

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

THÈSE

En vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat (LMD) en MATHÉMATIQUES

Présentée par

Abdallah BOUZITOUNA

**Sur Quelques Méthodes Itératives Appliquées à
Certains Problèmes Inverses**

Directeurs de Thèse : Prof. Faouzia REBBANI U. Annaba
Dr. Nadjib BOUSSETILA U. Guelma

Jury :

Président : Prof. Lahcene CHORFI U. Annaba
Examineurs : Prof. Ahmed Salah CHIBI U. Annaba
Prof. Mohand Arezki MOUSSAOUI ENS Kouba, Alger
Dr. Fairouz ZOUYED U. Annaba

Année 2014

Remerciement



Tout d'abord Je tiens à remercier Allah pour tout ce que m'a été donné de force, courage et surtout de connaissances.

Je tiens à remercier mes deux directeurs de thèse, Docteur *Boussetila* Nadjib et Professeur *Rebbani* Faouzia. Si j'ai mené cette thèse à terme, c'est grâce à eux. Ils ont su me transmettre leur motivation et leur intérêt pour la recherche mathématique. J'ai beaucoup appris d'eux. Ils ont été à l'origine de mes progrès pendant ces cinq dernières années. Pendant cette période de recherche ils n'ont pas cessé de me pousser à aller de l'avant montrant une grande rigueur dans tout ce qu'ils entreprenaient, ce fut un réel plaisir de travailler avec eux. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance pour leur aide, leur soutien, leur conseils ainsi que la confiance qu'ils m'ont fait en acceptant de m'encadrer.

Je remercie également le Professeur *Yves* DERMENJIAN pour son aide, ses conseils précieux, sa disponibilité lors de mes séjours au sein de son laboratoire au CMI - Marseille (France). Ainsi que le Professeur *Abderrazek* KAROUI qui m'a aidé pendant le séjour au niveau de la faculté des sciences de Bizerte – Tunisie.

Je tiens également à remercier Le professeur *Lahcene* CHORFI qui me fait l'honneur de présider le jury ainsi que les Professeurs *Mohand* Arezki MOUSSAOUI et *Ahmed* Salah CHIBI et le Docteur *Fairouz* ZOUYED pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y consacrer une partie de leur temps.





Je remercie mon père *Bachir* qui a tout donné pour que je sois un homme de valeur, ma defunte mère *Akila* qui n'a pas arrêté de prier pour que je puisse finaliser mes études et obtenir le doctorat, mon frère *Tahar* et sœurs *Amel*, *Soraya* et *Asma* pour leurs encouragements, sans oublier *Khaled* et *Riyad*. Je remercie également ma future femme *Asma* qui a toujours été à mes côtés avec ses encouragements, son soutien moral et scientifique pour mener ce travail à terme.

Je remercie tous mes amis d'enfance *Zoubir*, *Oualid*, *Abdelfattah*, *Imed*; et d'université *Mehdi*, *Azzedine*, *Adel*, *Saïd*; mes collègues d'études *Fatah*, *Ishaak*, *Fouad*, *Abdelghani*, *Hamza*², *Billel*² et les autres camarads du Doctorat Mathématiques et Application et les membres du laboratoire *L.M.A* (Chercheurs et Personnel) et le personnel administratif du département de Mathématiques.

Sans oublier aussi mes amis *Bilel*, *Sadik*, *Amir*, *Zakaria*, *Faysal*, *Hamza*, *Fathi*, *Sabri*, ... et tous les autres que je n'ai pas mentionné.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.





*Ce travail est dédié à celle que j'aime et que j'aimerai
pour l'éternité*

ma chère défunte Mère ♡



Sur Quelques Méthodes Itératives Appliquées à Certains Problèmes Inverses

Résumé :

Dans ce travail, on étudie deux classes de problèmes inverses d'identification de sources, engendrées par une équation elliptique dans un domaine non-borné.

Notre objectif est de reconstruire des données manquantes/des sources à partir de mesures internes effectuées sur la solution. Ce problème aux limites est mal posé, et donc une procédure de régularisation est nécessaire pour le stabiliser.

En utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur A , on peut expliciter la solution formelle du problème sous la forme d'une série de Fourier avec des hautes fréquences. On propose dans notre étude une stratégie de régularisation basée sur deux méthodes : la troncature spectrale et la méthode itérative de Kozlov-Mazya. On donne l'analyse théorique de ces méthodes avec quelques expérimentations numériques.

Mots-clés : *Problèmes mal posés, problèmes inverses, opérateurs différentiels elliptiques, identification de sources, régularisation, stabilisation, méthodes itératives, méthodes de projection de Krylov.*

Some Iterative Methods Applied to Some Inverse Problems

Abstract:

In this work, we consider two classes of inverse problems governed by an elliptic equation posed on an unbounded domain.

These problems are ill-posed, and for a stable numerical approximation of the solution some regularization techniques have to be applied.

The formal solution is written as a Fourier series with high frequency (via its spectral eigenfunction expansion).

We suggest a regularization procedure based on the cut-off frequency method and the Kozlov-Mazya iterative method. We give a theoretical analysis of these methods, and some numerical examples to show the accuracy.

Keywords: *Ill-posed problems, inverse problems, elliptic partial differential equations, stabilization, regularization, iterative method, Krylov subspace method.*

حول بعض الطرق التكرارية المطبقة على بعض المسائل العكسية

ملخص :

في هذا العمل سندرس فئتين من المسائل العكسية لتحديد المصادر، التي تولدها معادلة إهليلجية في مجال غير محدود .

هدفنا هو إعادة بناء البيانات الناقصة \ المصادر من خلال القياسات الداخلية المطبقة على الحل. هذه المسألة ذات القيمة الحدية هي سيئة الطرح، وبالتالي إجراء طريقة للتسوية أمر ضروري لتحقيق الاستقرار.

باستخدام التحليل الطيفي للعامل A ، فإنه يمكن توضيح الحل الشكلي للمسألة على نحو سلسلة فورييه مع الترددات العالية . نقترح في هذه الدراسة استراتيجية التسوية على أساس طريقتان : الاقتطاع الطيفي و الطريقة التكرارية كزولوف - مازيا. نعطي التحليل النظري لهذه الأساليب مع بعض التجارب العددية.

الكلمات المفتاحية : مسائل سيئة الطرح ، مسائل عكسية ، معاملات جزئية بيضاوية ، تحديد المصادر ، التسوية ، الاستقرار ، أساليب تكرارية ، أساليب الإسقاط كريلوف .

Publications découlant de cette Thèse

- ✓ Bouzitouna Abdallah , Boussetila Nadjib and Rebbani Faouzia.
[*Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type*]
Boundary Value Problems (**2013**), 2013 :178 doi :10.1186/1687-2770-2013-178.

- Submission date 13 March 2013
- Acceptance date 18 July 2013
- Published : 2 August 2013
- Article URL : <http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2013/1/178>

Table des matières

Introduction	v
1 Résultats préliminaires et notations	1
1.1 Éléments de théorie spectrale	1
1.1.1 Opérateurs linéaires	1
1.1.2 Opérateurs bornés	2
1.1.3 Opérateurs non-bornés	3
1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné	4
1.2 Théorie de Riesz-Fredholm	5
1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts	5
1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité	5
1.3 Problèmes mal posés et problèmes inverses	9
1.3.1 Outils d'analyse des problèmes mal posés : cas linéaire	12
1.4 Méthodes de régularisation	13
1.4.1 La méthode de Tikhonov	14
1.5 Méthodes de projection sur des sous-espace Krylov	15
2 Problème inverse elliptique : identification de conditions aux limites	17
2.1 Formulation du problème	17
2.2 Résultats préparatoires	18
2.2.1 Opérateurs quasi-contractants	19
2.3 Position incorrecte et stabilisation du problème	20
2.3.1 Problème de Cauchy avec conditions de Dirichlet	20
2.3.2 Problème inverse de Cauchy	22
2.4 Régularisation	23
2.4.1 Méthode de troncature spectrale	24
2.4.2 Méthode itérative de Kozlov-Maz'ya	26
3 Problème inverse elliptique : identification de sources	31
3.1 Position du problème	31
3.2 Stabilisation et approximation	32
3.2.1 Régularisation par troncature spectrale	32
3.3 Approximation numérique du problème par La méthode de Krylov	33
3.3.1 Discrétisation et projection de la solution	33
3.4 Exemple	35
3.4.1 Régularisation de la Solution	36
3.4.2 Méthode de Troncature spectrale	37

4	Implémentations numériques	39
4.1	Applications	39
4.1.1	Méthode itérative de Kozlov-Maz'ya	39
4.1.2	Méthode de Troncature spectrale	40
4.2	Résultats numériques	41
4.2.1	Cas exact	41
4.2.2	Cas inexact	56
A	Méthodes de projection sur des sous-espaces de Krylov	83
A.1	Méthodes itératives pour le calcul de $f(A)b$	83
A.1.1	Sous-espaces de Krylov	84
A.1.2	Cas symétrique de Lanczòs	88
A.1.3	Approximation de Krylov	89
A.2	Cas non-symétrique de Lanczòs	90
A.3	Résultats d'exactitude	91
B	Fonctions de matrices	93
B.1	Série de Taylor	93
B.2	Formes canoniques de Jordan	93
B.3	Interpolation de Hermite	95
B.4	Définition de $f(A)$ par l'intégrale de Cauchy	95
C	Programmes MATLAB	97
C.1	Bloc de la méthode de Krylov	97
C.2	Bloc de la méthode de Troncature Spectrale	100
C.3	Bloc de la méthode de Kozlov-Maz'ya	100
D	Publication	103
	Bibliographie	127

INTRODUCTION

PROBLÉMATIQUE DE LA THÈSE

■ PROBLÈMES MAL POSÉS

En 1923, le mathématicien français J. Hadamard a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [72]. Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique et dépend continûment des données (stabilité). Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution sont considérées. Dans ce même livre Hadamard laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. Petrovsky) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.

La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques (voir [48, 87, 121, 82]).

■ PROBLÈMES INVERSES

L'étude des phénomènes dans la nature nous permet de calculer des quantités ou des propriétés physiques d'un modèle donné. On distingue alors deux types de problèmes : les problèmes directs et les problèmes inverses.

De manière schématique, un problème inverse peut être formulé comme étant une relation fonctionnelle (Input, Système, Output), où l'objectif d'étude est d'identifier des causes connaissant des effets. D'après J.B. Keller [89], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause.

La causalité et l'irréversibilité donnent une dichotomie entre les phénomènes physiques, qui peuvent être quantifiés mathématiquement en deux classes de problèmes : les problèmes bien posés et les problèmes mal posés. En se référant à cette dichotomie, le mot problèmes inverses désigne tous les problèmes qui partagent le caractère mal posé par opposition aux problèmes dits directs.

Les problèmes inverses sont un domaine trop vaste pour que nous puissions en donner un exposé exhaustif. Cette thématique a connu un essor considérable ces dernières décennies, parallèlement au développement de techniques numériques et des moyens de calcul permettant leur résolution. On peut les classer en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues,

et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

Lorsqu'il s'agit d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir d'observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du problème direct). Cette inversion, qui est souvent mal posée, nécessite un traitement particulier des instabilités, par des techniques dites de régularisation qui consistent à perturber légèrement le problème, en éliminant les hautes fréquences responsables de cette instabilité, de manière à rendre le problème en question bien posé et numériquement résoluble.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy mal posés. Parmi elles, on peut citer :

La méthode itérative alternative initialement proposée par Kozlov et al. 1991 [99]. Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés dont la solution converge, pour des données appartenant à certaines classes admissibles, vers la solution du problème original.

La méthode de quasi-réversibilité initialement introduite par Lattès & Lions 1967 [107] consiste à transformer le problème de Cauchy mal posé d'ordre 2 en un problème bien posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4) en introduisant un certain paramètre (terme de correction). La convergence vers le problème d'origine est assurée quand ce paramètre tend vers 0. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre quelques problèmes inverses elliptiques, notamment Klibanov & Santosa 1992 [92], Bourgeois 2005 [25, 26]. Pour plus de détails, on renvoie à la référence [133]

La régularisation par les conditions non locales (A.B.C.-method ou Q.B.V.-method) introduite par Abdulkerimov 1977 [7] et qui a été développée récemment par Hao et al. 2009 [70]. Le principe de cette approche consiste à perturber légèrement le problème original en le remplaçant par un problème non-local. Dans [133], on trouve un bon exposé accompagné d'une série d'expérimentations justifiant l'efficacité de cette méthode.

Dans le même contexte, d'autres approches d'aspect numérique ont été développées pour améliorer le calcul des solutions de certains problèmes elliptiques à données manquantes, par exemple : Andrieux et al 2006 [10], Elden & Simoncini [50].

L'étude intensive des problèmes inverses est dictée par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique. Toute problématique directe génère une variété de problèmes inverses, qui donne naissance à des questions théoriques et des défis numériques.

■ MOTIVATION PHYSIQUE

La présente thèse porte sur l'étude d'une classe de problèmes inverses d'identification de sources à partir d'observations supplémentaires fournies par des valeurs internes de la solution sur un sous-domaine de la géométrie considérée, où évolue la solution décrivant le phénomène physique considéré.

Lorsqu'on veut déterminer le flux de la température ou de la chaleur sur la surface d'un corps, où la surface elle-même est inaccessible aux mesures directes, on est donc obligé de prendre des mesures internes, et à partir de ces mesures, on essaie de reconstruire les données recherchées.

On peut citer par exemple la mesure du puits [126] utilisable par les géologues et les géophysiciens pour déterminer la température sur la surface de la terre. Pour cela, il est utile de faire des mesures intérieures plutôt que sur la surface, puisque les mesures sur la surface sont susceptibles d'être affectées par des bruits parasites.

Les problèmes inverses intervenant dans la reconstitution de sources et/ou de conditions aux limites sur le bord ou une partie du bord, ont été largement étudiés et expérimentés dans plusieurs applications : la détection des fissures, le Contrôle Non Destructif, la corrosion, l'électro-cardiologie, et d'autres domaines pratiques. Voir [80, 22, 42, 88], ainsi que les références qui y sont citées.

CONTENU DE LA THÈSE

■ La thèse est composée d'une introduction, de quatre chapitres, d'une conclusion et de quelques annexes.

■ Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle, ainsi que les outils d'analyse des problèmes mal posés. Un aperçu non exhaustif sur les méthodes de Krylov est donné pour faciliter la lecture et comprendre l'intérêt de ces approches dans l'approximation numérique des problèmes inverses.

■ Le chapitre 2 traite un problème inverse elliptique engendré par une équation elliptique sur une géométrie non bornée, où l'objectif d'étude est de reconstruire une donnée de Dirichlet. La stratégie de régularisation utilisée est basée sur la méthode de troncature spectrale et la méthode itérative de Kozlov-Mazya.

■ Le chapitre 3 est consacré à la régularisation d'un problème inverse d'identification d'une source engendré par une équation elliptique sur une géométrie non bornée. On propose pour ce cas une méthode de régularisation des problèmes inverses basée sur la troncature spectrale, qui nous permet de construire une solution approchée et stable. Ensuite, la solution stabilisée est projetée sur un sous espace de Krylov approprié. Cet algorithme nous fournit une méthode pratique et simple pour calculer numériquement la solution stabilisée.

■ Dans le chapitre 4, on donne quelques expérimentations numériques justifiant les résultats théoriques pour les deux classes de problèmes considérés dans notre investigation.

Notre travail est une extension de la série des travaux [2, 3, 79, 117, 118, 119, 121] et des études qui ont été faites dans cette direction.

La thèse est clôturée par une conclusion et quelques annexes (A,B,C,D).

Résultats préliminaires et notations



l'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On se place dans un cadre hilbertien $(H_1 \rightarrow H_2)$, où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , muni de la norme $|\cdot|_{H_i}$ et le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H_i}$, $(i = 1, 2)$.

1.1 Éléments de théorie spectrale

Références

- H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).
- R. Dautray, J.-L. Lions ; Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].
- E.B. Davies ; Linear Operator and their Spectra, Cambridge University Press (2007).
- I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek ; Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser (2003).
- D. Huet ; Décomposition Spectrale et Opérateurs, PUF (1976).
- P. Lévy-Bruhl ; Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés, Dunod (2003).

1.1.1 Opérateurs linéaires

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de H_1 , que l'on suppose en général dense dans H_1 . L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ |Au|_{H_2}, u \in \mathcal{D}(A), |u|_{H_1} = 1 \}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H_1 .

• Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$\mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

1.1.2 Opérateurs bornés

On note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathcal{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des **opérateurs linéaires continus** de H_1 dans H_2 (resp. des **endomorphismes continus** de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{|Bu|_2}{|u|_1}.$$

Définition 1.1.1 On dit qu'une application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est **invertible** ssi il existe une application $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application S' si elle existe est unique. On notera $S' = S^{-1}$ et

$$\mathbf{Inv}(H_1, H_2) := \{S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), S \text{ invertible}\}.$$

Théorème 1.1.2 [Théorème des isomorphismes de Banach]

Toute bijection linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est invertible avec inverse continue.

Définition 1.1.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle **ensemble résolvant** de A , l'ensemble

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est invertible } (\iff \text{bijectif}) \right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le **spectre** de A et sera noté

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

On appelle **rayon spectral** (noté $\text{spr}(A)$) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\text{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

► Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.

Le spectre ponctuel de A (noté $\sigma_p(A)$) est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A_λ soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff \mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A , il lui correspond $0 \neq h \in H$ tel que $Ah = \lambda h$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ .

Définition 1.1.4 (et proposition) Soit $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, appelé adjoint de S , qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^* h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\|S\| = \|S^*\|, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si S est bijectif (\implies invertible), alors S^* l'est aussi, et $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

Définition 1.1.5 Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est **auto-adjoint** si $A = A^*$.

$$A = A^* \iff (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

1.1.3 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.6 On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \rightarrow v$ dans H_2 , alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

► L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe ($\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$) dans H_1 .

Théorème 1.1.7 [Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1 , alors A est borné

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = H_1 \implies A \text{ borné}).$$

Définition 1.1.8 (et proposition) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A , comme suit :

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H_2 \rightarrow H_1$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\|_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \mapsto g(u) = \langle v, Au \rangle$ se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : H_1 \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c \|u\|_{H_1}$, $\forall u \in H_1$. Par suite $f \in H_1'$ $\simeq H_1$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v, Au \rangle_{H_2} = \langle A^* v, u \rangle_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

► Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 1.1.9 On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A), \quad (Au, v) = (u, Av)$$

Définition 1.1.10 L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ et } (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 1.1.11 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur fermé symétrique. A est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.12 [Caractérisation des opérateurs à image fermée]

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbf{R}(A)$ est fermé, (ii) $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé, (iii) $\mathbf{R}(A) = \mathbf{N}(A^*)^\perp$, (iv) $\mathbf{R}(A^*) = \mathbf{N}(A)^\perp$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.13 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est surjectif, i.e., $\mathbf{R}(A) = H_2$,
- (b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

- (c) $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé.

Corollaire 1.1.14 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur H_2 si et seulement s'il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que

$$|u| \leq m_1|Au|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$|v| \leq m_2|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé^{1 2 3} et à domaine dense.

Définition 1.1.15 On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le spectre de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

• On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Cet opérateur est appelé la *résolvante* de A .

• L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1; A)R(\lambda_2; A).$$

• Le spectre de A est donc un fermé de \mathbb{C} , et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

• Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

-
1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
 2. Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
 3. Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A , il lui correspond au moins $0 \neq \vartheta \in \mathcal{D}(A)$ tel que $A\lambda\vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand H est un espace de fonctions) correspondant à λ .

- Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ donc $A\lambda$ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :
 - Si $\mathbf{R}(A\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre *résiduel* de A .
 - Si $\mathbf{R}(A\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre *continu* de A .

1.2 Théorie de Riesz-Fredholm

1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.2.1 On dit qu'un opérateur $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est **compact** si $K(B_{H_1}(0, 1))$ est relativement compacte pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 et on pose $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$.

► La compacité d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \iff \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightarrow 0 \text{ (faiblement)} \implies Tx_n \rightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

► Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$ (resp. $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S_2S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$.

► [Théorème de Schauder] Si K est compact, alors K^* est compact. Et réciproquement.

Théorème 1.2.2 Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ avec $\dim(H) = \infty$. Alors on a :

- (a) $0 \in \sigma(K)$,
- (b) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- (c) l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.2.3 On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} (x, e_k) \lambda_k e_k.$$

1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité

- **Version discrète**

Définition 1.2.4 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné. Alors A est dit à **résolvante compacte** si

$$\forall \lambda \in \rho(A), \quad R(\lambda; A) \in \mathcal{K}(H).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.2.5 *Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est à résolvante compacte ssi il existe $\mu \in \rho(A)$ tel que $R(\mu; A) \in \mathcal{K}(H)$.*

Théorème 1.2.6 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors*

- (1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,
- (2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,
- (3) $A \geq \theta \iff \sigma(A) \subset [\theta, \infty[$.

Théorème 1.2.7 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors A est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans H , $(e_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \rightarrow +\infty, \quad Ae_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Remarque 1.2.8 *Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint avec $A \geq \theta > 0 \implies 0 \in \rho(A)$, et l'injection $H_1 := (D(A), |\cdot|_G) \hookrightarrow H$ est compacte, alors A est à résolvante compacte et donc diagonalisable.*

• **Version continue**

Définition 1.2.9 *Une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projections orthogonales dans H est appelée famille spectrale ou encore résolution de l'identité si elle satisfait aux conditions :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E_\lambda E_\mu = E_{\inf(\lambda, \mu)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I, \\ \text{où } E_{-\infty} h = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda h, \quad E_{+\infty} h = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda h, \quad h \in H, \\ (iii) \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda \text{ où } E_{\lambda+0} h = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon} h, \quad h \in H. \end{array} \right.$$

Les limites sont prises au sens de la norme de H .

Théorème 1.2.10 *Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint dans H . Alors il existe une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que*

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda x, y), \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x.$$

On note symboliquement $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$.

Théorème 1.2.11 *Soit $\lambda \mapsto f(\lambda)$ une fonction continue à valeurs réelles. Soit $\mathcal{D} \subset H$ défini par :*

$$\mathcal{D} = \left\{ h \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty \right\}.$$

Alors \mathcal{D} est dense dans H et on définit un opérateur auto-adjoint S dans H par :

$$(Sx, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E_\lambda x, y), \quad x \in \mathcal{D}, \quad y \in H,$$

de domaine $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}$.

1.2.2.1 Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert H , $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$,
 $\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$, sa décomposition spectrale.

Définition 1.2.12 On définit :

- Les puissances de A .

$$A^r = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathcal{D}(A^r) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

On note ici, que pour tout $r \leq 0$, $A^r \in \mathcal{L}(H)$, et si $r = 0$, $A^0 = I$.

Pour tout $r \geq 0$ et pour tout $h \in \mathcal{D}(A^r)$, on a $(A^r h, h) \geq \lambda_0^r |h|^2$.

Pour tout $r \geq 0$, $\mathcal{D}(A^r)$ muni de la norme $|h|_r^2 = |A^r h|^2$, $h \in \mathcal{D}(A^r)$, est un espace de Hilbert.

Si $0 \leq r_1 \leq r_2$, $\mathcal{D}(A^{r_2}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^{r_1})$ et $\mathcal{D}(A^{r_2})$ est dense dans $\mathcal{D}(A^{r_1})$.

- $f(A)$ pour une fonction f continue sur \mathbb{R} .

$$f(A) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda, \quad h \in \mathcal{D}(f(A)) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

1.2.2.2 Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm

On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact donné par sa décomposition spectrale :

$$\forall h \in H, \quad h = h_0 + \sum_{k \geq 1} (h, e_k) e_k, \quad h_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Th = \sum_{k \geq 1} (h, e_k) \lambda_k e_k.$$

Considérons l'équation

$$(T - \lambda I)f = g, \tag{1.1}$$

où $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n$, $g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e_n$ sont deux vecteurs de H donnés.

- Si $\lambda \notin \sigma(A)$, la solution de l'équation (1.1) est donnée par :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda}.$$

• Si $\lambda = \lambda_s \neq 0$, l'équation (1.1) n'a de solution que si $g_s = 0$ ($\iff g \in \ker(T - \lambda_s I)^\perp$) et dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n \neq s}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda_s} \right] + G_s,$$

où G_s est un élément arbitraire de $\ker(T - \lambda_s I)$.

- Si $\lambda = 0$, pour que l'équation $Tf = g$ ait une solution il faut et il suffit que

$$f_0 = 0 \iff f \in \mathbf{N}(T)^\perp = \overline{\mathbf{R}(T)}$$

et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^2}$$

soit convergente. Dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n \right] + G_0,$$

où G_0 est un élément arbitraire de $\ker(T)$.

1.2.2.3 Décomposition en valeurs singulières

Considérons maintenant un opérateur compact $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, où H_1, H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables. L'une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Th_1 = h_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD) ⁴ de l'opérateur T . Cette décomposition propose des bases pour les espaces de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

Définition 1.2.13 (*Valeur singulière.*)

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le nombre réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $K = T^*T : H_1 \rightarrow H_1$.

Théorème 1.2.14 (Décomposition en valeurs singulières (SVD)) Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $\mathbf{N}(T)$. Alors il existe une suite de valeurs singulières (s_n) et deux systèmes orthonormés $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tels que :

1. (s_n) est décroissante, $s_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
2. $T\varphi_k = s_k\psi_k, T^*\psi_k = s_k\varphi_k$.
3. $\forall h \in H_1, h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k) \varphi_k + Pr_0 h$.
4. $\forall h \in H_1, Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k) \psi_k$.
5. $\forall \tilde{h} \in H_2, T^* \tilde{h} = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \psi_k) \varphi_k$.

Le système $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$ est appelé système singulier de T .

La famille (φ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{N}(T)^\perp$, la famille (ψ_n) est une base hilbertienne de $\overline{\mathbf{R}(T)}$.

Remarque 1.2.15 *Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème inverse donné (cf. [48]).*

4. La notion de valeurs singulières généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints.

1.3 Problèmes mal posés et problèmes inverses

Problèmes directs. Si on note par \mathbf{P} l'espace des paramètres, \mathbf{E} l'espace des excitations et \mathbf{R} l'espace des états (réponses), alors le problème direct $L : \mathbf{P} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$, consiste à calculer la réponse d à partir de la donnée des sollicitations x et des paramètres p . Les équations de la physique donnent en général la réponse d comme fonction de x et $p : L(x, p) = d$, la notation L symbolise les équations de la physique du problème considéré ; on parle parfois du modèle physique.

Problèmes inverses. D'un point de vue "physique" ou "expérimental", on dit qu'on a un problème inverse toute situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur physique p inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur d directement accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement d à partir de p (ce que l'on note symboliquement $d = G(p)$).^{Réf 5}

► **Problèmes directs et Problèmes inverses en EDP**

- Dans le cas de problèmes directs, étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on s'intéresse aux solutions $u : \Omega \times [0, \infty[\ni (x, t) \rightarrow u(x, t) \in E$ de

$$\begin{cases} u_t + F\left(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u\right) = f, & \text{dans } \Omega \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g_i, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

- Dans le cas de problèmes inverses ; à partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP (mesures internes, mesures frontières), on doit retrouver par exemple :

- $f, g_1, \dots, g_q \rightarrow$ problème d'identification de sources.
- $u_0 \rightarrow$ problème d'identification de données initiales.
- $F \rightarrow$ problème d'identification de coefficients.
- $\Omega \rightarrow$ problème d'identification géométrique.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé⁶

Définition 1.3.1 [72], Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \supseteq D(A) \rightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est **bien posé** au sens de HADAMARD si

- | | |
|-------------|---|
| Existence : | Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$. |
| Unicité : | Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$. |
| Stabilité : | La solution x dépend continûment de la donnée y . |

5. Marc Bonnet, Problèmes inverses : Cours de DEA Dynamique des Structures et Couplages (2004).

6. Alors que les mêmes causes provoquent les mêmes effets, des effets identiques peuvent avoir de multiples causes : les problèmes inverses sont mal posés.

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Remarque 1.3.2 Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Remarque 1.3.3 La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

Définition 1.3.4 (Lavrentiev 1959) (Stabilité conditionnelle) Soit $A : X \supseteq D(A) \rightarrow Y$ un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème $Ax = y$ est conditionnellement stable (ou correct au sens de TIKHONOV) sur $M \subset \mathcal{D}(A)$ s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega(\|Ax_2 - Ax_1\|), \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble M est appelé ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de u à M signifie une certaine régularité ou une certaine bornitude.

On donne ici quelques exemples de problèmes mal posés.

Exemple 1.3.5 Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$. On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une solution du problème (1.2). On remarque que $(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.2) ne dépendent pas continûment des données initiales, d'où le problème est mal posé.

Exemple 1.3.6 Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Ce problème consiste à déterminer $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifie :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $\psi \in L_2(0, \pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (1.3) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u_0(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (1.3) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$ mais

$$\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty.$$

On voit très clairement que le problème (1.3) est instable donc mal posé. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$, telle que $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (1.3) si et seulement si φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K}\varphi = \psi, \quad u(xT) = \int_0^{\pi} \mathcal{K}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où $\mathcal{K}(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(n\xi)$.

L'opérateur intégral \mathcal{K} est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où \mathcal{K}^{-1} n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (1.3).

Exemple 1.3.7 Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases} \quad (1.4)$$

où φ, ψ sont des fonctions données dans H , et $A : \mathcal{D}(A) : H \rightarrow H$ tel que $A = A^*$ et $A \geq \delta > 0$. Si $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots$, ne sont pas des valeurs propres de A , alors l'opérateur $(\sin(T\sqrt{A}))$ est injectif, et la solution formelle du problème (1.4) est donnée par :

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \psi + \sin(t\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \varphi.$$

Inversement, si $\left\{\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots\right\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$, alors la solution du problème (1.4) n'est pas unique. Le problème (1.4) est mal posé au sens d'HADAMARD dans les deux cas : les valeurs $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots$, peuvent être proches des valeurs propres de A :

$$[\delta, +\infty[\ni \lambda \mapsto \frac{1}{\sin(T\sqrt{\lambda})} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

► On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1. **La non unicité.** Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité (conditions a priori).
2. **L'instabilité.** Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique.

Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quelque soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on approxime le problème original par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de position incorrecte (voir [48])

1.3.1 Outils d'analyse des problèmes mal posés : cas linéaire

Dans l'étude des équations de la forme :

$$B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2, u \longmapsto Bu = v,$$

la fermeture de $\mathbf{R}(B)$ est une propriété cruciale, pour que l'inverse de B soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique de cette propriété :

Théorème 1.3.8 (Théorème de Banach sur l'inversion bornée) *On suppose que B est injectif. Alors $B^{-1} : \mathbf{R}(B) \longrightarrow H_1$ est borné si et seulement si $\mathbf{R}(B)$ est fermée.*

Théorème 1.3.9 (Théorème de PICARD) *(voir [94]) Soit $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ un opérateur compact, et $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), n \in \mathbb{N}\}$ son système singulier. Alors le problème :*

$$Kf = g$$

est résoluble si et seulement si

$$g \in \mathbf{N}(K^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(K)} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + f_0, f_0 \in \mathbf{N}(K).$$

- ▶ Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement ou faiblement mal posés.
- ▶ Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant :
Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables, $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, et soit le problème inverse :

$$T : H_1 \longrightarrow H_2, u \longrightarrow Tu = v. \quad (1.5)$$

Définition 1.3.10 (cf. [48]) *On dit que le problème (1.5) est faiblement mal posé (resp. fortement mal posé), si les valeurs singulières s_n de $K = T^*T$ sont équivalentes à $\frac{C}{n^p}$ (resp. Ce^{-np}), où C et p sont des constantes positives.*

1.4 Méthodes de régularisation

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à TIKHONOV [141], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la « solution régularisée » obtenue par « inversion régularisée » dépend continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre « proche dans un certain sens » du premier et qui est bien posé.

Considérons le problème inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif.⁷ On suppose que $h_2 \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.⁸

Définition 1.4.1 *Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \longrightarrow H_1, (\alpha > 0)$ est dite "famille régularisante" pour l'opérateur K si*

$$\forall h_1 \in H_1, \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K) h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \longrightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque 1.4.2 *Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H_1 \longrightarrow H_2$, où H_1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.*

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^η la donnée perturbée où le nombre $\eta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $|h_2 - h_2^\eta| \leq \eta$.

7. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace H_1 au complément orthogonal de $\mathbf{N}(K)$, où \mathbf{N} désigne le noyau.

8. Il faut noter que notre problème inverse $Kh_1 = h_2$ est toujours mal posé à cause de la non continuité de K^{-1} .

Notons $h_1^{\alpha,\eta} = R_\alpha h_2^\eta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $|h_1 - h_1^{\alpha,\eta}|$, on obtient

$$|h_1 - h_1^{\alpha,\eta}| = |(h_1 - R_\alpha h_2) + (R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha,\eta})| \leq \eta \|R_\alpha\| + |(h_1 - R_\alpha h_2)|. \quad (1.6)$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.6) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque 1.4.2, nous avons vu que $\|R_{\alpha_n}\| \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow 0$. Donc il ne faut pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (1.6) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α . Nous allons faire tendre le niveau de bruit η vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1 .

Définition 1.4.3 Une stratégie de régularisation $\eta \rightarrow \alpha(\eta)$ est admissible si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(\eta) = 0 \text{ et } \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\eta \in H_2} \left\{ |R_{\alpha(\eta)} h_2^\eta - h_1| \text{ tel que } |Kh_1 - h_2^\eta| \leq \eta \right\} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Les stratégies de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degré de complexité. (Voir. [12, 48, 59, 115]). Parmi les méthodes les plus connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

1.4.1 La méthode de Tikhonov

- Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé $Kf = g$ est de choisir comme solution l'élément f_α qui minimise la fonctionnelle

$$|Kf - g|^2 + \alpha |f|^2, \alpha > 0. \quad (1.8)$$

L'existence et l'unicité du minimum sont assurées par la coercivité et la stricte convexité de $f \mapsto |f|^2$. Le paramètre α est appelé paramètre de régularisation et le terme $|f|^2$ est appelé terme de correction. Le choix du paramètre α est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité.

On a le Théorème suivant :

Théorème 1.4.4 [87] Soit $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum f_α . L'élément f_α est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_\alpha = (\alpha I + K^* K) f_\alpha = K^* g. \quad (1.9)$$

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* : H_2 \rightarrow H_1$,⁹ est appelée famille régularisante de Tikhonov. On a $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ et tout choix de $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ avec $\eta^2 \alpha(\eta) \rightarrow 0$ est admissible. Pour les résultats de la vitesse de convergence, on peut consulter les références [48, 115].

- Le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi via le principe d'écart (en anglais : discrepancy principle) de MOROZOV [112]. Ce principe consiste à fixer le paramètre tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit (cf. [113], [147]).

Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mis en oeuvre.^{10, 11}

- Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre α est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit $\eta > 0$ (cf. [115], page 172).

1.5 Méthodes de projection sur des sous-espace Krylov

La modélisation des problèmes que l'on rencontre en ingénierie et dans les domaines appliqués, conduit éventuellement après une étape de discrétisation, à la résolution de systèmes linéaires d'équations en dimension finie. Le traitement numérique de ces systèmes complexes nécessite des méthodes rapides et stables, d'où le recours à des techniques itératives de projections orthogonales qui permettent de réduire la taille du système à étudier. Ces méthodes de projection consistent en général à construire une matrice dite projetée, de taille plus petite que celle de la matrice de départ. Parmi les approches de projection qui ont été largement étudiées et exploitées avec succès, il y a les méthodes de type Krylov qui sont basées sur des techniques de projection orthogonale sur un sous espace \mathcal{K}_m , appelé « sous-espace de Krylov » de taille m , où m croît avec les itérations. L'approche par des méthodes de type Krylov est assurée pour $m = N$ (en arithmétique exacte), bien qu'on espère qu'elle se produise pour $m \ll N$ (N étant la taille de la matrice du problème discret).¹² On note ici que ces méthodes sont connues sous le nom « les méthodes polynômiales ». Leur convergence est super-linéaire, de plus elles possèdent un effet régularisant remarquable pour les problèmes mal posés et les systèmes linéaires mal conditionnés.

Dans la littérature mathématique, on remarque que ces dernières années, un nombre intéressant de travaux a été consacré à ces approches. Cet effort scientifique

9. $(S_\alpha = S_\alpha^*, \langle S_\alpha h, h \rangle = |Sh|^2 + \alpha|h|^2 \geq \alpha|h|^2, \forall h \in H_1) \implies (\sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \implies 0 \in \rho(S_\alpha))$, i.e., S_α^{-1} existe et $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$.

10. **Méthodes a priori** : utilisation d'informations sur le niveau d'erreur et sur l'opérateur K .

11. **Méthodes a posteriori** : utilisent aussi les données g_η . $\alpha_{opt} := \max\{\alpha : |Kf_\alpha - g_\eta| \leq \eta\}$, où $f_\alpha = \inf_f \{|Kf - g_\eta|^2 + \alpha|f|^2\}$.

12. A. Touhami, Utilisation des filtres de tchebycheff et construction de préconditionneurs spectraux pour l'accélération des méthodes de krylov, Thèse de Doctorat 2005.

M. Hached, Méthodes de sous-espaces de Krylov matriciels appliquées aux équations aux dérivées partielles, Thèse de Doctorat 2012.

est un témoignage de la popularité et l'efficacité de ces outils mathématiques dans le traitement numérique de l'analyse spectrale de grande échelle.

Notre choix de cette stratégie numérique est basé sur trois aspects fondamentaux :

- Le fondement théorique solide développé par des grands spécialistes reconnus dans le domaine du développement de logiciels industriels. [29, 15, 52, 63, 64, 75, 76, 90, 110, 122, 139, 137, 145, 146], [67, 73], [33, 71, 50].
- Le type de convergence est super-linéaire [139].
- L'effet régularisant constaté dans le traitement numérique de certains problèmes inverses très complexes [33, 34, 35, 131, 71].

Dans cette partie, on expose une méthode itérative pour calculer numériquement le vecteur $y = f(A)b$, où $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est une matrice carrée arbitraire, $b \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur donné et f est une fonction régulière définie sur une partie contenant le spectre de la matrice A . On note ici que ce calcul est très complexe du fait que la matrice $f(A)$ peut ne pas être simple, même si A est une matrice creuse (voir ²⁰⁰⁸ [75]). On peut également trouver certains développements récents dans ²⁰¹⁰ [27], ²⁰¹⁰ [67].

