

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University -
Annaba



جامعة باجي مختار

عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Mathématiques Appliquées

SUR LE CHAOS ET SYNCHRONISATION DANS LES SYSTEMES DYNAMIQUES DISCRETS

Par: Boukhalfa El-hafsi

Sous la direction du professeur: Zeraoulia Elhadj. U.TEBESSA

Devant le jury

PRESIDENT :	Djellit Ilhem	Prof.	U.B.M. ANNABA
CO-ENCADREUR:	Laskri Yamina	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Hamri Nasr E-ddine	Prof.	C. U. DE MILA
EXAMINATEUR :	Saoudi Khaled	MCA.	U.de KHENCHELA
EXAMINATEUR :	Hadidi Elbahi	MCA.	U.B.M. ANNABA

Année : 2017

Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements les plus sincères je les exprime à Allah tout puissant, le Miséricordieux qui m'a donné la force, le courage et la patience, puis la réussite.

Je tiens à remercier le directeur de thèse, professeur Zeraoulia Elhadj, pour l'appui nécessaire qu'il me fait pour aborder cet axe de recherche, riche, moderne, et aussi vivant, et s'intersecté avec

plusieurs disciplines.

Mes considérables remerciements s'adresse également au professeur Iaskri Yamina, ma co-directrice de thèse, elle appartient au métal précieux, pour son aide, et simplicité.

Je remercie chaleureusement les membres du Jury qui m'ont honoré d'avoir accepté évaluer mon modeste travail. En particulier, je tiens à exprimer mon profond respect et ma parfaite reconnaissance

pour le grand honneur que m'a fait la professeur Diaba Fatma, professeur à l'université d'annaba en acceptant de présider le Jury de l'évaluation.

Je suis très fière par la présence du monsieur Nasr.E.ddine Hamri, professeur, au centre universitaire de Mila, pour avoir bien voulu accepter de juger mon petit travail et participer au Jury.

Je suis heureux d'exprimer ma profonde gratitude à Monsieur K. Saoudi maître de conférences, à l'université Abbès Laghrour à Khenchela qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je suis très fière par la présence du monsieur Hadidi Elbahi, maître de conférences, à l'université d'annaba, pour avoir bien voulu accepter de juger mon travail et participer au Jury.

Mes sincères expressions de remerciements, et de gratitude s'adressent à tous personnes de près et de loin, qui m'ont apporté aide, amitié, et surtout, petite souris.

Merci à tous.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو التطرق إلى المزامنة في الأنظمة الديناميكية الفوضوية الغير خطية، تحديدا في الأنظمة الديناميكية الفوضوية غير الخطية المعبر عنها بعلاقة تراجعية مع وجود وسيط التفريع، (مجموعة من الوسائط في الحالة متعددة الأبعاد)، حيث أن اضطراب بسيط في الشروط الابتدائية يسبب اختلافا كبيرا في النتائج على المدى البعيد، من هنا نشأت فكرة عدم القابلية للتنبؤ .

بتطبيق الوسائل المتاحة سوف نكتشف ان كثيرا من الأنظمة الديناميكية الغير خطية المتقطعة ذات سلوك فوضوي من أجل مجموعة من الوسائط.

في نفس السياق، المزامنة لها مكانة في هذا النوع من البحوث، خاصة مزامنة الفوضى، بمعنى الحصول على نفس النتائج من نظامين ذوي سلوك فوضوي انطلاقا من رتبة معينة.

Abstract :

The objective of this thesis is based on the general problem that deals with synchronization in chaotic nonlinear dynamical systems. More precisely, we are interested in non-linear discrete dynamical systems, whose formulations are given by recursive functions with the presence of a bifurcation parameter (later, several parameters in the multidimensional case), or a small perturbation to the initial conditions results a large gap between long-term observations, it is here the notion of unpredictability takes place. By applying the quantification tools of chaos, several examples of discrete systems are detected chaotic, for such a set of parameters. But also the synchronization of chaos is part of this type of research, the arrival of two discrete systems at the same time has importance in the sense of the same observations from a certain rank (time).

Résumé :

L'objectif de cette thèse est basé sur la problématique générale qui porte sur la synchronisation dans les systèmes dynamiques non linéaires chaotiques. Plus précisément, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques discrets non linéaires, dont leurs formulations sont données par des fonctions récurrentes avec la présence d'un paramètre de bifurcation, (ultérieurement, sera plusieurs paramètres dans le cas multidimensionnel), ou une petite perturbation aux conditions initiales résulte un grand écart entre les observations à long terme, c'est d'ici la notion de l'imprévisibilité a lieu. En appliquant les outils de quantification du chaos, plusieurs exemples de systèmes discrets sont détectés chaotiques, pour un tel ensemble de paramètres. Mais aussi la synchronisation du chaos fait partie de ce type de recherches, dont l'arrivée de deux systèmes discrets en même temps a importance, dans le sens, de mêmes observations à partir d'un certain rang (temps).

Table des matières

1	Préliminaire sur les systèmes dynamiques non-linéaires discrets	12
1.1	Généralités	12
1.1.1	Système dynamique discret	12
1.1.2	Orbites	13
1.1.3	Point d'équilibre	13
1.1.4	Orbite périodique d'ordre p (p -cyclique)	13
1.2	Stabilité	14
1.2.1	Linéarisation	15
1.2.2	Nature d'un point d'équilibre	15
1.2.3	Fonction de Lyapunov	17
1.3	Bifurcations	18
1.4	Types de bifurcations	19
1.4.1		
	Bifurcation par doublement de la période (ou bifurcation flip)	20
1.4.2	Bifurcation fourche	20
1.4.3	Bifurcation de Neimark-Sacker	21
1.4.4	Bifurcation transcritique	21
1.5	Conclusion	21

2	Quantification du chaos dans les systèmes dynamiques discrets	22
2.1	Définitions du chaos	25
2.2	Outils de quantification du chaos	25
2.2.1	Espace des phases	26
2.2.2	Attracteurs	26
2.2.3	Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)	28
2.2.4	Exposants de Lyapunov	28
2.3	Transition vers le chaos	33
2.3.1	Cascade de doublements de période 33	
2.3.2	Par intermittence	34
2.3.3	Scénario de Ruelle et Takens	34
3	Systèmes dynamiques discrets chaotiques universels	35
3.1	L'application logistique	35
3.1.1	Historique de l'application logistique	35
3.1.2	Définition de l'application logistique	37
3.1.3	Propriétés de l'application logistique	38
3.1.4	Points fixes et orbites périodiques :	46
3.1.5	Convergence de l'application logistique	51
3.1.6	Les bifurcations de l'application logistique	55
3.1.7	Diagramme de bifurcations	59
3.1.8	Le chaos dans l'application logistique	60
3.2	Attracteur de Hénon	62
3.2.1	Historique du système de Hénon	62
3.2.2	Définition du système de Hénon	63
3.2.3	Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations	72
3.2.4	Analyse de bifurcation	75

3.2.5	Diagramme de bifurcation	78
3.2.6	Bassin d'attraction de Hénon	79
3.2.7	Le chaos dans le système de Hénon	79
3.3	Système de Lozi	80
3.3.1	Historique du système de Lozi	80
3.3.2	Définition du système de Lozi	81
3.3.3	Points fixes du système de Lozi	82
3.3.4	Stabilité des points fixes	82
3.3.5	Attracteur de Lozi	84
3.3.6	Le chaos dans le système de Lozi	87
3.4	Systeme Hitzl-Zele	88
3.5	Systeme de stefanski	89
3.6	Système de Zeraoulia-Sprott	90
3.6.1	Attracteur de Zeraoulia-Sprott	91
3.7	Conclusion	91
4	Synchronisation du chaos	92
4.1	Types de synchronisation	93
4.1.1	Synchronisation complète	93
4.1.2	Anti-Synchronisation	94
4.1.3	Synchronisation décalée	94
4.1.4	Synchronisation projective	94
4.1.5	Synchronisation FSHP	95
4.1.6	Synchronisation généralisée	95
4.1.7	Synchronisation Q-S	96
4.2	Méthodes de synchronisation	96
4.2.1	Méthode du contrôleur actif	96
4.2.2	Méthode du Backstepping	98
4.2.3	Méthode du mode glissant	100

4.3		
	Cryptographie via synchronisation chaotique	103
4.3.1	Chiffrement et déchiffrement	103
4.3.2	Cryptage par addition	104
4.3.3	Cryptage par commutation	105
4.3.4	Cryptage par modulation	106
4.4	Quasi-contrôle des systèmes dynamiques discrets chaotiques	108
4.4.1	Quasi-synchronisation entre le système maître 3D et le système esclave 2D	109
4.4.2	Conclusion	114
4.5	Conclusion générale	115

Introduction

Au bout des deux révolutions du siècle dernier, dont la première concerne l'univers et la relativité de **Newton**¹ sur le problème de la stabilité du système solaire, et la seconde l'équation de **Schrödinger**² menant à la mécanique quantique, certains auteurs, nomment une troisième révolution, relative au comportement chaotique des systèmes dynamiques en général, et particulièrement les systèmes dynamiques discrets.

Les systèmes dynamiques se sont développés durant le XIX^{ème} siècle ; effectivement, vers la fin de ce siècle, le mathématicien physicien et philosophe français **Henri Poincaré**³ avait déjà mis en exergue le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales, il montra dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et d'autres instables et que parfois, une très faible perturbation dans le système pouvait générer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes parfaitement semblables pouvaient ne pas entraîner les mêmes effets.

Puis, plusieurs recherches sur la sensibilité du mouvement ont été réalisées, **Alexandre Lyapunov**⁴, le mathématicien russe qui avait introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initialement voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement il s'agit de la sensibilité aux conditions initiales, et **Edward Lorenz**⁵ météorologue américain analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible. Edward Lorenz soutenait que, dans les systèmes non-linéaires de petites différences dans les conditions initiales repro-

¹Isaac Newton (1642-1727), est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle.

²Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (12 août 1887 à Vienne – 4 janvier 1961) est un physicien, philosophe et théoricien scientifique autrichien.

³Henri Poincaré (1854-1912), est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos.

⁴Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857-1918) est un mathématicien russe, il a apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires ou non.

⁵Edward Norton Lorenz (1917-2008), est un scientifique américain, travaillant comme météorologue au "Massachusetts Institute of Technology", il découvre par hasard, en 1963, que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté.

duisent à long terme des systèmes complètement différents. C'est d'ici les premiers pas pour comprendre le chaos déterministe.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "espace des phases" ; cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire et donc prévisible.

Simultanément aux recherches sur la chaos dans les systèmes dynamiques discrets, un axe de recherches en mathématiques s'est élargi parallèlement, s'intéresse à la synchronisation des mouvements chaotiques, un thème attire l'attention de plusieurs chercheurs, parmi eux on trouve **Yamada et Fujisaka** [83] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, **Afraimovich et Al.** ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement **Pecora et Carroll** [65]. ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un appelé maître et l'autre esclave. Une autre approche plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont **Rulkov et Al.** ont posé les bases. En raison de ses applications dans la télécommunication, la transmission sécurisée d'informations, [23], [52] et la cryptographie [3], les systèmes dynamiques chaotiques discrets jouent un rôle plus important, car de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques [77], ont été définis à l'aide des systèmes dynamiques discrets. Par conséquent, il est important de considérer la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques (hyperchaotiques) discrets.

Suite à ce qui précède, notre thèse est répartie sur quatre chapitres importants et liés l'un de l'autre, dont le premier est consacré aux systèmes dynamiques discrets dans leur généralité, comme par exemple, les définitions de base, d'espace d'état, de système dynamique discret, des points fixes avec leur classification et stabilité, en passant par la théorie de bifurcation.

Le deuxième chapitre, nous fait une tournée vers les outils de mesure et de quantification du chaos dans tel système, en décrivant les notions d'attracteur régulier ; attracteur étrange,

sensibilités aux conditions initiales, exposant de Lyapunov.

Pour la bonne illustration du chaos dans les systèmes dynamiques discrets, nous citons dans le troisième chapitre, quelques exemples universels de systèmes dynamiques discrets dans le plan et dans l'espace.

Finalement, en quatrième chapitre, en passant par la présentation des différents types de synchronisations des systèmes dynamiques discrets et leur utilité dans la cryptographie, nous donnons un résultats sur la synchronisation incomplète, dite dans notre papier-quasi-controlling-.

Liste des figures

Figure	Titre
1.1	Bifurcation selle-noeud de f_c
1.2	Bifurcation par doublement de la période (ou bifurcation flip) de f_c .
1.3	Bifurcation fourche
3.1	Population dont le taux de croissance $a = 1$ avec $x_0 = 0.1$.
3.2	Population dont le taux de croissance $a = 2$ avec $x_0 = 0.1$
3.3	Population dont le taux de croissance $a = 3$ avec $x_0 = 0.1$.
3.4	Population dont le taux de croissance $a = 4$ avec $x_0 = 0.1$.
3.5	Population dont le taux de croissance $a = 1$ avec $x_0 = 0.8$.
3.6	Population dont le taux de croissance $a = 2$ avec $x_0 = 0.8$.
3.7	Population dont le taux de croissance $a = 3.8$, $x_0 = 0.8$.
3.8	Population dont le taux de croissance $a = 3.8$, $x_0 = 0.8001$.
3.9	Graphe de $g_a(x)$.
3.10	Graphe de $g_a^2(x)$.
3.11	Point fixe super attractif de l'application logistique
3.12	Convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = g_{1.5}(x_n)$ et $x_0 = 0.1$.
3.13	Convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = g_{3.2}(x_n)$ pour $x_0 = 0.1$.
3.14	Convergence en escalier
3.15	Convergence en spirale.
3.16	Diagramme de bifurcation de l'application logistique.
3.17	L'évolution de l'exposant le Lyapunov λ de l'application logistique en fonction de a .
3.18	Attracteur de Hénon $H_{a,b}$ pour $a = 1, 4$ et $b = 0, 3$
3.19	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1, 4$, $b = 0, 3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3.20	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1, 4$, $b = 0, 3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3.21	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0, 1$, $b = 0, 3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3.22	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0, 1$, $b = 0, 3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3.23	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0, 4$, $b = 0, 3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Liste des figures

Figure	Titre
3.24	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0,4$ et $b = 0,3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$
3.25	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$, $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$
3.26	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$, $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$
3.27	Diagramme de Bifurcation pour le système de Hénon pour $-0,15 \leq a \leq 0,4$, $b = 0.3$
3.28	Diagramme de bifurcation de Hénon.
3.29	Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.
3.30	L'évolution de l'exposant le Lyapunov λ de système de Hénon en fonction de a .
3.31	Attracteur de Lozi pour $a = 1,7$ et $b = 0,5$.
3.32	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.7$ et $b = 0.5$
3.33	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,7$ et $b = 0.5$.
3.34	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,7$ et $b = 0.5$.
3.35	L'évolution de l'exposant le Lyapunov λ de système de Lozi en fonction de a .
3.36	Attracteur chaotique de Hitzl et Zele pour $(a,b) = (1.07, 0.3)$.
3.37	Attracteur hyperchaotique de Stefanski pour $b = 0.2$, et $a = 1.4$.
3.38	Attracteur chaotique de Zeraoulia-Sprott.
4.1	Erreur de synchronisation e_1 .
4.2	Erreur de synchronisation e_2 .
4.3	erreurs de synchronisation $e_i, i = 1, 2, 3$.
4.4	Scémadu cryptage par addition.
4.5	scéma du cryptage par commutation.
4.6	scéma du cryptage par modulation.

Chapitre 1

Préliminaire sur les systèmes dynamiques non-linéaires discrets

1.1 Généralités

1.1.1 Système dynamique discret

Définition 1.1 *Le système d'équations algébriques récurrentes (1.1)*

$$x_{k+1} = f(x_k, \Gamma), k \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

défini un système dynamique discret où $x_k \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état au rang k , $\Gamma \in \mathbb{R}$ le vecteur des paramètres, et f la fonction non linéaire de récurrence qui définit la dynamique du système.

Etant donnée une condition initiale x_0 de l'état du système (1.1), alors et en utilisant la composition des applications, on obtient

$$x_1 = f(x_0) \quad (1.2)$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0).$$

$$x_n = f(x_{n-1}) = \dots = f^n(x_0)$$

1.1.2 Orbites

Définition 1.2 *L'orbite au point x par le système (1.1) est :*

$$O(x_0) = \{f^k(x_0), k \in \mathbb{N}\}$$

dit aussi trajectoire de phase issue de x_0

1.1.3 Point d'équilibre

Définition 1.3 *Un point d'équilibre, ou encore point fixe du système dynamique (1.1) est un point invariant par l'application f , c'est-à-dire un point x^* tel que*

$$f(x^*) = x^*. \tag{1.3}$$

Le point fixe dans le plan est une intersection de la courbe de notre fonction $y = f(x)$ avec la bissectrice $y = x$.

1.1.4 Orbite périodique d'ordre p (p -cyclique)

Définition 1.4 *On dit que x est un point périodique, s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que*

$$f^p(x) = x \tag{1.4}$$

La période d'un point périodique est le petit entier vérifiant (1.4).

Définition 1.5 *Un cycle d'ordre p (ou orbite périodique d'ordre p ou encore un p -cycle) est un*

ensemble de p points $\{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*\}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), i = 0, \dots, p-1. \\ x_p^* &= f(x_{p-1}^*) = x_0. \\ x_i^* &\neq f^h(x_i^*), i = 0, \dots, p-1. \text{ et } 1 \leq h < p. \end{aligned} \tag{1.5}$$

c-à-d chaque point du cycle d'ordre p est un point fixe pour l'application f^p , i.e

$$x_i^* = f^p(x_i^*), i = 0, \dots, p-1.$$

Définition 1.6 L'espace des phases est une structure correspondante à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, ou un espace mesurable.

1.2 Stabilité

Définition 1.7 Un point fixe x^* de $f : I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}^n$, est dit attractif (ou stable au sens de Lyapunov), s'il existe un voisinage de x^* tel que pour tout w_0 dans ce voisinage la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par w_0 et $w_{n+1} = f(w_n)$, converge vers x^* . i.e

$$\forall x_0 \in I, \exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x^* - f(x_0)\| < 0.$$

De plus si

$$\forall x_0 \in I, \exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = x^*$$

le point x^* dit asymptotiquement stable.

Définition 1.8 Un point fixe x^* de $f : I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}^n$, est répulsif (ou instable) si :

$$\forall x_0 \in I, \exists \varepsilon > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x^* - f(x_0)\| > 0.$$

Définition 1.9 *Considérons une application non-linéaire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; on définit le multiplicateur m de f au point fixe x^* comme suit :*

$$m = f'(x^*).$$

1.2.1 Linéarisation

Théorème 1.1 *Supposons que le système non-linéaire décrit par (1.1) admet un développement limité au voisinage de point fixe x^* alors :*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x^*) + (x - x^*)Df(x^*) + O(x_k - x^*)^2 \\ &= Ax_k + O(x_k - x^*)^2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

puisque au voisinage de x^ , $\|x - x^*\| \rightarrow 0$ en négligeant les termes du second ordre, et le système (1.1) est bien linéariser.*

L'application $X \mapsto AX$ s'appelle l'application linéarisée de f au voisinage du point fixe x^ . On dit que le système (1.1) est approximé au voisinage du point d'équilibre x par le système linéaire (1.3).*

1.2.2 Nature d'un point d'équilibre

Il est clair que m est la pente de la tangente au point fixe x^* de f qui détermine le type (ou la nature) de point fixe.

Théorème 1.2 *$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Supposons que x^* est un point fixe de $x_{k+1} = f(x_k)$, alors le point fixe est :*

1. *Attractif si $|m| < 1$.*
2. *Répulsif si $|m| > 1$.*
3. *Indifférent si $|m| = 1$.*
4. *Super stable si $m = 0$.*

Preuve: La preuve est immédiate en utilisons la formule de Taylor au voisinage de x^* , et aussi le théorème du nombre dérivé. ■

Théorème 1.3 (Méthode directe de Lyapunov). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour déterminer la nature de point fixe x^* il faut falloir trouver les valeurs propres de la matrice Jacobienne $J(x^*) = Df(x^*)$. Le point fixe x^* est :

1. Stable si toutes les valeurs propres λ_i de $J(x^*)$ sont à l'intérieur du disque unité ($|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n$).
2. Instable si l'une de ces valeurs propres de $J(x^*)$ a un module supérieur à 1.

Preuve: La preuve peut être faite en utilisant le critère de Routh-Hurwitz. ■

Comme les points fixes peuvent être attractifs ou répulsifs, de même, une orbite périodique est soit attractive soit répulsive et le théorème suivant décrit la stabilité d'une orbite périodique.

En dimension 1; le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de chaîne. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$(f^p)'(x_p) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)$$

Mais $x_0 = x_p$, on en déduit que la valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées et notée m_p .

On définit le multiplicateur du cycle m_p par :

$$m_p = (f^p)'(x_0)$$

Théorème 1.4 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le cycle $\{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*\}$ est :

1. Attractif si $|m_p| < 1$.
2. Répulsif si $|m_p| > 1$.
3. Indifférent si $|m_p| = 1$.
4. Super stable si $m_p = 0$.

En général, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on calcule les valeurs propres $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ de la matrice jacobienne

de f^p .

Si λ_i sont réelles :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$, il s'agit d'un noeud attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$, il s'agit d'un noeud répulsif.

$\exists i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, tel que $|\lambda_i| < 1$ et $|\lambda_j| > 1$, il s'agit d'un noeud col.

Si λ_i sont complexes :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$, il s'agit d'un foyer attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$, il s'agit d'un foyer répulsif.

Preuve: La preuve peut être faite en utilisant le critère de Routh-Hurwitz. ■

Définition 1.10 Un point fixe x^* de $x_{k+1} = f(x_k)$ est un point hyperbolique si $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) \right| \neq 1$. Plus généralement, en dimension n , x^* est un point hyperbolique si aucune des valeurs propres de $Df(x^*)$ a un module égal à 1.

Définition 1.11 Le bassin d'attraction d'un point fixe x^* d'une application f est formé par l'ensemble des conditions initiales w_0 pour lesquelles la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_{n+1} = f(w_n)$ converge vers le point d'équilibre x^* .

1.2.3 Fonction de Lyapunov

Dans plusieurs cas, en utilisant les points singuliers, on ne peut rien conclure sur la stabilité, par exemple, le point fixe dans le cas des valeurs propres dont la partie réelle négative est asymptotiquement stable, et si certaines des valeurs propres ont des parties réelles positives, le point est instable, mais qu'en est-il dans les autres cas ?

Une nouvelle méthode dite de Lyapunov s'est apparaitre, elle nous permetre d'analyser la stabilité à partir des équations récurrentes définissant le système (1.1) sans passer par le calcul de leurs solutions.

Définition 1.12 Une fonction de Lyapunov est une fonction scalaire $V : \mathbb{I} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue en x_k telle que :

1- $V(0) = 0$

2- V soit définie positive, i.e à $V(x_k) > 0, \forall x_k \neq 0$

3- $V(x_k) \rightarrow \infty$ si $x_k \rightarrow \infty$.

Théorème 1.5 (Méthode indirecte de Lyapunov) *Le point d'équilibre x^* de (1.1) est globalement stable et asymptotiquement stable, s'il existe un voisinage \mathbb{I} de x^* et une fonction de Lyapunov continue $V : \mathbb{I} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) = V(f(x_{k+1})) - V(x_k) < 0 \quad (1.7)$$

1.3 Bifurcations

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système. Tout changement dans leur nombre ou leur stabilité agit parfois de façon dramatique sur le comportement du système. De plus, ces changements se font suivant un petit nombre de scénarios qui permettent d'indiquer une classification des changements des comportements.

Définition 1.13 *La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. Par exemple, déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur, ...*

La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

Définition 1.14 *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

Définition 1.15 *Soient X et Y deux espaces topologiques, et soient $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ deux applications continues, on dit que les applications f et g sont topologiquement conjuguées s'il existe un homéomorphisme $\varphi : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$.*

Les applications f et g ont les mêmes propriétés dynamiques, elles ont donc entre autres, le même nombre de points fixes et d'orbites périodiques.

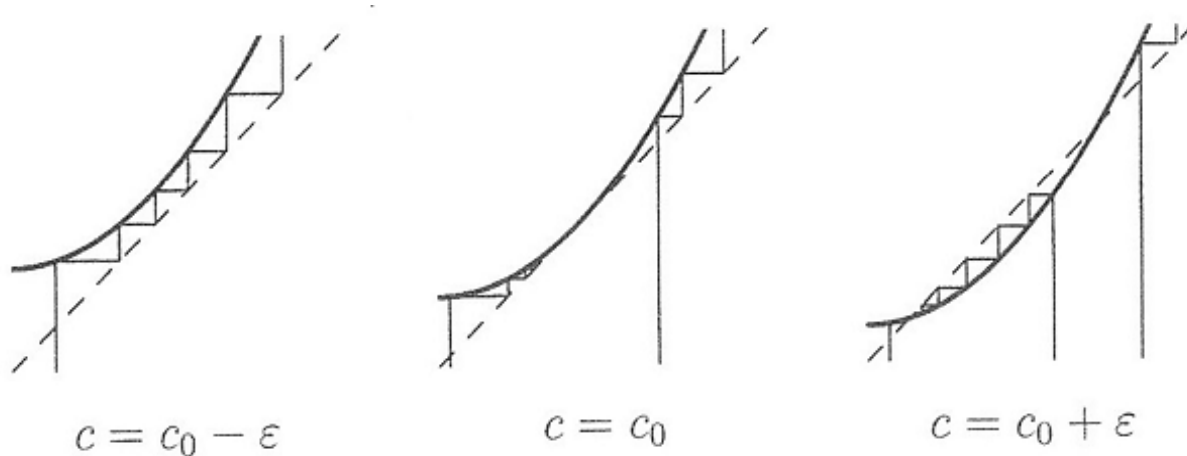


FIG. 1-1 – Fig. 1.1. Bifurcation selle-noeud de f_c .

Définition 1.16 Une famille d'applications $f_c : X \rightarrow X$ dépendant d'un paramètre c admet une bifurcation en c_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in (c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$ tel que f_c et f_{c_0} ne sont pas topologiquement conjuguées.

1.4 Types de bifurcations

Considérons le système

$$x_{k+1} = f_c(x_k), \quad c \in \mathbb{R}$$

Bifurcation selle-noeud (ou bifurcation tangente)

Si l'application a un point fixe non-hyperbolique x^* i.e, $f_{c_0}(x^*) = x^*$ où $\frac{\partial f_{c_0}}{\partial x}(x^*) = 1$, puis l'application $f_{c_0+\varepsilon}$ a deux points fixes dans I voisinage de x^* l'un est attractif tandis que l'autre est répulsif, Fig (1.1).

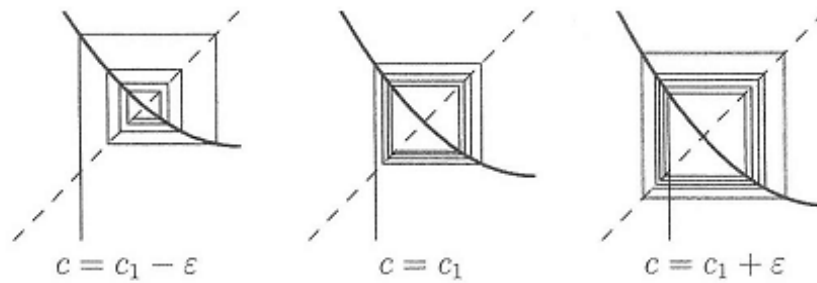


FIG. 1-2 – Fig.1.2. Bifurcation par doublement de la période (ou bifurcation flip) de f_c .

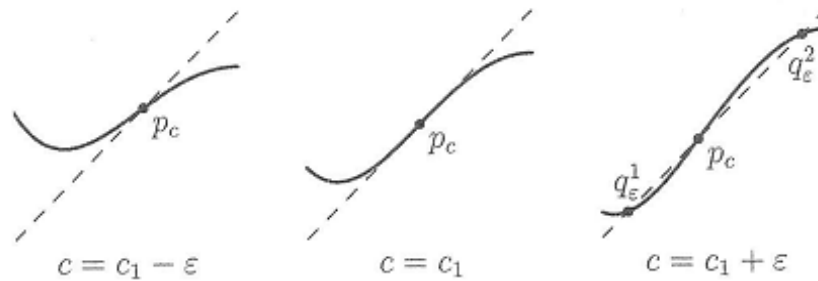


FIG. 1-3 – Fig.1.3. Bifurcation fourche.

