

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
OF ANNABA
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
- ANNABA -



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Par
GOUADRIA ABDELOUAHAB

Intitulé :

Application de la méthode de la moyenne pour la recherche des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux

Option

Systèmes dynamiques et calculs stochastiques

Directeur de mémoire : MAKHLOUF AMAR Prof U.B.M. ANNABA

Devant le Jury

Président : BOUTABIA Hacène Prof. U.B.M. ANNABA

Examineur : SALMI Abdelouahab M.C U.B.M. ANNABA

Examineur : BENHAMMADI Zoubeida M.C U.B.M. ANNABA

Année : 2010

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Introduction	v
Remerciements	vii
1 Notions générales	1
1.1 Résumé	1
1.2 Définition d'un système dynamique	1
1.2.1 Exemple	1
1.3 Flot d'une équation différentielle	2
1.4 Définition d'un point critique	2
1.5 Plan et portrait de phase	2
1.6 Plan de phase d'un système différentiel linéaire	3
1.6.1 Nature des points critiques	3
1.7 Linéarisation	6
1.8 Définition d'un cycle limite	7
1.9 L'amplitude du cycle limite	7
1.9.1 Remarque	7
1.10 Définition	7
1.11 Stabilité des points d'équilibres	8
1.12 Théorème de Bezout	10
1.13 Théorème de Poincaré-Bendixson	10

1.14	Application en chimie	11
1.15	Résultats auxiliaires	11
2	Les orbites périodiques par la méthode de la moyenne	13
2.1	Introduction	13
2.2	La méthode de la moyenne du premier ordre	13
2.2.1	Application de la méthode de la moyenne du premier ordre	16
2.2.2	Autre méthode de la moyenne du premier ordre	23
2.3	La méthode de la moyenne du second ordre	25
2.4	La méthode de la moyenne du troisième ordre	28
3	Perturbation d'un centre linéaire par des polynômes de degré 4	30
3.1	Resumé	30
3.2	la méthode de la moyenne de premier ordre dans \mathbb{R}^2	30
3.3	la méthode de la moyenne de premier ordre dans \mathbb{R}^3	34
3.4	la méthode de la moyenne de second ordre dans \mathbb{R}^2	42
3.5	la méthode de la moyenne de second ordre dans \mathbb{R}^3	56
4	Perturbation d'un centre cubique par des polynômes de degré 2	93
4.1	Resumé	93
4.2	Ellipse $f(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1 = 0$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$.	97
4.3	Ellipse complexe $f(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 + 1$	108
5	Conclusion	112
6	Appendice	113

Résumé

Le travail de ce mémoire consiste à la recherche des cycles limites des systèmes différentiels ordinaires perturbés, en utilisant la méthode de la moyenne. Plus précisément, on étudie la bifurcation des cycles limites d'un centre linéaire perturbé par des polynômes de degré quatre. De même, on étudie la bifurcation des cycles limites d'un centre cubique par des polynômes quadratiques.

Mots clés : Cycle limite, méthode de la moyenne, système cubique, système linéaire, perturbation.

Abstract

This work consists of the research of the limit cycles of ordinary differential systems by using the averaging method. We study the limit cycles which bifurcate from linear center inside the polynomial systems of degree 4; We also study the bifurcation of limit cycles above the polynomial systems of degree 2.

Keywords : limit Cycle, averaging method, linear center, cubic systems, Liénard system, perturbation.

Introduction

Un problème important dans l'étude des équations différentielles est la détermination des cycles limites. Ce phénomène est observé dans beaucoup de systèmes physiques et biologiques. Une méthode classique pour produire des cycles limites est de perturber un système qui possède un centre. Nous utilisons la méthode de la moyenne du premier et second ordre. Cette méthode donne une relation entre les solutions des systèmes différentiels périodiques non autonomes et les solutions des systèmes différentiels moyennés, qui sont autonomes. L'idée de la méthode de la moyenne comme une technique pour étudier le nombre maximum des solutions périodiques du système perturbé est apparue au dix huitième siècle. Elle a été formulée très clairement par Lagrange en 1788. Ainsi, en 1920 Van der Pol a développé l'utilisation de cette méthode pour les équations provenant de la théorie des circuits électroniques. En 1928 Fatou a donné la première preuve de validité asymptotique de cette méthode. En 1930 Krylov, Bogliubov et Mitropolsky de l'école (Kiev) de mathématiques ont suivi ce type de recherche. Henri Poincaré a aussi étudié la bifurcation et la stabilité des solutions périodiques. Nous appliquons cette théorie à un centre perturbé par des polynômes de degré quatre, dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . De même nous appliquons cette théorie à la perturbation d'un centre cubique par des polynômes de degré deux.

On sait que le système perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q(x, y) \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de degré n , admet au plus $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ cycles limites, en utilisant la méthode de la moyenne du premier ordre.

et que le système perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1+x) + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = x(1+x) + \varepsilon Q(x,y) \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de degré n , admet au plus n cycles limites, en utilisant la méthode de la moyenne du premier ordre. voir [6]

Le chapitre 1 est consacré aux notions générales sur les systèmes dynamiques.

Le chapitre 2 est réservé à la théorie de la méthode de la moyenne. On étudie un exemple d'un système différentiel qui provient du contrôle optimal.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des cycles limites des systèmes polynomiaux de degré quatre dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

On étudie les systèmes perturbés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q(x,y) \end{cases}$$

et les systèmes perturbés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q(x,y) \\ \dot{z} = \varepsilon Q(x,y) \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de degré quatre.

On donne des exemples où P et Q sont des polynômes de degré quatre avec, exactement un et deux cycles limites.

Le chapitre 4 est consacré à la perturbation d'un centre cubique par des polynômes de degré deux c-à-d, on étudie le système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x,y) + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = xf(x,y) + \varepsilon Q(x,y) \end{cases}$$

où $f(x,y)$.est une conique de la forme

1-Ellipse réelle $f(x,y) = (x+a)^2 + (y+b)^2 - 1$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$.

2-Ellipse complexe $f(x,y) = (x+a)^2 + (y+b)^2 + 1$.

Remerciements

En premier lieu et avant tout, je remercie énormément le grand Dieu qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Je suis très heureux d'exprimer ici mes respectueux remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur **A. MAKHLOUF** professeur à l'université d'Annaba pour le sujet qu'il m'a proposé, pour ses précieux conseils, ses encouragements, ses suggestions valeureuses, sa patience et sa bonne humeur, sa grande érudition, disponibilité et son sens de la recherche qui ont été déterminant à la réalisation de ce travail.

Mes respectueux remerciements vont à Monsieur **H. BOUTABIA** professeur à l'université d'Annaba pour avoir accepté de présider le jury.

Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur **A. SALMI** d'avoir accepté de participer au jury.

De même je remercie très vivement Madame **Z. BENHAMADI** d'avoir accepté de juger ce travail.

Du fond du cœur, un grand merci à mon collègue **Saidane.R** pour ses encouragements et pour son aide très précieuse.

Merci à toute ma famille, en particulier ma **mère**, mon **père** et mes sœurs surtout **Sabrina** et mes frères , et à tous mes amis et tous mes collègues sans exception.

CHAPITRE 0. REMERCIEMENTS

Chapitre 1

Notions générales

1.1 Résumé

Ce chapitre couvre les thèmes nécessaires pour la compréhension de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques. Nous rappelons des notions générales. Nous commençons par la définition des systèmes dynamiques, les points critiques et le système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. En suite, nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite. On donne aussi le théorème de Bezout et le théorème de Poincaré-Bendixson. En fin, on donne un exemple d'application en chimie qui a un seul cycle limite.

1.2 Définition d'un système dynamique

Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- * $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- * $U(t, .) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- * $U(0, x) = x$
- * $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)) \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$

1.2.1 Exemple

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante, $x \in \mathbb{R}^n$. la solution de (1.1) est $x(t) = e^{tA}x_0$
 le système (1.1) engendre un système dynamique $(t, x) \rightarrow U(t, x) = e^{tA}x$

1.3 Flot d'une équation différentielle

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x)$$

et le problème à valeurs initiales

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, E un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Pour $x_0 \in E$ et $\phi(t, x_0)$ la solution de problème à valeurs initiales, l'ensemble des applications ϕ_t défini par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

est appelé le flot du système différentiel.

1.4 Définition d'un point critique

On appelle point critique, point d'équilibre, point singulier ou point fixe du système différentiel non linéaire $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = 0$

1.5 Plan et portrait de phase

Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.2}$$

1.6. PLAN DE PHASE D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.2) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) qui est le plan de phase.

1.6 Plan de phase d'un système différentiel linéaire

Pour déterminer le plan de phase, il faut savoir la nature des points critiques.

1.6.1 Nature des points critiques

Soit le système différentiel linéaire planaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.3}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice constante, $x = (x_1, x_2)$

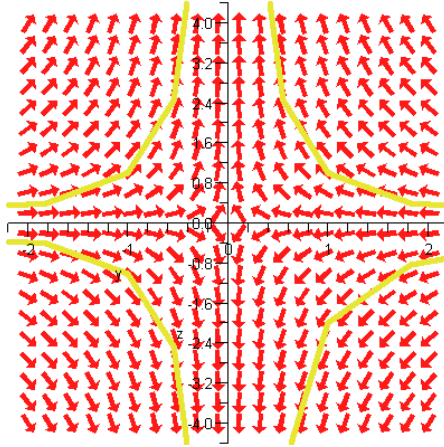
le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique. On propose la classification des trajectoires en fonction des valeurs propres λ_1 et λ_2 de (1.3). Le comportement de ces trajectoires au voisinage du point critique, détermine le type du point d'équilibre représenté par ce dernier. Il s'agit d'une classification topologique locale.

