 + \dots = y_l + \eta_1\tau + O_2(\tau) \end{cases} \quad (4.7)$$

où $O_1(\tau)$ et $O_2(\tau)$ sont des restes d'ordre deux.

Au voisinage de (x_l, y_l) , le développement de Taylor à l'ordre un de T^{-1} s'écrit

$$T^{-1} = \begin{cases} H(x, y) = H(x_l, y_l) + H'_x(x - x_l) + H'_y(y - y_l) + O_3(x - x_l, y - y_l) \\ K(x, y) = K(x_l, y_l) + K'_x(x - x_l) + K'_y(y - y_l) + O_4(x - x_l, y - y_l) \end{cases} \quad (4.8)$$

où $(H(x_l, y_l), K(x_l, y_l)) = T^{-1}(x_l, y_l) = (x_0, y_0)$.

Par conséquent, au voisinage de (x_l, y_l) et des formules (4.7) et (4.8), $T^{-1}(\delta_s)$ est représenté par les équations paramétriques suivantes:

$$T^{-1}(\delta_s) = \begin{cases} x'(\tau) = x_0 + (H'_x \xi_1 + H'_y \eta_1)\tau + O_5(\tau) \\ y'(\tau) = y_0 + (K'_x \xi_1 + K'_y \eta_1)\tau + O_6(\tau) \end{cases} \quad (4.9)$$

On suppose qu'au voisinage de $Q = (x_0, y_0)$, $T^{-1}(\delta_s)$ est un arc simple, image d'un arc de δ_s par l'application continue T^{-1} .

Au voisinage du point Q , les développements de Taylor à l'ordre un des fonctions polynômiales $N(x, y)$ et $D(x, y)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} N(x, y) &= N(x_0, y_0) + N'_x(x - x_0) + N'_y(y - y_0) + O_7(x - x_0, y - y_0) \\ D(x, y) &= D(x_0, y_0) + D'_x(x - x_0) + D'_y(y - y_0) + O_8(x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $D(x_0, y_0) = 0$ par hypothèse.

Dans un voisinage du point Q et le long de $T^{-1}(\delta_s)$, on a:

$$T(T^{-1}(x(\tau), y(\tau))) = (x(\tau), y(\tau))$$

ceci pour $T^{-1}(x(\tau), y(\tau)) \neq T^{-1}(x(0), y(0)) = T^{-1}(x_l, y_l) = (x_0, y_0) \in \delta_s$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} T(x'(\tau), y'(\tau)) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} T(T^{-1}(x(\tau), y(\tau))) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} (x(\tau), y(\tau)) = (x(0), y(0)) = (x_l, y_l) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Par conséquent, des formules (4.9), (4.10) et (4.11) on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N(x'(\tau), y'(\tau))}{D(x'(\tau), y'(\tau))} &= \quad (4.12) \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N(x_0, y_0) + N'_x(H'_x \xi_1 + H'_y \eta_1)\tau + N'_y(K'_x \xi_1 + K'_y \eta_1)\tau + O_9(\tau)}{D'_x(H'_x \xi_1 + H'_y \eta_1)\tau + D'_y(K'_x \xi_1 + K'_y \eta_1)\tau + O_{10}(\tau)} &= y_l \end{aligned}$$

où $O_9(\tau)$ et $O_{10}(\tau)$ sont des restes d'ordre deux. Comme y_l est fini, donc forcément $N(x_0, y_0) = 0$, ainsi la limite (4.12) est égale à:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N(x'(\tau), y'(\tau))}{D(x'(\tau), y'(\tau))} = \frac{N'_x(H'_x \xi_1 + H'_y \eta_1) + N'_y(K'_x \xi_1 + K'_y \eta_1)}{D'_x(H'_x \xi_1 + H'_y \eta_1) + D'_y(K'_x \xi_1 + K'_y \eta_1)} = y_l \quad (4.13)$$

Il est clair que cette limite est finie, puisque la pente de δ_s au point Q , qui est égale à $-D'_x/D'_y$, est différente de la pente de $T^{-1}(\delta_s)$ au point Q , qui est égale à $(K'_x \xi_1 + K'_y \eta_1)/(H'_x \xi_1 + H'_y \eta_1)$, puisque nous supposons que $T^{-1}(\delta_s)$ est transverse à δ_s au point Q .

En conclusion, $N(x, y)/D(x, y)$ prend la forme $0/0$ en Q et la limite (4.13) est finie, donc Q est un point focal de T .

Comme conséquence de la proposition ci-dessus, nous avons les deux corollaires suivants:

Corollaire 1: Soit Q un point focal de T ; si $\gamma(\tau) = T^{-1}(\delta_s)$ et $\gamma(0) = Q$, alors $\lim_{\tau \rightarrow 0} T(\gamma(\tau))$ appartient à $\delta_s \cap \delta_Q$.

Corollaire 2: Soit T est une application polynômiale et T^{-1} son inverse unique fractionnel. Si $T(\delta_s)$ coupe transversalement δ_s en un point Q , où δ_s est l'ensemble de non-définition de T^{-1} , alors Q est un point focal de T^{-1} .

Proposition 4.3: Soit T une application bidimensionnelle inversible et dont l'inverse T^{-1} est avec dénominateur. Soit D_0 le bassin immédiat d'un attracteur A de T et δ_Q une courbe pré focale de T^{-1} associée au point focal Q . Supposons que $\delta_s \cap D_0 \neq \emptyset$, où δ_s est l'ensemble de non-définition de T^{-1} . Le bassin total D de l'attracteur A est connexe, si et seulement si Q appartient à D .

Démonstration: Tout d'abord, on a les implications suivantes:

- (1) $\delta_s \cap D_0 \neq \emptyset \Rightarrow T(\delta_s) \cap D_0 \neq \emptyset$
- (2) $Q \in D_0 \Leftrightarrow T^{-1}\{Q\} = \delta_Q \subset T^{-1}(D_0)$
- (3) $Q \notin D_0 \Leftrightarrow \delta_Q \cap T^{-1}(D_0) = \emptyset$
- (4) $Q \in \mathcal{F} \Rightarrow T^{-1}\{Q\} = \delta_Q \subset T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

où \mathcal{F} est la frontière du bassin D . Notons par D_0^1 et D_0^2 les parties de D_0 situées de part et d'autre de δ_s . Puisque T est inversible et que $T^{-1}(\delta_s)$ est l'ensemble des points à l'infini de T^{-1} plus δ_Q , alors $T^{-1}(D_0^1)$ et $T^{-1}(D_0^2)$ se trouvent de part et d'autre de δ_Q .