1.4.1

Bifurcation par doublement de la période (ou bifurcation flip)

Si l'application f_c admet un point fixe non-hyperbolique x^* i.e, $f_{c_0}(x^*) = x^*$ où $\frac{\partial f_{c_0}}{\partial x}(x^*) = -1$ telle que $f_{c < c_0}$ a seulement un point fixe attractif, et $f_{c > c_0}$ a un point fixe répulsif et une orbite attractive de période 2 au voisinage de x^* , Fig(1.2).

1.4.2 Bifurcation fourche

Lorsque l'application f_c a une bifurcation par doublement de la période en c_1 , on dit que f_c^2 a une bifurcation fourche en c_1 . Fig(1.3)

1.4.3 Bifurcation de Neimark-Sacker

Cette bifurcation se produit lorsque la jacobienne de f_c possède deux valeurs propres complexes conjuguées de norme égale à 1.

1.4.4 Bifurcation transcritique

Il y a échange de stabilité dans un tel cas, entre l'origine et le second point d'équilibre. sur le diagramme de bifurcations cela se traduit par deux

branches différentes de points fixes qui se croisent en un point et par le changement de stabilité des deux branches au passage par le point d'intersection.

1.5 Conclusion

Un rappel autour des systèmes dynamiques discrets est présenté dans ce premier chapitre, où la bifurcation des points d'équilibres a lieu.

Chapitre 2

Quantification du chaos dans les systèmes dynamiques discrets

Introduction

Il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, et plusieurs interprétations sont données aux phénomènes chaotiques, comme un indésirable aspect du désordre, et aussi confusion, agitation, abîme essentiel et aléatoire indésirable.

Nous citons plusieurs travaux qui prédisposent l'invention de cette branche de mathématiques dans sa façon moderne, nous commençons par Henri Poincaré en 1889, dans le problème des trois corps, puis en 1908, l'idée de "chance" a été publiée par Poincaré. En 1898, la divergence globale des trajectoires dans l'espace de courbure négative a été inscrite par Jacques Hadamard, puis en 1908, la signification générale de son théorème a été discutée par Pierre Duhem qui a déclaré que les premières conditions aléatoires introduites dans le théorème d'Hadamard ne permettent pas de prédire le système chaotique d'une façon complète.

À la fin du XIX^{ème} siècle, Jacques Hadamard a réussi à prouver un théorème sur la dépendance sensible aux conditions initiales concernant le courant géodésique sur une surface de courbure négative et le mouvement sans friction d'un point sur une surface.

Le comportement indéterminé "*occasionnel*" d'un circuit oscillatoire du tube électronique géré par une équation différentielle non linéaire simplifiée a été constaté par Bathazar Van Del Pol en 1927.

Environ treize ans après, selon Mary Cartwright Tôt et John Littlewood cette équation avait le potentiel de démontrer des solutions sensibles à tous les chiffres dans ces conditions initiales.

En suivant la tradition de Poincaré, l'étude des systèmes hamiltoniens non linéaires a été poursuivie par des nombreux mathématiciens comme Kolmogorov, Arnold et Moser entre les années 1920 et 1960.

Au début des années 1960, la désignation laborieuse des entrées et des productions de processeurs de données mentales constituait un facteur essentiel facilitant la révolution cognitive. Considérer l'esprit comme un système cybernétique dynamique avait été l'approche la plus rapide selon Miller, Gallanter et Pribram. En 1972, Newell et Simon ont proposé une nouvelle approche qui a dénoncé la précédente en considérant l'esprit comme une règle basée sur un processeur de symbole.

En 1960, Steve Smale a fourni des preuves mathématiques permettant d'établir des équations différentielles avec une sensibilité générique. La fin des années 1960 a marqué le commencement des simulations numériques des équations différentielles avec un comportement complexe sur les calculatrices analogiques ensuite sur les calculatrices numériques.

Dans les années 1962, Edward Lorenz a remarqué un comportement complexe sensiblement dépendable des conditions initiales après avoir mené une simulation en ordinateur d'un ensemble d'équations différentielles simplifiées pour une convection d'un fluide.

Une large série de champs a incorporé la théorie des systèmes dynamiques dans le comportement prédateur-proie, parole et langue, développement de l'enfant, et l'intelligence artificielle.

En 1977, Ilya Prigogine a remporté le Prix Noble en chimie. Il a focalisé sur l'entropie des systèmes ouverts. En d'autres mots, l'accumulation et l'écoulement de la matière, l'énergie, ou l'information entre le système et son environnement. Prigogine a dévoilé à travers un système dissipatif que l'évolution des structures complexes peut être simple et organisé.

C'est en 1984 que T. Matsumoto et L.O. Chua [58] avaient leurs première observation d'un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple, construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments. Le développement de la théorie des circuits non linéaires a commencé à partir de cette observation, suivi par les circuits électroniques chaotiques. Matsumoto a vérifié la nature chaotique de ce

circuit avec ses expériences numériques.

Avec ses étudiants ils étaient parvenus à modifier les circuits de Rosenthal afin d'obtenir deux résistances non linéaires terminales avec une fonction linéaire par morceaux qui devraient être précocement désignés. L'adaptation du circuit de Rosenthal a été réussite par Takumaso deux ans après dans le but d'en arriver à la non-linéarité requise.

La caractéristique principale du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, si le système est chaotique, alors il n'est pas possible de calculer avec précision l'évolution d'un cas particulier, car une erreur négligéable est survenue aux observations de départ résulte des fluctuations énormes. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales. Ce comportement est connu sous le nom du chaos déterministe, ou tout simplement le chaos.

2.1 Définitions du chaos

Définition 2.1 *Définition Larousse* : Confusion générale des éléments, de la matière, avant la création du monde. Fig. Désordre.

Définition 2.2 *Définition de E .Lorenz* : Un système agité par des forces où seules existent trois fréquences indépendantes, peut se déstabiliser, ses mouvements devenant alors totalement irréguliers et erratiques.

Définition 2.3 (Devaney 1989). Soit (χ, δ) un espace métrique compact et une fonction $f : \chi \rightarrow$

χ

Le système dynamique discret

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

est dit chaotique si les conditions suivantes sont vérifiées :

1-Sensibilité aux conditions initiales :

Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in \chi$ et pour tout $\beta > 0$, il existe un point $y_0 \in \chi$ et un entier $k > 0$, vérifiant

$$\delta(x_0, y_0) < \beta \Rightarrow \delta(x_k, y_k) > \varepsilon \quad (2.1)$$

2-Transitivité topologique : f est topologiquement transitive, s'il existe $x_k \in \chi$ tel que l'orbite

$O = \{f^k(x_k), k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans χ .

3-Densité des orbites périodiques : $\{x_0 \in \chi; \exists k > 0, x_k = x_0\}$ est dense dans χ .

2.2 Outils de quantification du chaos

Les équations récurrentes non linéaires discrètes peuvent décrire des modèles chaotiques comme déjà vécu. Pour des cas nombreux, ces équations ne sont pas explicitement intégrables. On ne peut alors se servir que d'un raisonnement numérique pour pouvoir calculer ses solutions. Les

théoriciens du chaos mettent en oeuvre actuellement de nombreux outils afin d'évaluer un caractère chaotique en basant sur les équations récurrentes qui en découle. Nous ne citons ici que ceux qu'on peut mettre en exergue numériquement et qui fournissent assez de renseignements en vue de l'analyse explicite des phénomènes concernés. Quelques-uns de ces outils sont en outre complémentaires l'un à l'autre.

2.2.1 Espace des phases

Il est possible de suivre l'évolution de l'état d'un système physique dans le temps. Pour cela, on construit d'abord un modèle avec les lois physiques et les paramètres nécessaires et suffisants pour caractériser le système. Ce modèle est bien souvent constitué par des équations différentielles. On définira, à un instant donné, un point dans un « repère ». Ce point caractérisera l'état du système dans l'espace à cet instant. Cet espace est appelé « l'espace des phases ». L'espace des phases est une notion purement mathématique qui comporte autant de dimensions qu'il y a de paramètres dans le système dynamique étudié. des systèmes qui convergent vers un état d'équilibre après maintes oscillations, ce qui correspond dans l'espace des phases à des boucles qui convergent vers un point. On a d'autres qui se répètent périodiquement, ce qui correspond dans l'espace des phases à une orbite cyclique. et d'autres ont également un mouvement périodique mais plus complexe ; ils se répètent seulement après deux oscillations différentes : on dit qu'ils possèdent un cycle de période 2. Cela correspond à des boucles plus compliquées dans l'espace des phases. Enfin des systèmes qui sont chaotiques, et dans l'espace des phases, ils possèdent une forme de trajectoire aléatoire.

2.2.2 Attracteurs

Un attracteur est un objet géométrique ou un ensemble de points vers lesquelles évoluent le système en question, quelles que soient ses conditions initiales, c'est-à-dire une forme géométrique vers laquelle tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases .Autrement dit, c'est l'objet vers lequel évoluent les trajectoires formées à partir des points du bassin d'attraction. On peut alors extraire plusieurs attracteurs pour un même espace des phases et y on a deux types : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques. Les attracteurs étranges

comportent des lois déterministes et des lois aléatoires en même temps, ce qui rend irréalisable toute prévoyance de l'évolution sur le long terme.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers spécifient l'évolution des systèmes non chaotiques, et se divisent en deux catégories :

Un point fixe : ou bien état d'équilibre du système. Ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles elle empêche d'évoluer quand on progresse dans le temps.

Un cycle limite : Ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles l'évolution au cours du temps est cyclique c'est-à-dire, que la trajectoire s'enferme sur elle-même.

Pour tous les attracteurs réguliers, des trajectoires qui prennent leurs départ à partir des points extrêmement voisins dans l'espace de phase restent infiniment proches. On peut cependant présager l'évolution de ces systèmes, à partir d'un état connu.

Attracteurs étranges

Ils sont spécifiques à l'évolution des systèmes chaotiques, c'est-à-dire que tous les points de l'espace des phases qui découlent du bassin d'attraction de l'attracteur fournissent des trajectoires qui tendent à construire l'attracteur étrange au cours d'un certain temps.

De manière importante, un attracteur étrange n'est pas une surface lisse, mais une surface introvertie souvent sur elle-même. Effectivement, les trajectoires des points s'écartent du moment que deux points ne subissent pas la même évolution, mais comme l'attracteur a des dimensions finies, et ainsi l'attracteur doit se replier sur lui-même et ce procès de repliement tend à se renouveler indéfiniment et donne lieu à un nombre infini de plis chevauchés qui ne se rencontrent pas. Par conséquent, deux conditions initialement proches peuvent avoir deux positionnement différents de l'attracteur au-delà d'un certain rang. Cela exprime le caractère divergent des systèmes non-réguliers.

2.2.3 Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)

La sensibilité des trajectoires aux conditions initiales est un autre outil qui sert à quantifier un caractère chaotique. En choisissant deux états initiaux à proximité peu importe, les trajectoires qui en découlent s'écartent bientôt l'une de l'autre. Elles restent cependant attachées au même attracteur dès lors, enfermées dans un espace borné. Il est notamment facile à comprendre que, de plus faible erreur dans la condition initiale, empêche à prévoir quelle sera la trajectoire suivie après un certain temps et, donc, de faire une prédiction d'autre que statistique sur le long terme du système.

2.2.4 Exposants de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques ont grande sensibilité aux variations de leurs conditions initiales que peut présenter un attracteur étrange

Alexander Lyapunov (**1857-1918**) a développé un paramètre qui nous permet de calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

Ce moyen de contrôl est appelé "Exposant de Lyapunov" qui est une quantité permettant de caractériser le chaos temporel et est défini pour un système dynamique par :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

ou $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application, et x_0 est une condition initiale.

Dans un espace de dimension p , il y a p exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système. Ils sont définis à partir de la matrice jacobienne de l'application f au point x_0 et de ses valeurs propres.

Cas des systèmes discrets unidimensionnels

Théorème 2.1 Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_{n+1} sur x_n , l'exposant de Lyapunov λ qu'il indique le taux moyen de divergence est défini par :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.2)$$

Preuve: On définit un système dynamique par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'états X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état qui $f : X \times T \rightarrow X$ permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application itérative :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x_k \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, \dots,$$

Où p est un paramètre, et $t \in T$.

Pour deux conditions initiales très proches x_0 et x'_0 séparées d'une distance d_0 , et on regarde comment se comportent les trajectoires qui en sont issues.

Alors $d_0 = |x'_0 - x_0|$

Après une itération, la distance entre les deux trajectoires devient $d_1 = |x'_1 - x_1|$

Après n itération la distance évolue à $d_n = |x'_n - x_n|$

Le rapport $\frac{d_i}{d_{i-1}}$ décrit l'évolution de l'erreur d_i dans la i ème itération, autrement

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{|x'_1 - x_1|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0}$$

et puis $\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0} = |f'(x_0)|$,

Cette quantité est positive, alors il existe un réel λ_1 telle que

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = |f'(x_0)| = e^{\lambda_1}$$

donc les deux trajectoires s'écartent à un rythme exponentiel à la première itération.

en extraire la valeur de $\lambda_1 = \ln |f'(x_0)|$ en passant au logarithme dans (1.1).

L'évolution de l'erreur après n itérations :

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{|x'_n - x_n|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_n) - f(x_n)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x'_0) - f^n(x_0)|}{d_0} = \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0}$$

En passant à la limite

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0} = \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

l'erreur tends vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} &= \lim_{d_0 \rightarrow 0} \prod_{i=0}^n \frac{|x'_{i+1} - x_{i+1}|}{|x'_i - x_i|} = (e^\lambda)^n = e^{n\lambda} \simeq \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| \\ &\Rightarrow n\lambda \simeq \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| \Rightarrow \lambda \simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(f^{n-1}(x_0))}{dx} \right| \end{aligned}$$

en utilisant la règle de dérivation par chaîne $\lambda \simeq \frac{1}{n} \ln |f'(x_{n-1})| |f'(x_{n-2})| \dots |f'(x_0)| = \prod_{i=0}^n |f'(x_i)|$

quand n tends vers l'infini

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|$$

Pour un point d'équilibre x^*

$$\lambda = \ln |f'(x^*)|$$

- Si $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow \lambda < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable et la trajectoire issue d'une condition initiale x_0 ($\{x_i\}_{i=0}^n$) est asymptotiquement **stable** au voisinage de x^* .

-Si $|f'(x^*)| = 1 \Rightarrow \lambda = 0$, x^* est stable et par conséquent la trajectoire issue de x_0 est **périodique**, donc **stable**.

-Si $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow \lambda > 0$, x^* est **instable** ainsi que la trajectoire issue de x_0 . ■

Exemple 2.1 Pour l'application logistique

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i); x_i \in [0, 1]$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |4(1 - 2x_i)| = \ln 2 > 0$$

alors le système est *chaotique*.

Cas des systèmes discrets multidimensionnels

Théorème 2.2 Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application discrète telle que $x_{n+1} = f(x_n)$

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln q_i(f^k(x_0))$$

Preuve: $\frac{d_n}{d_0} = \frac{x'_n - x_n}{x'_0 - x_0} = \frac{f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)}{d_0} \simeq (e^\lambda)^n \Rightarrow f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0) \simeq d_0 e^{n\lambda}$

Soit le développement limité d'ordre 1 de la fonction $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\simeq f^n(x_0) - f^n(x'_0) = (x_0 - x'_0) \left[\frac{df^n}{dx}(x_0) \right] \\ &= J(x_0) J(x_1) \dots J(x_n) \times (x_0 - x'_0) \\ &= \prod_{i=0}^n J(x_i) \times (x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=0}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, on obtient $x_n - x'_n = J^n(x_0) \times (x_0 - x'_0)$,
où $J^n(x_0) \in \mathcal{M}_{p \times p}$ représente la matrice jacobéenne de $f^n(\cdot)$ au point x_0 .

Si $J^n(x_0)$ est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_{p \times p}$ telle que la matrice $D_p^n = P_p^{-1} J^n P_p$ est diagonale des valeurs propres $q_i(f^k(x_0))$, ($i = 1, 2, \dots, p$)

On définit les p exposants de Lyapunov comme suit :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln q_i(f^k(x_0)) \tag{2.3}$$

et λ_i sont les exposants de Lyapunov associés aux trajectoires issues de x_0 dans la i ème direction.

Pour le point d'équilibre $x^* : x_n - x'_n = (J(x^*))^n (x_0 - x'_0)$

passant aux composantes du vecteur $\|x_{i,n} - x'_{i,n}\| = [q_i(x^*)]^n \|x_{i,0} - x'_{i,0}\| = e^{n\lambda_i} \|x_{i,0} - x'_{i,0}\|$

ceci implique par comparaison

$$\lambda_i = \ln q_i(x^*), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.4)$$

■

Exemple 2.2 (*La transformation de boulanger*)

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x_{i+1} = 2x_i \pmod{1}, 0 \leq x < 1/2 \\ y_{i+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}ay_i, 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(ay_i + 1), \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \end{cases} \quad 0 \leq a < 1$$

$(0, 0)$ est le seul point fixe de f dont la matrice jacobéenne J est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de J de $f^n(x_0)$ au point $x_0 = (0, 0)$ sont :

$$q_1(f^n(x_0)) = 2 \text{ et } q_2(f^n(x_0)) = \frac{a}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Appliquant (1.3), on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln 2 = \ln 2 \\ \lambda_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln \frac{a}{2} = \ln \frac{a}{2} \end{cases}$$

Les exposants de Lyapunov permettent donc de quantifier la sensibilité aux conditions initiales

(sci) mais aussi de séparer les comportements instables ou chaotiques des comportements stables et prévisibles.

*Si un exposant de Lyapunov est strictement positif, alors la sci est très grande et le système est chaotique.

*Si tous les exposants de Lyapunov sont négatifs ou égaux à zéro, on est en présence d'un phénomène stable ou périodique.

On a vu que certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux variations de leurs conditions initiales, ces variations peuvent brusquement faire un boum. Le mathématicien russe Alexander Markus-Lyapunov a examiné ce phénomène et a défini une quantité lui permettant d'estimer l'allure d'amplification de ces petites variations, cette quantité et qui porte le nom de son fondateur « exposant de Lyapunov » mesure en vérité l'amplitude de sensibilité d'un système dynamique, c'est-à-dire, le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires appartenant à l'attracteur étrange et qui découlent des conditions initialement voisines au sein d'espace des phases et il est montré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de cet espace.

2.3 Transition vers le chaos

L'évolution des points fixes, par le changement de son type de stabilité, suivant au changement des valeurs du paramètre de bifurcation, fait le motif pour lequel une transition vers le chaos est apparue. Plusieurs scénarios existent décrivant ce passage vers le chaos, et nous citons ici quelques scénarios de transition d'une dynamique régulière à une autre chaotique :

2.3.1 Cascade de doublements de période

Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches, il a été observé dans les années 60 par R.May en dynamique de populations sur l'application logistique. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8,

etc.. Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique[68].

2.3.2 Par intermittence

Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la perturbation domine [25].

2.3.3 Scénario de Ruelle et Takens

Dans un système dynamique à comportement périodique a une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement devient périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'à l'arrivée de la situation chaotique. Ce scénario dit-via la quasi-périodicité- a été introduit dans les travaux de Ruelle et Takens [69].

Chapitre 3

Systemes dynamiques discrets chaotiques universels

3.1 L'application logistique

3.1.1 Historique de l'application logistique

L'application logistique $g_a = ax(1 - x)$ s'intéresse à la modélisation de l'évolution des populations. Elle a été énoncée en 1838 par Pierre François Verhulst¹, et qui prétend modéliser non exponentiellement l'évolution des populations. Ce nouveau modèle vient en réaction au modèle de Thomas Malthus² qui anticipe une croissance exponentielle de la population. Assurément, pour Malthus, chaque année, la population grossit dans un rapport fixe : $u_{n+1} = ru_n$ où u_n désigne la population de l'année n et r le taux de croissance de la population. La fonction associée à cette suite est : $f(x) = rx$. Ce modèle exponentiel envisage donc une évolution infinie de la population et dès lors, il se conforme mal à la réalité. Effectivement, aucun empêchement à l'évolution

¹Pierre-François Verhulst (1804-1849) est un mathématicien belge. Inspiré par l'« Essai sur le principe de population » de Thomas Malthus, il proposa en 1838 le modèle de Verhulst, décrivant l'évolution des populations animales grâce à un modèle qui ne soit pas exponentiel. C'est dans la publication de 1845 qu'il nomme cette courbe « logistique » sans donner l'explication de ce terme

²Thomas Malthus (1766 – 1834), économiste britannique contemporain du décollage industriel anglais, il est surtout connu pour ses travaux sur les rapports entre les dynamiques de croissance de la population et la production, analysés dans une perspective pessimiste, totalement opposée à l'idée smithienne d'un équilibre harmonieux et stable.

est pris en compte. La correction du modèle de Malthus s'impose cependant en considérant ces empêchements. C'est de même que le modèle de Verhulst s'appuie sur la nourriture disponible. Cela établit une population maximale P qui sera aboutie lorsque toute la nourriture est épuisée. Si une année, la population est égale à P , l'année suivante la population sera nulle. Dans ce cas on peut écrire : $u_{n+1} = ru_n(P - u_n)$ où la fonction associée est $g(x) = rx(P - x)$. Le facteur rx désigne l'augmentation de la population tant que $(P - x)$ correspond à sa diminution due à des facteurs extérieurs. Cette dernière expression s'écrit alors $g(x) = rxP(1 - \frac{x}{P})$. En posant $y = \frac{x}{P}$, on obtient :

$$g(y) = ryP^2(1 - y) = ay(1 - y)$$

avec $a = rP^2$. La population doit être ainsi assimilée à un rapport compris entre 0 et 1, où 0 correspond à son extinction et 1 à son maximum. De plus, la population maximale est égale à $g(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$. Ainsi, $0 \leq \frac{a}{4} \leq 1$, soit $0 \leq a \leq 4$.

L'application g définie par :

$$\begin{aligned} g & : [0; 1] \rightarrow [0; 1] \\ y & \mapsto ay(1 - y), a \in [0; 4] \end{aligned}$$

s'appelle l'application logistique.

Après sa découverte par Pierre François Verhulst, l'application logistique a été oubliée jusqu'au début du XX^{ème} siècle. Deux mathématiciens biologistes, dans les années 1920, travaillent sur l'évolution des différentes populations animales et constatent que les populations évoluent différemment d'une espèce à une autre : certaines se stabilisent tandis que d'autres suivent des cycles réguliers et enfin d'autres fluctuent aléatoirement. De quoi dépend cette évolution ?

L'application logistique réapparaît alors pour tenter de répondre à cette question. Toujours dans le même but, dans les années 1970, James Yorke³ et Robert May⁴, tous deux écologistes,

³James Yorke (né en 1941), mathématicien américain, il a le sens de la formule : "le terme de chaos", qu'il a choisi en 1975 pour décrire des phénomènes très irréguliers, a été unanimement repris par les scientifiques. Mais James Yorke a fait bien plus, en mettant au point des méthodes pour étudier ces phénomènes, et aussi pour les utiliser dans des applications pratiques.

⁴Robert McCredie May, (né en 1938), physicien australien, au début de sa carrière, il s'intéresse à la dynamique des populations animales ainsi qu'à la relation entre la complexité et la stabilité en synécologie². Ses travaux jouent

auront trouvé la réponse. Pour eux, l'évolution de chaque population animale se calcule à l'aide de l'application logistique $g(y) = ay(1 - y)$ et dépend de la valeur de a .

En effet, pour certaines valeurs de a , le comportement de l'application se change significativement. Plus tard, ces paramètres sont appelés bifurcations. Pour plus de clarté, May a compilé ses résultats dans un graphique, c'est l'apparition du diagramme de bifurcation. Il remarque que jusqu'à un certain point, la population converge vers une valeur, puis deux, puis quatre, etc. Au delà de ce point, ce comportement prévisible s'arrête, c'est le chaos. Par ailleurs, à la même période, Mitchell Feigenbaum⁵, physicien, s'intéresse à son tour à l'application logistique dans le cadre de recherche sur la turbulence. Dans un premier temps, il fait les mêmes constatations que Robert May : il existe des valeurs de a pour lesquelles le comportement de l'application logistique se change. Puis durant l'été 1975, il assiste à une conférence sur la transition entre la périodicité et le chaos qui lui pousse à étudier l'application logistique sous un angle différent. Il admet les bifurcations et il se concentre sur la distance entre deux bifurcations successives. Il remarque alors que le rapport entre deux distances successives converge. Il a repris son étude sur d'autres applications dépendant d'un paramètre et constate que le rapport entre deux périodes converge toujours vers le même nombre. C'est la découverte de la constante de Feigenbaum.

3.1.2 Définition de l'application logistique

Définition 3.1 *Le système dynamique associé est : Partant d'une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$x_1 = g_a(x_0), x_2 = g_a(x_1), \dots, x_{n+1} = g_a(x_n).$$

Où

$$x_1 = g_a(x_0), x_2 = g_a(x_1) = g_a(g_a(x_0)) = g_a^2(x_0), \dots, x_n = g_a^n(x_0).$$

On dit que c'est un système dynamique de dimension 1 car $x \in \mathbb{R}$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment, la loi de mouvement est simplement $x_{n+1} = g_a(x_n)$.

un rôle clé dans le développement de l'écologie théorique (en) lors des années 1970 et 1980.

⁵Mitchell Jay Feigenbaum (né en 1944), est un physicien théoricien américain, il a découvert un scénario de transition vers le chaos par doublement de période, lors d'un séjour à Los Alamos. Cette transition est caractérisée par deux constantes universelles, baptisées depuis « nombres de Feigenbaum » en son honneur.

Définition 3.2 *L'application logistique est l'application notée usuellement g_a définie par :*

$$\begin{aligned}g_a & : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto ax(1 - x)\end{aligned}$$

avec $a \in [0, 4]$.

Cette application peut être appliquée plusieurs fois de suite, ce qui permet de définir par récurrence une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = g_a(u_n)$.

3.1.3 Propriétés de l'application logistique

On va prendre un exemple vu en mathématiques et en écologie pour étudier la croissance des populations c'est le modèle logistique. La population de la période $t + 1$ sera x_{t+1} en fonction de la population qui la précède de la période t et donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$

avec $(1 - x_t)$ représente la diminution de la population due à des facteurs extérieurs. ax_t représente le rapport de croissance.

Nous allons voir que selon la valeur de taux de croissance effectif a , une population se stabilise à une certaine valeur ou oscille entre deux ou plusieurs valeurs ou fluctue aléatoirement. Donc l'évolution de chaque population se calcule à l'aide de l'application logistique : $x_{k+1} = ax_k(1 - x_k)$

Dans ce but, nous allons étudier l'évolution des populations animales pour un taux de croissance effectif compris entre 0 et 4. Nous allons étudier numériquement et graphiquement cette évolution grâce à la fonction logistique.

