

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

Université Badji Mokhtar-
Annaba

Badji Mokhtar University-
Annaba



جامعة باجي مختار-

عنابة

Année 2014

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

**PROBLÈME DIRECT ET INVERSE DE
DIFFRACTION DANS UN
DEMI-PLAN LOCALEMENT PERTURBÉ**

Option

Mathématiques Appliquées

Présentée par

BERREHAIL Besma

DIRECTEUR DE THÈSE : CHORFI Lahcène PROF. UNIV.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRÉSIDENT : MAZOUZI Saïd PROF. UNIV.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : BENCHIEKH Lahcène PROF. UNIV.F. A. SETIF

EXAMINATEUR : ALEM Leïla MC(A) UNIV.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : BOUSSETILA Nadjib PROF. UNIV. DE GUELMA

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur Lahcène CHORFI , Professeur à l'université d'Annaba, qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui. Je lui suis infiniment reconnaissante, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible, ce qui m'a énormément encouragée.

Merci à Monsieur Saïd Mazouzi, Professeur à l'université d' Annaba, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur Lahcène Benchikh, Professeur à l'université Ferhat Abbas, Sétif, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de juger ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Nadjib Boussetila, Professeur à l'université de Guelma, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Mes vifs remerciements vont également à Madame Leïla Alem, Maître de conférences à l'université d'Annaba, d'avoir accepté d'examiner ma thèse et de faire partie de mon jury.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon mari, à mon père et à ma mère.

Finalement, je remercie mes amies : Imen, Asma, Sana, Zahia, ... et toutes les autres que je n'ai pas citées.

ملخص

موضوع هذه الأطروحة يرتكز اساسا على دراسة مشكل الانتشار المعاكس في نصف المستوي المتردد محليا. لهذا سنتطرق الى ايجاد الحدود المضطربة للمعادلة من خلال معطيات عن الحقل البعيد للموجة المنتشرة. الجزء الاول يتضمن بعض النتائج المتعلقة بالمشكل المباشر من وجود ووحداية الحل وندرس سلوكه المباشر. في الجزء الثاني سنبرهن ان دراسة المشكل المعاكس يؤدي الى دراسة معادلة تكاملية غير صحيحة بمعنى Hadamard غير خطية, لحل هذه المعادلة سنستعمل طريقة نيوتن. في الأخير سنقدم بعض النتائج العددية التي توضح سير الطريقة. يعتبر هذا العمل تعميم للمقالة [24].

الكلمات المفتاحية : نظرية الانتشار, المشكل المعاكس, طريقة نيوتن, التسوية.

Résumé

Dans cette thèse, on considère un problème inverse de diffraction dans un demi-plan localement perturbé. Il s'agit de retrouver une perturbation de la frontière γ , d'équation $x_2 = f(x_1)$, à partir de la mesure du champ lointain diffracté. Nous présentons d'abord quelques résultats sur le problème direct concernant l'existence, l'unicité de la solution du problème et le comportement asymptotique. Nous montrerons que le problème inverse se ramène à une équation intégrale non linéaire qui est mal posée. On la résout par une méthode itérative (méthode Gauss-Newton). Nous présenterons quelques résultats numériques qui illustrent la méthode. Ce travail est une généralisation de l'article [24] qui a étudié le cas $f \geq 0$.

Mots clés : Diffraction, Problème inverse, Méthode de Newton, Régularisation.

Abstract

In this thesis we consider an inverse scattering problem in a locally perturbed half-plane. Our aim is to recover a local perturbation γ of the flat boundary parameterized by the equation $x_2 = f(x_1)$ from the measured far field pattern. We present at first some results on the forward problem concerning existence, uniqueness and asymptotic behavior of the scattered wave corresponding to an incident waves (plane waves and spherical waves). We show that the inverse problem is reduced to an ill-posed nonlinear integral equation. For the resolution we use an iterative method (Gauss-Newton method). We give further numerical examples to illustrate the method. This work is a generalization of the article [24] that considered the case $f \geq 0$.

Keywords. Scattering theory, Inverse problem, Newton method, Regularization.

Table des matières

Introduction générale	10
1 Rappels	15
1.1 Equation de Helmholtz	15
1.1.1 Un bref rappel de mécanique des fluides	15
1.1.2 L'équation de Helmholtz	18
1.1.3 Les ondes planes	19
1.1.4 Les ondes radiales	20
1.1.5 La condition de Sommerfeld	21
1.1.6 Les problèmes de diffraction par un obstacle	24
1.2 Equations intégrales	25
1.2.1 Opérateur à noyau	26
1.2.2 Equations intégrales de Fredholm de deuxième espèce	27
1.2.3 Alternative de Fredholm	28
2 Problème de diffraction dans un demi plan perturbé	32
2.1 Position du problème direct	33
2.2 Unicité	36
2.3 Existence	37

TABLE DES MATIÈRES

2.3.1	Solution fondamentale	37
2.3.2	Equation intégrale	37
2.3.3	Stabilité	38
2.4	Champ lointain	39
2.5	Fonction de Green perturbée	41
2.6	Exemple numérique	44
3	Problème inverse	48
3.1	Introduction	48
3.2	Unicité	49
3.3	Algorithme de reconstruction :	51
3.4	Dérivée de Fréchet	52
3.5	Approximation numérique	58
3.6	Exemples numériques	59
	Conclusion	66
A	Méthode de Nyström	67
A.1	Méthode de quadrature	67
A.2	Méthode de Nyström	69
A.3	Cas d'un noyau faiblement singulier	70
B	Problèmes mal posés et régularisation	73
B.1	Problème mal posé et régularisation	73
B.2	Dérivée de Fréchet	75
C	Méthode des moindres carrés	77
C.1	Moindres carrés linéaires	78

TABLE DES MATIÈRES

C.1.1	Méthode des équations normales	78
C.1.2	Décomposition en valeurs singulières SVD	79
C.2	Moindres carrés non-linéaires	79
C.2.1	Méthode de Gauss-Newton	80
C.2.2	Méthode de Levenberg-Marquardt	81
D	Copie de l'article publié	83
	Bibliographie	99

Introduction générale

Les ondes électromagnétiques et acoustiques sont très largement utilisées dans de nombreux domaines pour identifier la forme et les propriétés physiques d'objets non accessibles directement. Nous pensons par exemple à l'imagerie médicale, à l'exploration du sous-sol ou encore à l'imagerie par ondes radar. Le principe général des méthodes utilisées est le suivant : on envoie une onde dans le milieu que l'on souhaite étudier, ce milieu répond à l'excitation en produisant une onde diffractée et on déduit de la mesure de ce champ diffracté des informations sur le domaine ausculté. Nous parlons alors de *problème inverse* en opposition avec le problème direct qui consiste à modéliser et à simuler numériquement le champ diffracté produit par un milieu connu sollicité par une onde incidente connue elle aussi. Lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente est de l'ordre de la taille de l'objet inspecté, le problème inverse est souvent mal posé dans le sens où une faible erreur de mesure (sur le champ diffracté) peut engendrer une erreur importante sur la reconstruction de l'objet étudié ou de ses propriétés physiques.

Dans cette thèse on étudie un problème de diffraction d'ondes acoustiques par une surface plane localement perturbée, il s'agit d'un obstacle non borné. La perturbation peut être une rugosité dans un matériau réfléchissant, une interface entre 2 milieux différents ou la topographie du sol [8, 2, 25]. Ce problème a été étudié par Yan [29] lorsque la perturbation est concave i.e paramétrée par une fonction $f > 0$. Ce problème peut être reformulé par

prolongement symétrique comme un problème extérieur (diffraction par un obstacle borné). Ce cas a été étudié aussi par Kress et Tran [24] mais du point de vue numérique.

À notre connaissance le problème n'a pas été étudié lorsque la perturbation est rugueuse (f change de signe) ce qui fait qu'on ne peut pas se ramener à un problème d'obstacle borné. Notre problème présente des difficultés supplémentaires en raison du caractère arbitraire de f qui change de signe. Notre objectif est de généraliser les travaux précédents sans passer par les résultats connus du problème inverse associé à l'obstacle. En fait, notre problème ressemble beaucoup au problème de la diffraction par une fissure [20, 26, 5].

Plus précisément, on va donner la formulation de notre problème direct.

- Soit γ un arc du plan \mathbb{R}^2 qui est le graphe d'une fonction régulière de classe C^2 , $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(-a) = f(a) = 0$.
- On note $\Gamma_- = \{(x_1, 0); x_1 < -a\}$ et $\Gamma_+ = \{(x_1, 0); x_1 > a\}$.
- Soit Ω le domaine de \mathbb{R}^2 au-dessus de la frontière $\Gamma = \Gamma_- \cup \gamma \cup \Gamma_+$.

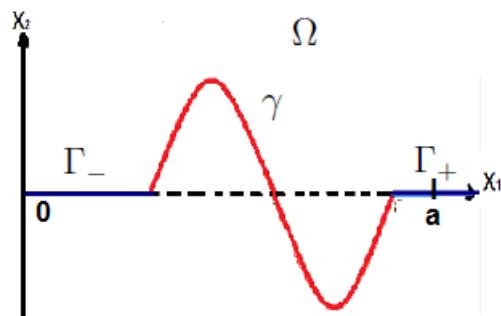


FIGURE 1 – Géométrie du problème .

Notre problème direct consiste à chercher une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (1)$$

On suppose que l'onde diffractée u^s ($u = u^s + u_0$) satisfait la condition de radiation de Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right) = 0, \quad r = |x|, \quad (2)$$

uniformément pour tout $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$. De plus, pour une onde incidente plane donnée $u_i = e^{-ikd \cdot x}$, $d = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ le champ total $u = u_0 + u^s$ satisfait la conditions de Dirichlet

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3)$$

Ici, $u_0 = u_i + u_r$ où $u_r = -e^{-ikd' \cdot x}$, $d' = (\cos \theta, -\sin \theta)$ est l'onde réfléchiée par la surface plane.

Dans cette thèse, on va utiliser la méthode des équations intégrales qui est un outil puissant pour la résolution du problème direct (1)-(3). Cela consiste à formuler le problème aux limites sous la forme d'une équation intégrale posée sur l'arc γ . Deux approches de la théorie des équations intégrales sont possibles : la formulation directe et la formulation indirecte qu'on va adopter. La formulation directe repose sur le second théorème de Green, l'inconnue dans l'équation intégrale est la trace du champ ou de sa dérivée normale selon qu'on considère la condition au bord de Dirichlet ou de Neumann. Dans la formulation indirecte, on cherche la solution sous forme d'un potentiel, l'inconnue est une densité qui n'a pas de sens physique, puis on montre l'équivalence entre le problème aux limites et l'équation intégrale [9, 21]. Ces deux approches font intervenir la fonction de Green qui représente l'influence d'une source ponctuelle située au point Y sur un point X . L'avantage de cette méthode est de réduire la dimension du problème et parfois (ce qui correspond à la diffraction par un obstacle borné) de remplacer un problème sur un domaine non borné par un autre posé sur un domaine borné.

Dans le problème en domaine non borné on impose souvent une condition de rayonnement qui fixe le comportement du champ à l'infini. Cette condition à l'infini n'apparaît pas directement au niveau de l'équation intégrale, elle est prise en compte par la fonction de Green d'un problème de référence (non perturbé). En revanche, sur le plan mathématique, il est important de formuler l'équation intégrale dans un cadre fonctionnel et de s'intéresser aux propriétés d'existence et d'unicité. La résolution du problème (direct et inverse) de la diffraction d'ondes par un obstacle plongé dans l'espace où le demi-espace homogène est bien connue dans la littérature. On peut citer par exemple le monographe de Colton et Kress [10] et les articles [17, 18]. Par contre, le phénomène de diffraction d'onde par un obstacle non borné pose des difficultés d'analyse mathématique et numérique. Pour la diffraction par une surface rugueuse, on peut citer les travaux de Chandler-Wilde et ses collaborateurs [30, 28] et [11] en acoustique et électromagnétisme.

Cette thèse est composée de deux parties.

- 1- Dans *la première partie*, qui concerne la question d'existence et d'unicité du problème de diffraction, on cherche la solution sous la forme d'un potentiel double couche. En utilisant comme solution fondamentale la fonction de Green pour le demi-plan avec la condition de Dirichlet, on est amené à résoudre une équation intégrale sur l'arc γ (la perturbation). La connaissance de la densité permet d'obtenir le comportement asymptotique de l'onde diffracté et le champ lointain. On a consacré un paragraphe à la fonction de Green perturbée. On montre des résultats de simulation numérique.
- 2- Dans *la deuxième partie*, On étudie un problème inverse qui consiste à déterminer l'arc γ à partir de la connaissance du champ lointain de l'onde diffractée. On démontre un théorème d'unicité : l'arc γ est déterminé de manière unique à partir du champ lointain. Nous proposons un algorithme de reconstruction basé sur la méthode de Gauss-Newton [22]. Nous montrons quelques résultats numériques qui illustrent l'algorithme d'inversion.

Publications issues de cette thèse : la partie théorique est publiée dans le journal [3], les résultats numériques ont été présentés à la conférence sur les ondes [7].

Chapitre 1

Rappels

1.1 Equation de Helmholtz

L'équation de Helmholtz constitue le modèle le plus simple pour l'étude de la diffraction ou de la propagation des ondes en régime harmonique. Dans ce chapitre nous commencerons par montrer qu'elle régit le comportement des petites perturbations d'un fluide compressible autour de l'équilibre, nous étudierons ensuite certaines solutions particulières : les ondes planes et les ondes sphériques (solutions radiales).

1.1.1 Un bref rappel de mécanique des fluides

Considérons un écoulement irrotationnel de fluide parfait ; la vitesse est notée $U(x; t)$, la pression $P(x; t)$ et la masse volumique $R(x; t)$. Les équations suivantes sont classiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \operatorname{div}(RU) = 0 : \text{équation de continuité,} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\|U\|^2}{2} + \frac{\operatorname{grad} P}{R} = 0 : \text{équation d'Euler,} \end{cases} \quad (1.1)$$

1.1 Equation de Helmholtz

elles seront complétées par une *équation d'état*, manifestant l'intervention de la thermodynamique, que nous écrirons

$$P = G(R).$$

Il s'agit d'un système non-linéaire que nous allons simplifier en supposant que la vitesse, ainsi que les fluctuations de pression et de densité sont faibles.

Linéarisation

Considérons donc l'état de repos comme caractérisé par :

$$U = 0, \quad R = \rho_0 \text{ et } P = p_0 \text{ avec } p_0 = G(\rho_0).$$

Les quantités ρ_0 et p_0 sont supposées constantes dans tout l'espace. Linéariser les équations (1.1) ainsi que l'équation d'état autour du repos consiste en fait à poser

$$U = \varepsilon \mathcal{U} + O(\varepsilon^2), \quad R = \rho_0 + \varepsilon \mathcal{R} + O(\varepsilon^2) \text{ et } P = p_0 + \varepsilon \mathcal{P} + O(\varepsilon^2),$$

où \mathcal{U} , \mathcal{R} et \mathcal{P} sont indépendants de ε , petit paramètre qui représente l'amplitude de la perturbation. On remplace ensuite les diverses quantités par leurs expressions et on néglige les termes du second ordre ; on aboutit à

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathcal{U} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathcal{P} &= 0, \end{cases}$$

ainsi que, en notant $c_0^2 = G'(\rho_0)$ (la thermodynamique nous assure que $G'(p)$ est toujours une quantité positive),

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} c_0^2.$$

1.1 Equation de Helmholtz

En éliminant par exemple \mathcal{R} , on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathcal{U} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathcal{P} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

La quantité c_0 est la *vitesse du son* dans le fluide, nous allons voir que c'est en fait la vitesse de phase des ondes sonores.

L'équation des ondes

On peut aller plus loin et ne conserver qu'une inconnue scalaire. Si on dérive par rapport au temps la première des équations (1.2) et si on prend la divergence de la seconde, on aboutit à *l'équation des ondes* :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \mathcal{P}. \quad (1.3)$$

Un autre point de vue consiste à remarquer que $\rho_0 \partial(\operatorname{rot} \mathcal{U})/\partial t = 0$, à faire l'hypothèse que l'écoulement est irrotationnel à l'instant initial, et à utiliser le fait que *la vitesse dérive alors d'un potentiel*, soit \mathcal{F} , c'est-à-dire que

$$\mathcal{U} = \operatorname{grad} \mathcal{F}. \quad (1.4)$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \rho_0 \Delta \mathcal{F} &= 0, \\ \operatorname{grad}(\rho_0 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{P}) &= 0; \end{aligned}$$

1.1 Equation de Helmholtz

on constate donc que $\rho_0 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{P}$ ne dépend que du temps. Comme le potentiel des vitesses est défini à une fonction arbitraire du temps additive près, on pourra choisir d'imposer

$$\rho_0 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{P} = 0; \quad (1.5)$$

il ne reste plus qu'à dériver cette dernière équation par rapport au temps pour éliminer la pression, ce qui conduit à

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \mathcal{F}. \quad (1.6)$$

Les conditions aux limites

A ce stade nous nous contenterons de remarquer que les conditions aux limites naturellement associées à (1.3) et (1.6) ne sont pas les mêmes : les conditions dites de *Dirichlet* sont des conditions de *pression imposée* pour (1.3), tandis que les conditions dites de *Neumann* sont des conditions de *vitesse normale* imposée pour (1.6).

1.1.2 L'équation de Helmholtz

Si un système régi par l'équation des ondes évolue à partir du repos sous l'action d'une excitation périodique en temps, et si le fluide s'étend au complémentaire d'un domaine borné fixe, on peut démontrer, et c'est là le principe d'amplitude limite, qu'asymptotiquement sa solution devient elle-même périodique en temps, de même période. La démonstration de ce principe nécessite des développements qui sortent du cadre de cette thèse, et nous nous contenterons donc de rechercher des solutions de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, t) &= \Re(p(x)e^{-i\omega t}), \\ \mathcal{F}(x, t) &= \Re(\varphi(x)e^{-i\omega t}), \\ \mathcal{U}(x, t) &= \Re(u(x)e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.1 Equation de Helmholtz

Les quantités p , φ et u apparaissant dans les équations précédentes sont des fonctions à *valeurs complexes*, a priori inconnues, le principe d'amplitude limite imposant la *pulsation* ω de la solution mais non sa *phase*.

Remarquons tout d'abord qu'en vertu de l'équation (1.5), on a

$$\Re\{(-i\omega\rho_0\varphi + p)e^{-i\omega t}\} = 0, \quad \forall t, \quad (1.8)$$

et par conséquent,

$$p = i\omega\rho_0\varphi.$$

On est donc conduit à noter ψ l'une des deux quantités p ou φ , la détermination de l'une à partir de l'autre ne présentant aucune difficulté. De l'une quelconque des équations (1.3) ou (1.6), on déduit donc que

$$\Re\{(-i\omega\rho_0\psi + c_0^2\Delta\psi)e^{-i\omega t}\} = 0, \quad \forall t,$$

et par conséquent, *l'équation de Helmholtz* :

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad \text{où } k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}. \quad (1.9)$$

1.1.3 Les ondes planes

Avant même de tenter l'étude de l'équation (1.9), il est instructif d'en calculer quelques solutions simples ; nous les obtiendrons en réduisant le nombre de variables indépendantes, de façon à nous ramener à la résolution d'une équation différentielle ordinaire.