1) Montrons que si D est connexe, alors Q appartient à D .

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $Q \notin D$, ceci implique que $Q \notin D_0$ et donc, d'après l'équivalence (3) ci-dessus, $\delta_Q = T^{-1}\{Q\}$ n'a pas d'intersection avec $T^{-1}(D_0) = T^{-1}(D_0^1 \cup D_0^2) = T^{-1}(D_0^1) \cup T^{-1}(D_0^2)$. En outre $T^{-1}(D_0^1)$ et $T^{-1}(D_0^2)$ se trouvent de part et d'autre de δ_Q , ce qui implique que $T^{-1}(D_0^1) \cap T^{-1}(D_0^2) = \emptyset$. Par conséquent $T^{-1}(D_0)$ n'est pas connexe et donc $D = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_0)$ n'est pas connexe. Ceci contredit l'hypothèse, D est connexe, par conséquent $Q \in D$.

2) Montrons que si Q appartient à D , alors D est connexe.

Sans perdre la généralité, supposons que $Q \in D_0$, ceci implique que $T^{-1}\{Q\} = \delta_Q \subset T^{-1}(D_0) = T^{-1}(D_0^1) \cup T^{-1}(D_0^2)$. Comme $T^{-1}(D_0^1)$ et $T^{-1}(D_0^2)$ se trouvent de part et d'autre de δ_Q , par conséquent pour que $T^{-1}(D_0)$ puisse contenir δ_Q , il faut que $T^{-1}(D_0^1)$ et $T^{-1}(D_0^2)$ se joignent, c'est-à-dire que $T^{-1}(D_0^1) \cap T^{-1}(D_0^2) = \delta_Q$; ce qui implique que $T^{-1}(D_0)$ est connexe. Comme par définition du bassin d'attraction $T^{-1}(D_0)$ contient D_0 et aussi par définition D_0 est la plus grande composante connexe contenant l'attracteur, donc D_0 contient $T^{-1}(D_0)$, c'est-à-dire $T^{-1}(D_0) = D_0$. Par conséquent $T^{-n}(D_0) = D_0$ et donc $D = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_0) = D_0$ est connexe.

4.4 Applications avec Inverses Fractionnels Rationnels

4.4.1 Application de Bogdanov (premier exemple)

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'application de Bogdanov [Arr] comme application ayant un inverse avec dénominateur, et dont certaines propriétés dynamiques, comme celles vues dans le paragraphe 4.3, sont déduites de l'application inverse. L'application de Bogdanov est définie dans tout le plan \mathbb{R}^2 par les équations suivantes:

$$T(x, y) = \begin{cases} x' = x + y + a y + bx(x - 1) + cxy \\ y' = y + ay + bx(x - 1) + cxy \end{cases} \quad (4.14)$$

où a, b, c sont des paramètres réels. C'est une application inversible, dont une des composantes de l'inverse T^{-1} est avec dénominateur. L'inverse T^{-1} est donné par les équations suivantes:

$$T^{-1}(x', y') = \begin{cases} x = x' - y' \\ y = \frac{y' - b(x' - y')(x' - y' - 1)}{1 + a + c(x' - y')} \end{cases} \quad (4.15)$$

L'ensemble de non-définition δ_s de T^{-1} est donné par l'équation suivante:

$$y = x + \frac{1 + a}{c} \quad (4.16)$$

La matrice Jacobienne de T est égale à:

$$DT(x, y) = \begin{bmatrix} 1 + 2bx - b + cy & 1 + a + cx \\ 2bx - b + cy & 1 + a + cx \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Son Jacobien $\det(DT(x, y)) = 1 + a + cx$ s'annule sur la droite d'équation $x = \frac{-1 - a}{c}$. L'image de cette droite, par l'application T , se réduit à un point Q

de coordonnées $\left(\frac{-1-a}{c} + b\left(\frac{-1-a}{c}\right)\left(\frac{-1-a}{c} - 1\right), b\left(\frac{-1-a}{c}\right)\left(\frac{-1-a}{c} - 1\right) \right)$.
 Par conséquent, de la remarque 3 du paragraphe 4.1, ce point est un point focal de T^{-1} et la droite d'équation $x = \frac{-1-a}{c}$ est la courbe pré focale associée à ce point.

I - Fixons $b = 0.3$, $c = -1.7$ et faisons varier a .

1 - Pour $a = 0.12$ (fig.4.3), l'application T a un attracteur, qui est une courbe fermée invariante résultant d'une bifurcation de Neimark - Sacker. Le point focal Q de T^{-1} se trouve à l'intersection de δ_s et de $T(\delta_s)$, et est à l'intérieur du bassin d'attraction de la courbe fermée invariante. Ainsi la courbe pré focale associée et ses images par T^{-1} sont dans le bassin d'attraction. Ce qui donne un bassin non borné, avec une frontière asymptotique à la courbe pré focale et à ses images par T^{-1} . On remarque aussi que l'attracteur n'a pas de contact avec la courbe pré focale et donc avec le point focal. Un agrandissement d'une partie de l'attracteur, proche de la courbe pré focale, est représenté dans la figure 4.4.

2 - Pour $a = 0.132$ l'attracteur se rapproche du point focal, dont une partie, située dans la même zone que celle représenté dans la figure 4.4, est visible dans la figure 4.5.