Définition 1.5.1 *On appelle sous espace de Krylov d'ordre m associé au couple (A, b) , $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ ($1 \leq m \ll N$), le sous-espace défini par*

$$\mathcal{K}_m(A, b) := \text{Vect}\{b, Ab, \dots, A^{m-1}b\}, \quad (1.10)$$

où $\text{Vect}\{\dots\}$ désigne l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\tilde{b} = b, \tilde{b}_1 = Ab, \dots, \tilde{b}_{m-1} = A^{m-1}b$.

Quelques propriétés de base de ces sous-espaces sont résumées dans le Lemme suivant :

Lemme 1.5.2 [1] *Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($A \neq I_n$) une matrice carrée et $b \in \mathbb{R}^N$ un vecteur non nul. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. $\mathcal{K}_1(A, b) \subsetneq \mathcal{K}_2(A, b) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{K}_{m-1}(A, b) \subsetneq \mathcal{K}_m(A, b)$;
2. $\mathcal{K}_m(A, b) = \{p(A)b \mid p \text{ est un polynôme de degré } \leq (m-1)\}$;
3. $\dim(\mathcal{K}_m(A, b)) \leq m$;
4. $\dim(A\mathcal{K}_m(A, b)) \leq \dim(\mathcal{K}_m(A, b))$;
5. $\dim(\mathcal{K}_m(A, b)) \leq \dim(\mathcal{K}_{m+1}(A, b))$;
6. $\mathcal{K}_m(\tau A, \sigma b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ pour tout réel $\tau \neq 0, \sigma \neq 0$;
7. $\mathcal{K}_m(A - \sigma I, b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ pour tout réel σ ;
8. $\mathcal{K}_m(PAP^* - \sigma I, b) = P\mathcal{K}_m(A, b)$ où P est une transformation unitaire $P^{-1} = P^*$.

Problème inverse elliptique : identification de conditions aux limites

2.1 Formulation du problème

Soit H un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\|\cdot\|$. On note par $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur H .

Soit $A: \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur strictement positif, auto-adjoint et à résolvante compacte. Dans ce cas A admet une base orthonormée formée de vecteurs propres $(\phi_n) \subset H$ associés aux valeurs propres réelles $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$, i.e.,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, n \in \mathbb{N}^*, \quad (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, \quad h_n = (h, \phi_n).$$

Dans ce travail, on s'intéresse au problème inverse de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_{yy} - Au = 0, & 0 < y < \infty, \\ u(0) = f, \\ u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où f est la condition aux limites inconnue qui doit être déterminée à partir des données intérieures du domaine

$$u(b) = g \in H, 0 < b < \infty. \quad (2.2)$$

Ce problème est une version généralisée du problème inverse de Cauchy engendré par une EDP elliptique de second ordre dans un domaine cylindrique. Comme un exemple, on peut citer le problème suivant :

Exemple 2.1.1 Soit le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace sur la bande $(0, \pi) \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} u_{yy}(x, y) + u_{xx}(x, y) = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, +\infty), \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, +\infty) = 0, & x \in [0, \pi] \\ u(x, y = b) = g(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ici, l'opérateur A est donné par

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi).$$

2.2 Résultats préparatoires

Dans cette section nous présentons les notations et le cadre fonctionnel qui seront utilisés dans ce travail et quelques notions fondamentales nécessaires à notre analyse.

On note par $S(y) = e^{-y\sqrt{A}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{\lambda_n}}(\cdot, \phi_n)\phi_n \in \mathcal{L}(H)$, $y \geq 0$, le C_0 -semigroupe généré par $-\sqrt{A}$. Quelques propriétés de $S(y)$ sont données dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 [120],

Pour cette famille d'opérateurs on a :

1. $\|S(y)\| \leq 1, \forall y \geq 0$;
2. la fonction $y \mapsto S(y)$, $y > 0$, est analytique ;
3. pour tout réel $r \geq 0$ et $y > 0$, l'opérateur $S(y) \in \mathcal{L}(H, \mathcal{D}(A^{\frac{r}{2}}))$;
4. pour tout entier $k \geq 0$ et $y > 0$, $\|S^{(k)}(y)\| = \|A^{\frac{k}{2}}S^{(k)}(y)\| \leq c(k)y^{-k}$;
5. pour tout $h \in \mathcal{D}(A^{\frac{r}{2}})$, $r \geq 0$ on a $S(y)A^{\frac{r}{2}}h = A^{\frac{r}{2}}S(y)h$.

Théorème 2.2.2 Pour $y > 0$, $S(y)$ est un opérateur auto-adjoint à image dense dans H ($S(y) = S(y)^*$, $\overline{R(S(y))} = H$).

Soit $h \in N(S(y_0))$, $y_0 > 0$, alors $S(y_0)h = 0$. Ce qui implique que $S(y)S(y_0)h = S(y+y_0)h = 0$, $y \geq 0$. En vertu de l'analyticité du semigroupe, on obtient que $S(y)h = 0$, $y \geq 0$. Pour montrer que $h = 0$, il suffit d'utiliser la continuité forte du semigroupe en 0. Ainsi, on a prouvé que $N(S(y_0)) = \{0\}$.

L'identité

$$\overline{R(S(y_0))} = N(S(y_0))^\perp = \{0\}^\perp = H,$$

nous permet de conclure que $R(S(y_0))$ est dense dans H .

Remarque 2.2.3 Pour $y = b$, ce théorème nous assure que $S(b)$ est un opérateur auto-adjoint, injectif et à image $R(S(b))$ dense dans H . Alors on peut définir son inverse $S(b)^{-1} = e^{b\sqrt{A}}$, qui est un opérateur non-borné, auto-adjoint et strictement positif :

$$\mathcal{D}(S(b)^{-1}) = R(S(b)) = \left\{ h \in H : \|e^{b\sqrt{A}}h\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

Rappelons maintenant un théorème fondamental dans l'analyse des problèmes inverses.

Théorème 2.2.4 *Théorème de Picard généralisé, [121]*

Soit $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint et soit E_μ la résolution spectrale de l'unité. Soit $\theta \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $Z(\theta) := \{t \in \mathbb{R} : \theta(t) = 0\}$. On suppose que l'ensemble $Z(\theta)$ est vide ou contient des points isolés seulement. Alors l'équation vectorielle

$$\theta(B)\varphi = \psi$$

est résoluble, si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} |\theta(\lambda)|^{-2} d|E_\lambda \psi|^2 < \infty.$$

De plus,

$$N(\theta(B)) = \{0\} \iff \sigma_p(B) \cap Z(\theta) = \emptyset.$$

En se basant sur la base $\{\phi_n\}$, on introduit l'échelle de Hilbert $(H^s)_{s \in \mathbb{R}}$ (resp. $(\mathfrak{E}^s)_{s \in \mathbb{R}}$) induit par \sqrt{A} comme suit

$$H^s = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}^{-2s} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\},$$

$$\mathfrak{E}^s = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{\infty} e^{2bs\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

2.2.1 Opérateurs quasi-contractants

Définition 2.2.5 *Un opérateur linéaire $M \in \mathcal{L}(H)$ est dit quasi-contractant si*

$$\|M\| \leq 1.$$

Théorème 2.2.6 [134],

Soit $M \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint positif avec $\|M\| \leq 1$. Posons $V_0 = N(M)$ et $V_1 = N(I - M)$. Alors on a

$$s - \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \Pi_{V_1}, \quad s - \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M^n) = \Pi_{V_0}$$

i.e.,

$$\forall h \in H, \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n h = \Pi_{V_1} h, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M^n) h = \Pi_{V_0} h,$$

où la notation Π_W désigne la projection orthogonale sur le sous-espace fermé W .

Considérons l'équation opérationnelle

$$S\varphi = (I - M)\varphi = \psi \tag{2.4}$$

où M est un opérateur quasi-contractant.

20 Chapitre 2. Problème inverse elliptique : identification de conditions aux limites

Théorème 2.2.7 Soit M un opérateur linéaire auto-adjoint, positif et quasi-contractant sur H . Soit $\hat{\psi} \in H$ tel que l'équation (2.4) a une solution $\hat{\varphi}$. Si 1 n'est pas une valeur propre de M , i.e., $(I - M)$ est injectif ($V_1 = N(I - M) = \{0\}$), alors les approximations successives

$$\varphi_{n+1} = M\varphi_n + \hat{\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

convergent vers $\hat{\varphi}$ pour toute donnée initiale $\varphi_0 \in H$.

Preuve. D'après l'hypothèse et en vertu du théorème 2.2.6, nous avons

$$\forall \varphi_0 \in H, M^n \varphi_0 \longrightarrow \Pi_{V_1} \varphi_0 = \Pi_{\{0\}} \varphi_0 = 0. \quad (2.5)$$

Par induction par rapport à n , il est facile de voir que φ_n a la forme explicite

$$\begin{aligned} \varphi_n &= M^n \varphi_0 + \sum_{j=0}^{n-1} M^j \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n)(I - M)^{-1} \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n) \hat{\varphi}, \end{aligned}$$

et (2.4) nous permet de conclure que

$$\hat{\varphi} - \varphi_n = M^n (\hat{\varphi} - \varphi_n) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty. \quad (2.6)$$

■

Remarque 2.2.8 Dans de nombreuses situations, certains problèmes inverses peuvent être formulés par des équations de Fredholm de première espèce de la forme $B\varphi = \psi$, où B est un opérateur compact, positif et auto-adjoint. Cette équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\varphi = (I - \omega B)\varphi + \omega\psi = L\varphi + \omega\psi,$$

où $L = (I - \omega B)$, et ω est un paramètre positif satisfaisant $\omega < \frac{1}{\|B\|}$. Il est facile de voir que l'opérateur L est quasi-contractant et 1 n'est pas une valeur propre de L . Il résulte du théorème 2.2.7 que la suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge et $(I - \omega B)^n \zeta \longrightarrow 0$, pour tout $\zeta \in H$ et $n \longrightarrow \infty$.

2.3 Position incorrecte et stabilisation du problème

Dans cette section, on donne la formulation du problème inverse de Cauchy avec conditions de Dirichlet. Des résultats théoriques sur la solution sont aussi rappelés pour bien analyser le problème en question.

2.3.1 Problème de Cauchy avec conditions de Dirichlet

Considérant le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} v_{yy} - Av = 0, & 0 < y < \infty, \\ v(0) = \xi, \\ v(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où ξ est une fonction à valeurs dans H .

Définition 2.3.1 [20, 96],

- Une fonction $v :]0, +\infty[\rightarrow H$ est appelée solution généralisée de l'équation (2.7) si $v \in \mathbf{E}_g = \mathcal{C}([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^2(]0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H^{-1})$, et pour tout $y \in]0, +\infty[$, $u(y) \in \mathcal{D}(A)$ qui satisfait l'équation (2.7) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Une fonction $v :]0, +\infty[\rightarrow H$ est appelée solution classique de l'équation (2.7) si $v \in \mathbf{E}_c = \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^2(]0, +\infty[; H)$, et pour tout $y \in]0, +\infty[$, $u(y) \in \mathcal{D}(A)$ qui satisfait l'équation (2.7) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Théorème 2.3.2 Le problème (2.7) admet une unique solution généralisée (resp. classique) si et seulement si $\xi \in H$ (resp. $\xi \in H_1$).

Preuve.

Avant de donner la preuve, on a besoin du résultat suivant. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} &\text{pour } \xi \in H \text{ trouver } v \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A)) \\ &\text{tel que} \\ &v'(y) + \sqrt{A}v(y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad v(0) = \xi \end{aligned} \tag{2.8}$$

Théorème 2.3.3 [20],

Pour tout $\xi \in H$, le problème (2.8) admet une unique solution, donnée par :

$$v(y) = S(y)\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{\lambda_n}}(\xi, \phi_n)\phi_n. \tag{2.9}$$

de plus, pour tout entier $k \geq 0$, $v \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{\frac{k}{2}}))$. De plus si $\xi \in \mathcal{D}(A^{\frac{j}{2}})$, alors $v \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{\frac{j}{2}})) \cap \mathcal{C}^j([0, +\infty[; H)$ et

$$\forall k, j \in \mathbb{N}, \left\| \frac{d^{(k+j)}}{dy} v(y) \right\| = \left\| A^{\frac{k}{2}} u(y)^{(j)} \right\| \leq \frac{c(k)}{y^k} \left\| A^{\frac{j}{2}} \xi \right\|.$$

Le théorème 2.3.3 nous fournit des résultats de régularité de la solution par rapport à la variable y . On a $v \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^j([0, +\infty[; H)$ pour tout $\xi \in \mathcal{D}(A^{\frac{j}{2}})$, $j \in \mathbb{N}$. Sous la même hypothèse, nous avons aussi un résultat plus précis, i.e., $v \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{C}^{j-k}([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{\frac{k}{2}}))$, $k \leq j$.

On revient maintenant à la preuve du théorème 2.3.2. En utilisant le développement de Fourier et les conditions aux limites de Dirichlet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} v(y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(y)\phi_n, \\ v(0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0)\phi_n = \xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n\phi_n, \\ v(+\infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(+\infty)\phi_n = 0. \end{aligned}$$

22 Chapitre 2. Problème inverse elliptique : identification de conditions aux limites

Ce qui donne la suite d'EDO

$$\begin{cases} v_n'' - \lambda_n v_n(y) = 0, & 0 < y < \infty, \\ v_n(0) = \xi_n, \\ v_n(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

Cette équation différentielle admet deux solutions fondamentales linéairement indépendantes

$$\varphi_n^+(y) = e^{+\sqrt{\lambda_n}y}, \quad \varphi_n^-(y) = e^{-\sqrt{\lambda_n}y},$$

et donc la solution générale s'écrit sous la forme

$$v_n(y) = c_n^+ e^{+\sqrt{\lambda_n}y} + c_n^- e^{-\sqrt{\lambda_n}y}, \quad c_n^+, c_n^- \in \mathbb{R}.$$

En tenant compte de $v_n(+\infty) = 0$ et $v_n(0) = \zeta_n$, on obtient $c_n^+ = 0$ et $c_n^- = \zeta_n$. Finalement, la solution de (2.10) est donnée par

$$v(y) = S(y)\xi = e^{-y\sqrt{A}}\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{\lambda_n}} \xi_n \phi_n, \quad \xi_n = (\xi, \phi_n). \quad (2.11)$$

■

Remarque 2.3.4 Il est facile de vérifier que $v(y)$ définie par (2.11) est solution du problème

$$u'(y) + \sqrt{A}u(y) = 0, \quad y \in]0, +\infty[, \quad u(0) = \xi.$$

Si $\xi \in H$ (resp. $\xi \in H_1$), alors du théorème 2.3.3 et de la remarque 2.3.4, on vérifie facilement que $v \in \mathbf{E}_g$ (resp. $v \in \mathbf{E}_c$) et $v(y) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $y \in]0, +\infty[$.

2.3.2 Problème inverse de Cauchy

En tenant compte de l'expression de la solution donnée par (2.11) et la condition supplémentaire (mesure interne) $v(b) = g$, On obtient

$$v(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-b\sqrt{\lambda_n}} f_n \phi_n = g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \phi_n. \quad (2.12)$$

où f_n (resp. g_n) est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de la fonction f (resp. g). On définit

$$K = S(b) : H \longrightarrow H, h \longmapsto Kh = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-b\sqrt{\lambda_n}} h_n \phi_n. \quad (2.13)$$

L'opérateur K introduit dans (2.13) est l'outil principal dans l'étude du problème (2.12). Plus précisément, on s'intéresse aux propriétés suivantes :

- (1) L'injectivité de l'opérateur K (identifiabilité).
- (2) L'existence et la continuité de l'inverse de l'opérateur K (classes admissibles et stabilité).

Il est facile de voir que K est linéaire, compact et auto-adjoint avec les valeurs singulières $(\sigma_k = e^{-b\sqrt{\lambda_k}})_{k=1}^{+\infty}$, de plus, on a

1. $N(K) = \{0\}$,
2. $R(K) = \left\{ h \in H : \left\| e^{b\sqrt{A}} h \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}$,
3. $\overline{R(K)} = H$.

En utilisant le théorème 2.2.4, on déduit les conditions de résolubilité du problème (2.12), ainsi que l'expression de la solution.

Corollaire 2.3.5 *Le problème inverse (2.12) admet une solution unique si et seulement si*

$$u(b) = g \in R(K) = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}. \quad (2.14)$$

Dans ce cas on a

$$f = u(0) = K^{-1}g = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{b\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n, \quad g_n = (g, \phi_n). \quad (2.15)$$

En d'autres termes, la solution f du problème inverse est obtenue à partir des données g via l'opérateur non borné $L = K^{-1}$ défini sur les fonctions g du sous-espace

$$D(L) = \left\{ g \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(g, \phi_n)|^2 < +\infty, \quad g_n = (g, \phi_n) \right\}$$

Corollaire 2.3.6 *le problème (2.1) – (2.2) admet une solution unique $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; H)$ si et seulement si*

$$u(0) \in H \iff g \in R(K) = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

Dans ce cas on a

$$u(y) = e^{(b-y)\sqrt{A}} g = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n. \quad (2.16)$$

A partir de cette représentation, on remarque que :

- $u(y)$ est stable dans l'intervalle $[b, +\infty[$ $\left(\sup_{y \in [b, +\infty[} \|u(y)\| \leq \|g\| \right)$;
- u est instable dans $[0, b[$. Cela découle des hautes fréquences

$$\omega_n = e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} \longrightarrow +\infty, n \longrightarrow +\infty.$$

2.4 Régularisation

Dans cette section on applique la méthode de troncature spectrale et la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya pour obtenir une solution approchée stable de notre problème mal posé.

2.4.1 Méthode de troncature spectrale

La manière standard de stabiliser un problème mal posé est d'éliminer les hautes fréquences et de considérer la solution tronquée comme une approximation de la solution instable.

Définition 2.4.1 Pour $N > 0$, la solution régularisée du problème (2.1) – (2.2) est donnée par

$$f_N = \sum_{n \leq N} e^{b\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n, \quad g_n = (g, \phi_n). \quad (2.17)$$

$$u_N(y) = \sum_{n \leq N} e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n, \quad g_n = (g, \phi_n). \quad (2.18)$$

Remarque 2.4.2 Si le paramètre N est suffisamment grand, f_N est proche de la solution exacte f . D'autre part, si le paramètre N est fixé, f_N est bornée. Le nombre entier positif N joue le rôle de paramètre de régularisation.

Remarque 2.4.3 Comme

$$\|u(y) - u_N(y)\| = \|S(y)(f - f_N)\| \leq \|f - f_N\| \implies \|u - u_N\|_\infty \leq \|f - f_N\|,$$

et si

$$g \in \mathfrak{C}^1, \text{ i.e., } \sum_{n=1}^{\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(g, \phi_n)|^2 < \infty$$

alors

$$\|f - f_N\| \longrightarrow 0, N \longrightarrow \infty.$$

ce qui implique que

$$\|u(y) - u_N(y)\|_\infty \longrightarrow 0, N \longrightarrow \infty.$$

Comme les données g dont dispose, viennent de l'expérience en général et ne sont pas connues de manière exacte, alors on suppose qu'on a des données inexactes g^δ proches des données g avec $\|g - g^\delta\| \leq \delta$, où δ désigne le niveau du bruit.

Soit (f_N^δ, u_N^δ) la solution régularisée du problème (2.1) – (2.2) avec les données inexactes g^δ :

$$f_N^\delta = \sum_{n \leq N} e^{b\sqrt{\lambda_n}} g_n^\delta \phi_n, \quad g_n^\delta = (g^\delta, \phi_n). \quad (2.19)$$

$$u_N^\delta(y) = \sum_{n \leq N} e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} g_n^\delta \phi_n, \quad g_n^\delta = (g^\delta, \phi_n). \quad (2.20)$$

Pour obtenir les estimations d'erreurs, on suppose que la solution recherchée satisfait la condition de régularité supplémentaire suivante :

$$\|A^{\frac{r}{2}} f\|^2 \leq E^2 < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^r e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \leq E^2, \quad (2.21)$$

où $E > 0$ est une constante donnée, et r est un réel positif.

Remarque 2.4.4 Soient g_1 et g_2 deux données exactes et soient $f_{1,N}$ et $f_{2,N}$ les solutions régularisées correspondantes. Alors

$$\|f_{2,N} - f_{1,N}\|_H^2 = \sum_{n \leq N} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(g_2 - g_1)_n|^2 \leq e^{2b\sqrt{\lambda_N}} \|g_2 - g_1\|_H^2. \quad (2.22)$$

Le résultat principal de cette méthode est

Théorème 2.4.5 Soit f_N^δ la solution régularisée donnée par (2.19) et f la solution exacte donnée par (2.15). Si $\|A^{\frac{r}{2}} f\| \leq E$, $r > 0$ et si on choisit $\sqrt{\lambda_N} \approx \frac{\theta}{b} \log(\frac{1}{\delta})$, $0 < \theta < 1$, alors on a l'estimation d'erreur suivante

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{b}{\theta}\right)^r \left(\frac{1}{\log(\frac{1}{\delta})}\right)^r E + \delta^{1-\theta}. \quad (2.23)$$

Preuve. Par des calculs directs, on a

$$\Delta_1 = \|f - f_N^\delta\| \leq e^{b\sqrt{\lambda_N}} \|g - g^\delta\| \leq e^{b\sqrt{\lambda_N}} \delta.$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 = \|f - f_N\|^2 &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}^{2r}} \sqrt{\lambda_n}^{2r} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{N+1}}^{2r}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n}^{2r} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{N+1}}}\right)^{2r} E^2 \end{aligned}$$

De l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \|f - f_N\| + \|f_N - f_N^\delta\| = \Delta_2 + \Delta_1$$

d'où

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{N+1}}}\right)^r E + e^{b\sqrt{\lambda_N}} \delta. \quad (2.24)$$

En choisissant $\sqrt{\lambda_N} = \frac{\theta}{b} \log(\frac{1}{\delta})$, $0 < \theta < 1$, on obtient

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{b}{\theta}\right)^r \left(\frac{1}{\log(\frac{1}{\delta})}\right)^r E + \delta^{1-\theta}.$$

■

Corollaire 2.4.6 Soit u_N^δ la solution régularisée donnée par (2.20) et u la solution exacte donnée par (2.16). Si $\|A^{\frac{r}{2}} f\| \leq E$, $r > 0$ et si on choisit $\sqrt{\lambda_N} = \frac{\theta}{b} \log(\frac{1}{\delta})$, $0 < \theta < 1$, alors on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_N^\delta\|_\infty \leq \|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{b}{\theta}\right)^r \left(\frac{1}{\log(\frac{1}{\delta})}\right)^r E + \delta^{1-\theta}. \quad (2.25)$$

2.4.2 Méthode itérative de Kozlov-Maz'ya

Dans cette section, on donne une approximation stable de la solution de notre problème mal-posé en utilisant une méthode itérative de type Kozlov-Maz'ya.

2.4.2.1 Description de la méthode

L'algorithme itératif pour résoudre le problème inverse (2.1) – (2.2) commence par le choix arbitraire de $f_0 \in H$. La première approximation $u^0(y)$ est la solution du problème direct

$$\begin{cases} u_{yy}^0 - Au^0 = 0, & 0 < y < \infty \\ u^0(0) = f_0, \\ u^0(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

Si la paire (u^k, f_k) a été construite, on définit f_{k+1} par

$$(P)_{k+1}: \quad f_{k+1} = f_k - \omega(u^k(b) - f), \quad (2.27)$$

où ω vérifie la condition

$$0 < \omega < \frac{1}{\|K\|} = e^{b\sqrt{\lambda_1}}, \|K\| = \sup_n e^{-b\sqrt{\lambda_n}} = e^{-b\sqrt{\lambda_1}} < 1.$$

Finalement, u^{k+1} s'obtient en résolvant le problème

$$\begin{cases} u_{yy}^{k+1} - Au^{k+1} = 0, & 0 < y < \infty \\ u^{k+1}(0) = f_{k+1}, \\ u^{k+1}(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

On pose $G = (I - \omega K)$. Si on itère l'expression dans $(P)_{k+1}$, on obtient

$$f_k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i f_0 + (I - G^k) K^{-1} g = G^k f_0 + f - G^k f. \quad (2.29)$$

Ce qui implique que

$$f_k - f = G^k(f_0 - f), \quad u^k(y) - u(y) = S(y) G^k(f_0 - f). \quad (2.30)$$

Proposition 2.4.7 *L'opérateur $G = (I - \omega K)$ est auto-adjoint et quasi-contractant sur H . En outre, 1 n'est pas une valeur propre de G .*

Preuve. Le fait que G soit auto-adjoint découle de la définition de cet opérateur. À partir de l'inégalité $0 < 1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}} < 1$ pour $\lambda \in \sigma(A)$, on a $\sigma_p(G) \subset]0, 1[$, d'où 1 n'est pas une valeur propre de G . ■

En général, la solution exacte $u(0) = f \in H$ doit satisfaire une condition de régularité dite condition de sources, sinon la convergence de la méthode de régularisation peut être lente. Comme notre problème est fortement mal posé (les valeurs propres $s_n = e^{-b\sqrt{\lambda}}$ de K convergent exponentiellement vers 0). Il est bien connu dans ce cas [11, 78],

que le meilleur choix pour accélérer la convergence de la méthode de régularisation consiste à utiliser des conditions de source de type logarithmique, i.e.,

$$(f_0 - f) = \Psi_\beta(\omega K) \xi, \quad \xi \in H, \|\xi\| \leq E, \quad (2.31)$$

où

$$\Psi_\beta(t) = \begin{cases} [\ln(\frac{e}{t})]^{-\beta}, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

avec $\beta > 0$.

Remarque 2.4.8 [11] *La condition de source logarithmique $\varsigma = (f_0 - f) \in R(\Psi_\beta(\omega K))$ est équivalente à $\varsigma \in R(A^{-\frac{\beta}{2}}) = D(A^{\frac{\beta}{2}})$.*

Preuve. La preuve est basée sur l'équivalence suivante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{e}{\omega}\right) + \sqrt{\lambda_n} \right)^{2\beta} < +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_n} \right)^{2\beta} < +\infty.$$

■

Lemme 2.4.9 [44] *Soit $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Alors la fonction à valeurs réelles $\tau(t) = (1-t)^k \ln(\frac{e}{t})^{-\beta}$ définie sur $[0, 1]$, satisfait*

$$\tau(t) \leq C \ln(k)^{-\beta}. \quad (2.32)$$

Remarque 2.4.10 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors la fonction à valeurs réelles $\varrho(t) = 1 - (1-t)^k$ définie sur $[0, 1]$, satisfait*

$$\varrho(t) \leq kt. \quad (2.33)$$

Preuve. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\varrho(t) - \varrho(0) = (t-0) \varrho'(\hat{t}), \quad 0 < \hat{t} < t,$$

alors

$$\varrho(t) = tk(1-\hat{t})^{k-1} \leq kt.$$

■

Considérons les fonctions à valeurs réelles suivantes :

$$Q(\lambda) = \left(1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}}\right)^k \ln\left(\frac{e}{\omega e^{-b\sqrt{\lambda}}}\right)^{-\beta}, \quad \lambda \in [\lambda_1, +\infty[,$$

$$P(\lambda) = \omega \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}}\right)^i = \omega \frac{1 - \left(1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}}\right)^k}{\omega e^{-b\sqrt{\lambda}}}, \quad \lambda \in [\lambda_1, +\infty[,$$

En utilisant le changement de variables $t = \vartheta(\lambda) = \omega e^{-b\sqrt{\lambda}}$, on obtient

$$\hat{Q}(\lambda) = Q(\vartheta^{-1}(t)) = (1-t)^k \ln\left(\frac{e}{t}\right)^{-\beta}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\hat{P}(\lambda) = P(\vartheta^{-1}(t)) = \begin{cases} \omega \frac{1-(1-t)^k}{t} & , \quad t \in]0, 1], \\ \omega t & , \quad t = 0. \end{cases}$$

On énonce maintenant le résultat principal de cette méthode.

28 Chapitre 2. Problème inverse elliptique : identification de conditions aux limites

Théorème 2.4.11 Soit $g \in \mathfrak{E}^1$ et ω vérifie $0 < \omega < e^{b\sqrt{\lambda_1}}$, f_0 un élément quelconque de la procédure itérative proposée ci-dessus et u^k la $k^{\text{ième}}$ solution approchée. Alors on a

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u^k(y)\| \longrightarrow 0, \quad (2.34)$$

De plus, si $(f_0 - f) \in H^\beta$ ($\beta > 0$), i.e., $(f_0 - f) = \Psi_\beta(\omega K) \xi$, $\xi \in H$, $\|\xi\| \leq E$, alors l'ordre de convergence de la méthode est donné par

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u^k(y)\| \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\beta, \quad k \geq 2. \quad (2.35)$$

Preuve. En vertu de la proposition 2.4.7 et le théorème 2.2.7, il s'ensuit immédiatement

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u^k(y)\| \leq \|G^k(f_0 - f)\| \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u(y) - u^k(y)\|^2 &= \|S(y) G^k(f_0 - f)\|^2 \\ &\leq \|G^k(f_0 - f)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} Q(\lambda_n)^2 \|(\xi, \phi_n)\|^2 \\ &\leq \left(\sup_{t \in [0, 1]} \hat{Q}(t) \right)^2 \|\xi\|^2 \leq \left(\sup_{t \in [0, 1]} \hat{Q}(t) \right)^2 E^2, \end{aligned}$$

et en vertu du lemme 2.4.9 (estimation (2.32)), nous obtenons l'estimation souhaitée. ■

Théorème 2.4.12 Soit $g \in \mathfrak{E}^1$ et ω vérifie $0 < \omega < e^{b\sqrt{\lambda_1}}$, f_0 un élément quelconque de la procédure itérative proposée ci-dessus et u^k (resp. u_k^δ) la $k^{\text{ième}}$ solution approchée pour la donnée exacte g (resp. pour la donnée bruitée ou inexacte g^δ) de telle sorte que $\|g - g^\delta\| \leq \delta$. Alors sous la condition (2.31), on a l'inégalité suivante

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u_k^\delta(y)\| \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\beta + \varepsilon(k) \delta,$$

où $\varepsilon(k) = \|\omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega K)^i\| \leq k\omega$.

Preuve. En utilisant (2.30) et l'inégalité triangulaire, nous pouvons écrire

$$f^k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g, \quad u_k(y) = S(y) f^k, \quad (2.36)$$

$$f_\delta^k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g^\delta, \quad u_k^\delta(y) = S(y) f_\delta^k, \quad (2.37)$$

$$\|u(y) - u_k^\delta(y)\| = \|(u(y) - u^k(y)) + (u^k(y) - u_k^\delta(y))\| \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

où

$$\Delta_1 = \|u(y) - u^k(y)\| \leq \|u(y) - u^k(y)\|_\infty \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\beta, \quad k \geq 2, \quad (2.38)$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \left\| u^k(y) - u_\delta^k(y) \right\| = \left\| S(y) (f^k - f_\delta^k) \right\| = \left\| \omega S(y) \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^\delta) \right\| \\ &\leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^\delta) \right\| \leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \delta = \hat{\Delta}_2.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (2.33), la quantité $\hat{\Delta}_2$ peut être estimée comme suit

$$\hat{\Delta}_2 \leq \omega k \delta \tag{2.39}$$

En combinant (2.38) et (2.39) et en prenant la borne supérieure par rapport à $y \in [0, +\infty[$ de $\|u(y) - u_\delta^k(y)\|$, on obtient la borne souhaitée. ■

Remarque 2.4.13 Choisissons $k = k(\delta)$ tel que $\omega k \delta \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \left\| u^k(y) - u_\delta^k(y) \right\| \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

Problème inverse elliptique : identification de sources

3.1 Position du problème

Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné à domaine dense dans H .

Considérons le problème aux limites avec les conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} u_{zz}(z) - Au(z) = f, & 0 < z < \infty, \\ u(0) = 0, & \|u(+\infty)\| < \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

où la source $f \in H$ est une fonction donnée indépendante de z .

On fait les hypothèses suivantes :

H1 L'opérateur A est auto-adjoint, i.e., $A = A^*$.

H2 L'opérateur A est strictement positif, i.e., $A \geq \gamma I$ où $0 < \gamma = \inf \sigma(A)$.

H3 L'injection $H^1 := (D(A), \|\cdot\|_G) \hookrightarrow H$ est compacte, où $\|\cdot\|_G$ est la norme du graphe.

• Sous les hypothèses (**H1**, **H2** et **H3**) l'opérateur A est diagonalisable.^{1, 2} Soit alors $(\lambda_k, \xi_k)_{k \geq 1}$ les couples propres (valeur propres, vecteurs propres) de l'opérateur A :

$$A\xi_k = \lambda_k \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \langle \xi_m, \xi_n \rangle = \delta_{mn},$$

$$0 < \gamma \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \xi_k, \quad h_k = \langle h, \xi_k \rangle \text{ le coefficient de Fourier d'ordre } k \text{ de } h.$$

Théorème 3.1.1 Pour tout $f \in H$, le problème (3.1) admet une solution unique $u \in C([0, \infty[; D(A)) \cap C^1([0, \infty[; D(A^{1/2})) \cap C^2([0, \infty[; H)$ donnée par l'expression

$$u(z) = R(z)f = -(I - e^{-z\sqrt{A}})A^{-1}f = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-z\sqrt{\lambda_k}}}{\lambda_k} \right) \langle f, \xi_k \rangle \xi_k \quad (3.2)$$

1. $H2 \Rightarrow 0 \in \rho(A)$, $H3 \Rightarrow A^{-1}$ est compact.

2. $(H1, H2, H3) \Rightarrow A^{-1}$ est auto-adjoint compact, et donc diagonalisable d'après le Théorème de la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts. En conséquence A est diagonalisable.

Notre problème inverse se formule comme suit :

Soit $u(\tau; f) = g$ une mesure interne effectuée sur la solution $u(z; f)$ au point $z = \tau$, $0 < \tau < +\infty$. Notre objectif est de déterminer la donnée f à partir de la mesure interne g .

On peut schématiser notre problème inverse comme suit :

$$f \longrightarrow u(z) = R(z)f \longrightarrow \Phi(u) = u(\tau) = g, \quad (3.3)$$

on obtient donc une équation de Fredholm du première espèce

$$Kf = g, \quad K = R(\tau). \quad (3.4)$$

Il est clair que l'opérateur K est auto-adjoint, compact et injectif, et donc d'après le théorème de Picard, la solution recherchée f sera donnée par la formule

$$f = K^{-1}g = -A \left(I - e^{-\tau\sqrt{A}} \right)^{-1} g = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}}} \right) \langle g, \xi_k \rangle \xi_k, \quad (3.5)$$

sous la condition que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}}} \right)^2 |\langle g, \xi_k \rangle|^2 < +\infty. \quad (3.6)$$

De l'inégalité

$$\lambda_k^2 \leq \left(\frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}}} \right)^2 \leq \left(\frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\gamma}}} \right)^2,$$

on déduit que la condition (3.6) est équivalente à $g \in D(A)$.

On note ici que notre problème inverse est instable. Ceci découle du comportement des hautes fréquences $\omega_k = \left(\frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}}} \right) \approx \lambda_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$.

3.2 Stabilisation et approximation

Nous voulons maintenant aborder la question de stabilisation dans le cas de données entachées de bruit, parce que les données dont on dispose viennent de l'expérience, ce qui implique l'existence d'erreurs de mesure. Ces incertitudes induisent une image floue et l'interprétation des réponses peut-être inexacte.

On suppose maintenant que la donnée $u(\tau) = g$ est entachée de bruit (inexacte), i.e., on dispose une approximation g_δ de g : $\|g_\delta - g\| \leq \delta$, δ est le niveau de bruit.

3.2.1 Régularisation par troncature spectrale

Définition 3.2.1 Pour $N > 0$, on définit la solution régularisée du problème (3.4) pour des données exactes (resp. inexactes) comme suit :

$$f_N = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}}} \right) \langle g, \xi_k \rangle \xi_k, \quad (3.7)$$

$$f_N^\delta = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}}} \right) \langle g_\delta, \xi_k \rangle \xi_k, \quad (3.8)$$

On utilisant la méthode de *troncature spectrale* qui élimine les hautes fréquences qui sont la source de l'instabilité.

Théorème 3.2.2 *On suppose que $f \in B(p, E) = \{\varphi \in D(A^p) : \|A^p f\| \leq E\}$, $p > 0$, et soit $\lambda_{N+1} \approx \left(\frac{E}{\delta}\right)^{1/(1+p)}$, alors on a l'estimation d'erreur suivante*

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \kappa \delta^{\frac{p}{p+1}} E^{\frac{1}{p+1}},$$

$$\text{où } \kappa = (1 + M) = 1 + \frac{1}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_1}}}.$$

Preuve. Notons

$$\omega_k = \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}}} \leq \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_1}}} = M\lambda_k,$$

$$g_k = \langle g, \xi_k \rangle, \quad g_k^\delta = \langle g_\delta, \xi_k \rangle.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire

$$\|f - f_N^\delta\| = \|f - f_N + f_N - f_N^\delta\| \leq \|f - f_N\| + \|f_N - f_N^\delta\| = \Delta_1 + \Delta_2. \quad (3.9)$$

$$\Delta_1^2 = \|f - f_N\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_k \xi_k - \sum_{n=1}^N f_k \xi_k \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_k|^2. \quad (3.10)$$

$$\Delta_2^2 = \|f_N - f_N^\delta\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N \omega_k g_k \xi_k - \sum_{n=1}^N \omega_k g_k^\delta \xi_k \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N+1} \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2. \quad (3.11)$$

$$\Delta_1^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_k^{-2p} \lambda_k^{2p} |f_k|^2 \leq \lambda_{N+1}^{-2p} \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_k^{2p} |f_k|^2 \leq \lambda_{N+1}^{-2p} E^2. \quad (3.12)$$

$$\Delta_2^2 = \sum_{n=1}^{N+1} \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_{N+1}^2 M^2 \sum_{n=1}^{N+1} |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_{N+1}^2 M^2 \delta^2. \quad (3.13)$$

Ce qui implique que

$$\Delta_1 + \Delta_2 \leq \lambda_{N+1}^{-p} E + \lambda_{N+1} M \delta \approx \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+p}} \right)^{-p} E + M \delta \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+p}} = (1 + M) E^{\frac{1}{1+p}} \delta^{\frac{p}{1+p}}.$$

3.3 Approximation numérique du problème par La méthode de Krylov

3.3.1 Discrétisation et projection de la solution

3.3.1.1 Stratégie de discrétisation

La discrétisation par éléments finis ou différences finies d'une EDP intervenant dans un problème inverse est une source d'erreur et son influence sur la convergence est certaine. Pour remédier à ce phénomène, on propose une **semi-discrétisation** du problème, ce qui va nous permettre d'une part de diminuer les erreurs, et d'autre part

de transformer le problème semi-discrétisé en une EDO, dont l'étude repose en général sur des méthodes spectrales en dimension finie.