On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A

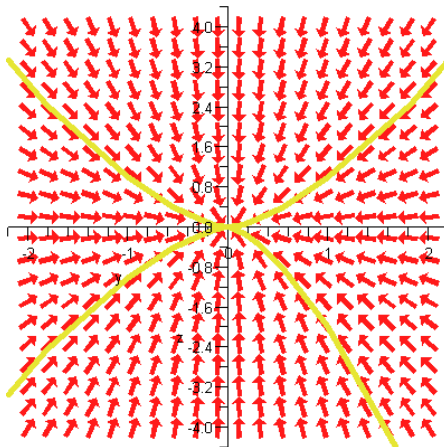
1. λ_1 et λ_2 réel de signe différent

la singularité est un selle qui est toujours instable...



2. λ_1 et λ_2 réel de même signe

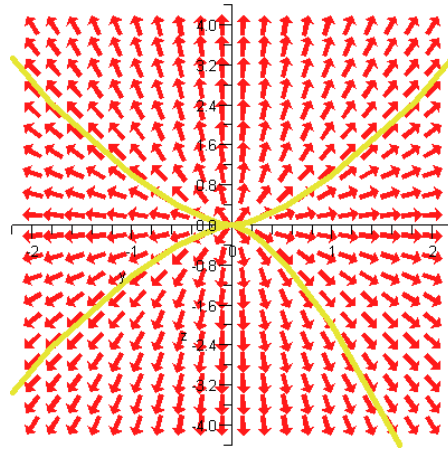
si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, la singularité est un nœud stable.



nœud stable

si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, la singularité est un nœud instable.

1.6. PLAN DE PHASE D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

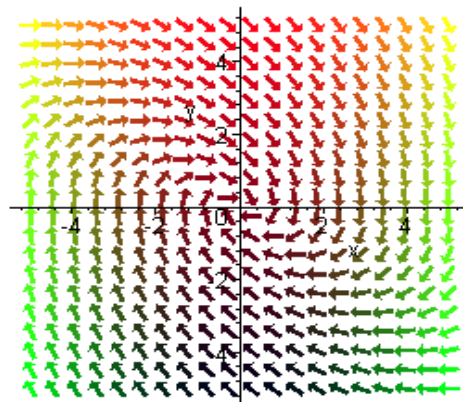


nœud instable

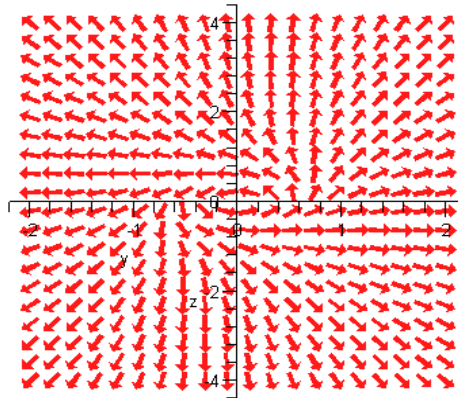
si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la singularité est un nœud stable si $\lambda > 0$ sinon il est instable.

3. λ_1 et λ_2 complexes conjuguées avec la partie réelle non nulle.

La singularité est un foyer stable ou instable selon le signe de la partie réelle négative ou positive respectivement

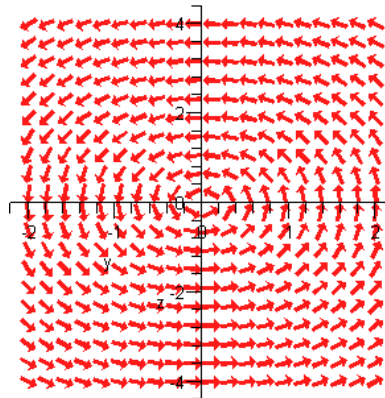


foyer stable



Foyer instable

4. λ_1 et λ_2 imaginaires pures.
la singularité est un centre



Centre

1.7 Linéarisation

Soit le système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

Soit x_0 un point critique de (1.4). Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \text{ ou } A = Df(x_0) \tag{1.5}$$

Ax est une bonne approximation de (1.4) au voisinage de x_0

Un point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de A n'a de partie réelle nulle.

1.8 Définition d'un cycle limite

Un cycle limite est une orbite fermée isolée, c'est à dire au voisinage de cette orbite, on ne peut pas avoir une autre orbite fermée.

La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage.

1.9 L'amplitude du cycle limite

C'est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.

1.9.1 Remarque

Pour un cycle limite, la somme des indices des points critiques à l'intérieur de ce cycle limite est égale 1.

1.10 Définition

Un système Hamiltonien s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{1.6}$$

où $H = H(x, y)$. H s'appelle Hamiltonien de ce système.
Le Hamiltonien est une intégrale première de ce système.

1.11 Stabilité des points d'équilibres

La question de la stabilité d'une solution ou d'un mouvement est une question fondamentale de la théorie qualitative des équations différentielles.

Cette question à été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe Lypunov(1857 – 1918).

Définition 1.11.1 *Soit le système des équations*

$$\frac{dx}{dt} = f(t; x), \quad x \in \mathbb{R}^n; t \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Une solution $\phi(t)$ du système (1.7) telle que $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable au sens de Lypunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.7) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \succeq t_0$$

Si en plus de cette définition on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$

Alors la solution est dite asymptotiquement stable.

exemple 1.11.1 *Soit le système différentielle de premier ordre*

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1, x(0) = 1$$

La solution telle que $x(0) = x_0$ est $x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1$.

La solution $\phi(t)$ telle que $\phi(0) = 1$ est $\phi(t) = 1$.

$$|x(t) - \phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \forall t \succeq 0.$$

il suffit de prendre $\delta \preceq \varepsilon, \delta = \varepsilon \Rightarrow \phi(t)$ est stable.

exemple 1.11.2 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$ et $(x(0), y(0))^t = (0, 0)$.

1.11. STABILITÉ DES POINTS D'ÉQUILIBRES

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}, \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ telle que } \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0;$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| \\ &= |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|) \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta$$

On prend $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$; ($\delta = \frac{\varepsilon}{2}$) d'où $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable au sens de Lypunov.

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

Donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

Remarque 1.11.1 *Il est possible que la solution soit non bornée et stable et même asymptotiquement stable. De même il est possible que la solution soit bornée et non stable.*

*Dans le premier cas ,on a l'exemple $\frac{dx}{dt} = 1, x(0) = 1$

*Dans le deuxième cas ,on a l'exemple

$$\frac{dx}{dt} = (\sin(x))^2, x(0) = 0, \phi(t) = 0$$

Théorème 1.11.1 *i) Si toutes les valeurs de la matrices Jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives ,alors le point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable.*

Si Γ est contenue dans sous ensemble compact de \mathbb{R}^2 alors $\omega(\Gamma)$ est non vide, connexe et compact de E .

Théorème 1.13.1 *Si p est point ω -limite d'une orbite Γ de (1.8) alors tous les points de l'orbite $\phi(\cdot, x)$ sont aussi des points ω -limite de Γ c-à-d si $p \in \omega(\Gamma)$ alors $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$.*

Théorème 1.13.2 *De Poincaré-Bendixson*

Supposons que $f \in C^1(E)$ où E est un ouvert de \mathbb{R}^2 , et que $\dot{x} = f(x)$ possède une trajectoire Γ contenue dans un sous ensemble compact F de E

Si $\omega(\Gamma)$ n'a pas de point critique de (1.8) alors $\omega(\Gamma)$ est une orbite périodique de (1.8).

Preuve. Voir [1] ■

1.14 Application en chimie

Le bruxellateur, c'est un modèle pour une réaction chimique, autocatalytique avec diffusion

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+1)x + x^2y \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2y \end{cases}$$

dans ce cas on a un seul cycle limite selon le théorème de Poincaré-Bendixson.

1.15 Résultats auxiliaires

Définition 1.15.1 *Un point $x \in D$ où $Jf(x) \neq 0$ est appelé un point régulier, si non il est un point singulier de l'application f .*

Définition 1.15.2 *f est non dégénérée dans D si n'a aucun racine sur ∂D et si chaque racine de f dans D est non dégénéré c'est à dire $Jf(x) \neq 0$ avec x_0 racine de f et $x_0 \in D$.*

Lemme 1.15.1 *Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on définit*

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta) d\theta$$

alors

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

et

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

Ces intégrales sont utilisées jusqu'à ce qu'on arrive à $I_{0,0} = 2\pi$
ou $I_{0,1} = I_{1,0} = I_{1,1} = 0$.

Notons que $I_{m,n} \neq 0$ si et seulement si m et n sont paires.

Chapitre 2

Les orbites périodiques par la méthode de la moyenne

2.1 Introduction

Pour étudier les orbites périodiques d'une équation différentielle ordinaire ou d'un système différentiel, on introduit la méthode de la moyenne.

La méthode de la moyenne est une méthode de construction d'une approximation de la solution d'un problème à valeur initiale d'une classe d'équation différentielle et de détermination des solutions périodiques.

2.2 La méthode de la moyenne du premier ordre

Soit le système différentiel

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon) \quad (2.1)$$

avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$ $F(t, x)$ et $R(t, x, \varepsilon)$ sont T -périodique en t

Le système moyenné associé au système (2.1) est

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t), t) \quad (2.2)$$

$$f^0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds$$

Le théorème suivant nous dit sous quelles conditions les points singuliers du système (2.1) fournissent des orbites périodiques du (2.1)

Théorème 2.2.1 *On considère le système (2.1) et on suppose les fonctions $F, R, D_x F_1, D_x^2 F_1, D_x^2 R$ sont continuées et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*

On suppose que F et R sont T -périodique en t avec T indépendante de ε :

(a) Si $p \in D$ est un point singulier du système moyenné (2.2) telle que $\det(D_x f^0(p)) \neq 0$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit il existe une solution T -périodique $X_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $X_\varepsilon(0) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

(b) Si le point singulier $y = p$ de système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $X_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique hyperbolique et de même stabilité que p .

exemple 2.2.1 *Soit l'équation de Vender pol*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y \end{cases} \quad (2.3)$$

cette forme ce n'est pas exactement que (2.2) pour cela, on utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 t) \sin^2 t \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(1 - r^2 \cos^2 t) \sin t \end{cases}$$

Aussi on peut trouver le système (2.2), donc on passe à la technique

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2)$$

(selon développement de Taylor)

2.2. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DU PREMIER ORDRE

Les conditions du théorème sont vérifiées

$$F(\theta + 2\pi, r) = F(\theta, r) \implies T = 2\pi$$

L'équation moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} r(r^2 - 4)$$

alors on a $\dot{r} = \frac{1}{8} r(r^2 - 4)$ qui a les points singuliers $r = 0, r = 2, r = -2$

, l'unique racine positive est $r = 2$, $\frac{df^0}{dr}(2) = 1 > 0$ donc le cycle limite est instable, c'est un cercle de rayon 2.