Cherchons tout d'abord des solutions ne dépendant que de la coordonnée x_1 ; d'après (1.9), on aura $\psi''(x_1) + k^2\psi(x_1) = 0$. Il s'agit là d'une équation différentielle linéaire du second ordre ; ses solutions forment donc un espace vectoriel de dimension deux, elles sont données

1.1 Equation de Helmholtz

par

$$\psi(x) = Ae^{ikx_1} + Be^{-ikx_1}.$$

Il apparaît déjà dans cette situation très simple l'existence de deux types d'ondes, elles se distinguent par leur sens de propagation. Pour fixer les idées, supposons par exemple que nous nous intéressons à la pression ; on aura

$$\mathcal{P}(x, t) = \Re(\psi(x)e^{-i\omega t}) = \Re(Ae^{i(kx_1 - \omega t)}) + \Re(Be^{i(-kx_1 - \omega t)}).$$

Les ondes du type $Ae^{i(kx_1 - \omega t)}$, par exemple, sont dites *progressives* dans la direction des x_1 croissants ; en effet si $ks - \omega t$ reste constant, alors s est une fonction croissante du temps. Remarquons également que modifier l'argument de la constante A (sans modifier son module) revient simplement à effectuer une translation dans la direction x_1 . Plus généralement, une onde plane se propageant dans la direction ν sera de la forme suivante :

$$\psi(x) = Ae^{ikx \cdot \nu} \text{ où } |\nu| = 1. \quad (1.10)$$

1.1.4 Les ondes radiales

Les coordonnées polaires sont définies par

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta, \end{cases}$$

avec $r \geq 0$, et $\theta \in]-\pi, +\pi]$. Posant $\tilde{\psi}(r, \theta) = \psi(x_1, x_2)$, on aura

$$\Delta\psi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \theta^2}\right)(r, \theta),$$

1.1 Equation de Helmholtz

soit, plus brièvement :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.11)$$

Si on cherche une solution de l'équation de Helmholtz, indépendante de θ , en omettant le signe \sim , on obtient

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) + k^2 \psi = 0.$$

Posons maintenant $z = kr$ et $u(z) = \psi(r)$, on aura $\frac{d\psi}{dr} = k \frac{du}{dz}$ et par conséquent,

$$\frac{k}{r} \left(z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} \right) + k^2 u = 0.$$

On en déduit que u vérifie l'équation de Bessel d'ordre 0 :

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + z^2 u = 0; \quad (1.12)$$

il s'agit d'une équation linéaire du second ordre, à *coefficients variables* dont les solutions sont largement étudiées (voir par exemple le manuel de M. Abramowitz et A. Stegun [1]). Elles sont de la forme $u(z) = \lambda H_0^{(1)}(z) + \mu H_0^{(2)}(z)$, où $H_0^{(1)}(z)$ et $H_0^{(2)}(z)$ désignent respectivement *les fonctions de Hankel* de première et de seconde espèce, d'ordre 0. On aura donc

$$\psi(r) = \lambda H_0^{(1)}(kr) + \mu H_0^{(2)}(kr). \quad (1.13)$$

1.1.5 La condition de Sommerfeld

Les solutions radiales que nous venons de calculer forment un espace de dimension deux ; nous allons voir qu'il est là encore possible de distinguer deux catégories de solutions qui correspondent respectivement à des ondes *sortantes* (ou divergentes) et des ondes *entrantes* (ou convergentes). Cette distinction repose sur leurs comportements asymptotiques respectifs

1.1 Equation de Helmholtz

au voisinage de l'infini (lorsque $r \rightarrow +\infty$) :

$$\psi(r)e^{-i\omega t} \sim f(r)e^{ik(r-ct)} \text{ (onde sortante),}$$

ou

$$\psi(r)e^{-i\omega t} \sim f(r)e^{-ik(r+ct)} \text{ (onde entrante),}$$

c représentant la vitesse de propagation de l'onde. Nous allons mettre en évidence une condition qui permet de vérifier si une solution se comporte comme une onde divergente. Rappelons le premier terme du développement asymptotique des fonctions de Hankel pour des arguments réels assez grands :

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\frac{\pi}{4})} + O(z^{-\frac{3}{2}}), \\ H_0^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\frac{\pi}{4})} + O(z^{-\frac{3}{2}}). \end{cases} \quad (1.14)$$

On en déduit que les ondes radiales divergentes sont données par

$$\psi(r) = \lambda H_0^{(1)}(kr). \quad (1.15)$$

En fait, et à ce stade ce n'est encore qu'une remarque, la même conclusion s'obtient à partir de l'hypothèse suivante, dite *condition de rayonnement sortant* ou *condition de Sommerfeld* :

$$\frac{d\psi}{dr} - ik\psi = O\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\right), r \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

Autrement dit, les seules ondes radiales qui satisfont cette condition sont les ondes divergentes obtenues en (1.15).

1.1 Equation de Helmholtz

Explication. Rappelons tout d'abord que

$$\frac{d}{d\psi} H_0^{(j)}(z) = -H_1^{(j)}(z), \quad j = 1, 2,$$

et

$$\begin{cases} H_1^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{3\pi}{4})} + O(z^{-\frac{3}{2}}), \\ H_1^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{3\pi}{4})} + O(z^{-\frac{3}{2}}). \end{cases} \quad (1.17)$$

On aura alors d'une part

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dr} &= \lambda \frac{d}{dr} H_0^{(1)}(kr) + \mu \frac{d}{dr} H_0^{(2)}(kr) \\ &= -k(\lambda H_1^{(1)}(kr) + \mu H_1^{(2)}(kr)) \\ &= -k \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{\frac{1}{2}} (\lambda e^{i(kr - \frac{3\pi}{4})} \mu + e^{-i(kr - \frac{3\pi}{4})}) + o\left(\frac{1}{kr}\right), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$ik\psi = ik \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{\frac{1}{2}} (\lambda e^{i(kr - \frac{3\pi}{4})} + \mu e^{-i(kr - \frac{3\pi}{4})}) + o\left(\frac{1}{kr}\right).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dr} - ik\psi &= -k \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{\frac{1}{2}} (\lambda e^{ikr} (e^{-\frac{3i\pi}{4}} + ie^{-\frac{i\pi}{4}}) + \mu e^{-ikr} (e^{\frac{3i\pi}{4}} + ie^{\frac{i\pi}{4}})) + o\left(\frac{1}{kr}\right), \\ &= -2i\mu k \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} + o\left(\frac{1}{kr}\right); \end{aligned}$$

la condition de Sommerfeld implique donc $\mu = 0$.

Remarque 1. (i) *La condition de Sommerfeld peut s'exprimer sous la forme apparemment plus précise suivante :*

$$\frac{d\psi}{dr} - ik\psi = O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

1.1 Equation de Helmholtz

(ii) Nous utiliserons dans la suite de la condition de Sommerfeld sous la forme 'faible' (indépendante de la dimension de l'espace) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\|x\|=R} \left| \frac{d\psi}{dr} - ik\psi \right|^2 d\gamma = 0. \quad (1.19)$$

En effet, on vérifie immédiatement que toute fonction qui vérifie (1.18) ou (1.19).

1.1.6 Les problèmes de diffraction par un obstacle

Donnons nous une onde plane ψ_I (voir (1.9)), notre objectif sera d'étudier la perturbation ψ de cette onde plane induite par la présence d'un obstacle de frontière Γ . Le champ acoustique total sera notée $\psi_T = \psi_I + \psi$, et vérifiera l'équation de Helmholtz dans le domaine Ω extérieur à l'obstacle ; le champ diffracté vérifiera la condition de rayonnement. Selon que ψ représente la pression ou le potentiel des vitesses, on sera amené à résoudre deux principaux types de problèmes :

Le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\psi_T + k^2\psi_T = 0 \text{ dans } \Omega : \text{équation de Helmholtz,} \\ \psi_T = 0, \text{ sur } \Gamma : \text{pression imposée,} \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\|x\|=R} \left| \frac{\partial\psi}{\partial n} - ik\psi \right|^2 d\gamma = 0, \text{ condition de rayonnement.} \end{cases} \quad (1.20)$$

Le problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta\psi + k^2\psi = 0 \text{ dans } \Omega : \text{équation de Helmholtz,} \\ \frac{\partial\psi_T}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Gamma : \text{glissement sur la paroi,} \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\|x\|=R} \left| \frac{\partial\psi}{\partial n} - ik\psi \right|^2 d\gamma = 0, \text{ condition de rayonnement.} \end{cases} \quad (1.21)$$

1.2 Equations intégrales

Remarque 2. (i) *L'onde incidente étant progressive, elle ne vérifie pas la condition de rayonnement, et par conséquent ψ_T non plus.*

(ii) *Dans les deux problèmes ci-dessus, on peut éliminer le potentiel total ψ_T au profit de ψ . En effet, le potentiel de l'onde incidente étant lui-même solution de l'équation de Helmholtz dans tout l'espace, on peut se ramener à résoudre un problème comportant une condition aux limites nonhomogène sur la frontière Γ de l'obstacle :*

$$\begin{cases} \Delta\psi_T + k^2\psi_T = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \psi \text{ ou } \frac{\partial\psi}{\partial n} \text{ donné sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\|x\|=R} \left| \frac{\partial\psi}{\partial n} - ik\psi \right|^2 d\gamma = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

(iii) *Notons pour terminer que cette dernière formulation comprend aussi une autre catégorie de problèmes, souvent appelés problèmes de rayonnement pur (dans la mesure où il n'y a plus de champ incident) : c'est par exemple le cas d'une structure dont la paroi Γ vibre à une fréquence donnée (un haut-parleur) ; la résolution de (1.22) revient alors à déterminer le champ acoustique rayonnée par cette structure.*

1.2 Equations intégrales

Les équations intégrales ont un caractère très différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple de diffusion). La principale source d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation. A la différence du transfert radiatif, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrits à l'aide d'équations mettant en jeu un simple champ scalaire. Les lois de conservations deviennent alors plus complexes et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'intégrales étendues à toutes la surface considérée.

1.2 Equations intégrales

1.2.1 Opérateur à noyau

Dans la suite de cette partie, on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C(D)$ des fonctions continues de D dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Dans notre étude, l'ensemble D sera un compact $D \subset \mathbb{R}^N$. Le principal intérêt de l'espace $C(D)$ est de disposer d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x)g(x)dx. \quad (1.23)$$

Notre espace $C(D)$ est muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, x \in D\}.$$

On aura parfois besoin de se placer dans l'espace complété de $C(D)$ pour la norme du produit scalaire, c'est à dire l'espace de Hilbert $H = L^2(D)$, espace des fonctions mesurables de D dans \mathbb{R} de module carré intégrable.

On va considérer des équations mettant en jeu des intégrales, sous la forme d'un opérateur linéaire $A : C(D) \rightarrow C(D)$. Pour le définir, on se donne une fonction $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, continue, ce qui permet de définir notre opérateur à noyau par la formule :

$$\begin{aligned} A : f \in C(D) &\rightarrow Af \in C(D), \\ (Af)(x) &= \int_D f(y)K(x, y)dy. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Cet opérateur est continu, de norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(C(D), C(D))} \leq \max\left\{\int_D |K(x, y)|dy, x \in D\right\}.$$

Opérateur adjoint

1.2 Equations intégrales

Definition 1.2.1. OPÉRATEURS ADJOINTS. *On considère $C(D)$ muni du produit scalaire identique à celui défini sur $L^2(D)$, à savoir :*

$$\forall (f, g) \in C(D)^2, \langle f, g \rangle = \int_D f(x)g(x)dx. \quad (1.25)$$

Ce produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité, ainsi que celle d'adjoint. On dit que $A : C(D) \rightarrow C(D)$ et $B : C(D) \rightarrow C(D)$ sont adjoints s'ils vérifient :

$$\forall (f, g) \in C(D)^2, \langle Af, g \rangle = \langle f, Bg \rangle. \quad (1.26)$$

Si un opérateur $A : C(D) \rightarrow C(D)$ admet un adjoint B , alors cet adjoint est unique et A et B sont linéaires.

Théorème 1.2.1. ADJOINT D'UN OPÉRATEUR À NOYAU. *On considère un opérateur à noyau A construit à partir d'un noyau K continu sur $D \times D$ par la formule :*

$$\forall x \in D, (A\varphi)(x) = \int_D K(x, y)\varphi(y)dy. \quad (1.27)$$

Alors l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint B pour le produit scalaire usuel de L^2 , défini par :

$$\forall x \in D, (A\psi)(x) = \int_D K(y, x)\psi(y)dy \quad (1.28)$$

Démonstration. Ce théorème est démontré dans [21]. □

1.2.2 Equations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

L'équation qui va nous intéresser dans la suite de cette thèse est une équation de Fredholm de deuxième espèce, pour $f \in C(D)$ et A un opérateur à noyau continu comme celui défini

1.2 Equations intégrales

en (??), trouver $\varphi \in C(D)$ tel que :

$$\varphi(x) = f(x) + A\varphi(x), \quad (1.29)$$

l'opérateur $I - A$ est supposé inversible, c'est à dire que l'équation admet une unique solution donnée par $\varphi = (I - A)^{-1}f$.

1.2.3 Alternative de Fredholm

Definition 1.2.2. OPÉRATEUR COMPACT. *Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$ entre deux espaces normés est dit compact si l'image de la boule unité B_X de X est relativement compacte, i.e si $\overline{A(B_X)}$ est compacte dans Y . Ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée (φ_n) de X , on peut extraire de $(A\varphi_n)$ une suite convergente dans Y .*

Voici le principal résultat pour l'étude des équations intégrales. Sa démonstration se fait facilement à l'aide du théorème d'Ascoli, qui donne une condition pour qu'une famille d'opérateurs soit relativement compacte dans l'ensemble des applications continues, $(C(D), \|\cdot\|)$.

Théorème 1.2.2. COMPACITÉ DES OPÉRATEURS À NOYAU. *L'opérateur intégral à noyau continu défini en (1.24) est compact sur $(C(D), \|\cdot\|_\infty)$.*

Nous allons maintenant présenter les résultats de la théorie de *Riesz* sur les opérateurs compacts, qui dit essentiellement que ces opérateurs se comportent presque comme des opérateurs de dimension finie, dans le sens où les espaces spectraux sont de dimensions finies. Ceci signifie que lorsque l'on perturbe l'identité de l'espace X suivant un opérateur compact A , on obtient un noyau de dimension finie et une image de dimension finie. Pour montrer tout cela, on étudie donc une perturbation du type $L = I - A$, avec A compact, ce qui permet l'étude sans perte de généralité des espaces $Ker(I - \lambda A)$ et $Im(I - \lambda A)$, puisque λA est encore compact. Pour un exposé complet de cette théorie, on pourra se référer à [21], ainsi qu'à [4] pour une présentation plus élémentaire.

1.2 Equations intégrales

Théorème 1.2.3. THÉORÈME DE RIESZ. *On considère un opérateur compact $A : X \rightarrow X$ sur X un espace normé, ainsi que l'opérateur étudié dans le cadre des équations intégrales, à savoir $L = I - A$. Cet opérateur a les propriétés suivantes :*

- $\text{Ker}(L)$ est de dimension finie.
- $\text{Im}(L)$ est un sous-espace fermé de co-dimension finie.
- Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur A tel que :

$$\{0\} = \text{Ker}(L^0) \subsetneq \text{Ker}(L^1) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(L^r) = \text{Ker}(L^{r+1}) = \dots, \quad (1.30)$$

$$X = \text{Im}(L^0) \supsetneq \text{Im}(L^1) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(L^r) = \text{Im}(L^{r+1}) = \dots \quad (1.31)$$

Et on a la somme directe : $X = \text{Ker}(L^r) \oplus \text{Im}(L^r)$.

De plus, on a l'alternative de Fredholm : $\text{Im}(L) = \text{Ker}(L^*)^\perp$, où $K^* : X' \rightarrow X'$ est l'opérateur adjoint de X .

Ce théorème très puissant va nous permettre de donner une caractérisation des solutions des équations de Fredholm du second type :

Corollaire 1. APPLICATION AUX ÉQUATIONS DE FREDHOLM *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur compact continu. Pour $f \in X$, on considère les problèmes :*

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } \varphi - A\varphi = 0. \quad (1.32)$$

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } \varphi - A\varphi = f. \quad (1.33)$$

On a alors l'alternative :

- Si l'équation (1.32) n'a que la solution triviale $\varphi = 0$, alors pour tout $f \in X$, l'équation (1.33) a une unique solution φ . De plus cette solution dépend continûment de f .

1.2 Equations intégrales

- Si l'équation (1.32) a une solution non triviale, alors elle admet un nombre fini m de solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ linéairement indépendantes. Dans ce cas, l'équation (1.33) est soit non solvable, soit ses solutions s'écrivent sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k, \quad (1.34)$$

où $\tilde{\varphi}$ est une solution particulière de (1.33). Le fait que (1.33) soit ou non soluble s'exprime par le fait que $f \in \text{Ker}(L^*)^\perp$, i.e. f doit satisfaire m conditions d'orthogonalité.

Théorème 1.2.4. APPLICATION AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES. On considère les deux équations intégrales homogènes duales l'une de l'autre issues du noyau continu $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, qui sont donc définies par :

$$\text{trouver } \varphi \in C(D) \text{ telle que } \varphi(x) - \int_D K(x, y) \varphi(y) dy = 0. \quad (1.35)$$

$$\text{trouver } \psi \in C(D) \text{ telle que } \psi(x) - \int_D K(y, x) \psi(y) dy = 0. \quad (1.36)$$

On considère, pour $f \in C(D)$ et $g \in C(D)$ les équations intégrales avec seconds membres :

$$\text{trouver } \varphi \in C(D) \text{ telle que } \varphi(x) - \int_D K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (1.37)$$

$$\text{trouver } \psi \in C(D) \text{ telle que } \psi(x) - \int_D K(y, x) \psi(y) dy = g(x). \quad (1.38)$$

Alors on a l'alternative :

- Ou bien les équations (1.35) et (1.36) n'ont que les solutions triviales $\varphi \equiv 0$ et $\psi \equiv 0$, et dans ce cas les équations (1.37) et (1.38) admettent une unique solution $\varphi \in C(D)$ et $\psi \in C(D)$ pour chaque $f \in C(D)$ et $g \in C(D)$.
- Ou bien les équations (1.35) et (1.36) ont le même nombre fini m de solutions linéaire-

1.2 Equations intégrales

ment indépendantes, et dans ce cas, les équations (1.37) et (1.38) sont résolubles si et seulement si pour toute solution φ de (1.35) et toute solution ψ de (1.36) on a :

$$\int_D f(x)\psi(x)dx = \int_D g(x)\varphi(x)dx = 0, \quad (1.39)$$

dans ces conditions, la solution générale de (1.37) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k, \quad (1.40)$$

où $\tilde{\varphi}$ est une solution particulière de (1.37) et les $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq m}$ forment une famille libre de solutions de (1.35).