Par un calcul opérationnel, on transforme notre problème en un problème de calcul matriciel de la forme : $u = \Phi(A)v$, où $u :=$ est la solution recherchée, $v :=$ les données du problème, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique définie positive, et $\Phi :=$ une fonction définie et continue sur une partie contenant le spectre de A .

Notons $A_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ l'opérateur discret de A , qui est une matrice symétrique, définie positive. On suppose que les erreurs de la discrétisation sont petites par rapport à l'incertitude δ , et que A_m est de taille suffisamment grande de façon que A_m soit une bonne approximation de l'opérateur différentiel A .

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

$$E_m := \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1.$$

$G \in E_m :=$ l'analogue discret de g .

$G^\delta \in E_m :=$ l'analogue discret de g_δ .

$\sigma(A_m) = \{\alpha_k\}_{k=1}^m :=$ l'ensemble des valeurs propres de A_m ($0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m$).

$\{\zeta_k\}_{k=1}^m :=$ l'ensemble des vecteurs propres normalisés de A_m .

Les analogues discrets de (3.5) et (3.7) sont notés respectivement par :

$$F = - \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\alpha_k}}} \langle G, \zeta_k \rangle \zeta_k, \quad (3.14)$$

$$F_n = - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\alpha_k}}} \langle G, \zeta_k \rangle \zeta_k, \quad (n \leq m). \quad (3.15)$$

$$F_n^\delta = - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{1 - e^{-\tau\sqrt{\alpha_k}}} \langle G_\delta, \zeta_k \rangle \zeta_k, \quad (n \leq m). \quad (3.16)$$

La méthode de projection de Krylov consiste à générer l'espace de Krylov

$$\mathcal{K}_l(A_m, G) = \text{vect} \left\{ G, A_m G, \dots, A_m^{l-1} G \right\}$$

par un algorithme itérative.

Soient $(q_i)_{i=1}^l$ la base orthonormée de $\mathcal{K}_l(A_m, G)$ avec $q_1 = \frac{G}{\|G\|}$, $Q_l = (q_1, q_2, \dots, q_l)$ et $T_l = Q_l^\top A_m Q_l \in \mathbb{R}^{l \times l}$ la représentation symétrique de A_m sur l'espace \mathcal{K}_l . L'approximation de (3.14) dans le triplet de Krylov $\mathbf{K}_l = (\mathcal{K}_l(A_m, G), Q_l, T_l)$ est donnée par :

$$[F]_l = - \|G\| Q_l \left(\frac{T_l}{I - \exp(-\tau\sqrt{T_l})} \right) e_1 \in \mathbb{R}^m, \quad (3.17)$$

où $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^l$.

Remarque 3.3.1 L'approximation (3.17) converge vers la solution (3.14), et le type de convergence est super-linéaire.

Soit $\left(\theta_j^{(l)}\right)_{j=1,\dots,l}$ les valeurs propres de T_l , et $\left(y_j^{(l)}\right)_{j=1,\dots,l}$ les vecteurs propres de T_l . Puisque $\left(\theta_j^{(l)}, y_j^{(l)}\right)_{j=1,\dots,l}$ approchent les couples propres de A_m , alors l'approximation du vecteur F_n^δ dans le triplet de Krylov $\mathbf{K}(A_m, G_\delta)$ prend la forme :

$$[F]_l^\delta = \|G_\delta\| Q_l \sum_{\theta_j \leq \lambda_n} \left(\frac{\theta_j^{(l)}}{1 - \exp(-\tau \sqrt{\theta_j^{(l)}})} \right) \left[\left(y_j^{(l)} \right)^\top e_1 \right] y_j^{(l)}. \quad (3.18)$$

3.4 Exemple

Considérons le problème inverse suivant :

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = f(x), & 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 \leq y < +\infty, \\ u(x, 0), u(x, y) |_{y \rightarrow \infty} \text{ bornée} & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(x, 1) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad (3.19)$$

où $f(x)$ est la source inconnue et $u(x, 1) = g(x)$ est une mesure interne. On suppose que la donnée g est entachée du bruit de niveau δ , i.e., on dispose une donnée g_δ dans $L^2(0, \pi)$ telle que

$$\|g - g_\delta\|_{L^2(0, \pi)} \leq \delta, \quad (3.20)$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

est positif, auto-adjoint avec résolvante compacte (A est diagonalisable).

Les couples propres (λ_n, X_n) de A sont

$$\lambda_n = n^2, X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La solution du problème (3.19) est donnée par :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-ny}}{n^2} (f, X_n) X_n, \quad (3.21)$$

où

$$\left\{ X_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots \right\} \quad (3.22)$$

est une base orthonormée dans $L^2(0, \pi)$, et

$$(f, X_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx. \quad (3.23)$$

En utilisant la condition supplémentaire, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= u(x, 1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (g, X_n) X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n^2} (f, X_n) X_n, \end{aligned} \quad (3.24)$$

on définit l'opérateur $K : f \rightarrow g$, par

$$g(x) = Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n^2} (f, X_n) X_n, \quad (3.25)$$

Il est clair que l'opérateur K est linéaire compact, et les valeurs singulières de K , $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont données par

$$\sigma_n = \frac{1 - e^{-n}}{n^2}, \quad (3.26)$$

et

$$(g, X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n^2} (f, X_n) (X_n, X_n), \quad (3.27)$$

i.e.

$$(f, X_n) = \sigma_n^{-1} (g, X_n). \quad (3.28)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x) &= K^{-1}g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} (g, X_n) X_n, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 - e^{-n}} (g, X_n) X_n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.4.1 Régularisation de la Solution

On utilise les données inexactes $g_{\delta}(x)$, et après une troncature de la série, on aura la solution régularisée sous la forme

$$f_{\delta, N}(x) = \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{1 - e^{-n}} (g_{\delta}, X_n) X_n. \quad (3.30)$$

Si le paramètre N est grand, $f_N^{\delta}(x)$ est proche de la solution exacte $f(x)$. D'autre part, si le paramètre N est fixé, $f_N^{\delta}(x)$ est bornée. Ainsi, le nombre entier positif N joue le rôle d'un paramètre de régularisation.

Remarque 3.4.1 Si $N \geq 1$ on a

$$\frac{1}{1 - e^{-N}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} \leq 2. \quad (3.31)$$

Théorème 3.4.2 Soit $f_N^{\delta}(x)$ la solution régularisée donnée par (3.30) et $f(x)$ la solution exacte donnée par (3.29). Soit $g_{\delta}(x)$ la donnée mesurée en $y = 1$ qui satisfait (3.20), pour $p > 0$. On choisit $N = [b]$, tel que

$$b = \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{p+2}}, \quad (3.32)$$

on obtient l'estimation suivante

$$\left\| f(\cdot) - f_N^{\delta}(\cdot) \right\|_{L^2(0, \pi)} \leq 3\delta^{\frac{p}{p+1}} E^{\frac{1}{p+1}}. \quad (3.33)$$

Dans ce cas, la formule (2.11) prend la forme

$$f(x) = u(x, 0) = K^{-1}g(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^n \left(\int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx). \quad (3.34)$$

3.4.2 Méthode de Troncature spectrale

Nous utilisons la règle de trapèze pour approcher l'intégrale et faisons une troncature approximative de la série en choisissant la somme des $M+1$ termes premiers. Après avoir considéré une grille équidistante $0 = x_1 < \dots < x_{M+1} = \pi, x_i = (j-1)h = (j-1)\frac{\pi}{M}, j = 1, \dots, (M+1)$. On obtient

$$f(x_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^n (hg(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j), \quad (3.35)$$

$$f_N(x_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N e^n (hg(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j), \quad (3.36)$$

$$f_N^\delta(x_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N e^n (hg^\delta(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j), \quad (3.37)$$

Dans ce qui suit, nous considérons un exemple qui admet une solution explicite $(u(x, y), f(x))$ pour faciliter la comparaison.

Exemple 3.4.3 Si $u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e \sin(x)$, alors la fonction $u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1-y} \sin(x)$ est la solution exacte du problème (3.19). Par conséquent, la donnée $g(x) = u(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$.

Pour examiner le cas de données bruitées, on utilise la commande Matlab "randn" pour générer des données perturbées g^δ :

$$g^\delta = g + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(g)), \quad (3.38)$$

où ε indique le niveau du bruit aléatoire distribué selon la loi normale avec les paramètres : la moyenne 0, la variance $\sigma^2 = 1$, et l'écart type $\sigma = 1$. "randn(size(g))" renvoie un tableau d'entrées aléatoires qui est de même taille que g . La borne sur l'erreur de mesure δ peut être calculée au sens de l'Erreur Moyenne Quadratique (RMSE : Root Mean Square Error) :

$$\delta = \|g^\delta - g\|_* = \left(\frac{1}{M+1} \sum_{i=1}^{M+1} (g(x_i) - g^\delta(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

on considère g^δ comme donnée, on obtient l'approximation f_N^δ calculée par (3.37). L'erreur relative $E_r(f)$ est donnée par

$$E_r(f) = \frac{\|f_N^\delta - f\|_*}{\|f\|_*}. \quad (3.39)$$

Implémentations numériques



ans ce chapitre, on donne quelques exemples numériques illustrant les différentes méthodes d'approximation utilisées dans ce travail.

4.1 Applications

4.1.1 Méthode itérative de Kozlov-Maz'ya

En utilisant les différences finies centrées avec un pas $h = \frac{\pi}{N+1}$ pour approcher la première dérivée u_x et la seconde dérivée u_{xx} , on obtient le problème semi-discret suivant (équation différentielle ordinaire) :

$$\begin{cases} u_{yy}(x_i, y) - \mathbb{A}_h(x_i, y) = 0, & x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N; \quad y \in (0, +\infty), \\ u(x_0 = 0, y) = u(x_{N+1} = \pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x_i, 0) = f(x_i), \quad u(x_i, +\infty) = 0, & x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N; \end{cases} \quad (4.1)$$

où \mathbb{A}_h est la matrice de discrétisation découlant de l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$:

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

qui est symétrique définie positive. Nous supposons que la discrétisation est assez fine de sorte que les erreurs sont petites par rapport à l'incertitude δ au niveau des données; cela signifie que \mathbb{A}_h est une bonne approximation de l'opérateur différentiel $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, au sens que le caractère non-borné de l'opérateur est équivalent à la plus grande norme de la matrice \mathbb{A}_h (voir [50]). Les couples propres (μ_k, e_k) de \mathbb{A}_h sont donnés par

$$\mu_k = 4 \left(\frac{N+1}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right), \quad e_k = \left(\sin \left(\frac{jk\pi}{N+1} \right) \right)_{j=1}^N, \quad k = 1, \dots, N.$$

L'approximation itérative discrète de (2.37) prend la forme

$$f_k^\delta(x_j) = (I - \omega K_h)^k f_0(x_j) + \omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega K_h)^i g^\delta(x_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

où $K_h = e^{-\sqrt{\mathbb{A}_h}}$ et $\omega < \frac{1}{\|K_h\|} = e^{\sqrt{\mu_h}} = 2.7881$.

4.1.2 Méthode de Troncature spectrale

Dans la section suivante on donne quelques résultats numériques en appliquant les différentes méthodes d'approximation mentionnés dans notre travail.

Nous considérons le problème inverse suivant

Trouver le couple de fonctions $(u(x, y), f(x))$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta_{xy} u(x, y) = f(x), & 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 \leq y < +\infty, \\ u(x, 1) = g(x), \|u(x, +\infty)\| < +\infty, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad (4.3)$$

Il est facile de voir que les deux fonctions

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (1 - e^{-y}) \sin(x), \\ f(x) &= -\sin(x), \end{aligned}$$

forment la solution exacte du problème (4.3). Par conséquent, la donnée est

$$g(x) = (1 - e^{-1}) \sin(x).$$

On applique les différentes méthodes d'approximation citées précédemment (Kozlov-Maz'ya, Troncature et Krylov) sur l'exemple de problème inverse de type identification de source (4.3) dans le cas où l'opérateur $A = -\Delta$,

4.2 Résultats numériques

4.2.1 Cas exact

4.2.1.1 Résultats numériques par la méthode de Troncature

- On génère une donnée exacte (fig. 4.1) avec une discrétisation $N = 4$ pour calculer la solution approchée avec différentes valeurs de troncature (fig. 4.2, fig. 4.3, fig. 4.4). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.1).

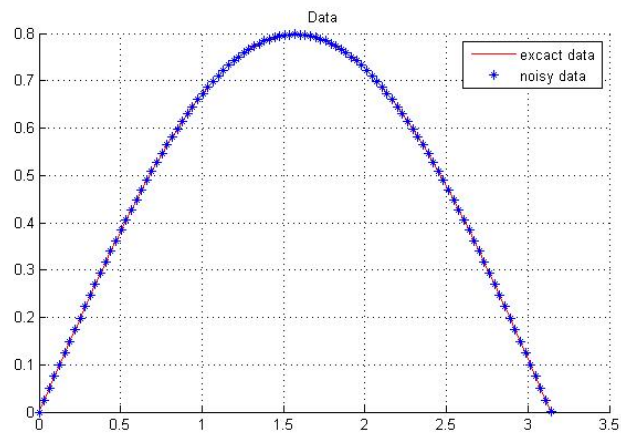


FIGURE 4.1 – Troncature. Données exactes : $N = 4$, $M = 100$.

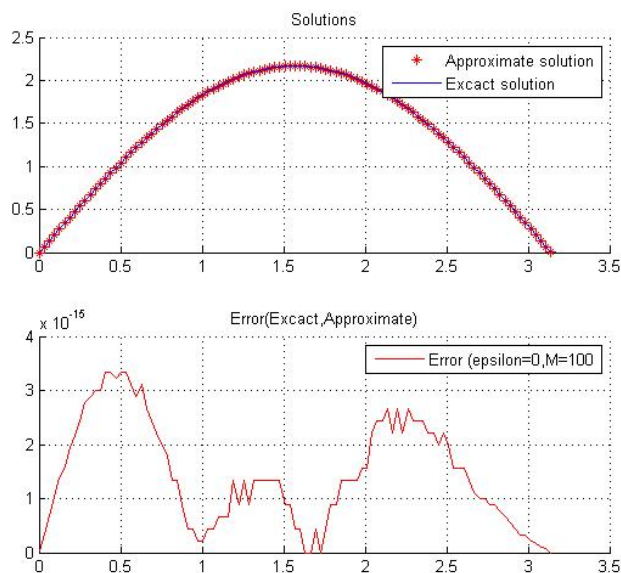


FIGURE 4.2 – Méthode de troncature. Données exactes : $N = 4$, $M = 100$.

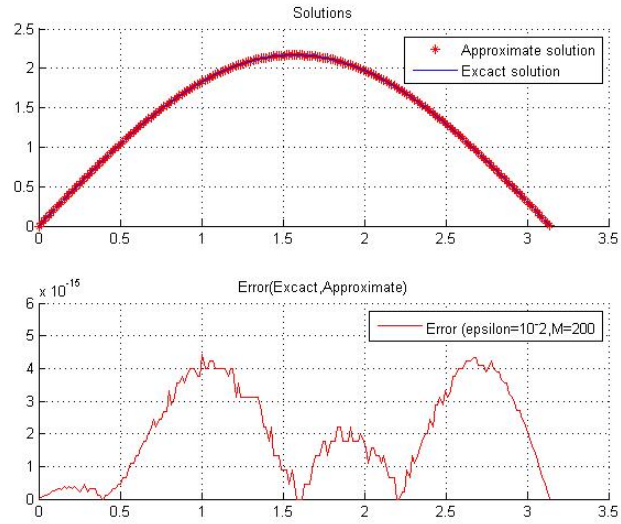


FIGURE 4.3 – Méthode de troncature. Données exactes : $N = 4$, $M = 200$.

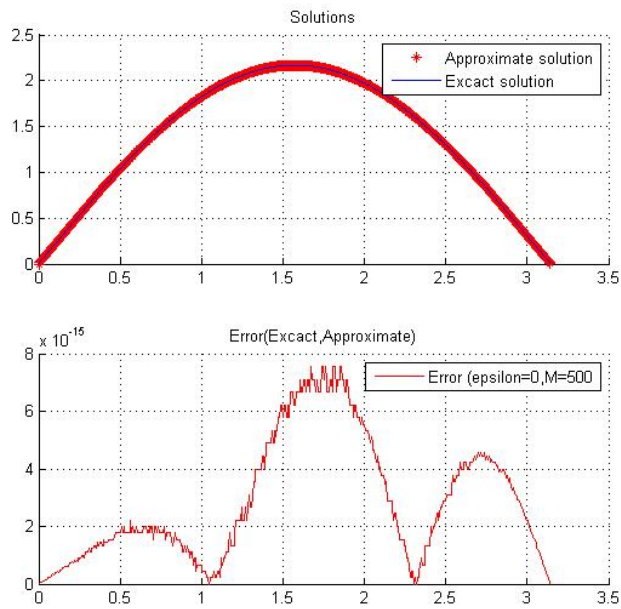


FIGURE 4.4 – Méthode de troncature. Données exactes : $N = 4$, $M = 500$.

TABLE 4.1 – Troncature. Erreur relative avec données exactes.

Erreur relative $Er(f)$, $N = 4$	
$M =$	$Er(f)$
100	$0.1138 \times 1.0e - 014$
200	$0.1588 \times 1.0e - 014$
500	$0.2357 \times 1.0e - 014$

- On change le nombre de discrétisation $N = 8$, les solutions approchées obtenues avec différentes valeurs de troncature (fig. 4.5, fig. 4.6, fig. 4.7). L'erreur relative est donnée par le tableau (Tab. 4.2).

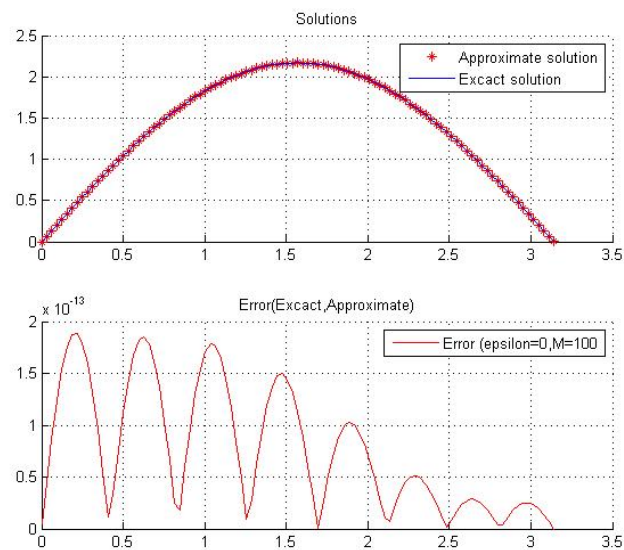
FIGURE 4.5 – Méthode de troncature. Données exactes : $N = 8$, $M = 100$.

TABLE 4.2 – Troncature. Erreur relative avec données exactes.

Erreur relative $Er(f)$, $N = 8$	
$M =$	$Er(f)$
100	$0.6290 \times 1.0e - 013$
200	$0.3057 \times 1.0e - 013$
500	$0.8410 \times 1.0e - 013$

On remarque ici que la solution approchée par la méthode de troncature spectrale est presque identique à la solution exacte. Les données sont exactes, il n'est y a que les erreurs de discrétisation.

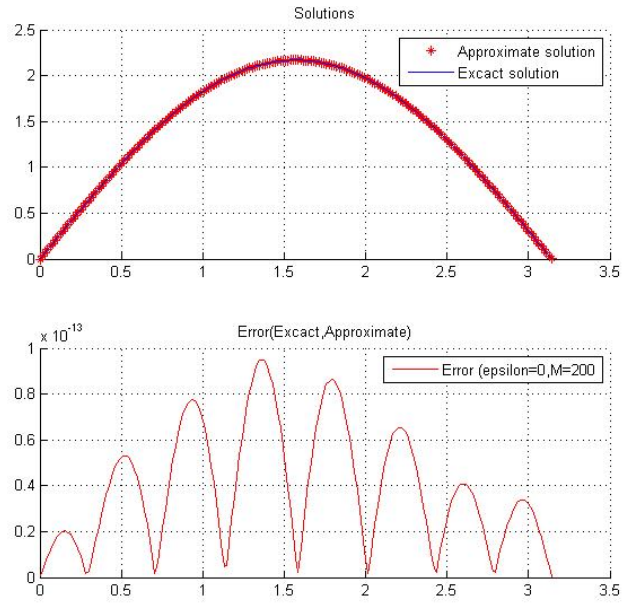


FIGURE 4.6 – Méthode de troncature. Données exactes : $N = 8$, $M = 200$.

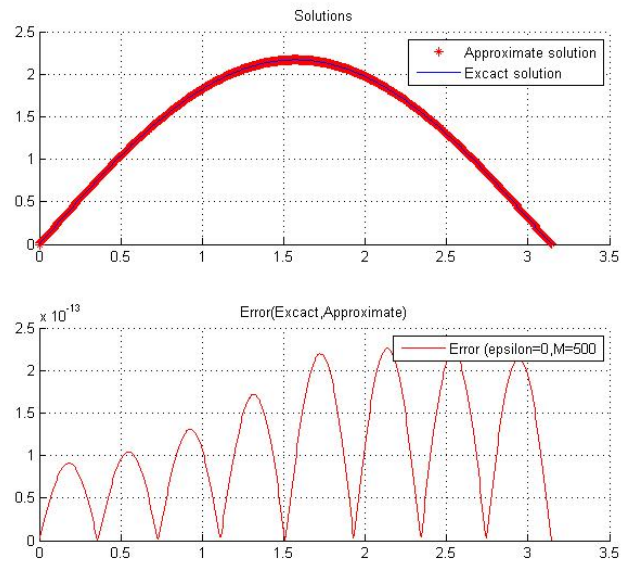


FIGURE 4.7 – Méthode de troncature. Données exactes : $N = 8$, $M = 500$.

4.2.1.2 Résultats numériques par la méthode de Kozlov-Maz'ya

- On génère une donnée exacte (fig. 4.8) pour calculer la solution approchée avec une discrétisation $N = 40$ et différents nombres d'itération (fig. 4.9, fig. 4.15, fig. 4.11, fig. 4.12, fig. 4.13, fig. 4.14). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.3)

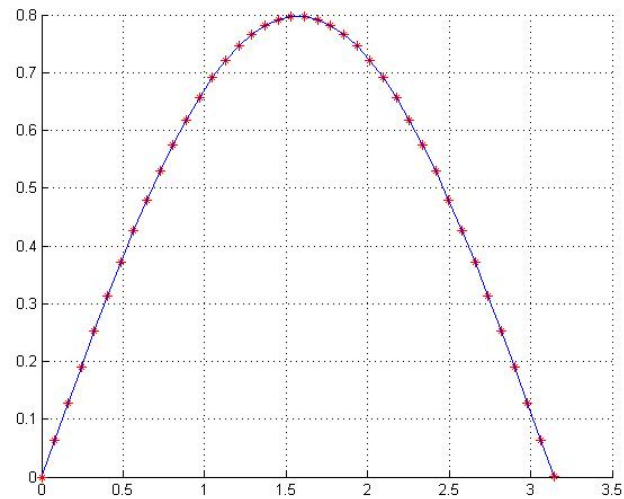


FIGURE 4.8 – Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40$.

TABLE 4.3 – Kozlov-Maz'ya. Erreur relative avec données exactes.

Erreur relative $Er(f)$, $N = 40$	
$k =$	$Er(f)$
14	0.0072
20	0.0059
30	0.0047
50	0.0036
70	0.0030
100	0.0025
150	0.0021

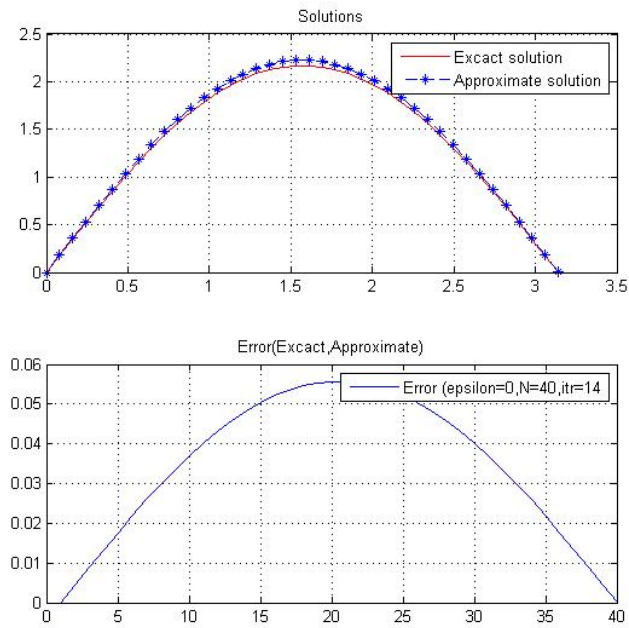


FIGURE 4.9 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40$, $k = 14$.

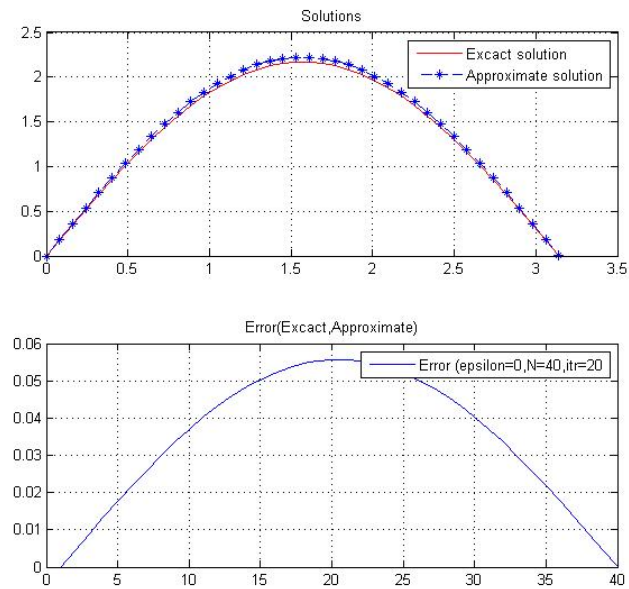
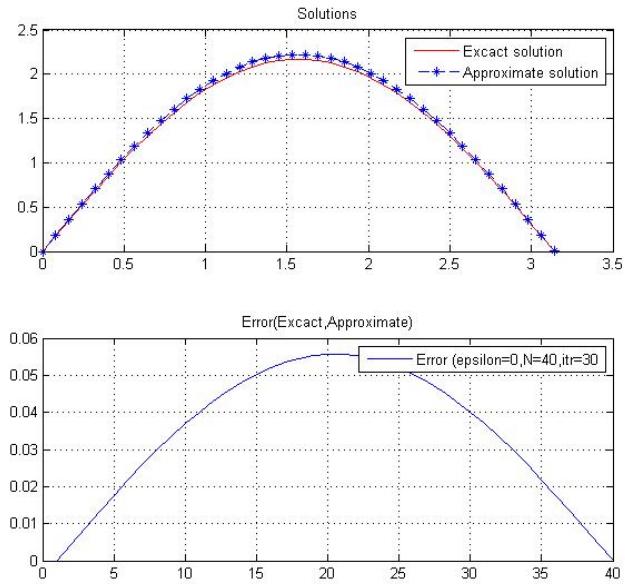
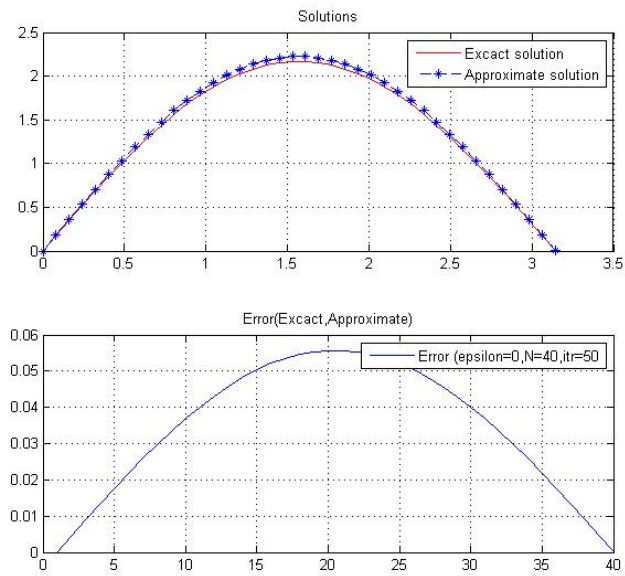


FIGURE 4.10 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40$, $k = 20$.

FIGURE 4.11 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40$, $k = 30$.FIGURE 4.12 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40$, $k = 50$.

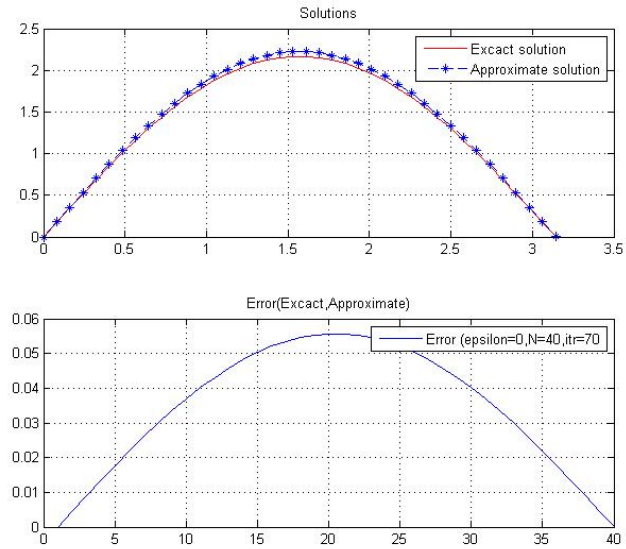


FIGURE 4.13 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40$, $k = 70$.

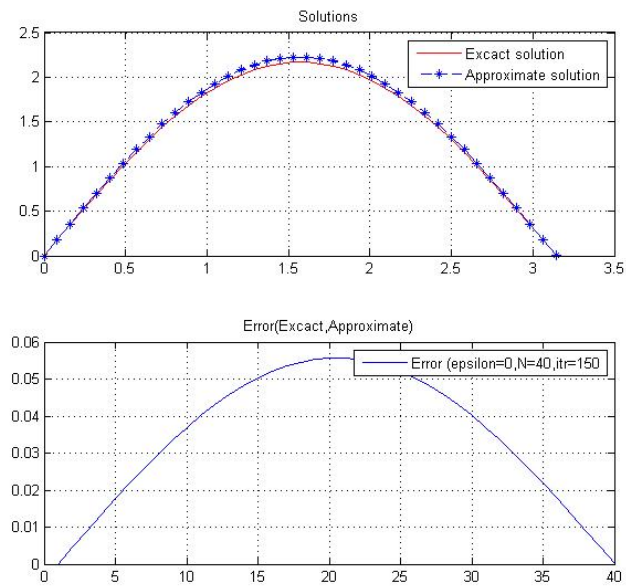


FIGURE 4.14 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40$, $k = 150$.

- Dans le deuxième cas, on calcule la solution approchée avec un nombre d'itération fixé à $k = 20$ et on change la valeur de discrétisation N (fig. 4.15, fig. 4.16, fig. 4.17, fig. 4.18, fig. 4.19), le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.4)

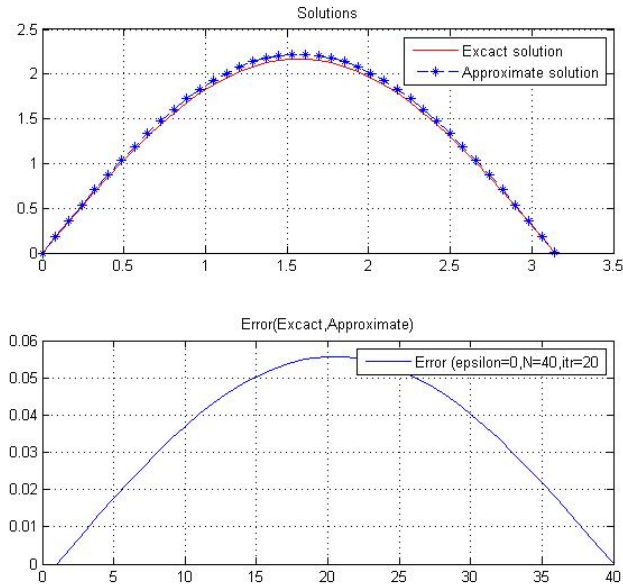


FIGURE 4.15 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 40, k = 20$.

TABLE 4.4 – Kozlov-Maz'ya. Erreur relative avec données exactes.

Erreur relative $Er(f), k = 20$	
$N =$	$Er(f)$
40	0.0059
50	0.0047
70	0.0034
100	0.0024
150	0.0016

On remarque ici que la solution approchée par la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya est presque identique à la solution exacte. Les données sont exactes, il n'est y a que les erreurs de discrétisation.

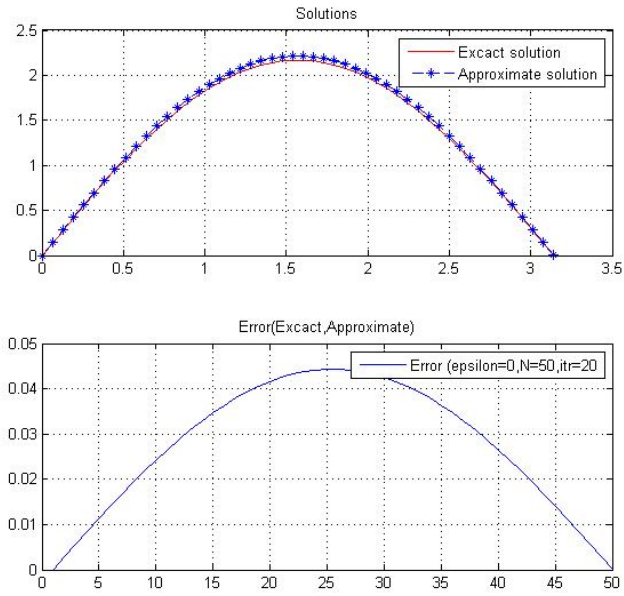


FIGURE 4.16 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 50$, $k = 20$.

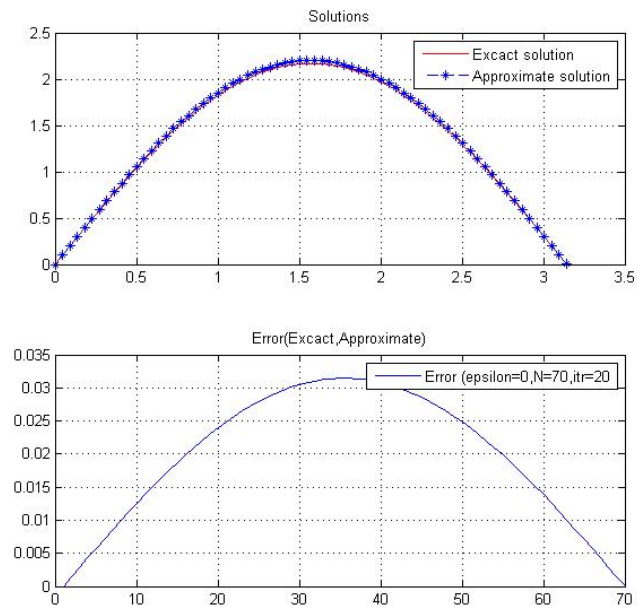


FIGURE 4.17 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 70$, $k = 20$.

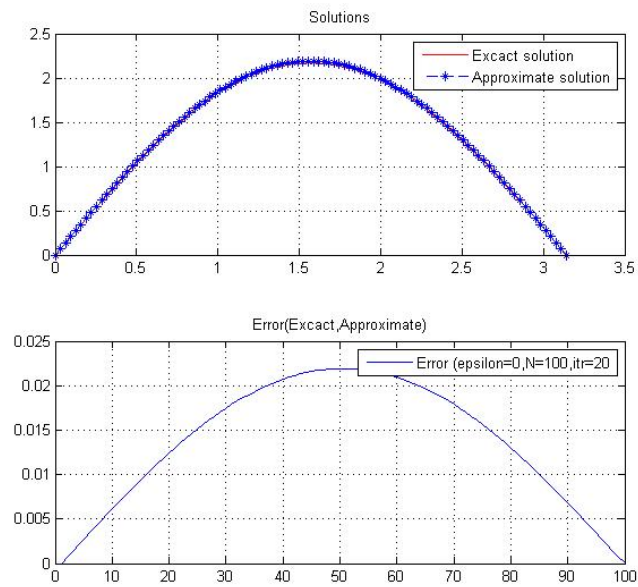


FIGURE 4.18 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 100$, $k = 20$.

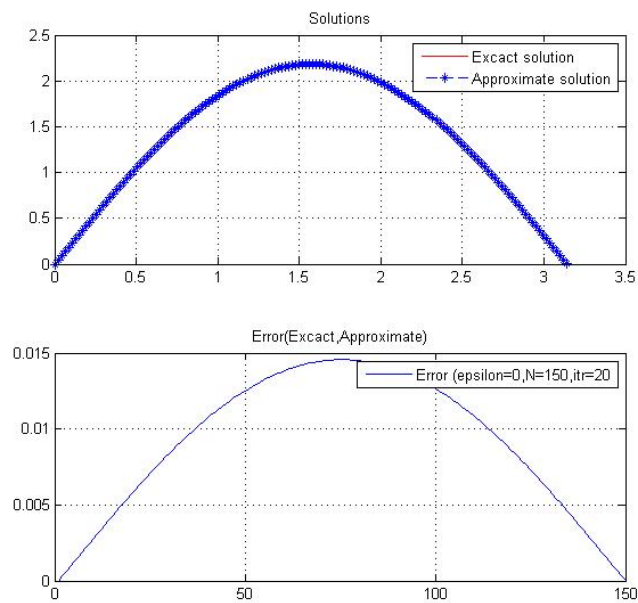


FIGURE 4.19 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données exactes : $N = 150$, $k = 20$.