Population dont le taux de croissance $a = 1$

Si on prend comme donnée initiale $x_0 = 0, 1$ on peut voir le comportement de l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique dans la figure ci-dessous :

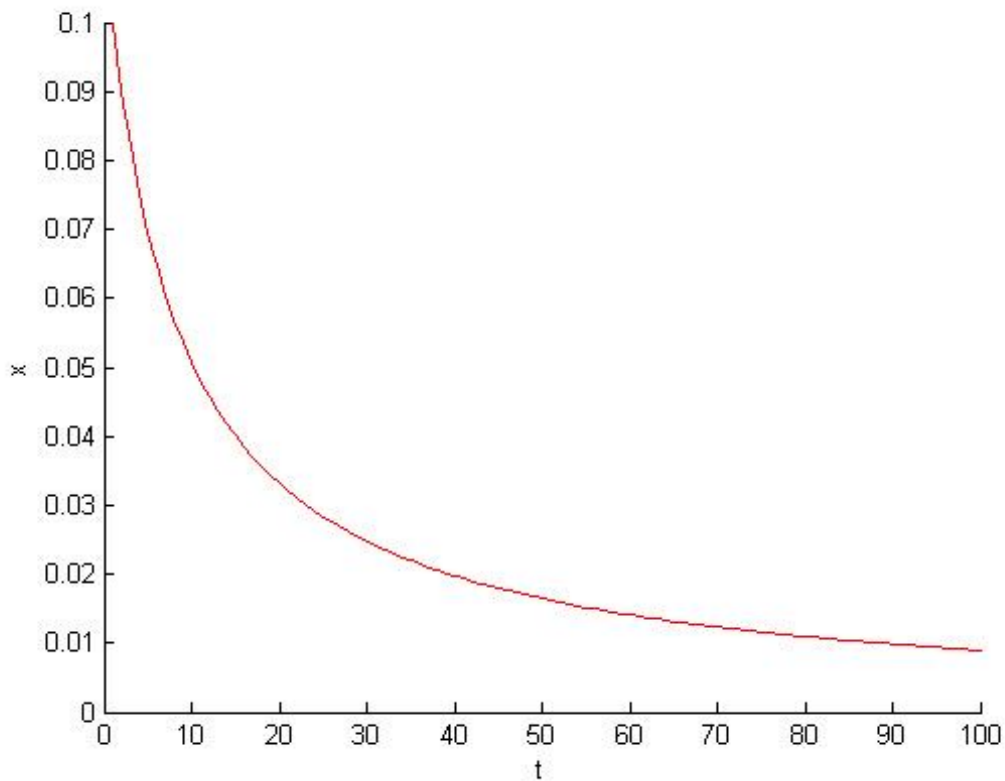


Fig 3.1. Population dont le taux de croissance $a = 1$ avec $x_0 = 0,1$.

On prévoit pour cette valeur de a une diminution de la population et une convergence vers zéro, voir Fig (3.1).

Population dont le taux de croissance $a = 2$

Pour une population initiale $x_0 = 0,1$ l'évolution de la population pour les 100 premières

itérations de l'application logistique est représentée dans la figure ci-dessous :

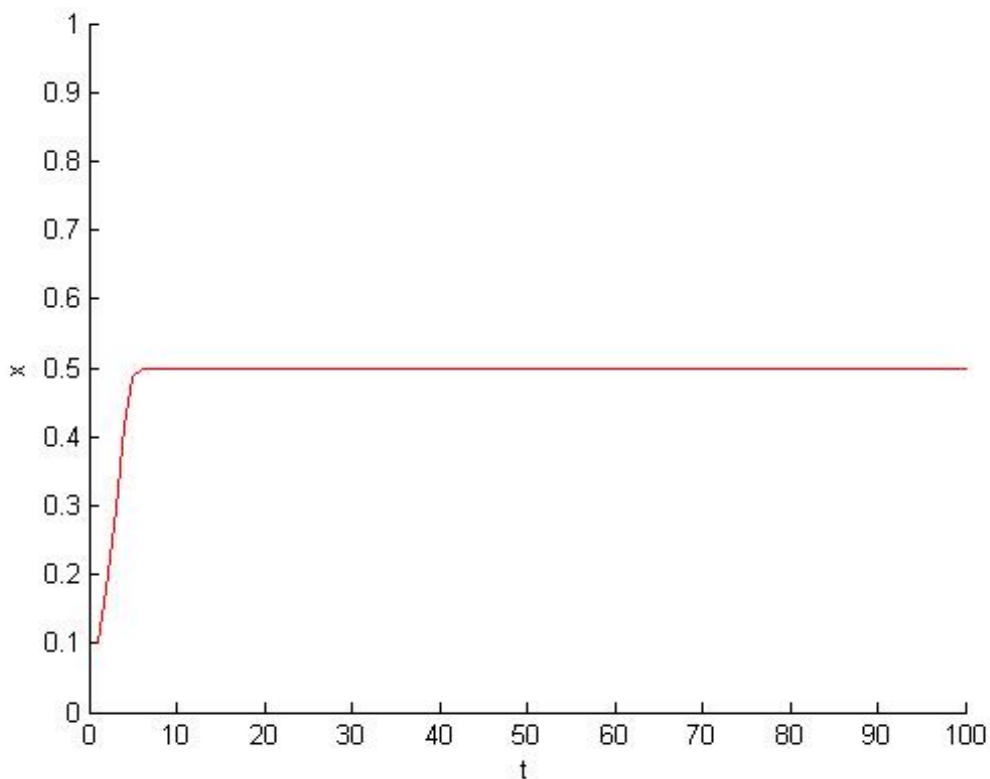


Fig 3.2. Population dont le taux de croissance $a = 2$ avec $x_0 = 0,1$

On constate que la population se stabilise vers une certaine valeur correspond à 0,5, voir Fig (3.2.)

Population dont le taux de croissance $a = 3$

Maintenant pour la même valeur prise de la population initiale $x_0 = 0,1$ l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique est représentée dans la

figure ci-dessous :

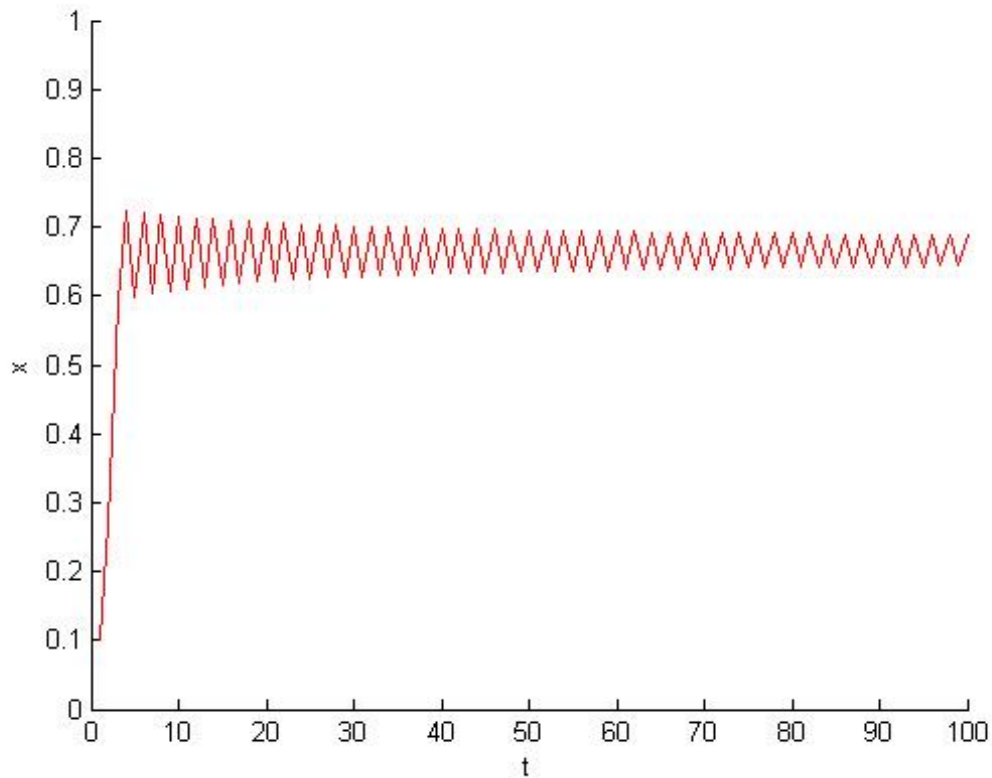


Fig 3.3. Population dont le taux de croissance $a = 3$ avec $x_0 = 0,1$.

On constate que la population pour ce taux de croissance oscille entre deux valeurs que l'on peut calculer à l'aide du Matlab 0,64 et 0,68, voir Fig (3.3.).

Population dont le taux de croissance $a = 4$

Pour une population initiale $x_0 = 0,1$ l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique est représentée dans la figure ci-dessous :

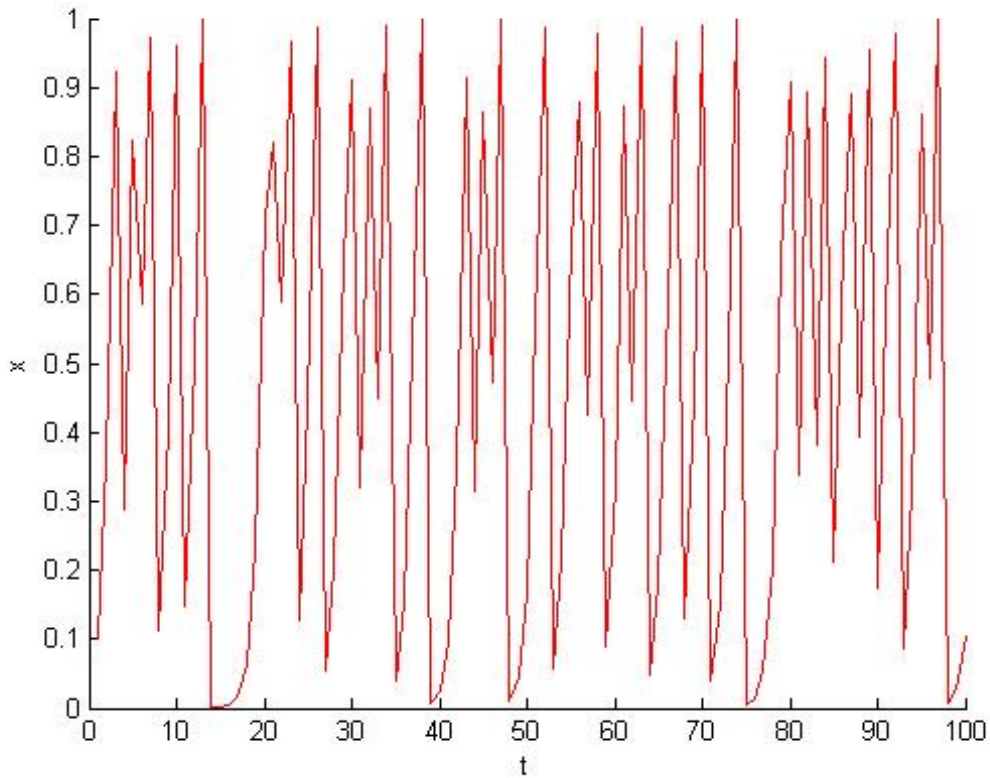


Fig 3.4. Population dont le taux de croissance $a = 4$ avec $x_0 = 0, 1$.

Nous constatons dans la figure précédente que le nombre de la population oscille irrégulièrement donc devient imprévisible, et donc la poursuite de l'évolution des points résultats de récurrence devient non atteinte, voir Fig (3.4).

Que peut-on dire quand on choisit une autre valeur de la population initiale ?

• **La sensibilité aux conditions initiales**

Pour les simulations précédentes avec une population initiale $x_0 = 0, 1$ nous avons vu que le nombre d'individus par génération semble se stabiliser pour une valeurs de taux de croissance inférieur à 3, puis osciller entre deux, puis quatre valeurs pour un taux de croissance supérieur à 3. Et enfin ce nombre oscille irrégulièrement au-delà d'un certain seuil.

Essayons maintenant de constater la différence en reprenant les simulations précédentes pour une population initiale différente soit $x_0 = 0, 8$.

Population dont le taux de croissance $a = 1$

L'équation de l'évolution est donnée par :

$$x_{t+1} = x_t(1 - x_t)$$

Donc, nous obtenons :

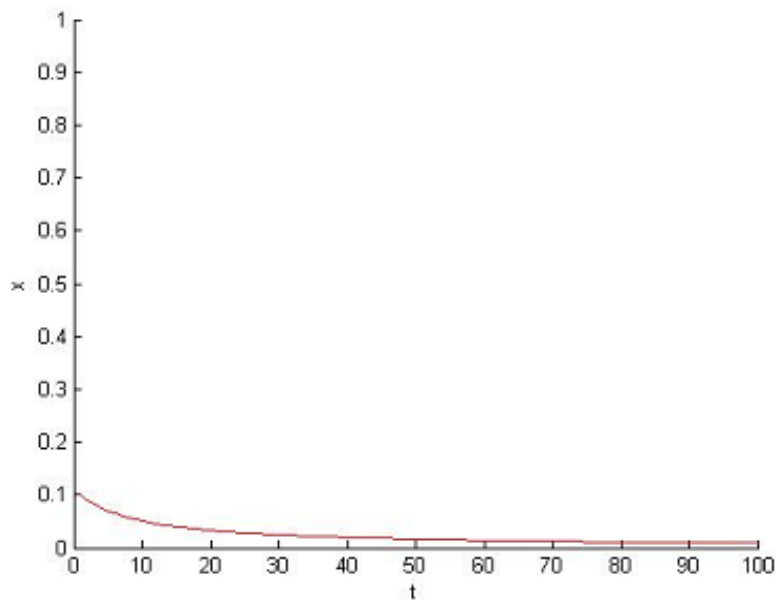


Fig 3.5 Population dont le taux de croissance $a = 1$ avec $x_0 = 0,8$.

Nous constatons que la population tend vers zéro pour les deux populations initiales, voir Fig (3.5).

Population dont le taux de croissance $a = 2$

L'équation de l'évolution est donnée par :

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t)$$

Donc, nous obtenons :

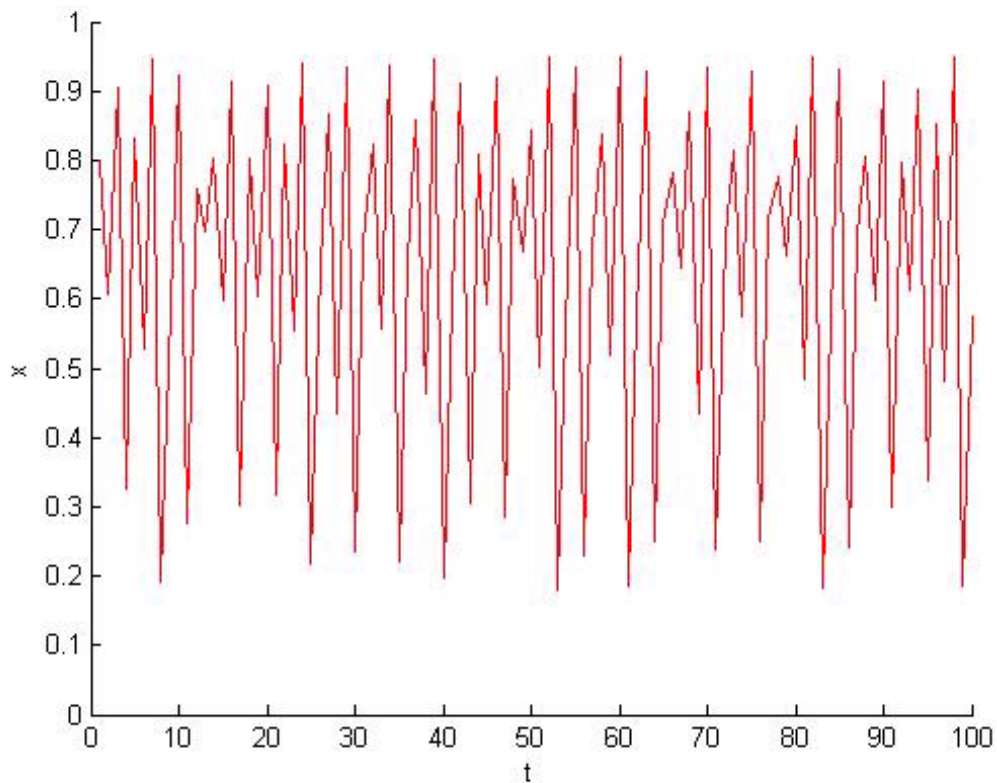


Fig 3.6. Population dont le taux de croissance $a = 2$ avec $x_0 = 0,8$.

Nous ne constatons aucune différence vu le comportement de l'évolution de la population, elle tend vers la même valeur (vers la moitié du diagramme).

Population dont le taux de croissance $a = 3,8$

L'équation de l'évolution est donnée par :

$$x_{t+1} = 3,8x_t(1 - x_t)$$

Donc, nous obtenons :

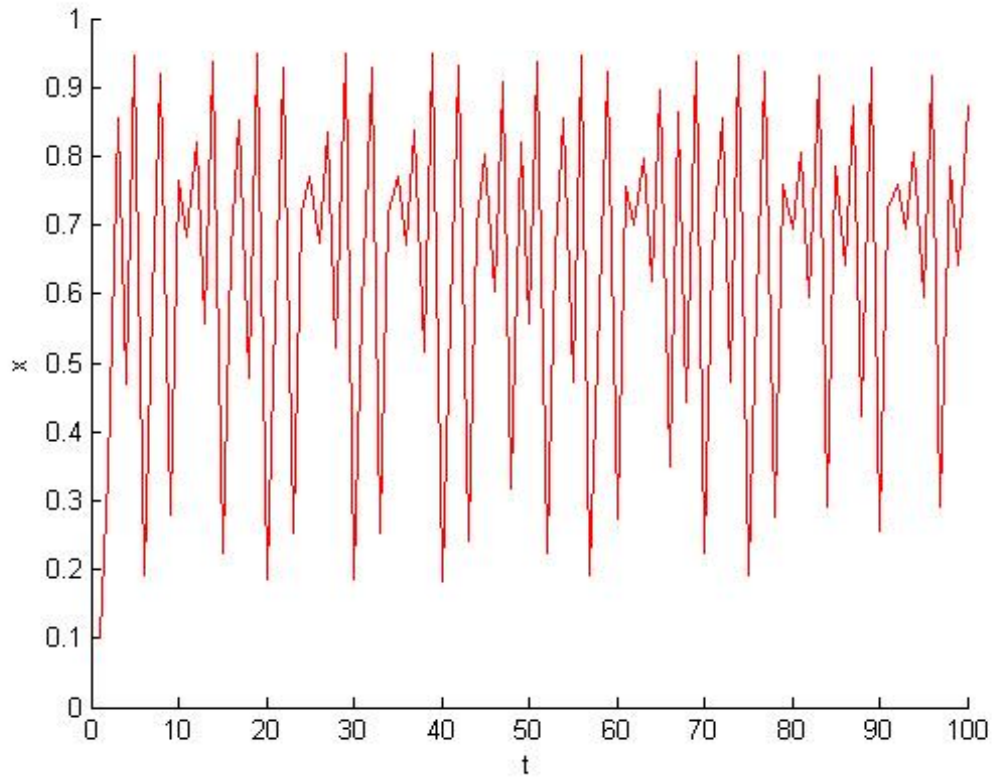


Fig 3.7. Population dont le taux de croissance $a = 3,8$ avec $x_0 = 0,8$.

Maintenant si on prend des populations initiales voisines que peut-on voir ?

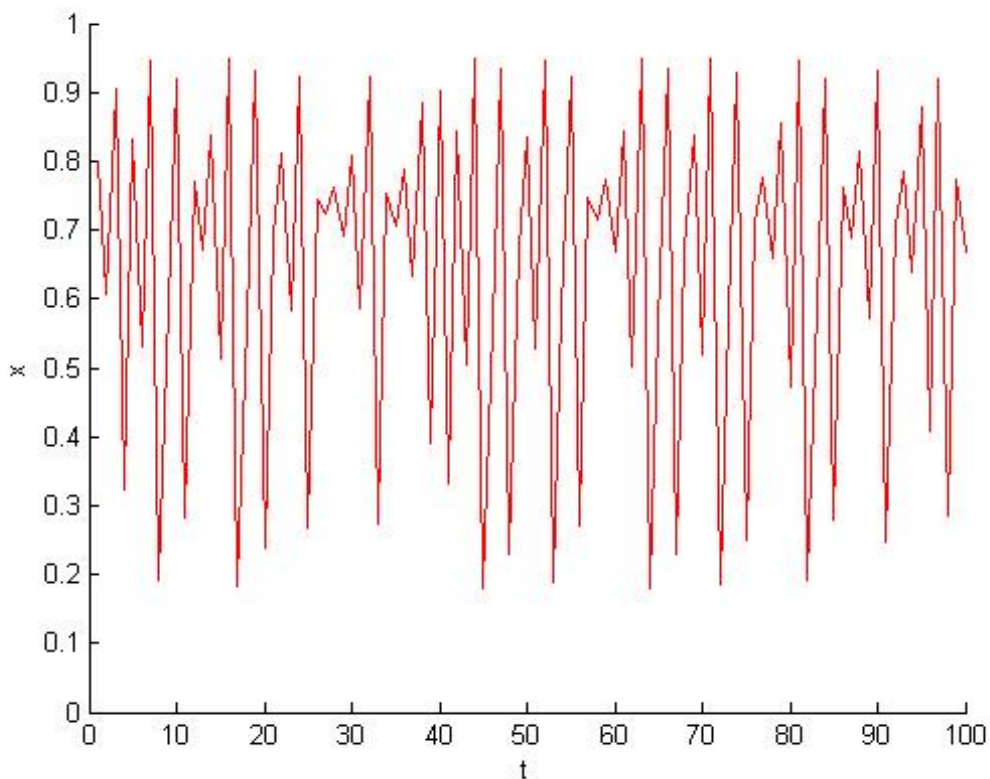


Fig 3.8. Population dont le taux de croissance $a = 3,8$ avec $x_0 = 0,8001$.

Nous constatons ici que l'évolution des populations se comporte différemment même si elles étaient très proches initialement, voir Fig (3.7.) et Fig (3.8). C'est bien la sensibilité aux conditions initiales qui est un élément important dans la théorie du chaos.

3.1.4 Points fixes et orbites périodiques :

On considère l'application logistique :

$$g_a(x) = ax(1 - x) , x \in [0, 1] \text{ et } a \in [0, 4]$$

$$g_a(x) = x \Leftrightarrow x(a - ax - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{a-1}{a} \end{cases}$$

Donc l'application logistique a deux points fixes $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{a-1}{a}$, ($a > 1$).

Stabilité des points fixes

On a :

$$g'_a(x) = -2ax + a$$

D'où

$$g'_a(x_1) = a > 0.$$

Donc x_1 est un point fixe attractif si et seulement si $a < 1$. Il est répulsif pour $a > 1$, et on ne peut rien dire quant à sa nature pour $a = 1$.

D'autre part, on a :

$$g'_a(x_2) = 2 - a,$$

$$x_2 \text{ est attractif si, } \begin{cases} |g'_a(x_2)| = |2 - a| < 1 \\ -1 < 2 - a < 1 \\ 1 < a < 3 \end{cases}$$

Le point fixe x_2 est alors attractif pour $1 < a < 3$, et il est répulsif pour $a < 1$ et $a > 3$, et douteux pour $a = 1$ et $a = 3$.

- **Les points fixes de g_a^2**

On a :

$$g_a^2(x) = ag_a(x)(1 - g_a(x)) = a^2x(1-x)(1-ax+ax^2).$$

On a deux points fixes répulsifs : $\begin{cases} x_1(a) = 0 \\ x_2(a) = \frac{a-1}{a} (a > 3) \end{cases}$

Et on a deux nouveaux points fixes :

$$\begin{aligned} x_3(a) &= \frac{a+1 + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \\ x_4(a) &= \frac{a+1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \end{aligned}$$

On a donc une orbite périodique de période 2. On peut conclure sa stabilité sachant qu'elle est stable si $|g'(x_4)g'(x_3)| < 1$, on a :

$$g'(x_4)g'(x_3) = -a^2 + 2a + 4$$

Donc l'orbite est stable si $a \in]3, 1 + \sqrt{6}[$.

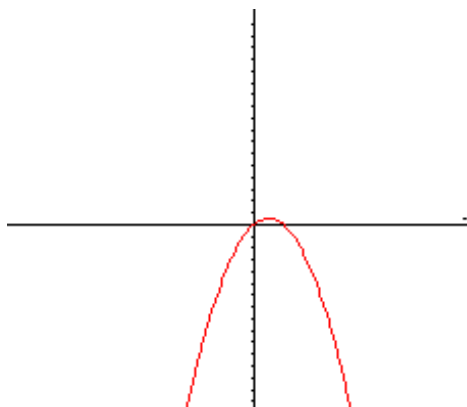


Fig 3.9. Graphe de $g_a(x)$.

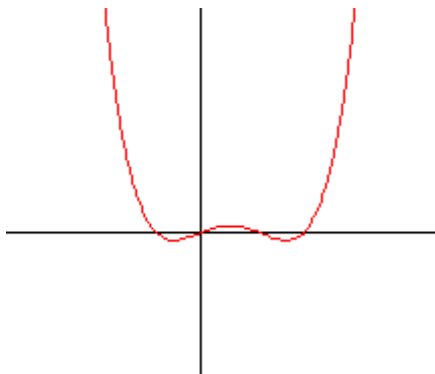


Fig 3.10. Graphe de $g_a^2(x)$.

Points fixes super attractifs

Proposition 3.1 *Pour $a = 2$ l'application g_a a un point fixe super attractif.*

Preuve: Commençons par chercher le sommet de la parabole $g_a(x) = ax(1-x)$. Nous avons :

$$g'_a(x) = a(1 - 2x)$$

$$g'_a(x) > 0 \text{ pour } x < \frac{1}{2}.$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'_a(x)$	+	0	-
$g_a(x)$	0	$\frac{a}{4}$	0

Tableau de variation de l'application g_a .

Le sommet de la parabole est

$$g_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}, \quad g_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$$

ce qui implique que $a = 2$. ■

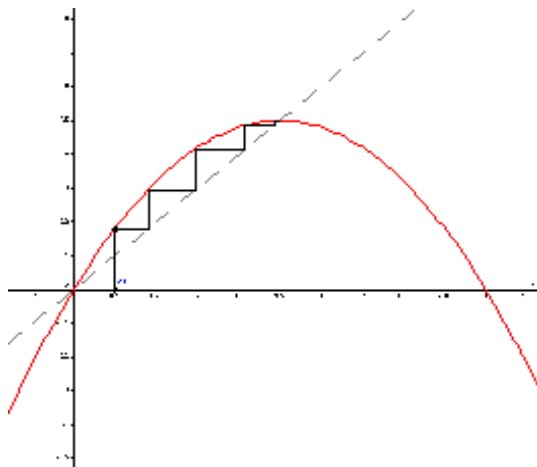


Fig 3.11. Point fixe super attractif de l'application
logistique

Justifiant maintenant le terme "super attractif" pour un point fixe de l'application g_a .

Rappelons que $g_a(x) = ax(1-x)$ et $p_a = \frac{a-1}{a}$, son point fixe.

Nous commençons l'itération de g_a par un point proche de p_a :

$$x_0 = \frac{a-1}{a} + \varepsilon$$

avec $\varepsilon > 0$.

$$\text{Notons } x_i = g_a^i(x_0). \text{ Nous obtenons : } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = g_a(x_0) \\ = ax_0(1 - x_0) \\ = a\left(\frac{a-1+a\varepsilon}{a}\right)\left(1 - \frac{a-1+a\varepsilon}{a}\right) \\ = \frac{a-1}{a} - a\varepsilon + 2\varepsilon - a\varepsilon^2 \\ = x_0 + \varepsilon - a\varepsilon - a\varepsilon^2. \end{array} \right.$$

De plus, $|\varepsilon - a\varepsilon - a\varepsilon^2| < \varepsilon$ ce qui montre bien que p_a est attractif. En effet x_1 est proche de x_0 (donc de p_a), et en réitérant cet argument, x_2 est proche de x_1 , donc de x_0 et de p_a .

Regardons ce qui se passe pour le cas super attractif, c'est-à-dire pour $a = 2$. Ici, $p_a = \frac{1}{2}$ et $x_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = g_a(x_0) \\ = \frac{1}{2} - 2\varepsilon + 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 \\ = \frac{1}{2} - 2\varepsilon^2. \end{array} \right.$$

Contrairement au cas précédent, il ne reste qu'un terme quadratique en ε . Ainsi, x_1 se rapproche plus rapidement de $\frac{1}{2}$. En effet, les termes en ε et les constantes qui atténuent l'effet du terme en ε^2 ne sont plus présents.

3.1.5 Convergence de l'application logistique

Théorème 3.1 *Pour $0 < a < 3$, et pour toute valeur initiale $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_N$ est convergente*

Pour $3 < a < 3,44$, la suite $(g_a^n(x))$, x dans le voisinage de $[0, 1]$, oscille entre deux valeurs, g_a a une orbite périodique de période 2.

Preuve: Regardons graphiquement le comportement de g_a . Tout d'abord, pour $a = 1,5$, c'est-à-dire $0 < a < 3$, la suite $(g_a^n(x))$, dans le voisinage de $[0, 1]$, converge vers le point fixe, voir Fig (3.12).