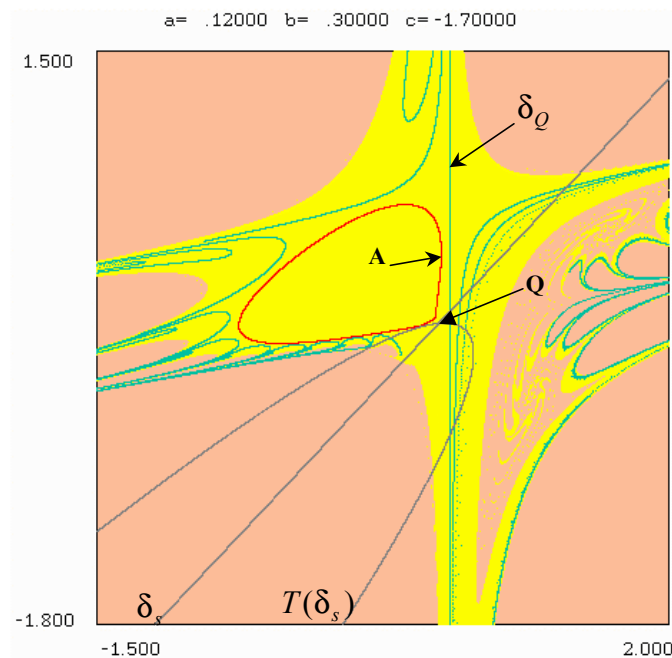


Figure 4.3

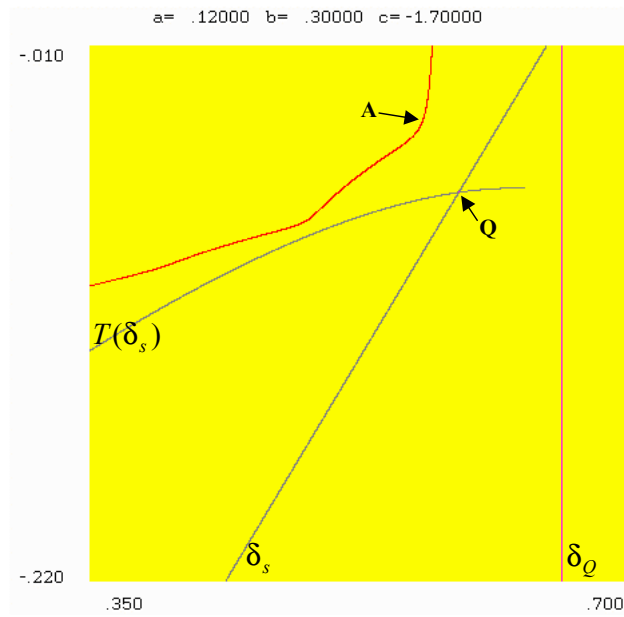


Figure 4.4

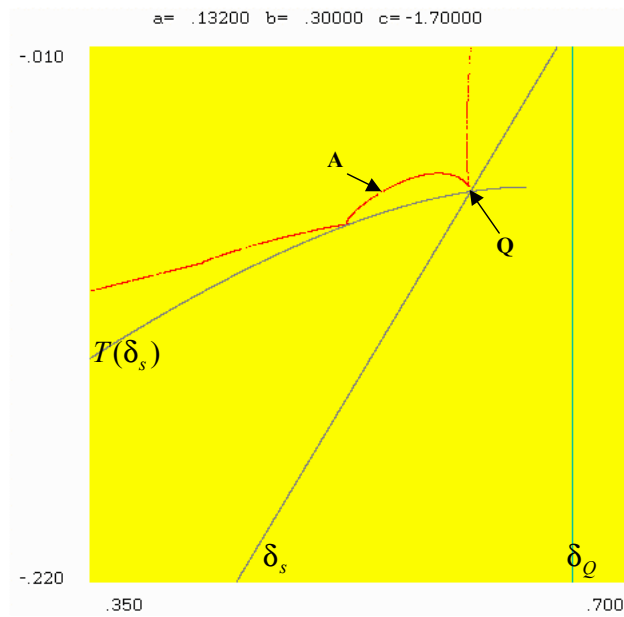


Figure 4.5

3 - Pour $a = 0.133$ l'attracteur dégénère. C'est une valeur de bifurcation pour laquelle l'attracteur, avant qu'il ne dégénère, atteint le point focal Q sous la

forme d'un point cusp. En augmentant la valeur de a , des boucles naissent sur l'attracteur au point cusp et ses images. Les points doubles de ces boucles sont confondus avec le point focal et ses images (figs.4.6 et 4.7).

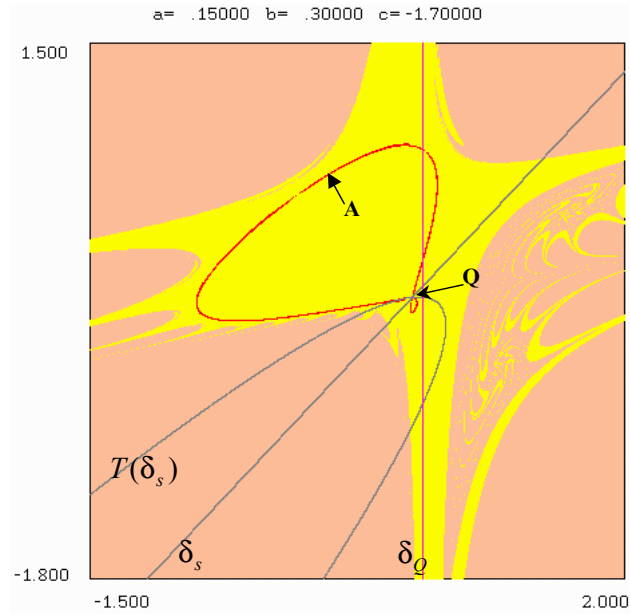


Figure 4.6

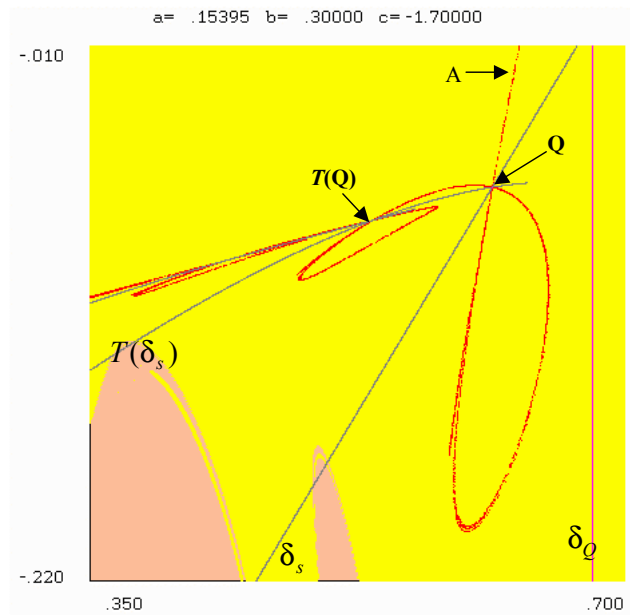


Figure 4.7

II - Fixons $a = -0.4$, $b = -0.3$ et faisons varier c .

1 - Pour $c = -0.1999$ l'application T a un point col S de coordonnées $(0, 0)$, dont la variété stable délimite la frontière du bassin d'attraction d'un foyer stable F de coordonnées $(1, 0)$. On peut voir sur la figure 4.8, que ce bassin d'attraction est non connexe, que le point focal Q de T^{-1} est très proche de la frontière de ce bassin, mais qu'il est difficile de voir si Q est à l'intérieur ou à l'extérieur de ce bassin. Par contre on voit clairement que les itérés de Q , par T , sont à l'extérieur du bassin, ce qui implique que Q est à l'extérieur du bassin.