Proposition 2.2.1 *Les systèmes de Liénard de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(a_1 x + \dots + a_n x^n) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (2.4)$$

avec ε suffisamment petit et $a_n \neq 0$ possède au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

et il existe des exemples avec exactement $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ cycles limites, ici $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Preuve. Posons $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ dans le système (2.4), on obtient

■

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{k=1}^n a_k r^k \cos^{k+1} \theta \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \sum_{k=1}^n a_k r^{k-1} \cos^k \theta \end{cases}$$

car $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ et $r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$

on passe à la technique

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \sum_{k=1}^n a_k r^k \cos^{k+1}(\theta) + O(\varepsilon^2)$$

j'applique la méthode

$$\begin{aligned} f^0(r) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k r^k \int_0^{2\pi} \cos^{k+1}(\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k r^k b_k \end{aligned}$$

où $b_k = \int_0^{2\pi} \cos^{k+1}(\theta) d\theta$, k impaire

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon f^0(r) \text{ et, on a}$$

$$\dot{r} = -\varepsilon \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n a_k r^k b_k \right)$$

mais

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k r^k &= a_1 b_1 r + a_3 b_3 r^3 + \dots + a_n b_n r^n = 0 \\ &= r(a_1 b_1 + a_3 b_3 r^2 + \dots + a_n b_n r^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

Comme $(n - 1)$ est pair le nombre de racines est $(n - 1)$. Mais comme $(-r)$ est aussi une racine, le nombre maximum de racines positives est $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ mais si n est impaire on a exactement $(\frac{n-1}{2})$ racines ce qui implique qu'il a au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ cycles limites.

Remarque 2.2.1 Si $f^0(r) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds = 0$, on passe à la méthode de la moyenne de deuxième ordre.

2.2.1 Application de la méthode de la moyenne du premier ordre

On étudie l'existence des cycles limites pour le système suivant (système de dimension 3) par la méthode de la moyenne du premier ordre

2.2. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DU PREMIER ORDRE

$$\dot{x} = A_0x + \varepsilon F(x) \quad (2.5)$$

pour $0 < |\varepsilon| \ll 1$ où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par

$$F(x) = Ax + \varphi(K^T x)b$$

avec $K, b \in \mathbb{R}^3 / \{0\}$, $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x \in]-\infty, -1[\\ x, & x \in [-1, 1] \\ 1, & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

telle que la variable indépendante est notée par t , et K^T est le transposé de K

le système (2.5) devient

(2.5) \implies

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &+ \varphi \left(\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} (x, y, z) \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} (x, y, z) \right) = \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)$$

donc

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon((a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z) b_1) \\ \dot{y} = x + \varepsilon((a_{21}x + a_{22}y + a_{32}z) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z) b_2) \\ \dot{z} = \varepsilon((a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z) b_3) \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques posons $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, et $z = z$
donc

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -xy + \varepsilon(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) \\ &\quad + x\varphi(K_1x + K_2y + K_3z) b_1 + xy + \varepsilon y(a_{21}x + a_{22}y + a_{32}z) \\ &\quad + y\varphi(K_1x + K_2y + K_3z) b_2 \\ &= \varepsilon(a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}zx + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{32}zy) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_1x + b_2y) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{r}((a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}zx + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{32}zy) \\ &\quad + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_1x + b_2y)) \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= xy - yx \\ &= r^2 + \varepsilon((a_{21}x^2 + a_{22}yx + a_{32}zx - a_{11}xy - a_{12}y^2 - a_{13}zy) \\ &\quad + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_2x + b_1y)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + \frac{\varepsilon}{r^2}((a_{21}x^2 + a_{22}yx + a_{32}zx - a_{11}xy - a_{12}y^2 - a_{13}zy) \\ &\quad + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_2x + b_1y)) \end{aligned} \quad (**)$$

d'après (*), (**) et selon Taylor on a

2.2. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DU PREMIER ORDRE

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{r} [(a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}zx + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{32}zy) \\
&\quad + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_1x + b_2y)] \times \\
&\quad [1 + \frac{\varepsilon}{r^2} ((a_{21}x^2 + a_{22}yx + a_{32}zx - a_{11}xy - a_{12}y^2 - a_{13}zy) \\
&\quad + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_2x + b_1y))]^{-1} \\
&= \frac{\varepsilon}{r} ((a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}zx + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{32}zy) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_1x + b_2y)) \\
&= \varepsilon(a_{11}r \cos^2(\theta) + a_{12}r \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{13}z \cos(\theta) + a_{21}r \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{22}r \sin^2(\theta) \\
&\quad + a_{32}z \sin(\theta)) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_{1\theta} \cos(\theta) + b_2 \sin(\theta)) \\
&= \varepsilon(a_{11}r \cos^2(\theta) + a_{12}r \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{13}z \cos(\theta) + a_{21}r \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{22}r \sin^2(\theta) \\
&\quad + a_{32}z \sin(\theta)) + f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)(b_{1\theta} \cos(\theta) + b_2 \sin(\theta)) \\
&= \varepsilon F_1(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned}
F_1(\theta, r, z) &= a_{11}r \cos^2(\theta) + a_{12}r \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{13}z \cos(\theta) + a_{21}r \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{22}r \sin^2(\theta) \\
&\quad + a_{32}z \sin(\theta) + f(x)(b_{1\theta} \cos(\theta) + b_2 \sin(\theta))
\end{aligned}$$

avec

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) = \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\theta} &= \varepsilon((a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z) b_3) \times \\
&\quad (1 + \frac{\varepsilon}{r^2} ((a_{21}x^2 + a_{22}yx + a_{32}zx - a_{11}xy - a_{12}y^2 - a_{13}zy) \\
&\quad + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_2x + b_1y)))^{-1} \\
&= \varepsilon((a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + \varphi(K_1x + K_2y + K_3z) b_3) (1 - \frac{\varepsilon}{r^2} ((a_{21}x^2 + a_{22}yx \\
&\quad + a_{32}zx - a_{11}xy - a_{12}y^2 - a_{13}zy) - \varphi(K_1x + K_2y + K_3z)(b_2x + b_1y))) \\
&= \varepsilon((a_{31}r \cos \theta + a_{32}r \sin \theta + a_{33}z) + b_3 \varphi(K_1r \cos \theta + K_2r \sin \theta + K_3z)) \\
&= \varepsilon F_2(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Alors (2.5) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Remarque 2.2.2 *A la place de $\varphi(K_1x + K_2y + K_3z)$, on peut considérer $\varphi(x)$. On obtient un système équivalent*

Donc les fonctions $F_1(\theta, r, z)$ et $F_2(\theta, r, z)$ deviennent

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, z) &= a_{11}r \cos^2(\theta) + a_{12}r \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{13}z \cos(\theta) + a_{21}r \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad + a_{22}r \sin^2(\theta) + a_{32}z \sin(\theta) + \varphi(r \cos(\theta))(b_{1\theta} \cos(\theta) + b_2 \sin(\theta)) \\ F_2(\theta, r, z) &= a_{31}r \cos(\theta) + a_{32}r \sin(\theta) + a_{33}z + b_3 \varphi(r \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Calculons les moyennes de F_1 et F_2

$$f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, z) d\theta$$

$$f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r, z) d\theta$$

On pose

$$I_1(r) = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \varphi(r \cos(\theta)) d\theta$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \varphi(r \cos(\theta)) d\theta$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos(\theta)) d\theta$$

On obtient

$$I_1(r) = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \varphi(r \cos(\theta)) d\theta = \begin{cases} r\pi & \text{pour } 0 < r \leq 1 \\ 2 \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} + r\pi - 2 \arctan(\sqrt{r^2 - 1}) & r > 1 \end{cases}$$

$$I_2(r) = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \varphi(r \cos(\theta)) d\theta = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) r \cos(\theta) d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0 \end{cases}$$

Alors $I_2(r) = 0, \forall r > 0$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos(\theta)) d\theta$$

Si $0 < r \leq 1$ alors $|r \cos(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in [0, 2\pi]$, ce qui implique que :

2.2. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DU PREMIER ORDRE

$\varphi(r \cos(\theta)) = r \cos(\theta)$, mais $\int_0^{2\pi} r \cos(\theta) d\theta = 0$, ce qui donne
 $\int_0^{2\pi} \varphi(r \cos(\theta)) d\theta = 0$, $0 < r \leq 1$

Si $r > 1$, soit $\theta_c \in]0, 2\pi[$ telle que $\cos(\theta_c) = \frac{1}{r}$ alors on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos(\theta)) d\theta &= \int_0^{\theta_c} d\theta + \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \cos(\theta) d\theta - \int_{\pi-\theta}^{\pi+\theta_c} d\theta + r \int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \cos(\theta) d\theta + \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} d\theta \\ &= \theta_c + (\sin(\cdot))\Big|_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} - (2\theta_c) + r(\sin(\cdot))\Big|_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} + \theta_c \\ &= \sin(\pi - \theta_c) - \sin(\theta_c) + r(\sin(2\pi - \theta_c) - \sin(\pi + \theta_c)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$f_1(r, z)$ et $f_2(r, z)$ deviennent

$$\begin{aligned} f_1(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} a_{11} r \cos^2(\theta) d\theta + b_1 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \varphi(r \cos(\theta)) d\theta + a_{22} r \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} (a_{11} r \pi) + \frac{b_1}{2\pi} I_1(r) + \frac{1}{2\pi} (a_{22} r \pi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_2(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{33} z d\theta + b_3 \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} (a_{33} z 2\pi) + \frac{b_3}{2\pi} I_3(r) \\ &= a_{33} z \end{aligned} \tag{2.7}$$

On résout le système de deux équations (2.6) et (2.7)

$$\begin{cases} \frac{r}{2} (a_{11} + a_{22}) + \frac{1}{2\pi} b_1 I_1(r) = 0 \\ a_{33} z = 0 \end{cases}$$

Si $a_{33} = 0$, il y'a une famille continue d'orbites périodiques, donc il n'existe pas des cycles limites.