Chapitre 2

Problème de diffraction dans un demi plan perturbé

Le problème de diffraction des ondes par une surface rugueuse a un intérêt pour les physiciens et mathématiciens appliqués depuis la fin du 19^{ème} siècle (travaux de Rayleigh) en raison d'un grand nombre d'applications en optique, électromagnétisme (radar). Il est important par exemple dans la diffraction des ondes radio sur la surface du sol ou de la mer. Dans cette thèse on considère la diffraction d'onde acoustique harmonique par une surface cylindrique, la section est un demi-plan localement perturbé c'est à dire que la frontière est une droite localement perturbée. L'analyse que nous développons est valable dans le cas où la diffraction est due à une onde incidente plane dirigée vers une surface réfléchissante (voir figure 2.1). Dans ce chapitre, on va étudier un problème de diffraction direct, dans lequel le champ diffracté doit être calculé par la donnée des caractéristiques de la surface diffractante. L'objectif est de montrer grâce à la méthode des équations intégrales et le théorème de Rellich que le problème est bien posé, i.e. on a l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données, on cherche la solution sous la forme d'un potentiel double couche. En utilisant comme solution fondamentale, la fonction de Green pour le demi-plan avec la

2.1 Position du problème direct

condition de Dirichlet, on est amené à résoudre une équation intégrale sur un arc de frontière γ .

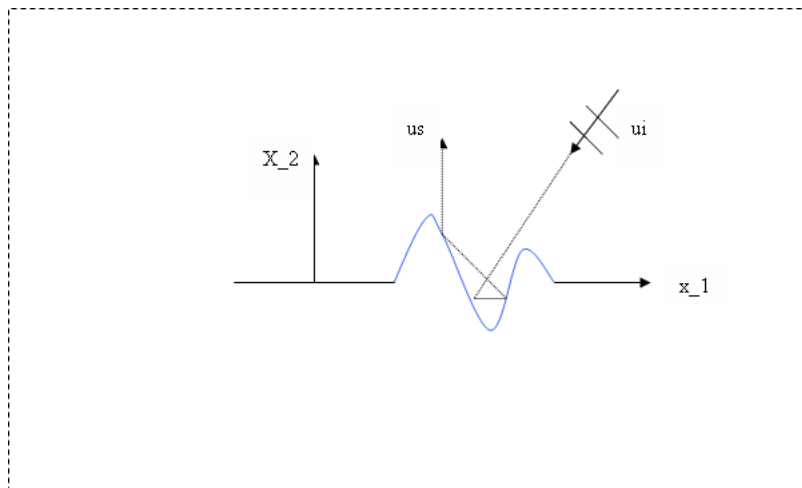


FIGURE 2.1 – Diffraction.

2.1 Position du problème direct

Soit $\Gamma = \{x = (x_1, x_2), x_2 = f(x_1), \text{ tel que } x_1 \in \mathbb{R}\}$ une courbe du plan \mathbb{R}^2 qui est le graphe d'une fonction régulière $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{supp} f \subset [-a, a]$. Γ est l'union de trois portions

$$\Gamma_- = \{(x_1, 0); x_1 \leq -a\}, \Gamma_+ = \{(x_1, 0); x_1 \geq a\} \text{ et } \gamma = \{(x_1, f(x_1)), -a < x_1 < a\}.$$

où γ est un arc ouvert de la normale sortante $n(x) = \frac{(-f'(x_1), 1)}{\sqrt{1+f'(x_1)^2}}$. Le domaine de propagation est noté par Ω , c'est le domaine de \mathbb{R}^2 au dessus de la frontière Γ :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 > f(x_1)\}.$$

Plus précisément, notre problème direct s'énonce comme suit : étant donné une onde incidente plane $u_i = e^{-ikd \cdot x}$, avec le nombre d'onde $k > 0$ et le vecteur unitaire $d = (\cos \theta, \sin \theta)$ où

2.1 Position du problème direct

$\theta \in [0, \pi]$ (la direction de propagation), trouver le champ diffracté u^s tel que le champ total $u^{tot} = u^i + u^r + u^s \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfait l'équation de Helmholtz

$$\Delta u^{tot} + k^2 u^{tot} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.1)$$

On suppose que l'onde diffractée u^s satisfait la condition de radiation de Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad (2.2)$$

le champ total satisfait la condition de Dirichlet

$$u^{tot} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.3)$$

avec $u_r = -e^{-ikd' \cdot x}$, $d' = (\cos \theta, -\sin \theta)$, l'onde réfléchie par la surface plane $\{x_2 = 0\}$.

Notons $u = u^s$, alors la formulation faible du problème (2.1)-(2.3) est alors : trouver $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g \text{ sur } \gamma \text{ et } u = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $g = -(u^i + u^r)$. On peut supposer plus généralement que $g \in \tilde{H}^{1/2}(\gamma)$ ce qui signifie $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $\text{supp } g \subset \bar{\gamma}$.

Maintenant, on va montrer que le problème (2.4) est bien posé, i.e. on a l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée g . Tout d'abord, nous rappelons le théorème de Rellich.

Théorème 2.1.1. (LEMME DE RELLICH) *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'équation*

2.1 Position du problème direct

de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ pour $|x| > R$. Si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u|^2 ds = 0, \quad (2.5)$$

alors $u = 0$ pour $|x| > R$.

Remarquons que : si u est une solution du problème de Dirichlet(ou Neumann) homogène (2.4), alors u satisfait la limite (2.5). Plus précisément on a :

Théorème 2.1.2. *Si u satisfait le problème de Dirichlet ou Neumann homogène (2.4) (i.e. $g = 0$ ou $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ) pour $|x| > R$, alors*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^+} |u|^2 ds = 0.$$

avec $S_R^+ = \{|x| = R, x_2 > 0\}$.

Démonstration. Notons par D_R un disque de centre 0 et de rayon $R \geq R_0$ contenant $\bar{\gamma}$. La première formule de Green appliquée à $\Omega_R = \Omega \cap D_R$ donne :

$$\int_{S_R^+} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds = - \int_{\Omega_R} (k^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) dy, \quad (2.6)$$

ce qui implique que

$$\text{Im} \int_{S_R^+} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds = 0.$$

D'autre part la condition de radiation entraine

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^+} \left(\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - iku \right|^2 ds \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^+} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2\text{Im} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right) ds,$$

on conclut que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^+} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds = 0.$$

□

2.2 Unicité

Théorème 2.2.1. *Le problème (2.4) admet au plus une solution.*

Démonstration. On suppose que u est une solution du problème homogène ($g = 0$). On va définir un prolongement symétrique v comme suit :

$$v(x) = \begin{cases} u(x_1, x_2) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus D_R, \\ -u(x_1, -x_2) & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^2 \setminus D_R. \end{cases} \quad (2.7)$$

où $D_R = D(0, R)$ est un disque de rayon R contenant $\bar{\gamma}$. On conclut que :

- 1- La fonction v vérifie l'équation de Helmholtz pour $|x| > R$ et la condition de radiation de Sommerfeld, i.e. v satisfait

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_R = \mathbb{R}^2 \setminus D_R, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

- 2- Le flux d'énergie à travers la sphère $S_R = S(0, R)$ est nul à l'infini, i.e.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |v|^2 ds = 0. \quad (2.9)$$

Ainsi, d'après le lemme de Rellich 2.1.1, $v(x) = 0$ pour $|x| > R$, ce qui implique que $u = 0$ dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus D_R$. Comme u est analytique dans Ω , alors $u(x) = 0$ dans Ω .

□

Remarque 3. *Si on considère le même prolongement symétrique, on peut montrer de la même manière que la solution du problème (2.4) avec condition de Neumann est unique.*

2.3 Existence

On va utiliser la méthode des équations intégrales pour montrer l'existence du problème (2.4). Le point essentiel des méthodes d'équations intégrales est le théorème de représentation intégrale de la solution. Il permet d'obtenir une expression analytique de l'onde diffractée en fonction d'inconnues définies sur la frontière. Ce théorème de représentation est basé sur la formule de Green connaissant la solution fondamentale.

2.3.1 Solution fondamentale

La solution fondamentale de l'équation des ondes $G_0(x, y)$ sur le demi-plan supérieur et pour un point source $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, est donnée par :

$$G_0(x, y) = \phi(x, y) - \phi(x, y'), \quad y \in \Omega, \quad (2.10)$$

avec

$$\phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|),$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0 et $y' = (y_1, -y_2)$.

2.3.2 Equation intégrale

Cherchons la solution u du problème sous forme d'un potentiel de double-couche de densité φ :

$$u(x) = D\varphi(x) := \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Omega. \quad (2.11)$$

En prenant la trace de (2.11), on obtient l'équation intégrale de deuxième espèce d'inconnue φ

$$\varphi(x) + 2 \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(y)} \varphi(y) ds(y) = \tilde{g}(x), \quad \text{pour } x \in \gamma, \quad (2.12)$$

2.3 Existence

avec $\tilde{g}(x) = -2u_0(x)|_\gamma$. Cette équation est de type de Fredholm, elle s'écrit sous la forme opérationnelle suivante

$$\varphi(x) + K\varphi(x) = \tilde{g}(x), \text{ pour } x \in \gamma, \quad (2.13)$$

l'opérateur K est continu de $\tilde{H}^{1/2}(\gamma) \rightarrow H^{1/2}(\gamma)$ et compact dans $L^2(\gamma)$ (voir [6]).

L'adjoint de K est $K' : \tilde{H}^{-1/2}(\gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\gamma)$ donnée par

$$(K'\psi)(x) = 2 \int_\gamma \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(x)} \psi(y) ds(y), \text{ pour } x \in \gamma,$$

et $\tilde{H}^{-1/2}$ est le dual de $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\gamma) = \{g \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma), \text{ supp } g \subset \bar{\gamma}\}$.

2.3.3 Stabilité

Théorème 2.3.1. *L'équation intégrale (2.13) possède une solution unique dans $L^2(\gamma)$ qui est stable par rapport à la donnée $\tilde{g} \in L^2(\gamma)$.*

Démonstration. Comme K est compact, on a $N(I + K) = N(I + K')$. On applique l'alternative de Fredholm, il suffit de montrer que $N(I + K') = \{0\}$ où K' est l'adjoint de K . Supposons que $\varphi + K'\varphi = 0$ et considérons le potentiel simple couche

$$v(x) = \int_\gamma G_0(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Omega^- = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega.$$

Alors v est solution du problème adjoint à (2.4) suivant :

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = 0. \end{cases}$$

Ce problème (de Neumann) admet au plus une solution d'après la remarque 3, alors $v = 0$

2.4 Champ lointain

dans Ω^- et par suite $S\varphi := v|_{\Gamma} = 0$, $\forall x \in \Gamma$. Comme l'opérateur $S : H^{-1/2}(\gamma) \rightarrow H^{1/2}(\gamma)$ est un isomorphisme [6] ce qui entraîne $\varphi = 0$. L'alternative de Fredholm implique l'existence et l'unicité de la solution de (2.11). De plus la solution dépend continument de g . \square

Utilisant la continuité du potentiel double couche D et la stabilité de l'équation intégrale (2.13), on établit le résultat suivant.

Corollaire 2.3.1. *Le problème (2.4) admet une solution unique $u \in H_{loc}^1(\Omega)$. De plus u satisfait l'estimation*

$$\|u\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C_R \|g\|_{H^{1/2}(\gamma)},$$

où $\Omega_R = \Omega \cap D_R$ pour une certaine constante $C_R \geq 0$ qui dépend seulement de R .

Remarque 4. *D'après la régularité elliptique $u \in H^2(D)$, pour tout $D \subset \Omega$ un sous ensemble relativement compact et l'estimation $\|u\|_{H^2(D)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\gamma)}$ a lieu.*

2.4 Champ lointain

Proposition 2.4.1. *La solution $u(x)$ donnée par (2.11) possède le comportement asymptotique suivant*

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} u_{\infty}(d, \hat{x}) + o\left(\frac{1}{r}\right), \text{ pour } r = \|x\| \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

uniformément pour toutes les directions $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|} = (\cos \phi, \sin \phi)$, avec $u_{\infty}(d, \hat{x}) = u_{\infty}(\theta, \phi)$ appelé amplitude de diffusion (ou champ acoustique lointain) qui est défini pour tout $\theta, \phi \in [0, \pi]$ par :

$$u_{\infty}(d, \hat{x}) = c \int_{\gamma} \frac{\partial G_{\infty}(\hat{x}, y)}{\partial \eta(y)} \varphi(d, y) ds(y), \quad (c = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}}),$$

avec $G_{\infty}(\hat{x}, y) = e^{ik\hat{x}\cdot y} - e^{ik\hat{x}\cdot y'}$ et $\varphi(d, \cdot)$ est la solution de l'équation intégrale (2.13) associée par l'onde incidente $u^i = u^i(d, \cdot)$.

2.4 Champ lointain

Démonstration. Utilisant le comportement asymptôtique de la fonction de Hankel

$$H_n^1(k|x-y|) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2})} + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (n = 0, 1),$$

on déduit que

$$\frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(y)} = \frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi r}} \frac{\partial}{\partial \eta(y)} (e^{ik\hat{x}\cdot y} - e^{ik\hat{x}\cdot y'}) + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

En remplaçant cette expression dans la solution u définie par (2.11), on trouve

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \varphi(y) ds(y) \\ &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \sqrt{\frac{1}{8\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \eta(y)} (e^{ik\hat{x}\cdot y} - e^{ik\hat{x}\cdot y'}) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Alors, le comportement asymptôtique du champ diffracté est donné par :

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} u_{\infty}(d, \hat{x}) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty,$$

uniformément pour toute direction \hat{x} , où le champ lointain $u_{\infty}(d, \hat{x})$ est défini pour $\theta, \phi \in [0, \pi]$, par :

$$u_{\infty}(d, \hat{x}) = c \int_{\gamma} \frac{\partial G_{\infty}(\hat{x}, y)}{\partial \eta(y)} \varphi(d, y) ds(y), \quad (2.15)$$

avec $G_{\infty}(\hat{x}, y) = e^{ik\hat{x}\cdot y} - e^{ik\hat{x}\cdot y'}$. □

Théorème 2.4.1. *Soit u une solution de (2.13). On suppose que le champ lointain est identiquement nul, c-à-d $u_{\infty}(\theta, \phi) = 0$ pour tout $\theta, \phi \in [0, \pi]$, alors $u(x) = 0$ dans Ω .*

Démonstration. A partir de (2.14), on déduit que le flux à travers le demi-cercle S_R^+

$$\int_{S_R^+} |u|^2 ds = \frac{1}{8\pi k} \int_0^{\pi} |u_{\infty}(\theta, \phi)|^2 d\phi + o\left(\frac{1}{R}\right).$$

avec $S_R^+ = \{|x| = R; x_2 \geq 0\}$. Si $u_{\infty}(\theta, \phi) \equiv 0$, le théorème de Rellich entraîne $u(x) = 0$ pour

2.5 Fonction de Green perturbée

$|x| > R$. Du principe de prolongement unique on déduit $u(x) = 0$ dans Ω . \square

2.5 Fonction de Green perturbée

Pour $x, y \in \Omega$, la fonction de Green $G(x, y)$ du problème (2.4) est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta_x G + k^2 G = \delta(x - y) & \text{dans } D'(\Omega), \\ G = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial G}{\partial r} - ikG = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & (r = |x|). \end{cases} \quad (2.16)$$

Nous décomposons G sous la forme suivante

$$G(x, y) = G_0(x, y) + G^{(r)}(x, y)$$

où $G(x, y)$ est la solution fondamentale du problème non perturbé. Ainsi, $G^{(r)}$ est le champ diffracté associé au champ incident $u^i = -G_0(x, y)$.

Maintenant, on va utiliser la méthode des équations intégrales. On peut représenter $G^{(r)}(x, y)$ sous forme d'un potentiel de double couche de densité φ

$$G^{(r)}(x, y) = \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, z)}{\partial \eta(z)} \varphi(z, y) ds(z), \quad x \in \Omega, \quad (2.17)$$

on obtient l'équation intégrale de deuxième espèce d'inconnue φ suivante

$$\varphi(x, y) + 2 \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, z)}{\partial \eta(y)} \varphi(z, y) ds(z) = -2G_0(x, y), \quad \text{pour } x \in \gamma, \quad (2.18)$$

Ici, y joue le rôle d'un paramètre. On peut écrire l'équation (2.18) sous forme opérationnelle suivante

$$\varphi + K\varphi = -2G_0,$$

2.5 Fonction de Green perturbée

Comme $I + K$ est inversible, on peut écrire

$$\varphi(x, y) = -2(I + K)^{-1}G_0(x, y). \quad (2.19)$$

Utilisant la formule asymptôtique suivante

$$H_0^1(k|x - y|) = \sqrt{\frac{1}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} e^{ikx \cdot \hat{y}} + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad r = |y| \rightarrow \infty, \quad (2.20)$$

on déduit le lemme suivant.

Lemme 2.5.1. *La fonction $G_0(x, y)$ admet le comportement asymptôtique suivant*

$$G_0(x, y) = \sqrt{\frac{2}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} G_0^\infty(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |y| \rightarrow \infty, \quad (2.21)$$

uniformément pour tout $\hat{y} = (\cos \theta, \sin \theta)$, avec $G_0^\infty(x, \hat{y})$ qui est donné par

$$G_0^\infty(x, \hat{y}) = u_0(x, \hat{y}) := e^{-ikx \cdot \hat{y}} - e^{-ikx' \cdot \hat{y}}.$$

Démonstration. On a

$$G_0(x, y) = \phi(x, y) - \phi(x', y).$$

D'après la formule asymptôtique, (2.20) $G_0(x, y)$ possède le comportement

$$G_0(x, y) = \sqrt{\frac{2}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} (e^{-ikx \cdot \hat{y}} - e^{-ikx' \cdot \hat{y}}) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |y| \rightarrow \infty.$$

Notons $G_0^\infty(x, \hat{y}) := e^{-ikx \cdot \hat{y}} - e^{-ikx' \cdot \hat{y}}$. Alors,

$$G_0(x, y) = \sqrt{\frac{2}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} G_0^\infty(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |y| \rightarrow \infty.$$

2.5 Fonction de Green perturbée

□

Théorème 2.5.1. (RELATION DE RÉCIPROCITÉ) *La fonction $G^{(r)}(x, y)$ admet le comportement asymptotique suivant*

$$G^{(r)}(x, y) = \sqrt{\frac{8}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} u^s(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right), r = |y| \rightarrow \infty,$$

où $u^s(x, \hat{y})$ est l'onde diffractée associée à l'onde incidente $u_i(x, \hat{y}) = e^{-ikx \cdot \hat{y}}$.