4.2.1.3 Résultats numériques par la méthode de Krylov

- Dans le cas de la méthode de Krylov, avec donnée exacte (fig. 4.20). Comme un premier test, on calcule la solution approchée avec différentes valeurs de discrétisation N et différentes dimensions m de l'espace de Krylov. Les solutions sont données par (fig. 4.21, fig. 4.22, fig. 4.23, fig. 4.24, fig. 4.25, fig. 4.26). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.5).

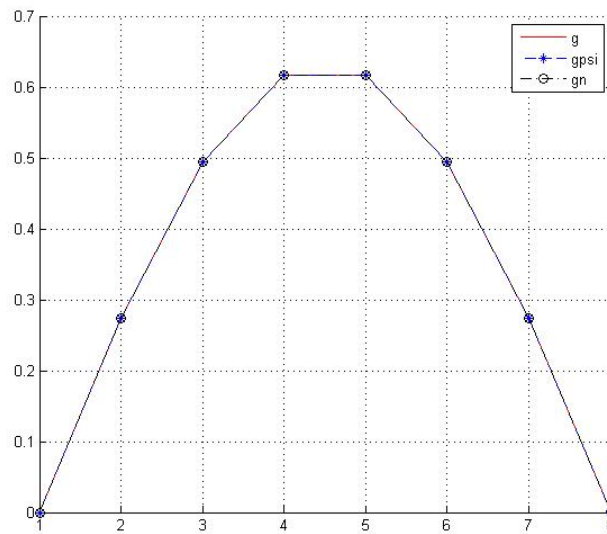
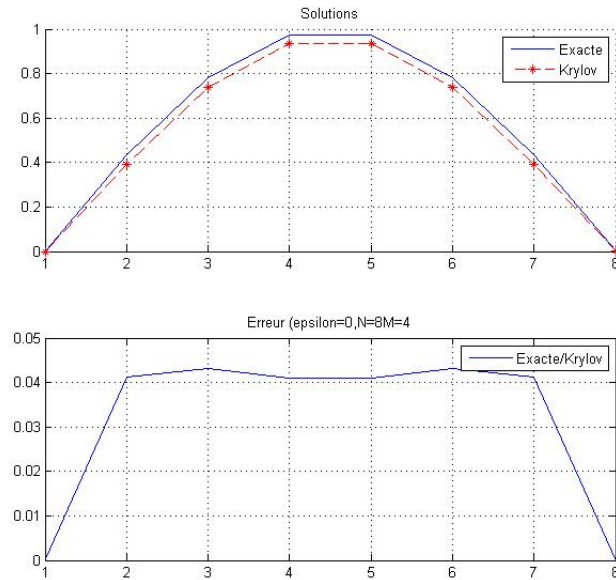
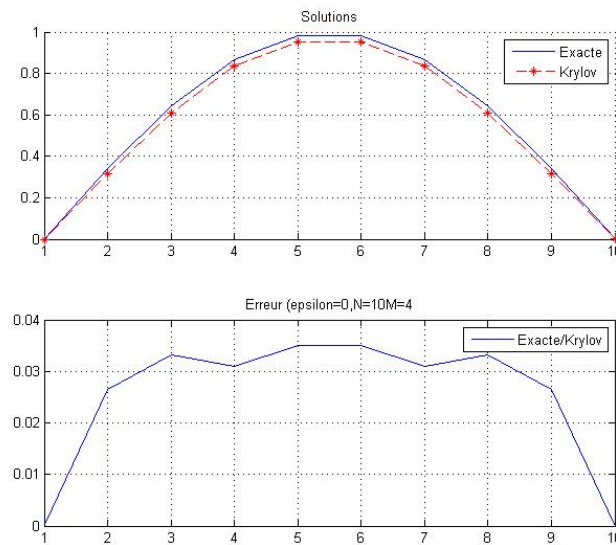


FIGURE 4.20 – Krylov. Données exactes : $N = 8$.

TABLE 4.5 – Krylov. Erreur relative avec données exactes.

Erreur relative $Er(f)$		
N	M	$Er(f)$
8	4	0.0547
10	4	0.0421
12	8	0.0348
28	12	0.0149
50	22	0.0094
100	40	0.0051

On remarque ici que la solution approchée par la méthode de Krylov est bonne dès que la taille de discrétisation N est suffisamment grande et la dimension du sous-espace de Krylov M ne dépasse pas $N/2$.

FIGURE 4.21 – Méthode de Krylov. Données exactes : $N = 8$, $M = 4$.FIGURE 4.22 – Méthode de Krylov. Données exactes : $N = 10$, $M = 4$.

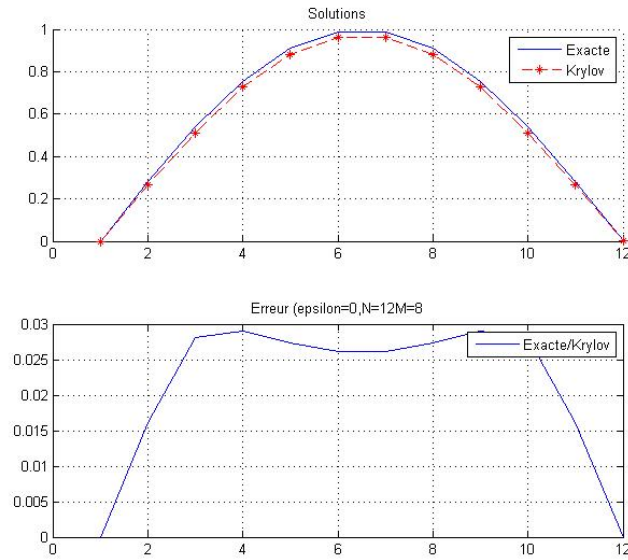


FIGURE 4.23 – Méthode de Krylov. Données exactes : $N = 12$, $M = 8$.

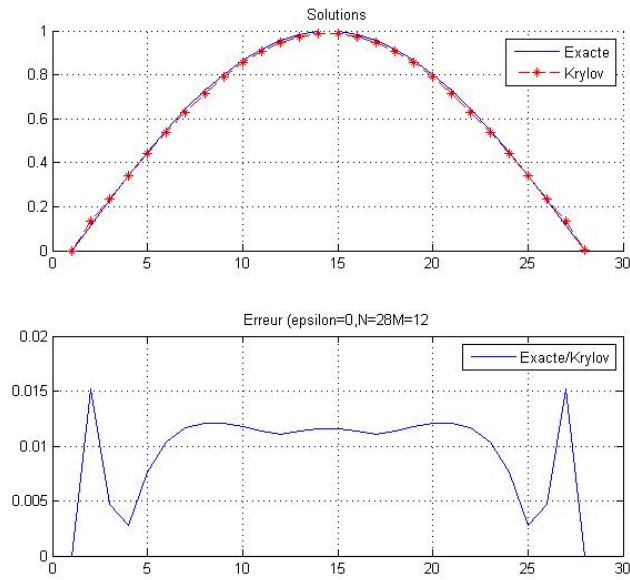
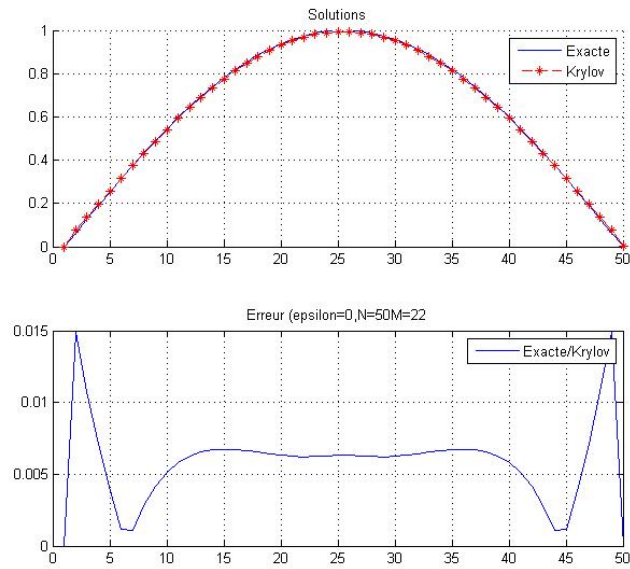
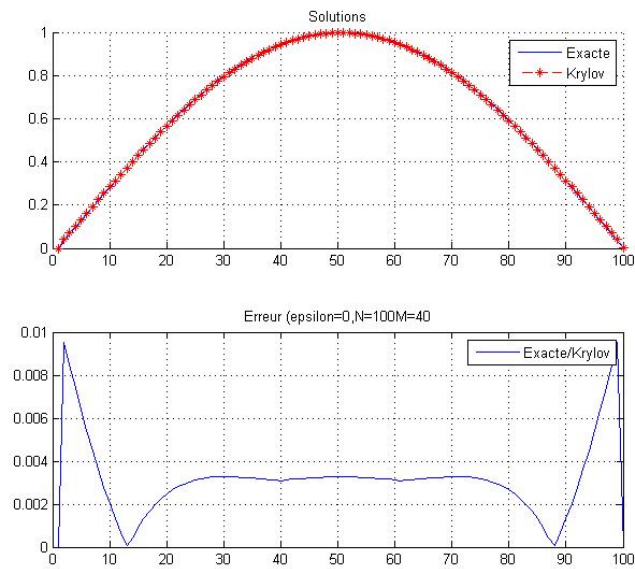


FIGURE 4.24 – Méthode de Krylov. Données exactes : $N = 28$, $M = 12$.

FIGURE 4.25 – Méthode de Krylov. Données exactes : $N = 50$, $M = 22$.FIGURE 4.26 – Méthode de Krylov. Données exactes : $N = 100$, $M = 40$.

4.2.2 Cas inexact

4.2.2.1 Résultats numériques par la méthode de Troncature

- On génère une donnée bruitée (fig. 4.27) pour une taille de discrétisation $N = 4$ et un niveau du bruit $\delta = 10^{-2}$, et on calcule la solution approchée pour différentes valeurs de troncature (fig. 4.28, fig. 4.29, fig. 4.30). Le tableau (Tab. 4.6) contient l'erreur relative associée.

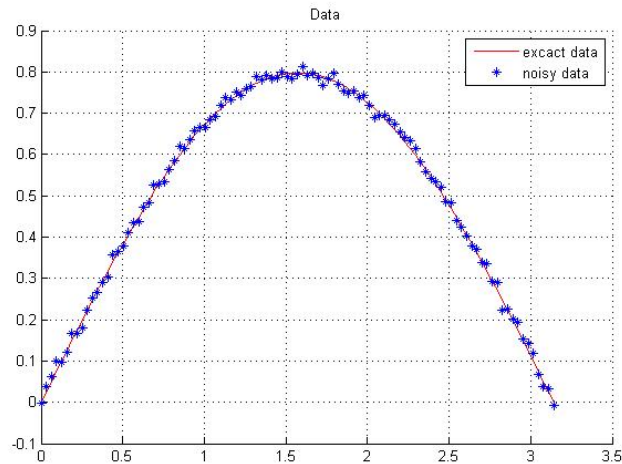


FIGURE 4.27 – Troncature. Données bruitées : $N = 4, M = 100, \varepsilon = 10^{-2}$.

TABLE 4.6 – Troncature. Erreur relative avec données inexactes.

Erreur relative $Er(f)$, $N = 4, \varepsilon = 10^{-2}$	
$M =$	$Er(f)$
100	$0.0499 \times 1.0e - 013$
200	$0.0218 \times 1.0e - 013$
500	$0.0043 \times 1.0e - 013$

Dans ce cas, on remarque que l'exactitude de la solution approchée par la méthode de troncature est liée à l'exactitude du calcul du coefficient de Fourier intervenant dans la formule de la solution ainsi que le niveau du bruit. Dès que le niveau du bruit est petit ($1/100$) et le coefficient de Fourier est calculé de manière précise, on a une bonne solution approchée.

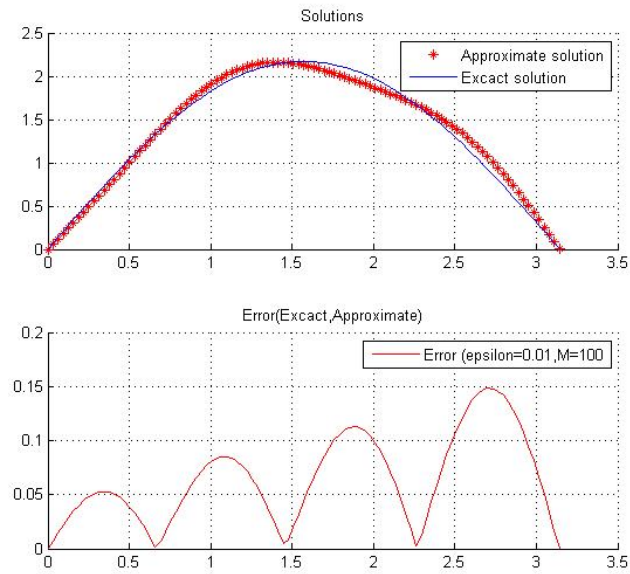


FIGURE 4.28 – Méthode de troncature. Données inexactes : $N = 4$, $M = 100$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

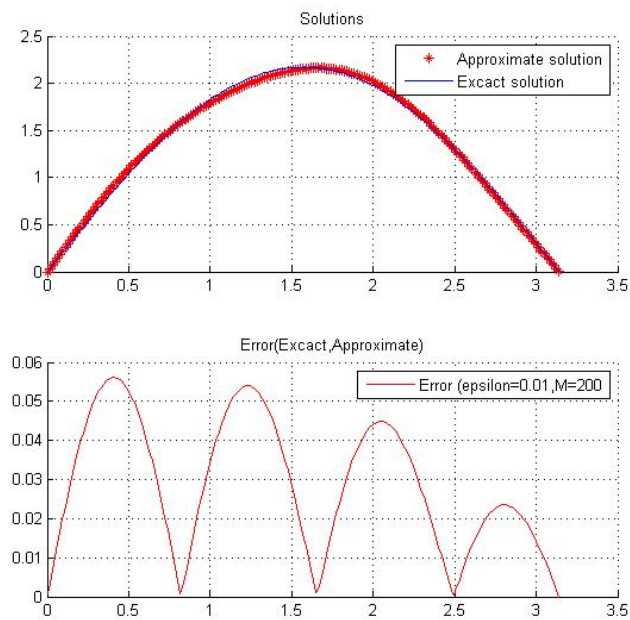


FIGURE 4.29 – Méthode de troncature. Données inexactes : $N = 4$, $M = 200$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

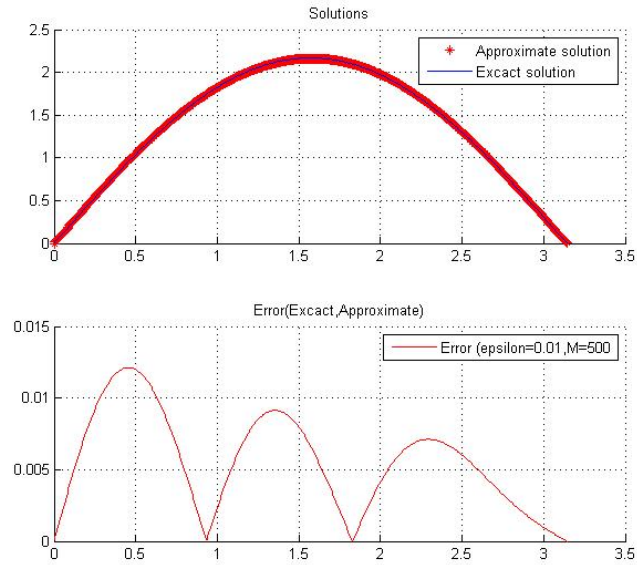


FIGURE 4.30 – Méthode de troncature. Données inexactes : $N = 4$, $M = 500$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

4.2.2.2 Résultats numériques par la méthode de Kozlov-Maz'ya

- Avec une donnée inexacte (fig. 4.31), on calcule la solution approchée pour une taille de discrétisation $N = 40$ et un niveau du bruit $\delta = 10^{-2}$ (le nombre d'itération est fixé : $k = 20$). En utilisant la commande "random", on obtient les résultats (fig. 4.32, fig. 4.33, fig. 4.34). L'erreur relative associée est donnée dans le tableau (Tab. 4.7).

TABLE 4.7 – Kozlov-Maz'ya. Erreur relative avec données inexacte.

Erreur relative $Er(f)$, $N = 40, k = 20, \varepsilon = 10^{-2}$
0.0459
0.0455
0.0435

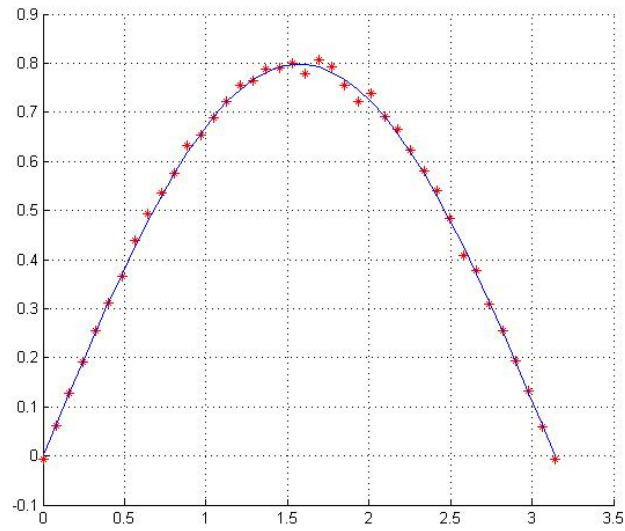


FIGURE 4.31 – Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $\varepsilon = 10^{-2}$, $N = 40$.

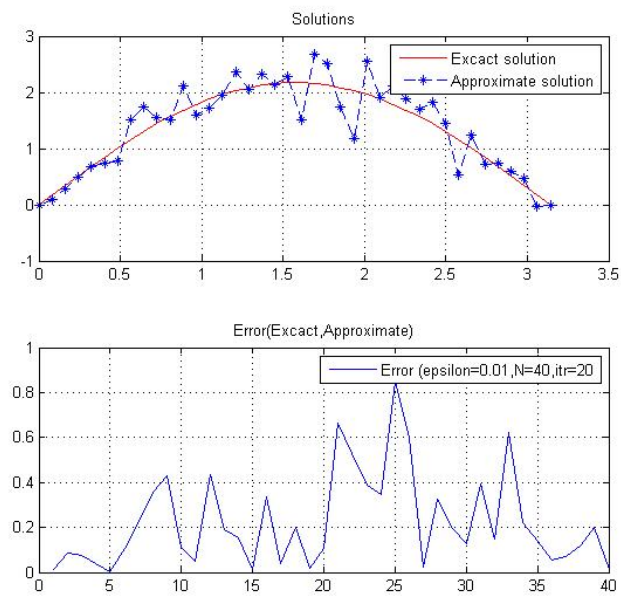


FIGURE 4.32 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 40$, $k = 20$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0459$.

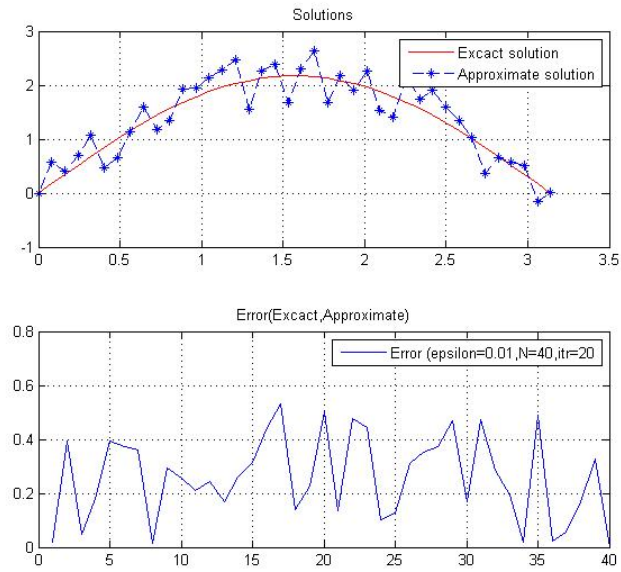


FIGURE 4.33 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 40, k = 20, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0455$.

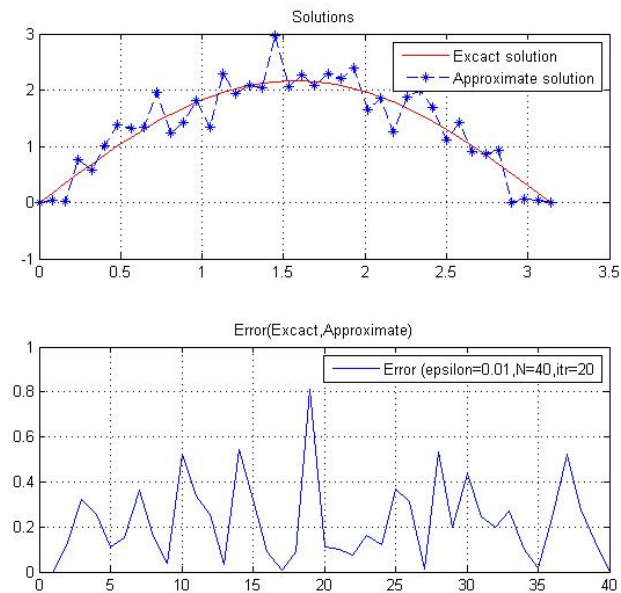


FIGURE 4.34 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 40, k = 20, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0435$.

- Dans le deuxième cas, on fixe le choix de la donnée inexacte g_δ où le niveau du bruit $\delta = 10^{-2}$ et on utilise une taille de discrétisation $N = 40$, et on varie le nombre d'itération k . Les résultats sont donnés par (fig. 4.35, fig. 4.36, fig. 4.37), et l'erreur relative dans le tableau (Tab. 4.8).

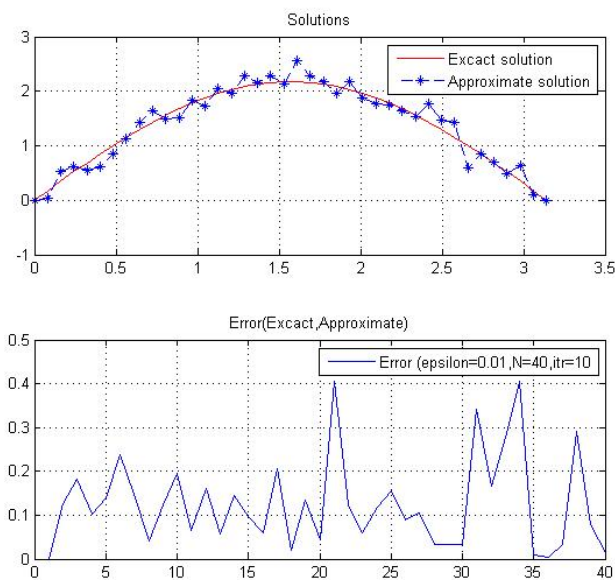


FIGURE 4.35 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 40$, $k = 10$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0370$.

TABLE 4.8 – Kozlov-Maz'ya. Erreur relative avec donnée inexacte.

Erreur relative $Er(f)$, $N = 40$, $\varepsilon = 10^{-2}$	
$k =$	$Er(f)$
10	0.0370
20	0.0508
50	0.0766

Ici l'effet de la perturbation aléatoire est important, i.e., pour des données perturbées proches, on pourra avoir des solutions approchées différentes. Néanmoins, pour un niveau du bruit de taille 1/100 les solutions approchées sont relativement acceptables par rapport à l'erreur relative commise. Mais lorsque le nombre d'itération devient grand, la solution approchée s'éloigne légèrement de la solution exacte.

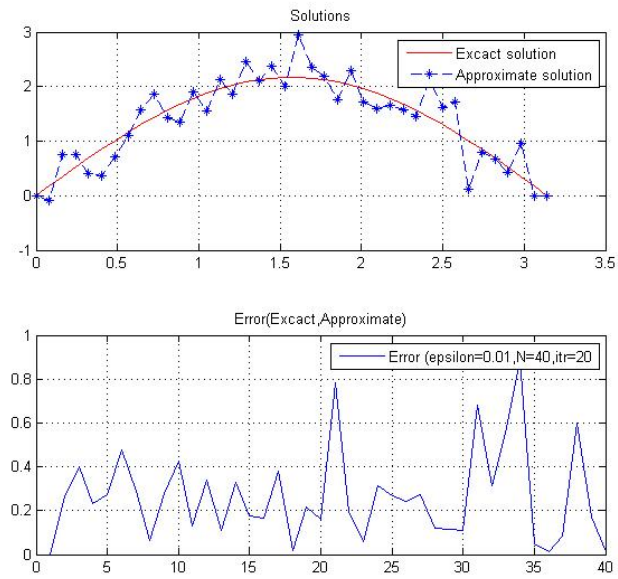


FIGURE 4.36 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 40$, $k = 20$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0508$.

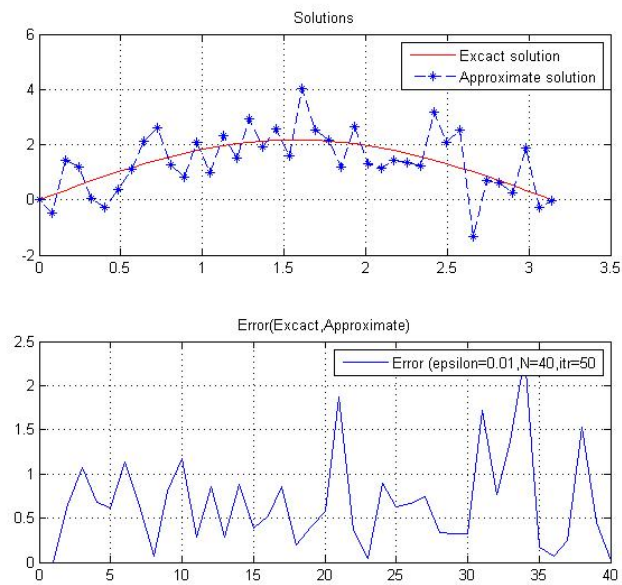


FIGURE 4.37 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 40$, $k = 50$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0766$.

- Dans le cas qui suit, le bruité appliqué à g_δ est $\delta = 10^{-2}$. On fixe le nombre d'itération $k = 20$ et on varie la taille de discrétisation N . Les résultats sont donnés par (fig. 4.38, fig. 4.39, fig. 4.40, fig. 4.41). L'erreur relative est donnée dans le tableau (Tab. 4.9).

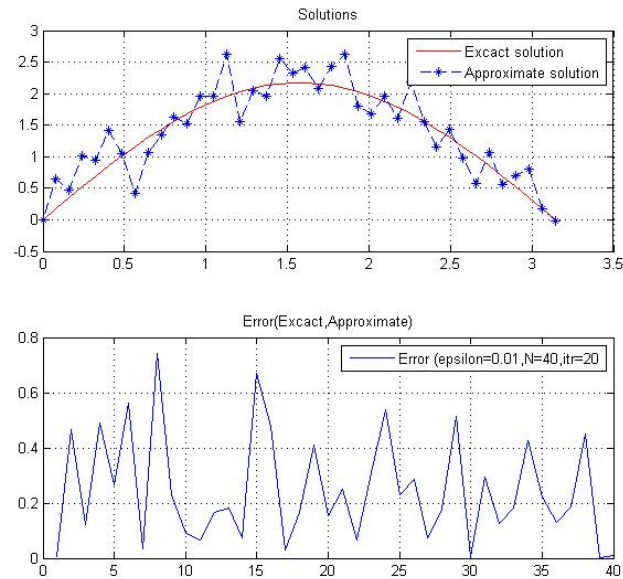


FIGURE 4.38 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 40$, $k = 20$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0471$.

TABLE 4.9 – Kozlov-Maz'ya. Erreur relative avec données bruité.

Erreur relative $Er(f)$, $k = 20$, $\varepsilon = 10^{-2}$	
$N =$	$Er(f)$
40	0.0471
50	0.0441
70	0.0413
100	0.0461

On remarque ici la propagation des erreurs de discrétisation cumulées sur la solution approchée.

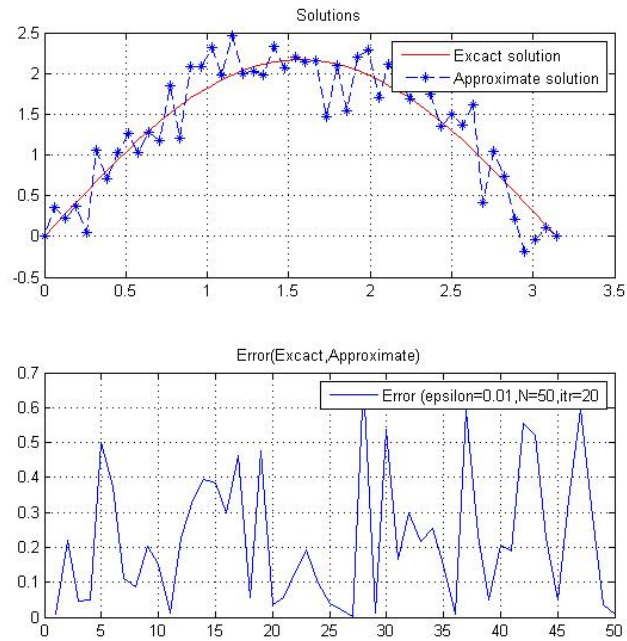


FIGURE 4.39 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 50, k = 20, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0441$.

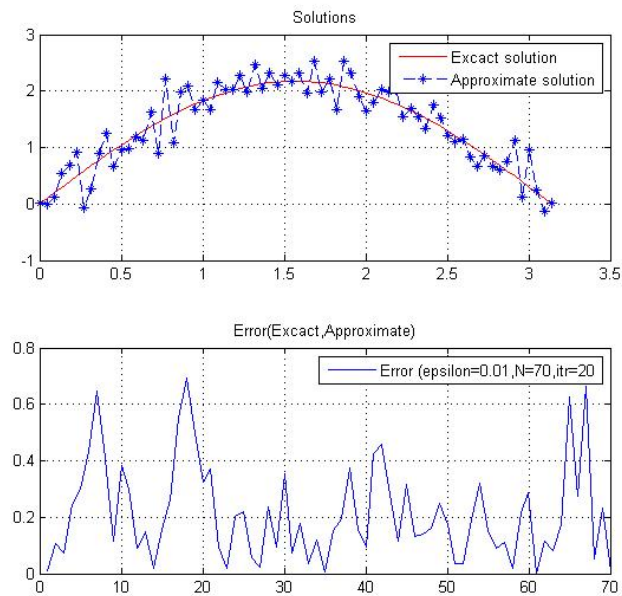


FIGURE 4.40 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 70, k = 20, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0471$.

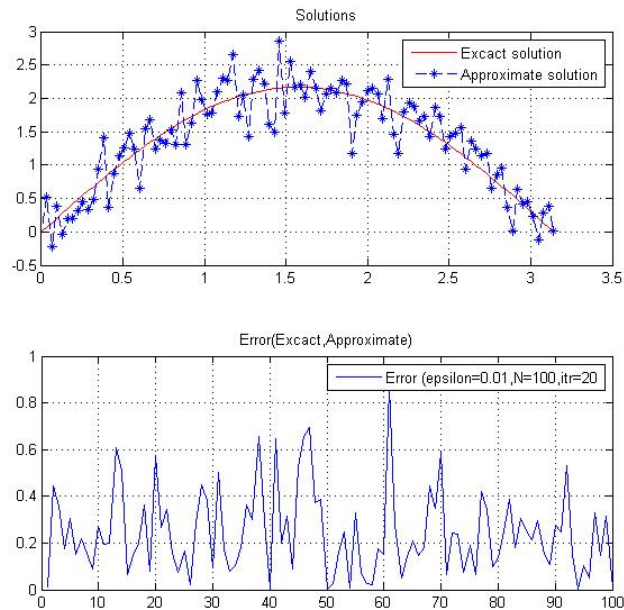


FIGURE 4.41 – Méthode de Kozlov-Maz'ya. Données inexactes : $N = 100$, $k = 20$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0461$.

4.2.2.3 Résultats numériques par la méthode de Krylov

- On calcule la solution approchée par la méthode de Krylov : le niveau du bruit $\delta = 10^{-2}$ est fixé pour la donnée (fig. 4.42), la dimension de l'espace est fixée à $m = 4$ et la taille de discrétisation est $N = 10$. Les résultats sont donnés par (fig. 4.43, fig. 4.44, fig. 4.45, fig. 4.46, fig. 4.47, fig. 4.48, fig. 4.49). L'erreur relative est donnée dans le tableau (Tab. 4.9).

On remarque ici que la solution approchée est bonne dès que le niveau du bruit est petit ($1/100$), et la taille de discrétisation N est moyenne et la dimension du sous-espace de Krylov M ne dépasse pas $N/2$.

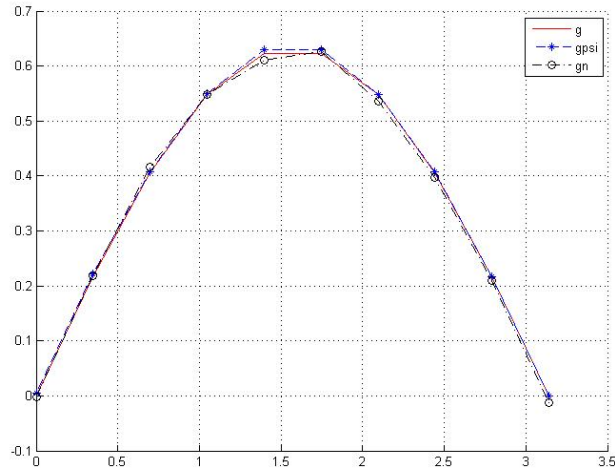


FIGURE 4.42 – Krylov. Données inexactes : $N = 10, \varepsilon = 10^{-2}$.

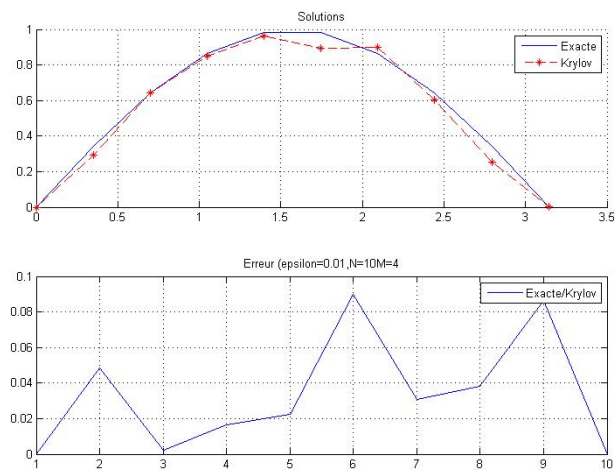


FIGURE 4.43 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 10, M = 4, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0649$.

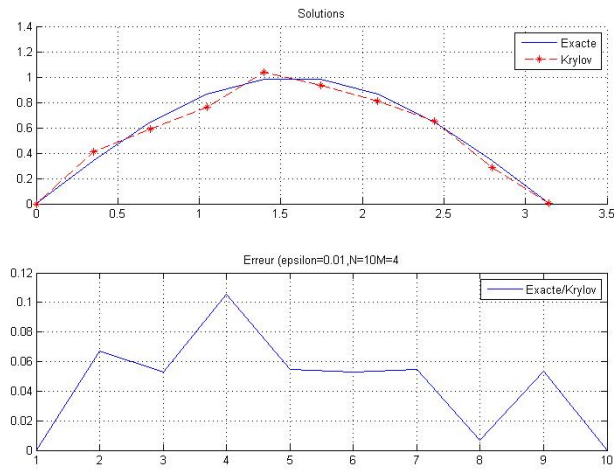


FIGURE 4.44 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 10, M = 4, \epsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0630$.

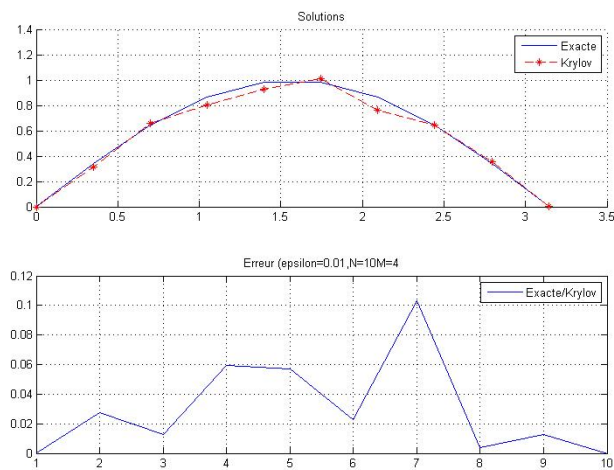


FIGURE 4.45 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 10, M = 4, \epsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0801$.

TABLE 4.10 – Krylov. Erreur relative avec données inexactes.

Erreur relative	
$N = 10, M = 4, \epsilon = 10^{-2}$	
$Er(f)$	
	0.0649
	0.0630
	0.0801
	0.0818
	0.0652
	0.0495
	0.0684

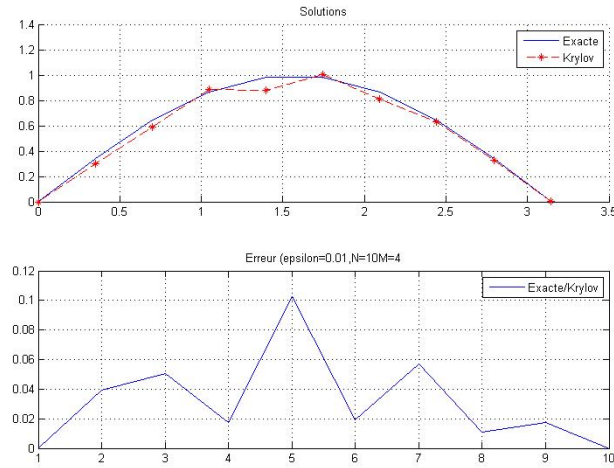


FIGURE 4.46 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 10$, $M = 4$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0818$.