2 - Pour $c = -0.2000$ le point focal Q et ses itérés par T , sont sur la frontière du bassin d'attraction du foyer stable et convergent vers le point col S (fig.4.9). Le bassin d'attraction n'est pas connexe, mais son adhérence est connexe.

3 - Pour $c = -0.2001$ on peut voir sur la figure 4.10, que le bassin d'attraction du foyer stable F est connexe et que les itérés, par T , du point focal Q sont à l'intérieur du bassin, ce qui implique que Q est à l'intérieur du bassin.

De ces trois dernières valeurs de c , on en conclue que $c = -0.2000$ est une valeur de bifurcation de bassin, passant de non connexe à connexe et inversement, selon que le point focal se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur du bassin. Ceci illustre la proposition 4.4 du paragraphe précédent.

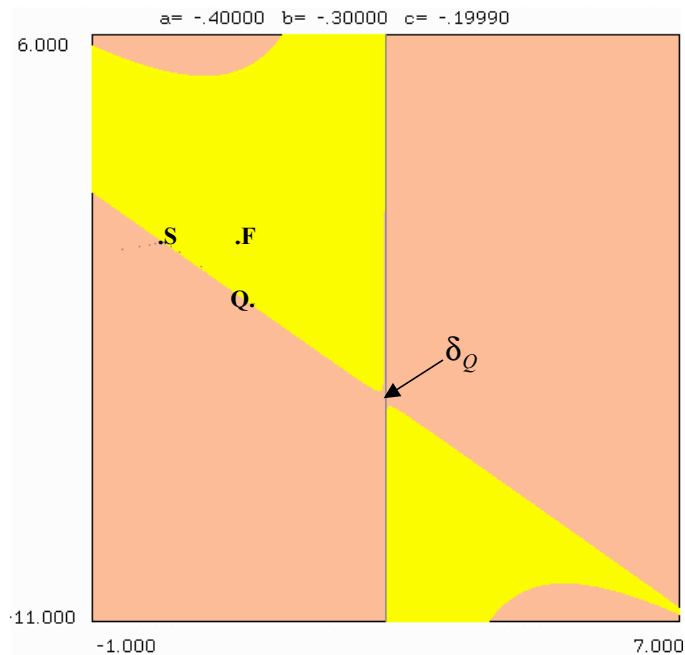


Figure 4.8

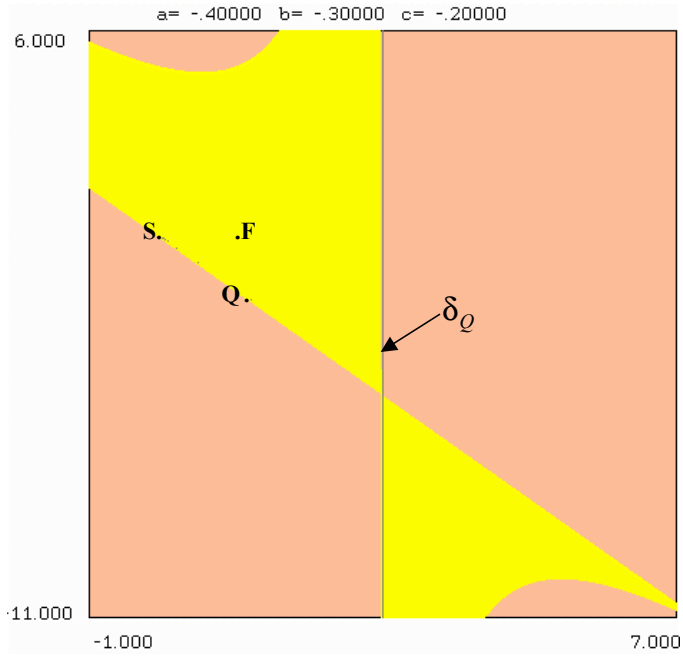


Figure 4.9

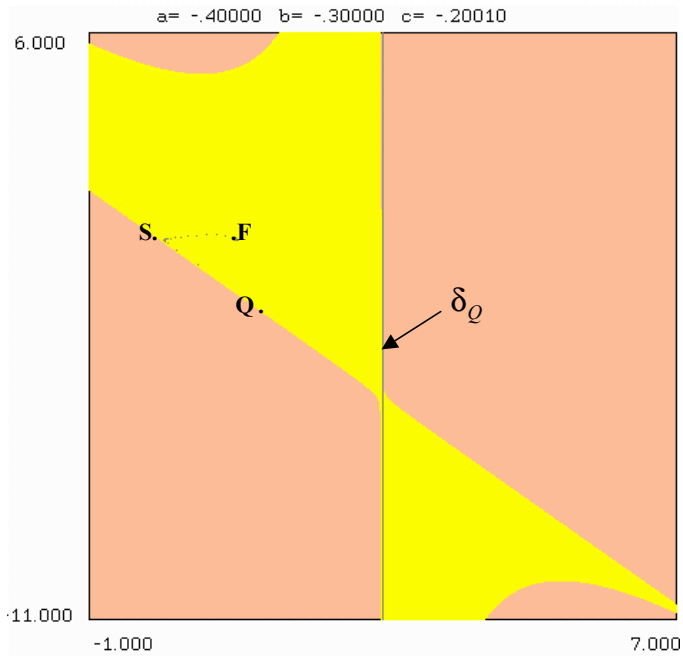


Figure 4.10

III - Fixons $b = 1$, $c = -1.5$ et faisons varier a de -1.6 à -1.8 .

A la valeur $a = -1.6$, l'application T a un cycle cols d'ordre 3, dont les variétés stables délimitent la frontière du bassin d'attraction d'un cycle noeuds stable d'ordre 2. En faisant varier a vers la valeur -1.8 , on a une séquence de bifurcations doublement de période, qui donne naissance à un attracteur chaotique de dimension de Lyapounov égale à 1.3603 (fig.4.11). Cet attracteur a une forme particulière, caractérisée par le fait qu'une infinité de courbes contenues dans cet attracteur, traversent deux fois la courbe pré focale de T^{-1} , ce qui implique que ces courbes passent par le point focal Q et forment des boucles, dont le noeud se trouve sur le point focal Q . Cette situation a été décrite par Bischi [BGM].