Démonstration. D'après les équations (2.19) et (2.21), nous avons

$$\varphi(x, y) = 2\sqrt{\frac{2}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \psi(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

avec $\psi(x, \hat{y}) = (I + K)^{-1} G_0^\infty(x, \hat{y})$ est une solution de

$$\psi(x, \hat{y}) + K\psi(x, \hat{y}) = 2G_0(x, y),$$

avec (2.17), on conclut que

$$G^{(r)}(x, y) = \sqrt{\frac{8}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_\gamma \frac{\partial G_0(x, z)}{\partial \eta(z)} \psi(z, \hat{y}) ds(z) + o\left(\frac{1}{r}\right), r = |y| \rightarrow \infty.$$

Alors,

$$G^{(r)}(x, y) = \sqrt{\frac{8}{k\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} u^s(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

où u^s est la solution de (2.4) de donnée au bord $g = e^{-ikx \cdot \hat{y}}$.

□

2.6 Exemple numérique

Pour chercher la solution numérique, on paramétrise l'équation intégrale (2.13). Pour $-a < t < a$ et $f \in C^2[-a, a]$, $f(-a) = f(a) = 0$, on peut écrire l'opérateur

$$K_f(\varphi)(t) = \int_{-a}^a k_f(t, s)\psi(s)ds, \quad \psi(s) = \varphi(s, f(s)), \quad (2.22)$$

avec le noyau k_f donné par

$$k_f(t, s) = F(kr_+(t, s))D_+(t, s) + F(kr_-(t, s))D_-(t, s), \quad (2.23)$$

où

$$r_{\pm}(t, s) = \sqrt{(t-s)^2 + (f(t) \mp f(s))^2},$$

et

$$D_{\pm}(t, s) = f'(s)(s-t) + (f(t) \pm f(s)); \quad F(kr_{\pm}) = \frac{H_1^1(kr_{\pm})}{kr_{\pm}}.$$

Le noyau a une singularité pour $t = s$

$$k(t, s) = k_0(t, s) \ln 2|t-s| + k_1(t, s)$$

avec $k_0(t, s) = -\frac{k}{\pi} \frac{J_1(kr_-(t, s))}{r_-(t, s)}$. $D_-(t, s)$ et $k_1(t, s)$ sont deux fonctions continues.

Pour la résolution numérique de l'équation intégrale (2.13), on utilise une méthode de collocation basée sur une interpolation trigonométrique qui discrétise l'opérateur intégral à travers la formule de quadrature. Plus précisément, nous appliquons *la méthode de Nyström* (voir Annexe A). L'idée consiste à remplacer $t = \cos \tau$ et $s = \cos \sigma$ et utiliser l'identité

$$\ln 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 = \ln 4 \sin^2 \left(\frac{\tau - \sigma}{2} \right) + \ln 4 \sin^2 \left(\frac{\tau + \sigma}{2} \right).$$

2.6 Exemple numérique

Ainsi, on est conduit à l'intégrale suivante

$$\int_0^\pi \ln 4 \sin^2 \left(\frac{\tau - \sigma}{2} \right) \psi(\sigma) d\sigma,$$

qui est calculée de manière exacte pour les fonctions trigonométrique $\cos m\sigma$, $m \in \mathbb{N}$.

Exemple 1. On illumine la frontière par une source ponctuelle, la réponse n'est autre que la fonction de Green (perturbée). Les figures suivantes montrent le diagramme de rayonnement (représentation polaire du champ lointain) et le champ proche (au voisinage de la perturbation).

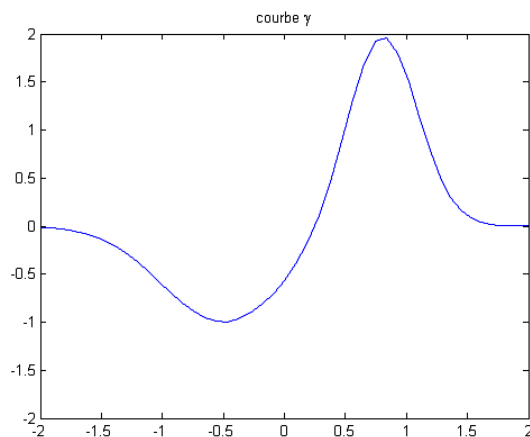


FIGURE 2.2 – Courbe γ .

Exemple 2. On illumine la frontière par une onde plane avec un angle θ et un nombre d'onde k .

2.6 Exemple numérique

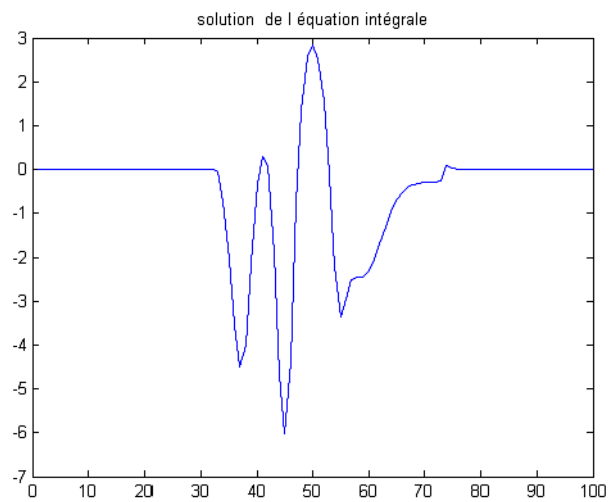


FIGURE 2.3 – Exemple 1. Densité.

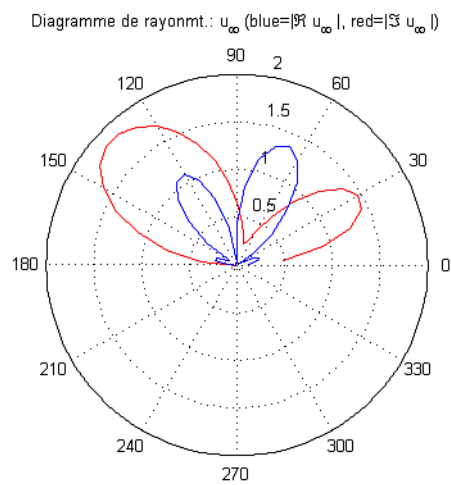


FIGURE 2.4 – Exemple 1. Diagramme du champ lointain.

2.6 Exemple numérique

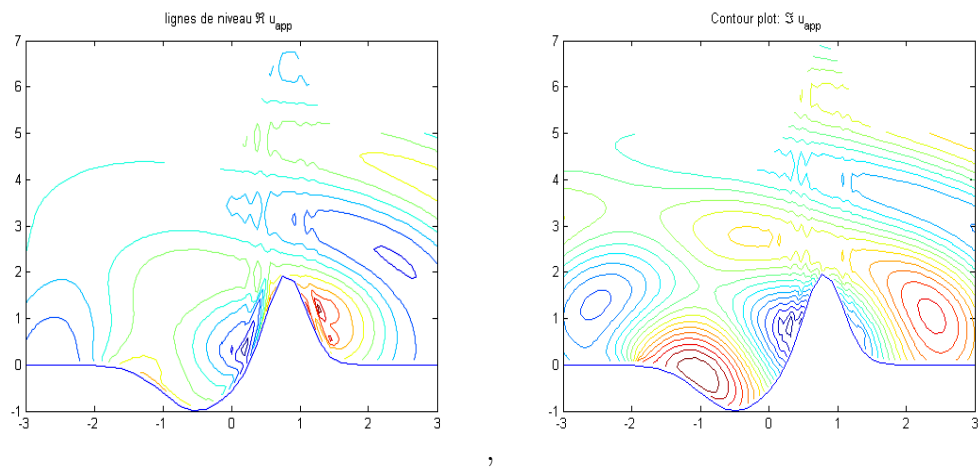


FIGURE 2.5 – Exemple 1. Champ diffracté : partie réelle (gauche) et partie imaginaire (droite).

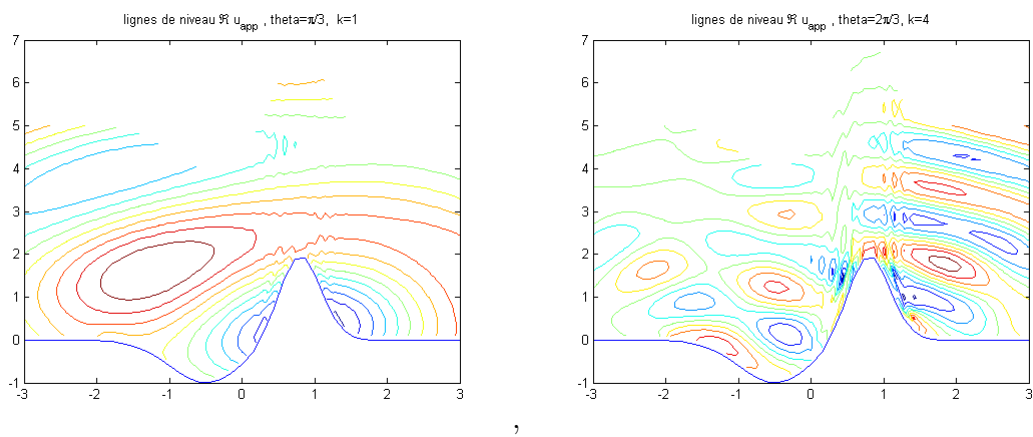


FIGURE 2.6 – Exemple 2. Champ diffracté : $\theta = \frac{\pi}{3}$, $k = 1$ (gauche); $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $k = 4$ (droite).

Chapitre 3

Problème inverse

3.1 Introduction

Les problèmes inverses associés à l'équation de Helmholtz sont d'un intérêt fondamental dû aux différentes applications : explorations géophysiques, imagerie médicale, contrôle non destructif, etc. Avec l'analyse des chapitres précédents, nous sommes maintenant bien préparés pour l'étude des problèmes de diffraction inverse dans un demi-plan perturbé. Nous rappelons que le problème de diffraction directe est de donner des informations sur la frontière diffractante et la nature des conditions aux limites pour trouver l'onde diffractée. Plus précisément son comportement à des grandes distances du diffractant c-à-d leur champ lointain. Le problème inverse commence à partir de cette réponse du problème direct, c-à-d, étant donné le champ lointain u_∞ d'une onde diffractée u (solution du problème (2.4)) pour une onde plane incidente u_i , déterminer la courbe inconnue γ . Il existe divers problèmes inverses. Par exemple :

- Connaissant les conditions aux limites, trouver la forme du diffractant.
- Connaissant la forme du diffractant, trouver les conditions aux limites, etc.

Ici, on considère le problème inverse à k fixé suivant : peut-on déterminer l'arc γ connaissant

3.2 Unicité

le champ lointain $u_\infty(\theta, \phi)$ pour toute direction d'observation $\phi \in [0, \pi]$ et toute direction d'incidente $\theta \in [0, \pi]$?

Si $f \geq 0$, on se ramène par prolongement à un problème extérieur à domaine symétrique, ce cas a été étudié dans l'article [29] du point de vue théorique (résultat d'unicité) lorsque γ n'est pas tangente aux extrémités $(-a; 0)$ et $(0; a)$ et par [24] du point de vue algorithmique (reconstruction de γ). A notre connaissance le problème n'a pas été étudié lorsque f change de signe. Notre objectif est de généraliser les résultats des travaux précédents. Commençons par démontrer un résultat d'unicité

3.2 Unicité

Dans cette section, nous allons montrer que si l'arc γ est assez régulier, alors il est déterminé de manière unique par la connaissance du champ lointain pour des ondes planes incidentes. Pour deux fonctions f_1 et f_2 , le domaine de diffraction est noté par

$$\Omega_j = \{(x_1, x_2), x_2 > f_j(x_1)\}, \quad j = 1, 2;$$

avec un arc correspondant

$$\gamma_j = \{(x_1, f_j(x_1)), x_1 \in]-a, a[\}.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que γ_1 et γ_2 sont deux arcs de classe C^2 telles que les champs lointains, associés aux champs diffractés respectivement par γ_1 et γ_2 coïncident, i.e.*

$$u_\infty^{(1)}(\theta, \phi) = u_\infty^{(2)}(\theta, \phi) \quad \text{pour tout } \theta, \phi \in [0, \pi].$$

Alors, γ_1 et γ_2 coïncident.

3.2 Unicité

Démonstration. Pour montrer ce théorème, on va utiliser la méthode des sources ponctuelles qui consiste à exploiter la singularité de la fonction de Green du problème perturbé lorsque le point source tend vers un point de la frontière γ [10, 6]. La preuve se fait en trois étapes.

Étape 1 : Soit le domaine $D = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Pour une onde incidente plane $u^i(x, \theta)$, les ondes diffractées u_1 et u_2 associées à γ_1 et γ_2 respectivement coïncident d'après le théorème 2.1.2 (théorème de Rellich).

Étape 2 : On montre que les champs diffractés $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$ coïncident aussi pour une onde incidente de la forme $u^i(x) = G_0(k, x, y)$ avec $y \in D$. En fait, on fixe $y \in D$ et on remarque que $u_j = G_j^{(r)}(x, y)$, $j = 1, 2$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u_j + k^2 u_j = 0 & \text{dans } \Omega_j, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_j}{\partial r} - i k u_j \right) = 0, \\ u_j = -G_0(\cdot, y) & \text{sur } \gamma_j. \end{cases} \quad (3.1)$$

D'après l'étape 1, on a $u_1(\cdot, d) = u_2(\cdot, d)$ dans D . La relation de réciprocité entraîne alors $u_{1,\infty} = u_{2,\infty}$ et à nouveau le théorème de Rellich entraîne $u_1 = u_2$ dans D .

Étape 3 : Maintenant, on suppose par l'absurde $\gamma_1 \neq \gamma_2$. On peut trouver un point $y^* \in \gamma_1$ et $\delta > 0$ tels que $B(y^*, \delta) \cap \Omega_2' = \emptyset$. Pour $p \geq 1$, on considère la suite des points sources

$$y_p = y^* + \frac{1}{p} n(y^*),$$

situés dans D et on note u_1^p (resp. u_2^p) la solution du problème (3.1) associé à γ_1 (resp. γ_2), avec la donnée $g_j^p = -[G_0(\cdot, y_p)]_{\gamma_j}$.

Alors d'après l'étape 2, $u_1^p = u_2^p$ pour $x \in D$. Comme $y_* \in \gamma_1$ nous avons, lorsque $p \rightarrow +\infty$:

$$u_1^p(y_p) = -G_o(y_*, y_p) = -c \log(k|y^* - y_p|) + o\left(\frac{1}{p}\right) \simeq c \log p \rightarrow +\infty.$$

3.3 Algorithme de reconstruction :

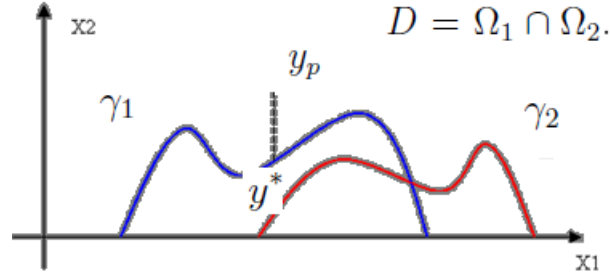


FIGURE 3.1 – géométrie

D'où la contradiction avec $u_1^p(y_p) = u_2^p(y_p)$, $\forall p \geq 1$. En effet, la suite u_2^p converge dans $H^2(B(y^*, \frac{\delta}{2}))$ vers $u_2(y^*, \cdot)$, puisque $B(y^*, \delta) \cap \Omega_2 = \emptyset$ et la donnée au bord g_2^p converge dans $H^{\frac{1}{2}}$. Ainsi $\gamma_1 = \gamma_2$. Ce qui achève la démonstration. \square

3.3 Algorithme de reconstruction :

Pour une onde incidente fixée (θ fixé), la solution du problème de diffraction direct permet de définir l'opérateur (direct)

$$\mathcal{F} : \gamma \rightarrow u_\infty, \quad (3.2)$$

c'est l'application qui associe à γ le champ acoustique lointain $u_\infty(\theta, \phi)$ de l'onde diffractée. Alors le problème inverse revient à résoudre l'équation

$$\mathcal{F}(\gamma) = d \quad (\text{avec } d = u_\infty(\theta, \cdot)), \quad (3.3)$$

pour l'inconnue γ (paramétrée par f) avec

$$\mathcal{F} : D(\mathcal{F}) \subset H_0^1(-a, a) \longrightarrow L^2(]0, \pi[),$$

3.4 Dérivée de Fréchet

est un opérateur non linéaire défini par (2.14) et

$$D(\mathcal{F}) = \{f \in C^2[-a, a]; f(-a) = f(a) = 0\}.$$

On résout (3.3) avec *l'algorithme de Gauss-Newton* (voir Annexe C) qui consiste à itérer la procédure suivante : f_n étant une approximation, trouver h_n solution de l'équation linéaire

$$\mathcal{F}'(f_n)^* \mathcal{F}'(f_n) h_n = \mathcal{F}'(f_n)^* (d - \mathcal{F}(f_n)), \quad (3.4)$$

puis on pose $f_{n+1} = f_n + h_n$ comme nouvelle approximation. Pour résoudre l'équation linéaire (3.4), on utilise *l'algorithme du Gradient Conjugué (CG)*, la convergence de l'algorithme est justifiée dans l'article [13], sous des hypothèses portant sur la non-linéarité de \mathcal{F} et sur l'initialisation f_0 . Pour cela, nous allons calculer la dérivée de Fréchet $\mathcal{F}'(f)$ [15]. La méthode de Newton est bien développée dans les articles [23, 22, 27].

3.4 Dérivée de Fréchet

A l'aide de la paramétrisation f de γ , l'opérateur \mathcal{F} s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{f}) &:= S_\infty(\mathbf{f})\varphi \\ &= \int_\gamma \frac{\partial(e^{-iky \cdot \hat{x}} - e^{-iky' \cdot \hat{x}})}{\partial n(y)} \varphi(\theta, y) ds(y) \\ &= ik \int_{-a}^a F(\phi, y_1, \mathbf{f}(y_1), \mathbf{f}'(y_1)) L_{\mathbf{f}}(R_{\mathbf{f}}(g(\theta, \cdot)))(y_1) dy_1, \end{aligned}$$

3.4 Dérivée de Fréchet

avec $F(\phi, y_1, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = (\mathbf{f}' \cos \phi - \sin \phi)e^{-iky \cdot \hat{x}} + (\mathbf{f}' \cos \phi + \sin \phi)e^{-iky' \cdot \hat{x}}$, $\hat{x} = (\cos \phi, \sin \phi)$, $y = (y_1, \mathbf{f}(y_1))$ et

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}} &= (I + K_{\mathbf{f}})^{-1} \\ R_{\mathbf{f}}(g) &= g(x_1, f(x_1)) = \tilde{g}(x_1) \\ g(\theta, x) &= -2(e^{-ikd \cdot x} - e^{-ikd \cdot x'}), \quad d = (\cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

Avec l'opérateur K_f donné par

$$K_f \varphi = \int_{-a}^a k_f(s, t) \varphi(s) ds, \quad (3.5)$$

où le noyau k_f dépend de f .