Le cas $0 < a < 1$

Il y a un unique point fixe dans I , le point 0, qui attractif.

Soit $x_0 \in I$.

1. Pour $x_0 = 0$, la suite est constante. Pour $x_0 = 1$ la suite est constante et égale à 0.
2. On suppose $x_0 \in]0; 1[$, la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ décroît et converge géométriquement vers 0.

Le cas $a = 2$

On a $p_2 = \frac{1}{2}$ et $f'(p_2) = 0$ donc p_2 est un point super attractif.

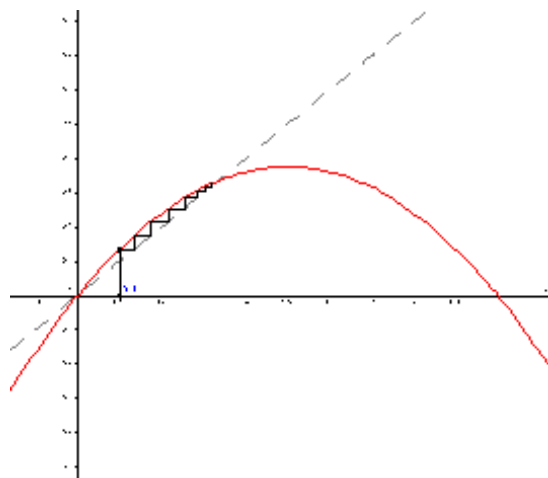


Fig 3.12. Convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = g_{1,5}(x_n)$ et $x_0 = 0, 1$.

Pour $a = 3,2$ c'est-à-dire $3 < a < 3,44$, la suite $(g_a^n(x))$, x dans le voisinage de $[0, 1]$, oscille

entre deux valeurs, g_a a une orbite périodique de période 2, voir Fig (3.13).

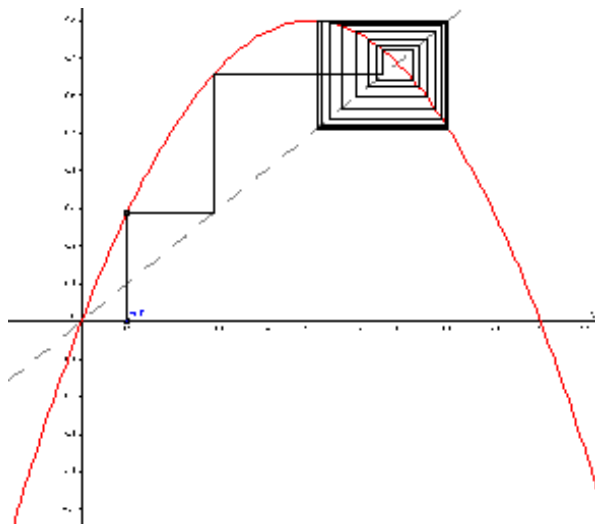


Fig 3.13. Convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$,

$$x_{n+1} = g_{3,2}(x_n) \text{ pour } x_0 = 0, 1.$$

■

Il y a deux manières de converger vers le point fixe. Plaçons nous dans le cas $1 < a < 3$. Tout d'abord, les points fixes sont 0 (répulsif) et $p_a = \frac{a-1}{a}$ (attractif). On distingue alors deux comportements : Si la bissectrice $y = x$ coupe la parabole g_a avant son sommet, les itérations convergent en escalier vers p_a , voir Fig (3.16.). En revanche si elle coupe la parabole après son sommet, les itérations convergent en spirale vers p_a , voir Fig (3.14).

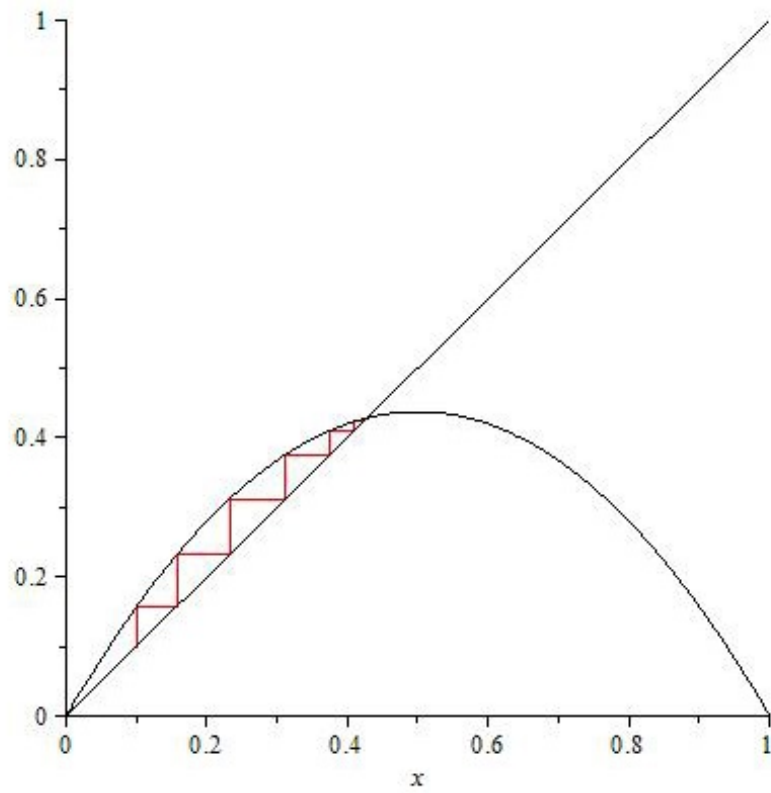


Fig 3.14. Convergence en escalier

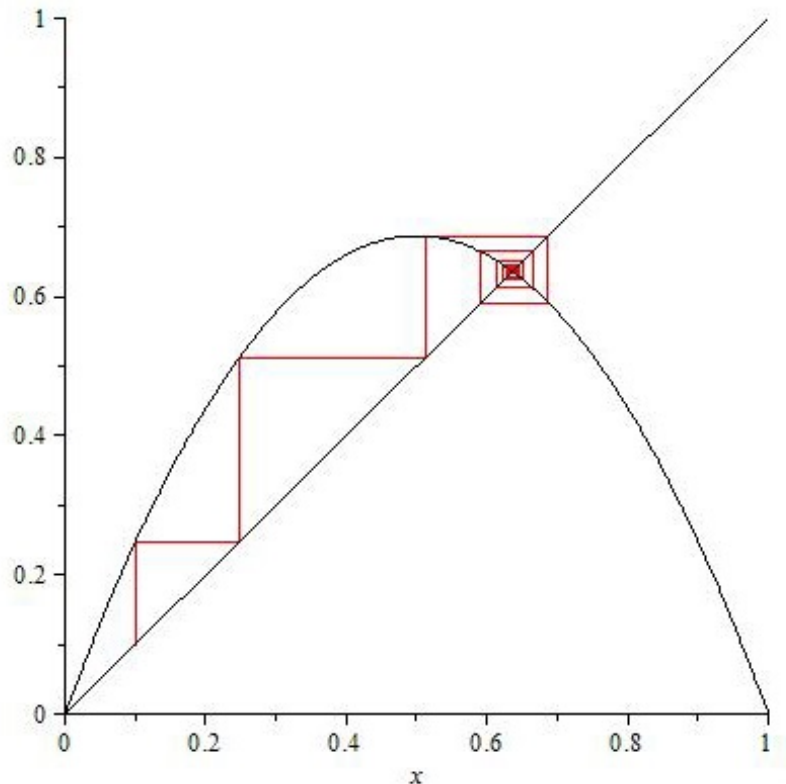


Fig 3.15. Convergence en spirale.

• **Divergence grossière vers $\pm\infty$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$**

* En étudiant les variations de l'application g_a on constate que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \in]-\infty, 0[$ ou $u_p \in]1, +\infty[$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

* Une application directe du théorème des valeurs intermédiaires montre que $g_a([0, 1]) = [0, \frac{a}{4}]$. Donc pour $u_0 \in [0, 1]$ si $a \leq 4$ alors $[0, 1]$ est stable par g_a alors la divergence grossière vers l'infinie n'a pas lieu. Si dans ce cas $a > 4$ alors on sort de cet intervalle et la suite diverge vers l'infini.

3.1.6 Les bifurcations de l'application logistique

Proposition 3.2 *L'application g_a a une première bifurcation en 1 et une deuxième en 3.*

Proposition 3.3 *L'application g_a a une troisième bifurcation pour $a = 3.44$.*

Classification des bifurcations

Bifurcations selle-noeud

Proposition 3.4 *L'application g_a a une bifurcation selle-noeud en $a = 1$. C'est l'unique bifurcation de ce type.*

Preuve: On a :

$$g'_a(x) = a - 2ax$$

Donc :

$$g'_1(x) = 1 - 2x$$

De plus, pour $a = 1$ le point fixe est 0. D'où, $g'_1(0) = 1$. Donc, d'après la définition $a = 1$ est une bifurcation selle-noeud . ■

Bifurcation par doublement de la période

Proposition 3.5 *L'application g_a a une bifurcation par doublement de la période en 3.*

Preuve: Nous avons :

$$g'_3(x) = 3 - 6x$$

Pour $a = 3$ le seul point fixe dans I est

$$x_3^* = \frac{3 + 1 + \sqrt{(3+1)(3-3)}}{6} = \frac{2}{3}$$

De plus,

$$g'_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Donc, d'après la définition $a = 3$ est une bifurcation par doublement de la période . ■

Proposition 3.6 *L'application g_a^2 a une bifurcation fourche en 3,44. Par généralisation c'est une bifurcation par doublement de la période de g_a .*

Preuve: Les points x_3 et x_4 sont fixes pour g_a^2 . Pour $a = 3,44$; nous avons :

$$x_3 = \frac{a + 1 + \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}$$

Et

$$x_4 = \frac{a + 1 - \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}$$

$$g_a^2(x) = ax(1 - x)(1 - ax(1 - x)).$$

$$\text{De plus, } g_{3,44}^2(x_3) = g'_{3,44}(x_3)g'_{3,44}(x_3) = -a^2 + 2a + 4 = -1.$$

$$\text{De même, } g_{3,44}^2(x_4) = -1.$$

Donc, 3,44 est une bifurcation par doublement de la période de g_a^2 . ■

Cette démonstration montre de plus, que les points x_3 et x_4 subissent la même bifurcation.

Ainsi lorsque x_3 change de stabilité, il donne naissance à deux points fixes de g_a^4 . Le point x_4 se comporte exactement de la même façon, créant lui aussi deux points fixes de g_a^4 . Il y a création de 4 points fixes pour g_a^4 , et par conséquent d'une orbite périodique de période 4 pour g_a .

Les bifurcations jouent un rôle important dans le diagramme de bifurcation puisqu'elles indiquent un changement de comportement. Nous définissons alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite des bifurcations par doublement de la période de l'application logistique. Les premiers termes de cette suite sont $a_1 = 3$ et $a_2 = 3,44$. Une deuxième suite de paramètre est également fondamentale dans l'étude du diagramme, c'est la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de telle sorte que pour $a = s_n$, l'application $g_a^{2^{n-1}}$ a un point fixe super attractif. Les termes de cette suite sont appelés paramètres super attractifs et ses premiers termes sont $s_1 = 2$ et $s_2 = 1 + \sqrt{5}$.

Proposition 3.7 *Il y a toujours un paramètre super attractif entre deux bifurcations successives.*

Preuve: Regardons ce qui se passe pour les premières bifurcations. La première bifurcation $a_0 = 1$ est une bifurcation selle-noeud. Si p_0 est le point fixe de g_{a_0} ($p_0 = 0$), alors $g'_{a_0}(p_0) = 1$.

Puis, il y a création de deux points fixes $p_1(a)$ et $p_2(a)$ ($p_1(a) = \frac{a-1}{a}$ et $p_2(a) = 0$) tel que :

$$|g'_{a_0+\varepsilon}(p_2(a_0 + \varepsilon))| = a_0 + \varepsilon > 1$$

Et

$$|g'_{a_0+\varepsilon}(p_1(a_0 + \varepsilon))| = \frac{1}{a_0 + \varepsilon} < 1$$

La deuxième bifurcation a_1 apparaît lorsque $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = -1$. Comme $g'_{a_0}(p_1(a_0)) > 0$ et $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = -1$, il existe s_1 tel que $a_0 < s_1 < a_1$ et $g'_{s_1}(p_1(s_1)) = 0$. Le point s_1 est donc un paramètre super attractif.

Cette nouvelle bifurcation donne naissance à deux points fixes $q_1(a)$ et $q_2(a)$ de g_a^2 avec $0 < |(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon))| < 1$, ($i = 1; 2$).

La troisième bifurcation apparaît lorsque $(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon)) = -1$, $i = 1, 2$. Il existe donc un paramètre super attractif s_2 tel que

$$a_1 < s_2 < a_2$$

Ce raisonnement se généralise à toutes les bifurcations. Juste après une bifurcation, les points fixes ou les points de l'orbite périodique qui ont été créés, ont une dérivée inférieure à 1 et positive. La bifurcation suivante apparaît lorsque ces points ont une dérivée égale à -1 . Le changement de signe prouve que ces dérivées passent par 0 avant la nouvelle bifurcation, il y a donc un paramètre super attractif. ■

Proposition 3.8 *Si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine valeur, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette même valeur.*

Preuve: Nous connaissons les premiers termes des deux suites $a_1 = 3$ et $s_1 = 2$. Ainsi $s_1 < a_1$,

de plus, nous avons :

$$s_1 < a_1 < s_2 < a_2 < s_3 < a_3 < \dots$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n < a_n < s_{n+1}$$

Si $(s_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers une valeur l , alors d'après le théorème des gendarmes la suite $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers la même valeur l . En effet, elles convergent tous deux vers un point appelé point de Feigenbaum noté s_∞ et correspond à $3,5699456$. Ce point marque un changement radical dans la dynamique de l'application logistique g_a . ■

3.1.7 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation rend compte le comportement de l'application logistique en fonction du paramètre a . Sur ce diagramme, en abscisses, sont représentées les différentes valeurs du paramètre a et en ordonnées celles de g_a . Nous construisons le diagramme en repérant pour chaque valeur de a le ou les points de convergence de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = g_a(u_n)$. Nous obtenons ainsi :

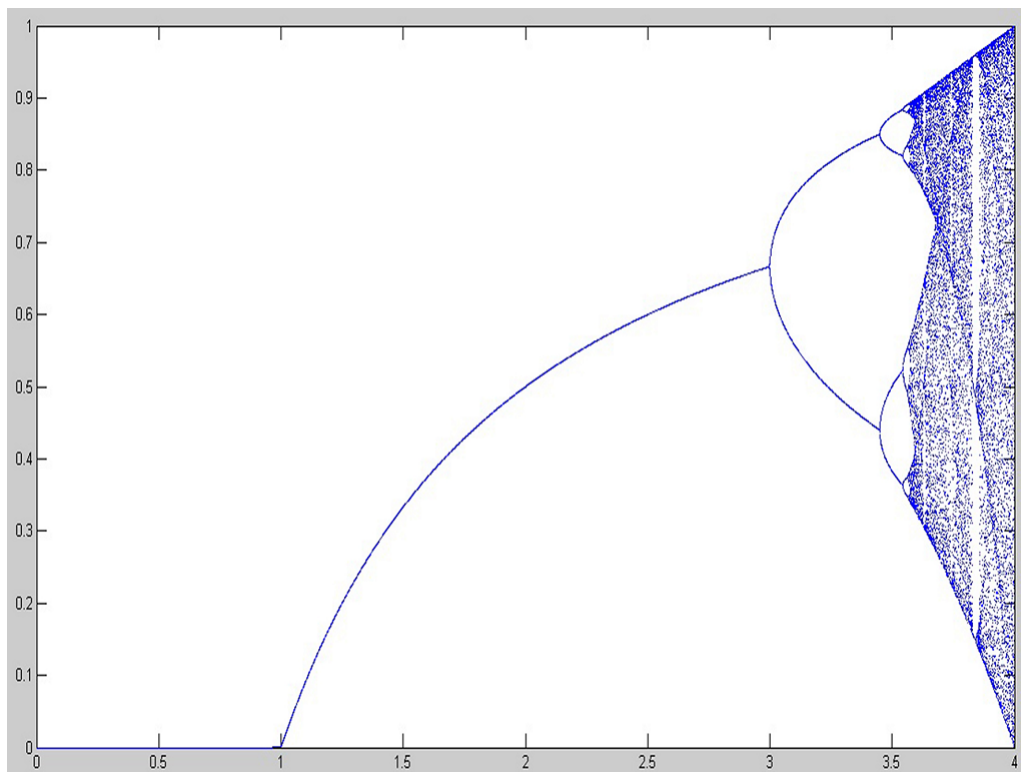


Fig. 3.16 Diagramme de bifurcation de l'application logistique.

Nous retrouvons, bien évidemment, le comportement de l'application logistique décrit dans les parties précédentes.

Pour $1 < a < 3$, il n'y a qu'une seule branche. La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ précédemment définie converge vers le point fixe.

Pour $3 < a < 3,44$, il y a deux branches. Ceci correspond au comportement périodique, l'application g_a a une orbite périodique de période 2.

En effet l'orbite suivie par $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sera 4-périodique et que de même les orbites continuent de doubler cette période à 8, 16, 32 vers l'infini sur des intervalles de plus en plus petits tels que le rapport entre deux intervalles tendent à diminuer et ce comportement a lieu jusqu'à la constante de Feigenbaum $s_{\infty} = 3,5699456$. Et $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, a_{n+1}) \in [3, s_{\infty}[^2$ tel que l'orbite suivie par $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit périodique sur $]a_n, a_{n+1}[$. La démonstration de ce résultat et d'autres résultats beaucoup plus détaillés ont été réalisés par Feigenbaum.

Sur $[s_{\infty}, 4]$, le comportement est globalement chaotique, et nous ne pouvons plus prévoir le comportement de l'application logistique.

3.1.8 Le chaos dans l'application logistique

Par exemple, on se servira des exposants de Lyapunov pour mesurer la sensibilité aux conditions initiales de la suite logistique pour des différents a . On a vu dans les résultats précédents que lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un point fixe ou périodique, celui-ci est indépendant des conditions initiales. Les régions chaotiques devront être très sensibles aux conditions initiales donc dans le cas de ce système discret à une dimension, son exposant de Lyapunov doit être positif. Et plus cet exposant est grand, plus l'orbite est sensible aux petites variations dans les conditions initiales. Sachant cela, il serait intéressant de tracer la courbe des exposants en fonction de a . On a pour N grand :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(g_a^n)'(x_0)| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{i=0}^{n-1} |g_a'(x_i)| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |g_a'(x_i)| \\
 &= \ln |a| + \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |1 - 2x_i|
 \end{aligned}$$

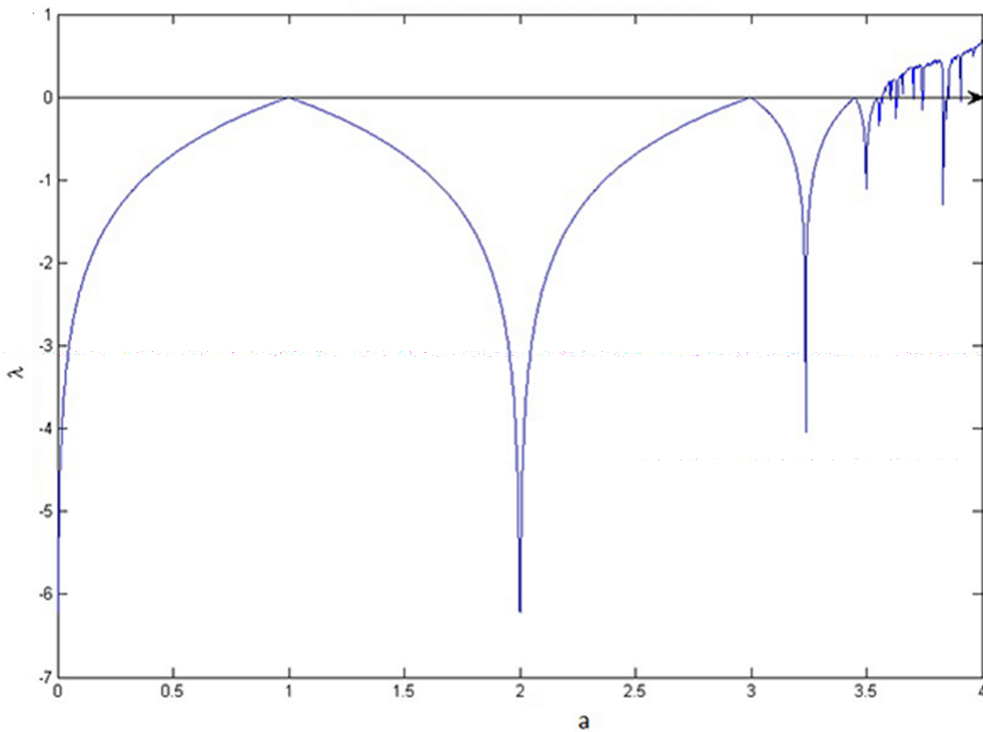


Fig 3.17. L'évolution de l'exposant le Lyapunov λ de l'application logistique en fonction de a .

On constate que sur des intervalles correspondants aux points fixes ou périodiques attractifs, l'exposant de Lyapunov est négatif. On peut remarquer des points où il devient très négatif (serait $-\infty$ si on ne faisait pas une approximation), c'est lorsqu'un point périodique ou fixe

devient super attractif : la convergence est très rapide. Plus l'exposant est positif, plus les orbites sont sensibles aux conditions initiales, donc chaotiques.

3.2 Attracteur de Hénon

3.2.1 Historique du système de Hénon

L'astronome Michel Hénon⁶ exploita la suggestion de Lorenz[4], pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque Pomeau⁷ passe en revue adéquatement cette perspective de ses spéculations. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de système de Hénon et correspond à l'application suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

où a, b sont des constantes.

Il est intéressant de saisir que c'est le démontage du système de Lorenz par Pomeau qui emmène Hénon vers son système. L'étirement et le repliement sont des éléments qui guident Hénon. Le choix des valeurs des paramètres est plus approximatif et c'est par tâtonnements que des valeurs adéquates de a et b sont retenues. Tout l'intérêt du système de Hénon réside dans la facilité de programmer cette opération extrêmement simple, une itération à deux dimensions, simulant les comportements plus complexes des systèmes du type Lorenz. Il devient un système numérique de référence. Ainsi l'attracteur de Hénon est manipulé et les ensembles de Cantor⁸

⁶Michel Hénon (1931-2013) un mathématicien et astronome français. Il est connu pour ses contributions dans le domaine de la dynamique stellaire, et pour l'étude de l'évolution des anneaux de Saturne. Il s'implique dans la dynamique des amas d'étoiles, en particulier des amas globulaires. Il développe une technique numérique pour suivre la dynamique d'un amas globulaire sphérique.

⁷Yves Pomeau (né en 1942) est un physicien français, il découvre par Paul Manneville en 1979, le phénomène de l'intermittence dans la théorie du chaos dans l'enquête numérique de l'attracteur de Lorenz.

⁸Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) est un mathématicien allemand, connu pour être le créateur de la théorie des ensembles. Il établit l'importance de la bijection entre les ensembles, définit les ensembles infinis et les ensembles bien ordonnés.

sont visualisés avec leur structure auto-similaire.

D'autres comportements sont mis en évidence. Pour $b = 0,3$ par exemple, la forme de l'attracteur évolue de manière significative selon les valeurs de a : pour a petit, l'attracteur est un point, et lorsque a augmente il se transforme successivement en 2 points, puis 4, 8 et ainsi de suite par doublement. Hénon rapproche la situation de celle évoquée par May en 1976, et annonce l'existence d'une valeur critique $a_c = 1.06$ pour laquelle il affirme obtenir un attracteur étrange.

3.2.2 Définition du système de Hénon

Définition 3.3 *Le système dynamique de Hénon est défini par :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$.

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut reculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Hénon :

$$H^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-2}y^2)$$

Où a et b sont des paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation.

En effet, la matrice Jacobienne $DH_{a,b}$ est :

$$DH_{a,b} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne $\det(DH_{a,b}) = -b$.

Les valeurs habituellement utilisées pour a et b sont $a = 1,4$ et $b = 0,3$.

Nous avons fait un programme sur Matlab avec une condition initiale $(x_0, y_0) = (0,0)$ à travers lequel on peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, voir Fig (3.18).

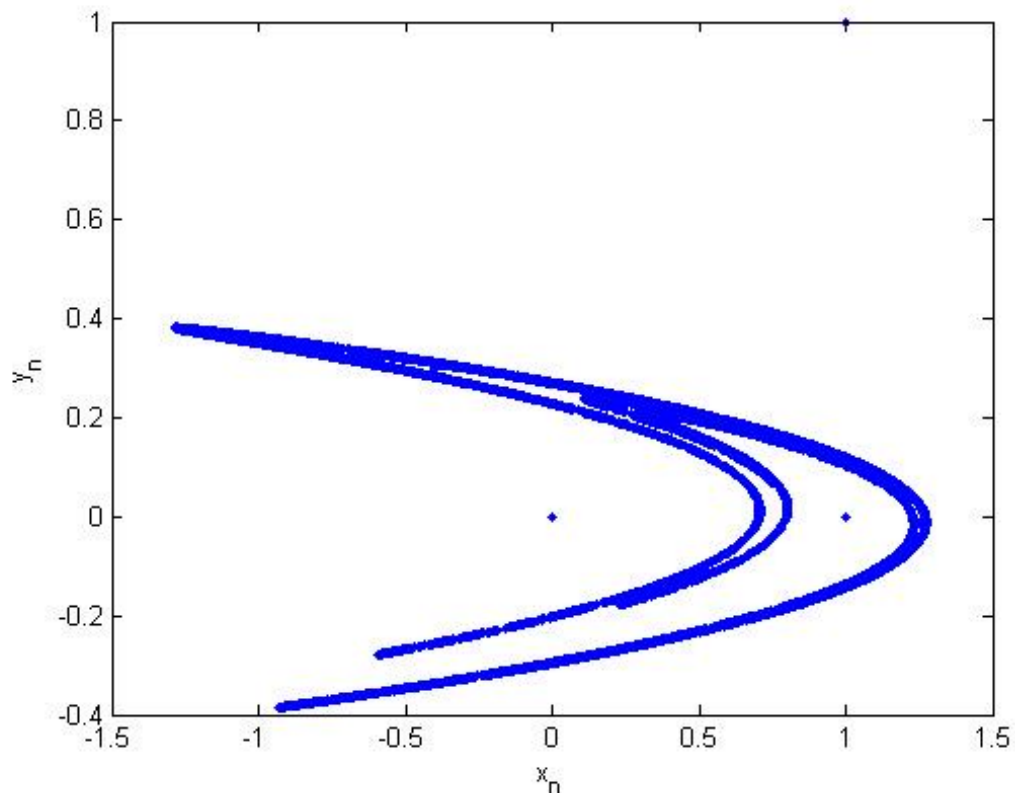


Fig 3.18. Attracteur de Henon $H_{a,b}$ pour $a = 1,4$ et $b = 0,3$

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables x et y pour une condition initiale $(x_0, y_0) =$

$(0, 0)$, voir Fig (3.19) et Fig (3.20) respectivement.