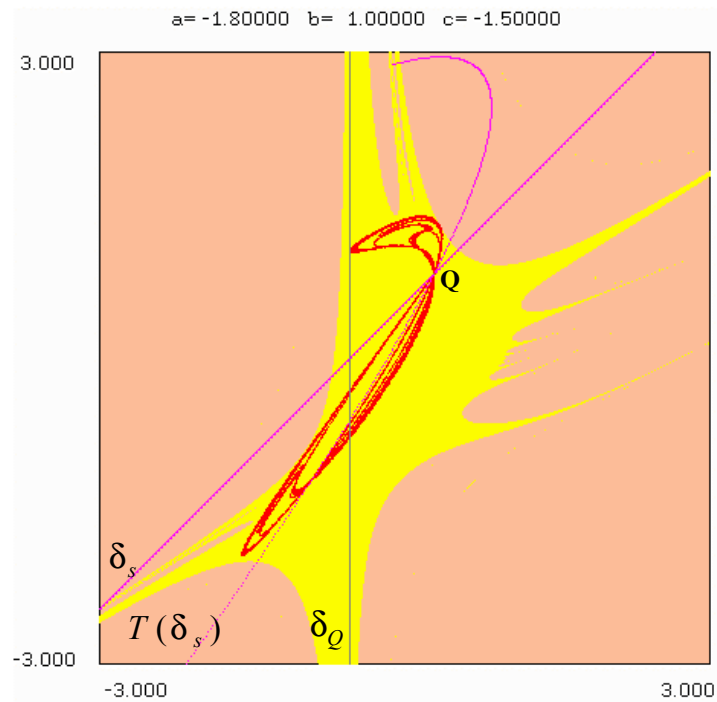


Figure 4.11

4.4.2 Deuxième exemple

Considérons l'application polynômiale suivante:

$$T(x, y) = \begin{cases} x' = y \\ y' = x.y - b.y^2 - a.x + a.b.y \end{cases} \quad (4.18)$$

où a et b sont des paramètres réels. Cette application est inversible, dont une des composantes de l'inverse est avec dénominateur. L'inverse est donné par les équations suivantes:

$$T^{-1}(x', y') = \begin{cases} x = \frac{y' + b.x'^2 - a.b.x'}{x' - a} \\ y = x' \end{cases} \quad (4.19)$$

L'ensemble de non-définition δ_s de T^{-1} est donné par l'équation suivante :

$$x = a \quad (4.20)$$

La matrice Jacobienne de T est égale à :

$$DT(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ y - a & x - 2b.y + a.b \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Le Jacobien $\det(DT(x, y)) = -y + a$ s'annule sur la droite d'équation $y = a$. L'image de cette droite, par l'application T , se réduit à un point Q de coordonnées $(a, 0)$. Par conséquent, ce point est un point focal de T^{-1} et la droite d'équation $y = a$ est la courbe pré focale associée à ce point.

Fixons $a = 1$ et faisons varier b . Pour $b = 0.499$, l'application T a un cycle cols d'ordre 4, dont les variétés stables délimitent la frontière du bassin d'attraction d'un foyer stable de coordonnées $(0, 0)$. On peut voir sur la figure 4.12 que ce bassin d'attraction est non connexe, que le point focal Q de T^{-1} est très proche de la frontière de ce bassin, mais qu'il est difficile de voir si Q est à l'intérieur ou à l'extérieur de ce bassin. Par contre on voit clairement que les itérés de Q , par T , sont à l'extérieur du bassin, ce qui implique que Q est à l'extérieur du bassin. A la valeur $b = 0.500$, le point focal Q se trouve sur la frontière du bassin d'attraction. Pour $b = 0.501$, on peut voir sur la figure 4.13, que le bassin d'attraction est connexe et que les itérés, par T , du point focal Q sont à l'intérieur du bassin, ce qui implique que Q est à l'intérieur du bassin. Par conséquent la valeur $b = 0.500$ est une valeur de bifurcation de bassin d'attraction "connexe \leftrightarrow non-connexe". En faisant varier b , jusqu'à la valeur $b = 0.651$, le bassin d'attraction reste connexe et contient le point focal Q (fig.4.14). A la valeur $b = 0.653$, on peut voir sur la figure 4.15, que le bassin d'attraction est non connexe et que le point focal Q est à l'extérieur du bassin. Par conséquent une autre bifurcation de bassin d'attraction "connexe \leftrightarrow non-connexe" a lieu, entre les valeurs $b = 0.651$ et $b = 0.653$.