Si $a_{33} \neq 0$, alors $z = 0$.

Si $0 < r \leq 1$ alors

$$\frac{r}{2}(a_{11} + a_{22}) + b_1 I_1(r) = \frac{r}{2}(a_{11} + a_{22}) + b_1 \frac{r\pi}{2\pi} = 0$$

\Rightarrow

$$\frac{r}{2}(a_{11} + a_{22} + b_1) = 0$$

si $a_{11} + a_{22} + b_1 \neq 0$ alors pas de cycle limite.

si $a_{11} + a_{22} + b_1 = 0$ alors r quelconque, donc on a un disque (*i.e*) pas de cycle limite.

Si $r > 1$ alors

$$\frac{r}{2}(a_{11} + a_{22}) + b_1 I_1(r) = \frac{r}{2}(a_{11} + a_{22}) + b_1 \left(\frac{2\sqrt{r^2 - 1}}{r} + r\pi - 2 \arctan(\sqrt{r^2 - 1}) \right) = 0$$

\Rightarrow

$$\frac{r}{2} \left\{ (a_{11} + a_{22}) + 2b_1\pi + 4b_1 \left(\frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} - \arctan(\sqrt{r^2 - 1}) \right) \right\} = 0$$

\Rightarrow

$$\frac{a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi}{4b_1} = \arctan(\sqrt{r^2 - 1}) - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} \quad (2.8)$$

La dérivée de $\left(\arctan(\sqrt{r^2 - 1}) - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} \right)$ est $\frac{2\sqrt{r^2 - 1}}{r^3} > 0$

Comme $r > 0$ alors

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left(\arctan(\sqrt{r^2 - 1}) - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} \right) = 0$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\arctan(\sqrt{r^2 - 1}) - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

c-à-d

$0 < \arctan(\sqrt{r^2 - 1}) - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} < \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\frac{a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi}{4b_1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et on a $a_{33} \neq 0$, donc l'équation (2.8) a une seule solution positive r^* si

$$a_{33} \neq 0 \text{ et } \frac{a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi}{4b_1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

2.2. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DU PREMIER ORDRE

Il faut vérifier que le déterminant de la matrice $\frac{d(f_1, f_2)}{d(r, z)}$ est différent de zéro en $(r^*, 0)$

On a

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(r, z)} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dz} & \frac{df_2}{dz} \\ \frac{df_1}{dr} & \frac{df_2}{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{33} \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi) + b_1\left(\frac{-2\sqrt{r^2-1}}{r^2} - 2\arctan(\sqrt{r^2-1})\right) & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$D = -a_{33} \left(\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi) + b_1\left(\frac{-2\sqrt{r^2-1}}{r^2} - 2\arctan(\sqrt{r^2-1})\right) \right)$$

$$\text{mais } \frac{a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi}{4b_1} = \arctan(\sqrt{r^2-1}) - \frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2}$$

donc

$$\begin{aligned} D &= -a_{33} \left(2b_1\left(\frac{a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi}{4b_1}\right) - 2b_1\left(\frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2} + \arctan(\sqrt{r^2-1})\right) \right) \quad (2.9) \\ &= 2b_1a_{33} \left(-\left(\frac{-\sqrt{r^2-1}}{r^2} + \arctan(\sqrt{r^2-1})\right) + \left(\frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2} + \arctan(\sqrt{r^2-1})\right) \right) \\ &= 2b_1a_{33} \left(2\frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2} \right) \\ &= 4b_1a_{33} \left(\frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2} \right) \neq 0 \end{aligned}$$

telle que $b_1 \neq 0$ selon (2.9), donc le déterminant est différent de zéro.

On a le résultat suivant

Théorème 2.2.2 *Le système différentiel (2.9) a un cycle limite si $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, $a_{33} \neq 0$ et $\frac{a_{11} + a_{22} + 2b_1\pi}{4b_1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$.*

2.2.2 Autre méthode de la moyenne du premier ordre

On considère le système

$$\dot{x}(t) = F_0(t; x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon) \quad (2.10)$$

CHAPITRE 2. LES ORBITES PÉRIODIQUES PAR LA MÉTHODE DE
LA MOYENNE

avec $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : R \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : R \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont de classe C^2 , T -périodiques en le premier variable, et Ω est une sous ensemble ouverte de \mathbb{R}^n . Le système inperturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t; x) \quad (2.11)$$

a une sous variété des solutions périodiques. La solution de ce système (2.11) est donnée par la méthode de la moyenne.

Soit $X(t, z)$ la solution du système inperturbé (2.11) telle que $X(0, z) = z$. Le système linéarisé sur le long de la solution périodique $X(t, z)$ est

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z))y \quad (2.12)$$

Soit $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système (2.12) et $\zeta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^k c-a-d $\zeta(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

Théorème 2.2.3 *Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ ouvert et borné, et soit $\beta_0 : CI(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2 .*

On suppose que

1) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)); \alpha \in CI(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $X(t, z_\alpha)$ du système (2.11) est T -périodique.

2) Pour chaque $z_\alpha \in Z$ il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.12) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a $k \times (n-k)$ matrices nulles dans la partie droite supérieure et dans la partie droite inférieure a $(n-k) \times (n-k)$ matrices Δ_α telle que $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $F : CI(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$F(\alpha) = \zeta \left(\int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, X(t, z_\alpha)) dt \right)$$

S'il existe $a \in V$ avec $F(a) = 0$ et $\det\left(\frac{dF}{d\alpha}(a)\right) \neq 0$, alors il existe une solution $\varphi(0, \varepsilon)$ du système (2.10) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Preuve. Voir [6] ■

2.3 La méthode de la moyenne du second ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions d'un certain système différentiel périodique.

Théorème 2.3.1 *On considère les deux problèmes à valeurs initiales suivantes*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x) + \varepsilon^3 h(t, x, \varepsilon) \quad , x(0) = x_0. \quad (2.13)$$

et

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y) \quad , y(0) = x_0. \quad (2.14)$$

avec $f : [0, \infty[\times D \rightarrow G$ et $g : [0, \infty[\times G \times]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$, D un ouvert de \mathbb{R} , f, g et h sont T -périodiques, et

$$f^1(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x). \quad (2.15)$$

où

$$y^1(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds + z(x). \quad (2.16)$$

avec $z(x)$ une fonction de classe C^1 telle que la moyenne de y^1 est égale à zéro. En outre f^0, f^{10} et g^0 dénotent les fonctions moyennées de f, f^1 et g respectivement. Supposons que

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}$ est lipchitzienne en x et toutes ces fonctions sont continues sur leurs domaine de définition.

(ii) $|h(t, x, \varepsilon)|$ est uniformément bornée par une constante dans $[0, \frac{L}{\varepsilon}[\times D \times]0, \varepsilon_0]$;

(iii) T est indépendant de ε ;

(iv) $y(t)$ appartient à D dans la durée $\frac{1}{\varepsilon}$. Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + o(\varepsilon^2) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Supposons que $f^0(y) \equiv 0$, alors les affirmations suivantes sont satisfaites

(a) Si p est le point critique du système moyenné (2.7) telle que :

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))(p) \neq 0. \quad (2.17)$$

donc, il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2.6) telle que

$$\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(b) Si le point critique $y = p$ de système moyenné (2.7) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit la solution périodique $\phi(t, \varepsilon)$ correspondante du système (2.6) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p .

Preuve. Voir théorème 3.5.1 de Shafaravich et voir aussi [3] ■

On applique la méthode pour étudier les solutions périodiques qui bifurquent à partir de l'origine (bifurcation de Hopf) du système quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2 + \varepsilon^2 a_1 x \\ \dot{y} = x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2 + \varepsilon^2 a_1 y \end{cases} \quad (2.18)$$

$\varepsilon = 0$ et si $a_1 \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) > 0$, on a le résultat

Proposition 2.3.1 Si $a_1 \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) > 0$ alors pour $\varepsilon = 0$ on a un cycle limite bifurquant de l'origine du système (2.13) (bifurcation de Hopf).