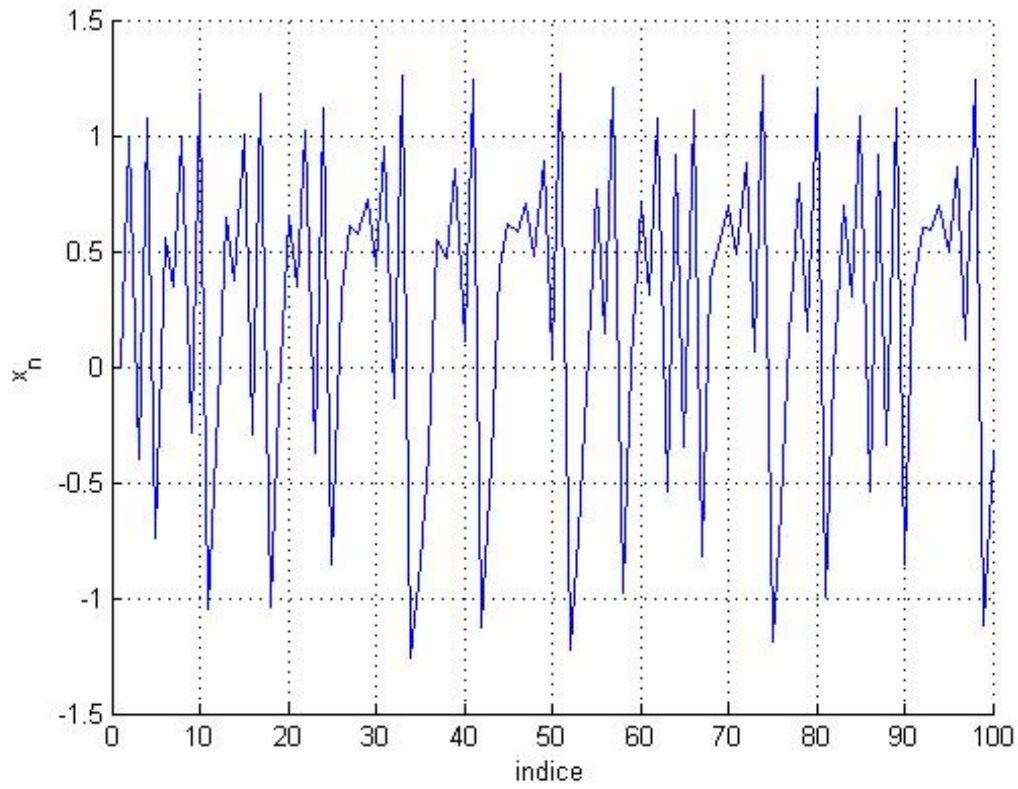


Fig 3.19. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

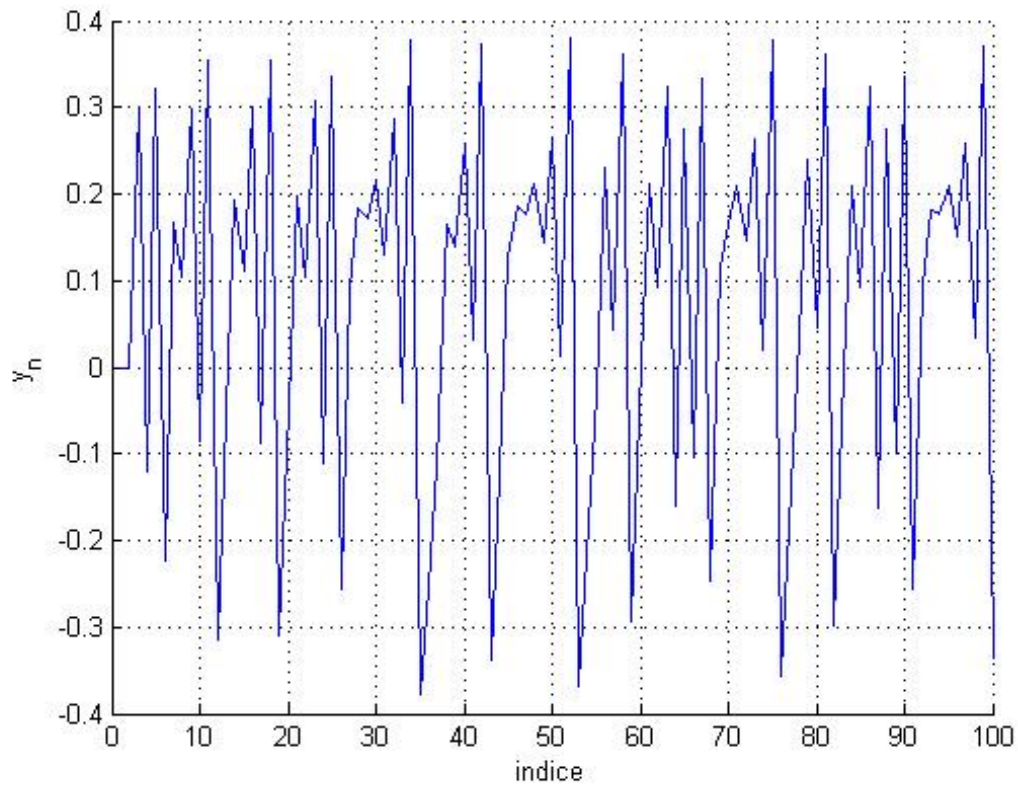


Fig 3.20. Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables.

Voyons maintenant que se passe-t-il pour les valeurs $a = 0,1$; et $b = 0,3$?

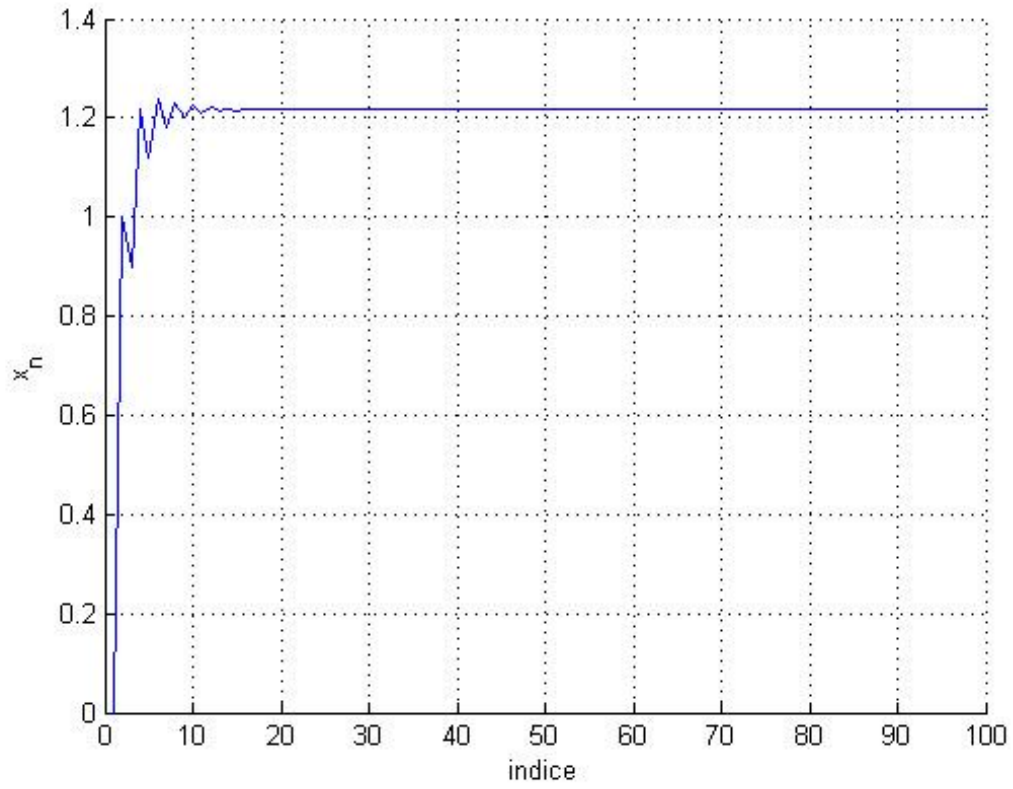


Fig 3.21. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0,1$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

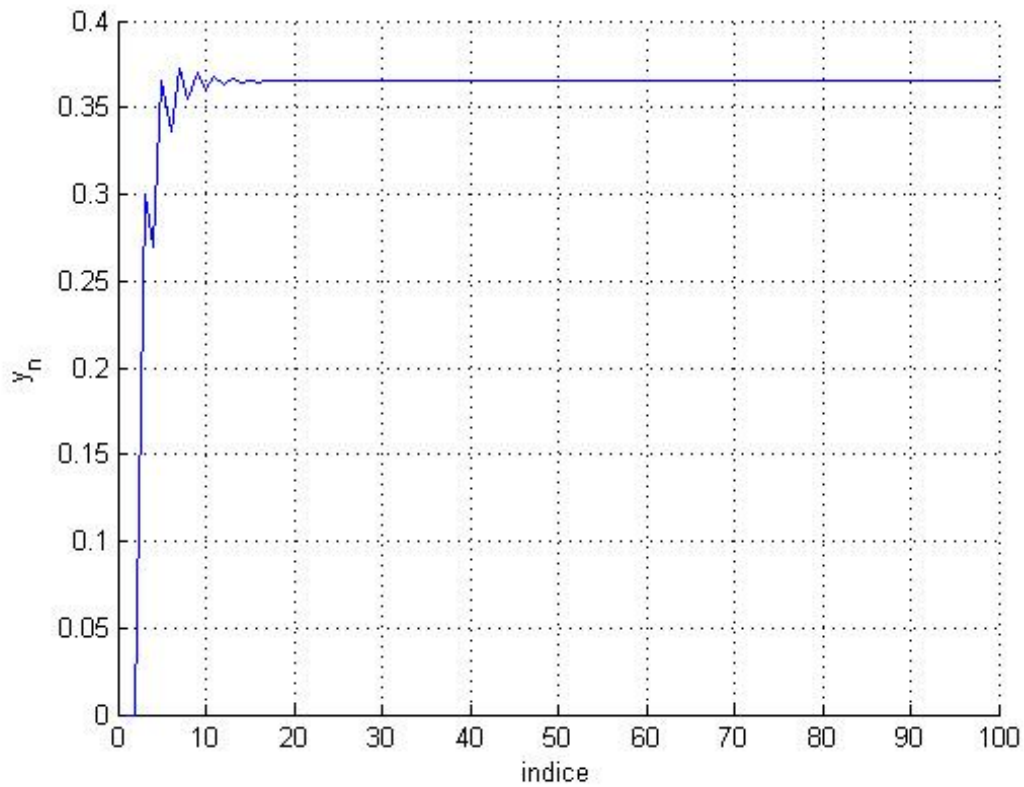


Fig 3.22. Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0,1$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

On constate une stabilisation de l'évolution de x_n autour de la valeur 1,2 et de y_n autour de 0,36, voir Fig (3.23) et Fig (3.24).

Prenons maintenant les valeurs des paramètres $a = 0.4$ et $b = 0.3$.

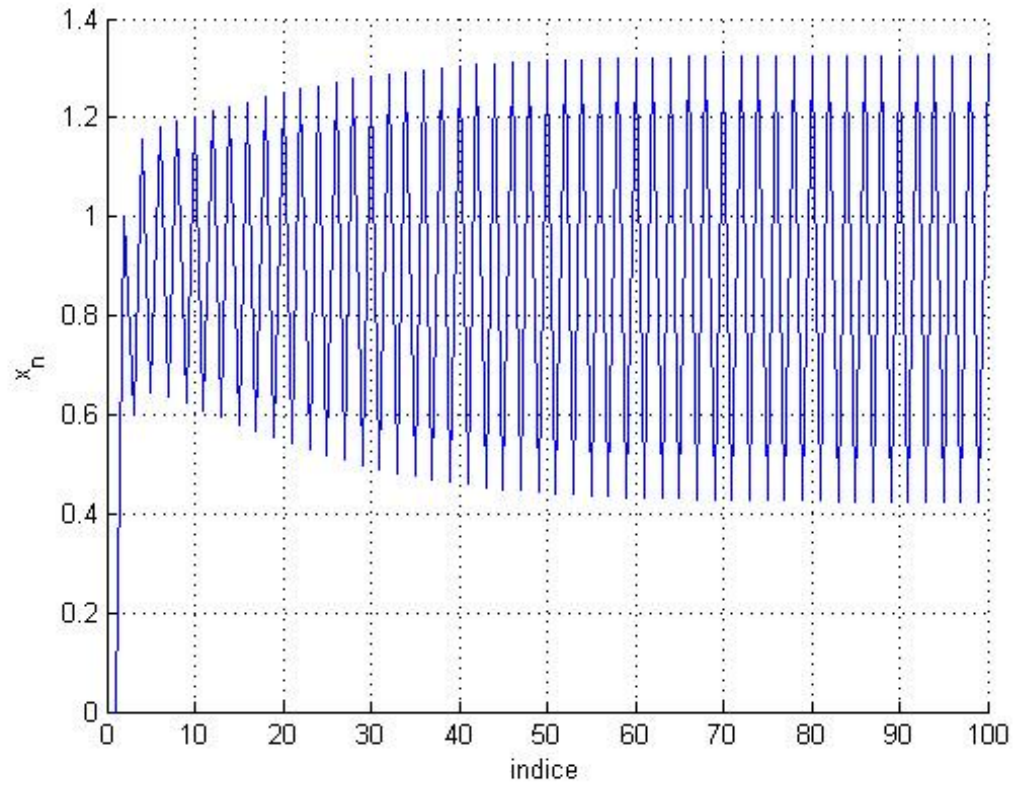


Fig 3.23. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

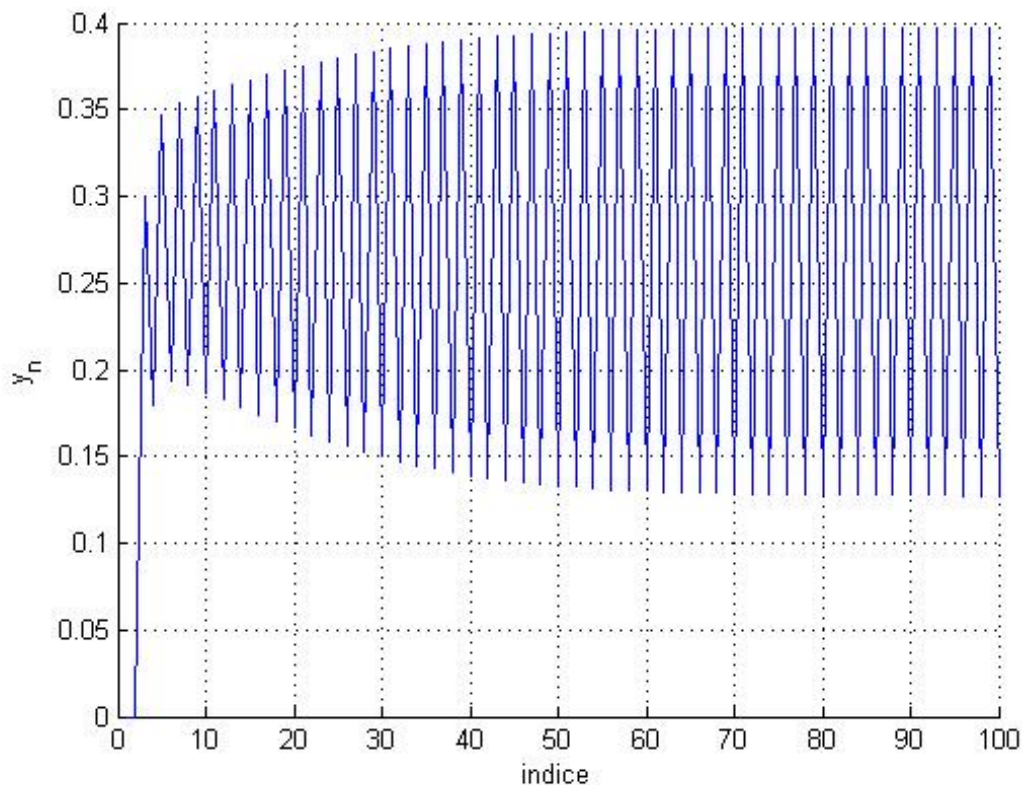


Fig 3.24. Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

On constate que l'évolution pour ces valeurs des paramètres est périodique et elle va se stabiliser à un cycle périodique, voir Fig (3.22) et Fig (3.23).

Sensibilité aux conditions initiales : Que-ce passe-t-il quand on choisit des conditions initiales extrêmement voisines? Prenons par exemple $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$.

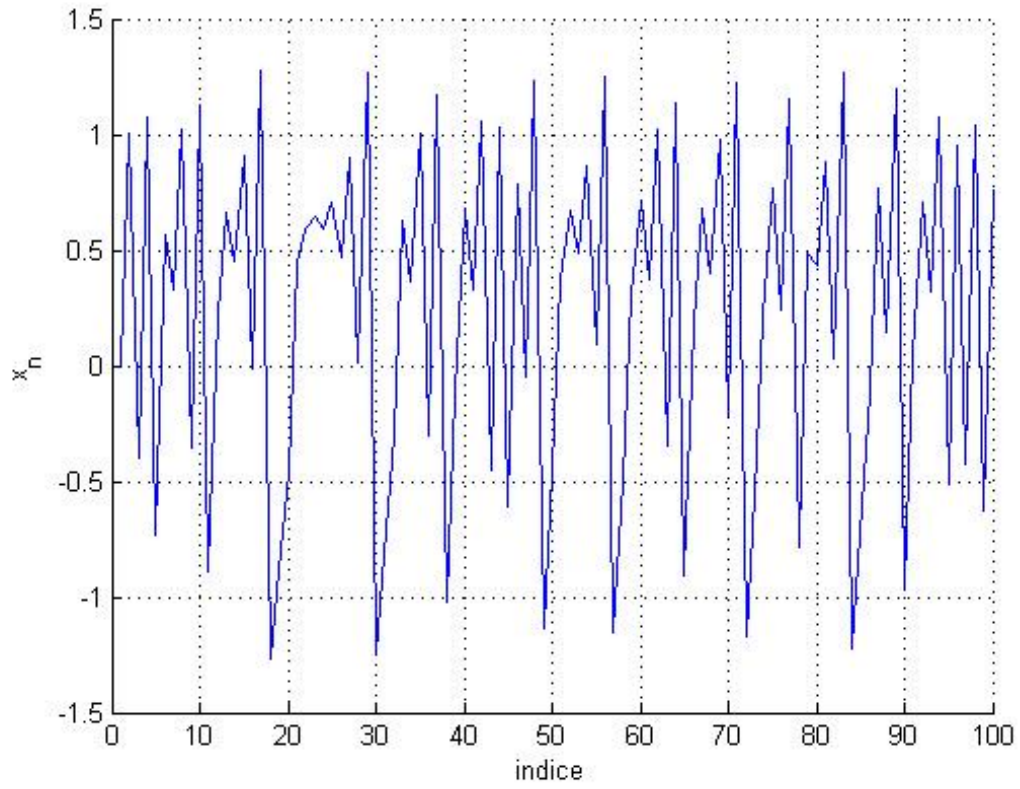


Fig 3.25. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.

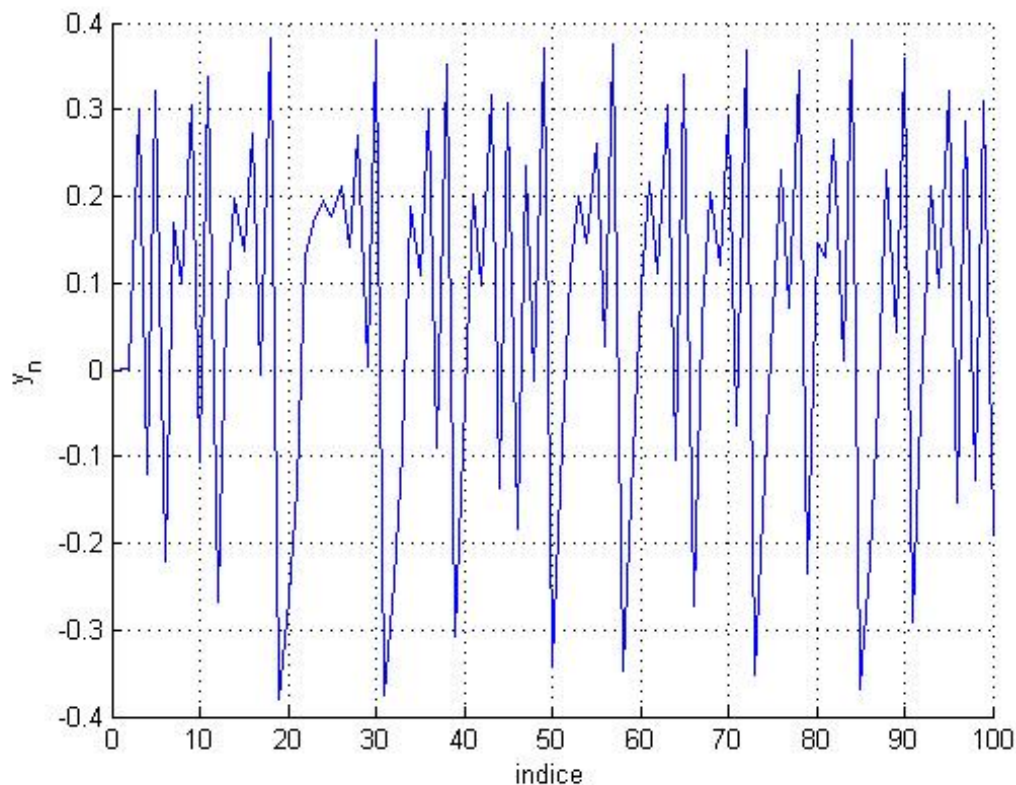


Fig 3.26 .Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.

On constate que les courbes rendues sont différentes de celles quant à $(x_0, y_0) = (0, 0)$, voir Fig (3.26.) et Fig (3.27.).

3.2.3 Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations

Première itération

La première itération du système de Hénon introduit déjà dans la section précédente est considéré comme le système original de Hénon donné par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation $H_{a,b}(x, y) = (x, y)$:

$$H_{a,b}(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow -ax^2 + (b-1)x + 1 = 0 \quad (3.4)$$

Théorème 3.2 [6] Pour $|b| < 1$, et $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ on a :

1. Si $a < a_0(b)$, $H_{a,b}$ n'a aucun point fixe.
2. Si $a = a_0(b)$, $H_{a,b}$ a un seul point fixe.
3. Si $a > a_0(b)$, $H_{a,b}$ a deux points fixes.

Preuve: Nous obtenons du discriminant de l'équation (3.4) l'équation $(b-1)^2 + 4a = 0$, ce qui implique que : $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2 = a_0(b)$.

1. Pour $a < a_0(b)$, $x_{\pm}(a, b) \notin \mathbb{R}^2$, donc dans ce cas il n'y a aucun point fixe pour $H_{a,b}$.
2. Pour $a = a_0(b)$, nous obtenons $x_+(a, b) = x_-(a, b) = \frac{b-1}{2a}$. Donc dans ce cas le système $H_{a,b}$ admet exactement un seul point fixe $(x_1, y_1) = \left(\frac{b-1}{2a}, b\left(\frac{b-1}{2a}\right)\right)$.
3. Pour $a > a_0(b)$, nous avons $x_+(a, b)$ et $x_-(a, b)$ dans \mathbb{R}^2 et $x_+(a, b) \neq x_-(a, b)$. Dans ce cas nous avons deux points fixes de la forme :

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{b-1-\beta}{2a}, b\left(\frac{b-1-\beta}{2a}\right) \right) \text{ et } (x_2, y_2) = \left(\frac{b-1+\beta}{2a}, b\left(\frac{b-1+\beta}{2a}\right) \right) \quad (3.5)$$

■

Et les valeurs propres en ces points d'équilibre sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right)$$

et :

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{a} \left(\pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(b + \beta - 1)^2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right)$$

Où $\beta = \sqrt{4a + (b - 1)^2}$.

Il peut être également démontré que l'un de ces deux points est stable à la signe positive devant le radical, l'autre est toujours instable.

En effet, les valeurs des paramètres connues pour présenter un comportement chaotique sont $a = 1,4$ et $b = 0,3$ et les deux points d'équilibre du système pour ces paramètres sont $(-1,1314; -0,3394)$ et $(0,6314; 0,1894)$, les valeurs propres au premier point d'équilibre sont $(2,3284; -0,0657)$ et les valeurs propres au deuxième point sont $(0,5657; -1,8284)$. D'où le premier est un point selle et le deuxième est clairement un point stable.

Deuxième itération

La deuxième itération du système original de Hénon est d'intérêt depuis qu'une bifurcation par doublement de la période est un mécanisme éminent comme révélé dans le diagramme de bifurcation.

Selon la variation de Jacobi la deuxième itération du système de Hénon est donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a^3x_n^4 + 2a^2x_n^2y_n + 2a^2x_n^2 - ay_n^2 - 2ay_n - a + bx_n + 1 \\ y_{n+1} = b(-ax_n^2 + y_n + 1) \end{cases}$$

Ce système dispose de quatre points d'équilibre dont deux sont hérités du système original de Hénon et les deux autres points d'équilibre sont :

$$(x_3, y_3) = \left(-\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}; -b\left(\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}\right) \right)$$

et

$$(x_4, y_4) = \left(-\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}; -b\left(\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}\right) \right)$$

La matrice jacobienne s'écrit :

$$DH_{a,b}^2 = \begin{pmatrix} -4a^3x^3 + 4a^2xy + 4a^2x + b & 2a^2x^2 - 2ay - 2a \\ -2abx & b \end{pmatrix}$$

3.2.4 Analyse de bifurcation

Nous procédons en donnant les résultats de stabilité pour le système original de Hénon. Nous rappelons que le système de Hénon a deux points d'équilibre réels pour $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$.

Lemme 3.1 *Pour $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ et $\beta = 0$ le système original de Hénon a un unique point d'équilibre en $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ avec les valeurs propres $\{1, -b\}$ indiquant une bifurcation selle-noeud.*

Preuve: En substituant $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ et $\beta = 0$ dans l'équation (2.2) les deux points d'équilibre se trouvent à s'imbriquer les uns les autres en $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$. Le jacobien du système en ce point d'équilibre est :

$$\begin{pmatrix} 1-b & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Et ainsi les valeurs propres sont $\{1, -b\}$. ■

On considère la bifurcation selle-noeud avec un exemple numérique.

Proposition 3.9 *Pour $b = 0,3$ et $a = -0,1225$, on a une bifurcation selle-noeud.*

Preuve: Pour $b = 0,3$ et $a = -0,1225$; le point d'équilibre du système est $(2,8571; 0,8571)$ indiquent une bifurcation selle-noeud avec une branche stable et une branche instable montrées dans la Figure (3.27). La région de a de la branche stable est comprise entre $-0,1225 \leq a \leq 0,3675$.

■

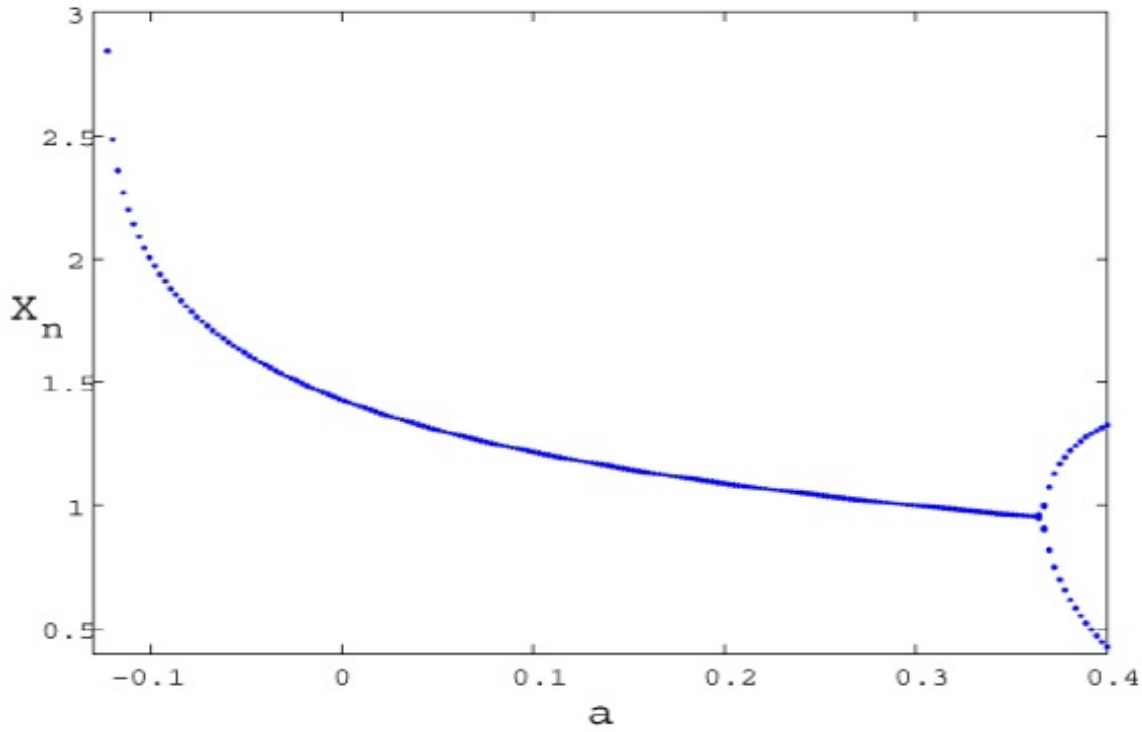


Fig 3.27. Diagramme de Bifurcation pour le système original de Hénon pour $-0,15 \leq a \leq 0,4$ et $b = 0,3$.