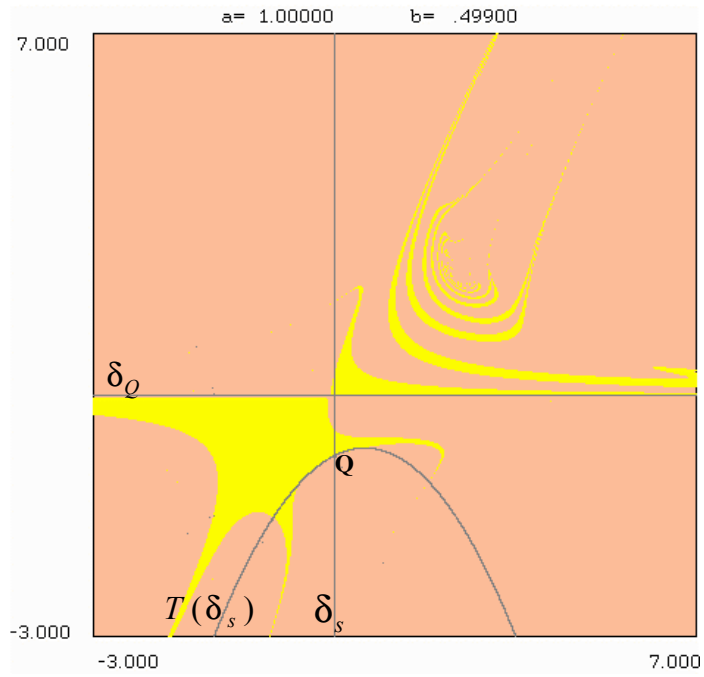


Figure 4.12

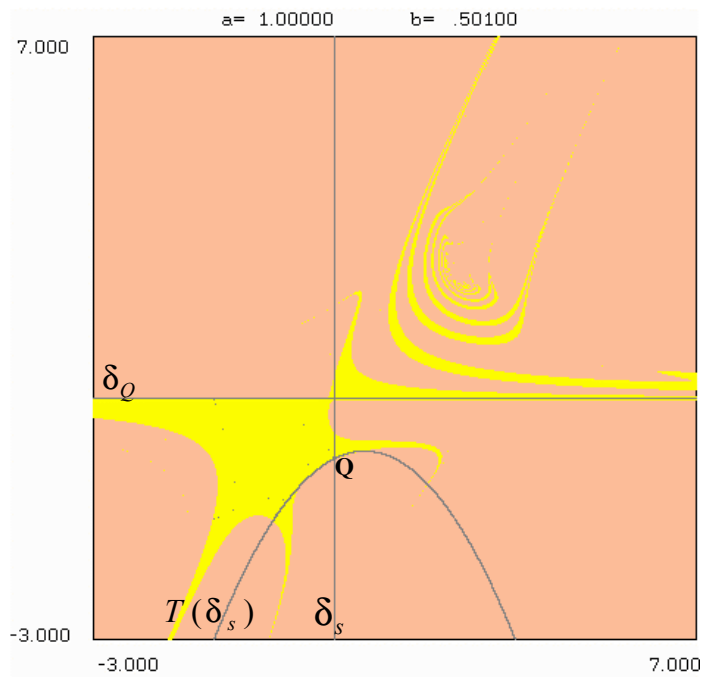


Figure 4.13

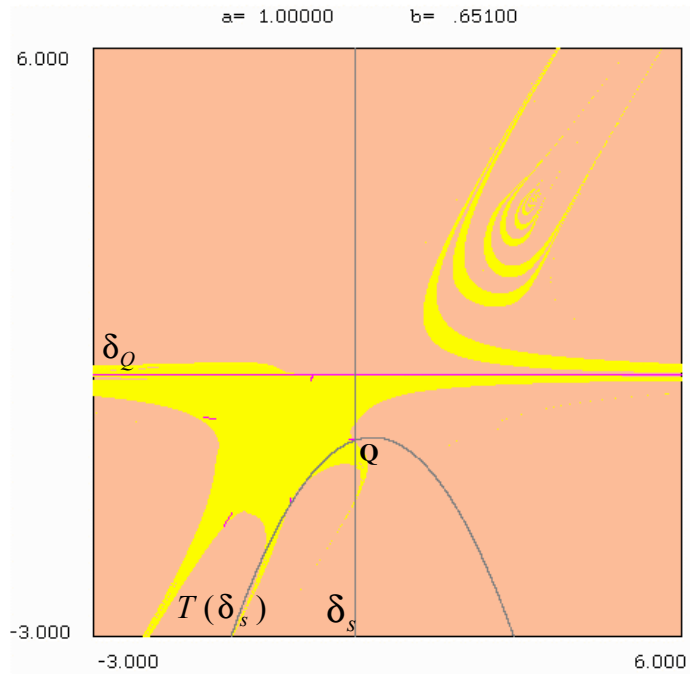


Figure 4.14

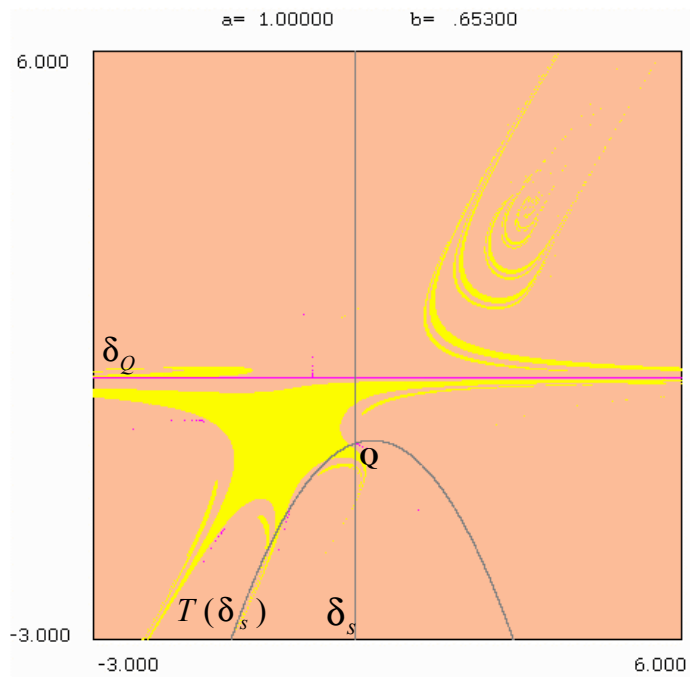


Figure 4.15

4.4.3 Troisième exemple

Considérons l'application polynômiale suivante :

$$T(x, y) = \begin{cases} x' = \frac{(1-a)(b.x - x^2) + x.y - b.y}{a} + c \\ y' = x \end{cases} \quad (4.22)$$

où a , b et c sont des paramètres réels. Cette application est inversible, dont une des composantes de l'inverse est avec dénominateur. L'inverse est donné par les équations suivantes:

$$T^{-1}(x', y') = \begin{cases} x = y' \\ y = (1-a)y' + a \frac{x' - c}{y' - b} \end{cases} \quad (4.23)$$

L'ensemble de non-définition δ_s de T^{-1} est donné par l'équation suivante:

$$y = b \quad (4.24)$$

Le Jacobien de l'application T s'annule sur la droite d'équation $x = b$. L'image de cette droite, par l'application T , se réduit à un point Q de coordonnées (c, b) . Par conséquent, ce point est un point focal de T^{-1} et la droite d'équation $x = b$ est la courbe pré focale associée à ce point.

Fixons $a = 0.5$, $c = 1.5$ et faisons varier b . Pour $b = 1.490$ l'application T a un point fixe col, dont la variété stable délimite la frontière du bassin d'attraction d'un foyer stable F de coordonnées $(1.021, 1.021)$. On peut voir sur la figure 4.16, que le point focal Q de T^{-1} est à l'extérieur de ce bassin, que ce dernier est non connexe et est constitué d'un bassin immédiat contenant F et d'îlots en forme de croissants. A la valeur $b = 1.500$, on voit sur la figure 4.17 que le point focal Q se trouve sur la frontière du bassin d'attraction, que les îlots sont très proches du bassin immédiat tel que l'adhérence du bassin total est connexe. A la valeur $b = 1.501$, on voit sur la figure 4.18, que les itérés du point focal Q convergent vers l'attracteur, qui est maintenant une courbe fermée invariante résultant d'une bifurcation de Neimark - Hopf à la valeur $b = 1.500$, donc le point focal Q se trouve à l'intérieur du bassin d'attraction. On voit aussi que les îlots agrègent au bassin immédiat. Ce qui nous donne un bassin d'attraction connexe. Par conséquent la valeur $b = 1.500$ est à la fois, valeur de bifurcation de bassin d'attraction "connexe \leftrightarrow non-connexe" et valeur de bifurcation de Neimark - Hopf.