Pour $\varepsilon > 0$ cet cycle limite en coordonnées polaires est donnée par

$$r(\theta, \varepsilon) = \varepsilon \delta_0 + \varepsilon^2 c(\theta) \delta_0^2 + O(\varepsilon^3)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 2\sqrt{\frac{2a_1}{\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6)}} \\ c(\theta) &= -\frac{1}{12}[3\lambda_5 \cos \theta + (4\lambda_2 + \lambda_5) \cos 3\theta + 3(\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6) \sin \theta + (3\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \sin 3\theta] \end{aligned}$$

Dans les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ le système (2.13) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \lambda_1 r + a(\theta)r^2 \\ \dot{\theta} = 1 + b(\theta)r \end{cases} \quad (2.19)$$

où

$$a(\theta) = -\lambda_3 \cos \theta + (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos^2 \theta \sin \theta + (2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \cos \theta \sin^2 \theta - \lambda_2 \sin^3 \theta$$

2.3. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DU SECOND ORDRE

$$b(\theta) = \lambda_2 \cos^3 \theta + (3\lambda_3 + \lambda_4) \cos^2 \theta \sin \theta - (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos \theta \sin^2 \theta - \lambda_6 \sin^3 \theta$$

On remarque que a et b sont des polynômes homogènes de degré 3 en les variables $\cos \theta$ et $\sin \theta$

Dans la région $R = \{(r, \theta), 1 + b(\theta)r > 0\}$ le système différentiel (2.18) est équivalent à l'équation différentielle

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda_1 r + a(\theta)r^2}{1 + b(\theta)r} \quad (2.20)$$

La transformation $(r, \theta) \rightarrow (\rho, \theta)$ avec $\rho = \frac{r}{1 + b(\theta)r}$ est un difféomorphisme de \mathbb{R} dans l'image de \mathbb{R} .

L'équation (2.20) s'écrit

$$\frac{d\rho}{d\theta} = A(\theta)\rho^3 + B(\theta)\rho^2 + \lambda_1\rho = b(\theta)(\lambda_1 b(\theta) - a(\theta))\rho^3 + (a(\theta) - \dot{b}(\theta) - 2\lambda_1 b(\theta))\rho^2 + \lambda_1\rho$$

Maintenant pour appliquer la méthode sur l'équation du système (2.20). Soit le changement de variable $\rho = \delta\varepsilon$ l'équation devient

$$\frac{d\delta}{d\theta} = \varepsilon(a(\theta) - \dot{b}(\theta))\delta^2 + \varepsilon^2(a_1 - a(\theta)b(\theta)\delta^2)\delta + \varepsilon^3(-2 + b(\theta)\delta)a_1 b(\theta)\delta^2$$

c'est un cas particulier du système (2.13) telle que

$$\begin{cases} f(\theta, \delta) = (a(\theta) - \dot{b}(\theta))\delta^2 \\ g(\theta, \delta) = a_1\delta - a(\theta)b(\theta)\delta^3 \\ R(\theta, \delta) = -2a_1b(\theta)\delta^2 + \varepsilon a_1 b(\theta)^2\delta^3 \end{cases}$$

Il est clair que les fonctions F, G et R satisfaites tous les hypothèses du théorème de la moyenne du second ordre avec $T = 2\pi$.

Après le calcul on trouve

$$f^0(\delta) = 0$$

$$y^1(\theta, \delta) = \frac{1}{3}(3(\lambda_3 - \lambda_6) \sin \theta + (3\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \sin 3\theta + (4\lambda_2 + \lambda_5))$$

$$f^0(\delta) = 0$$

$$g^0(\delta) = \frac{1}{8}\delta(8a_1 + \lambda_5(\lambda_6 - \lambda_3))\delta^2$$

Par la méthode on déduit que si $a_1\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6) > 0$ alors l'équation a une solution périodique de période 2π qui est fermée pour $\delta_0 = 2\sqrt{\frac{2a_1}{\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6)}}$ et $\delta(\theta, \varepsilon) \rightarrow \delta_0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Plus précisément par la méthode de la moyenne du second ordre, on obtient

$$\delta(\theta, \varepsilon) = \delta_0 + \varepsilon y^1(\theta, \delta) + O(\varepsilon^2)$$

Donc en revenant à l'équation

$$\frac{d\rho}{d\theta} = A(\theta)\rho^3 + B(\theta)\rho^2 + \lambda_1\rho \quad (2.21)$$

A une solution 2π -périodique, $\rho(\theta, \varepsilon) = \delta(\theta, \varepsilon)$ proche de $\rho_0 = \delta_0\varepsilon$ telle que $\rho(\theta, \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Finalement retournant à l'équation (2.20) qui a une solution 2π -périodique

$$r(\theta, \varepsilon) = \frac{\varepsilon\delta(\theta, \varepsilon)}{1 - \varepsilon b(\theta)\delta(\theta, \varepsilon)} \quad (2.22)$$

telle que $r(\theta, \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Donc cette solution périodique $r(\theta, \varepsilon)$ est créée par bifurcation de Hopf à l'origine du système (2.18) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ toujours le coefficient du système satisfait : $a_1\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6) > 0$. La proposition est prouvée lorsqu'on développe l'équation (2.22) en série de Taylor par rapport à ε , c-à-d on trouve l'expression (2.13), par conséquent la proposition est prouvée.

2.4 La méthode de la moyenne du troisième ordre

Théorème 2.4.1 *Soit le système différentiel*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 R(t, x, \varepsilon) \quad (2.23)$$

2.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DU TROISIÈME ORDRE

où F_1, F_2 et $F_3 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, T-périodique en t , D un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

On suppose que

(i) $F_1(t, \cdot) \in C^2(D)$, $F_2(t, \cdot) \in C^1(D)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2, F_3, R, D_x^2 F_1$ et $D_x F_2$ sont localement lipchitziennes par rapport à x , R est deux fois dérivable par rapport à ε .

on prend $f_1, f_2, f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$

et

$$f_3(z) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z^2}(s, z) (y_1(s, z))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_2(s, z) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(s, z) y_1(s, z) + F_3(s, z) \right] ds$$

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt$$

$$y_2(s, z) = \int_0^s \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \int_0^t F_1(r, z) dr + F_2(t, z) \right] dt$$

de plus, en suppose que

(ii) pour $V \subset D$ une intervalle ouvert bornée de \mathbb{R} et $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que $(f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3)(a_\varepsilon) = 0$ et $d_B(f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3, V, 0) \neq 0$ alors pour $|\varepsilon| \succ 0$ suffisamment petit, il existe une solution T-périodique $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ de (2.22)

Preuve. Voir [2]. ■

Chapitre 3

Perturbation d'un centre linéaire par des polynômes de degré 4

3.1 Résumé

Dans ce chapitre ,on s'intéresse à la recherche du nombre maximum de cycles limites des systèmes linéaires perturbés par des polynômes de degré quatre dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , en utilisant la méthode de la moyenne du premier ordre et second ordre .On donne aussi des exemples.

3.2 la méthode de la moyenne de premier ordre dans \mathbb{R}^2

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3 + a_{0,2}y^2 + a_{0,1}y + a_{0,0} + a_{1,1}xy + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 \\ \quad + a_{1,3}xy^3 + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{4,0}x^4 + a_{4,0}x^4 + a_{2,1}x^2y + a_{1,0}x + a_{3,1}x^3y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}y + b_{0,0} + b_{1,1}xy + b_{1,2}xy^2 + b_{2,2}x^2y^2 \\ \quad + b_{1,3}xy^3 + b_{2,0}x^2 + b_{3,0}x^3 + b_{4,0}x^4 + b_{4,0}x^4 + b_{2,1}x^2y + b_{1,0}x + b_{3,1}x^3y) \end{cases} \quad (3.1)$$

dans les coordonnées polaires on a $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système

(3.1) s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{r} = \epsilon(\cos(\theta) a_{0,2} r^2 + (\cos(\theta))^5 b_{1,3} r^4 + b_{0,3} r^3 + \cos(\theta) a_{0,4} r^4 \\
 + a_{2,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + a_{3,0} r^3 (\cos(\theta))^4 + a_{4,0} r^4 (\cos(\theta))^5 \\
 + a_{1,0} r (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) b_{0,0} + \cos(\theta) a_{0,0} + a_{1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
 + a_{2,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + a_{3,1} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) \\
 + \cos(\theta) a_{0,1} r \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{2,0} r^2 (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) b_{3,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \\
 + \sin(\theta) b_{4,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + \sin(\theta) b_{1,0} r \cos(\theta) + b_{0,1} r \\
 + \cos(\theta) b_{1,3} r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4} r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3} r^4 \\
 - 2 (\cos(\theta))^2 b_{0,3} r^3 - (\cos(\theta))^5 b_{3,1} r^4 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2} r^4 \\
 - (\cos(\theta))^4 b_{2,1} r^3 - (\cos(\theta))^4 a_{1,2} r^3 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2} r^2 \\
 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1} r^2 + (\cos(\theta))^5 a_{0,4} r^4 + (\cos(\theta))^4 b_{0,3} r^3 \\
 - (\cos(\theta))^2 b_{0,1} r + (\cos(\theta))^3 b_{3,1} r^4 + (\cos(\theta))^3 a_{2,2} r^4 \\
 + (\cos(\theta))^2 b_{2,1} r^3 + (\cos(\theta))^2 a_{1,2} r^3 + \cos(\theta) b_{1,1} r^2 \\
 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3} r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2} r^4 \\
 + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3} r^3 + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2} r^3 - 2 \sin(\theta) b_{0,4} r^4 (\cos(\theta))^2 \\
 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3} r^3 \\
 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2} r^3 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4} r^4 \\
 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2} r^2 + \sin(\theta) b_{0,4} r^4 + \sin(\theta) b_{0,2} r^2) \\
 \dot{\theta} = 1 + \epsilon(-a_{0,1} + \cos(\theta) b_{0,1} \sin(\theta) + r^2 (\cos(\theta))^4 a_{2,1} - \frac{\sin(\theta) a_{0,0}}{r} \\
 + r^3 b_{2,2} (\cos(\theta))^3 + r^3 (\cos(\theta))^5 a_{3,1} + r^2 b_{1,2} (\cos(\theta))^2 \\
 - r (\cos(\theta))^3 b_{0,2} + r^2 b_{3,0} (\cos(\theta))^4 - r^3 a_{3,1} (\cos(\theta))^3 \\
 + r b_{2,0} (\cos(\theta))^3 + r (\cos(\theta))^3 a_{1,1} - r^2 (\cos(\theta))^4 a_{0,3} \\
 + r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{2,2} + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3} \\
 + 2 r^3 (\cos(\theta))^3 a_{1,3} + r \cos(\theta) b_{0,2} + r^3 \cos(\theta) b_{0,4} \\
 - r^2 (\cos(\theta))^4 b_{1,2} - r^3 a_{1,3} \cos(\theta) + 2 r^2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3} \\
 - r^3 (\cos(\theta))^5 b_{2,2} + \frac{\cos(\theta) b_{0,0}}{r} - r a_{1,1} \cos(\theta) - r^3 (\cos(\theta))^5 a_{1,3} \\
 - 2 r^3 (\cos(\theta))^3 b_{0,4} + r^3 (\cos(\theta))^5 b_{0,4} - r^2 a_{2,1} (\cos(\theta))^2 \\
 + r^3 b_{4,0} (\cos(\theta))^5 - r \sin(\theta) a_{0,2} - r^3 \sin(\theta) a_{0,4} - \sin(\theta) a_{1,0} \cos(\theta) \\
 - r^2 a_{0,3} + (\cos(\theta))^2 a_{0,1} + b_{1,0} (\cos(\theta))^2 - r^2 \sin(\theta) a_{3,0} (\cos(\theta))^3 \\
 - r \sin(\theta) a_{2,0} (\cos(\theta))^2 + r b_{1,1} (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + r^2 b_{2,1} (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
 + r^3 b_{3,1} (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) + r \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2} + r^3 \sin(\theta) b_{1,3} (\cos(\theta))^2 \\
 + r^2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{1,2} - r^3 \sin(\theta) a_{2,2} (\cos(\theta))^2 \\
 - r^3 \sin(\theta) a_{4,0} (\cos(\theta))^4 - r^2 \sin(\theta) a_{1,2} \cos(\theta) + 2 r^3 \sin(\theta) a_{0,4} (\cos(\theta))^2 \\
 - r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{1,3} - r^2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{0,3} - r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{0,4}
 \end{array} \right.$$