Proposition 3.10 *Pour le cas particulier de $a = 0,3675$ une bifurcation par doublement de la période est observée.*

Preuve: Pour $a = \frac{3}{4}(b - 1)^2 = 0,3675$; le système original de Hénon et la deuxième itération du système original de Hénon a deux points d'équilibre complètement imbriqués en $(0,9524; 0,2857)$. Les valeurs propres pour le système original de Hénon sont $\{-1; 0,3\}$ et $\{2,2343; -0,1343\}$, et les valeurs propres pour la deuxième itération du système original de Hénon sont $\{1; 0,09\}$ et $\{4,9920; 0,0180\}$. En effet, quand a s'approche de $0,3675$, une orbite périodique de période 2 est constatée.

■

De plus, l'analyse de stabilité pour la valeur du paramètre $a = 0,2$ donne les deux points d'équilibre $(1,08945; 0,326836)$ et $(-4,58945; -1,376836)$ et les valeurs propres $\{0,371580; -0,80736213\}$ et $\{1,986779; -0,1509981\}$ respectivement. Le premier point d'équilibre est un point stable et le deuxième est un point selle.

Pour les mêmes valeurs des paramètres la deuxième itération du système de Hénon a quatre points d'équilibre, dont deux sont complexes conjugués i.e. $(1,75 \pm 2,046338i; 0,525 \mp 0,6139i)$ et les deux autres sont hérités du système original de Hénon respectivement. Les valeurs propres pour les points d'équilibre complexes conjugués sont $\{1,7072; 0,05271\}$ et les valeurs propres pour le troisième point d'équilibre sont $\{0,138072; 0,6518336\}$ et pour le quatrième point d'équilibre $\{0,0228; 3,9472\}$. Les points d'équilibres complexes conjugués sont des point selles, le troisième est stable et le quatrième est un point selle comme prévu.

Les points d'équilibre en $a = 0,3675$ sont $(0,95238; 0,285714)$ et $(-2,857142; -0,857142)$ et leurs valeurs propres associées sont $\{0,3; -1\}$ et $\{2,234271; -0,134271\}$. Par conséquent, le premier point d'équilibre donne naissance à une bifurcation par doublement de la période et le deuxième point d'équilibre est un point selle.

En $a = 0,9125$ un attracteur de période 4 a lieu comme montré dans la figure (2.32.).

Pour $a = 1$, les points d'équilibre sont $(0,70948; 0,21284)$ et $(-1,40948; -0,42284)$ et les valeurs propres sont $\{0,186824; -1,60578\}$ et $\{2,921643; -0,102681\}$ respectivement. Les deux points d'équilibre sont des points selles.

Pour $a = 1,2$ et $b = -0,1$ les points d'équilibre sont $(0,563137; -0,0563137)$ et $(-1,4798; 0,14798)$ et les valeurs propres sont $\{-0,0785562; -1,2729739\}$ et $\{0,0283838; 3,523146\}$ respectivement. Les deux points d'équilibre sont des points selles. Autour du premier point d'équilibre une orbite périodique de période 2 est observée. Considérons la deuxième itération du système original de Hénon avec les mêmes conditions, y en a quatre points d'équilibre dont deux sont les mêmes qu'on avait de la première itération. Les valeurs propres sont $\{1,620462; 0,0061710\}$ et $\{12,41256; 0,000805\}$. Encore les deux points d'équilibre sont des points selles. Le système fait disparaître son comportement périodique observé pour la première itération et l'incrémention de l'itération du système fait de ce système plus chaotique et compliqué qu'un multipériodique.

3.2.5 Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 1.4 avec un pas de 0,001, b est égale à 0,3. On obtient le diagramme suivant :

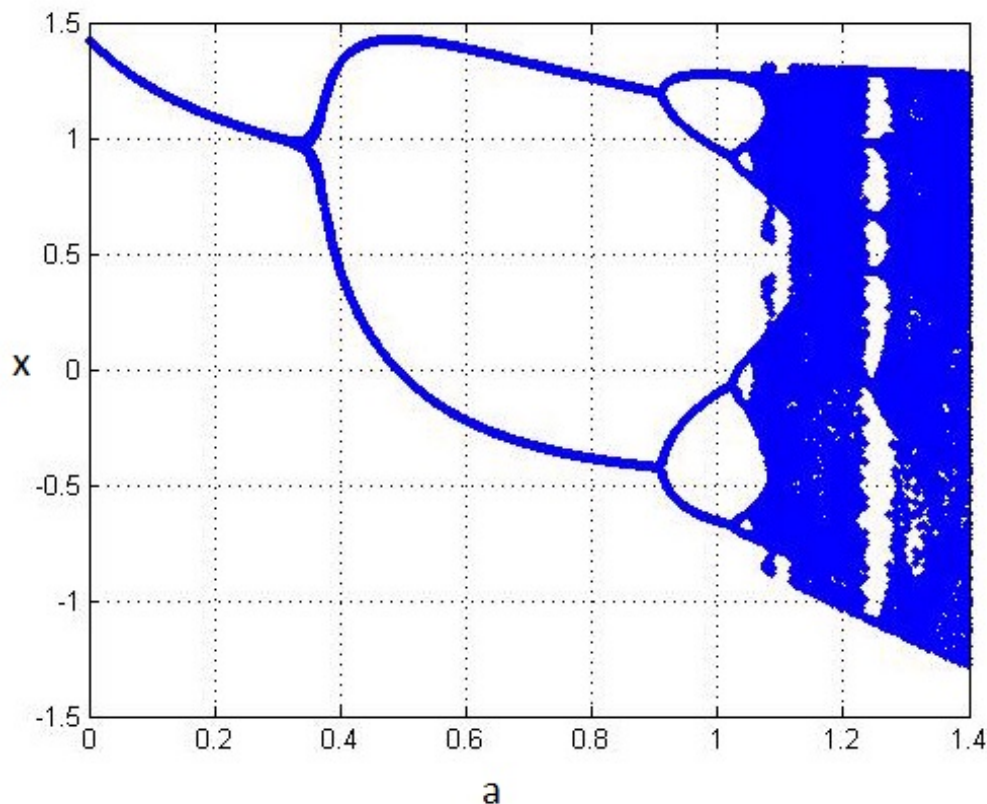


Fig 3.28. Diagramme de bifurcation de Henon

- Si $-0.1225 < a < 0.3675$, les itérations convergent vers un point du plan,
- Si $0.3675 < a < 0.9$, les itérations tendent à constituer une suite (x_n, y_n) telle que (x_{2n}, y_{2n}) converge vers un point et (x_{2n+1}, y_{2n+1}) converge vers un autre point. On a donc deux points limites : on observe un doublement de période.
- Si $0.9 < a < 1.02$, on assiste à un nouveau doublement de période.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a \geq 1,02$, on ne distingue plus les cycles, et donc le système est chaotique.

3.2.6 Bassin d'attraction de Hénon

Les itérations ne convergent pas pour toutes les conditions initiales (x_0, y_0) . L'ensemble des conditions initiales pour lequel les itérations convergent est le bassin d'attraction de l'attracteur. Un calcul numérique permet de construire une partie de ce bassin d'attraction ; voir Fig (3.28).

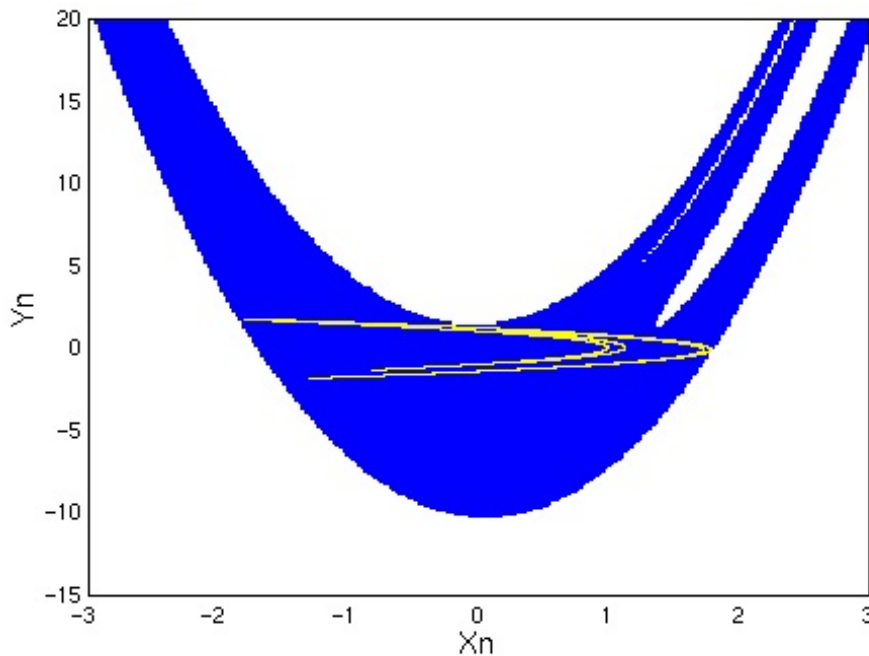


Fig 3.29. Bassin d'attraction de l'attracteur de Henon pour $a = 1.4$
et $b = 0.3$.

3.2.7 Le chaos dans le système de Hénon

Dans l'étude de la stabilité du système de Hénon, on remarque que les valeurs propres sont en fonction des points fixes qui sont aussi en fonction des paramètres a et b . Donc, pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b .

On fixe $b = 0.3$, et on laisse a varier entre 0 et 1.4.

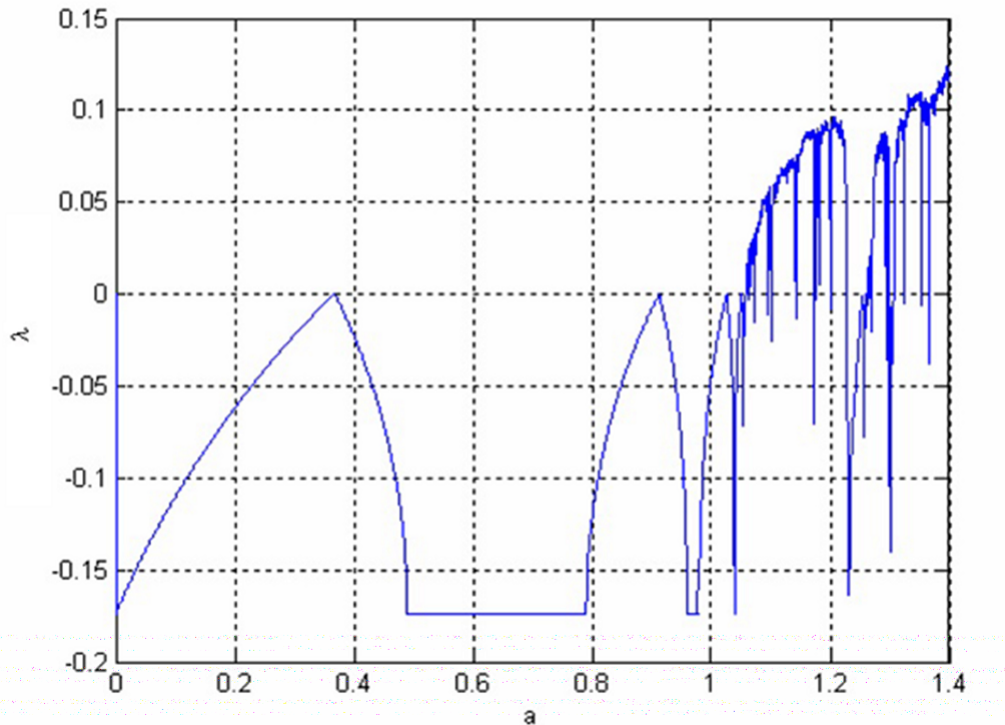


Fig 3.30. L'évolution de l'exposant le Lyapunov λ de système de Henon en fonction de a .

A partir de la Figure (3.30) on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque a varie dans l'intervalle $[0; 1,052]$.
- une zone chaotique lorsque a varie dans l'intervalle $]1,052; 1,4]$.

3.3 Système de Lozi

3.3.1 Historique du système de Lozi

En 1978, Lozi a introduit un système bidimensionnel ayant des équations et des attracteurs semblent pareils à ceux du système célèbre précité de Hénon. Simplement le terme quadratique du système de Hénon est remplacé par une contribution linéaire continue par morceau, ceci permet

de prouvé rigoureusement le caractère chaotique du système itéré de Lozi $L(x, y)$ suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a|x_n| + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

Où a et b sont des paramètres non-nuls. Sur la région où les orbites restent bornées, le système de Lozi peut présenter un comportement régulier ou un comportement chaotique.

3.3.2 Définition du système de Lozi

Définition 3.4 *Le système dynamique de Lozi est défini par :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a|x_n| + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$.

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

La seule différence entre le système de Hénon et de Lozi est que le terme non-linéaire x^2 du système de Hénon est remplacé par $|x|$ dans le système de Lozi qui fait de ce système une application non-différentiable.

Pour le cas particulier de $a = 0$ cette application est linéaire donc on pose $a \neq 0$.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut reculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Lozi :

$$L^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-1}|y|^{-1})$$

Où a et b sont des paramètres réels.

3.3.3 Points fixes du système de Lozi

Le système de Lozi possède deux points fixes hyperboliques définis par :

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b} \right) \text{ si } b < a+1$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b} \right) \text{ si } b < -a+1$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces deux points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne en ces points.

3.3.4 Stabilité des points fixes

Pour des considérations de stabilité on a besoin de la matrice jacobienne de $L(x, y)$ qui s'écrit :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne $\det(DH_{a,b}) = -b$.

Remarquons que $J(x, y)$ dépend au point de l'orbite seulement avec $\operatorname{sign}(x)$. Accordialement, on note ses valeurs par $J_+ = J(x > 0, y)$ et $J_- = J(x < 0, y)$. De plus, comme $\det J_{\pm} = -b$ on va considérer le système de Lozi seulement pour $|b| \leq 1$. De plus $J(P_1) = J_+$ et $J(P_2) = J_-$.

Le polynôme caractéristique de J aux points fixes s'écrit :

$$\lambda^2 + a\lambda - b \text{ Pour } P_1$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b \text{ Pour } P_2$$

Proposition 3.11 *Le point fixe P_1 peut être stable quand (b, a) se trouve dans le triangle de sommets $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$ sur l'espace des paramètres et instable si : $b < -1$, $b < a + 1$, $b < 1 - a$*

Preuve: Le discriminant du polynôme caractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$.

Pour $b > \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des réelles. Elles sont de module inférieur à 1 si :
 $b - 1 < a < 1 - b$.

Pour $b < \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des complexes. Elles sont de module inférieur à 1 si :
 $b > -1$.

D'où la stabilité de P_1 .

Pour $b < -1$, $b < a + 1$, $b < 1 - a$ les valeurs propres sont de module supérieur à 1 (i.e. le point P_1 est instable). ■

Proposition 3.12 *Le point P_1 est un point selle pour $b > a + 1$, $b > 1 - a$.*

Preuve: La preuve est immédiate en calculant les valeurs propres λ_1 et λ_2 on obtient $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si : $b > a + 1$, $b > 1 - a$.

Et le point P_1 est un point selle. ■

• **Stabilité de P_2**

Proposition 3.13 [2] *Le point fixe P_2 est instable si : $b > -a + 1$, $b > a + 1$.*

Preuve: Le discriminant du polynôme caractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$.

P_2 existe si $b > -a + 1$, alors $\Delta > 0$, et les valeurs propres sont toujours des réelles. Elles sont de module supérieur à 1 si $b > -a + 1$, $b > a + 1$. ■

Proposition 3.14 *Le point P_2 est un point selle si $b > -a + 1$, $b > a + 1$.*

Preuve: La preuve est immédiate aussi en calculant les valeurs propres λ_1 et λ_2 on obtient $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si : $b > a + 1$, $b > 1 - a$.

Et le point P_2 est un point selle. ■

3.3.5 Attracteur de Lozi

Nous avons fait un programme sur Matlab similaire au code source de Hénon avec une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$ à travers lequel on peut voir la forme d'attracteur dans la figure (3.31).

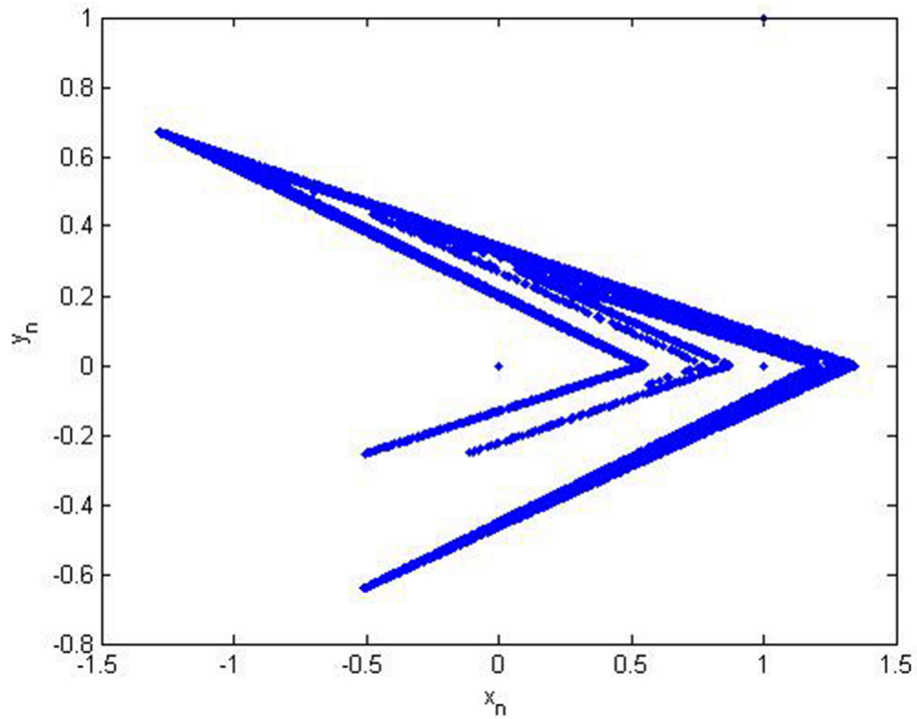


Fig 3.31. Attracteur de Lozi pour $a = 1,7$ et $b = 0,5$.

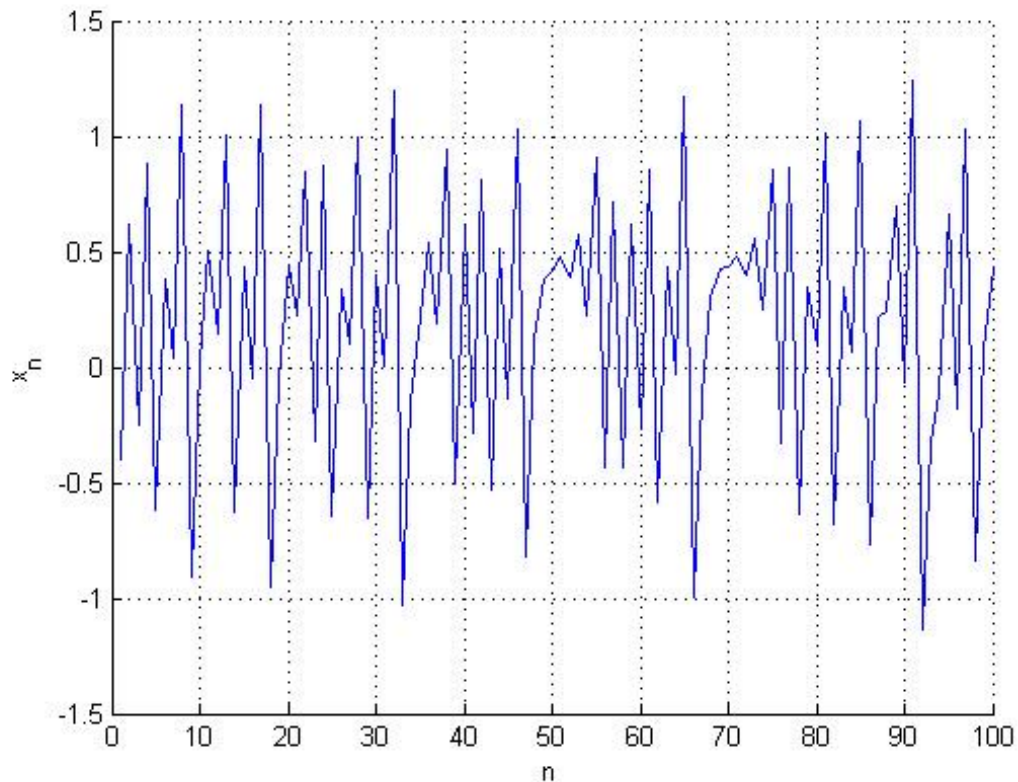


Fig 3.32. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.7$ et $b = 0.5$

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables x et y pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$, voir Figure (3.33) et Figure (3.34).

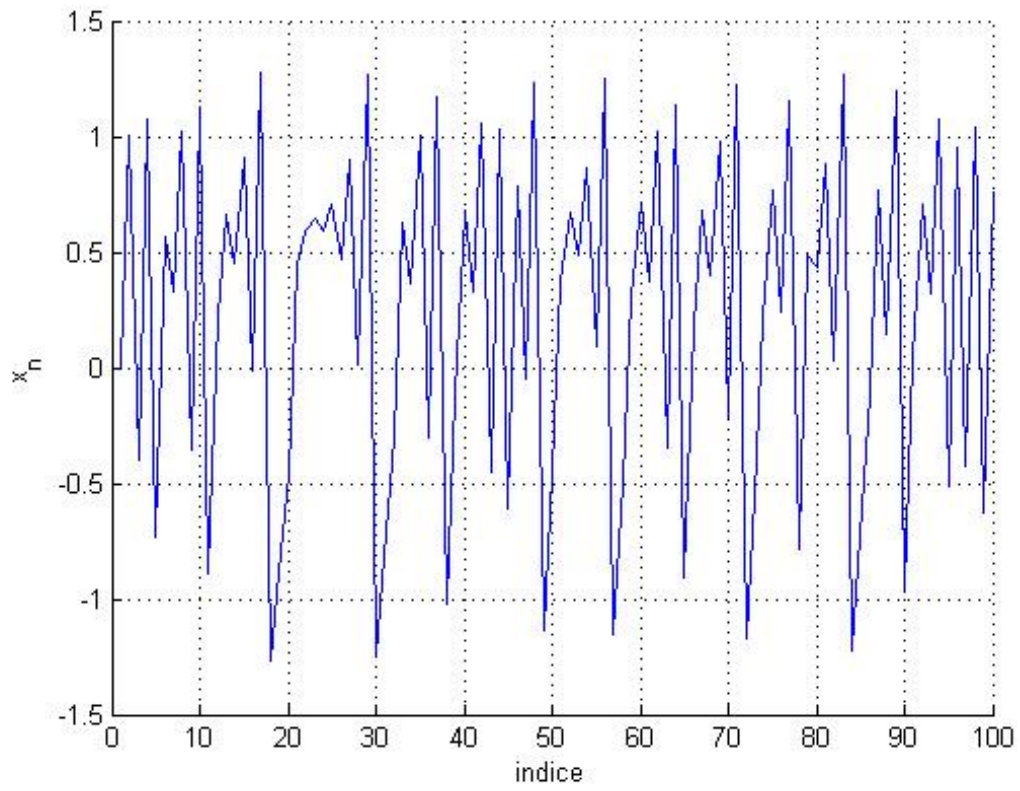


Fig 3.33. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,7$ et $b = 0,5$.

respectivement

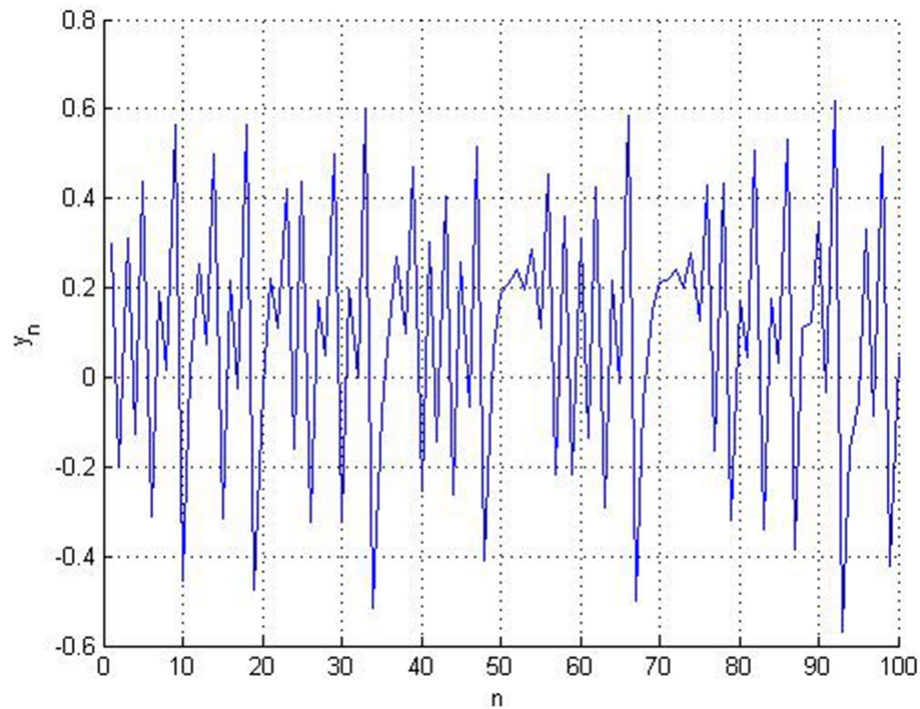


Fig 3.34. Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,7$ et $b = 0,5$.

3.3.6 Le chaos dans le système de Lozi

De même on peut calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b pour le système de Lozi.

On fixe $b = 0.3$, et on laisse a varier entre 0 et 1.8.

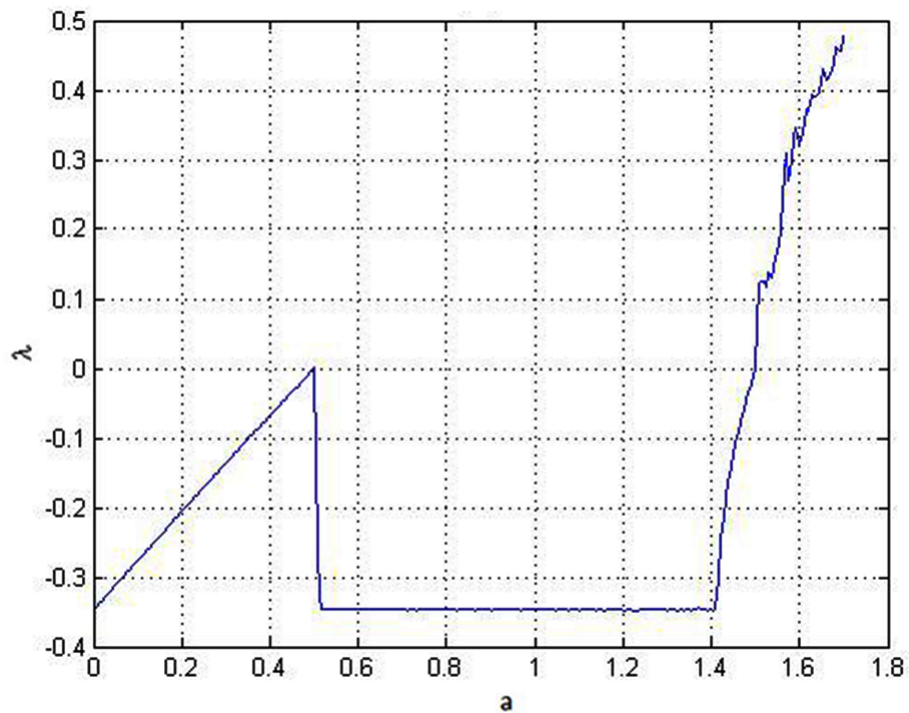


Fig 3.35. L'évolution de l'exposant le Lyapunov λ de système de Lozi en fonction de a .