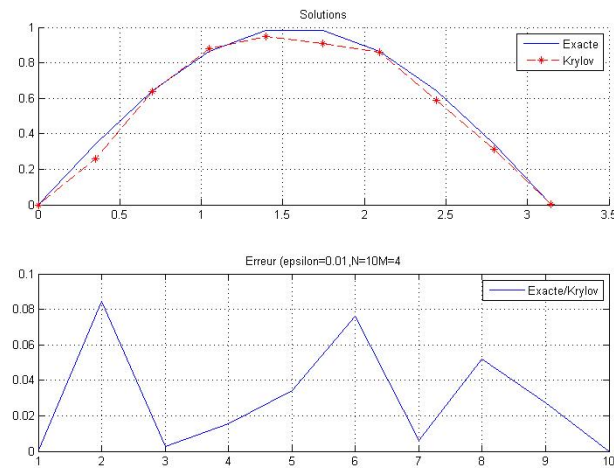


FIGURE 4.47 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 10$, $M = 4$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0652$.

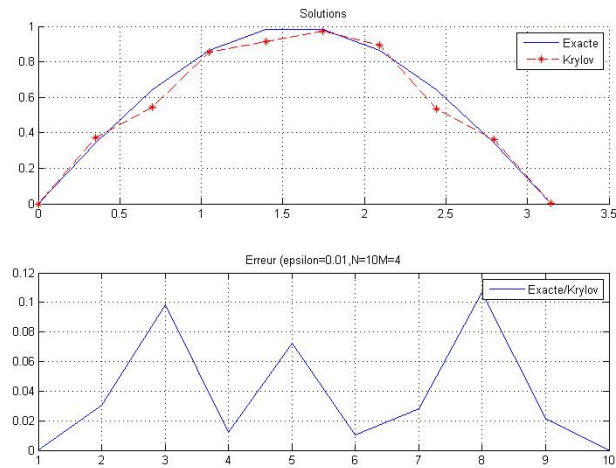


FIGURE 4.48 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 10, M = 4, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0495$.

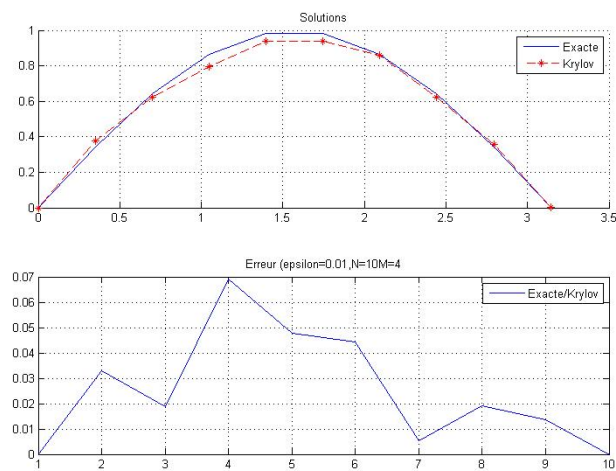


FIGURE 4.49 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 10, M = 4, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0684$.

- On applique les mêmes tests précédents pour un niveau du bruit $\delta = 10^{-2}$, engendré par une donnée inexacte (fig. 4.50), la dimension de l'espace $m = 8$ et la taille discrétisation $N = 12$. Les résultats sont donnés par (fig. 4.51, fig. 4.52, fig. 4.53, fig. 4.54, fig. 4.55, fig. 4.56). L'erreur relative est donnée dans le tableau (Tab. 4.11).

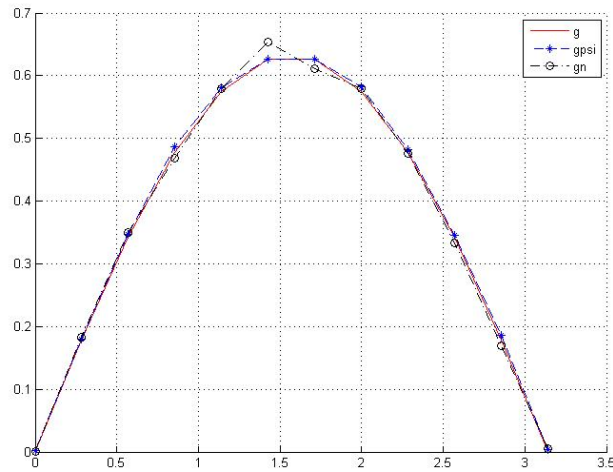


FIGURE 4.50 – Krylov. Données inexactes : $N = 12, \varepsilon = 10^{-2}$.

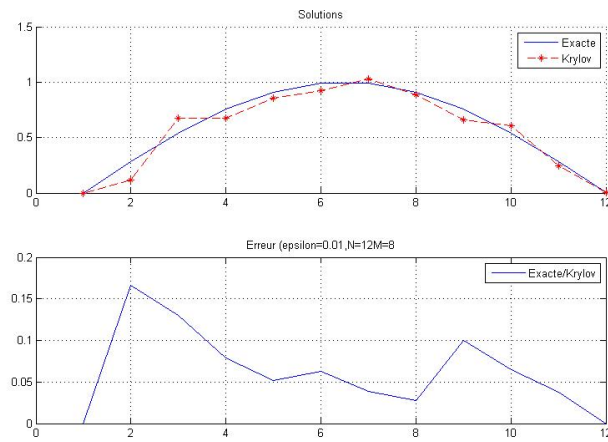


FIGURE 4.51 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 12, M = 8, \varepsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0897$.

Ici la solution par la méthode de Krylov est proche de la solution exacte dès que le niveau du bruit est assez petit et $M = N/2$ pour une taille de discrétisation N moyenne.

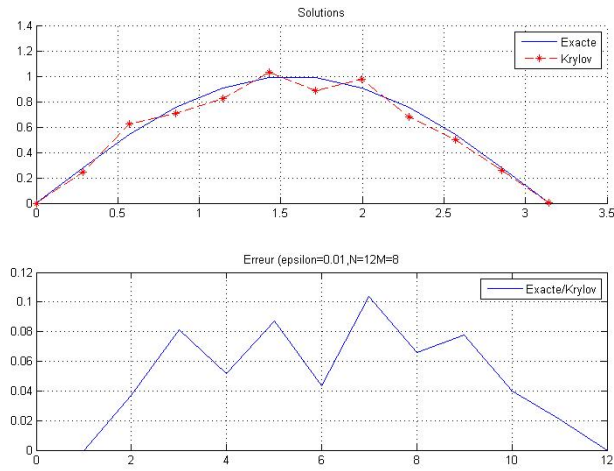


FIGURE 4.52 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 12, M = 8, \epsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0887$.

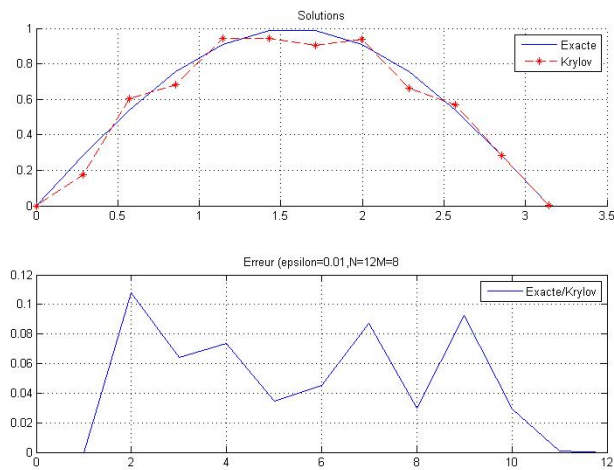


FIGURE 4.53 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 12, M = 8, \epsilon = 10^{-2}, Er(f) = 0.0876$.

TABLE 4.11 – Krylov. Erreur relative avec données inexactes.

Erreur relative	
$N = 12, M = 8, \epsilon = 10^{-2}$	
$Er(f)$	
	0.0897
	0.0887
	0.0876
	0.0866
	0.0599
	0.1063

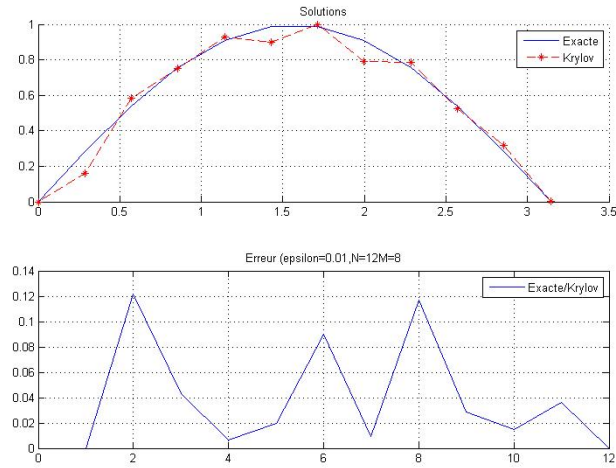


FIGURE 4.54 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 12$, $M = 8$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0866$.

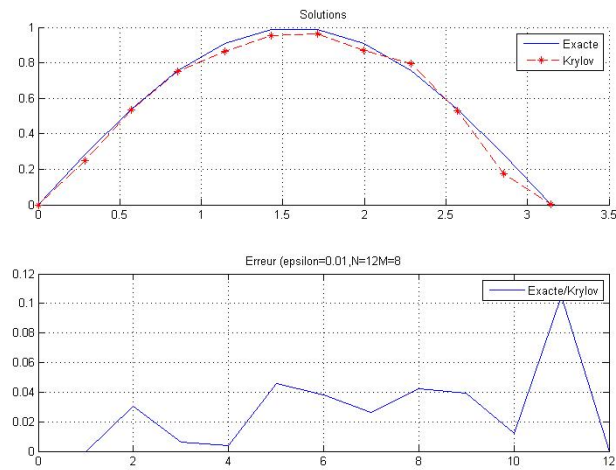


FIGURE 4.55 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 12$, $M = 8$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.0599$.

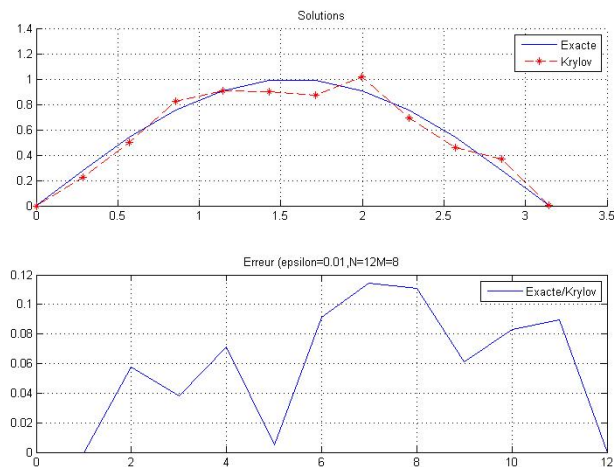


FIGURE 4.56 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 12$, $M = 8$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $Er(f) = 0.1063$.

- Dans les résultats suivants, on applique plusieurs tests avec un niveau de bruit faible. On calcule la solution approchée dans différents cas en fixant deux paramètres et on change un seul dans chaque variété de calcul. Toutes les valeurs d'erreurs relatives associées se regroupent dans le tableau (Tab. 4.12).
- Le cas initial : on fixe le niveau du bruit $\delta = 10^{-3}$, la taille de de discrétisation $N = 28$ et la dimension de l'espace $m = 14$. On a les résultats figurants dans (fig. 4.57, fig. 4.58, fig. 4.59).

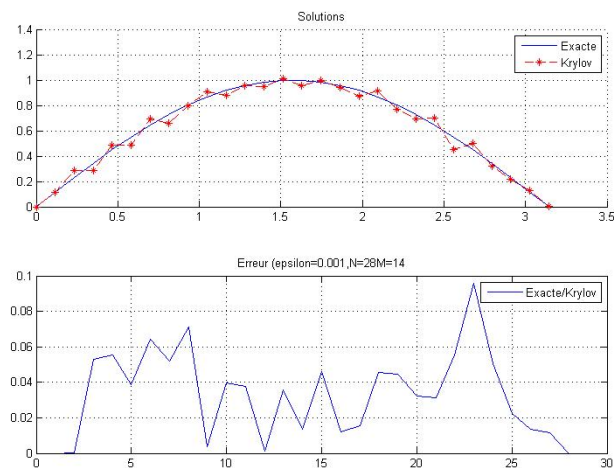


FIGURE 4.57 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 28$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $Er(f) = 0.0596$.

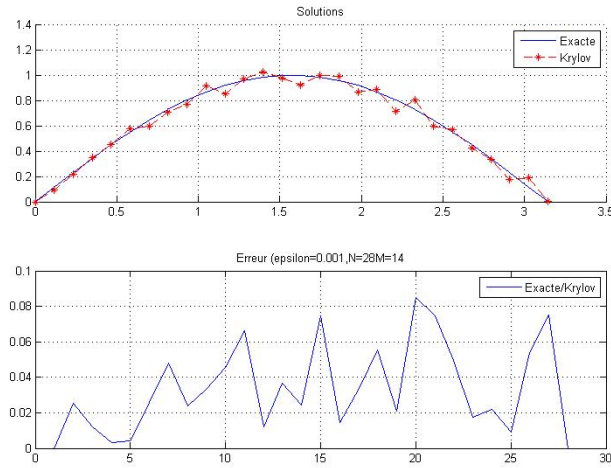


FIGURE 4.58 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 28$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $Er(f) = 0.0603$.

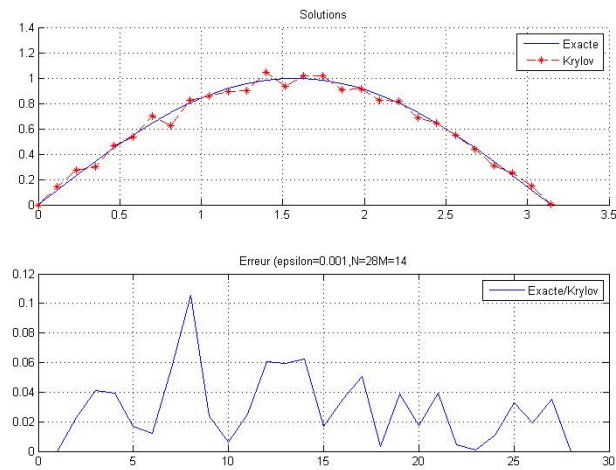


FIGURE 4.59 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 28$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $Er(f) = 0.0553$.

- Le deuxième cas : le bruit reste à 10^{-3} et $m = 14$, et on change la taille de discrétisation à $N = 50$. On a les résultats suivants (fig. 4.60, fig. 4.61, fig. 4.62).

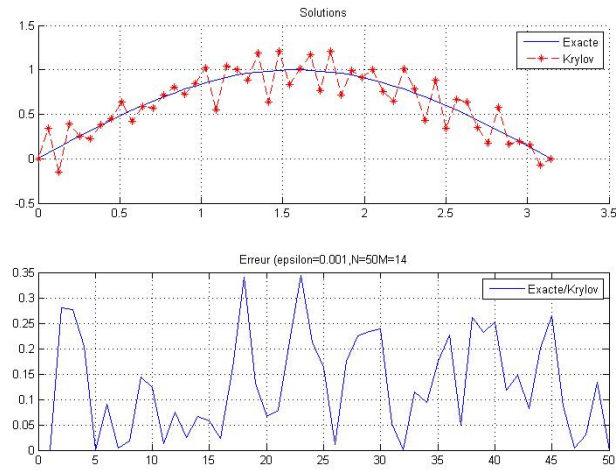


FIGURE 4.60 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $Er(f) = 0.2330$.

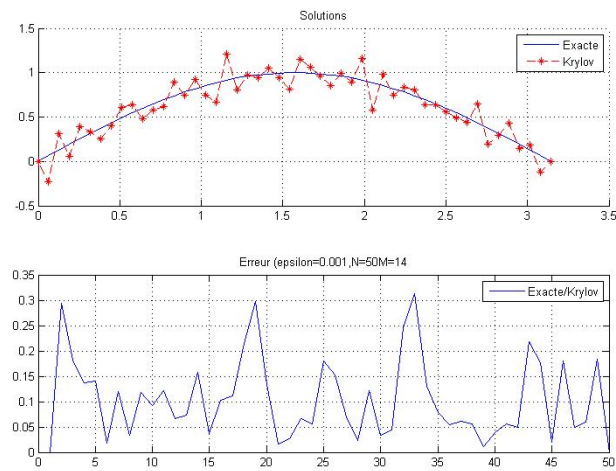


FIGURE 4.61 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $Er(f) = 0.1872$.

- Dans le troisième cas, on change que le niveau du bruit $\delta = 10^{-4}$, les autres paramètres restent les mêmes : $N = 50$ et $m = 14$. On obtient les résultats (fig. 4.63, fig. 4.64, fig. 4.65, fig. 4.66).

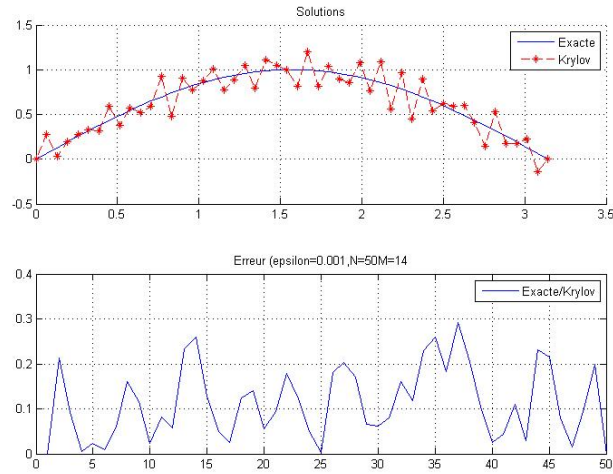


FIGURE 4.62 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $Er(f) = 0.1983$.

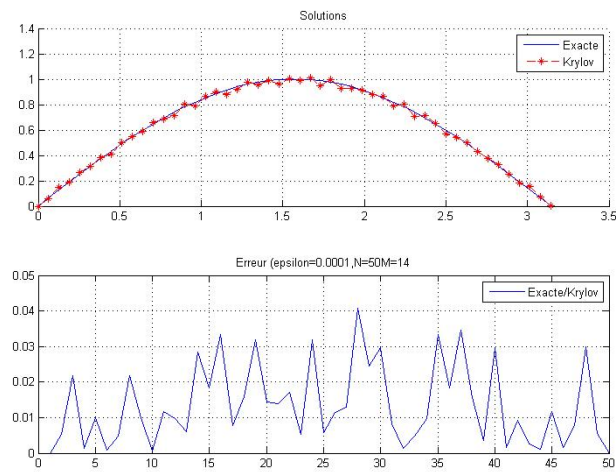


FIGURE 4.63 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0264$.

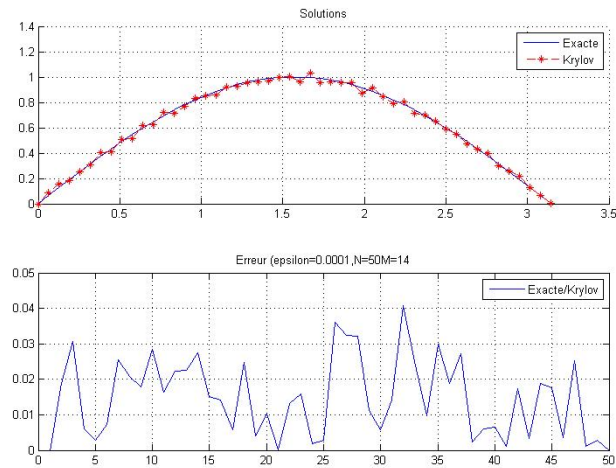


FIGURE 4.64 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0232$.

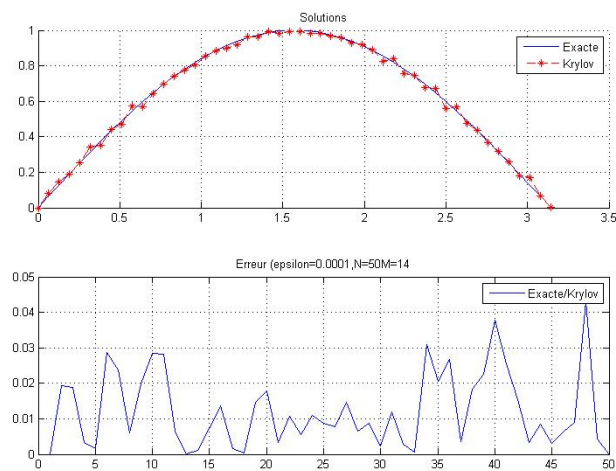


FIGURE 4.65 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0211$.

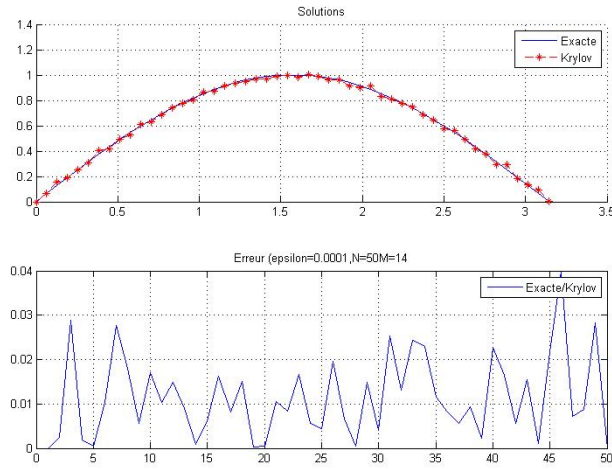


FIGURE 4.66 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 14$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0252$.

- Dans ce cas, comme dans le test précédent, la dimension de l'espace $m = 14$, $\delta = 10^{-4}$ et $N = 50$. Les résultats obtenus sont donnés par (fig. 4.67, fig. 4.68, fig. 4.69).

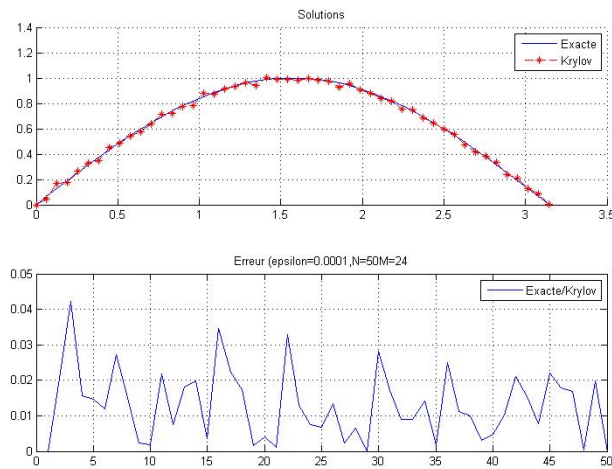


FIGURE 4.67 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 24$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0233$.

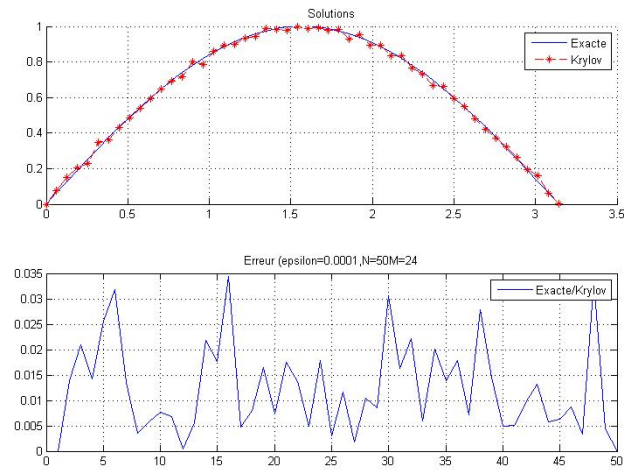


FIGURE 4.68 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 24$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0219$.

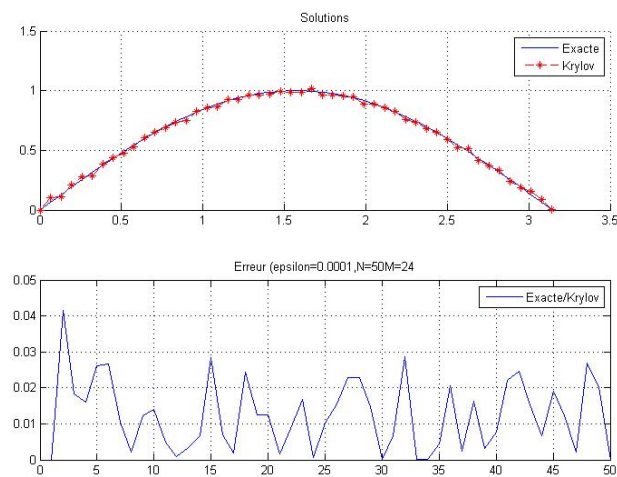


FIGURE 4.69 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 50$, $M = 24$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0228$.

- Comme un dernier cas, on garde le même niveau du bruit $\delta = 10^{-4}$, et on change la dimension de l'espace $m = 20$ et la taille de discrétisation $N = 50$. On obtient les résultats (fig. 4.70, fig. 4.71, fig. 4.72).

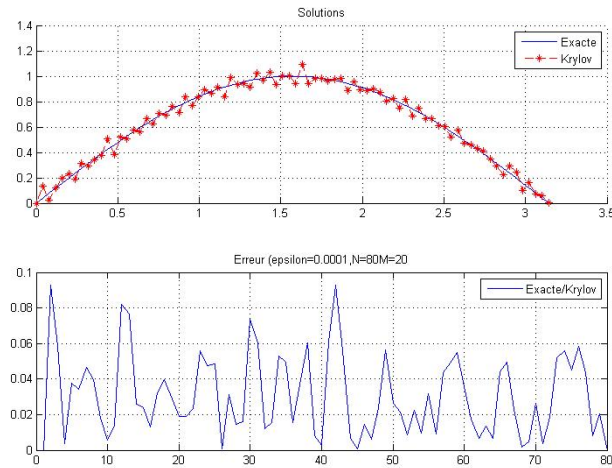


FIGURE 4.70 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 80$, $M = 20$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0641$.

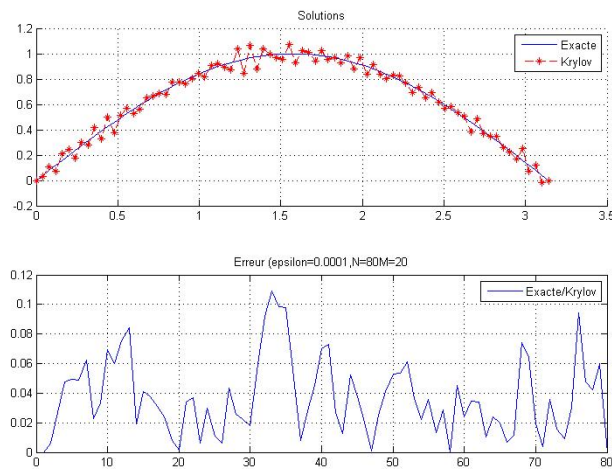


FIGURE 4.71 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 80$, $M = 20$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0547$.

Ces figures montrent qu'on peut augmenter la taille de discrétisation à condition que le niveau du bruit soit assez petit.

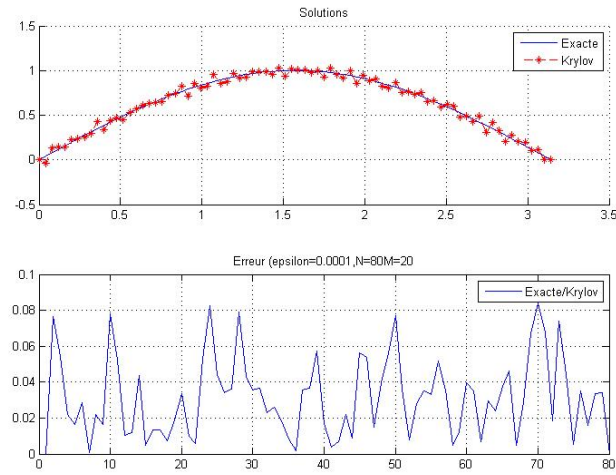


FIGURE 4.72 – Méthode de Krylov. Données inexactes : $N = 80$, $M = 20$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Er(f) = 0.0549$.

TABLE 4.12 – Krylov. Erreur relative avec données inexactes.

N	M	ε	$Er(f)$
28	14	10^{-3}	0.0596
			0.0603
			0.0553
			0.2330
50	14	10^{-3}	0.2330
			0.1872
			0.1983
		10^{-4}	0.0264
			0.0232
			0.0211
50	24	10^{-4}	0.0252
			0.0233
			0.0228
80	20	10^{-4}	0.0219
			0.0641
			0.0547
			0.0549

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse nous avons appliqué certaines méthodes numériques pour obtenir les solutions approchées d'un problème inverse elliptique de type identification de conditions aux limites et identification de sources .

Les résultats obtenus dans le présent travail, ouvrent de nouveaux horizons dans le développement des méthodes numériques pour la résolution de certains problèmes aux dérivées partielles particulièrement les problèmes inverses.

Nous avons développé deux méthodes de régularisation (troncature, Kozlov-Maz'ya) qui donnent la solution approchée du problème inverse posé. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une publication dans une revue de renommée établie [AnnexeD]. Nous avons proposé la méthode de projection sur un sous espace de Krylov [AnnexeA] comme une amélioration du calcul de la solution approchée.

Le nombre réduit d'itérations rend les résultats obtenus par la méthode de projection de Krylov satisfaisants par rapport à ceux obtenus par la méthode de troncature ou celle de la méthode de Kozlov-Maziya.

Nous envisageons l'amélioration de la convergence théorique et numérique de la méthode de Krylov obtenue numériquement dans le présent travail avec une estimation d'erreur, ce qui va nous permettre de donner la taille exacte de l'espace de Krylov selon le test d'arrêt fixé et les précisions souhaitées à établir.

L'étude de problèmes inverses d'ordre fractionnaire est l'une des perspectives que nous prévoyons d'entamer dans un futur proche.

Méthodes de projection sur des sous-espaces de Krylov

Dans la résolution de certaines EDP ou EDO, on est amené à évaluer $\Phi(A)$ ou $\Phi(A)b$, où $A \in M_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et Φ est une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{C}$ contenant $\Lambda(A)$ le spectre de A .

Exemple A.0.1 Les fonctions $u(t) = \exp(tA)v$, $\cos(t\sqrt{A})v$ et $\cosh(t\sqrt{A})v$ interviennent dans la résolution des problèmes paraboliques, hyperboliques et elliptiques, et donc le calcul de ces expressions est d'intérêt très important.

L'appellation "fonctions de matrices" peut avoir plusieurs significations différentes. Dans ce travail nous nous intéressons à la définition qui prend une fonction scalaire Φ et une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $\Phi(A)$ est une matrice de même dimension que A ; de façon générale, on utilise $\Phi(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Lorsque $\Phi(t)$ est une fonction polynomiale ou rationnelle à coefficients scalaires et la variable t est aussi scalaire, il est naturel de définir $\Phi(A)$ par substitution de A à la place de t . On remplace la division par l'inverse (A doit être inversible), et 1 par la matrice identité I (pour plus de détails, voir [41, 75, 46]).

Exemple A.0.2

$$\Phi(t) = \frac{1+t^2}{1-t} \Rightarrow \Phi(A) = (I-A)^{-1}(I+A^2), \text{ si } 1 \notin \Lambda(A)$$

$\Lambda(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A . Si Φ est donnée par une série convergente, par exemple :

$$\Phi(t) = \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \quad (|t| < 1),$$

on définit alors la matrice

$$\log(I+A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} + \dots \quad (\rho(A) < 1), \quad (\text{A.1})$$

ρ : le rayon spectral de A , et la condition $\rho(A) < 1$ assure la convergence de la série matricielle.

A.1 Méthodes itératives pour le calcul de $f(A)b$

Lorsque A est de grande dimension, l'action de $f(A)$ sur un vecteur v , notée $u = f(A)v$, peut être effectivement approchée en projetant le vecteur u sur un sous-espace de dimension plus petite, où la procédure de calcul est basée sur les produits de A avec un vecteur.

A.1.1 Sous-espaces de Krylov

On note par

$$\mathcal{K}_k(A, v) = \text{Vect} \{v, Av, A^2v, \dots, A^{k-1}v\}$$

le sous-espace de Krylov de dimension k , de base (v_1, v_2, \dots, v_k) , où les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_k sont rangés sous forme de matrice V_k .

En se référant au livre [139], la méthode d'Arnoldi est une méthode de projection orthogonale sur un sous-espace de Krylov, généralement appliquée aux matrices non symétriques. Cette procédure a été introduite par Arnoldi en 1950 comme un moyen de réduire une matrice dense sous forme de Hessenberg, qui peut être exploitée comme un moyen d'approximation des valeurs propres des matrices de grandes tailles.

D'après la méthode d'Arnoldi, on a, à l'étape k , les relations suivantes :

$$AV_k = V_{k+1}H_{k+1,k} = V_kH_k + h_{k+1,k}v_{k+1}e_k^T \quad (\text{A.2})$$

$$V_k^T AV_k = H_k \text{ (matrice de Hessenberg)}$$

Le projeté de $u = f(A)v$ sur le sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_k(A, v)$ est donné par la formule par :

$$u_k = \|v\| V_k f(H_k) e_1. \quad (\text{A.3})$$

A.1.1.1 Construction de la base d'Arnoldi

La méthode d'Arnoldi est une méthode de projection orthogonale sur un sous-espace de Krylov permettant de construire, pour toute matrice A , une base orthonormale du sous-espace et une matrice de Hessenberg. La construction est basée sur la multiplication successive d'un vecteur initial v par la matrice A et l'orthonormalisation par une procédure de Gram-Schmidt modifiée appliquée aux vecteurs obtenus, selon le schéma suivant :

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{v}{\|v\|}, & \longrightarrow v_2 = Av_1 & \rightsquigarrow v_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \\ \dots & \longrightarrow v_m = Av_{m-1} & \rightsquigarrow v_m = \frac{v_m}{\|v_m\|}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Algorithme A.1.1: L'algorithme d'Arnoldi [139]

Données : A, v, m
Résultats : V_m, H_m
initialisation;
 $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$;
Pour $j = 1$ à m **faire**
 $w_j = Av_j$;
 Pour $i = 1$ à $j - 1$ **faire**
 $h_{ij} = v_i^T w_j$;
 $w_j = w_j - h_{ij} v_i$;
 FinPour
 $h_{j+1,j} = \|w_j\|$;
 Si ($h_{j+1,j} = 0$) **Alors**
 Stop;
 Sinon
 $v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$;
 finSi
FinPour

Notation A.1.1 Soit V_m la matrice rectangulaire à n lignes et m colonnes dont les colonnes sont les m premiers vecteurs de la base d'Arnoldi

$$V_m = [v_1 \mid \cdots \mid v_m]_{(n \times m)},$$

alors l'orthonormalisation des vecteurs nous donne

$$V_m^T V_m = I_m,$$

et les formules de construction de la base d'Arnoldi s'écrivent

$$Av_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{ij} v_i$$

La matrice $\tilde{H}_m = (h_{ij})_{(m+1 \times m)}$, tel que h_{ij} est le coefficient d'orthogonalisation de Av_j par rapport à v_i , prend la forme

$$H_{m+1,m} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1j} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2j} & \cdots & h_{2m} \\ 0 & h_{32} & \cdots & h_{3j} & \cdots & h_{3m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & h_{j+1,j} & & h_{j+1,m} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix}$$

et la matrice de Hessenberg H_m obtenue à partir de \tilde{H}_m en supprimant sa dernière ligne.

$$\begin{aligned}
 AV_m &= V_m H_m + w_m e_m^T \\
 &= V_{m+1} \tilde{H}_m \\
 V_m^T AV_m &= H_m
 \end{aligned}$$

A

V_m

=

V_m

H_m

+ w_me_m^T

$$\begin{aligned}
 V_m^T AV_m &= H_m \tag{A.5} \\
 H_m &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ 0 & h_{32} & \ddots & \cdots & h_{3m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{m-1,m} & h_{m,m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Définition A.1.2 (cf. [90]) Soient $(y_k)_{k=1}^m$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\theta_k)_{k=1}^m$ de la matrice H_m . Alors $(\theta_k, V_m y_k)_{k=1}^m$ sont appelées valeurs de **Ritz** et vecteurs de **Ritz** associés à la matrice A par rapport au sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_k(A)$.

Remarque A.1.3 Dans des situations pratiques, le calcul des couples propres d'une matrice carrée A est une tâche très complexe, c'est pour cela, il est commode de calculer les couples de **Ritz** qui peuvent être considérés comme des bonnes approximations à une certaine précision. Cette approche est bien justifiée théoriquement et numériquement [29, 122].

Théorème A.1.4 (cf. [66, 90])

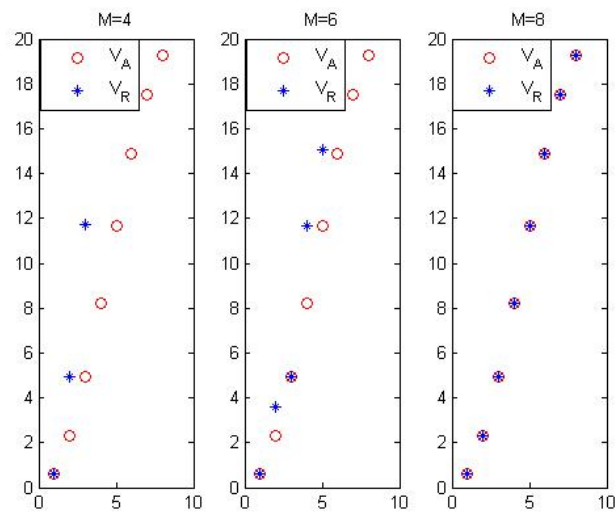
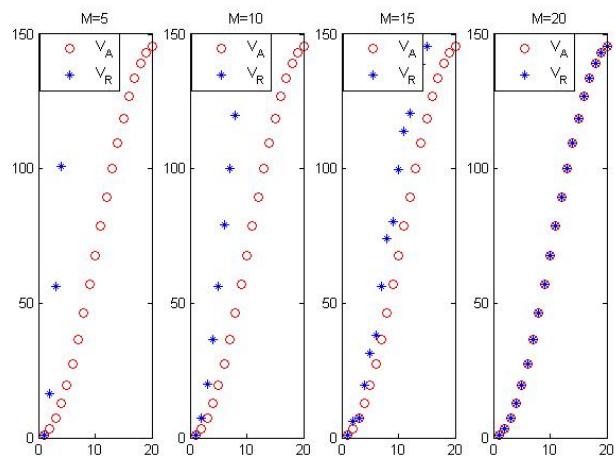
Soient $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $(\lambda_i)_{i=1}^N$ les valeurs propres de A et $(\theta_i)_{i=1}^m$ les valeurs propres de H_m (matrice de Heissenberg à l'itération m du processus d'Arnoldi). Si $A = A^T$ et $m < N$, alors on a la localisation suivante :

$$\lambda_{\min} \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m \leq \lambda_{\max}.$$

Chaque intervalle $(-\infty, \theta_1], [\theta_1, \theta_2], \dots, [\theta_{m-1}, \theta_m], (\theta_m, +\infty]$ contient au moins une valeurs propres de A .