pour appliquer la méthode de la moyenne on utilise la technique

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\theta} = & (-2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3}r^4 + \sin(\theta) b_{0,2}r^2 + \sin(\theta) b_{0,0} + a_{2,0}r^2 (\cos(\theta))^3 \\
 & + a_{4,0}r^4 (\cos(\theta))^5 + a_{1,0}r (\cos(\theta))^2 + a_{3,0}r^3 (\cos(\theta))^4 \\
 & + \cos(\theta) a_{0,0} + a_{1,1}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + a_{2,1}r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
 & + a_{3,1}r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) + \cos(\theta) a_{0,1}r \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{2,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \\
 & + \sin(\theta) b_{3,0}r^3 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{4,0}r^4 (\cos(\theta))^4 \\
 & + \sin(\theta) b_{1,0}r \cos(\theta) + b_{0,1}r - (\cos(\theta))^2 b_{0,1}r - (\cos(\theta))^4 a_{1,2}r^3 \\
 & + b_{0,3}r^3 + \cos(\theta) a_{0,4}r^4 + \cos(\theta) b_{1,3}r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4}r^4 \\
 & - 2 (\cos(\theta))^2 b_{0,3}r^3 - (\cos(\theta))^5 b_{3,1}r^4 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2}r^4 \\
 & - (\cos(\theta))^4 b_{2,1}r^3 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2}r^2 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1}r^2 \\
 & + (\cos(\theta))^5 a_{0,4}r^4 + (\cos(\theta))^5 b_{1,3}r^4 + (\cos(\theta))^4 b_{0,3}r^3 \\
 & + (\cos(\theta))^3 b_{3,1}r^4 + (\cos(\theta))^3 a_{2,2}r^4 + (\cos(\theta))^2 b_{2,1}r^3 \\
 & + \cos(\theta) a_{0,2}r^2 + (\cos(\theta))^2 a_{1,2}r^3 + \cos(\theta) b_{1,1}r^2 \\
 & + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2}r^4 \\
 & + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3}r^3 + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2}r^3 - 2 \sin(\theta) b_{0,4}r^4 (\cos(\theta))^2 \\
 & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3}r^3 \\
 & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2}r^3 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4}r^4 \\
 & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2}r^2 + \sin(\theta) b_{0,4}r^4 \epsilon + O(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon F_1(r, \theta) + O(\epsilon^2)$$

alors

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = \frac{1}{8} r (4 b_{0,1} + 3 b_{0,3}r^2 + b_{2,1}r^2 + a_{1,2}r^2 + 3 a_{3,0}r^2 + 4 a_{1,0})$$

Donc le système (3.1) a au plus un cycle limite.

exemple 3.2.1 On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon(x + 2xy^2) \\ \dot{y} = x + \epsilon(-3y + 6x^2y^2) \end{cases} \quad (3.2)$$

En coordonnées polaires on trouve

$$\begin{cases} \dot{r} = (6r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 6r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 4r \cos^2(\theta) - 2r^3 \cos^4(\theta) \\ \quad + 2r^3 \cos^2(\theta) - 3r)\epsilon \\ \dot{\theta} = 1 + (2 \sin(\theta)r^2 \cos^3(\theta) - 4 \cos(\theta) \sin(\theta) - 2 \sin(\theta)r^2 \cos(\theta) \\ \quad - 6 \cos^5(\theta)r^3 + 6r^3 \cos^3(\theta))\epsilon \end{cases}$$

3.2. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE PREMIER ORDRE DANS \mathbb{R}^2

Ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = (6r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 6r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 4r \cos^2(\theta) - 2r^3 \cos^4(\theta) + 2r^3 \cos^2(\theta) - 3r)\varepsilon + O(\varepsilon)$$

telle que

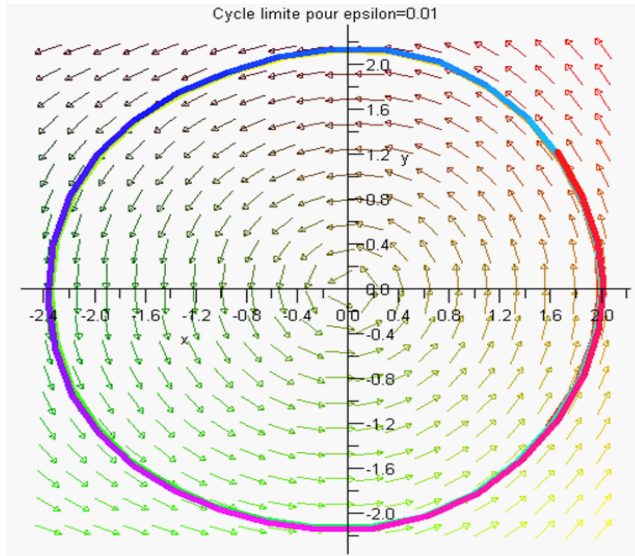
$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2)$$

On peut appliquer la méthode de la moyenne

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = \frac{1}{4} r(-4 + r^2)$$

$$f_1(r) = 0 \Rightarrow r = 0, -2, 2$$

Donc, on a un seul cycle limite stable pour $r = 2$ parceque $\frac{df_1}{dr}(2) = -\frac{1}{4}$



3.3 la méthode de la moyenne de premier ordre dans \mathbb{R}^3

On considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y + \varepsilon(a_{1,1,1}xyz + a_{2,1,1}x^2yz + a_{1,2,1}xy^2z + a_{1,1,2}xyz^2 + a_{2,2,0}x^2y^2 + a_{0,1,3}yz^3 \\ \quad + a_{1,0,2}xz^2 + a_{1,0,1}xz + a_{3,0,1}x^3z + a_{0,0,1}z + a_{0,0,2}z^2 + a_{0,0,3}z^3 + a_{0,0,4}z^4 + a_{0,0,0} \\ \quad + a_{1,1,0}xy + a_{2,1,0}x^2y + a_{1,2,0}xy^2 + a_{1,3,0}xy^3 + a_{2,0,1}x^2z + a_{3,0,1}x^3z + a_{1,0,0}x + a_{2,0,0}x^2 \\ \quad + a_{3,0,0}x^3 + a_{4,0,0}x^4 + a_{0,1,0}y + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,3,0}y^3 + a_{0,4,0}y^4 + a_{0,1,1}yz + a_{0,2,1}y^2z \\ \quad + a_{0,3,1}y^3z + a_{2,0,2}x^2z^2 + a_{0,1,2}yz^2 + a_{0,2,2}y^2z^2 + a_{1,0,3}xy^3) \\ \dot{y} = -y + \varepsilon(b_{1,1,1}xyz + b_{2,1,1}x^2yz + b_{1,2,1}xy^2z + b_{1,1,2}xyz^2 + b_{2,2,0}x^2y^2 + b_{0,1,3}yz^3 \\ \quad + b_{1,0,2}xz^2 + b_{1,0,1}xz + b_{3,0,1}x^3z + b_{0,0,1}z + b_{0,0,2}z^2 + b_{0,0,3}z^3 + b_{0,0,4}z^4 + b_{0,0,0} \\ \quad + b_{1,1,0}xy + b_{2,1,0}x^2y + b_{1,2,0}xy^2 + b_{1,3,0}xy^3 + b_{2,0,1}x^2z + b_{3,0,1}x^3z + b_{1,0,0}x + b_{2,0,0}x^2 \\ \quad + b_{3,0,0}x^3 + b_{4,0,0}x^4 + b_{0,1,0}y + b_{0,2,0}y^2 + b_{0,3,0}y^3 + b_{0,4,0}y^4 + b_{0,1,1}yz + b_{0,2,1}y^2z \\ \quad + b_{0,3,1}y^3z + b_{2,0,2}x^2z^2 + b_{0,1,2}yz^2 + b_{0,2,2}y^2z^2 + b_{1,0,3}xy^3) \\ \dot{z} = \varepsilon(c_{1,1,1}xyz + c_{2,1,1}x^2yz + c_{1,2,1}xy^2z + c_{1,1,2}xyz^2 + c_{2,2,0}x^2y^2 + c_{0,1,3}yz^3 \\ \quad + c_{1,0,2}xz^2 + c_{1,0,1}xz + c_{3,0,1}x^3z + c_{0,0,1}z + c_{0,0,2}z^2 + c_{0,0,3}z^3 + c_{0,0,4}z^4 + c_{0,0,0} \\ \quad + c_{1,1,0}xy + c_{2,1,0}x^2y + c_{1,2,0}xy^2 + c_{1,3,0}xy^3 + c_{2,0,1}x^2z + c_{3,0,1}x^3z + c_{1,0,0}x + c_{2,0,0}x^2 \\ \quad + c_{3,0,0}x^3 + c_{4,0,0}x^4 + c_{0,1,0}y + c_{0,2,0}y^2 + c_{0,3,0}y^3 + c_{0,4,0}y^4 + c_{0,1,1}yz + c_{0,2,1}y^2z \\ \quad + c_{0,3,1}y^3z + c_{2,0,2}x^2z^2 + c_{0,1,2}yz^2 + c_{0,2,2}y^2z^2 + c_{1,0,3}xy^3) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Dans les coordonnées cylindriques on a $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $z = z$ le système (3.3) s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \phi_1(r, \theta, z) \\ \dot{\theta} = \phi_2(r, \theta, z) \\ \dot{z} = \phi_3(r, \theta, z) \end{array} \right.$$