Proposition 3.4.1. *la dérivée de Fréchet $\mathcal{F}'(f) : H_0^1(-a, a) \rightarrow L^2(0, \pi)$ est donnée par*

$$\mathcal{F}'(f, h) = S'_\infty(f, h) \tilde{\varphi} - S_\infty(f) \psi,$$

où $\tilde{\varphi}$ est l'unique solution de l'équation intégrale

$$(I + K \tilde{\varphi}) = \tilde{g}, \quad \tilde{g} = R(f)g,$$

et ψ est une solution de l'équation intégrale

$$(I + K) \psi = K'(f, h) \tilde{\varphi} - \tilde{g}', \quad \tilde{g}' = R'(f, h)g.$$

Démonstration. $\mathcal{F}(f)$ est une composition de plusieurs opérateurs, en utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée, on trouve

$$\mathcal{F}'(f, h) = S'_\infty(f, L(f)R(f)g; h) + S_\infty(f, L'(f, h)R(f)g) + S_\infty(f, L(f)R'(f, h)g). \quad (3.6)$$

3.4 Dérivée de Fréchet

En utilisant la formule $L'(f) = -L(f)K'(f)L(f)$

$$\mathcal{F}'(f, h) = S'_\infty(f, h)L(f)R(f)g - S_\infty(f)L(f)(K'(f, h)L(f) - R'(f, h)g).$$

On désigne par $\tilde{\varphi}$ la solution de l'équation intégrale

$$(I + K)\tilde{\varphi} = \tilde{g}, \quad (\tilde{g} = R(f)g),$$

et par ψ la solution de l'équation intégrale suivante

$$(I + K)\psi = K'(f, h)\tilde{\varphi} - \tilde{g}', \quad \tilde{g}' = R'(f, h)g$$

alors de (3.6) on déduit que la dérivée de Fréchet de \mathcal{F} est donnée par

$$\mathcal{F}'(f, h) = S'_\infty(f, h)\tilde{\varphi} - S_\infty(f)\psi$$

□

La dérivée de l'opérateur $K(f)$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.4.2. *Soit l'opérateur $K(f) : D \subset L^2(-a, a) \rightarrow L^2(-a, a)$ défini par (3.5), la dérivée de Fréchet de K est donnée par*

$$K'(f, h)\varphi(t) = \int_{-a}^a k'(f, h)\varphi(s)ds,$$

avec

$$k'(f, h) = G'_+(f, h)D_+ + F(kr_+)D'_+(f, h) + G'_-(kr_-, h)D_- + F_-(kr_+)D'_-(f, h),$$

3.4 Dérivée de Fréchet

où

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{H_1^{(1)}(r)}{r}, & G_{\pm}(f) &= F(kr_{\pm}, h), \\ r_{\pm} &= \sqrt{(t-s)^2 + (f(t) \mp f(s))^2}, \\ D_{\pm} &= f'(s)(s-t) + (f(t) \mp f(s)), \\ D'_{\pm}(f, h) &= h'(s)(s-t) + (h(t) \mp h(s)). \end{aligned}$$

Démonstration. L'opérateur $K(f)$ est donné par la formule suivante

$$K(f)\varphi(x) = \int_{\gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \varphi(y) d\sigma(y).$$

On a $x = (t, f(t))$ et $y = (s, f(s))$. Alors

$$K(f)\varphi(x) = \int_{-a}^a k_f(t, s) \bar{\varphi}(s) ds \quad \bar{\varphi}(s) = \varphi(s, f(s)).$$

Le noyau k_f est défini par :

$$k_f(t, s) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \Big|_{x=(t, f(t)), y=(s, f(s))} \sqrt{1 + f'^2(t)}, \quad s, t \in [-a, a].$$

alors

$$k_f(t, s) = \nabla_y G(x, y) \cdot \eta(y) \sqrt{1 + f'^2(t)},$$

avec la normale η donnée par

$$\eta(y) = \frac{(-f'^2(t), 1)}{\sqrt{1 + f'^2(t)}}.$$

Ce qui implique que

$$k_f(t, s) = \nabla_y G(x, y) (-f'^2(t), 1), \tag{3.7}$$

3.4 Dérivée de Fréchet

avec

$$\begin{aligned}\nabla_y G(x, y) &= \frac{ik}{4} \left(\frac{H_1^1(k|x-y|)}{|x-y|} (x-y) - \frac{H_1^1(k|x-y'|)}{|x-y'|} (x-y') \right) \\ &= \frac{ik^2}{4} (F(kr_-)(x-y) - F(kr_+)(x-y')).\end{aligned}$$

Alors, la dérivée de Fréchet de k_f s'écrit

$$k'_f(f, h) = F'(kr_+, h)D_+ + F(kr_+)D'_+(f, h) + F'(kr_-, h)D_- + F(kr_+)D'_-(f, h)$$

avec

$$\begin{aligned}F'(kr_\pm, h) &= k \frac{F'(kr_\pm, h)}{r_\pm} (f(t) \mp f(s)(h(t) \mp h(s))) \\ &= \frac{1}{k} \frac{r'_\pm(f, h)}{r_\pm^2(f)} [kr_\pm(f)H_0^{(1)}(kr_\pm) - 2H_1^{(1)}(kr_\pm)].\end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.3. *Soit $R : L^2(-a, a) \rightarrow L^2(-a, a)$ l'opérateur de restriction, la dérivée de Fréchet de R est donnée par*

$$\begin{aligned}R'(f, h)g &= \frac{\partial(g(s, f(s)))}{\partial x_2} \cdot h(s) \\ &= ik(e^{ik(s \cos \theta - f(s) \sin \theta)} - e^{ik(s \cos \theta + f(s) \sin \theta)}) \sin \theta \cdot h(s)\end{aligned}$$

Proposition 3.4.4. *La dérivée de Fréchet de S_∞ est donnée par :*

$$S'_\infty(f, h)\psi(\phi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{-a}^a k'_{\infty, f}(\phi, s; h)\psi(s)ds,$$

3.4 Dérivée de Fréchet

où le noyau $k'_{\infty,f}$ est donné par

$$k'_{\infty,f}(\phi, s; h) = ikh'(t) \cos \phi (e^{-iky \cdot \hat{x}} - e^{-iky' \cdot \hat{x}}) + k^2 h(t) \sin \phi [(f'(s) \cos \phi - \sin \phi) e^{-iky \cdot \hat{x}} + (f'(s) \cos \phi + \sin \phi) e^{-iky' \cdot \hat{x}}],$$

où $y' = (y_1, -y_2)$.

Démonstration. L'opérateur S_{∞} est défini par

$$S_{\infty} \varphi(\phi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{-a}^a k_{\infty,f}(\phi, s) \varphi(s) ds,$$

où le noyau est donné par :

$$k_{\infty,f}(\phi, s) = \nabla_y (e^{-ik\hat{x} \cdot y} - e^{-ik\hat{x} \cdot y'}) (-f'(s), 1) \quad (3.8)$$

$$= ik [(f' \cos \phi - \sin \phi) e^{-ik\hat{x} \cdot y} - (f' \cos \phi + \sin \phi) e^{-ik\hat{x} \cdot y'}]. \quad (3.9)$$

La dérivée de Fréchet de S_{∞} est définie par :

$$S'_{\infty}(f, h) \psi(\phi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{-a}^a k'_{\infty,f}(\phi, s, h) \psi(s) ds,$$

où le noyau $k'_{\infty,f}$ est donné par

$$k'_{\infty,f}(\phi, s, h) = ik \left[\cos \phi h'(s) e^{-ik\hat{x} \cdot y} + (\cos \phi f'(s) - \sin \phi) \left(\frac{d}{df} e^{-ik\hat{x} \cdot y}, h \right) - (\cos \phi f'(s) + \sin \phi) \left(\frac{d}{df} e^{-ik\hat{x} \cdot y'}, h \right) - (\cos \phi h'(s)) e^{-ik\hat{x} \cdot y'} \right].$$

3.5 Approximation numérique

et les dérivées

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{df}e^{-ik\hat{x}\cdot y}, h\right) &= -ike^{-ik\hat{x}\cdot y} \sin \phi h(s), \\ \left(\frac{d}{df}e^{-ik\hat{x}\cdot y'}, h\right) &= ike^{-ik\hat{x}\cdot y'} \sin \phi h(s).\end{aligned}$$

Alors, la dérivée de Fréchet de k_∞ s'exprime par

$$\begin{aligned}k'_{\infty, f}(\phi, s; h) &= ikh'(t) \cos \phi (e^{-iky\cdot\hat{x}} - e^{-iky'\cdot\hat{x}}) + k^2 h(t) \sin \phi \left[(f'(s) \cos \phi - \sin \phi) e^{-iky\cdot\hat{x}} \right. \\ &\quad \left. + (f'(s) \cos \phi + \sin \phi) e^{-iky'\cdot\hat{x}} \right].\end{aligned}$$

□

3.5 Approximation numérique

Après la discrétisation des intervalles $[-a, a]$ et $[0, \pi]$, l'équation (3.4) devient un système algébrique

$$AX = Y \text{ avec } A = A(p, n);$$

On applique la méthode du *Gradient Conjugué (CG)* à l'équation normale

$$A^*AX = A^*Y,$$

puis on utilise la *SVD*

$$A = U\Sigma V^* = \Sigma u_i \sigma v_i^t, A^*A = V\Sigma^2 V^* = \Sigma v_i \sigma_i^2 v_i^t.$$

3.6 Exemples numériques

On a utilisé le programme Matlab *lsqr.m* de la bibliothèque de Hansen ([14]).

3.6 Exemples numériques

Exemple 1. On simule le problème direct avec les données :

- arc γ : $y = f(x) := 1 - x^2$; $-1 < x < 1$.
- onde incidente de direction α .
- $k = 1$,
- $n = 32$ et $p = 18$ points dans les intervalles $[-1, 1]$, $[0, \pi]$ respectivement.
- pour la paramétrisation de f on utilise M fonctions de base $q_i(t)$, $i = 1, \dots, M$ telles que :

$$q_1(t) = 1 - 2\frac{t}{\pi} + \frac{t^2}{\pi^2},$$

$$q_2(t) = 1 - 2\frac{\pi - t}{\pi} + \frac{(\pi - t)^2}{\pi^2},$$

$$q_i(t) = \cos((i - 2)t) * \sin(t); \quad i = 3, \dots, M.$$

3.6 Exemples numériques

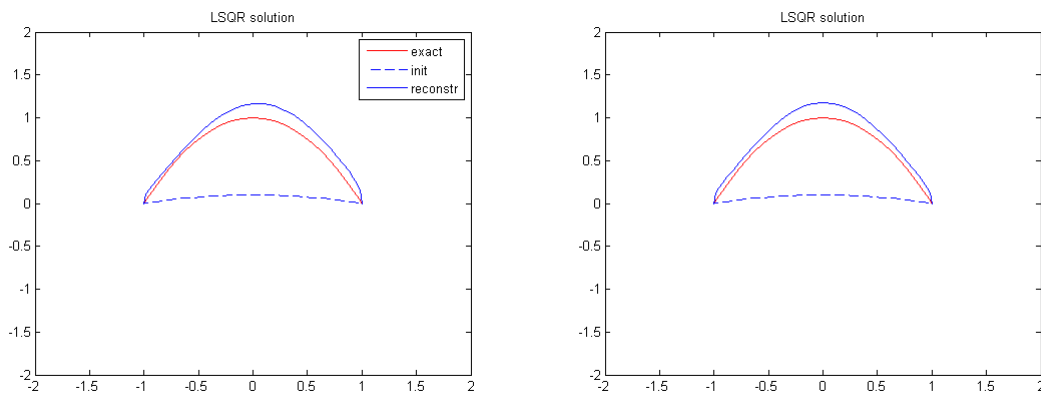


FIGURE 3.2 – Exemple 1 : $it = 4$, $\alpha = \pi/6$, $f_0 = (0.1)f$, $M = 4$, gauche : $\delta = 0$, droite : $\delta = 0.05$

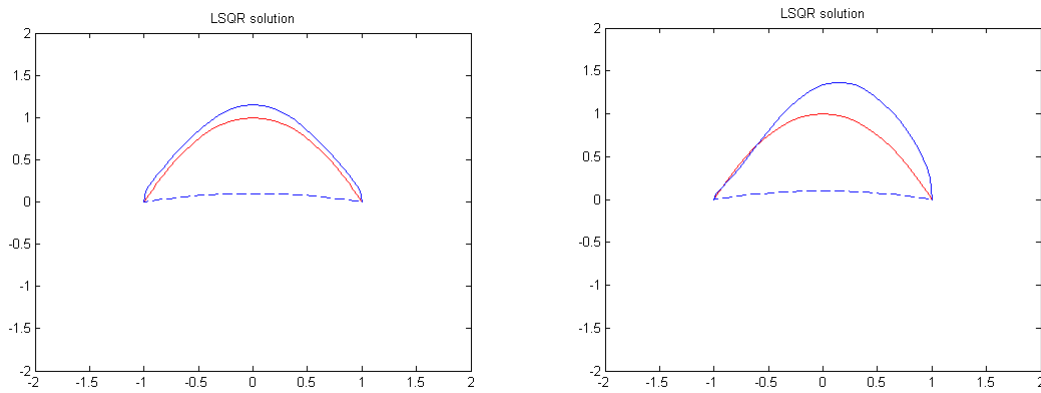


FIGURE 3.3 – Exemple 1, $it = 5$, gauche : $\alpha = \pi/180$, droite : $\alpha = \pi/2$

3.6 Exemples numériques

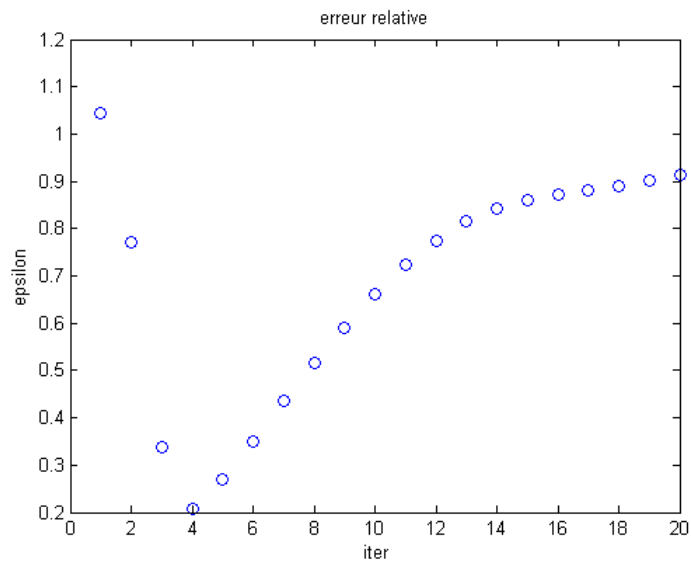


FIGURE 3.4 – Exemple 1 : Convergence

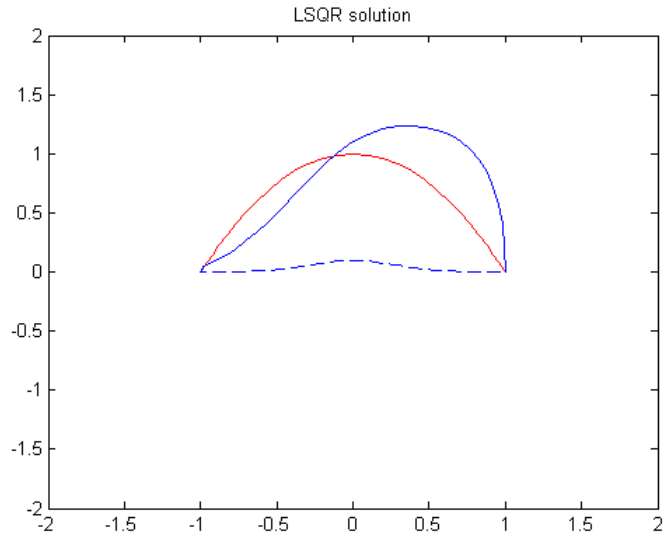


FIGURE 3.5 – Exemple 1 : $\alpha = \pi/6$, $M=4$, $f_0 = 0.1 \exp(-7t^2)$, $it = 4$

3.6 Exemples numériques

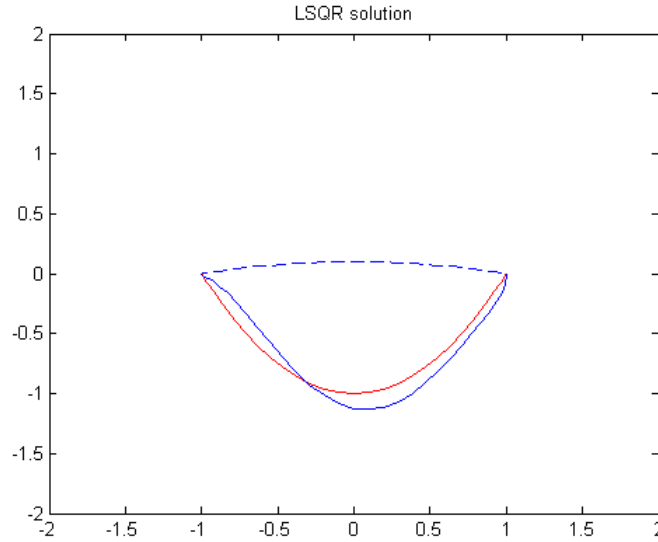


FIGURE 3.6 – Exemple 1 : $\alpha = \pi/6$, $M=4$, $f_0 = -0.1 * f$, $it = 1$

Exemple 2. Nous considérons l'arc défini par

$$y = f(x) := (1 - x^2)\left(\frac{14}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 0.5\right); \quad -1 < x < 1$$

Dans la reconstruction, on utilise la paramétrisation avec $M + 2$ fonctions de base.

$$q_1(t) = 1 - 2\frac{t}{\pi} + \frac{t^2}{\pi^2},$$

$$q_2(t) = 1 - 2\frac{\pi - t}{\pi} + \frac{(\pi - t)^2}{\pi^2},$$

$$q_i(t) = \cos((i - 2)t) * \sin(t); \quad i = 3, \dots, M,$$

$$g_i(t) = \exp[-c_i * (t - t_i)^2]; \quad t_i \in (-1, 1); \quad i = 1, 2$$

3.6 Exemples numériques

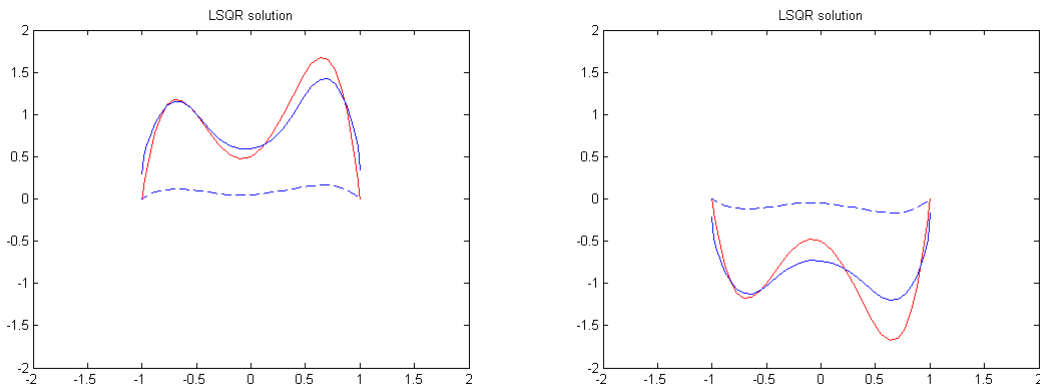


FIGURE 3.7 – Exemple 2 : $\alpha = \pi/6$, $f_0 = 0.1 * f$, gauche : $it = 5$, droite : $it = 8$