Remarque A.1.5 Les valeurs de **Ritz** $(\theta_i)_{i=1}^m$ sont des approximations des valeurs propres de A qui dépendent (explicitement) du choix de vecteur initial v dans la procédure d'Arnoldi (Lanczòs dans le cas symétrique)

Un exemple d'approximation numérique des valeurs propre de la matrice A avec les valeurs de Ritz générés avec l'espace de Krylov (fig. A.1,A.2,A.3), dans le cas $A = A_\Delta$ (matrice tridiagonale de discrétisation de l'opérateur $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ avec la méthode des différences finies)

FIGURE A.1 – Approximation des valeurs propres de A , $N = 8$, avec les valeurs de Ritz.FIGURE A.2 – Approximation des valeurs propres de A , $N = 20$, avec les valeurs de Ritz.

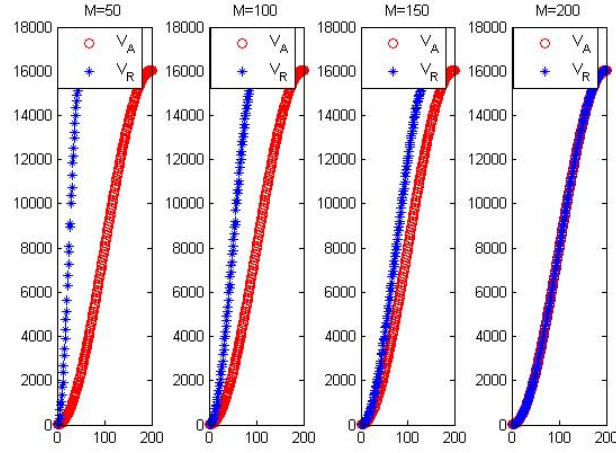


FIGURE A.3 – Approximation des valeurs propres de A , $N = 200$, avec les valeurs de Ritz.

A.1.2 Cas symétrique de Lanczòs

Dans le cas particulier où la matrice A est symétrique, la matrice H_m l'est aussi, et d'après l'équation (A.5), elle a la forme tridiagonale symétrique

$$H_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ & & & \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix} \quad (\text{notée } T_m)$$

L'algorithme de construction d'une base orthonormale de sous-espace de Krylov s'appelle algorithme de Lanczòs. L'initialisation de la base (dans le cas de la résolution d'un système linéaire $Ax = b$) est

$$g_0 = Ax_0 - b$$

$$v_1 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$$

et les autres vecteurs v_{j+1} sont donnés par les relations :

$$w = Av_j$$

$$h_{j,j-1} = h_{j-1,j}$$

$$w = w - h_{j-1,j}v_{j-1}$$

$$h_{jj} = (w, v_j)$$

$$w = w - h_{jj}v_j$$

$$h_{j+1,j} = \|w\|$$

$$v_{j+1} = \frac{w}{h_{j+1,j}}$$

Algorithme A.1.2: L'algorithme de Lanczòs [139]

Données : A, v, m
Résultats : V_m, T_m
initialisation;
 $q_1 = \frac{b}{\|b\|}$ et $q_0 = 0$;
Pour $j = 1$ à m **faire**
 $\alpha_j = q_j^T A q_j$;
 $\beta_{j+1} = \|A q_j - q_{j-1} \beta_{j-1} - q_j \alpha_j\|$;
 Si ($\beta_{j+1} = 0$) **Alors**
 Stop;
 Sinon
 $q_{j+1} = \frac{(A q_j - q_{j-1} \beta_{j-1} - q_j \alpha_j)}{\beta_{j+1}}$;
 finSi
FinPour

Proposition A.1.6 (cf. [139])

Dans l'algorithme d'Arnoldi, on a, à l'étape $m \leq N$, la relation suivante

$$AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T, \quad (\text{A.6})$$

i.e.,

$$V_m^T AV_m \approx H_m, \quad (\text{A.7})$$

où e_m est le m -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m , $H_m = (h_{ij})_{i,j=1}^m$ est une matrice de Hessenberg supérieure et $V_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ est une matrice réelle orthogonale ($V_m V_m^T = I_m$).

A.1.3 Approximation de Krylov

Cette méthode originale a été introduite par **VAN DER VORST** en 1987 [144] pour résoudre l'équation $f(A)x = y$, ensuite elle a été développée par **V. Druskin & L.A. Knizhnerman** ¹⁹⁸⁹ [45], pour calculer le produit $f(A)b$, où f est une fonction polynomiale (resp. exponentielle) ($f(A)b = \exp(A)b$, où $\sigma(A)$ est négatif).

Après le succès obtenu, elle a été généralisée pour certaines classes de fonctions rationnelles, racines carrées, trigonométriques, complètement monotones, et de type Markov.

D'après (A.7) dans la proposition A.1.6, on applique la fonction f et la multiplication par le vecteur b , on aura les deux cas suivants :

- Pour $m = N$, la méthode d'Arnoldi nous fournit une formule très pratique pour calculer $f(A)b$: on pose $v_1 = \frac{b}{\|b\|}$, et on calcule

$$\begin{aligned} f(A)b &= V_N f(H_N) V_N^T b \\ &= \|b\| V_N f(H_N) e_1. \end{aligned}$$

- Pour $m \ll N$ on projette le vecteur $f(A)b$ sur un sous espace de Krylov de dimension $m \ll N$, pour obtenir l'approximation

$$\begin{aligned}
 f(A)b &= f(A)V_m V_m^* b \\
 &\approx V_m V_m^* f(A)V_m V_m^* b \\
 &= V_m f(V_m^* A V_m) V_m^* b \\
 &\approx V_m f(H_m) \|b\| e_1 \\
 f(A)b &\approx \|b\| V_m f(H_m) e_1.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Si on utilise l'approximation (A.8) de la formule d'itération (A.6) qui découle de l'algorithme d'Arnoldi, on aura

$$e^A v \approx \beta V_m e^{H_m} e_1, \tag{A.9}$$

tel que $\beta = \|v\|$. Comme $V_m^T (\tau A) V_m = \tau H_m$ et les sous-espaces de Krylov associés à A et τA sont identiques, on aura donc

$$e^{\tau A} v \approx \beta V_m e^{\tau H_m} e_1, \tag{A.10}$$

pour tout réel τ . La formule (A.10) est l'approximation de l'action de l'opérateur $\exp(\tau A)$, qui est parfois appelée opérateur de multiplication exponentielle. Dans la littérature mathématiques, on trouve des développements très importants consacrés à l'approximation de multiplication exponentielle par la méthode de projection de Krylov (A.9) (voir [56, 61, 114]).

A.2 Cas non-symétrique de Lanczòs

Un autre algorithme bien connu pour la construction d'une base pratique de \mathcal{K}_m est l'algorithme de Lanczòs. L'algorithme commence avec deux vecteurs v_1 et w_1 et génère une base bi-orthogonale des sous-espaces $\mathcal{K}_m(A, v_1)$ et $\mathcal{K}_m(A^T, w_1)$.

Algorithme A.2.1: L'algorithme de Lanczòs pour le cas non-symétrique [140]

Données : A, v, m

Résultats : V_m, T_m

Initialisation;

$v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ et choisir $w_1 : (v_1, w_1) = 1$ [exemple : $w_1(i) = \frac{1}{N v_1(i)}$];

Pour $j = 1$ à m **faire**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \alpha_j = (A v_j, w_j); \\
 \hat{v}_{j+1} = A v_j - \alpha_j v_j - \beta_j v_{j-1}; \\
 \hat{w}_{j+1} = A^T w_j - \alpha_j w_j - \delta_j w_{j-1}; \\
 \beta_{j+1} = \sqrt{|(\hat{v}_{j+1}, \hat{w}_{j+1})|}; \\
 \delta_{j+1} = \beta_{j+1} \cdot \text{sign}[(\hat{v}_{j+1}, \hat{w}_{j+1})]; \\
 v_{j+1} = \frac{\hat{v}_{j+1}}{\beta_{j+1}}; \\
 w_{j+1} = \frac{\hat{w}_{j+1}}{\beta_{j+1}};
 \end{array} \right.$$

FinPour

On pose, comme précédemment $V_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ et de même pour $W_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$, alors

$$W_m^T V_m = V_m^T W_m = I \quad (\text{A.11})$$

où I est la matrice identité. On note T_m la matrice tridiagonale

$$T_m \equiv \text{Tridiag}[\delta_j, \alpha_j, \beta_{j+1}]$$

Un analogue de la relation (A.6) est

$$AV_m = V_m T_m + \delta_{m+1} v_{m+1} e_m^T. \quad (\text{A.12})$$

Dans ce cas, l'approximation basée sur la méthode d'Arnoldi prend la forme

$$e^A v \approx \beta V_m e^{T_m} e_1 \quad (\text{A.13})$$

tel que $\beta = \|v\|_2$.

Remarque A.2.1 *Le fait que V_m n'est plus orthogonale peut causer des difficultés numériques sérieuses (la norme de V_m peut, dans certains cas, être très grande).*

Remarque A.2.2 *D'après les trois algorithmes (A.1.1 A.1.2 A.2.1), on a :*

- dans l'approximation d'Arnoldi, V_m est orthogonale et H_m est une matrice de Hessenberg supérieure ;
- dans l'approximation de Lanczòs, H_m est tridiagonale et V_m n'est pas nécessairement orthogonale ;
- dans le cas symétrique, V_m est orthogonale et H_m est tridiagonale et symétrique.

A.3 Résultats d'exactitude

Dans ce paragraphe, on donne la relation entre l'approximation de Krylov et l'approximation des fonctions, comme on va le voir que ces méthodes sont mathématiquement équivalentes à l'interpolation de Hermite de la fonction f sur le spectre $\Lambda(A)$ (ou les valeurs de Ritz).

On commence par le lemme clé suivant :

Lemme A.3.1 [140] *Soit A une matrice et V_m, H_m les matrices générées par la méthode d'Arnoldi (ou Lanczòs) appliquée à A , à l'étape m . Alors pour tout polynôme p_j de degré $j \leq m - 1$, on a l'égalité suivante*

$$p_j(A) v_1 = V_m p_j(H_m) e_1 \quad (\text{A.14})$$

Preuve. *Commençons par le cas d'Arnoldi. Soit $\pi_m = V_m V_m^T$ le projecteur orthogonal sur \mathcal{K}_m . Nous allons prouver par récurrence sur j que $A^j v_1 = V_m H_m^j e_1$, pour $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$. Le résultat est clairement vrai pour $j = 0$. Supposons que c'est vrai pour certains j avec $j \leq m - 2$. Comme les vecteurs $A^{j+1} v_1$ et $A^j v_1$ appartiennent à \mathcal{K}_m , on a*

$$A^{j+1} v_1 = \pi_m A^{j+1} v_1 = \pi_m A A^j v_1 = \pi_m A \pi_m A^j v_1,$$

et la relation (A.6) donne $\pi_m A \pi_m = V_m H_m V_m^T$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$A^{j+1} v_1 = V_m H_m V_m^T V_m H_m^j e_1 = V_m H_m^{j+1} e_1. \quad \blacksquare$$

Remarque A.3.2 La preuve pour l'approximation de Lanczòs (A.13) est identique, sauf que π_m doit être remplacé par le projecteur oblique $V_m W_m^T$.

Lemme A.3.3 [62] Soit A une matrice de polynôme minimal de degré ν et soit $f(z)$ une fonction analytique sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$ contenant le spectre $\Lambda(A)$ de A . Si $p_{\nu-1}$ est le polynôme d'interpolation au sens de Hermite de la fonction f sur $\Lambda(A)$ (les racines du polynôme minimal de A sont répétées en fonction de leurs multiplicités). Alors, on a

$$f(A) = p_{\nu-1}(A). \quad (\text{A.15})$$

Considérons maintenant une matrice de Hessenberg H . On sait que pour $h_{j+1,j} \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, la multiplicité géométrique de chaque valeur propre est 1, c'est à dire, le polynôme minimal de H est simplement son polynôme caractéristique. Par conséquent, si H_m est la matrice de Hessenberg générée par le processus d'Arnoldi, alors on peut affirmer que

$$f(H_m) = p_{m-1}(H_m). \quad (\text{A.16})$$

où p_{m-1} est le polynôme d'interpolation (au sens d'Hermite) de la fonction f sur le spectre de H_m . Maintenant on introduit le théorème principal de caractérisation.

Théorème A.3.4 La formule (A.8) pour approcher le vecteur $u = f(A)v$ est équivalente à $p_{m-1}(A)v$, où p_{m-1} est l'unique polynôme d'interpolation au sens d'Hermite, de degré $m-1$, sur l'ensemble des valeurs de Ritz répétées selon leurs multiplicités.

Preuve. Dans le cas d'Arnoldi (resp. Lanczòs), l'approximation de $u = f(A)v$ est donnée par $u_m = \beta V_m f(H_m) e_1$ (resp. $u_m = \beta V_m f(T_m) e_1$). En vertu du lemme (A.3.3) précédent, on obtient

$$\beta V_m f(H_m) e_1 = \beta V_m p_{m-1}(H_m) e_1,$$

et de (A.3.1), il résulte

$$\beta V_m f(H_m) e_1 = \beta p_{m-1}(A) v_1 = p_{m-1}(A) v. \quad \blacksquare$$

Fonctions de matrices

B.1 Série de Taylor

Théorème B.1.1 *Supposons que f admet un développement en série de Taylor*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \alpha)^k \quad \left(a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \right)$$

avec un rayon de convergence R . Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors $f(A)$ est définie par $f(A)$ est définie comme suite :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - \alpha I)^k$$

si et seulement si les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de A satisfont l'une des conditions :

1. $(\lambda_i - \alpha) < R$
2. $(\lambda_i - \alpha) = r$ et la série $f^{(n_i-1)}(\lambda)$ (où n_i est l'indice de λ_i) est convergente au point $\lambda = \lambda_i, i = 1, \dots, s$.

B.2 Formes canoniques de Jordan

Rappelons le résultat suivant : toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est similaire à une matrice sous forme de Jordan : $\exists Z \in M_n(\mathbb{C})$ inversible de sorte que :

$$Z^{-1}AZ = J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p) \quad (\text{B.1})$$

$$J_k = J_k(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}, k = 1, \dots, p \quad (\text{B.2})$$

où $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$, $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (pas forcément distinctes).

On appelle indice d'une valeur propre λ la taille du plus grand bloc associés à λ .

Cas particulier. Si l'indice de toutes les valeurs propres vaut 1 ($m_1 = \dots = m_p = 1$), on dit que A est diagonalisable.

Définition B.2.1 *Une fonction f est dite définie sur le spectre de A si les valeurs*

$$f^{(j)}(\lambda_i) \quad , j = 0, \dots, n_i - 1, \quad i = 1, \dots, s$$

existent. On les appelle les valeurs de la fonction f sur le spectre de A .

Définition B.2.2 (*Définition de $f(A)$ via la forme de Jordan canonique*) Soit f définie sur le spectre de $A_n(\mathbb{C})$, alors

$$f(A) := Z f(J) Z^{-1} = Z \operatorname{diag}(f(J_k)) Z^{-1} \quad (\text{B.3})$$

où

$$f(J_k) := \begin{pmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \cdots & \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ & & & f(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Un exemple simple illustre la définition pour le bloc de Jordan $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $f(x) = x^3$, (B.4) donne

$$f(J) = \begin{pmatrix} f\left(\frac{1}{2}\right) & f'\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & f\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

qui est facile de le vérifier par le calcul de J^3 .

Remarque B.2.3 – La définition de $f(A)$ ne dépend pas de la forme particulière de la décomposition de Jordan choisie (voir(A.1))

- Si A est diagonalisable alors la forme canonique de Jordan se réduit à $A = Z D Z^{-1}$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$ et les colonnes de Z sont les vecteurs propres de A , et dans ce cas, la définition B.2.2 sera

$$f(A) = Z f(D) Z^{-1} = Z \operatorname{diag}(f(\lambda_i)) Z^{-1}.$$

B.3 Interpolation de Hermite

Définition B.3.1 (Définition de $f(A)$ par l'interpolation de Hermite) Soit f définie sur le spectre de A et φ le polynôme minimal de A . Alors $f(A) = p(A)$, pour tout polynôme p de degré $\deg(p) < \deg(\varphi) = \sum_{i=1}^s n_i$, qui satisfait les conditions d'interpolation

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i) \quad , j = 0 : n_i - 1, \quad i = 1 : s. \quad (\text{B.5})$$

Remarque B.3.2 Il existe un unique polynôme p de degré $\deg(p) < \deg(\varphi)$, dit polynôme d'interpolation de f sur $\Lambda(A)$ le spectre de A (au sens de Hermite).

Exemple : soit $f(t) = \sqrt{t}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont 1 et 4, alors $s = 2$, et $n_1 = n_2 = 1$. On prend $f(t)$ comme la branche principale $t^{1/2}$ de la fonction racine carrée. Les conditions d'interpolation de Hermite $p(1) = f(1) = 1$ et $p(4) = f(4) = 2$ donnent :

$$p(t) = f(1) \frac{t-4}{1-4} + f(4) \frac{t-1}{4-1} = \frac{1}{3}(t+2)$$

d'où

$$f(A) = p(A) = \frac{1}{3}(A+2I) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $f(A)^2 = A$.

B.4 Définition de $f(A)$ par l'intégrale de Cauchy

Définition B.4.1 Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et f fonction analytique sur un voisinage ouvert U de $\Lambda(A)$, alors on définit

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(x) (zI - A)^{-1} dz \quad (\text{B.6})$$

où $\Gamma = \partial K$ est le bord positivement orienté d'un compact à bord $K \subset U$ contenant le spectre $\Lambda(A)$.

Théorème B.4.2 Les définitions B.2.2 (Jordan) et B.3.1 (Hermite) sont équivalentes. Si f est analytique, B.4.1 (Cauchy) est équivalente à B.2.2 et B.3.1.

Théorème B.4.3 Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et f définie sur le spectre de A ; alors on a les propriétés suivantes :

- $f(A)$ commute avec A ;
- $f(A^T) = f(A)^T$;
- $f(XAX^{-1}) = Xf(A)X^{-1}$;
- les valeurs propres de $f(A)$ sont $f(\lambda_i)$, où λ_i sont les valeurs propres de A ;
- si X commute avec A alors X commute avec $f(A)$;
- si $A = (A_{ij})$ est triangulaire par bloc, alors $F = f(A)$ est triangulaire par bloc avec la même structure des bloc de A , et $F_{ii} = f(A_{ii})$;

– si $A = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{mm})$ est diagonale par bloc, alors

$$f(A) = \text{diag}(f(A_{11}), \dots, f(A_{mm}));$$

– $f(I_m \otimes A) = I_m \otimes f(A)$, \otimes le produit de Kronecker

– $f(A \otimes I_m) = f(A) \otimes I_m$

Théorème B.4.4 (égalité entre fonctions de matrices) :

$$f(A) = g(A), \text{ si et seulement si } f^{(j)}(\lambda_i) = g^{(j)}(\lambda_i), j = 0, \dots, n_i - 1, i = 1, \dots, s.$$

De manière équivalente, $f(A) = 0$ si et seulement si

$$f^{(j)}(\lambda_i) = 0, j = 0 : n_i - 1, i = 1 : s.$$

Soient f et g deux fonctions définies sur le spectre de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

– si $h(t) = f(t) + g(t)$ alors $h(A) = f(A) + g(A)$.

– si $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ alors $h(A) = f(A) \cdot g(A)$.

Programmes MATLAB

Matrice de discrétisation de l'opérateur Laplacien

```

1 function [A]=MLaplacien(n)
2 for i=1:n
3     A(i,i)=2;
4 end
5 for i=1:n-1
6     A(i,i+1)=-1;
7 end
8 for i=2:n
9     A(i,i-1)=-1;
10 end
11 A=((n-1)^2)/(pi^2)*A;
12 % spy(A);
13 end

```

C.1 Bloc de la méthode de Krylov

Espace de Krylov

```

1 function [V,T,f] = Lanczos(A,k,v)
2 %
3 % Input : A - n x n (A = A')
4 % k - dimension d'espace (k <= n)
5 % v - n
6 %
7 % Output : V - n x k , orthogonale
8 % T - k x k , tridiagonale symétrique
9 % f - n
10 %
11     n = length(v);
12     T = zeros(k);
13     V = zeros(n,k);
14
15     v1 = v/norm(v);
16
17     f = A*v1;
18     alpha = v1'*f;
19     f = f - v1*alpha;
20
21     V(:,1) = v1; T(1,1) = alpha;
22
23     for j = 2:k,
24
25         beta = norm(f);
26         v0 = v1; v1 = f/beta;
27

```

```

28     f = A*v1 - v0*beta;
29     alpha = v1'*f;
30     f = f - v1*alpha;
31
32     T(j,j-1) = beta; T(j-1,j) = beta; T(j,j) = alpha;
33     V(:,j) = v1;
34     end

1  function [v,h]=LanczosSpace(A,b,m)
2  % A : matrice
3  % b : vecteur colonne
4  % x0 : vecteur colonne initial
5  % v : matrice des colonnes vj
6  % h : matrice des coefficients d'orthogonalité, tri-diagonale symétrique
7  %
8  n=length(b);
9  v=zeros(n,m); %initialisation v
10 h=zeros(m); %initialisation H
11 v(:,1)=b/norm(b);
12 %
13     for j=1:m
14         w=A*v(:,j);
15         if j>1
16             h(j,j-1)=v(:,j)'+(A*v(:,j-1));
17             h(j-1,j)=v(:,j)'+(A*v(:,j-1));
18             w=w-h(j,j-1)*v(:,j-1);
19         end
20         h(j,j)=w'*v(:,j);
21         w=w-h(j,j)*v(:,j);
22         h(j+1,j)=norm(w);
23         v(:,j+1)=(1/h(j+1,j))*w;
24     end
25 %
26 h=h(1:m,:);
27 v=v(:,1:m);
28 end

```

Approche de Krylov

```

1  function [Fkrylov,erf,N,T,V] = SLcz( N,M,epsi)
2  %
3     a=0 ; b=pi ;
4
5  % N (nb discrétisation) , M (dim. krylov subspace)
6  %
7     x=linspace(a,b,N);
8
9  %
10    A=MLaplacien(N);
11
12 % vecteur canonique e1
13
14    e1=zeros(M,1);
15    e1(1)=1;
16
17 % g (données initiales)
18
19    g=(1-exp(-1))*sin(x');
20

```

```

21 % epsi (niv.perturb)
22 % gpsi (données inexactes)
23
24     gpsi=g+epsi*rand(size(g));
25
26     %
27     gsn=g+epsi*randn(size(g));
28
29     % figure(2),
30     % hold on,
31     % plot(g,'ro-'),plot(gpsi,'b*-'),plot(gsn,'gv-'),
32     % hold off,
33     %
34     F=sin(x');
35 %
36 v=gpsi;
37
38 % v=gsn;
39 %
40 [V,T] = Lanczos(A,M,v);
41
42 % (V,T)=LanczosSpace(A,v,M);
43 %
44 Fkrylov=norm(v)*V*(T/(eye(M)-expm(-sqrtm(T))))*e1;
45
46 % Fsvd : valeurs singulières
47
48 Fsvd=(A*inv(eye(N)-expm(-sqrtm(A))))*v;
49
50 %
51 Fkrylov(1)=F(1);
52 Fkrylov(N)=F(N);
53 Fsvd(1)=F(1);
54 Fsvd(N)=F(N);
55
56 %
57 er=abs(Fkrylov-F);
58 erv=abs(Fsvd-F);
59
60 %
61 figure(3);
62 clf
63
64 %
65 subplot(2,1,1),
66     hold on,
67     grid on,
68     plot(x,F,'b-'),
69     plot(x,Fkrylov,'r*--'),
70     plot(x,Fsvd,'ko-.'),
71     legend('Exacte','Krylov','SVD'),
72     title('Solutions : Exacte et Krylov'),
73     hold off,
74
75 %
76 subplot(2,1,2),
77     hold on,
78     plot(x,er,'r-'),

```

```

79     plot(x, erv, 'b-.'),
80     grid on,
81     legend('Er K/E', 'Er S/E'),
82     title('Erreurs'),
83     hold off,
84
85     %
86     erf= norm(F-Fkrylov,2)/norm(F,2)
87     %

```

C.2 Bloc de la méthode de Troncature Spectrale

```

1  function fa=trancature(N,M,epsi)
2  %
3  b=1;
4  h=pi/M;
5  for i=1:M+1
6      x(i)=((i-1)/M)*pi;
7  end
8  size(x)
9  g=sqrt(2/pi)*sin(x);
10 gn=g+epsi*randn(size(g));
11 f=exp(1)*sqrt(2/pi)*sin(x);
12 %
13 g=gn;
14 s2=0;
15 for n=1:N
16     s1=g.*sin(n*x);
17     s1=sum(s1);
18     s2=s2+exp(b*n)*s1*sin(n*x);
19 end
20 fa=(2/pi)*h*s2;
21 %
22 clf
23 figure(1);
24 subplot(2,1,1),
25 hold on,
26 plot(x,fa,'ro-',x,f,'b-');
27 legend('fapp','fexct'),
28 title('sol'),
29 grid on,
30 hold off,
31 %
32 subplot(2,1,2),
33 hold on,
34 er=abs(f-fa);
35 plot(x,er,'r');
36 legend('Erreur'),
37 title('Erreur'),
38 grid on,
39 hold off,

```

C.3 Bloc de la méthode de Kozlov-Maz'ya

```

1  function [f,itr]=methode2(N,itr,tol,epsi)

```

```

2 %
3 x=linspace(0,pi,N);
4 h=pi/N;
5 g=sqrt(2/pi)*sin(x');
6 gn=g+epsi*randn(size(g));
7 fc=exp(1)*sqrt(2/pi)*sin(x');
8
9 %
10 g=gn;
11 Nt=N-2;
12 A=(1/h^2)*(diag(2*ones(Nt,1))-diag(ones(Nt-1,1),1)-diag(ones(Nt-1,1),-1));
13 K=expm(-sqrtm(A));
14 gama=2/(3*norm(K));
15 f(:,1)=zeros(N,1);
16 t=0;
17 for k=2:itr
18     ft=(eye(Nt)-gama*K)*f(2:N-1,k-1);
19     f(:,k)=[0;ft;0]+gama*g;
20     if norm(f(:,k)-f(:,k-1))<=tol
21         disp('avant max_itr'),
22         itr=k;
23         t=1;
24         break
25     end
26 end
27
28 %
29 if t==0
30     disp('max_itr'),
31 end
32 disp(itr),
33 figure(1)
34 subplot(2,1,1)
35 plot(x,f(:,1),'g',x,f(:,round(itr/2)),'ks',x,fc,'r',x,f(:,itr),'b*--')
36 legend('f0','fn/2','fect','fitr'),
37 subplot(2,1,2)
38 er=abs(fc-f(:,itr));
39 plot(x,er)

```


ANNEXE D

Publication

La publication de ce travail

RESEARCH

Open Access

Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type

Abdallah Bouzitouna¹, Nadjib Boussetila^{2*} and Faouzia Rebbani¹

*Correspondence:

n.boussetila@gmail.com

²Department of Mathematics, 8 Mai 1945 Guelma University, P.O. Box 401, Guelma, 24000, Algeria

Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

This paper deals with the problem of determining an unknown boundary condition $u(0)$ in the boundary value problem $u_{yy}(y) - Au(y) = 0$, $u(0) = f$, $u(+\infty) = 0$, with the aid of an extra measurement at an internal point. It is well known that such a problem is severely ill-posed, *i.e.*, the solution does not depend continuously on the data. In order to overcome the instability of the ill-posed problem, we propose two regularization procedures: the first method is based on the spectral truncation, and the second is a version of the Kozlov-Maz'ya iteration method. Finally, some other convergence results including some explicit convergence rates are also established under *a priori* bound assumptions on the exact solution.

MSC: 35R25; 65J20; 35J25

Keywords: ill-posed problems; elliptic problems; cut-off spectral regularization; iterative regularization

1 Formulation of the problem

Throughout this paper, H denotes a complex separable Hilbert space endowed with the inner product (\cdot, \cdot) and the norm $\|\cdot\|$, $\mathcal{L}(H)$ stands for the Banach algebra of bounded linear operators on H .

Let $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ be a positive, self-adjoint operator with compact resolvent, so that A has an orthonormal basis of eigenvectors $(\phi_n) \subset H$ with real eigenvalues $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$, *i.e.*,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, \quad h_n = (h, \phi_n).$$

In this paper, we are interested in the following inverse boundary value problem: find $(u(y), u(0))$ satisfying

$$\begin{cases} u_{yy} - Au = 0, & 0 < y < \infty, \\ u(0) = f, & u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

where f is the unknown boundary condition to be determined from the interior data

$$u(b) = g \in H, \quad 0 < b < \infty. \tag{1.2}$$

This problem is an abstract version of an inverse boundary value problem, which generalizes inverse problems for second-order elliptic partial differential equations in a cylindrical domain, for example we mention the following problem.

Example 1.1 An example of (1.1) is the boundary value problem for the Laplace equation in the strip $(0, \pi) \times (0, \infty)$, where the operator A is given by

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

which takes the form

$$\begin{cases} u_{yy}(x, y) + u_{xx}(x, y) = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, +\infty), \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, +\infty) = 0, & x \in [0, \pi], \\ u(x, y = b) = g(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

To our knowledge, there are few papers devoted to this class of problems in the abstract setting, except for [1, 2]. In [3], the author studied a similar problem posed on a bounded interval. In this study, the algebraic invertibility of the inverse problem was established. However, the regularization aspect was not investigated.

We note here that this inverse problem was studied by Levine and Vessella [2], where the authors considered the problem of recovering $u(0)$ from the experimental data g_1, \dots, g_n associated to the internal measurements $u(b_1), \dots, u(b_n)$, in which the temperature is measured at various depths $0 < b_1 < \dots < b_n$ as approximate functions $g_1, \dots, g_n \in H$ such that

$$\sum_{i=1}^n p_i \|u(b_i) - g_i\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

where p_1, \dots, p_n are positive weights with $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ and ε denotes the level noisy.

The regularizing strategy employed in [2] is essentially based on the Tikhonov regularization and the conditional stability estimate $\|u_y(0)\| \leq E$ for some *a priori* constant E .

In practice, the use of N -measurements or the average of a series of measurements is an expensive operation, and sometimes unrealizable. Moreover, the numerical implementation of the stabilized solutions by the Tikhonov regularization method for this class of problems will be a very complex task.

For these reasons, we propose in our study a practical regularizing strategy. We show that we can recover $u(0)$ from the internal measurement $u(b) = g$ under the conditional stability estimate $\|u(0)\| \leq E$ for some *a priori* constant E . Moreover, our investigation is supplemented by numerical simulations justifying the feasibility of our approach.

2 Preliminaries and basic results

In this section we present the notation and the functional setting which will be used in this paper and prepare some material which will be used in our analysis.

2.1 Notation

We denote by $\mathcal{C}(H)$ the set of all closed linear operators densely defined in H . The domain, range and kernel of a linear operator $B \in \mathcal{C}(H)$ are denoted as $\mathcal{D}(B)$, $R(B)$ and $N(B)$; the symbols $\rho(B)$, $\sigma(B)$ and $\sigma_p(B)$ are used for the resolvent set, spectrum and point spectrum of B , respectively. If V is a closed subspace of H , we denote by Π_V the orthogonal projection from H to V .

For the ease of reading, we summarize some well-known facts in spectral theory.

2.2 Spectral theorem and properties

By the spectral theorem, for each strictly positive self-adjoint operator B ,

$$B : \mathcal{D}(B) \subset H \rightarrow H, \quad \overline{\mathcal{D}(B)} = H, \quad B = B^* \quad \text{and}$$

$$(Bu, u) \geq \gamma \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(B) \quad (\gamma > 0),$$

there is a unique right continuous family $\{E_\lambda, \lambda \in [\gamma, \infty]\} \subset \mathcal{L}(H)$ of orthogonal projection operators such that $B = \int_\gamma^\infty \lambda dE_\lambda$ with

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ v \in H : \int_\gamma^\infty \lambda^2 d(E_\lambda v, v) < \infty \right\}.$$

Theorem 2.1 [4, Theorem 6, XII.2.5, pp.1196-1198] *Let $\{E_\lambda, \lambda \geq \gamma > 0\}$ be the spectral resolution of the identity associated to B , and let Φ be a complex Borel function defined E -almost everywhere on the real axis. Then $\Phi(B)$ is a closed operator with dense domain. Moreover,*

- (i) $\mathcal{D}(\Phi(B)) := \{h \in H : \int_\gamma^\infty |\Phi(\lambda)|^2 d(E_\lambda v, v) < \infty\}$,
- (ii) $(\Phi(B)h, y) = \int_\gamma^\infty \Phi(\lambda) d(E_\lambda h, y), h \in \mathcal{D}(\Phi(B)), y \in H$,
- (iii) $\|\Phi(B)h\|^2 = \int_\gamma^\infty |\Phi(\lambda)|^2 d(E_\lambda h, h), h \in \mathcal{D}(\Phi(B))$,
- (iv) $\Phi(B)^* = \overline{\Phi(B)}$. In particular, if Φ is a real Borel function, then $\Phi(B)$ is self-adjoint.

We denote by $S(y) = e^{-y\sqrt{A}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{\lambda_n}}(\cdot, \phi_n)\phi_n \in \mathcal{L}(H), y \geq 0$, the C_0 -semigroup generated by $-\sqrt{A}$. Some basic properties of $S(y)$ are listed in the following theorem.

Theorem 2.2 (see [5], Chapter 2, Theorem 6.13, p.74) *For this family of operators, we have:*

1. $\|S(y)\| \leq 1, \forall y \geq 0$;
2. *the function $y \mapsto S(y), y > 0$, is analytic;*
3. *for every real $r \geq 0$ and $y > 0$, the operator $S(y) \in \mathcal{L}(H, \mathcal{D}(A^{r/2}))$;*
4. *for every integer $k \geq 0$ and $y > 0, \|S^{(k)}(y)\| = \|A^{k/2}S(y)\| \leq c(k)y^{-k}$;*
5. *for every $h \in \mathcal{D}(A^{r/2}), r \geq 0$, we have $S(t)A^{r/2}h = A^{r/2}S(y)h$.*

Theorem 2.3 *For $y > 0, S(y)$ is self-adjoint and one-to-one operator with dense range $(S(y) = S(y)^*, \overline{\mathcal{R}(S(y))} = H)$.*

Proof Let $\phi_y : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \phi_y(s) = e^{-ys}$. Then, by virtue of (iv) of Theorem 2.1, we can write $S(y)^* = \overline{\phi_y(A)} = \phi_y(A) = e^{-y\sqrt{A}} = S(y)$.

Let $h \in N(S(y_0))$, $y_0 > 0$, then $S(y_0)h = 0$, which implies that $S(y)S(y_0)h = S(t + t_0)h = 0$, $y \geq 0$. Using analyticity, we obtain that $S(y)h = 0$, $y \geq 0$. Strong continuity at 0 now gives $h = 0$. This shows that $N(S(y_0)) = \{0\}$.

Thanks to

$$\overline{R(S(y_0))} = N(S(y_0))^\perp = \{0\}^\perp = H,$$

we conclude that $R(S(y_0))$ is dense in H . □

Remark 2.1 For $y = b$, this theorem ensures that $S(b)$ is self-adjoint and one-to-one operator with dense range $R(S(b))$. Then we can define its inverse $S(b)^{-1} = e^{b\sqrt{A}}$, which is an unbounded self-adjoint strictly positive definite operator in H with dense domain

$$\mathcal{D}(S(b)^{-1}) = R(S(b)) = \left\{ h \in H : \|e^{b\sqrt{A}}h\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

Let us consider the following problem: for $\xi \in H$ find $v \in C^1(]0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A))$ such that

$$v'(y) + \sqrt{A}u(y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, v(0) = \xi. \tag{2.1}$$

Theorem 2.4 [6, Theorem 7.5, p.191] *For any $\xi \in H$, problem (2.1) has a unique solution, given by*

$$v(y) = S(y)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-y\sqrt{\lambda_n}} (\xi, \phi_n) \phi_n. \tag{2.2}$$

Moreover, for all integer $k \geq 0$, $v \in C^\infty(]0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{k/2}))$. If, in addition, $\xi \in \mathcal{D}(A^{j/2})$, then $v \in C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{j/2})) \cap C^j([0, +\infty[; H)$ and

$$\forall k, j \in \mathbb{N}, \quad \left\| \frac{d^{(k+j)}}{dy} v(y) \right\| = \|A^{k/2} u(y)^{(j)}\| \leq \frac{c(k)}{y^k} \|A^{j/2} \xi\|.$$

On the other hand, Theorem 2.4 provides smoothness results with respect to y : $v \in C^\infty(]0, +\infty[; H) \cap C^j([0, +\infty[; H)$ whenever $\xi \in \mathcal{D}(A^{j/2})$, $j \in \mathbb{N}$. Under this same hypothesis, we also have smoothness in space: $v \in C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{j/2})) \cap C^{j-k}([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{k/2}))$, $k \leq j$.

Here we recall a crucial theorem in the analysis of the inverse problems.