Où

$$\begin{aligned}
 \phi_1(r, \theta, z) = & \cos(\theta) a_{0,1,0} r \sin(\theta) - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,1} r^2 z - (\cos(\theta))^4 a_{1,2,1} r^3 z \\
 & - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,1} r^2 z - (\cos(\theta))^4 b_{2,1,1} r^3 z - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,2} r^2 z^2 \\
 & + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,0} r^3 - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,3} r z^3 + (\cos(\theta))^4 b_{0,3,1} r^3 z \\
 & + b_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + a_{1,2,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + a_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 \\
 & + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,0} r^3 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3,0} r^4 \\
 & + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2,0} r^4 - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,1} r z \\
 & + \sin(\theta) b_{0,2,1} r^2 z + a_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,2} r z^2 \\
 & + \sin(\theta) b_{0,2,2} r^2 z^2 + b_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) z^2 + b_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) z \\
 & + \cos(\theta) a_{0,2,1} r^2 z + \cos(\theta) a_{0,2,2} r^2 z^2 + a_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z \\
 & + a_{1,2,0} r^3 (\cos(\theta))^2 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2,0} r^4 - (\cos(\theta))^4 a_{1,2,0} r^3 \\
 & + a_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + a_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^4 - (\cos(\theta))^4 b_{2,1,0} r^3 \\
 & - (\cos(\theta))^5 b_{3,1,0} r^4 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,0} r^2 + a_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^5 \\
 & + b_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 + a_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z + \cos(\theta) a_{0,0,4} z^4 \\
 & + b_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) + \cos(\theta) a_{0,0,1} z - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,0} r^2 \\
 & + \cos(\theta) a_{0,0,3} z^3 - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,0} r + \sin(\theta) b_{0,0,2} z^2 \\
 & + \sin(\theta) b_{0,0,4} z^4 + (\cos(\theta))^5 a_{0,4,0} r^4 + a_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 \\
 & + (\cos(\theta))^5 b_{1,3,0} r^4 + a_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{0,4,0} r^4 \\
 & + a_{1,0,0} r (\cos(\theta))^2 + \cos(\theta) a_{0,0,2} z^2 + \sin(\theta) b_{0,0,3} z^3 \\
 & + b_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 + \cos(\theta) a_{0,4,0} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3,0} r^4 \\
 & + a_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 + a_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 z + b_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) \\
 & + \cos(\theta) a_{0,2,0} r^2 + b_{0,1,3} r z^3 + a_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{0,2,0} r^2 \\
 & + a_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{0,0,1} z + (\cos(\theta))^4 b_{0,3,0} r^3 \\
 & + b_{0,3,1} r^3 z + b_{0,1,2} r z^2 + b_{0,1,1} r z - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4,0} r^4 \\
 & - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3,0} r^4 - 2 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,0} r^3 + \sin(\theta) b_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \\
 & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,0} r^3 + b_{0,1,0} r + b_{0,3,0} r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,0} r^3 \\
 & + \cos(\theta) a_{0,0,0} + \cos(\theta) a_{0,1,1} r \sin(\theta) z + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,1} r^3 z \\
 & + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,1} r^3 z + \cos(\theta) a_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 \\
 & + a_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + \sin(\theta) b_{0,0,0} + \sin(\theta) b_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \\
 & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2,0} r^4 + \cos(\theta) a_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 + \sin(\theta) b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
 & + a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z + \sin(\theta) b_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 + \sin(\theta) b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z \\
& + \sin(\theta) b_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,1} r^3 z \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,1} r^3 z + \sin(\theta) b_{1,0,1} r \cos(\theta) z \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,1} r^2 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z + \sin(\theta) b_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4,0} r^4 + \sin(\theta) b_{1,0,0} r \cos(\theta) \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,0} r^2 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& - 2 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,1} r^3 z - 2 \sin(\theta) b_{0,4,0} r^4 (\cos(\theta))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(r, \theta, z) = & 1 + ((\cos(\theta))^3 a_{1,1,2} r^2 z^2 - (\cos(\theta))^4 a_{0,3,1} r^3 z - \sin(\theta) a_{0,2,1} r^2 z \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,0} r^2 + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,3} r z^3 \\
& + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,1} r^2 z + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,2} r z^2 - \sin(\theta) a_{1,0,0} r \cos(\theta) \\
& - a_{0,3,0} r^3 - a_{0,1,0} r + \cos(\theta) b_{0,0,0} - \sin(\theta) a_{0,0,0} - \sin(\theta) a_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& - \sin(\theta) a_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z - \sin(\theta) a_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{1,2,1} r^3 z + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,1} r^2 z \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,2} r^2 z^2 + \cos(\theta) b_{0,1,1} r \sin(\theta) z \\
& + \cos(\theta) b_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 + b_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
& + b_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z + b_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 \\
& - \sin(\theta) a_{1,2,1} r^3 \cos(\theta) z + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3,1} r^3 z + 2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3,0} r^3 \\
& - 2 (\cos(\theta))^3 b_{0,4,0} r^4 + 2 (\cos(\theta))^3 a_{1,3,0} r^4 + \cos(\theta) b_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 \\
& + b_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^3 + \cos(\theta) b_{0,2,0} r^2 - (\cos(\theta))^5 b_{2,2,0} r^4 - a_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 \\
& + b_{1,2,0} r^3 (\cos(\theta))^2 - a_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 - a_{0,3,1} r^3 z - a_{0,1,1} r z \\
& - a_{0,1,2} r z^2 - a_{0,1,3} r z^3 - (\cos(\theta))^4 b_{1,2,0} r^3 - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,0} r^2 \\
& - (\cos(\theta))^5 a_{1,3,0} r^4 - (\cos(\theta))^4 a_{0,3,0} r^3 - \sin(\theta) a_{0,4,0} r^4 \\
& - \sin(\theta) a_{0,2,0} r^2 + b_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^5 + b_{1,0,0} r (\cos(\theta))^2 \\
& + b_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + b_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^4 + \cos(\theta) b_{0,0,1} z \\
& + \cos(\theta) b_{0,0,4} z^4 + \cos(\theta) b_{0,0,2} z^2 + \cos(\theta) b_{0,0,3} z^3 - \sin(\theta) a_{0,0,2} z^2 \\
& - \sin(\theta) a_{0,0,4} z^4 - \sin(\theta) a_{0,0,3} z^3 - \sin(\theta) a_{0,0,1} z + (\cos(\theta))^5 a_{3,1,0} r^4 \\
& + (\cos(\theta))^4 a_{2,1,0} r^3 + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,0} r^2 + (\cos(\theta))^5 b_{0,4,0} r^4 + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,0} r \\
& + \cos(\theta) b_{0,4,0} r^4 - \sin(\theta) a_{1,0,1} r \cos(\theta) z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{0,3,1} r^3 z
\end{aligned}$$

3.3. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE PREMIER ORDRE DANS

\mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& -\sin(\theta) a_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 - \sin(\theta) a_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2 - \sin(\theta) a_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& -\sin(\theta) a_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 - \sin(\theta) a_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 - (\cos(\theta))^4 b_{1,2,1} r^3 z \\
& - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,1} r^2 z - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,2} r^2 z^2 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{2,2,0} r^4 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{1,2,0} r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{0,4,0} r^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{1,3,0} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{0,3,0} r^3 \\
& - \sin(\theta) a_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^2 - \sin(\theta) a_{1,2,0} r^3 \cos(\theta) + \sin(\theta) b_{1,3,0} r^4 (\cos(\theta))^2 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3,0} r^3 + b_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) + b_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
& + b_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + \cos(\theta) b_{0,1,0} r \sin(\theta) + (\cos(\theta))^4 a_{2,1,1} r^3 z \\
& - \sin(\theta) a_{0,2,2} r^2 z^2 + b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z + b_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 \\
& + b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 + b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z + b_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + b_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 z - a_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) z^2 + \cos(\theta) b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& + \cos(\theta) b_{0,2,1} r^2 z + b_{1,2,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z - a_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) z \\
& - a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + 2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3,1} r^3 z + 2 \sin(\theta) a_{0,4,0} r^4 (\cos(\theta))^2 \\
& + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,1} r z - a_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) - a_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) \frac{\varepsilon}{r}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\phi_3(r, \theta, z) = & \varepsilon (c_{0,4,0} r^4 (\sin(\theta))^4 + c_{0,3,0} r^3 (\sin(\theta))^3 + c_{0,2,0} r^2 (\sin(\theta))^2 + c_{0,1,0} r \sin(\theta) \\
& + c_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + c_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 + c_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + c_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) (\sin(\theta))^3 + c_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& + c_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + c_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z + c_{0,0,1} z \\
& + c_{0,0,3} z^3 + c_{1,2,1} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 z + c_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 \\
& + c_{0,0,4} z^4 + c_{0,0,0} + c_{1,0,0} r \cos(\theta) + c_{0,0,2} z^2 + c_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& + c_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 + c_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 + c_{0,3,1} r^3 (\sin(\theta))^3 z \\
& + c_{0,2,2} r^2 (\sin(\theta))^2 z^2 + c_{0,1,1} r \sin(\theta) z + c_{0,2,1} r^2 (\sin(\theta))^2 z \\
& + c_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 + c_{1,2,0} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 + c_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
& + c_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 + c_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2 + c_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 \\
& + c_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z + c_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z + c_{1,0,1} r \cos(\theta) z
\end{aligned}$$