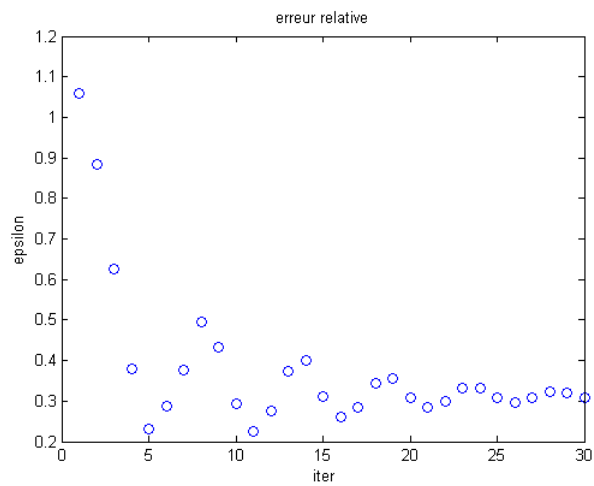


FIGURE 3.8 – Exemple 2 : Convergence

3.6 Exemples numériques

Exemple 3

Arc γ :

$$y = f(x) := -\sin(\pi t) + 0.5 \cos(0.5\pi t); \quad ; \quad -1 < x < 1$$

Dans la reconstruction, on utilise la parametrization avec M fonctions de base $q_i(t)$, $i = 1, \dots, M$.

$$q_1(t) = 1 - 2\frac{t}{\pi} + \frac{t^2}{\pi^2}$$
$$q_2(t) = 1 - 2\frac{\pi - t}{\pi} + \frac{(\pi - t)^2}{\pi^2}$$
$$q_i(t) = \cos((i - 2)t) * \sin(t); \quad i = 3, \dots, M$$

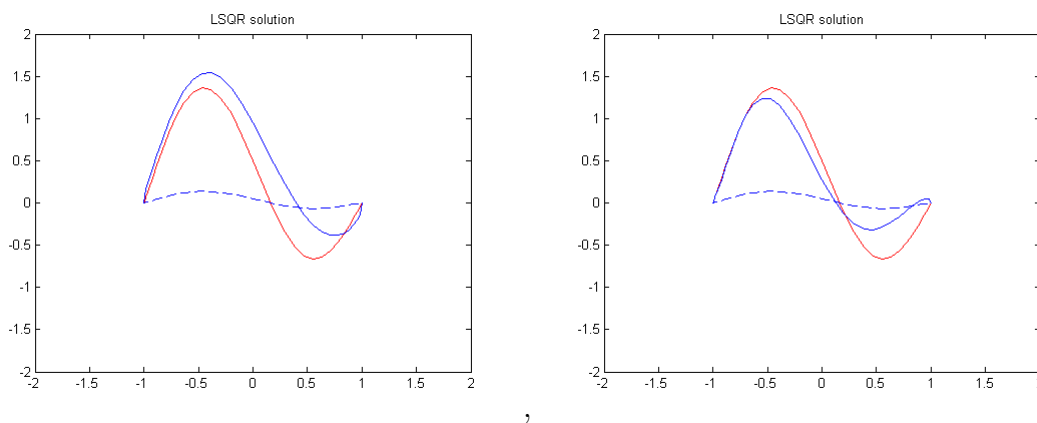


FIGURE 3.9 – Exemple 3 : $\alpha = \pi/6$ (gauche) , $\alpha = 5\pi/6$ (droite) après 4 iter.

Commentaires

- - L'algorithme converge après quelques étapes ($N(\delta) = 3$ à 6 itérations). Alors nous devons intégrer un test d'arrêt (discrepancy principle).
- - Initialisation $f_0 = 0.1 \times f$. Si f_0 arbitraire, le résultat n'est pas bon (voir fig.3.5). Le but est de commencer avec $f_0 = 0$, mais dans ce cas le programme diverge (quitte). En général, la condition de source n'est pas satisfaite [13].
- - Pour un angle d'incidence rasant $\epsilon \leq \alpha \leq \pi/6$ le result est bon. Pour une incidence normale $\alpha \simeq \pi/2$ le résultat n'est pas bon (voir fig.3.3). A notre avis ceci est dû probablement à l'existence d'ondes evanescentes (voir [2]).
- - Nous remarquons aussi que la paramétrisation $f = \sum_1^M c_i q_i + \sum_1^N d_i g_i$ est déterminante dans la qualité de la reconstruction. Ce qui exige des informations a priori sur le profil de γ . Le nombre de fonctions de base doit être réduit ($M + N \leq 8$).

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse on a démontré un résultat d'unicité pour un problème d'identification d'une perturbation géométrique associé à la diffraction d'ondes acoustiques. Puis on a proposé un algorithme de reconstruction qui est validé pour des situations assez simples.

- Dans le chapitre 2, on a étudié le problème direct de diffraction par une surface rugueuse. On a utilisé la méthode des potentiels. On a caractérisé le champ lointain. On a étudié la fonction de Green perturbée (réponse à une source ponctuelle). On s'est intéressé aussi à l'aspect numérique (simulation).
- Dans le chapitre 3, on a étudié le problème inverse : reconstruction de la rugosité d'après la donnée du champ lointain associé à des ondes planes incidentes. On a montré un théorème d'unicité (la perturbation est déterminée de manière unique). On a supposé que l'arc γ est assez régulier ($f \in C^2[a, b]$), on peut alors envisager la généralisation pour γ moins régulier (C^1 par morceaux). Pour la reconstruction on a proposé un algorithme de type Newton. A chaque itération on résout une équation linéaire par la méthode du gradient conjugué. L'algorithme est validé avec une approximation initiale bien choisie (d'où la nécessité d'avoir des informations a priori). Il reste donc des efforts à faire pour améliorer le schéma, notre but envisagé est de démarrer avec une donnée nulle Cette question est en rapport avec la condition de source évoquée dans les théorèmes de convergence dans la régularisation des problèmes non-linéaires mal posés (voir le livre de [12]).

Annexe A

Méthode de Nyström

La méthode de Nyström est une méthode de quadrature qui consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul d'intégrales pour aboutir à un système linéaire. En fait, ce n'est rien d'autre que l'approximation de l'opérateur intégral A (de noyau K) par un opérateur de dimension finie, c'est -à- dire une matrice. Cette méthode est totalement discrète, elle fournit donc un premier moyen efficace de résolution numérique d'une équation intégrale de 2^{ème} espèce.

Comme cette méthode est importante, et met en jeu les méthodes d'intégration numérique, nous allons la présenter en détail.

A.1 Méthode de quadrature

Dans cette section on rappelle des notations d'intégration numérique.

Definition A.1.1. *Soit f une fonction définie sur une partie compacte de G et μ une mesure de Jordan dans \mathbb{R}^d non nulle . Toute forme d'approximation de l'intégrale $\int_G f(x) d\mu$ s'appelle formule de quadrature. La formule de quadrature classique contient les valeurs $f(x_i)$ de f au point $x_i \in G$ pour $i = 1, \dots, n$. On écrit la formule de quadrature $Q_n(f)$, comme*

A.1 Méthode de quadrature

suit :

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} f(x_{i,n}),$$

où les coefficients $a_{i,n}$ sont les points de quadrature.

La définition de l'erreur quadratique par $R(f)$ est donnée par

$$Q(f) = \int_G f(x) d\mu = Q_n(f) + R(f) \text{ pour } f \in C(G).$$

Remarque 5. Si $G = \Gamma$ une surface de \mathbb{R}^3 ou une courbe de \mathbb{R}^2 . $d\mu = ds$ ou dl (élément de surface ou élément de longueur).

Definition A.1.2. La méthode de quadrature $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ est dite convergente, si elle converge point à point, c'est à dire si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(f) = \int_G f(x) dx, \text{ pour tout } f \in C(G).$$

Definition A.1.3. La méthode de quadrature $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ est dite consistante s'il existe un sous-ensemble $V \subset C(G)$ dense et $Q_n(f)$ converge vers $Q(f)$ pour tout $f \in V$.

Definition A.1.4. La méthode de quadrature $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ est dite stable si

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{i,n}| : n \in \mathbb{N}^* \right\} < \infty.$$

Théorème A.1.1. Une règle de quadrature est convergente si et seulement si elle est consistante et stable.

Théorème A.1.2. Si $Q_n(1) \rightarrow Q(1)$, $n \rightarrow \infty$, et les points de quadrature positifs, alors la forme quadratique $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ converge si et seulement si $Q_n(g) \rightarrow Q(g)$, $n \rightarrow \infty$, pour tout g dans un ensemble U dense dans $C(G)$.

On peut trouver la démonstration de ces théorèmes dans le livre [21].

A.2 Méthode de Nyström

Soit $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de règles de quadrature convergente pour l'intégrale $\int_G f(x) dx$ et l'approximation de l'opérateur intégral

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in G,$$

de noyau K continu, par une suite d'opérateurs linéaires numérique

$$A_n\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k K(x, x_k) \varphi(x_k), \quad x \in G$$

alors la solution de l'équation intégrale de deuxième espèce

$$\varphi(x) - A\varphi(x) = f(x)$$

est approchée par la solution de l'équation

$$\varphi_n(x) - A_n\varphi_n(x) = f(x).$$

Ce qui est réduit à la résolution d'un système d'équations de dimension finie.

Méthode approchée.

Soit φ_n la solution de l'équation

$$\varphi_n(x) - \sum_{k=1}^n a_{k,n} K(x, x_{k,n}) \varphi_n(x_k) = f(x), \quad x \in G, \quad (\text{A.1})$$

Les valeurs $\varphi_{i,n}(x) = \varphi_n(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. aux points de quadrature $a_{k,n}$ sont solution du

A.3 Cas d'un noyau faiblement singulier

système

$$\varphi_{i,n}(x) - \sum_{k=1}^n a_{k,n} K(x_{i,n}, x_{k,n}) \varphi_{i,n}(x_k) = f(x_{i,n}), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

alors φ_n définie par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n a_{k,n} K(x, x_{k,n}) \varphi_{k,n}(x_k), \quad x \in G. \quad (\text{A.3})$$

est une solution de (A.1).

Remarque 6. Si le noyau est symétrique c'est à dire $k(x, y) = k(y, x)$ la matrice $(a_{k,n} K(x, x_{k,n}))_{n \geq 1}$ est généralement non symétrique.

Théorème A.2.1. Pour toute solution de l'équation intégrale de deuxième espèce d'un noyau continu et la fonction f continue, la formule de quadrature de la méthode de Nyström est uniformément convergente.

A.3 Cas d'un noyau faiblement singulier

On va décrire la méthode de Nyström appliquée à la résolution approchée de l'équation intégrale de deuxième espèce avec un noyau faiblement singulier de la forme :

$$(A\varphi)(x) = \int_G w(|x-y|) k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in G,$$

où la fonction $w : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ représente la singularité de noyau. On suppose que w est continue et satisfait $|w(t)| \leq Mt^{\alpha-d}$ pour tout $t > 0$, où M et α deux constantes, $\alpha > 0$ et $k \in C(G \times G)$.

On choisit $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ une suite de quadrature définie par

$$(Q_n g)(x) = \sum_{j=1}^n a_{j,n}(x) g(x_{j,n}), \quad x \in G,$$

A.3 Cas d'un noyau faiblement singulier

pour l'intégrale

$$(Qg)(x) = \int_G w(|x-y|) g(y) dy, \quad x \in G.$$

La solution avec les points de quadrature dépendent continûment de x . Alors, on approche l'opérateur intégral singulier par la suite d'opérateurs intégraux discrets :

$$(A_n \varphi)(x) = \sum_{k=1}^n a_{k,n} K(x, x_{k,n}) \varphi_n(x_{k,n}),$$

la solution de l'équation approchée de deuxième espèce est donnée par (A.3).

Le système linéaire (A.1) s'écrit sous la forme

$$\varphi_{j,n} - \sum_{k=1}^n a_{k,n} K(x, x_{k,n}) \varphi_n(x_{k,n}) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Théorème A.3.1. *Si la formule de quadrature $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ converge et satisfait*

$$\limsup_{y \rightarrow x} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^n |a_{k,n}(y) - a_{k,n}(x)| = 0 \quad (\text{A.4})$$

alors la suite $A_n \varphi \rightarrow A \varphi, n \rightarrow \infty$ pour tout $\varphi \in C(G)$; mais non uniformément.

Exemple :

On considère l'opérateur faiblement singulier de la forme

$$A \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (\text{A.5})$$

A est défini dans l'espace $C_{2\pi} \subset C(\mathbb{R})$ des fonctions continues 2π -périodiques. Nous construisons une formule de quadrature numérique pour l'intégrale impropre

$$Qg(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) g(\tau) d\tau$$

A.3 Cas d'un noyau faiblement singulier

Utilisant la base de Lagrange L_j nous trouvons

$$Q_n g(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) g(t_j) \quad (\text{A.6})$$

avec $t_j = j\pi/n$ et les poids de quadrature

$$R_j^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) L_j(\tau) d\tau, \quad j = 0, \dots, 2n-1.$$

D'après les propriétés des polynômes de Lagrange on obtient

$$R_j^{(n)}(t) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos(t-t_j) + \frac{1}{2n} \cos(t-t_j) \right\},$$

pour $j = 0, \dots, 2n-1$. D'où la suite

$$A_n \varphi_n(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) K(t, t_j) \varphi(t_j) \quad (\text{A.7})$$

engendrée par les règles de quadrature (A.6). Plus précisément, on a

$$R_j^{(n)}(t_j) = R_{|j-k|}^{(n)}, \quad j, k = 0, \dots, 2n.$$

avec les poids

$$R_j^{(n)}(t) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos \frac{mj\pi}{n} + \frac{(-1)^j}{2n} \right\}, \quad j = 0, \dots, 2n-1.$$

Théorème A.3.2. *La suite (A_n) donnée par (A.7) est compacte et localement convergente vers l'opérateur intégral A avec la singularité logarithmique donnée par (A.5).*

Annexe B

Problèmes mal posés et régularisation

B.1 Problème mal posé et régularisation

Definition B.1.1. *(La notion de problème bien posé au sens de Hadamard)*

Soit $A : U \subset X \rightarrow V \subset Y$ un opérateur, X et Y espace normés. L'équation

$$A\varphi = f, \tag{B.1}$$

est dite bien posée si $A : U \rightarrow V$ est bijective

L'opérateur inverse $A^{-1} : V \rightarrow U$ est alors continu. Sinon, on dit que l'équation est mal posée. Autrement dit, un problème est bien posé si les trois conditions sont satisfaites : une solution existe, la solution est unique et la solution dépend continûment de la donnée f . Le cas le plus fréquent dans l'étude des problèmes mal posés est le cas d'instabilité quand la troisième condition n'est pas vérifiée. Pour surmonter cette difficulté, on va proposer des méthodes de régularisation pour approcher l'opérateur inverse non borné $A^{-1} : A(X) \rightarrow X$ par un opérateur linéaire borné $R : Y \rightarrow X$.

Definition B.1.2. *Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné inversible, puis une famille*

B.1 Problème mal posé et régularisation

d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, avec la propriété de la convergence simple

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A\varphi = \varphi$$

pour tout $\varphi \in X$, R_α est appelé un schéma de régularisation pour l'opérateur A , α est appelé le paramètre de régularisation.

Supposons que f^δ est une donnée perturbée (bruitée). Le schéma de régularisation se rapproche de la solution φ de (B.1) par la solution régularisée

$$\varphi_\alpha^\delta := R_\alpha f^\delta.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire, on obtient l'estimation de l'erreur d'approximation

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha A\varphi - \varphi\|.$$

Definition B.1.3. Une stratégie pour un schéma de régularisation R_α , $\alpha > 0$, i.e, le choix du paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta)$ en fonction d'erreur δ et la donnée f^δ , est dite régulière si pour tout $f \in A(X)$ et tout $f^\delta \in Y$ avec $\|f^\delta - f\| \leq \delta$ nous avons

$$R_{\alpha(\delta)} f^\delta \rightarrow A^{-1}f \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

Definition B.1.4. (Principe de Morozov) Le paramètre de régularisation α pour l'erreur δ doit être choisi de telle sorte que

$$\|AR_\alpha f^\delta - f\| = \tau\delta,$$

avec un paramètre fixe $\tau \geq 1$.

Ce principe stipule que le résidu n'excède pas (en norme L^2) l'amplitude du bruit δ . On montre dans le monographe [19] que ce principe est une stratégie régulière (convergente).

B.2 Dérivée de Fréchet

Jusqu'à présent, nous avons considéré seulement les opérateurs linéaires, mais dans beaucoup de problèmes inverses (en l'occurrence la diffraction inverse) on rencontre des opérateurs non-linéaires. L'équation non-linéaire est souvent approchée par sa linéarisation autour d'une solution particulière, par exemple la méthode de Newton (où méthode de descente). Pour cette raison, nous introduisons la définition et les propriétés de base de la dérivée de Fréchet.

Definition B.2.1. (*Fréchet différentiabilité*) Soit X, Y deux espaces normés et soit U un sous ensemble ouvert de X . L'application $A : U \rightarrow Y$ est dite Fréchet-différentiable au point $\varphi \in U$ s'il existe un opérateur linéaire borné $A'[\varphi] : X \rightarrow Y$ telle que

$$\|A(\varphi + h) - A(\varphi) - A'[\varphi]h\| = o(\|h\|),$$

uniformément quand $\|h\| \rightarrow 0$. $A'[\varphi]$ est appelé la dérivée de Fréchet de A en φ . A est dite Fréchet-différentiable sur U si elle est Fréchet-différentiable en tout point $\varphi \in U$.

Nous énonçons quelques propriétés de base de la dérivée de Fréchet.