Theorem 2.5 [7, Generalized Picard theorem, p.502] *Let $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ be a self-adjoint operator and the Hilbert space H , and let E_μ be its spectral resolution of unity. Let $\theta \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $Z(\theta) := \{t \in \mathbb{R} : \theta(t) = 0\}$. We suppose that the set $Z(\theta)$ either is empty or contains isolated point only. Then the vectorial equation*

$$\theta(B)\varphi = \psi$$

is solvable if and only if

$$\int_{\mathbb{R}} |\theta(\lambda)|^{-2} d|E_{\lambda} \psi|^2 < \infty.$$

Moreover,

$$N(\theta(B)) = \{0\} \iff \sigma_p(B) \cap Z(\theta) = \emptyset.$$

On the basis $\{\phi_n\}$, we introduce the Hilbert scale $(H^s)_{s \in \mathbb{R}}$ (resp. $(\mathfrak{E}_s)_{s \in \mathbb{R}}$) induced by \sqrt{A} as follows:

$$H^s = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}^{-2s} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\},$$

$$\mathfrak{E}^s = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{\infty} e^{2bs\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

2.3 Non-expansive operators

Definition 2.1 A linear operator $M \in \mathcal{L}(H)$ is called non-expansive if

$$\|M\| \leq 1.$$

Theorem 2.6 [8, Theorem 2.2] Let $M \in \mathcal{L}(H)$ be a positive, self-adjoint operator with $\|M\| \leq 1$. Putting $V_0 = N(M)$ and $V_1 = N(I - M)$, we have

$$s - \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \Pi_{V_1}, \quad s - \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M)^n = \Pi_{V_0},$$

i.e.,

$$\forall h \in H, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n h = \Pi_{V_1} h, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M)^n h = \Pi_{V_0} h.$$

For more details concerning the theory of non-expansive operators, we refer to Krasnosel'skii *et al.* [9, p.66].

Let us consider the operator equation

$$S\varphi = (I - M)\varphi = \psi \tag{2.3}$$

for non-expansive operators M .

Theorem 2.7 Let M be a linear self-adjoint, positive and non-expansive operator on H . Let $\hat{\psi} \in H$ be such that equation (2.3) has a solution $\hat{\varphi}$. If 1 is not an eigenvalue of M , i.e., $(I - M)$ is injective ($V_1 = N(I - M) = \{0\}$), then the successive approximations

$$\varphi_{n+1} = M\varphi_n + \hat{\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

converge to $\hat{\varphi}$ for any initial data $\varphi_0 \in H$.

Proof From the hypothesis and by virtue of Theorem 2.6, we have

$$\forall \varphi_0 \in H, \quad M^n \varphi_0 \rightarrow \Pi_{V_1} \varphi_0 = \Pi_{\{0\}} \varphi_0 = 0. \tag{2.4}$$

By induction with respect to n , it is easily seen that φ_n has the explicit form

$$\begin{aligned} \varphi_n &= M^n \varphi_0 + \sum_{j=0}^{n-1} M^j \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n)(I - M)^{-1} \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n) \hat{\varphi}, \end{aligned}$$

and (2.4) allows us to conclude that

$$\hat{\varphi} - \varphi_n = M^n(\varphi_0 - \hat{\varphi}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{2.5}$$

□

Remark 2.2 In many situations, some boundary value problems for partial differential equations which are ill-posed can be reduced to Fredholm operator equations of the first kind of the form $B\varphi = \psi$, where B is compact, positive, and self-adjoint operator in a Hilbert space H . This equation can be rewritten in the following way:

$$\varphi = (I - \omega B)\varphi + \omega\psi = L\varphi + \omega\psi,$$

where $L = (I - \omega B)$, and ω is a positive parameter satisfying $\omega < \frac{1}{\|B\|}$. It is easily seen that the operator L is non-expansive and 1 is not an eigenvalue of L . It follows from Theorem 2.7 that the sequence $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ converges and $(I - \omega B)^n \zeta \rightarrow 0$ for every $\zeta \in H$ as $n \rightarrow \infty$.

3 Ill-posedness and stabilization of the inverse boundary value problem

3.1 Cauchy problem with Dirichlet conditions

Consider the following well-posed boundary value problem:

$$\begin{cases} v_{yy} - Av = 0, & 0 < y < \infty, \\ v(0) = \xi, \\ v(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

where ξ is an H -valued function.

Definition 3.1 [10, p.250]

- A function $v : [0, +\infty[\rightarrow H$ is called a generalized solution to equation (3.1) if $v \in \mathbf{E}_g = \mathcal{C}([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^2([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H^{-1})$, and for all $y \in]0, +\infty[$, $u(y) \in \mathcal{D}(A)$ and obeys equation (3.1) on the same interval $]0, +\infty[$.
- A function $v : [0, +\infty[\rightarrow H$ is called a classical solution to equation (3.1) if $v \in \mathbf{E}_c = \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^2([0, +\infty[; H)$, and for all $y \in]0, +\infty[$, $u(y) \in \mathcal{D}(A)$ and obeys equation (3.1) on the same interval $]0, +\infty[$.

Theorem 3.1 *Problem (3.1) admits a unique generalized (resp. classical) solution if and only if $\xi \in H$ (resp. $\xi \in H^1$).*

Proof By using the Fourier expansion and the given Dirichlet boundary conditions

$$\begin{aligned} v(y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(y)\phi_n, \\ v(0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0)\phi_n = \xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n\phi_n, \\ v(+\infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(+\infty)\phi_n = 0, \end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{cases} v_n'' - \lambda_n v_n(y) = 0, & 0 < y < \infty, \\ v_n(0) = \xi_n, \\ v_n(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

This differential equation admits two linearly independent fundamental solutions

$$\varphi_n^+(y) = e^{+y\sqrt{\lambda_n}}, \quad \varphi_n^-(y) = e^{-y\sqrt{\lambda_n}}.$$

Thus, its general solution can be written as

$$v_n(y) = c_n^+ e^{+y\sqrt{\lambda_n}} + c_n^- e^{-y\sqrt{\lambda_n}}, \quad c_n^+, c_n^- \in \mathbb{R}.$$

Applying $v_n(+\infty) = 0$ and $v_n(0) = \xi_n$ yields $c_n^+ = 0$ and $c_n^- = \xi_n$. Finally, the solution of (3.2) is

$$v(y) = S(y)\xi = e^{-y\sqrt{A}}\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{\lambda_n}}\xi_n\phi_n, \quad \xi_n = (\xi, \phi_n). \tag{3.3}$$

Remark 3.1 It is easy to check that the expression (3.3) solves the problem

$$u'(y) + \sqrt{A}u(y) = 0, \quad y \in]0, +\infty[, \quad u(0) = \xi.$$

If $\xi \in H$ (resp. $\xi \in H^1$), by virtue of Theorem 2.4 and Remark 3.1, we easily check the inclusion $v \in E_g$ (resp. $v \in E_c$) and $v(y) \in D(A)$ for $y \in]0, +\infty[$. \square

3.2 Inverse boundary value problem

Our inverse problem is to determine $v(0) = f$ from the supplementary condition $v(b) = g$, then we get

$$v(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-b\sqrt{\lambda_n}}f_n\phi_n = g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n\phi_n. \tag{3.4}$$

We define

$$K = S(b) : H \rightarrow H, \quad h \mapsto Kh = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-b\sqrt{\lambda_n}} h_n \phi_n. \tag{3.5}$$

The operator equation (3.5) is the main instrument in investigating problem (3.4). More precisely, we want to study the following properties:

1. Injectivity of K (identifiability);
2. Continuity of K and the existence of its inverse (stability);
3. The range of K .

It is easy to see that K is a linear compact self-adjoint operator with the singular values $(\sigma_k = e^{-b\sqrt{\lambda_k}})_{k=1}^{+\infty}$, and by virtue of Remark 2.1, we have

1. $N(K) = \{0\}$,
2. $R(K) = \left\{ h \in H : \|e^{b\sqrt{A}}h\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}$,
3. $\overline{R(K)} = H$.

Now, to conclude the solvability of problem (3.4) it is enough to apply Theorem 2.5.

Corollary 3.1 *The inverse problem (3.4) is uniquely solvable if and only if*

$$u(b) = g \in R(K) = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}. \tag{3.6}$$

In this case, we have

$$f = u(0) = K^{-1}g = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{b\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n. \tag{3.7}$$

In other words, the solution f of the inverse problem is obtained from the data g via the unbounded operator $L = K^{-1}$ defined on functions g in the subspace

$$D(L) = \left\{ g \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(g, \phi_n)|^2 < +\infty, g_n = (g, \phi_n) \right\}.$$

Corollary 3.2 *Problem (1.1)-(1.2) admits a unique solution $u \in C([0, +\infty[; H)$ if and only if*

$$u(0) \in H \iff g \in R(K) = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{b\sqrt{\lambda_n}} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

In this case, we have

$$u(y) = e^{(b-y)\sqrt{A}}g = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n. \tag{3.8}$$

From this representation, we see that:

- $u(y)$ is stable in the interval $[b, +\infty[$ ($\sup_{y \in [b, +\infty[} \|u(y)\| \leq \|g\|$);
- u is unstable in $[0, b[$. This follows from the high-frequency $\omega_n = e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$.

3.3 Regularization by truncation method and error estimates

A natural way to stabilize the problem is to eliminate all the components of large n from the solution and instead consider (3.7) only for $n \leq N$.

Definition 3.2 For $N > 0$, the regularized solution of problem (1.1)-(1.2) is given by

$$f_N = \sum_{n \leq N} e^{b\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n, \quad g_n = (g, \phi_n), \tag{3.9}$$

$$u_N(y) = \sum_{n \leq N} e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} g_n \phi_n, \quad g_n = (g, \phi_n). \tag{3.10}$$

Remark 3.2 If the parameter N is large, f_N is close to the exact solution f . On the other hand, if the parameter N is fixed, f_N is bounded. So, the positive integer N plays the role of regularization parameter.

Remark 3.3 In view of

$$\|u(y) - u_N(y)\| = \|S(y)(f - f_N)\| \leq \|f - f_N\| \implies \|u - u_N\|_\infty \leq \|f - f_N\|,$$

and if $g \in \mathcal{E}^1$, i.e., $\sum_{n=1}^\infty e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(g, \phi_n)|^2 < \infty$, then

$$\|f - f_N\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

implies

$$\|u - u_N\|_\infty = \sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u_N(y)\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Since the data g are based on (physical) observations and are not known with complete accuracy, we assume that g and g^δ satisfy $\|g - g^\delta\| \leq \delta$, where g^δ denotes the measured data and δ denotes the level noisy.

Let (f_N^δ, u_N^δ) denote the regularized solution of problem (1.1), (1.2) with measured data g^δ :

$$f_N^\delta = \sum_{n \leq N} e^{b\sqrt{\lambda_n}} g_n^\delta \phi_n, \quad g_n^\delta = (g^\delta, \phi_n), \tag{3.11}$$

$$u_N^\delta(y) = \sum_{n \leq N} e^{(b-y)\sqrt{\lambda_n}} g_n^\delta \phi_n, \quad g_n^\delta = (g^\delta, \phi_n). \tag{3.12}$$

As usual, in order to obtain convergence rate, we assume that there exists an *a priori* bound for problem (1.2)

$$\|A^{r/2} f\|^2 \leq E^2 < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^r e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \leq E^2, \tag{3.13}$$

where $E > 0$ is a given constant.

Remark 3.4 For given two exact conditions g_1 and g_2 , let $f_{1,N}$ and $f_{2,N}$ be the corresponding regularized solutions, respectively. Then

$$\|f_{2,N} - f_{1,N}\|^2 = \sum_{n \leq N} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |(g_2 - g_1)_k|^2 \leq e^{2b\sqrt{\lambda_N}} \|g_2 - g_1\|^2. \tag{3.14}$$

The main theorem of this method is as follows.

Theorem 3.2 Let f_N^δ be the regularized solution given by (3.11), and let f be the exact solution given by (3.7). If $\|A^{r/2}f\| \leq E$, $r > 0$ and if we choose $\sqrt{\lambda_N} \approx \frac{\theta}{b} \log(\frac{1}{\delta})$, $0 < \theta < 1$, then we have the error bound

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{b}{\theta}\right)^r \left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right)^r E + \delta^{1-\theta}. \tag{3.15}$$

Proof From direct computations, we have

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \|f_N - f_N^\delta\| \leq e^{b\sqrt{\lambda_N}} \|g - g^\delta\| \leq e^{b\sqrt{\lambda_N}} \delta, \\ \Delta_2^2 &= \|f - f_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}^{2r}} \sqrt{\lambda_n}^{2r} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{N+1}}^{2r}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n}^{2r} e^{2b\sqrt{\lambda_n}} |g_n|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}\right)^{2r} E^2. \end{aligned}$$

Using the triangle inequality

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \|f - f_N\| + \|f_N - f_N^\delta\| = \Delta_1 + \Delta_2,$$

we obtain

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}\right)^r E + e^{b\sqrt{\lambda_N}} \delta. \tag{3.16}$$

By choosing $\sqrt{\lambda_N} = \frac{\theta}{b} \log(\frac{1}{\delta})$, $0 < \theta < 1$, we obtain

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{b}{\theta}\right)^r \left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right)^r E + \delta^{1-\theta}. \quad \square$$

Finally, from (3.4) and (3.15), we deduce the following corollary.

Corollary 3.3 Let u_N^δ be the regularized solution given by (3.12), and let u be the exact solution given by (3.8). If $\|A^{r/2}f\| \leq E$, $r > 0$ and if we choose $\sqrt{\lambda_N} = \frac{\theta}{b} \log(\frac{1}{\delta})$, $0 < \theta < 1$, then we have the error bound

$$\|u - u_N^\delta\|_\infty = \sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u_N^\delta(y)\| \leq \|f - f_N^\delta\| \leq \left(\frac{b}{\theta}\right)^r \left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right)^r E + \delta^{1-\theta}. \tag{3.17}$$

4 Regularization by the Kozlov-Maz'ya iteration method and error estimates

In [11, 12] Kozlov and Maz'ya proposed an alternating iterative method to solve boundary value problems for general strongly elliptic and formally self-adjoint systems. After that, the idea of this method has been successfully used for solving various classes of ill-posed (elliptic, parabolic and hyperbolic) problems; see, e.g., [13–15].

In this section we extend this method to our ill-posed problem.

4.1 Description of the method

The iterative algorithm for solving the inverse problem (1.1)-(1.2) starts by letting $f_0 \in H$ be arbitrary. The first approximation $u^0(y)$ is the solution to the direct problem

$$\begin{cases} u_{yy}^0 - Au^0 = 0, & 0 < y < \infty, \\ u^0(0) = f_0, \\ u(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

If the pair (u^k, f_k) has been constructed, let

$$(P)_{k+1}: \quad f_{k+1} = f_k - \omega(u^k(b) - f), \tag{4.2}$$

where ω is such that

$$0 < \omega < \frac{1}{\|K\|} = e^{b\sqrt{\lambda_1}}, \quad \|K\| = \sup_n e^{-b\sqrt{\lambda_n}} = e^{-b\sqrt{\lambda_1}} < 1.$$

Finally, we get u^{k+1} by solving the problem

$$\begin{cases} u_{yy}^{k+1} - Au^{k+1} = 0, & 0 < y < \infty, \\ u^{k+1}(0) = f_{k+1}, \\ u^{k+1}(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

We set $G = (I - \omega K)$. If we iterate backwards in $(P)_{k+1}$, we obtain

$$f_k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g = G^k f_0 + (I - G^k)K^{-1}g = G^k f_0 + f - G^k f. \tag{4.4}$$

This implies that

$$f_k - f = G^k(f_0 - f), \quad u^k(y) - u(y) = S(y)G^k(f_0 - f). \tag{4.5}$$

Proposition 4.1 *The operator $G = (I - \omega K)$ is self-adjoint and non-expansive on H . Moreover, it has not 1 as eigenvalue.*

Proof The self-adjointness follows from the definition of G (see Theorem 2.1). Since the inequality $0 < 1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}} < 1$ for $\lambda \in \sigma(A)$, we have $\sigma_p(G) \subset]0, 1[$, then 1 is not an eigenvalue of G . \square

In general, the exact solution $u(0) = f \in H$ is required to satisfy the so-called source condition; otherwise, the convergence of the regularization method approximating the problem can be arbitrarily slow. Since our problem is exponentially ill-posed (the eigenvalues $s_n = e^{-b\sqrt{\lambda_n}}$ of K converge exponentially to 0), it is well known in this case [16, 17] that the best choice to accelerate the convergence of the regularization method is to use logarithmic-type source conditions, *i.e.*,

$$(f_0 - f) = \Psi_\beta(\omega K)\xi, \quad \xi \in H, \|\xi\| \leq E, \tag{4.6}$$

where

$$\Psi_\beta(t) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e}{t}\right)^{-\beta}, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

with $\beta > 0$.

Remark 4.1 [16, p.34] The logarithmic source condition $\zeta = (f_0 - f) \in R(\Psi_\beta(\omega K))$ is equivalent to the inclusion $\zeta \in R(A^{-\beta/2}) = D(A^{\beta/2})$.

Proof The proof is based on the following equivalence:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{e}{\omega}\right) + \sqrt{\lambda_n} \right)^{2\beta} < +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_n})^{2\beta} < +\infty. \quad \square$$

Lemma 4.1 [18, Appendix, Lemma A.1] Let $\beta > 0$ and $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Then the real-valued function $\tau(t) = (1 - t)^k \ln\left(\frac{e}{t}\right)^{-\beta}$ defined on $[0, 1]$ satisfies

$$\tau(t) \leq C \ln(k)^{-\beta}. \tag{4.7}$$

Remark 4.2 Let $k \in \mathbb{N}^*$. Then the real-valued function $\varrho(t) = 1 - (1 - t)^k$ defined on $[0, 1]$ satisfies

$$\varrho(t) \leq kt. \tag{4.8}$$

Proof Using the mean value theorem, we can write

$$\varrho(t) - \varrho(0) = (t - 0)\varrho'(\hat{t}), \quad 0 < \hat{t} < t,$$

then

$$\varrho(t) = tk(1 - \hat{t})^{k-1} \leq kt. \quad \square$$

Let us consider the following real-valued functions:

$$Q(\lambda) = (1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}})^k \ln\left(\frac{e}{\omega e^{-b\sqrt{\lambda}}}\right)^{-\beta}, \quad \lambda \in [\lambda_1, +\infty[,$$

$$P(\lambda) = \omega \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}})^i = \omega \frac{1 - (1 - \omega e^{-b\sqrt{\lambda}})^k}{\omega e^{-b\sqrt{\lambda}}}, \quad \lambda \in [\lambda_1, +\infty[.$$

Using the change of variables $t = \vartheta(\lambda) = \omega e^{-b\sqrt{\lambda}}$, we obtain

$$\hat{Q}(t) = Q(\vartheta^{-1}(t)) = (1-t)^k \ln\left(\frac{e}{t}\right)^{-\beta}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\hat{P}(t) = P(\vartheta^{-1}(t)) = \begin{cases} \omega \frac{1-(1-t)^k}{t}, & t \in]0, 1], \\ \omega k, & t = 0. \end{cases}$$

Now we are in a position to state the main result of this method.

Theorem 4.1 *Let $g \in \mathfrak{C}^1$ and ω satisfy $0 < \omega < e^{b\sqrt{\lambda_1}}$, let f_0 be an arbitrary element for the iterative procedure suggested above, and let u^k be the k th approximate solution. Then we have*

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u^k(y)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \tag{4.9}$$

Moreover, if $(f_0 - f) \in H^\beta$ ($\beta > 0$), i.e., $(f_0 - f) = \Psi_\beta(\omega K)\xi$, $\xi \in H$, $\|\xi\| \leq E$, then the rate of convergence of the method is given by

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u^k(y)\| \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)}\right)^\beta, \quad k \geq 2. \tag{4.10}$$

Proof By virtue of Proposition 4.1 and Theorem 2.7, it follows immediately

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u^k(y)\| \leq \|G^k(f_0 - f)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

We have

$$\begin{aligned} \|u(y) - u^k(y)\|^2 &= \|S(y)G^k(f_0 - f)\|^2 \\ &\leq \|G^k(f_0 - f)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} Q(\lambda_n)^2 \|(\xi, \phi_n)\|^2 \\ &\leq \left(\sup_{t \in [0, 1]} \hat{Q}(t)\right)^2 \|\xi\|^2 \leq \left(\sup_{t \in [0, 1]} \hat{Q}(t)\right)^2 E^2, \end{aligned}$$

and by virtue of Lemma 4.1 (estimate (4.7)), we conclude the desired estimate. \square

Theorem 4.2 *Let $g \in \mathfrak{C}^1$ and ω satisfy $0 < \omega < e^{b\sqrt{\lambda_1}}$, let f_0 be an arbitrary element for the iterative procedure suggested above, and let u^k (resp. u_δ^k) be the k th approximate solution for the exact data g (resp. for the inexact data g^δ) such that $\|g - g^\delta\| \leq \delta$. Then, under condition (4.6), the following inequality holds:*

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u_\delta^k(y)\| \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)}\right)^\beta + \varepsilon(k)\delta,$$

where $\varepsilon(k) = \|\omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega K)^i\| \leq k\omega$.

Proof Using (4.4) and the triangle inequality, we can write

$$f^k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g, u_k(y) = S(y) f^k, \tag{4.11}$$

$$f_\delta^k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g^\delta, u_\delta^k(y) = S(y) f_\delta^k, \tag{4.12}$$

$$\|u(y) - u_\delta^k(y)\| = \|(u(y) - u^k(y)) + (u^k(y) - u_\delta^k(y))\| \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

where

$$\Delta_1 = \|u(y) - u^k(y)\| \leq \|u(y) - u^k(y)\|_\infty \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\beta, \quad k \geq 2, \tag{4.13}$$

and

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \|u^k(y) - u_\delta^k(y)\| = \|S(y)(f^k - f_\delta^k)\| = \left\| \omega S(y) \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^\delta) \right\| \\ &\leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^\delta) \right\| \leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \delta = \hat{\Delta}_2. \end{aligned}$$

By using inequality (4.8), the quantity $\hat{\Delta}_2$ can be estimated as follows:

$$\hat{\Delta}_2 \leq \omega k \delta. \tag{4.14}$$

Combining (4.13) and (4.14) and taking the supremum with respect to $y \in [0, +\infty[$ of $\|u(y) - u_\delta^k(y)\|$, we obtain the desired bound.

Remark 4.3 Choosing $k = k(\delta)$ such that $\omega k \delta \rightarrow +\infty$ as $\delta \rightarrow 0$, we obtain

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u^k(y) - u_\delta^k(y)\| \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow +\infty. \quad \square$$

5 Numerical results

In this section we give a two-dimensional numerical test to show the feasibility and efficiency of the proposed methods. Numerical experiments were carried out using MATLAB.

We consider the following inverse problem:

$$\begin{cases} u_{yy}(x, y) + u_{xx}(x, y) = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, +\infty), \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, +\infty) = 0, & x \in [0, \pi], \end{cases} \tag{5.1}$$

where $f(x)$ is the unknown source and $u(x, 1) = g(x)$ is the supplementary condition.

It is easy to check that the operator

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi)$$

is positive, self-adjoint with compact resolvent (A is diagonalizable).

The eigenpairs (λ_n, ϕ_n) of A are

$$\lambda_n = n^2, \quad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

In this case, formula (3.7) takes the form

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x, 0) = K^{-1}g(x) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^n \left(\int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Truncation method

We use trapezoid's rule to approach the integral and do an approximate truncation for the series by choosing the sum of the front $M + 1$ terms. After considering an equidistant grid $0 = x_1 < \dots < x_{M+1} = \pi$, $x_j = (j - 1)h = (j - 1)\frac{\pi}{M}$, $j = 1 \dots (M + 1)$, we get

$$f(x_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^n (hg(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j), \tag{5.3}$$

$$f_N(x_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N e^n (hg(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j), \tag{5.4}$$

$$f_N^\delta(x_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N e^n (hg^\delta(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j). \tag{5.5}$$

In the following, we consider an example which has an exact expression of solutions $(u(x, y), f(x))$.

Example

If $u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e \sin(x)$, then the function $u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1-y} \sin(x)$ is the exact solution of problem (5.1). Consequently, the data function is $g(x) = u(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$.

Adding a random distributed perturbation (obtained by the Matlab command `randn`) to each data function, we obtain the vector g^δ :

$$g^\delta = g + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(g)),$$

where ε indicates the noise level of the measurement data and the function 'randn(\cdot)' generates arrays of random numbers whose elements are normally distributed with mean 0, variance $\sigma^2 = 1$, and standard deviation $\sigma = 1$. 'randn(size(g))' returns an array of random entries that is the same size as g . The bound on the measurement error δ can be measured in the sense of Root Mean Square Error (RMSE) according to

$$\delta = \|g^\delta - g\|_* = \left(\frac{1}{M+1} \sum_{i=1}^{M+1} (g(x_i) - g^\delta(x_i))^2 \right)^{1/2}.$$

Using g^δ as a data function, we obtain the computed approximation f_N^δ by (5.5). The relative error $E_r(f)$ is given by

$$E_r(f) = \frac{\|f_N^\delta - f\|_*}{\|f\|_*}. \tag{5.6}$$

Kozlov-Maz'ya iteration method

By using the central difference with step length $h = \frac{\pi}{N+1}$ to approximate the first derivative u_x and the second derivative u_{xx} , we can get the following semi-discrete problem (ordinary differential equation):

$$\begin{cases} u_{yy}(x_i, y) - \mathbb{A}_h(x_i, y) = 0, & x_i = ih, i = 1, \dots, N, y \in (0, +\infty), \\ u(x_0 = 0, y) = u(x_{N+1} = \pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x_i, 0) = f(x_i), & u(x_i, +\infty) = 0, \quad x_i = ih, i = 1, \dots, N, \end{cases} \tag{5.7}$$

where \mathbb{A}_h is the discretization matrix stemming from the operator $A = -\frac{d^2}{dx^2}$:

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

is a symmetric, positive definite matrix. We assume that it is fine enough so that the discretization errors are small compared to the uncertainty δ of the data; this means that \mathbb{A}_h is a good approximation of the differential operator $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, whose unboundedness is reflected in a large norm of \mathbb{A}_h (see [19, p.5]). The eigenpairs (μ_k, e_k) of \mathbb{A}_h are given by

$$\mu_k = 4 \left(\frac{N+1}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right), \quad e_k = \left(\sin \left(\frac{jk\pi}{N+1} \right) \right)_{j=1}^N, \quad k = 1, \dots, N.$$

The discrete iterative approximation of (4.12) takes the form

$$f_k^\delta(x_j) = (I - \omega K_h)^k f_0(x_j) + \omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega K_h)^i g^\delta(x_j), \quad j = 1, \dots, N, \tag{5.8}$$

where $K_h = e^{-\sqrt{\mathbb{A}_h}}$ and $\omega < \frac{1}{\|K_h\|} = e^{\sqrt{\mu_1}} = 2.7881$.

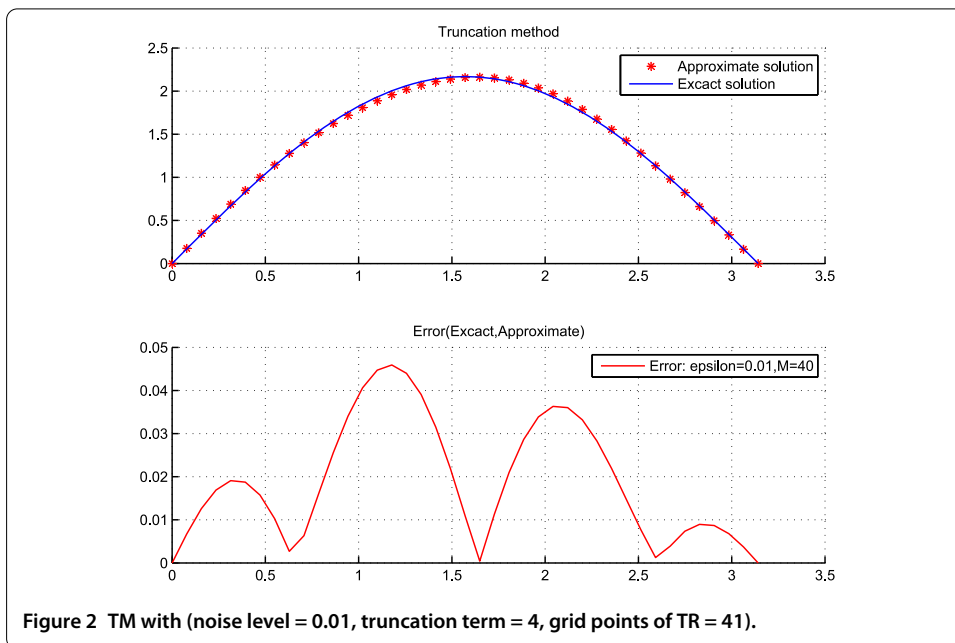
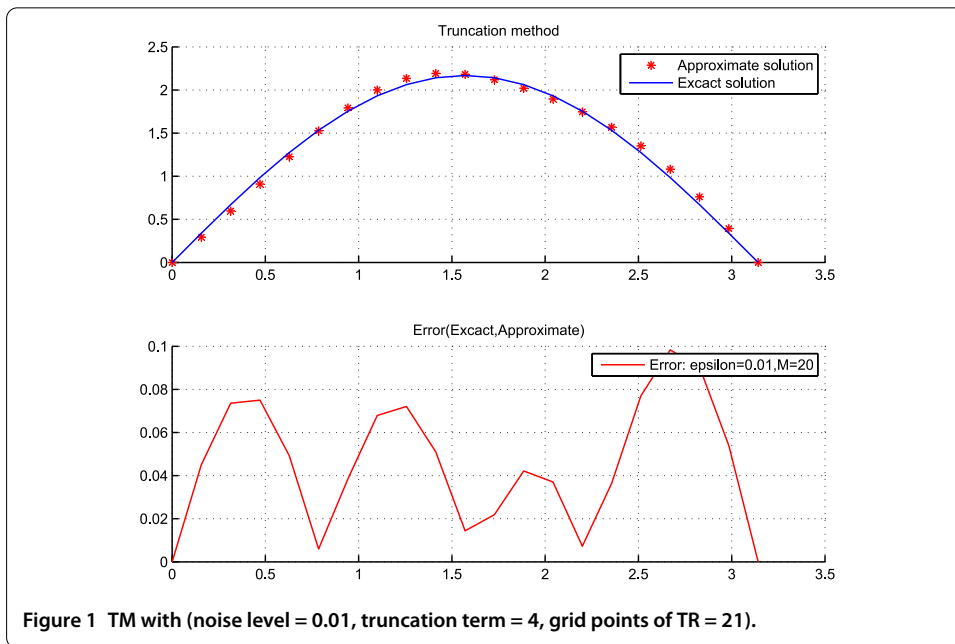
Figures 1-4, Table 1 show the comparisons between the exact solution and its computed approximations for different values N, M and ε .

Figures 5-12, Table 2 show the comparisons between the exact solution and its computed approximations for different values N, k, ω and ε .

Conclusion

The numerical results (Figures 1-4) are quite satisfactory. Even with the noise level $\varepsilon = 0.01$, the numerical solutions are still in good agreement with the exact solution. In addition, the numerical results (Figures 5-12) are better for $(\omega = 2.2305, \varepsilon = 0.01)$ and $(\omega = 1.9517, \varepsilon = 0.001)$ and the other values are also acceptable.

In this study, a convergent and stable reconstruction of an unknown boundary condition has been obtained using two regularizing methods: truncation method and Kozlov-Maz'ya iteration method. Both theoretical and numerical studies have been provided.



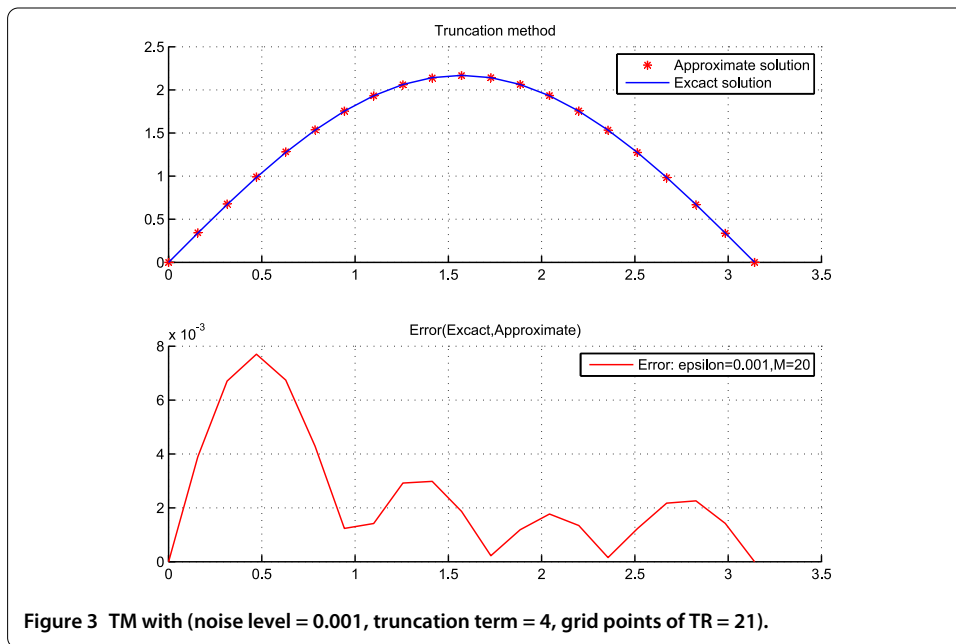


Figure 3 TM with (noise level = 0.001, truncation term = 4, grid points of TR = 21).