3.4 Systeme Hitzl-Zele

Définition 3.5 *Hitzl et Zele (1985), ont créé le système généralisé d'Hénon comme suit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = -by_k \\ y_{k+1} = z_k + 1 - ay_k^2 \\ z_{k+1} = by_k + x_k \end{array} \right.$$

ou $(a, b) = (1.07, 0.3)$

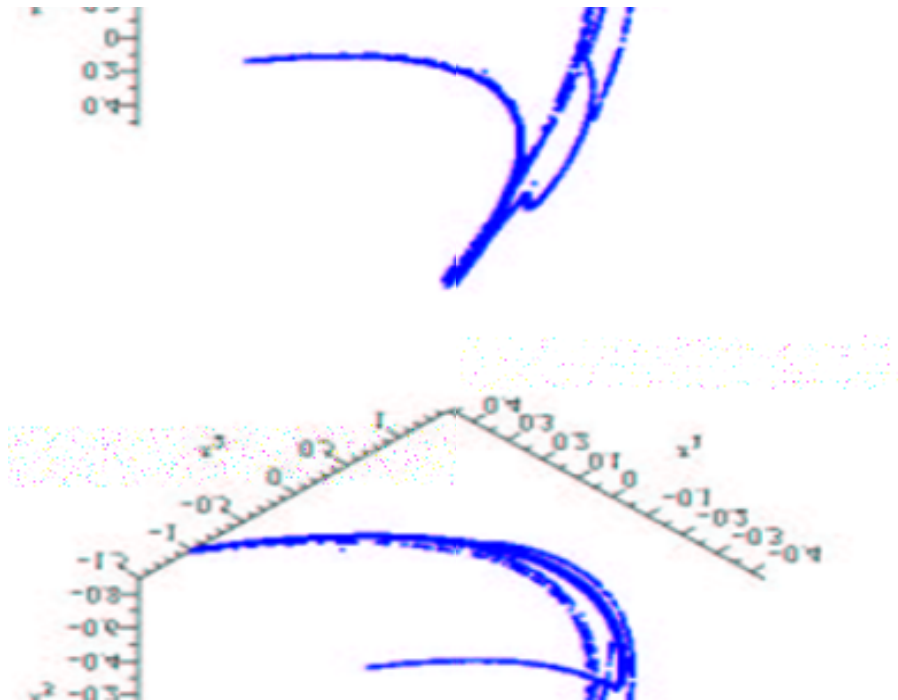


Fig.3.36. Attracteur chaotique de Hitzl et Zele pour $(a,b) = (1.07, 0.3)$.

3.5 Systeme de stefanski

Un exemple d'un système simple qui montre un comportement chaotique et hyperchaotique, est le système de Stefanski introduit dans [71] en 1998, et est défini par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + z_k - ay_k^2 \\ y_{k+1} = 1 + by_k - ax_k^2 \\ z_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

ou $b = 0.2, a \in [1.22, 1.4]$

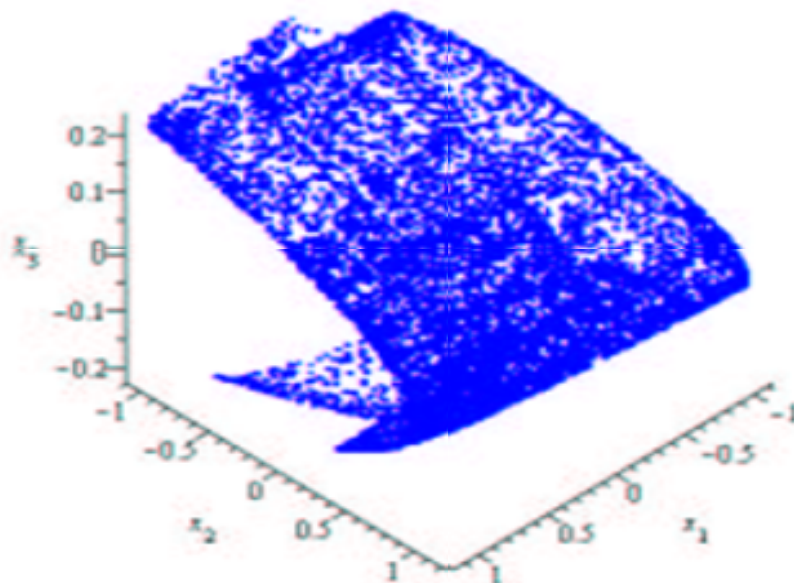


Fig.3.37. Attracteur hyperchaotique de Stefanski pour $b = 0.2$, et $a = 1.4$.

3.6 Système de Zeraoulia-Sprott

Un modèle créé par Zeraoulia et Sprott en 2008 [88], et est détecté de comportement chaotique dans le plan défini par l'ensemble des paramètres $H = \{a = 3.36, b = 1.4, m_0 = -0.43, \text{ et } m_1 = 0.41\}$ avec

Définition 3.6 *L'application chaotique de Zeraoulia-Sprott est donnée par :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - ah(y_k) \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

$a = 3.36, b = 1.4, m_0 = -0.43, \text{ et } m_1 = 0.41$

$$h(y_k) = \frac{1}{2} (2m_1 y_k + (m_0 - m_1) (|y_k + 1| - |y_k - 1|))$$

3.6.1 Attracteur de Zeraoulia-Sprott

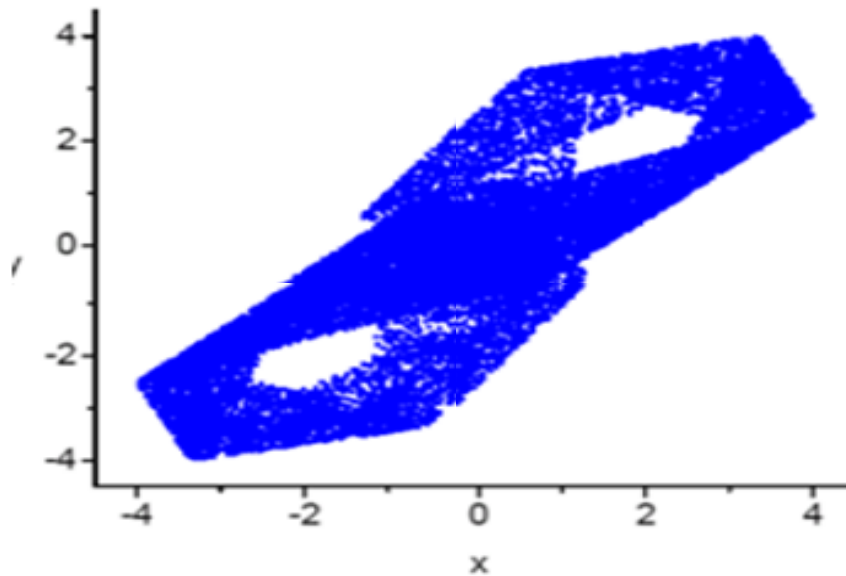


Fig.3.38. Attracteur chaotique de Zeraoulia-Sprott.

3.7 Conclusion

Comme nous avons vu, plusieurs systèmes ont un comportement chaotique soit dans le plan ou dans l'espace, pour un ensemble précis de paramètres, ceci nous ouvre les portes pour les utiliser dans des différents domaines, comme la synchronisation, et notons que dans la littérature un énorme nombre de systèmes qui sont détectés chaotiques.

Chapitre 4

Synchronisation du chaos

Introduction

Unifications des observations de deux phénomènes, équivalent à la synchronisations de leurs systèmes dynamiques. Ce sujet était un axe de recherche active depuis les jours les plus tôt de la physique [17]. Souvent nous nous trouvons obligés d'assurer l'arrivée de deux phénomènes qui sont décrits par deux systèmes chaotiques discrets différents en même temps, et le mot «temps» ici signifie le rang ou l'itération, parce que les systèmes sont discrets. De plus, les deux systèmes dynamiques discrets représentatifs sont de dimensions différentes, ce qui nous amène à maîtriser une partie des phénomènes, et cela se fait dans plusieurs domaines de recherche et de vie.

À partir d'un certain rang (temps), nous avons besoin de coupler (synchroniser) les deux systèmes qui ne sont pas avec le même nombre de composants, par exemple un avec deux composants et l'autre est à trois composants, et cela a l'existence, comme un Communication représentée par un système de trois dimensions, et un signal représenté par un système de deux dimensions apparaissant en même temps, signal d'information.

De nombreux modèles mathématiques de processus biologiques, de processus physiques, d'optique non linéaire, de dynamique des fluides, de réseau de communication et de processus chimiques ont été définis à l'aide de systèmes dynamiques à temps discret. La méthode de la synchronisation du chaos dans des systèmes dynamiques à temps discrets, tels que le contrôle actif, a été mise au point pour la synchronisation du chaos dans des systèmes dynamiques à temps discret [48]. La conception du backstepping et le contrôle du mode coulissant, etc. [48],

[7].

4.1 Types de synchronisation

Nous rappelons les différents types de synchronisation citées dans la littérature, y compris la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S.

4.1.1 Synchronisation complète

Soit le système chaotique maître représenté par

$$X(k+1) = F(X(k)) \quad (4.1)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (4.1) et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Et un système chaotique esclave donné par

$$Y(k+1) = G(Y(k)) + U \quad (4.2)$$

d'où $Y(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (4.2), $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur de contrôle à déterminer. On définit l'erreur de la synchronisation complète en tant que

$$e(k) = Y(k) - X(k) \quad (4.3)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur U de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0 \quad (4.4)$$

d'où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $F \neq G$; c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés.

4.1.2 Anti-Synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [59]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit

$$e(k) = Y(k) + X(k) \quad (4.5)$$

4.1.3 Synchronisation décalée

Deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $Y(k)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(k)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k - \tau)\| = 0, \text{ où } (\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k + \tau)\| = 0), \forall x(0) \quad (4.6)$$

avec τ est un nombre positif très petit.

4.1.4 Synchronisation projective

On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état $y_i(k)$ du système chaotique esclave $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq n}$.

se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(k)$ du système chaotique maître $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$, tels que :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(k) - \alpha_i x_i(k)| = 0, \forall (x(0); y(0)); i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les α_i sont égaux à -1

représente un cas d'anti-synchronisation complète.

4.1.5 Synchronisation FSHP

On dit qu'on a une synchronisation FSHP (en anglais full state hybrid projective synchronization), si chaque variable d'état $y_i(k)$; $1 \leq i \leq n$; du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état $x_i(k)$; $1 \leq i \leq n$; du système chaotique maître, tels que :

$$\exists(\beta)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \lim_{k \rightarrow \infty} \left| y_i(k) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(k) \right| = 0, \forall(x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective .

4.1.6 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. On considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par

$$\begin{cases} X(k+1) = F(X(k)) \\ Y(k+1) = G(Y(k)) + U \end{cases} \quad (4.9)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$; $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un contrôleur.

S'il existe un contrôleur U et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$; vérifient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - \phi(X(k))\| = 0, \forall x(0), \forall y(0) \quad (4.10)$$

alors, les systèmes maître-esclave (4.9) se synchronisent aus sens généralisé par rapport à la fonction ϕ . Si la fontion est definie par $\phi(X(k)) = \Lambda X(k)$ tel que $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{m \times n}$, on dit qu'on a

une synchronisation full-state hybrid projective.

4.1.7 Synchronisation Q-S

La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [82]. Nous disons qu'un système maître, n -dimensionnelle, $X(k)$ et un système esclave, m -dimensionnelle, $Y(k)$ sont en synchronisation Q-S dans la dimension d , s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation

$$e(k) = Q(X(k)) - S(Y(k)) \quad (4.11)$$

vérifie $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0$.

4.2 Méthodes de synchronisation

Des diverses méthodes de synchronisation sont générées, nous citons ici les plus performantes et les plus utiles.

4.2.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques, a été proposée par Bai et Lonngren, c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$x(k+1) = F(x(k)) \quad (4.12)$$

et

$$y(k+1) = G(y(k)) + U \quad (4.13)$$

ou $x(k) \in \mathbb{R}^n$, et $y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement,

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - x(k+1) \\ &= G(y(k)) - F(x(k)) + U \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si on peut écrire la quantité $G(y(k)) - F(x(k))$ de la façon suivante

$$G(y(k)) - F(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) \quad (4.15)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e(k+1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) + U \quad (4.16)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(k), y(k)) \quad (4.17)$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -Le(k) \quad (4.18)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e(k+1) = (A - L)e(k) \quad (4.19)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (4.12) et le système esclave (4.13) est transformé en problème de zero-stabilité du système (4.19). Maintenant, le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires discrets.

Théorème 4.1 Le système maître (4.12) et le système esclave (4.13) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (4.17), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que les valeurs propres de $A - L$ se trouvant à l'intérieur du disque de l'unité.

4.2.2 Méthode du Backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{4.20}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 &= f_2(y_1, y_2, y_3), \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= f_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) + u. \end{aligned} \tag{4.21}$$

d'où f_1 est une fonction linéaire, f_i , ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les

systèmes (4.20) et (4.21). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{aligned}e_1 &= y_1 - x_1, \\e_2 &= y_2 - x_2, \\&\vdots \\e_n &= y_n - x_n.\end{aligned}\tag{4.22}$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= g_1(e_1, e_2), \\ \dot{e}_2 &= g_2(e_1, e_2, e_3), \\ &\vdots \\ \dot{e}_n &= g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u.\end{aligned}\tag{4.23}$$

d'où g_1 est une fonction linéaire, et g_i , ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ; vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (4.23) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j)\tag{4.24}$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j , α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j , u_j et α_j sont calculés à chaque fois de telle sorte que $\dot{V}_j < 0$.

Remarque 4.1 *Remarque 4.1 Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

4.2.3 Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes. Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \quad (4.25)$$

et

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u \quad (4.26)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (4.25) et le système esclave (4.26) est définie par : $e = y - x$. La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x, y) + u \quad (4.27)$$

d'où $\eta(y; x) = f(y(t)) - f(x(t))$. Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (4.27), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x, y) \quad (4.28)$$

d'où v c'est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (4.28) dans (4.27), la dynamique de

l'erreur est simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv \quad (4.29)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système (4.29) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant. Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (4.30)$$

d'où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire : $s(e) = 0$, $\dot{s}(e) = 0$. Alors, on peut écrire :

$$\dot{s}(e) = C(Ae + Bv) = 0 \quad (4.31)$$

donc le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}CAe$$

d'où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par :

$$\dot{e} = [I - B(CB)^{-1}]CAe \quad (4.33)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B(CB)^{-1}]CA$ soient toutes négatives. Le contrôleur en mode glissant est proposé de la forme :

$$\dot{s} = -qsgn(s) - ks \quad (4.34)$$

d'où $sgn(\cdot)$ est la fonction signe, et $q, k > 0$, sont des constantes. Dans ce cas, Le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + qsgn(s)] \quad (4.35)$$

ce qui est équivalent à

$$v = \begin{cases} -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + qsgn(s)], & \text{si } s(e) > 0 \\ -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + qsgn(s)], & \text{si } s(e) < 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

Théorème 4.1 *Théorème 4.2* Le système maître (4.25) et le système esclave (4.26) sont globalement synchronisés par le contrôleur

$$u = Bv - \eta(x; y) \quad (4.37)$$

d'où v est défini par (4.35), (A, B) soit contrôlable et $q, k > 0$.

Preuve: Preuve. Pour observer la zero-stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{s^2}{2}$$

d'où

$$\dot{V} = -ks - qsgn(s)s$$

puisque $sgn(s)$ est toujours positive tant que $e \neq 0$ et $k, q > 0$; alors $\dot{V} < 0$. Ainsi, par la théorie de la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que la dynamique d'erreur (4.26) est globalement asymptotiquement zéro-stable. Par conséquent, il en résulte que le système maître (4.25) et le système esclave (4.26) sont globalement synchronisés. ■

4.3

Cryptographie via synchronisation chaotique

4.3.1 Chiffrement et déchiffrement

Le chiffrement (cryptage) est un processus de transformation des informations de façon à les rendre inintelligibles à toute personne autre que le destinataire. Le déchiffrement (décryptage) est le processus inverse du chiffrement, il sert à transformer les informations de façon à les rendre à nouveau intelligibles. Un algorithme de cryptographie, également appelé chiffre, est une fonction mathématique utilisée pour le chiffrement ou le déchiffrement. Dans la plupart des cas, deux fonctions complémentaires sont employées, l'une pour le chiffrement et la seconde pour le déchiffrement.

Dans la cryptographie moderne, la possibilité de conserver des informations secrètes ne se fait pas à partir de l'algorithme de cryptographie, qui est largement connu, mais avec un nombre appelé clef qui doit être utilisé avec l'algorithme de cryptographie afin de produire un résultat chiffré ou pour déchiffrer des informations précédemment chiffrées.

La cryptographie par chaos est un domaine de recherche assez récent, c'est à partir des années 1990 qu'elle savait son origine par les travaux de louis Pecora et thomas carroll [65], qui ont démontré théoriquement et expérimentalement la synchronisation entre deux oscillateurs chaotiques. Puis en 1998 M.S Baptista a publié un article dans lequel il présente un algorithme simple pour crypter un message écrit dans un alphabet à N caractères en utilisant les propriétés chaotiques de la suite logistique.[10].

Le chiffrement d'un message par le chaos s'effectue donc en superposant à l'information initiale un signal chaotique. On envoie par la suite le message noyé dans le chaos à un récepteur qui lui connaît les caractéristiques du générateur de chaos. Il ne reste alors plus au destinataire qu'à soustraire le chaos de son message pour retrouver l'information, autrement dit son principe de fonctionnement est le même que celui du chiffrement continu.

Parmi les méthodes de transmission chaotiques de l'information on trouve, le cryptage par addition, le cryptage par commutation, le cryptage par modulation.

4.3.2 Cryptage par addition

L'émetteur est constitué d'un générateur de signal chaotique et d'un mélangeur entre ce signal et le message. Le résultat du mélange est envoyé sur le canal. Une personne accédant à ce canal pour pirater la liaison aura donc accès à un signal pseudo-aléatoire dans lequel est masquée l'information. Côté récepteur, un générateur local de chaos est couplé au signal reçu et au système de synchronisation pour extraire l'information.

Cette technique [21], [23], s'appelée aussi le masquage chaotique, l'émetteur est un système maître chaotique x_k dont le signal de sortie y_k est ajouté au signal du message. La somme de deux signaux est transmise au récepteur. Le récepteur (système esclave) est constitué d'un système chaotique identique à l'émetteur. Ainsi, après la synchronisation des deux systèmes chaotiques (émetteur et récepteur) le message est extrait à l'aide d'une opération de soustraction voir Fig

(4.4).

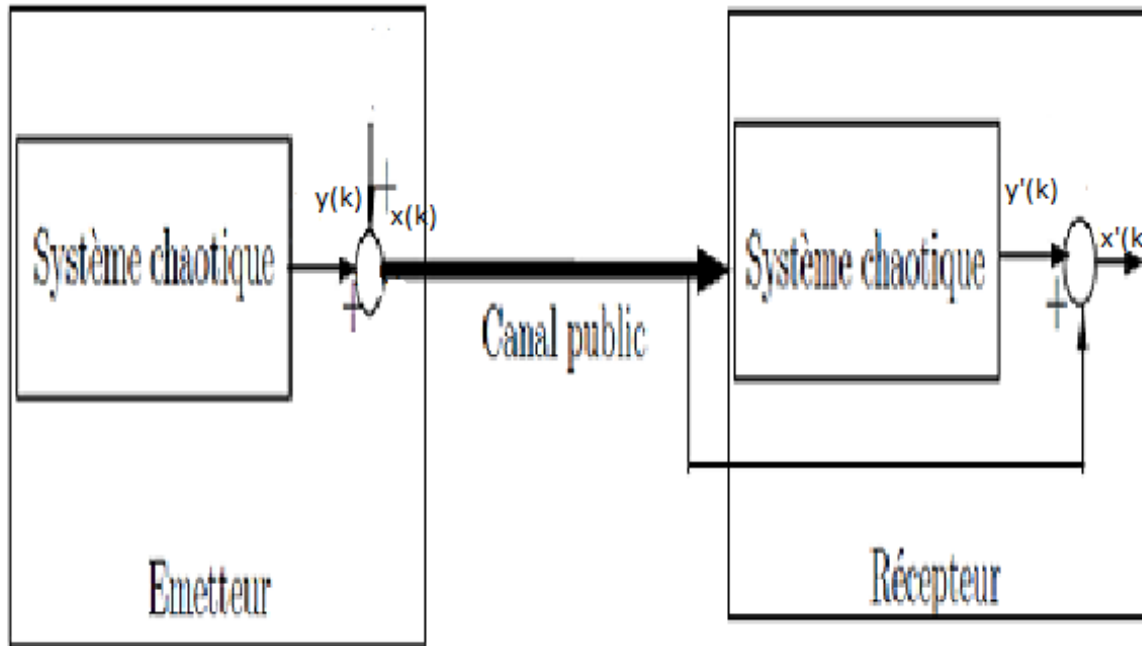


Fig.4.4.Cryptage par addition.

4.3.3 Cryptage par commutation

Dans cette méthode [23], [52], l'émetteur est composé de deux systèmes chaotiques et le message M_k (de type binaire : 0 ou 1) est utilisé pour commuter entre A_k encodant le bit 1 et B_k encodant le bit 0. Le signal résultant est transmis travers le canal de transmission vers le système récepteur constitué de deux systèmes chaotiques esclaves identique à ceux de l'émetteur. Le premier système esclave synchronise exclusivement avec le premier oscillateur (correspondant au signal chaotique A_k) de telle façon que le bit 1 est détecté par la convergence de l'erreur de

synchronisation vers 0 et par conséquent le signal d'information peut être enfin restauré à la fin du processus de détection. Le schéma représentant cette méthode est donné par la figure (4.5).

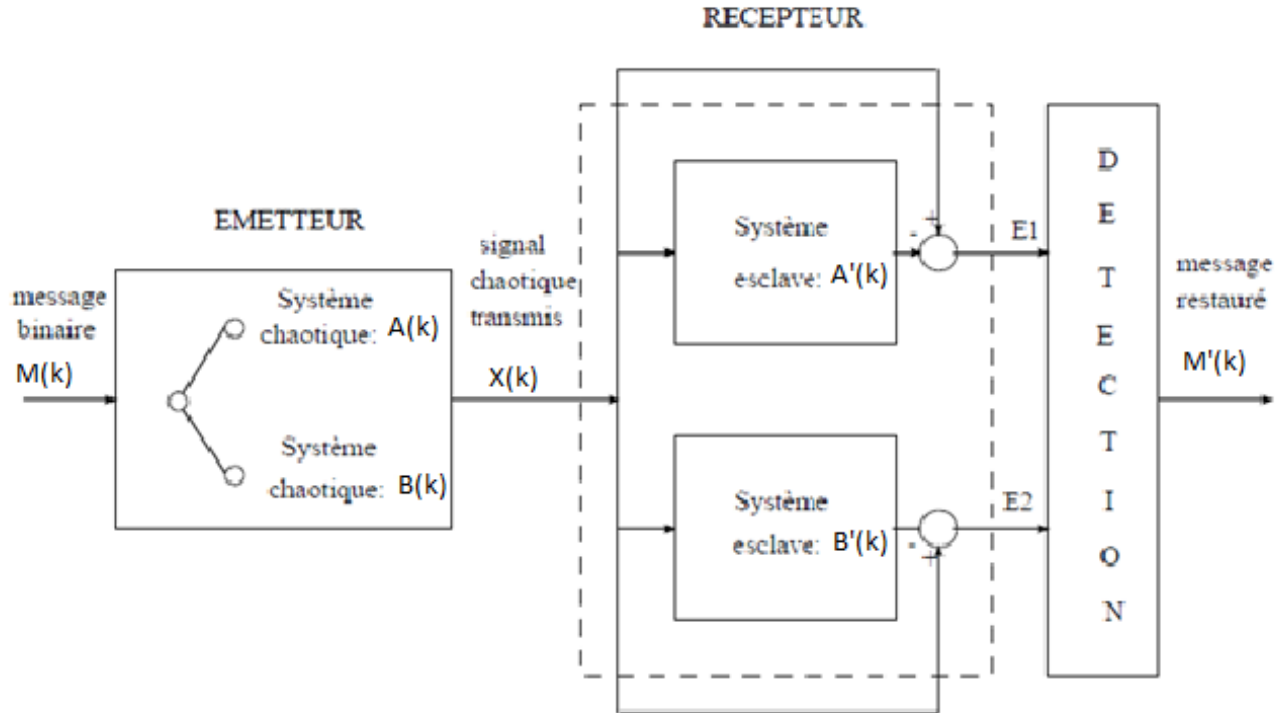


Fig.4.5.Cryptage par commutation.

4.3.4 Cryptage par modulation

Le principe de la modulation paramétrique [23], consiste à utiliser le message M_k , pour moduler l'un des paramètres du système chaotique émetteur X_k . Le système récepteur Z_k synchronise d'une manière adaptative avec l'émetteur chaotique et le message M_k est restauré par l'intermédiaire d'une loi d'adaptation. La figure (4.6) représente le schéma d'un système de communication utilisant cette technique.

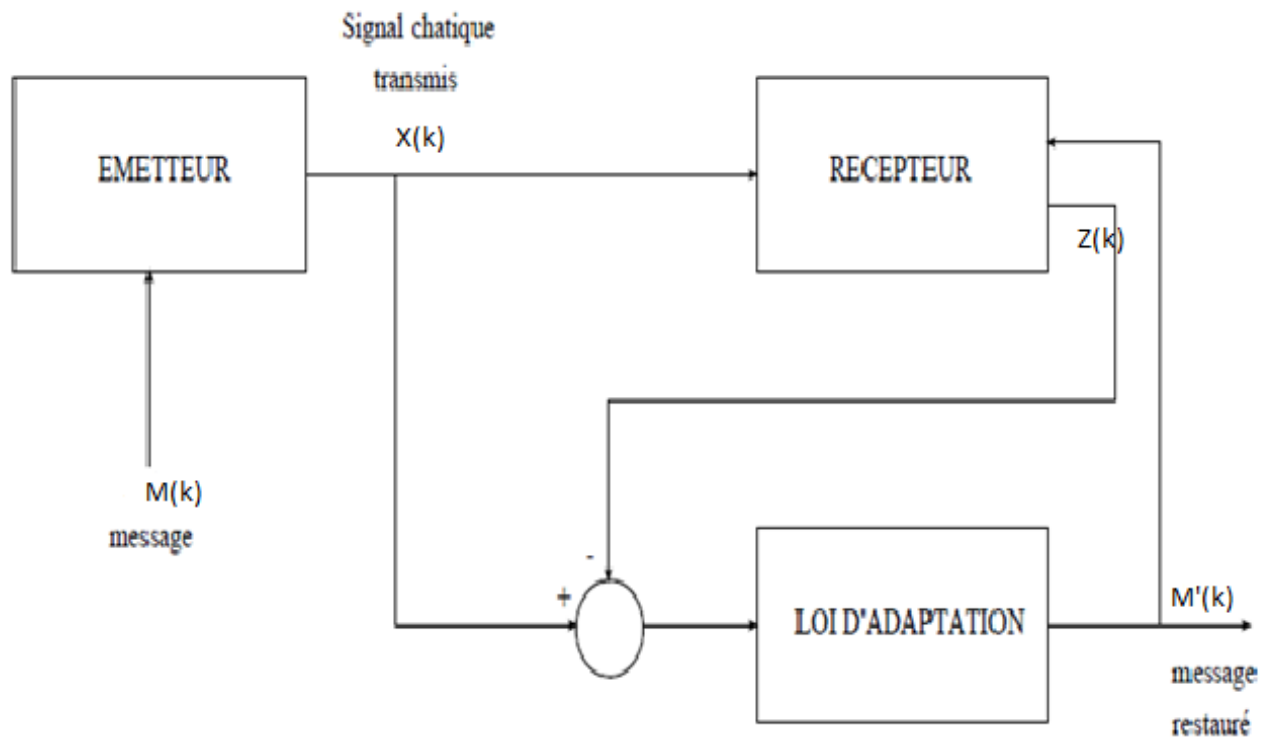


Fig.4.6.Cryptage par modulation.