Théorème B.2.1. Soit $A : U \subset X \rightarrow Y$ Fréchet-différentiable et soit Z un espace normé

- (1) La dérivée de Fréchet de A est uniquement déterminée.
- (2) Si $B : U \rightarrow Y$ est Fréchet-différentiable, alors $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ est Fréchet-différentiable pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et

$$(\lambda_1 A + \lambda_2 B)'[\varphi] = \lambda_1 A'[\varphi] + \lambda_2 B'[\varphi], \quad \varphi \in U.$$

B.2 Dérivée de Fréchet

(3) Si $B : Y \rightarrow Z$ est Fréchet-différentiable, alors $B \circ A : U \rightarrow Z$ est Fréchet-différentiable et

$$(B \circ A)' [\varphi] = B' [A(\varphi)] A' [\varphi], \quad \varphi \in U.$$

(4) Supposons que $A : U \rightarrow Y = L(E)$ est différentiable et $A(\varphi)$ est inversible (isomorphisme) pour tout $\varphi \in U$, alors l'application $B(\varphi) = A^{-1}(\varphi)$ est Fréchet-différentiable et

$$B' [\varphi] = -B(\varphi)A' [\varphi]B(\varphi), \quad \varphi \in U.$$

Démonstration. La preuve des trois premiers cas peuvent être trouvée, par exemple, dans [16],pp.103-106. La dernière propriété a été prouvée dans [10]. \square

Le théorème suivant montre que le caractère mal-posé du problème non linéaire est hérité par sa linéarisation.

Théorème B.2.2. Soit $A : U \subset X \rightarrow Y$ un opérateur complètement continu d'un sous ensemble ouvert U d'un espace normé X vers un espace de Banach Y et on suppose que A est différentiable de Fréchet au point $\psi \in U$. Alors la dérivée A'_ψ est compacte.

Démonstration. La preuve est basée sur le fait qu'un sous-ensemble d'un espace de Banach est relativement compact si et seulement s'il est totalement borné. Pour plus de détails, voir le théorème.4.19 dans [10]. \square

Annexe C

Méthode des moindres carrés

La "meilleure solution" d'un système peut être définie de plusieurs façons. Etant donnée les observations y , les variables indépendantes X et le modèle $f(X, \beta)$ avec β le vecteur de paramètres, la solution retenue correspond à la solution du problème de minimisation

$$\min_{\beta} \|f(X, \beta) - y\|_2^2, \quad (\text{C.1})$$

En analyse numérique on note le problème comme suit :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) = \frac{1}{2} r(x)' r(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i(x)^2, \quad (\text{C.2})$$

où $r(x)$ est le vecteur des résidus fonction des paramètres x .

Dans le cas linéaire le modèle s'écrit $Ax \approx b$ avec b les observations, A les variables indépendantes et x le vecteur de paramètres. Le vecteur des résidus est dans ce cas

$$r = Ax - b.$$

Si on a un modèle non-linéaire $f(t_i, x)$, la fonction f est non-linéaire par rapport aux para-

C.1 Moindres carrés linéaires

mètres x . Les t_i sont les variables indépendantes et les y_i sont les observations. Le vecteur des résidus s'écrit alors

$$r_i(x) = f(t_i, x) - y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Il semble que ce soit Gauss qui en 1795 (à l'âge de 18 ans) a découvert la méthode des moindres carrés. Le développement des méthodes numériques modernes pour la résolution des moindres carrés s'est fait dans les années soixante (QR, SVD) et plus récemment on a développé les méthodes pour des systèmes qui sont grands et creux.

On présentera d'abord les méthodes pour résoudre les moindres carrés linéaires puis on présentera le cas non-linéaire. La solution des moindres carrés non-linéaires s'obtient par des méthodes itératives qui nécessitent la solution d'un problème de moindres carrés linéaires à chaque étape.

C.1 Moindres carrés linéaires

On aura besoin d'évaluer d'une part $\|b - Ax\|_2^2$, étant donnée que cette valeur intervient dans le calcul de $\sigma^2 = \|b - Ax\|_2^2 / (m - n)$, et d'autre part d'une méthode efficace et numériquement stable pour calculer $(A'A)^{-1}$ ou un sous-ensemble d'éléments de cette matrice.

Dans la présentation qui suit on donnera des indications comment obtenir ces éléments numériquement suivant l'approche choisie.

C.1.1 Méthode des équations normales

La solution de (C.2) peut être obtenue de plusieurs manières. Une façon consiste à dériver (C.2) par rapport à x et d'écrire les conditions du premier ordre pour le minimum, soit :

$$2A'Ax - 2A'b = 0.$$

C.2 Moindres carrés non-linéaires

D'où on tire le système des équations normales

$$A'Ax = A'b.$$

Les équations normales s'obtiennent également en considérant que la solution Ax la plus proche à b s'obtient par une projection orthogonale de b dans l'espace engendré par les colonnes de A .

C.1.2 Décomposition en valeurs singulières SVD

La décomposition SVD est un outil particulièrement approprié pour la résolution du problème des moindres carrés. Étant donné $Ax \cong b$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et rang de A égal à $r \leq p = \min(m, n)$, la solution du problème des moindres carrés peut s'écrire

$$x = U\Sigma V'b \text{ où bien } x = \sum_{i=1}^r \frac{u'_i b}{\sigma_i} v_i,$$

où les matrices V, Σ et U sont celles de la décomposition singulière de $A = U\Sigma V'b$. A partir de la décomposition à valeurs singulières de la matrice A on déduit que $(A'A)^{-1} = V\Sigma_r^{-2}V'$ où Σ_r est alors possible d'explicitier un élément particulier de la matrice $S = (A'A)^{-1}$ comme

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{v_{ik}v_{jk}}{\sigma_k^2}.$$

C.2 Moindres carrés non-linéaires

Dans le cas des moindres carrés non-linéaires il s'agit de minimiser la fonction

$$g(x) = \frac{1}{2}r(x)'r(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m r_i(x)^2,$$

C.2 Moindres carrés non-linéaires

avec

$$r_i(x) = f(t_i, x) - y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

où $f(t_i, x)$ est une fonction non-linéaire (le modèle) avec t_i les variables indépendantes et $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de paramètres à estimer.

Afin d'écrire le modèle quadratique pour la minimisation de (C.2) nous avons besoin des dérivées premières et secondes de $g(x)$. La dérivée première s'écrit

$$\nabla g(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) \cdot \nabla r_i(x) = \nabla r(x)' r(x), \quad (\text{C.3})$$

et la dérivée deuxième :

$$\nabla^2 g(x) = \nabla r(x)' \nabla r(x) + S(x), \quad (\text{C.4})$$

avec $S(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla^2 r_i(x)$.

Les méthodes qui seront présentées ci-après se différencient par la façon dont ils approchent la matrice des dérivées secondes de $g(x)$.

C.2.1 Méthode de Gauss-Newton

Cette méthode utilise une approximation de la matrice des dérivées secondes (C.4) en omettant le terme $S(x)$. Comme $S(x)$ est composée d'une somme de termes $r_i(x) \nabla^2 r_i(x)$ cette simplification se justifie dans une situation où les résidus $r_i(x)$ sont petits. C'est une situation où le modèle épouse bien les données. La méthode de Gauss-Newton se résume dans l'algorithme qui suit.

- Choisir $x^{(0)}$
- Pour $k = 1, 2, 3, \dots, k_{max}$
- Calculer $\nabla r(x^{(k)})$
- Résoudre $(\nabla r(x^{(k)})' \nabla r(x^{(k)})) s_{GN}^{(k)} = -\nabla r(x^{(k)})' r(x^{(k)})$

C.2 Moindres carrés non-linéaires

- Avec $x^{(k+1)} = x^k + s_{GN}^{(k)}$.

On remarque que le système linéaire qui définit le pas de Gauss-Newton $s_{GN}^{(k)}$ est un système d'équations normales et que le pas est aussi la solution d'un problème des moindres carrés. L'algorithme peut ne pas converger si le point de départ est choisi trop loin de la solution. Lorsque les résidus sont grands au voisinage de la solution x^\dagger , l'approximation de la matrice des dérivées secondes peut s'avérer insuffisante, avec comme conséquence soit une convergence très lente ou pas de convergence du tout.

C.2.2 Méthode de Levenberg-Marquardt

Lorsque la méthode de Gauss-Newton échoue, notamment lorsque la solution du sous-problème de la solution du système linéaire n'est pas de rang complet, la méthode de Levenberg-Marquardt constitue une alternative intéressante. Dans cette méthode on approche la matrice $S(x)$ par une matrice diagonale μI . Nous avons alors l'algorithme suivant :

- Choisir $x^{(0)}$
- Pour $k = 1, 2, 3, \dots$
- Calculer $\nabla r(x^{(k)})$ et μ_k
- résoudre $(\nabla r(x^{(k)})' \nabla r(x^{(k)}) + \mu_k) s_{GN}^{(k)} = -\nabla r(x^{(k)})' r(x^{(k)})$
- $x^{(k+1)} = x^k + s_{GN}^{(k)}$.

Suivant le choix de μ_k , $0 < \mu_k < \infty$ le pas de Levenberg-Marquardt se situe entre le pas de Gauss-Newton pour $\mu_k = 0$ et un pas "steepest descent".

Si μ_k est choisi judicieusement la méthode de Levenberg-Marquardt s'avère très robuste en pratique. Elle constitue l'algorithme de base dans un grand nombre de logiciels spécialisés. L'algorithme peut ne pas converger si le point de départ est choisi trop loin de la solution. Lorsque les résidus sont grands au voisinage de la solution cherchée, l'approximation de la matrice des dérivées secondes peut s'avérer insuffisante, avec comme conséquence soit une

C.2 Moindres carrés non-linéaires

convergence très lente ou pas de convergence du tout. Dans ce cas il faut intégrer un test d'arrêt basé sur le principe de Morozov (discrepancy principle).

Annexe D

Copie de l'article publié



DIRECT AND INVERSE SCATTERING PROBLEM IN PERTURBED HALF-PLANE

B. Berhail and L. Chorfi

LMA

Department of Mathematics

Badji Mokhtar University

23000 Annaba, Algeria

e-mail: besmaberhail@gmail.com

l_chorfi@hotmail.com

Abstract

We consider in this work a direct and inverse problem in scattering theory. We construct an arc γ of the boundary from the far field pattern u_∞ of the scattered wave at fixed energy. This leads to the direct scattering problem for the Helmholtz equation in a perturbed half-plane with Dirichlet condition on the boundary. Using the integral method, we show that the direct problem is well posed. For the identification of the arc, we prove a uniqueness theorem by using the point source method and a reciprocity relation.

1. Introduction

The scattering of waves by rough surface is of great practical interest in physics and applied sciences: geophysical exploration, medical imaging,

© 2013 Pushpa Publishing House

2010 Mathematics Subject Classification: 35J25, 45B05, 74J25.

Keywords and phrases: scattering theory, far field, inverse problem, integral equation method.

Communicated by Haydar Akca

Received April 23, 2013

underwater acoustics, non-destructive testing. We are interested in the inverse problem to recover an arc γ , which describes a roughness of one-dimensional surface Γ , from the far field pattern with fixed wave number k (see Figure 1). The corresponding direct problem is set as Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in perturbed half-plane. More precisely, the scattered field satisfies the equation

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

in the domain $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 > f(x_1)\}$, where f is a smooth real function which vanishes outside an interval $[-a, a]$, $a > 0$. We assume that u satisfies a Dirichlet condition on the boundary $\Gamma = \partial\Omega$ and the Sommerfeld radiation condition at infinity. When $f \geq 0$, the problem can be formulated as an exterior problem in a symmetric domain, this case is considered theoretically and numerically in the articles (Kress and Tran [7]) and (Yan [9]). Our aim is to extend these works to the general situation when f changes the sign. Using integral equation method, we study the direct problem of scattering in Ω and extend the method of Kirsh and Kress (Colton and Kress [3]) for proving the uniqueness of the inverse problem for a bounded obstacle to the case of unbounded obstacle. Ended in our situation, the complement set $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ can be viewed as an obstacle. Our problem meets in some sense the article of Monch (Monch [8]) concerning inverse problem for cracks.

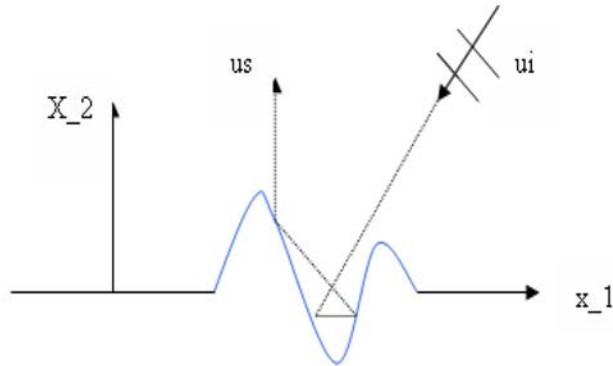


Figure 1. Scattering by rough surface.

The paper is organized as follows: In Section 2, we formulate the direct problem more precisely, we give an integral representation of the solution and we derive the far field pattern in terms of the parameterization f . In Section 3, we study the perturbed Green function. In Section 4, we present a numerical example which simulates the forward problem. In Section 5, we set our inverse problem and prove a uniqueness theorem.

2. Direct Scattering Problem

A perturbed half-plane is the open set

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > f(x_1)\},$$

where f is a function of class C^2 such that $f(t) = 0$ for $|t| > a > 0$. The boundary $\Gamma = \partial\Omega$ is split into $\Gamma = \Gamma_- \cup \gamma \cup \Gamma_+$, where $\Gamma_{\pm} = \{(x_1, 0); \pm x_1 \geq a\}$ and $\gamma = \{(x_1, f(x_1)); -a < x_1 < a\}$ is an open arc with the outgoing normal $n(x) = \frac{(-f'(x_1), 1)}{\sqrt{1 + f'(x_1)^2}}$. For $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, we denote $x' = (x_1, -x_2)$.

The mathematical modelling of the scattering of acoustic waves by a cylindrical surface leads to the following boundary value problem for the Helmholtz equation. Given an incident plane wave $u^i = e^{-ikd \cdot x}$ with wave number $k > 0$ and with unit vector $d = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, the direction of the propagation, find the scattered field u^s such that total field $u^{tot} = u^i + u^r + u^s$ satisfies the boundary value problem:

$$\begin{cases} \Delta u^{tot} + k^2 u^{tot} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u^{tot} = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad r = |x| & \text{(Radiation condition),} \end{cases} \quad (2.1)$$

where $u^r = -e^{-ikd' \cdot x}$ is the reflected part by the flat boundary $\{x_2 = 0\}$.

Denoting $u = u^s$, the weak formulation of (2.1) is then: find $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g \text{ on } \gamma \text{ and } u = 0 & \text{on } \Gamma \setminus \gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

with $g = -(u^i + u^r)$. Note that $g \in \tilde{H}^{1/2}(\gamma)$ which means $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ and $\text{supp } g \subset \bar{\gamma}$. We briefly sketch uniqueness, existence and well-posedness for the boundary value problem (2.2). We recall the following theorem (see Colton and Kress [2]).

Theorem 2.1 (Rellich's lemma). *Let $u \in C^2$ be a solution to the Helmholtz equation $\Delta u + k^2 u = 0$ for $|x| > R$. If*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x|=R} |u|^2 ds = 0, \quad (2.3)$$

then $u = 0$ for $|x| > R$.

As a consequence, we note that: if u is a solution of the homogeneous Dirichlet (or Neumann) problem (2.2), then u satisfies the limit (2.3).

Theorem 2.2. *The problem (2.2) has at most one solution.*

Proof. Suppose that u is a solution of the homogeneous problem and define a symmetric extension v such that

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} u(x_1, x_2) & \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus D_R, \\ -u(x_1, -x_2) & \text{in } \mathbb{R}_-^2 \setminus D_R, \end{cases}$$

where D_R is a disc with radius R containing $\bar{\gamma}$. We see that v satisfies $\Delta v + k^2 v = 0$ for $|x| > R$ and the radiation condition holds at infinity.

Hence by Rellich's theorem 2.1, $u = 0$ for $|x| > R$ and by analyticity, it follows that $u = 0$ in Ω . \square

Remark 2.1. By considering an even symmetric extension, we can show by the same argument that the solution of the Neumann problem is unique.

For the existence, we will use the integral method approach. For this, we introduce the Green function of the half-plane $G_0(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x, y')$ with $\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|)$, $x \neq y$, the fundamental function of the Helmholtz equation, where $H_0^{(1)}$ is the Hankel function of order 0 and of the first kind.

We seek the solution in the form of a double-layer potential

$$u(x) = D\varphi(x) := \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

and φ is a density in $L^2(\gamma)$. Using the jump relations of the potential theory (see Colton and Kress [2]), we deduce that $u = D\varphi$ solves the problem (2.2) provided the density φ is a solution to the integral equation on γ :

$$\varphi(x) + 2 \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y) = 2g(x) \quad \text{for } x \in \gamma. \quad (2.5)$$

This equation is of Fredholm's type:

$$\varphi(x) + K\varphi(x) = 2g(x) \quad \text{for } x \in \gamma, \quad (2.6)$$

where the operator K is continuous from $\tilde{H}^{1/2}(\gamma)$ to $H^{1/2}(\gamma)$ and compact in $L^2(\gamma)$. The adjoint of K is $K' : \tilde{H}^{-1/2}(\gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\gamma)$ given by (see (Cakoni and Colton [1]):

$$(K'\psi)(x) = 2 \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(x)} \psi(y) ds(y).$$

Theorem 2.3. *The integral equation (2.6) has a unique solution in $L^2(\gamma)$.*

Proof. Since K is compact, $N(I + K) = N(I + K')$. We show that $N(I + K') = \{0\}$, assume that $\varphi + K'\varphi = 0$ and consider the simple layer potential

$$v(x) = 2 \int_{\gamma} G_0(x, y) \varphi(y) ds(y) \text{ for } x \in \Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega.$$

Then v satisfies the Neumann's problem

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{in } \Omega', \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = 0. \end{cases}$$

This problem has at most one solution (see Remark 2.1), then $v = 0$ in Ω' and $v|_{\gamma} = S\varphi = 0$, where S is a single layer potential. Since $S : \tilde{H}^{-1/2}(\gamma) \rightarrow H^{1/2}(\gamma)$ is an isomorphism (Cakoni and Colton [1, Lemma 8.33]), it follows that $\varphi = 0$. The Fredholm's alternative implies the existence and stability. \square

Using the continuity of the double layer potential $D : \tilde{H}^{1/2}(\gamma) \rightarrow H_{loc}^1(\Omega)$ and the stability of the integral equation (Theorem 2.3), we establish the following result.

Corollary 2.4. *The problem (2.2) has a unique solution $u \in H_{loc}^1(\Omega)$. Moreover, u satisfies the estimate:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C_R \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)},$$

where $\Omega_R = \Omega \cap D_R$ for some positive constant $C_R \geq 0$ depending only on R .

Remark 2.2. From elliptic regularity $u \in H^2(D)$, where $D \subset \Omega$ is a relatively compact subset, the estimate $\|u\|_{H^2(D)} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)}$ holds.