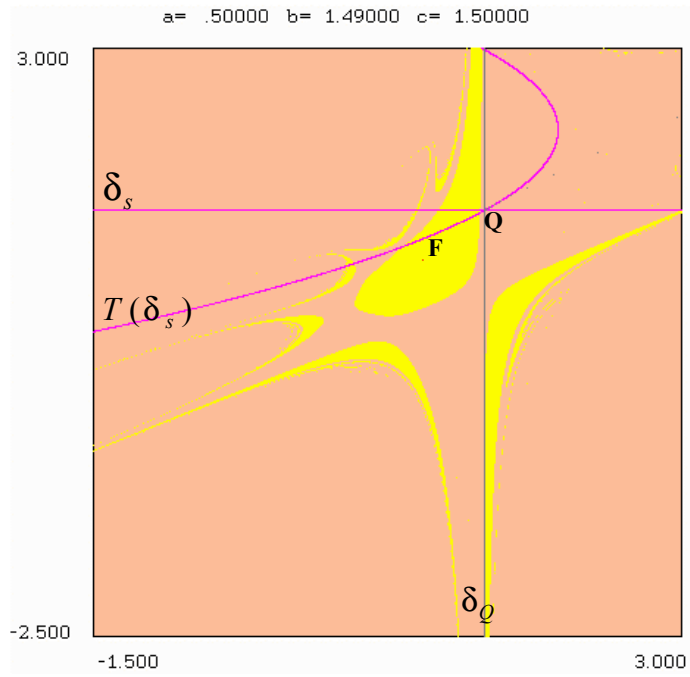


Figure 4.16

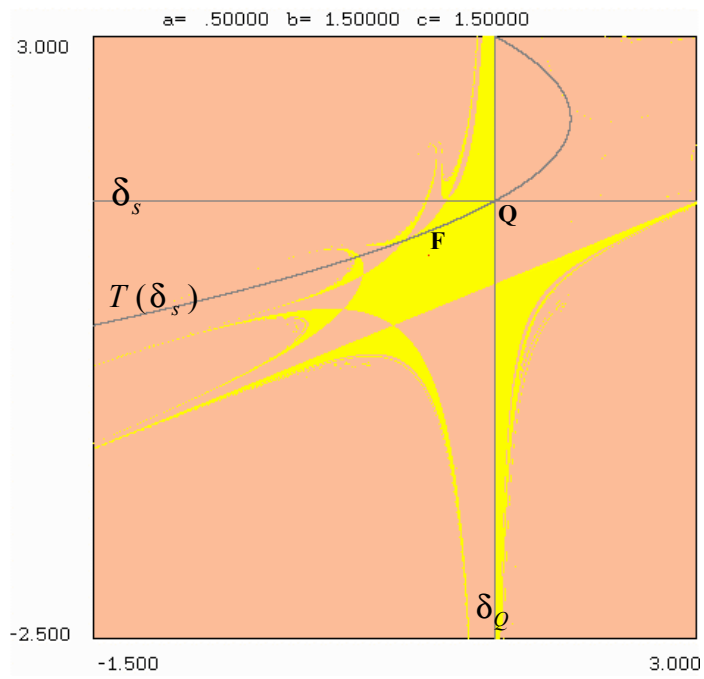


Figure 4.17

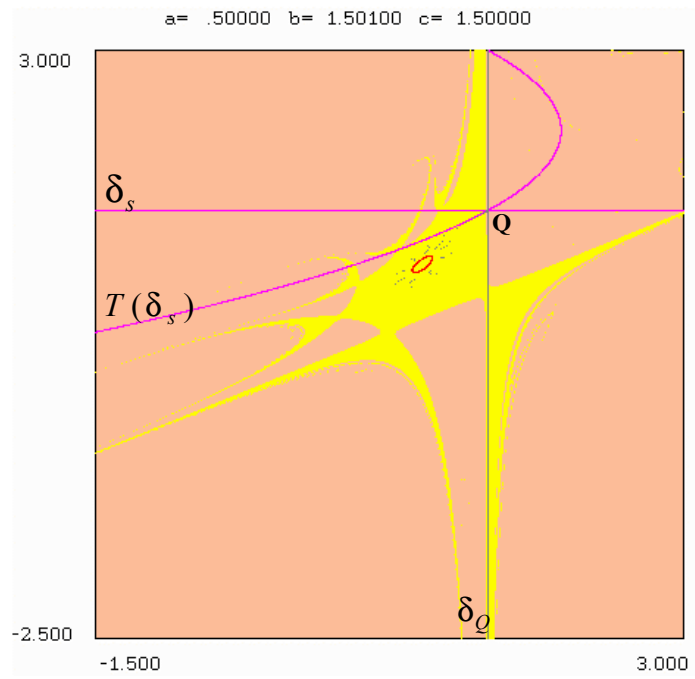


Figure 4.18

Conclusion

Les endomorphismes bidimensionnels, modélisant des systèmes dynamiques, sont plus riches en propriétés, comparés aux applications bidimensionnelles inversibles. En effet, si l'on considère par exemple la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur A , qui est généralement constituée de la variété stable globale $W^s(S)$ d'un point fixe col S (ou d'un cycle col), celle-ci est toujours connexe dans le cas d'un difféomorphisme, ce qui implique que le bassin d'attraction est connexe. Ceci n'est pas toujours vraie dans le cas d'un endomorphisme. Ainsi $W^s(S)$ peut être non connexe, et le bassin d'attraction sera de même (proposition 2.1).

On a aussi vu, qu'il existait un lien entre bifurcation de contact et bifurcation homocline d'un point col S , lorsque les points de contact, entre la frontière de l'attracteur et la frontière de son bassin d'attraction, convergent vers le point col S . Ceci a été vérifié pour le cas d'un endomorphisme de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$.

On a montré que, dans le cas des systèmes dynamiques définis par des applications avec dénominateur, il existait un lien entre bifurcation de bassin "connexe \leftrightarrow non connexe" d'un attracteur d'une application T et point focal de T^{-1} se situant "à l'intérieur \leftrightarrow à l'extérieur" de ce bassin. On a aussi montré que l'on pouvait localiser géométriquement un point focal de T^{-1} dans le plan de phase de T .

En perspective et dans la suite de ce travail, on espère trouver un lien entre singularités d'une application polynômiale bidimensionnelle T et points focaux de T^{-1} , lorsque cet inverse est avec dénominateur.