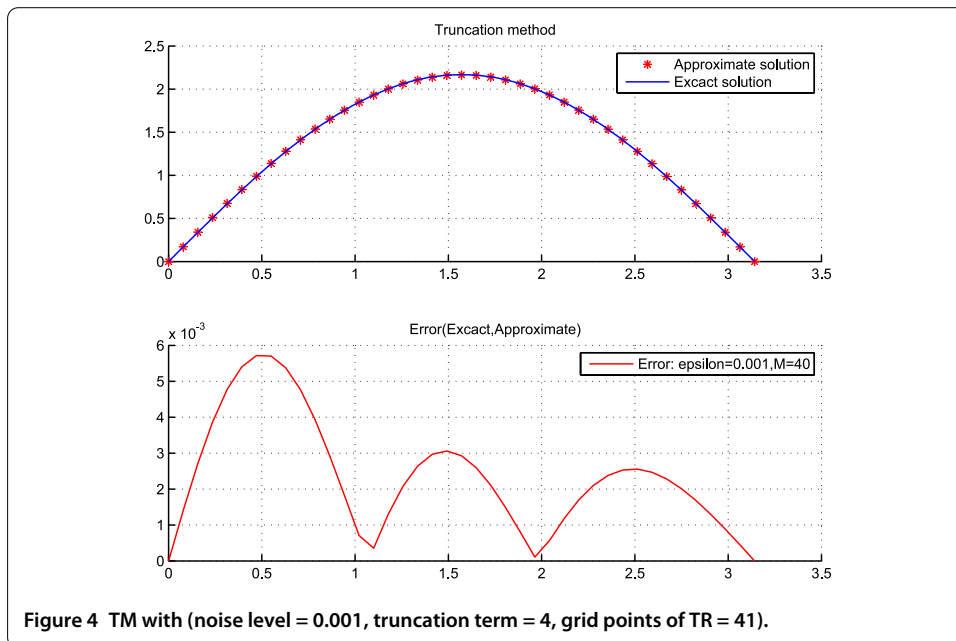
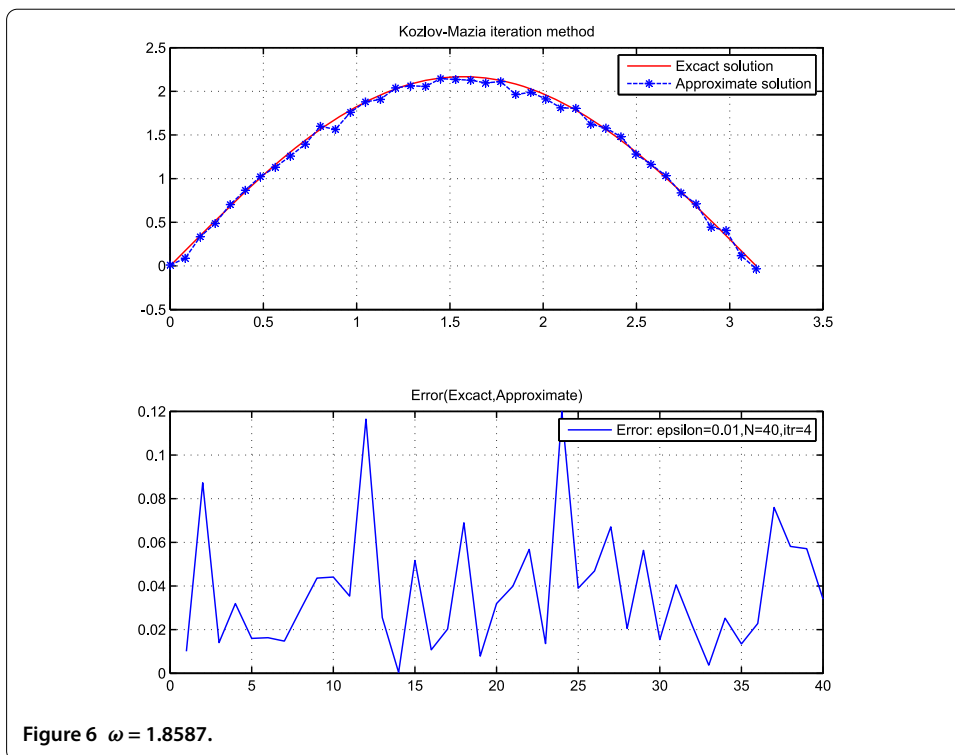
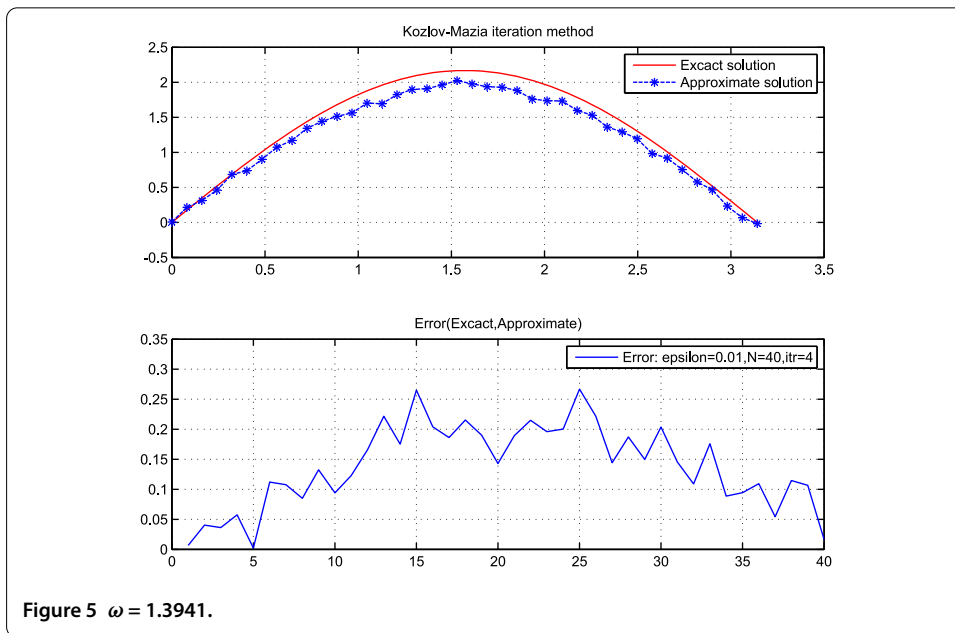
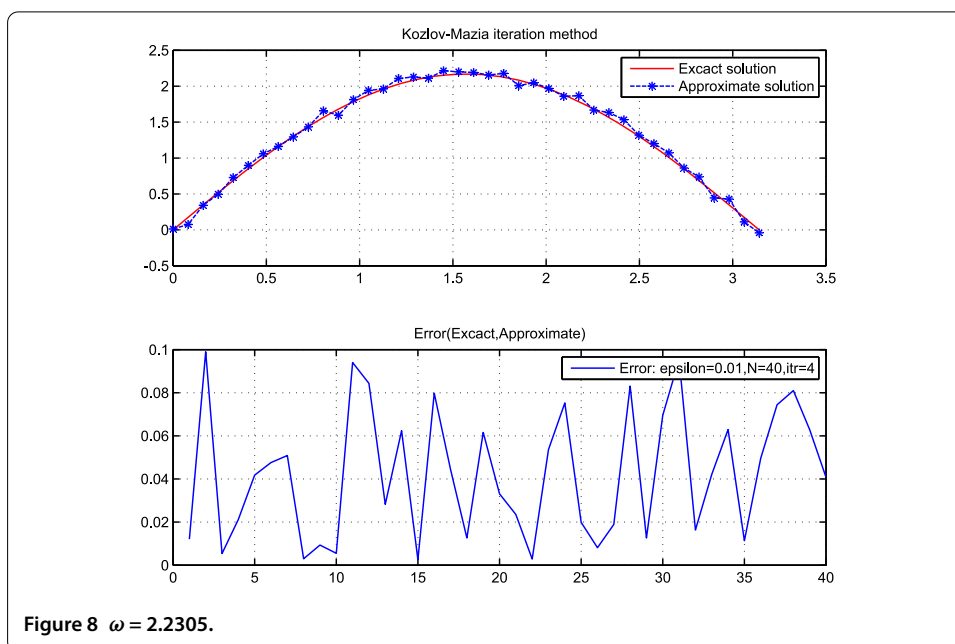
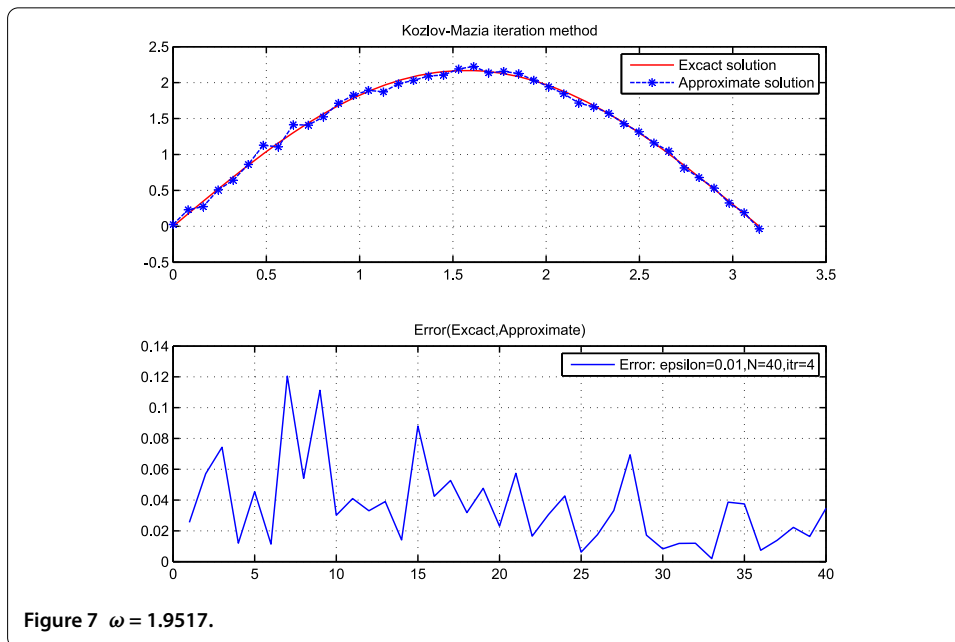


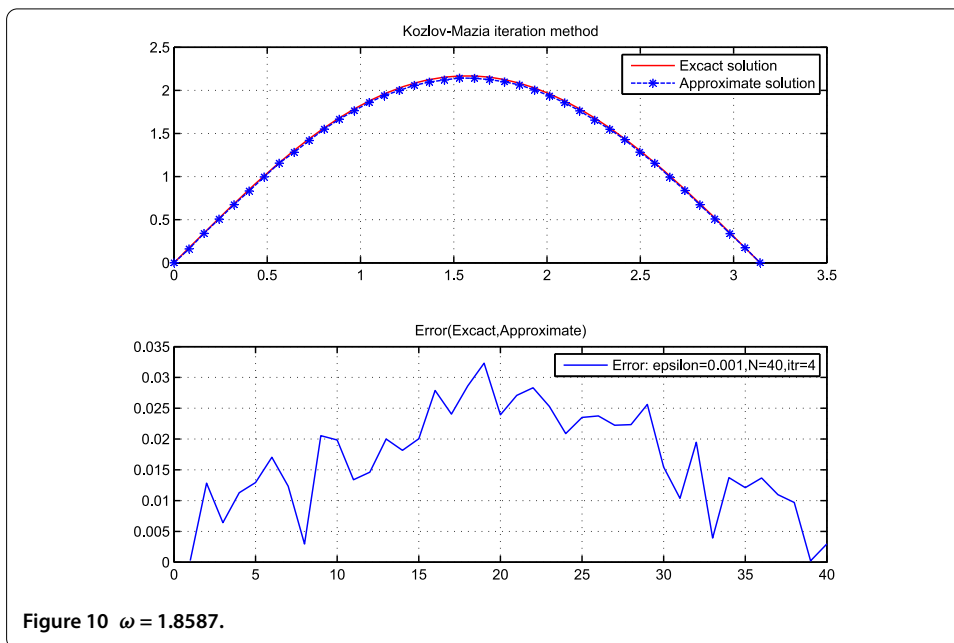
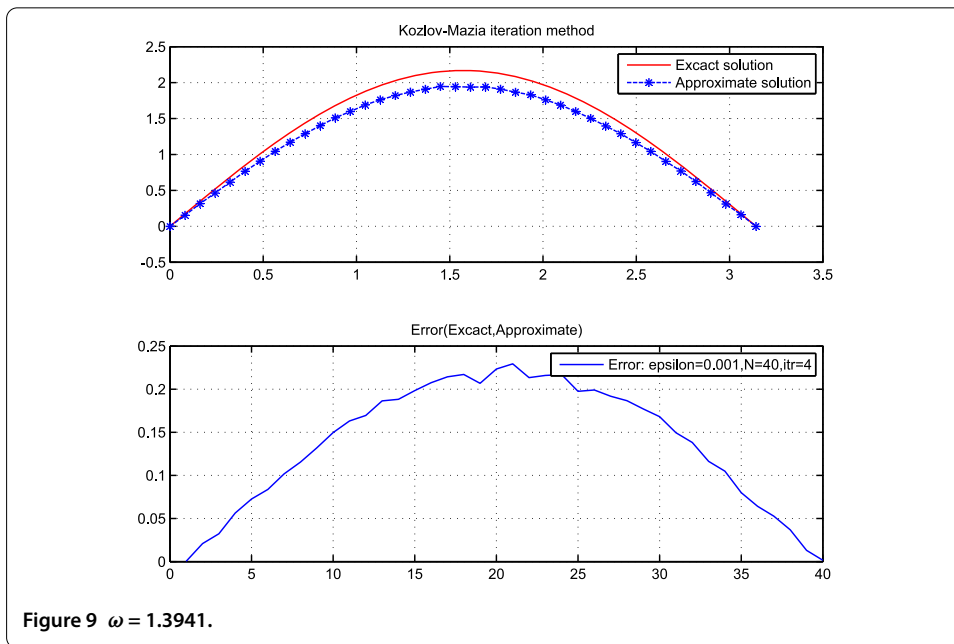
Figure 4 TM with (noise level = 0.001, truncation term = 4, grid points of TR = 41).

Table 1 Truncation method: Relative error $E_r(f)$

N	M	ϵ	$E_r(f)$
20	4	0.01	0.0361
40	4	0.01	0.0155
20	4	0.001	0.0022
40	4	0.001	0.0019







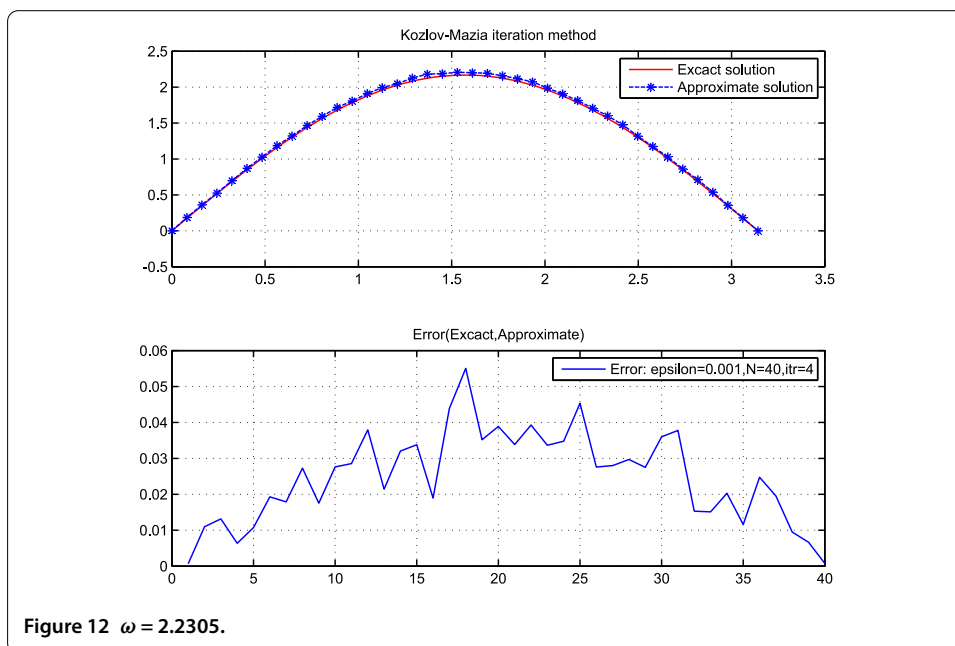
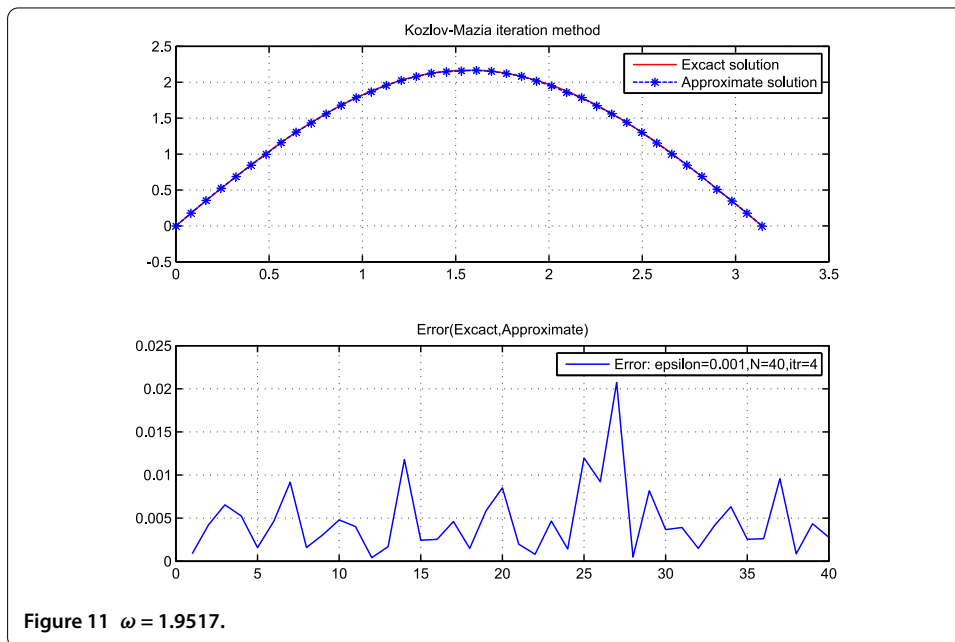


Table 2 Kozlov-Maz'ya method: Relative error $E_r(f)$

N	k	ϵ	ω	$E_r(f)$
40	4	0.01	$0.5 \times 2.7881 = 1.3941$	0.0790
40	4	0.01	$2/3 \times 2.7881 = 1.8587$	0.0205
40	4	0.01	$0.7 \times 2.7881 = 1.9517$	0.0223
40	4	0.01	$0.8 \times 2.7881 = 2.2305$	0.0214
40	4	0.001	$0.5 \times 2.7881 = 1.3941$	0.0792
40	4	0.001	$2/3 \times 2.7881 = 1.8587$	0.0082
40	4	0.001	$0.7 \times 2.7881 = 1.9517$	0.0026

Future work will involve the error effect arising in computing eigenfunctions and eigenvalues of the operator A on the truncation method. The question is how to obtain some optimal balance between the accuracy of eigensystem and the noise level of input data.

Competing interests

The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions

All authors have contributed equally. All authors read and approved the final manuscript.

Author details

¹Applied Mathematics Laboratory, University Badji Mokhtar Annaba, P.O. Box 12, Annaba, 23000, Algeria. ²Department of Mathematics, 8 Mai 1945 Guelma University, P.O. Box 401, Guelma, 24000, Algeria.

Acknowledgements

The authors would like to thank the editor and the anonymous referees for their valuable comments and helpful suggestions that improved the quality of our paper. This work is supported by the DGRST of Algeria (PNR Project 2011-code: 8\23\997).

Received: 13 March 2013 Accepted: 18 July 2013 Published: 2 August 2013

References

1. Cosner, C, Rundell, W: Extension of solutions of second order partial differential equations by the method of quasireversibility. *Houst. J. Math.* **10**(3), 357-370 (1984)
2. Levine, HA, Vessella, S: Estimates and regularization for solutions of some ill-posed problems of elliptic and parabolic type. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **34**, 141-160 (1985)
3. Ivanov, DY: Inverse boundary value problem for an abstract elliptic equation. *Differ. Equ.* **36**(4), 579-586 (2000)
4. Dunford, N, Schwartz, J: *Linear Operators, Part II*. Wiley, New York (1967)
5. Pazy, A: *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations*. Springer, New York (1983)
6. Brezis, H: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York (2011)
7. Prilepko, AI, Orlovsky, DG, Vasin, IA: *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 222. Marcel Dekker, New York (2000)
8. Shlapunov, A: On iterations of non-negative operators and their applications to elliptic systems. *Math. Nachr.* **218**, 165-174 (2000)
9. Krasnosel'skii, MA, Vainikko, GM, Zabreiko, PP, Rutitskii, YB: *Approximate Solutions of Operator Equations*. Wolters-Noordhoff, Groningen (1972)
10. Krein, SG: *Linear Differential Equations in Banach Space*. Am. Math. Soc., Providence (1971)
11. Kozlov, VA, Maz'ya, VG: On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations. *Leningr. Math. J.* **1**, 1207-1228 (1990)
12. Kozlov, VA, Maz'ya, VG, Fomin, AV: An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* **31**(1), 45-52 (1991)
13. Bastay, G: *Iterative Methods for Ill-Posed Boundary Value Problems*. Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations No. 392. Linköping University, Linköping (1995)
14. Baumeister, J, Leitao, A: On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **9**(1), 13-29 (2001)
15. Maxwell, D: Kozlov-Maz'ya iteration as a form of Landweber iteration (2011). arXiv:1107.2194v1 [math.AP] 12 Jul
16. Bakushinsky, AB, Kokurin, MY: *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems*. Springer, Dordrecht (2004)
17. Hohage, T: Regularization of exponentially ill-posed problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **21**, 439-464 (2000)
18. Deufhardy, P, Engl, HW, Scherzer, O: A convergence analysis of iterative methods for the solution of nonlinear ill-posed problems under affinity invariant conditions. *Inverse Probl.* **14**, 1081-1106 (1998)
19. Eldén, L, Simoncini, V: A numerical solution of a Cauchy problem for an elliptic equation by Krylov subspaces. *Inverse Probl.* **25**, 065002 (22pp) (2009)

doi:10.1186/1687-2770-2013-178

Cite this article as: Bouzitouna et al.: Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type. *Boundary Value Problems* 2013 **2013**:178.

Bibliographie

- [1] L. Amodei & J.P. Dedieu, *Analyse numérique matricielle*, DUNOD 2008.
- [2] Ch. Ashyralyev, M. Dedetürk, *Approximate solution of inverse problem for elliptic equation with overdetermination*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013, Article ID 548017, 11 pages.
- [3] Ch. Ashyralyev, M. Dedetürk, *A finite difference method for the inverse elliptic problem with the Dirichlet condition*, Contemporary Analysis and Applied Mathematics, (2013) vol. 1, no. 2, 132-155.
- [4] D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le & D.D. Trong, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*, Lecture Notes in Mathematics 1792, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [5] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset & S. Vessella, *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems, 25 (2009), 123004 (47pp).
- [6] K.A. Ames & B. Straughan, *Non-standard and improperly posed problems*, Academic Press (1997).
- [7] L.S. Abdulkerimov, *Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space*, Azerbaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat., 1 (1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).
- [8] M. Azaïez, F.B. Belgacem & H. El. Fekih, *On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation*, Inverse Problems 22 (2006), 1307-1036.
- [9] R.S. Anderssen & V.A. Sault, *Surface temperature history from bore hole measurements*, Mathematical Geology, 1975.
- [10] S. Andrieux, T.N. Baranger & A. Ben Abda, *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, Inverse Problems 22 (2006), 115-133.
- [11] A.B. Bakushinsky & M.Yu. Kokurin, *Iterative methods for approximate solution of inverse problems*, Springer 2004.
- [12] A. Ben-Israel & N.E. Greville Thomas, *Generalized inverses*, Springer-Verlag (2003).
- [13] A. Ben Abda, J. Henry & F. Jday, *Missing boundary data reconstruction by the factorization method*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).
- [14] C. Brezinski, *Projection methods for systems of equations*, North-Holland, Amsterdam (1997).
- [15] C. Brezinski & M. Redivo-zaglia, *Méthodes numériques itératives*, Ellipse (2006).
- [16] C.G. Broyden, M.T. Vespucci, *Krylov solvers for linear algebraic systems*, Elsevier B.V. (2004).
- [17] F. Berntsson & L. Eldén, *Numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation*, Inverse Problems 17 (2001), 839-854.
- [18] F.B. Belgacem, *Why is the Cauchy problem severely ill-posed*, Inverse Problems 23 (2007), 823-836.
- [19] G. Bastay, *Iterative methods for ill-posed boundary value problems*, Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations No.392, Linköping Univ., Linköping, 1995.
- [20] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London 2011.

- [21] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983 .
- [22] H.D. Bui, *Fracture mechanics, inverse problems and solutions*, Springer (2006).
- [23] J.V. Beck, B. Blackwell & C.R.St. Clair, *Inverse heat conduction, Ill-posed Problem*, Wiley, New York, 1985.
- [24] J. Baumeister & A. Leitao, *On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations*, J. Inverse Ill-Posed Probl., 9 (2001), no. 1, 13-29.
- [25] L. Bourgeois, *Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems 21 (2005), No. 3, 1087-1104.
- [26] L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems 22 (2006), 413-430.
- [27] N.S. Bernard, Y. Saad, & B.S. Roger, *Computing $\exp(-\tau A)$ with laguerre polynomials*, ETNA (2010), Vol. 37, 147-165.
- [28] P. Brianzi, P. Favati, O. Menchi & F. Romani, *A framework for studying the regularizing properties of Krylov subspace methods*, Inverse Problems, (2006), 22, 1007-1021.
- [29] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra , A. Ruhe, & H. Van Der Vorst, *Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems : a practical guide*, SIAM, Philadelphia (2000).
- [30] A. Carasso, *Determining surface temperature from interior observations*, SIAM . Appl. Math., 42 (1982), 558-574.
- [31] C. Cosner & W. Rundell, *Extension of solutions of second order partial differential equations by the method of quasireversibility*, Houston Journal of Mathematics, (1984), Vol. 10, No. 3, 357-370.
- [32] D. Colton, H.W. Engl, A.K. Louis, J.R. Mc Laughlin & W. Rundell (editors), *Surveys on solution methods for inverse problems*, Springer, Wien, New York, (2000).
- [33] D. Calvetti & L. Reichel, *Lanczos-based exponential filtering for discrete ill-posed problems*, Numer. Algorithms, 29 (2002), 45-65.
- [34] D. Calvetti, B. Lewis, & L. Reichel, *On the regularizing properties of the GMRES method*, Numer. Math., 91 (2002), 605-625.
- [35] D. Calvetti, L. Reichel, & A. Shuibi, *Enriched Krylov subspace methods for ill-posed problems*, Linear Algebra Appl., 362 (2003), 257-273.
- [36] G. Cain & G. Meyer, *Separation of variables for partial differential equations : an eigenfunction approach*, Studies in Advanced Mathematics vol. 46, London : Chapman and Hall (2006).
- [37] H. Chebli, *Analyse Hilbertienne*, Centre des Publication Universitaire, Tunis, 2001.
- [38] H. Cheng, Chu-Li Fu & Xiao-Li Feng, *Determining surface heat flux in the steady state for the Cauchy problem for the Laplace equation*, Applied Mathematics and Computation 211 (2009), 374-382.
- [39] M. Chipot, *Elliptic equations : an introductory course*, Birkhäuser Verlag AG (2009).
- [40] M. Choulli, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).
- [41] Bc. Darja Sucha, *Matrix functions and their numerical approximations*, Master Thesis 2011.
- [42] A.M. Denisov, E. V. Zakharov, A. V. Kalinin & V. V. Kalinin, *Numerical methods for some inverse problems of heart electrophysiology*, Differential Equations (2009) Vol. 45, No. 7, 1034-1043.

- [43] N. Dunford & J. Schwartz, *Linear operators, part II : spectral theory*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
- [44] P. Deuffhardy, H.W. Engl & O. Scherzer, *A convergence analysis of iterative methods for the solution of nonlinear ill-posed problems under a nely invariant conditions*, *Inverse Problems* 14 (1998), 1081-1106.
- [45] V. Druskin & L.A. Knizhnerman, *Two polynomial methods of calculating functions of symmetric matrices*, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, Pergamon Press, Inc., Vol. 29 (6) (1989) ,112-121.
- [46] V. Druskin & L. Knizhnerman, *Krylov subspace approximation of eigenpairs and matrix functions in exact and computer arithmetic*, *Numer Linear Algebra Appl.* 2 (1995), 205-217.
- [47] V. Druskin & L. Knizhnerman, *Extended Krylov subspaces : approximation of the matrix square root and related functions*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 19 (1998), 755-771.
- [48] H.W. Engel, M. Hanke & A. Neubauer, *Regularization of inverse problems*, Kluwer Academic, (2000).
- [49] H.W. Engel, W. Rundel, eds., *Inverse problems in diffusion processes*, SIAM, Philadelphia, (1995).
- [50] L. Eldén & V. Simoncini, *Numerical solution of a Cauchy problem for an elliptic equation by Krylov subspaces*, *Inverse Problems*, Vol. 25, (2009) 065002(6).
- [51] M. Eiermann & O. Ernst, *A restarted Krylov subspace method for the evaluation of matrix functions*, *SIAM J. Numer. Anal.*, (2006), 44(6) : 2481-2504.
- [52] A. Frommer & V. Simoncini, *Matrix functions in model order reduction : theory, research aspects and applications*, *Mathematics in Industry*, Schilders, Wil H. A. and van der Vorst, Henk A. eds, Springer, 2008.
- [53] A. Frommer & V. Simoncini , *Stopping criteria for rational matrix functions of Hermitian and symmetric matrices*, *SIAM J. Sci. Comput.*, (2008), 30(3) : 1387-1412.
- [54] A. Frommer, *Monotone convergence of the Lanczos approximations to matrix functions of hermitian type*, *Elect. Trans. Numerical Anal.*, (2009), Vol. 35, 118-128.
- [55] H.O. Fattorini, *The Cauchy problem*, *encyclopedia of mathematics and its applications*, 18, Cambridge University Press 1983.
- [56] R.A. Friesner, L. S. Tuckerman, B. C. Dornblaser, & T. V. Russo, *A method for exponential propagation of large systems of stiff nonlinear differential equations*. *Journal of Scientific Computing*, 4 :327-354, 1989.
- [57] C.W. Groetsch, *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind*, Pitman, Boston, (1984).
- [58] C.W. Groetsch, *Inverse Problems in the mathematical sciences*, Vieweg, Wiesbaden, (1993).
- [59] C. W. Groetsch, *Stable approximate evaluation of unbounded operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [60] E. Gallopoulos & Y. Saad, *Efficient solution of parabolic equations by Krylov approximation methods*, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 13 (1992), 1236-64.
- [61] E. Gallopoulos & Y. Saad, *Parallel solution of parabolic equations using polynomial approximations to the exponential*, Technical report, Research Institute for Advanced Computer Science, Technical report number 90-14.

- [62] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, volume one. Chelsea, New York, 1959.
- [63] G.H. Golub & C.F. Van Loan. *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, third edition, 1996.
- [64] G.H. Golub & G. Meurant, *Matrices, Moments and quadrature with applications*, Princeton University Press (2010).
- [65] R. Gorenflo & S. Vessella, *Abel integral equations*, Lecture Notes in Mathematics 1461, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [66] S. Güttel, *Convergence estimates of Krylov subspace methods for the approximation of matrix functions using tools from potential theory*, Ph.D. Thesis, Technische Universität (Freiberg) (2006).
- [67] S. Güttel, *Rational Krylov Methods for operator functions*, Ph.D. Thesis, Technischen Universität Bergakademie (Freiberg) (2010).
- [68] V.I. Gorbachuk & M.L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations*, Kluwer, Dordrecht (1991).
- [69] V. Grimm & M. Hochbruck, *Rational approximation to trigonometric operators*, BIT (2008), vol. 48, no. 2, 215-229.
- [70] D.N. Hào, N.V. Duc & D. Lesnic, *A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems, 25 (2009), 055002(27pp).
- [71] I. Hnetynkova, M. Plesinger, & Z. Strakos, *The regularizing effect of the Golub-Kahan iterative bidiagonalization and revealing the noise level in the data*, BIT Numerical Analysis (2009), No. 4, 669-696.
- [72] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy problem in linear partial equations*, Dover, New York (1953).
- [73] M.E. Hochstenbach, *Subspace methods for eigenvalue problems*, Ph.D. Thesis, Utrecht University (2003).
- [74] M. Hochbruck & M. Hochstenbach, *Subspace extraction for matrix functions*, Preprint (2005), Dept. of Math., Case Western Reserve University.
- [75] N.J. Higham, *Functions of matrices : theory and computation*, SIAM (2008).
- [76] P.C. Hansen, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems*, Numerical Aspects of Linear Inversion , SIAM Philadelphia (1997).
- [77] R.A. Horn & Charles R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [78] T. Hohage, *Regularization of exponentially ill-posed problems*, Numer. Funct. Anal. Optim., 21 (2000), 439-464.
- [79] D.Y. Ivanov, *Inverse boundary value problem for an abstract elliptic equation*, Differential Equations, (2000), Vol. 36, no. 4, 579-586.
- [80] G. Inglese, *An inverse problem in corrosion detection*, Inverse problem, (1997) 13, 977-994.
- [81] M. Ilic, D. P. Simpson & I. W. Turner, *A restarted Lanczos approximation to functions of a symmetric matrix*, (2009), IMA Journal of Numerical Analysis, doi : 10.1093/imanum/-drp003.
- [82] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, Springer-Verlag (2006).
- [83] B.T. Johanssona & D. Lesnic, *A procedure for determining a spacewise dependent heat source and the initial temperature*, Applicable Analysis, (2008), Vol. 87, no. 3, 265-276.

- [84] F. John, *Continuous dependence on the data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*, Comm. Pure and Appl. Math., 13 (1960), 551-585.
- [85] T. Johansson & D. Lesnic, *Determination of a spacewise dependent heat source*, J. Comput. Appl. Math., 209 (2007), 66-80.
- [86] T.K. Jensen, *Stabilization algorithms for large-scale problems*, PHD Thesis, Technical University of Denmark, Informatics and Mathematical Modelling, Denmark (2006).
- [87] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer (2011).
- [88] P.G. Kaup, F. Santosa, *Nondestructive evaluation of corrosion damage using electrostatic boundary measurements*, J. Nondestruct. Eval., 14 (1995) 127-136.
- [89] J.B. Keller, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, 83 : 107-118, (1976).
- [90] L. Komzsik, *The Lanczos method : evolution and application*, SIAM (2003).
- [91] M.A. Krasnosel'skii, G.M. Vainikko, P.P. Zabreiko & Y.B. Rutitskii, *Approximate solutions of operator equations*, Wolters-Noordho Publishing, Groningen, 1972.
- [92] M.V. Klibanov, F. Santosa, *A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation*, SIAM J. Appl. Math. 51, 1653-1675, 1991.
- [93] R. Kress, *Linear integral equations*, vol. 82 of Applied Mathematical Sciences, Springer (1989).
- [94] R. Kress, D. Colton, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer (2010).
- [95] S.G. Krein & Ju.I. Petunin, *Scales of Banach spaces*, Uspehi Mat. Nauk, 21 (1966), 89-168.
- [96] S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 02904 (1971).
- [97] S.H. Kulkarni & M.T. Nair, *A characterization of closed range operators*, Indian J. Pure Appl. Math., 31(4) (2000), 353-361.
- [98] S.H. Kulkarni, M.T. Nair & G. Ramesh, *Some properties of unbounded operators with closed range*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 118, No. 4, (2008), 613-625.
- [99] V.A. Kozlov & V.G. Maz'ya, *On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations*, Leningrad Math. J., 1 (1990), No. 5, 1207-1228.
- [100] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, & A.V. Fomin, *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations*, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 31 (1991), no. 1, 45-52.
- [101] B. Lewis & L. Reichel, *Arnoldi-Tikhonov regularization methods*, J. Comput. Appl. Math., 226 (2009), 92-102.
- [102] H.A. Levine & S. Vessella, *Estimates and regularization for solutions of some ill-posed problems of elliptic and parabolic type*, Rend. Circolo Matem. Palermo, 34 (1985), 141-160.
- [103] M.M. Lavrentyev, V.G. Romanov & S.P. Shishatski, *Ill-posed problem of mathematical physics and analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1986).
- [104] M.M. Lavrentiev, *On the Cauchy problem for the Laplace equation*, (In Russian). Izvest. Akad. Nauk SSSR (Ser. Matem.) 20 (1956), 819-842.
- [105] M.M. Lavrentiev, *Some improperly posed problems in mathematical physics*, Springer-Verlag, New York (1967).

- [106] Pe. Lancaster & M. Tismenetsky, *The theory of matrices*. Academic Press, London, second edition, 1985.
- [107] R. Lattès & J.-L. Lions, *The method of quasi-reversibility, Applications to partial differential equations*, Elsevier, New York (1969).
- [108] X.X. Li, H.Z. Guo, S.M. Wan & F. Yang, *Inverse source identification by the modified regularization method on poisson equation*, *Journal of Applied Mathematics* Volume 2012, Article ID 971952, 13 pages.
- [109] D. Maxwell, *Kozlov-Maz'ya iteration as a form of Landweber iteration*, arXiv :1107.2194v1, math.AP, 12 Jul 2011.
- [110] G. Meurant, *The Lanczos and conjugate gradient algorithms*, SIAM (2006).
- [111] L. Marin, *An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation*, *Comput Mech* (2010) 45, 665-677.
- [112] V.A. Morozov, *On the solution of functional equations by the method of regularization*, *Soviet Math. Doklady*, 7 (1966), 414-417.
- [113] V.A. Morozov, *Methods for solving incorrectly posed problems*, Springer-Verlag, (1984).
- [114] B. Nour-Omid, *Applications of the Lanczos algorithm*. *Comp. Phy. Comm.*, 53, 1989.
- [115] M.T. Nair, *Linear operator equations : approximation and regularization*, World Scientific (2009).
- [116] Z. Nashed, *Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations*, In A. Dold, B. Eckmann (eds.), *Constructive and computational methods for differential and integral equations*. Springer-Verlag (1974).
- [117] D.G. Orlovsky, *Inverse Dirichlet problem for an equation of elliptic type*, *Differential Equations*, (2008), Vol. 44, No. 1, 124-134.
- [118] D.G. Orlovsky & S. Piskarev, *On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems*, *J. Inv. Ill-Posed Problems* 17 (2009), 765-782.
- [119] D.G. Orlovsky, *Inverse problem for elliptic equation in a Banach space with Bitsadze-Samarsky boundary value conditions*, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 21 (2013), 141-157.
- [120] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [121] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky & I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, p. cm. *Monographs and textbooks in pure and applied mathematics* 222, Marcel Dekker (2000).
- [122] B.N. Parlett, *The symmetric eigenvalues problem*, SIAM Philadelphia (1998).
- [123] L.E. Payne, *Improperly posed problems in partial differential equations*, SIAM, Philadelphia, PA, (1975).
- [124] M. Popolizio, *Acceleration techniques for approximating the matrix exponential*, PHD Thesis, Università degli Studi di Bari, Italy (2008).
- [125] M. Popolizio & V. Simoncini, *Acceleration techniques for approximating the matrix exponential operator*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 30 (2008), 657-683.
- [126] N.H. Pollack & S. Huang, *Climate reconstruction from subsurface temperatures*. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, (2000), 28, 339-65.
- [127] A.L. Qian, *Identifying an unknown source in the poisson equation by a mollification regularization method*, *International J. of Math. Sci. and Engg. Appls.*, (2013) Vol. 7 No. V, 193-201.

- [128] A.L. Qian, *Identifying an unknown source in the Poisson equation by a wavelet dual least square method*, Boundary Value Problems 2013, 2013 :267.
- [129] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. Méthodes numériques algorithmes, analyse et applications, Springer. Verlag Italia, Milano 2004, 2007
- [130] P.H. Quan, D.D. Trong, A.P. Ngoc Dinh, *A nonlinearly ill-posed problem of reconstructing the temperature from interior data*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 29, Issue 3 & 4, (2008), 445-469.
- [131] R.J. Radke, A Matlab implementation of the implicitly restarted Arnoldi method for large scale eigenvalue problems, Ph.D. Thesis, Rice University (1996).
- [132] Z. Ranjbar, Numerical solution of ill-posed Cauchy problems for parabolic equations, PHD Thesis, Department of Mathematics, Scientific Computing Link.ping University (2010).
- [133] A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics, Walter de Gruyter. Berlin. New York (2007).
- [134] A. Shlapunov, *On Iterations of non-negative operators and their applications to elliptic systems*, Math. Nachr., 218 (2000), 165-174.
- [135] D.P. Simpson, Krylov subspace methods for approximating functions of symmetric positive definite matrices with applications to statistics and anomalous diffusion, PHD Thesis, Queensland University of Technology (2008).
- [136] P.Y. Shen, A.E. Beck, *Determination of surface temperature history from borehole temperature gradients*, Journal of Geophysical Research, Vol. 88, No. B9, 7385-7493 1983.
- [137] R.B. Sidje, *Expokit : a software package for computing matrix exponentials*, ACM Trans. Math. Softw., ACM, Vol. 24(1) (1998), 130-156.
- [138] V. Simoncini & D.B. Szyld, *Recent computational developments in Krylov Subspace Methods for linear systems*, Numerical Linear Algebra w/Appl., (2007), Vol. 14, No.1 , 1-59.
- [139] Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, SIAM (2003).
- [140] Y. Saad, *Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator*, SIAM. Journal on Numerical Analysis, 1992, Vol 29, p :209-228
- [141] A.N. Tikhonov & V.Y. Arsenin, Solution of ill-posed problems, Winston & Sons, Washington, DC, (1977).
- [142] A. Tarantola, Inverse problems theory, Elsevier, (1987).
- [143] L.N. Trefethen. *The asymptotic accuracy of rational best approximation to e^z in a disk*, J. Approx. Theory, 40 :380-383, 1984.
- [144] H.A. Van Der Vorst, *An iterative solution method for solving $f(A)x = b$, using Krylov subspace information obtained for the symmetric positive definite matrix A*, J. Comput. Appl. Math., 18 (1987) ,249-263.
- [145] H.A. Van Der Vorst, Iterative methods for large linear systems, Mathematical Institute Utrecht University (2000).
- [146] D.S. WATKINS, The Matrix Eigenvalue Problem : GR and Krylov subspaces methods, SIAM (2007).
- [147] M.L. Whitney, Theoretical and numerical study of tikhonov's regularization and Morozov's discrepancy principle, Ph.D. Thesis, Georgia State University (2009).

-
- [148] P. Wikstrom, W. Lodzimierz Blasiak & F. Berntsson, *Estimation of the transient surface temperature and heat flux of a steel slab using an inverse method*, Applied Thermal Engineering, 27 (2007). 2463-2472.
- [149] H.F. Walker, *Implementation of the GMRES method using Householder transformations*, SIAM Journal on Scientific Computing, 9 : 152 - 163, 1988.
- [150] J.T. Wloka, B. Rowley & B. Lawruk, *Boundary value problems for elliptic systems*, Cambridge University Press (1995).
- [151] F. Yang, L. Yan & T. Wei, *Reconstruction of the corrosion boundary for the Laplace equation by using a boundary collocation method*, Mathematics and Computers in Simulation, 79 (2009), 2148-2156.
- [152] X. Yang Xin, M. Choulli, J. Cheng, *An iterative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe*, Numerical Mathematics, (2005), Vol.14, No.3, 252-266.