2.1. Far field

Using the asymptotic behavior of the Hankel function

$$H_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty \quad (n = 0, 1),$$

we deduce that

$$\frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n(y)} = \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{8k\pi r}} \frac{\partial}{\partial n(y)} (e^{ik\hat{x}\cdot y} - e^{ik\hat{x}\cdot y'}) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right).$$

Hence, the scattered field u has the asymptotic behavior

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left(u_\infty(d, \hat{x}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right), \quad r = |x| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

uniformly in all directions $\hat{x} = \frac{x}{r} = (\cos \phi, \sin \phi)$ with the far field pattern $u_\infty(d, \hat{x})$ defined for $\theta, \phi \in [0, \pi]$ by

$$u_\infty(d, \hat{x}) = c \int_\gamma \frac{\partial G_\infty(\hat{x}, y)}{\partial n(y)} \varphi(d, y) ds(y), \quad \left(c = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \right) \quad (2.8)$$

with $G_\infty(\hat{x}, y) = e^{ik\hat{x}\cdot y} - e^{ik\hat{x}\cdot y'}$ and $\varphi(d, \cdot)$ is the solution of the integral equation (2.5) associated to the incident wave $u^i = u^i(d, \cdot)$. In the sequel, we denote $u_\infty(d, \hat{x})$ by $u_\infty(\theta, \phi)$.

Theorem 2.5. *Let u be a solution of (2.2). We assume that the far field pattern vanishes, that is, $u_\infty(\theta, \phi) = 0$, for all $\theta, \phi \in [0, \pi]$. Then $u(x) = 0$ in Ω .*

Proof. From (2.7), we have

$$\int_{\Sigma_R} |u|^2 ds = \frac{1}{8\pi k} \int_0^\pi |u_\infty(\theta, \phi)|^2 d\phi + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

with $\Sigma_R = \{|x| = R; x_2 \geq 0\}$. If $u_\infty(\theta, \phi) \equiv 0$, then the result follows from Theorem 2.1 (applied to a symmetric extension of u) and from a unique continuation principle. \square

3. Perturbed Green Function

For $x, y \in \Omega$, the Green function $G(x, y)$ of the problem (2.2) is the solution of the following problem

$$\begin{cases} \Delta_x G + k^2 G = \delta(x - y) & \text{in } D'(\Omega), \\ G|_\Gamma = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial r} - ikG = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{cases} \quad (3.1)$$

We decompose $G(x, y) = G_0(x, y) + G^{(r)}(x, y)$ as a perturbation of the Green function G_0 of the half-plane, hence $G^{(r)}$ is the reflected field corresponding to the incident field $u^i = -G_0(x, y)$. Then $G^{(r)}$ is represented by the potential (see formula (2.4)):

$$G^{(r)}(x, y) = \int_\gamma \frac{\partial G_0(x, z)}{\partial n(z)} \varphi(z, y) ds(z), \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

where $\varphi(\cdot, y)$ is the solution of the integral equation (y being a parameter)

$$\varphi(x, y) + 2 \int_\gamma \frac{\partial G_0(x, z)}{\partial n(z)} \varphi(z, y) ds(z) = -2G_0(x, y) \quad \text{for } x \in \gamma. \quad (3.3)$$

In the operator form,

$$\varphi + K\varphi = -2G_0.$$

Since $I + K$ is invertible, we can write

$$\varphi(x, y) = -2(I + K)^{-1}G_0(x, y). \quad (3.4)$$

Using the asymptotic formula

$$H_0^{(1)}(k|x - y|) = \sqrt{\frac{1}{k\pi r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} e^{ikx \cdot \hat{y}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right) \text{ as } r = |y| \rightarrow +\infty,$$

we deduce the following lemma:

Lemma 3.1. *The function $G_0(x, y)$ has the asymptotic behavior*

$$G_0(x, y) = \sqrt{\frac{8}{k\pi r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} G_0^\infty(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |y| \rightarrow +\infty \quad (3.5)$$

uniformly for all $\hat{y} = (\cos \phi, \sin \phi)$ with $G_0^\infty(x, \hat{y})$ given by

$$G_0^\infty(x, \hat{y}) = e^{-ikx \cdot \hat{y}} - e^{-ikx' \cdot \hat{y}}.$$

Theorem 3.2 (Reciprocity relation). *The function $G^{(r)}(x, y)$ has the following asymptotic behavior*

$$G^{(r)}(x, y) = \sqrt{\frac{8}{k\pi r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} u^s(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ as } r = |y| \rightarrow +\infty, \quad (3.6)$$

where $u^s(x, \hat{y})$ is the scattered wave corresponding to the incident plane wave $u^i(x) = e^{ikx \cdot \hat{y}}$.

Proof. From (3.4) and (3.5), we have

$$\varphi(x, y) = 2\sqrt{\frac{2}{k\pi r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \psi(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.7)$$

with $\psi(x, \hat{y}) = (I + K)^{-1}G_0^\infty(x, \hat{y})$ which is the solution of

$$\psi(x, \hat{y}) + K\psi(x, \hat{y}) = 2G_0^\infty(x, \hat{y}).$$

It follows with (3.2) that

$$G^{(r)}(x, y) = \sqrt{\frac{8}{k\pi r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{\gamma} \frac{\partial G_0(x, z)}{\partial n(z)} \psi(z, \hat{y}) ds(z) + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Then

$$G^{(r)}(x, y) = \sqrt{\frac{8}{k\pi r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} u^s(x, \hat{y}) + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

where u^s is the solution of (2.2) corresponding to the boundary condition $g = e^{-ik \cdot x \hat{y}}$. □

4. Numerical Example

To proceed with the numerical solution, we parameterize the integral equations (2.5). For $-a < t < a$ and $f \in C^2[-a, a]$, $f(-a) = f(a) = 0$, we can write

$$K(\varphi)(f(t)) = \int_{-a}^a k(t, s) \psi(s) ds, \quad \psi(s) = \varphi(s, f(s)) \quad (4.1)$$

with the kernel

$$k(t, s) = F(kr_+(t, s))D_+(t, s) + F(kr_-(t, s))D_-(t, s), \quad (4.2)$$

where

$$r_{\pm}(t, s) = \sqrt{(t-s)^2 + (f(t) \pm f(s))^2};$$

$$D_{\pm}(t, s) = f'(s)(t-s) + f(t) \pm f(s); \quad F(r) = \frac{H_1^{(1)}(r)}{r}.$$

The kernel has a logarithmic singularity at $t = s$:

$$k(t, s) = k_0(t, s) \ln 2|t-s| + k_1(t, s),$$

where

$$k_0(t, s) = -\frac{k}{\pi} \frac{J_1(kr_-(t, s))}{r_-(t, s)} D_-(t, s) \text{ and } k_1(t, s)$$

are continuous functions.

For the numerical solution of the integral equations (2.5), we use a collocation method based on trigonometric interpolation that is made fully discrete via appropriate quadrature approximations of the integral operators. More precisely, we apply the Nyström method developed by Kress in the book (Kress [6, 2nd ed.]) based on the exact integration of the singularity. The idea consists in substituting $t = \cos \tau$ and $s = \cos \sigma$ and using the identity

$$\ln 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 = \ln 4 \sin^2\left(\frac{\tau - \sigma}{2}\right) + \ln 4 \sin^2\left(\frac{\tau + \sigma}{2}\right)$$

to arrive at the integral

$$\int_0^\pi \ln 4 \sin^2\left(\frac{\tau - \sigma}{2}\right) \psi(\sigma) d\sigma$$

which is evaluated exactly for trigonometric function $\psi(\sigma) = \cos m\sigma$, $m \in \mathbb{N}$. However, the regular part is evaluated by the trapezoidal quadrature.

We consider here a numerical example. Suppose Γ is parameterized by the function f defined by:

$$f(t) = 2 \exp[-6(t - 0, 8)^2] - \exp[-2(t - 0, 5)^2], \quad t \in \mathbb{R}.$$

We can assume that $f(t)$ vanishes outside the interval $[-a, a] = [-3, 3]$. We

discretize the interval $[-a, a]$ with $n = 60$ points $t_j = a \cos \frac{j\pi}{n}$, $j = \overline{1, n}$,

and $[0, \pi]$ with $p = 60$ points $\phi_j = \frac{j\pi}{p}$, $j = \overline{1, p}$. The wave number is

$k = 2$ and the angle of incidence is $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Figure 2 shows the solution of the integral equation (2.5) and the modulus $\rho(\phi) = |\Re(u_\infty(\phi))|$ (see formula (2.8)) known as the *scattering amplitude*.

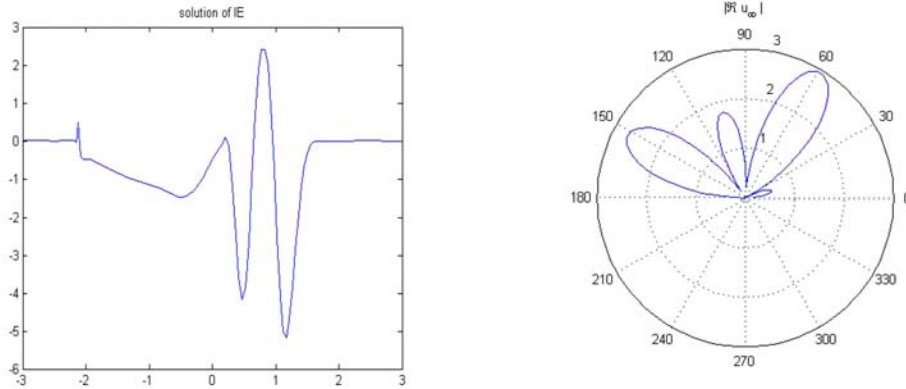


Figure 2. Left: Solution of integral equation (density), right: Amplitude of the scattering (modulus of the far field).

Figure 3 shows the field u^s near γ according to formula (2.4).

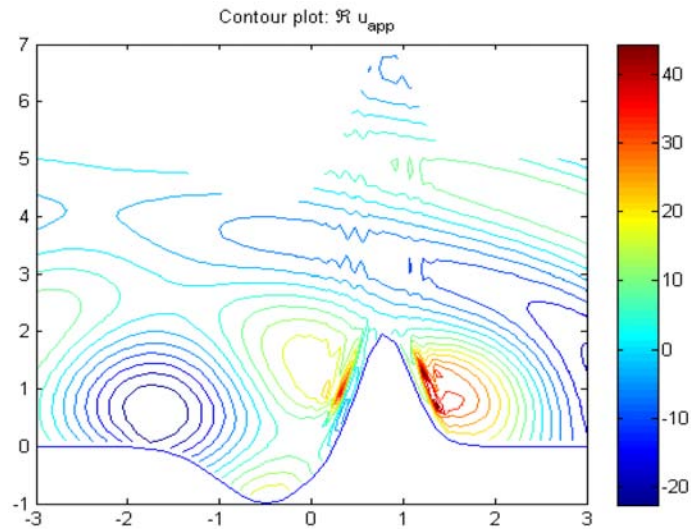


Figure 3. Scattered field u^s near the perturbation with $k = 2$ and $\theta_i = \frac{2\pi}{3}$.

5. Inverse Problem

The inverse scattering problem, we consider, is the following: given the far field pattern $u_\infty(\theta, \phi)$ for all $\theta, \phi \in [0, \pi]$ determine the arc γ . A sound-soft crack in two dimensions is uniquely determined from the knowledge of the far field pattern for all $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi]$ with fixed wave number k , see (Cakoni and Colton [1]). Following the approach of Kirsch and Kress (Colton and Kress [3]) through the use of the mixed reciprocity relation (3.6), we establish the following uniqueness result.

Theorem 5.1. *If the far field patterns $u_\infty^{(1)}(\theta, \phi)$ and $u_\infty^{(2)}(\theta, \phi)$ corresponding to γ_1 and γ_2 , respectively, coincide for all $\theta, \phi \in [0, \pi]$, then $\gamma_1 = \gamma_2$.*

Proof. The proof will be done in three steps:

Step 1. Denote $D = \Omega_1 \cap \Omega_2$. For an incident plane wave u^{inc} (which depends on θ), the scattered waves u_1 and u_2 associated to γ_1 and γ_2 , respectively, coincide by Theorem 2.5.

Step 2. We now show that scattered waves $u_1(x, y)$ and $u_2(x, y)$ also coincide for an incident wave of the form $u^{inc}(x, y) = G_0(x, y)$ with $y \in D$. In fact, $u_j(x, y) = G_j^{(r)}(x, y)$ is the perturbed Green function corresponding to γ_j (see Section 3), then we conclude by combining Step 1 with the reciprocity relation (3.6).

Step 3. Let us now assume that $\gamma_1 \neq \gamma_2$. We can find a point $y^* \in \gamma_1$ and $\delta > 0$ such that $B(y^*, \delta) \cap \Omega'_2 = \emptyset$. For $p \geq 1$, we consider the sequence $y_p = y^* + \frac{1}{p}n(y^*)$ which lies in D for all $p \geq 1$. Let u_1^p and u_2^p be the solutions of the scattering problem (2.2) corresponding to γ_1 and γ_2 , respectively, with the data $g_j^p = -[G_0(\cdot, y_p)]_{\gamma_j}$. From Step 2, $u_1^p(x) =$

$u_2^p(x)$ for $x \in D$. When $p \rightarrow +\infty$, we have

$$u_1^p(y_p) = \log(k | y^* - y_p |) + O\left(\frac{1}{p}\right) \simeq -\log p \rightarrow -\infty \text{ as } p \rightarrow +\infty.$$

This is a contradiction with $u_1^p(y_p) = u_2^p(y_p)$ for all $p \geq 1$. Indeed, the sequence u_2^p converges in $H^2\left(B\left(y^*, \frac{\delta}{2}\right)\right)$ to $u_2(y^*, \cdot)$, since $B(y^*, \delta) \cap$

$\Omega_2' = \emptyset$ and the boundary data g_2^p converge in $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_2)$ (see Remark 2.2). Hence $\gamma_1 = \gamma_2$ and the proof is completed. \square

Concluding remark on the reconstruction of γ . The solution to the direct scattering problem with a fixed incident plane wave u^i defines an operator $F : \gamma \rightarrow u_\infty$ that maps the arc γ (via its parameterization f) onto the far field pattern u_∞ of the scattered wave. In terms of this operator (which acts between two Hilbert spaces), given a far field pattern u_∞ , the reconstruction of γ just consists in solving the nonlinear equation $F(\gamma) = u_\infty$ for the unknown γ . This equation is a nonlinear ill-posed problem which can be solved by iteration methods such as regularized Newton methods developed by Kress (Kress [5]), Levenberg-Marquardt or conjugate gradient methods, see (Engl et al. [4]). This program will be continued in a perspective.

References

- [1] F. Cakoni and D. Colton, Qualitative methods in inverse scattering theory, Interaction of Mechanics and Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [2] D. Colton and R. Kress, Integral Equation Methods in Scattering Theory, Wiley-Interscience Publication, New York, 1983.
- [3] D. Colton and R. Kress, Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, Applied Mathematics in Sciences, Vol. 93, Springer, Berlin, 1998.

- [4] H. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, Regularization of inverse problems, Mathematics and Applications, Vol. 375, Kluwer Academic Publishers, London, 1996.
- [5] R. Kress, Inverse scattering from open arc, Math. Methods Appl. Sci. 18 (1995), 267-293.
- [6] R. Kress, Linear integral equations, Applied Mathematic in Sciences, 2nd ed., Springer, Berlin, 1998.
- [7] R. Kress and T. Tran, Inverse scattering for perturbed locally half-plane, Inverse Problems 16 (2000), 1541-1559.
- [8] L. Monch, On the numerical solution of the direct scattering problem for sound-hand open arc, Comput. Appl. Math. 71 (1996), 343-360.
- [9] G. Yan, Uniqueness of the inverse scattering problem of a locally perturbed half-plane, Comput. Math. Appl. 48 (2004), 411-418.

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, 1974.
- [2] G. Bao and J. Lin. Near-field imaging of the surface displacement on a infinite ground plane. *Inverse Problem and Imaging*, 7(2), 2013.
- [3] B. Berhail and L. Chorfi. Direct and inverse scattering problem in a perturbed half-plane. *Universal journal of mathematics and mathematical Sciences*, 4 :35–49, 2013.
- [4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Mathématiques Appliquées pour la Maitrise. Paris : Masson, 1983.
- [5] F. Cakoni and D. Colton. The linear sampling method for cracks. *Inverse Problems*, 19 :279–295, 2003.
- [6] F. Cakoni and D. Colton. *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [7] L. Chorfi and B. Berhail. *Inverse scattering in a perturbed half-plane*. International Conferences, WAVES'13. Gammarth, Tunis, 3-7 june 2013.
- [8] L. Chorfi and P. Gaitan. Reconstruction of the interface between two-layered media using far field measurements. *Inverse Problems*, 27, 2011.
- [9] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1983.

BIBLIOGRAPHIE

- [10] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic And Electromagnetic Scattering Theory*, volume 93 of *Applied Mathematic in Sciences*. Springer, Berlin, 1998.
- [11] M. Duran. The helmholtz equation in a locally perturbed half-plane with passive boundary. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 71 :853–876, 2006.
- [12] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*, volume 375 of *Mathematics and Applications*. Kluwer Academic Publishers, London, 1996.
- [13] M. Hank. Regularizing properties of a truncated newton-cg algorithm for non-linear inverse problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 18, 1997.
- [14] C. Hansen. A matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numer. Algo.*, 46 :189–194, 2007.
- [15] F. Hettlich. Fréchet derivative in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 11 :371–382, 1995.
- [16] J. Jost. *Postmodern analysis*. Springer-Verlag. Berlin, 2003.
- [17] A. Kirsch. Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator. *Inverse Problems*, 14 :1489–1512, 1998.
- [18] A. Kirsch and R. Kress. Uniqueness in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 9 :285–299, 1993.
- [19] A. Kirsh. *An Introduction to mathematical theory of Inverse Problems*. Number 120 in AMS. Springer, 2nd Edition, 2011.
- [20] R. Kress. Inverse scattering from open arc. *Math. Methods Appl. Sci.*, 18 :267–293, 1995.
- [21] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematic in Sciences. Springer, Berlin, 1998 (2d ed.).
- [22] R. Kress. Newton method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares. *Inverse Problems*, 19 :S91–S104, 2003.

BIBLIOGRAPHIE

- [23] R. Kress and W. Rundell. Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem. *Inverse Problems*, 21 :1207–1223, 2005.
- [24] R. Kress and T. Tran. Inverse scattering for perturbed locally half-plane. *Inverse Problems*, 16 :1541–1559, 2000.
- [25] A. Malcolm and D.P. Nicholls. A boundary perturbation method for recovering interface shapes in layered media. *Inverse Problems*, 27, 2011.
- [26] L. Monch. On the numerical solution of the direct scattering problem for sound-hand open arc. *Comput. Appl. Math*, 71 :343–360, 1996.
- [27] R. Potthast. On the convergence of a new newton-type method in inverse scattering. *Inverse Problems*, 17 :1419–1434, 2001.
- [28] C.R. Ross S.N. Chandler-Wilde and B. Zhang. Scattering by infinite one-dimensional rough surfaces. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 455 :3767–3787, 1994.
- [29] G. Yan. Uniqueness of the inverse scattering problem of a locally perturbed half-plane. *Computers and Mathematics with Applications*, 48 :411–418, 2004.
- [30] Bo Zhang and Simon N. Chandler-Wilde. Integral equation methods for scattering by infinite rough surfaces. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 26 :463–488, 2003.