Bibliographie

- [Arr] Arrowsmith D.K., “The Bogdanov Map: Bifurcation, Mode Locking, and Chaos in Dissipative System”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 3, 1993, p. 803-842.
- [Bir] Birkhoff G.D. (1927) “On the Periodic Motions of Dynamical Systems”, *Acta Mathematica*, 50.
- [BLM] Bernussou J., Liu Hsu et Mira C. (1976) “Quelques Exemples de Solutions Stochastiques Bornées dans les Récurrences Autonomes du 2nd Ordre”, *Transformations Ponctuelles et Applications*, Colloque CNRS, Sept. 73 (Ed. CNRS Paris 1976).
- [BCM] Barugola A., Cathala J.C. et Mira C. (1986) “Annular Chaotic Areas” *Nonlinear Analysis TM & A.* 10(11), 1223-1236.
- [BGM] Bischi G.I., Gardini L. et Mira C. (1999) “Maps with Denominator. Part 1: Some Generic Properties”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.9, N°1, p.119-153.
- [Cat] Cathala J.C. (1989) “On some Properties of Absorptive Areas in 2nd Order Endomorphisms”, *ECIT Batschuns*, Sept. 89, *Proceedings (World Scientific)*.
- [Far] Farmer J.D., “The Dimension of Chaotic Attractors”, *North-Holland Publishing Company Physica* 7D (1983) p.153-180.
- [FD] Ferchichi M.R. et Djellit I., “Attractors For Maps With Fractional Inverse” *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol 2005, N°3, Nov. 2005.
- [FGKMN] Frouzakis C., Gardini L., Kevrekidis I., Millerioux G. et Mira C. (1997) “On Some Properties of Invariant Sets of Two-Dimensional Noninvertible Maps”, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 7, No. 6, p.1167-1194.
- [FM] Friedland S. et Milnor J., “Dynamical Properties of Plane Polynomial Automorphisms”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 9 (1989) 67-99.
- [Fou] Fournier-Prunaret D. (1991) “The Bifurcation Structure of a Family of Degree-one Endomorphisms”, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 1, No. 4, p.823-838.
- [Ga1] Gardini L. (1991) “On the Global Bifurcation of Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines” *Nonlinear Analysis TM & A.* 18(4), p.361-399.
- [Ga2] Gardini L. (1991a) “Global Analysis and Bifurcations in Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines” *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria*, Sept. 91 (World Scientific, Singapore, 1992) p.112-125.
- [Ga3] Gardini L. (1992) “Homoclinic Orbits of Saddles in Two-Dimensional Endomorphisms” *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria*, Sept. 92.

- [Ga4] Gardini L. (1994) “Homoclinic Bifurcations in n-Dimensional Endomorphisms Due to Expanding Periodic Points”, *Nonlinear Analysis TM & A*, 23 (8), p.1039-1089.
- [GAFPR] Gardini L., Abraham R., Fournier-Prunaret D. et Record R.J. (1994) “A Double Logistic Map” *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 4, No. 1, p.145-176.
- [GH] Guckenheimer J. et Holmes P., “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields”, *Springer, New York* (1983).
- [GM] Gumowski I. et Mira C. (1980) “Dynamique Chaotique” (*Ed. Cépadues, Toulouse*).
- [GS1] Gavrilov N.K. et Shilnikov L.P. (1972) “On the Three-Dimensional Dynamical System Close to Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Curve I”, *Math. USSR Sb.*, 88 (4) p.467-485.
- [GS2] Gavrilov N.K. et Shilnikov L.P. (1973) “On the Three-Dimensional Dynamical System Close to Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Curve II”, *Math. USSR Sb.*, 90 (1) p.139-156.
- [Hén] Hénon M., “A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor”, *Comm. Math. Phys.* 50 (1) (1976) p.69-77.
- [HL] Hale J.K. et Lin X.B. (1986) “Symbolic Dynamics and Nonlinear Semiflows”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Serie IV, Tomo CXLIV, p.229-259.
- [Jun] Jung H.W.E., “Uber Ganze Birationale Transformationen der Ebene”, *J. Reine Angew. Math.* 184 (1942) p.161-174.
- [LY] Li T.Y. et Yorke J. (1975) “Period three Implies Chaos”, *Amer. Math. Monthly*, 82 (10) p.985-992.
- [Mar] Marotto J.R. (1978) “Snap- Back Repellers Imply Chaos in IR”, *J. Math. Analysis Applic.* 63, p.199-223.
- [Mil] Milnor J., “On the Concept of Attractor”, *Comm. Math. Phys.* 99 (1985) p.177-195.
- [Mir1] Mira C. (1964) “Détermination Pratique du Domaine de Stabilité d’un Point d’Equilibre d’une Récurrence non-Linéaire du Deuxième Ordre à Variables Réelles”, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 261, pp. 5314-5317, Groupe 2.
- [Mir2] Mira C. (1987) “Chaotic Dynamics” *World Scientific, Singapore*.
- [MFP] Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H. et Cathala J.C. (1994) “Bassin Bifurcations of Two Dimensional Noninvertible Maps: Fractalization of Basins”, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 4, No. 2 (1994) p.343-381.
- [MGBC] Mira C., Gardini L., Barugola A. et Cathala J.C., “Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps”, *World Scientific Series on Nonlinear Sciences, Series A Vol. 20*.
- [MN] Mira C. et Narayaninsamy T. (1993) “On Two Behaviours of Two-Dimensional Endomorphisms: Role of the Critical Curves”, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 3, No. 1, p.187-194.

- [Mos] Moser J. (1973) “Stable and Random Motions in Dynamical Systems”, *Princeton Univ. Press; Princeton*.
- [MRo] Mira C. et Roubellat J.C. (1969) “Cas où le Domaine de Stabilité d’un Ensemble Limite Attractif d’une Récurrence du Deuxième Ordre n’est pas Simplement Connexe”, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A* 268, p.1657-1660.
- [MR] Mira C. et Rauzy C. (1995) “Fractal Aggregation of Bassin Islands in Two-Dimensional Quadratic Noninvertible Maps”, *International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 5, No. 4* (1995) p.991-1019.
- [Rue] Ruelle D., “Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definitions of Attractors”, *Comm. Math. Phys.* 82, 137.
- [Sh1] Shilnikov L.P. (1965) “A Case of the Existence of a Denumerable Set of Periodic Motions”, *Sov. Math. Dokl.*, 6, p.163-166.
- [Sh2] Shilnikov L.P. (1967) “On a Poincaré-Birkhoff Problem”, *Math. USSR-Sbornik*, 3 (3) p.353-371.
- [Sm1] Smale S. (1963) “Diffeomorphisms with many Periodic Points”, *Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press*, p.63-80.
- [Sm2] Smale S. (1967) “Differentiable Dynamical Systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73, p.747-817.
- [Wil] Williams R.F., “The Zeta Function of an Attractor” Conference on the Topology of Manifolds, ed. *J.G.Hocking, Prindle Weber Schmidt, Boston* (1968).