4.4 Quasi-contrôle des systèmes dynamiques discrets chaotiques

Résumé

L'objectif de cette étude est de synchroniser deux phénomènes décrits par deux systèmes chaotiques discrets, bien que les dimensions soient différentes dans le sens que le premier écoulement dans l'espace et l'autre dans le plan et vice versa. Parce que la synchronisation est incomplète, nous allons lancer un quasi-contrôle.

La légitimité de notre choix de vecteurs de contrôleur est démontrée par la tendance à zéro des erreurs en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov.

Introduction :

Souvent, nous nous trouvons obligés d'assurer l'arrivée de deux phénomènes décrits par deux systèmes discrets discrets en même temps, et le mot «temps» signifie ici le rang ou l'itération, car les systèmes sont discrets. En outre, les deux systèmes dynamiques discrets représentatifs sont de dimensions différentes, ce qui nous permet de contrôler une partie des phénomènes, et cela se déroule dans plusieurs domaines de recherche et de la vie.

À partir d'un certain rang (temps), nous avons besoin de coupler (synchroniser) les deux systèmes qui ne contiennent pas le même nombre de composants, par exemple un avec deux composants et l'autre avec trois composants, et cela existe, tel qu'un Communication représentée par un système de trois dimensions, et un signal représenté par un système de deux dimensions apparues en même temps, signal d'information.

Beaucoup de modèles mathématiques de processus biologiques, de procédés physiques, d'optique non linéaire, de dynamique des fluides, de réseau de communication et de processus chimique ont été définis à l'aide de systèmes dynamiques à temps discret. [26], Cependant, on a accordé plus d'attention aux Synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets [65], [17], [39], [64], [67]. De nombreuses méthodes ont été développées pour la synchronisation du chaos dans des systèmes dynamiques à temps discret tels que le contrôle actif, La conception de l'arrière-plan et le contrôle du mode coulissant, etc. [65], [17], [39], [64], [67].

La majorité des travaux de synchronisation entre deux systèmes de différentes dimensions basés sur une fonction f qui augmente ou réduit la taille du système synchronisé, selon ce cas, cependant, cette méthode nécessite des conditions analytiques sur f , ce qui a été un inconvénient majeur pour l'utilisation.

Pour éviter toute difficulté, nous choisissons le vecteur contrôleur, et sur la base de la théorie de la stabilité de Lyapunov, nous proposons une nouvelle conception de contrôle pour garantir la synchronisation, d'une part, entre le système en 3D de Hénon généralisée et le système en 2D de Hénon. Deuxièmement, entre le système en 2D de Lozi et le système en 3D de type Hénon généralisée.

4.4.1 Quasi-synchronisation entre le système maître 3D et le système esclave 2D

Tout d'abord, nous essayons de synchroniser le système maître de la carte générique Hénon 3D [33], [1], décrite dans \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 1.76 \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) \end{cases} \quad (4.40)$$

Avec le système esclave qui est la carte Hénon [33], [1], décrite dans \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 1 + u_1, \\ y_2(k+1) = by_1(k) + u_2, \end{cases} \quad (4.41)$$

Où $(a, b) = (1.4, 0.3)$ et (u_1, u_2) est le vecteur contrôleur (4.13).

Comme nous le remarquons, le premier système joue dans l'espace avec trois composants et la deuxième lecture dans l'avion. Nous définissons les erreurs de quasi-synchronisation par

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \end{cases} \quad (4.42)$$

Les erreurs de synchronisation entre le système maître (4.40) et le système esclave (4.41) peuvent être dérivées comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 0.1x_3(k) + x_2^2(k) - 0.76 + u_1 \\ e_2(k+1) = by_1(k) - x_1(k) + u_2 \end{cases} \quad (4.43)$$

Pour obtenir une synchronisation entre les systèmes (4.40) et (4.41), on peut choisir le contrôleur vectoriel U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_2(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + ay_1^2(k) - 0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 0.76 \\ u_2 = (1-b)x_1(k) \end{cases} \quad (4.44)$$

Ensuite, les erreurs de synchronisation entre les systèmes (4.40) et (4.41), simplifiées comme suit : Nous considérons le candidat Lyapunov fonction pour étudier la stabilité des erreurs de synchronisation :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_2(k) \\ e_2(k+1) = be_1(k) \end{cases} \quad (4.45)$$

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k), \quad (4.46)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_2^2(k) + b^2e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) \\ &= (b^2 - 1)e_1^2(k) - \frac{1}{4}e_2^2(k) < 0. \end{aligned}$$

Alors, par la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (4.47)$$

Nous concluons que les systèmes (4.40) et (4.41) sont quasi synchronisés.

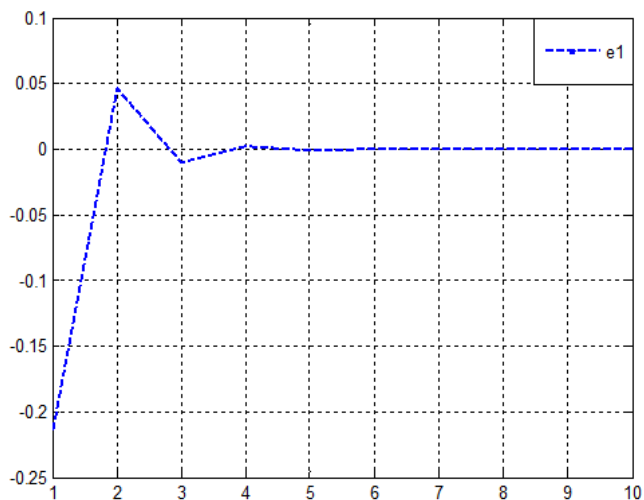


Fig. 4.1..Erreur de synchronisation e_1 .

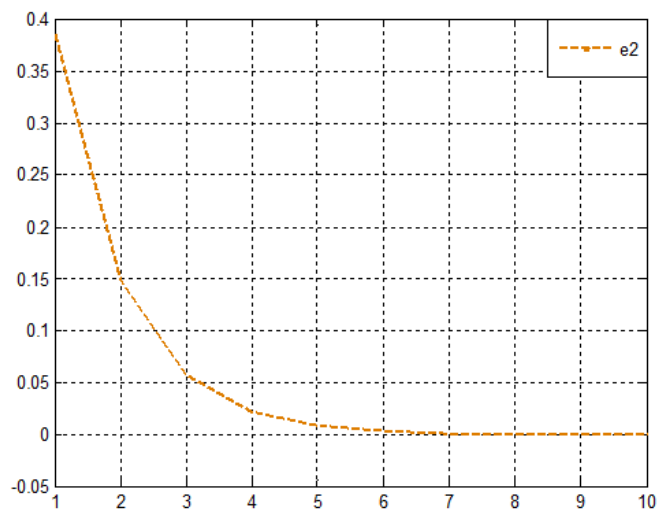


Fig.4.2..Erreur de synchronisation e_2 .

Quasi-synchronisation entre le système maître 2D et le système esclave 3D

Deuxièmement, nous considérons le système maître qui est l'application de Lozi [50], [57], [10], [1], décrit dans \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = 1 + x_1(k) - a|x_2(k)| \end{cases} \quad (4.48)$$

Et le système esclave qui est celui en forme de Hénon généralisée en 3D [2], [5], décrit dans \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) + u \\ y_2(k+1) = 1 + \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) + u_2 \\ y_3(k+1) = \beta y_1(k) + u_3 \end{cases} \quad (4.49)$$

Où $(\alpha, \beta) = (1.4, 0.2)$ et (u_1, u_2) est le vecteur contrôleur.

Les erreurs de synchronisation sont définies par

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \\ e_3(k) = y_3(k) - x_1(k) \end{cases} \quad (4.50)$$

Comme nous le remarquons, la troisième erreur est arbitraire, puis les erreurs de synchronisation entre le système maître (4.48) et le système esclave (4.49) peuvent être dérivées comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) - x_2(k) + u_1 \\ e_2(k+1) = \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) - x_1(k) + a|x_2(k)| + u_2 \\ e_3(k+1) = \beta y_1(k) - x_2(k) + u_3 \end{cases} \quad (4.51)$$

Pour assurer la synchronisation entre les systèmes (4.48) et (4.49), on peut choisir le contrôleur vectoriel U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_3(k) + x_2(k) - \frac{1}{2}x_3(k) + \alpha y_2^2(k) - 1 \\ u_2 = -\beta x_2(k) + \alpha y_1^2(k) + x_1(k) - a|x_2(k)| \\ u_3 = -\beta x_1(k) + x_2(k) \end{cases} \quad (4.52)$$

Les erreurs de synchronisation entre les systèmes (4.48) et (4.49) peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_3(k) \\ e_2(k+1) = \beta e_2(k) \\ e_3(k+1) = \beta e_1(k) \end{cases} \quad (4.53)$$

Pour étudier la stabilité des erreurs de synchronisation, on considère la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k), \quad (4.54)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_3^2(k) + \beta^2 e_2^2(k) + \beta^2 e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) - e_3^2(k) \\ &= (\beta^2 - 1) e_1^2(k) + (\beta^2 - 1) e_1^2(k) - \frac{3}{4}e_3^2(k) < 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ainsi, par la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que les erreurs aient tendance à zéro à l'infini

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.56)$$

Nous concluons que les systèmes (4.48) et (4.49) sont quasi-synchronisés.

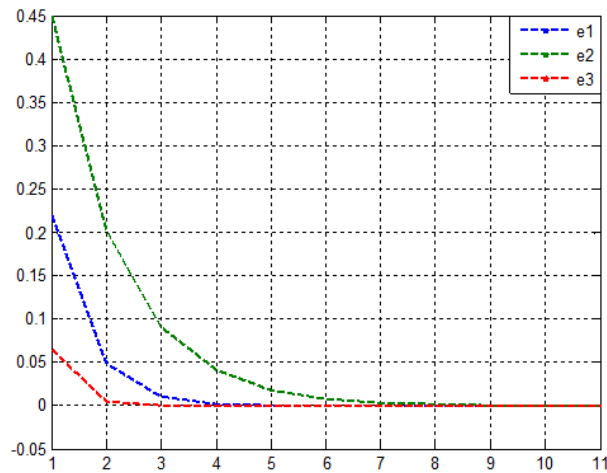


Fig.4.3. Les erreurs de synchronisation $e_i, i = 1, 2, 3$.

4.4.2 Conclusion

Dans cet article, nous avons analysé le problème de la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques en temps discret avec des dimensions différentes. Une nouvelle méthode de contrôle a été proposée et des simulations numériques ont été données pour montrer l'efficacité du schéma proposé. On couple deux phénomènes, qui sont représentés par deux systèmes dynamiques ayant des dimensions différentes, et plus avec différentes propriétés topologiques et une structure de bifurcation différente, nous montrons que les erreurs ont tendance à zéro, et enfin les graphiques montrent la convergence des erreurs à zéro. Parce que les dimensions sont différentes, nous proposons le nom du quasi-cotrollant sur ce type de synchronisation.

4.5 Conclusion générale

La notion du chaos est très utile dans plusieurs domaines. En effet, en physique, en météorologie évidemment, mais aussi en biologie et chimie, en économie dans l'estimation des paramètres des distributions, et aussi l'étude de leurs comportement à long terme [16], et en sciences sociales. Dans la cryptographie, la découverte des signaux chaotiques pouvons alourdir la poursuite, et aussi endommager un tel message en face des pirates, fait une grande révolution dans le monde de la communication, ces signaux de nature très imprévisibles et qui ne semblaient pas être faciles à contrôler sont déterministes mais fortement sensibles aux conditions initiales et présentent une allure pseudo-aléatoire, ce qui fait du chaos un phénomène très intéressant pour cacher des signaux d'informations afin de transmettre ceux-ci d'une manière sécurisée.

L'objectif principal de cette thèse était de présenter de façon approfondie les systèmes dynamiques discrets, on donnant une synthèse sur les notions de base pour l'étude d'un tel système, comme les points fixes, leurs stabilités, puis les différents types de bifurcation, qui nous amène à la détection du comportement chaotique via plusieurs caractéristiques dont la sensibilité aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov, et attracteurs étranges.

Ensuite, nous nous attachons au comportement chaotique dans les systèmes les plus célèbres dans la littérature qui comportent des perturbations imprévisibles pour un ensemble de paramètres, et qui ont une grande utilité et citation dans plusieurs disciplines, comme l'application logistique, le model de Hénon, l'application de lozi, le système de stefanski, et autres. Les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes ont lieu dans ce manuscrit, et nous avons analysé le problème de la synchronisation pour des systèmes dynamiques chaotiques en temps discret avec des dimensions différentes. Une nouvelle méthode de contrôle a été proposée et des simulations numériques ont été faites pour montrer l'efficacité du schéma proposé. Nous couplons deux phénomènes, qui sont représentés par deux systèmes dynamiques ayant des dimensions différentes, et de plus avec des propriétés topologiques différentes, et une structure de bifurcation différente. Nous montrons que les erreurs tendent vers zéro. Nous proposons le nom de quasi-cotrolling sur ce type de synchronisation qui est notre contribution dans cette thèse.

Bibliographie

- [1] **Aziz-Alaoui, M. A, Robert, C and Grebogi, C** 2001. Dynamics of a Hénon-Lozi-type map Chaos,Solitons and Fractals **12**, 2323-2341
- [2] **Aziz Alaoui, Carl Robert, Celso Grebogi**, Dynamics of a Henon-Lozi type map, university of California, 2000
- [3] **Alvarez, G., Hernandez, L., Munoz, J. F., Montoya, Li, S.** (2005), “Security analysis of communication system based on the synchronization of different order chaotic systems,” Phys. Lett. A, Vol. 345(4), pp. 245–250.
- [4] **Alligood K T, Sauer T D and Yorke J A** Chaos : an introduction to dynamical systems 1996 (Springer, NY)
- [5] **Abarbanel, H.D.I., Rulkov, N.F., Sushchik, M.M.** (1996), “Generalized synchronization of chaos : the auxiliary system approach,” Phys. Rev. E., Vol. 53, pp. 4528–35.
- [6] **Adeli, M., Zarabadipoor, H.** (2011), “Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms,” International Journal of Electronic Signals and Systems, pp 143-147.
- [7] **Aguilar-Bustos, A. Y., Cruz-Hernández, C.** (2006), “Synchronization of discrete-time hyperchaotic Systems through extended Kalman filtering,” Nonlinear Dyn. Syst. Theory, Vol. 6(4), pp 319–336.

- [8] **Aguilar Bustos, A. Y., Cruz Hernández, C., López Gutiérrez, R. M., Posadas Castillo, C.** (2008), “Synchronization of different hyperchaotic maps for encryption,” *Non-linear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 8(3), pp. 221-236
- [9] **Aguilar Bustos, A. Y., Cruz Hernández, C.** (2008), “Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems : An application in communications,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 41(3), pp. 1301-1310.
- [10] **M.S. Baptista**, « Cryptography with chaos » , *Physics Letters A* 240 (1998) p.50-54
- [11] **Baier, G., Sahle, S.** (1995), “Design of hyperchaotic flows,” *Phys. Rev. E*, 51, pp. 2712-2714.
- [12] **Baier, G., Klein, M.** (1990), “Maximum hyperchaos in generalized Hénon maps,” *Phys. Lett. A*, Vol. 51, pp. 281-284.
- [13] **Boukhalfa El-hafsi, Laskri Yamina.**(2016). Quasi-controlling of chaotic discrete dynamical systems. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 5 , pp. 4317–4323.
- [14] **Boukhalfa El-hafsi.** (2014). Synchronization of Some Different dimensional Chaotic Discrete Dynamical Systems. *Far east journal of applied mathematics*. Volume 87, Number 2, Pages 115-122
- [15] **Boukhalfa El-hafsi, Zeraoulia Elhadj.** (2014). Existence of super chaotic attractors in a general piecewise smooth map of the plane. *Interdisciplinary Description of Complex Systems* 12(1), 92-98,
- [16] **Boukhalfa El-Hafsi.** (2013) Average Sample Number Function for Pareto Heavy Tailed Distributions, *ISRN Applied Mathematics*, vol. 2013, Article ID 938545, 8 pages,. doi :10.1155/2013/938545
- [17] **Boccaletti, S., Kurths, J., Valladares, D.L., Osipov, G., Zhou, C.** : The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports* 366, 1–101 (2002).
- [18] **Bowong, S., Kakmen, F.M.** (2004), “Synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping approach,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 21, pp. 999–1011

- [19] **Chu Y-D, Chang Y-X, Zhang J-G, Li X-F, An, X-L.** (2009), “Full state hybrid projective synchronization in hyperchaotic systems,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 42 (3), pp. 1502–1510.
- [20] **Chen, S., Lu, J.** (2002), “Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 14, pp. 643–647.
- [21] **Chai, W., Chua, L.O.** (1993), “A simple way synchroniza chaotic systems with applications to secure communication systems,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 3, 1619-5.
- [22] **C., Cruz Hernández, Lopez Gutierrez, R. M., Aguilar Bustos, A. Y., Posadas Castillo, C.** (2010), “Communicating encrypted information based on synchronized hyperchaotic maps,” *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Vol. 11(5), pp. 337-349.
- [23] **Dedieu, H., Kennedy, M.P., Hasler, M.** (1993), “Chaos shift keying : modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua’s circuits,” *IEEE Trans. on Circ. Syst. I : Regular Papers*, Vol. 40(10), pp. 634–642.
- [24] **Diao, M., Yu, Y-G., Wang, S., Yu, J-Z.** (2010), “Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders,” *Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu.*, Vol. 11 (7), pp. 503–508.
- [25] **Eduardo, L., Ruiz-Herrera, A.** (2012), “Chaos in discrete structured population models,” *J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 11(4), pp. 1200–1214.
- [26] **Ernesto A. Leandro D. S. Coelho.** Particle swarm approaches using Lozi map chaotic sequences to fuzzy modelling of an experimental thermal-vacuum system, *Applied Soft Computing* 8 (2008) 1354–1364
- [27] **Filali, R.L., Benrejeb, M. and Borne, P.** (2014), “On observer-based secure communication design using discrete-time hyperchaotic systems,” *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 19(5), pp. 1424-1432.
- [28] **Filali, R.L., Hammami, S., Benrejeb, M. and Borne, P.** (2012), “On synchronization, anti-synchronization and hybrid synchronization of 3D discrete generalized Hénon map,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 12(1), pp. 81-95.

- [29] **Fujisaka, H., Yamada, T.** (1983), “Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems,” *Prog. Theor. Phys.* Vol. 69 (1), pp. 32-47
- [30] **Guckenheimer, J., Holmes, P.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [31] **Grassi, G.** (2012), “Generalized synchronization between different chaotic maps via dead-beat control,” *Chinese Phys. B* , Vol. 21 (5), pp. 050505-5
- [32] **Grassi, G., Miller, D.A.** (2012), “Dead-beat full state hybrid projective synchronization for chaotic maps using a scalar synchronizing signal,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, Vol. 17 (4), pp. 1824–1830.
- [33] **Hénon, M.** 1976. A two-dimensional mapping with a strange attractor *Comm. Math. Phys.* 5069-77.
- [34] **Hunt, B.R, Ott, E., Yorke, J.A.** (1997), “Differentiable generalized synchronization of chaos,” *Phys. Rev. E.*, Vol. 55, pp. 4029–4034.
- [35] **Hua M, Xua Z, Zhang, R.** (2008), “Full state hybrid projective synchronization of a general class of chaotic maps,” *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.*, Vol. 13 (4), pp. 782–789.
- [36] **Hua M, Xua Z, Zhang R, Hua, A.** (2007), “Adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic systems with the same and different order,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 365 (4), pp. 315–327.
- [37] **Hua M, Xua Z, Zhang R, Hua, A.** (2007), “Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyperchaotic) systems,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 361 (3), pp. 231–237.
- [38] **Hale, J.K., Kocak, H.** *Dynamics and Bifurcations. Applied Mathematics*, Publisher Springer-Verlag New York, 1991.
- [39] **H. Nijmeijer, I.M.Y, Mareels**, An observer looks at synchronization, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 44(10), 874 ? 890, (1997).

- [40] **Itoh, M., Yang, T., Chua, L.O.** (2001), “Conditions for impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic systems,” *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, Vol. 11, pp. 551-8.
- [41] **Jiang GP, Tang W.** A global synchronization criterion for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach. *Int J Bifurcat Chaos* 2002 ;12(10) :2239–53
- [42] **Ji, Y., Liu, T., Min, L. Q.** (2008), “Generalized chaos synchronization theorems for bidirectional differential equations and discrete systems with applications,” *Phys. Lett. A*, Vol. 372, pp. 3645-3652.
- [43] **Khalil, H. K.** (1996), *Nonlinear Systems* Second edition, Prentice-Hall.
- [44] **Koronovskii, A.A., Moskalenko, O I., Shurygina, S.A., Hramov, A E.** (2013), “Generalized synchronization in discrete maps. New point of view on weak and strong synchronization,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 46, pp. 12–18.
- [45] **Khan, M.A.** (2012), “Synchronization of different 3D chaotic systems by generalized active control,” *J. Infor. Comp. Sci.*, Vol. 7 (4), pp. 272-283.
- [46] **K. Stefanski,** (1998), “Modelling chaos and hyperchaos with 3D maps,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 9(1-2), pp. 83-93.
- [47] **Kuznetsov, Y.** *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, 2004.
- [48] **L. M. Pecora and T. L. Carroll.** Synchronisation in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990), 821-824.
- [49] **Lakshmanan, M., Rajaseekar, S.** *Nonlinear Dynamics Integrability, Chaos and Patterns.* Advanced Texts in Physics, Publisher Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [50] **Lozi, R.,** (1978), “Un Attracteur étrange du Type Attracteur de Hénon,” *Journal de Physique*, Vol. 39, pp.9-10.
- [51] **Lu, J.** (2008), “Generalized (complete, lag, anticipated) synchronization of discrete-time chaotic systems,” *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 13 (9), pp. 1851-1859.

- [52] **Leuciuc, A.** (2000), “Information transmission using chaotic discrete-time filter,” *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, IEEE Transactions on, Vol. 47(1), pp. 82-88.
- [53] **Liu, W., Wang, Z.M., Zhang, W.D.** (2012), “Controlled synchronization of discrete-time chaotic systems under communication constraints,” *Nonlinear Dyn.*, Vol. 69, pp. 223–230.
- [54] **Li, Y., Chen, Y., and Li, B.,** (2009) “Adaptive control and function projective synchronization in 2D discrete-time chaotic systems,” *Commun. Theor. Phys.*, Vol. 51, pp. 270–278.
- [55] **Li, Y., Chen, Y., and Li, B.,** (2009), “Adaptive function projective synchronization of discrete-Time chaotic Systems,” *Chin. Phys. Lett.*, Vol. 26 (4), pp. 040504-4.
- [56] **Li, G.H.** (2009), “Inverse lag synchronization in chaotic systems,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 40, pp. 1076–1080.
- [57] **Misiurewicz, M.** 1980. Strange attractors for the Lozi mappings *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 357 348-358.
- [58] **Matsumoto, T., Chua, L. O., Kobayashi, K.** (1986), “Hyperchaos : laboratory experiment and numerical confirmation,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-33 Vol. (11), pp. 1143-1147.
- [59] **Manfeng Hu., Xu, Z.A.** (2008), “General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems,” *Nonlinear Analysis*, Vol. 69 (4), pp. 1091-1099.
- [60] **Ma, Z., Liu, Z., Zhang, G.** (2007), “Generalized synchronization of discrete systems,” *Appl. Math. Mech.*, Vol. 28 (5), pp. 609-614.
- [61] **Orhan. Ozgur Aybar, I. Kusbeyzi Aybar, and A. S. Hacinliyan,** *Stability and Bifurcation in the Henon Map and its Generalizations*, Yeditepe University, Istanbul, Turkey, 2013.
- [62] **Olusola, O.I., Vincent, U.E., Njah, A.N., Idowu, B.A.** (2013), “Global stability and synchronization criteria of linearly coupled gyroscope,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 13(3), pp.258–269.

- [63] **Osipov, G.V., Pikovsky, A.S., Rosenblum, M. G., Kurths, J.** (1996), “Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators,” *Phys. Rev. E*, Vol. 55 (3), pp. 2353-2361.
- [64] **Peter Ashwin.** . “Synchronization from Chaos”. *Nature* 422, 2003, pp. 384- 385.
- [65] **Pecora, L.M., Carroll, T.L.** (1990), “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64(8), pp. 821-824.
- [66] **Pyragas, K.** (1998), “Properties of generalized synchronization of chaos,” *Nonlinear Anal.Model. Control*, pp. 101–29.
- [67] **Quang-Cuong Pham and J.J.E. Slotine.** “Stable Concurrent Synchronization in Dynamics System Networks”. MIT-NSL Report, 2005.
- [68] **Robert.M. May**, “Simple mathematical model with very complicated dynamics”, *Nature*, Vol. 261, p. 459, 1976
- [69] **Ruelle, D., Takens, F.** (1971), “On the nature of turbulence,” *Commun. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 167-192.
- [70] **Slotine, J.J.E. and Li, Weiping.** (1991), *Applied Nonlinear Control* Prentice-Hall
- [71] **K. Stefanski**, (1998), “Modelling chaos and hyperchaos with 3D maps,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 9(1-2), pp. 83-93
- [72] **Sundarapandian, V.** (2012), “Sliding controller design for the global chaos synchronization of identical hyperchaotic Yujun systems,” *Intern. J. Adv. Info. Tech.*, Vol. 2 (4), pp. 13-22.
- [73] **Sun, F., Liu, Z.L.S.** (2010), “A new cryptosystem based on spatial chaotic system,” *Optics Communications*, Vol. 283 (10), pp. 2066–2073.
- [74] **Wang, X.Y.** *Chaos in Complex Nonlinear Systems*, Publishing House of Electronics Industry, Beijing, 2003.
- [75] **Wang X-Y, Song, J.** (2009), “Adaptive full state hybrid projective synchronization in the unified chaotic system,” *Mod. Phys. Lett. B.*, Vol. 23, pp. 1913–1921.

- [76] **Wang X-Y, Zhu, L-B.** (2011), "Adaptive full state hybrid projective synchronization of unified chaotic systems with unknown parameters," *Int. J. Mod. Phys. B.*, Vol. 25, pp. 4661–4666.
- [77] **Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., Vastano, J.** (1985), "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica*, Vol. 16, pp. 285-317.
- [78] **Wu, C, W and Chua , L, O.** (1993), A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 3 (06), 1619-1627
- [79] **X.X. Wu, Z. Chen,** *Introduction of Chaos Theory*, Shanghai Science and Technology, Bibliographic Publishing House, 1996.
- [80] **Xin, B., Wu, Z.** (2015), "Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control," *Entropy*, Vol. 17, pp. 2677-2687.
- [81] **Yan, Z.Y.** (2006), "Q-S (Complete or Anticipated) Synchronization Backstepping Scheme in a Class of Discrete-Time Chaotic (Hyperchaotic) Systems : A Symbolic-Numeric Computation Approach," *Chaos*, Vol. 16, pp. 013119-11.
- [82] **Yamada T., Kuramoto Y.** *Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems.* *Prog. Theor. Phys.* (1983) 69 (1) : 32-47. doi : 10.1143/PTP.69.32
- [83] **Zhang Q, Lu, J.** (2008), "Full state hybrid lag projective synchronization in chaotic (hyperchaotic) systems," *Phys. Lett. A.*, Vol. 372 (9), pp. 1416–142
- [84] Zeraoulia Elhadj and Hamri Nasr E-ddine, "A new chaotic attractor from modified Chen equation," *Far East Journal of Applied Mathematics*, Vol (18) N0 2, pp : 185-198, (2005).
- [85] Zeraoulia Elhadj and Hamri Nasr E-ddine, " A generalized model of some Lorenz-type and quasi-attractors type strange attractors in three dimensional dynamical systems," *International Journal of Pure & Applied Mathematical Sciences*, Vol.2, No.1 (2005).pp 67-76.2.
- [86] Zeraoulia Elhadj, "A new chaotic attractor from 2-D discrete mapping via border-collision period doubling scenario," *Discrete dynamics in nature and society*, Volume 2005, 235-238, (2005).

- [87] Zeraouia Elhadj, J. C. Sprott, "A two-dimensional discrete mapping with C^∞ -multifold chaotic attractors," *Electronic journal of theoretical physics*, Volume 5 (17), 111-124, 2008.