Où d'une manière équivalente

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Tel que

$$\begin{aligned}
F_1(r, \theta, z) = & \cos(\theta) a_{0,1,0} r \sin(\theta) - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,1} r^2 z - (\cos(\theta))^4 a_{1,2,1} r^3 z \\
& - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,1} r^2 z - (\cos(\theta))^4 b_{2,1,1} r^3 z - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,0} r^3 - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,3} r z^3 + (\cos(\theta))^4 b_{0,3,1} r^3 z \\
& + b_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + a_{1,2,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + a_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,0} r^3 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3,0} r^4 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2,0} r^4 - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,1} r z \\
& + \sin(\theta) b_{0,2,1} r^2 z + a_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,2} r z^2 \\
& + \sin(\theta) b_{0,2,2} r^2 z^2 + b_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) z^2 + b_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) z \\
& + \cos(\theta) a_{0,2,1} r^2 z + \cos(\theta) a_{0,2,2} r^2 z^2 + a_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z \\
& + a_{1,2,0} r^3 (\cos(\theta))^2 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2,0} r^4 - (\cos(\theta))^4 a_{1,2,0} r^3 \\
& + a_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + a_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^4 - (\cos(\theta))^4 b_{2,1,0} r^3 \\
& - (\cos(\theta))^5 b_{3,1,0} r^4 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,0} r^2 + a_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^5 \\
& + b_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 + a_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z + \cos(\theta) a_{0,0,4} z^4 \\
& + b_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) + \cos(\theta) a_{0,0,1} z - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,0} r^2 \\
& + \cos(\theta) a_{0,0,3} z^3 - (\cos(\theta))^2 b_{0,1,0} r + \sin(\theta) b_{0,0,2} z^2 \\
& + \sin(\theta) b_{0,0,4} z^4 + (\cos(\theta))^5 a_{0,4,0} r^4 + a_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 \\
& + (\cos(\theta))^5 b_{1,3,0} r^4 + a_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{0,4,0} r^4 \\
& + a_{1,0,0} r (\cos(\theta))^2 + \cos(\theta) a_{0,0,2} z^2 + \sin(\theta) b_{0,0,3} z^3 \\
& + b_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 + \cos(\theta) a_{0,4,0} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3,0} r^4 \\
& + a_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 + a_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 z + b_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) \\
& + \cos(\theta) a_{0,2,0} r^2 + b_{0,1,3} r z^3 + a_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{0,2,0} r^2 \\
& + a_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{0,0,1} z + (\cos(\theta))^4 b_{0,3,0} r^3 \\
& + b_{0,3,1} r^3 z + b_{0,1,2} r z^2 + b_{0,1,1} r z - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4,0} r^4 \\
& - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3,0} r^4 - 2 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,0} r^3 + \sin(\theta) b_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,0} r^3 + b_{0,1,0} r + b_{0,3,0} r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,0} r^3 \\
& + \cos(\theta) a_{0,0,0} + \cos(\theta) a_{0,1,1} r \sin(\theta) z + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,1} r^3 z \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,1} r^3 z + \cos(\theta) a_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 \\
& + a_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + \sin(\theta) b_{0,0,0} + \sin(\theta) b_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2,0} r^4 + \cos(\theta) a_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 + \sin(\theta) b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z + \sin(\theta) b_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2
\end{aligned}$$

3.3. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE PREMIER ORDRE DANS

\mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& + a_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 + \sin(\theta) b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z \\
& + \sin(\theta) b_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,1} r^3 z \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,1} r^3 z + \sin(\theta) b_{1,0,1} r \cos(\theta) z \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,1} r^2 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z + \sin(\theta) b_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4,0} r^4 + \sin(\theta) b_{1,0,0} r \cos(\theta) \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,0} r^2 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& - 2 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,1} r^3 z - 2 \sin(\theta) b_{0,4,0} r^4 (\cos(\theta))^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta, z) = & \varepsilon (c_{0,4,0} r^4 (\sin(\theta))^4 + c_{0,3,0} r^3 (\sin(\theta))^3 + c_{0,2,0} r^2 (\sin(\theta))^2 + c_{0,1,0} r \sin(\theta) \\
& + c_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + c_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 + c_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + c_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) (\sin(\theta))^3 + c_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& + c_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + c_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z + c_{0,0,1} z \\
& + c_{0,0,3} z^3 + c_{1,2,1} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 z + c_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 \\
& + c_{0,0,4} z^4 + c_{0,0,0} + c_{1,0,0} r \cos(\theta) + c_{0,0,2} z^2 + c_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& + c_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 + c_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 + c_{0,3,1} r^3 (\sin(\theta))^3 z \\
& + c_{0,2,2} r^2 (\sin(\theta))^2 z^2 + c_{0,1,1} r \sin(\theta) z + c_{0,2,1} r^2 (\sin(\theta))^2 z \\
& + c_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 + c_{1,2,0} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 + c_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
& + c_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 + c_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2 + c_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 \\
& + c_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z + c_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z + c_{1,0,1} r \cos(\theta) z
\end{aligned}$$

Appliquons la méthode de la moyenne du premier ordre

$$\begin{cases} f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
f_1(r) = & \frac{1}{8} r (4 a_{1,0,3} z^3 + a_{1,2,1} r^2 z + 4 b_{0,1,2} z^2 + b_{2,1,1} r^2 z + 3 b_{0,3,1} r^2 z + 4 b_{0,1,1} z \\
& + 3 a_{3,0,1} r^2 z + 4 a_{1,0,2} z^2 + 3 a_{3,0,0} r^2 + 3 b_{0,3,0} r^2 + 4 a_{1,0,0} + a_{1,2,0} r^2 \\
& + 4 b_{0,1,0} + b_{2,1,0} r^2 + 4 b_{0,1,3} z^3 + 4 a_{1,0,1} z)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 f_2(r) = & \frac{3}{8} c_{0,4,0} r^4 + c_{0,0,4} z^4 + \frac{1}{8} c_{2,2,0} r^4 + \frac{1}{2} c_{2,0,0} r^2 + c_{0,0,3} z^3 + c_{0,0,2} z^2 \\
 & + \frac{1}{2} c_{0,2,0} r^2 + \frac{3}{8} c_{4,0,0} r^4 + c_{0,0,1} z + \frac{1}{2} c_{0,2,2} r^2 z^2 + \frac{1}{2} c_{2,0,1} r^2 z \\
 & + 1/2 c_{0,2,1} r^2 z + 1/2 c_{2,0,2} r^2 z^2 + c_{0,0,0}
 \end{aligned}$$

Maintenant cherchons les solutions des systèmes

$$\begin{cases} f_1(r, z) = 0 \\ f_2(r, z) = 0 \end{cases}$$

et choisissons les solutions $(r_i; z_i)$ telles que $r_i > 0$, $z_i \in \mathbb{R}$, $f_1(r, z) = 0$ alors

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} r (4 a_{1,0,3} z^3 + a_{1,2,1} r^2 z + 4 b_{0,1,2} z^2 + b_{2,1,1} r^2 z + 3 b_{0,3,1} r^2 z + 4 b_{0,1,1} z + 3 a_{3,0,1} r^2 z + 4 a_{1,0,2} z^2 \\
 + 3 a_{3,0,0} r^2 + 3 b_{0,3,0} r^2 + 4 a_{1,0,0} + a_{1,2,0} r^2 + 4 b_{0,1,0} + b_{2,1,0} r^2 + 4 b_{0,1,3} z^3 + 4 a_{1,0,1} z) = 0, r > 0
 \end{aligned}$$

a la fin substituons les valeurs de (r_i, z_i) dans l'équation $f_2(r, z) = 0$.

Donc le système (3.3) a au maximum 6 cycles limites selon le théorème de Bezout.

exemple 3.3.1 On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(1 + y^2 - x^3 z) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(3y - z^4) \\ \dot{z} = \varepsilon(-1 + xyz + z^4) \end{cases} \quad (3.4)$$

En les coordonnées cylindriques on a $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $z = z$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = -(z^4 \sin \theta - 3r - \cos \theta + r^3 z \cos^4 \theta - r^2 \cos \theta + r^2 \cos^3 \theta + 3r \cos^2 \theta) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{(3r \cos \theta \sin \theta - \sin \theta - r^2 \sin \theta + r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 z \sin \theta \cos^3 \theta - z^4 \cos \theta) \varepsilon}{r} \\ \dot{z} = ((-1 + r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z + z^4) \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = -\frac{3}{8} r (-4 + r^2 z) \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = -1 + z^4 \end{cases}$$

3.3. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE PREMIER ORDRE DANS

\mathbb{R}^3

On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} f_1(r, z) = 0 \\ f_2(r, z) = 0 \end{cases}$$

Alors les solutions du système sont $(r_1, z_1) = (2, 1)$; $(r_2, z_2) = (-2, 1)$. On choisit les solutions telle que r positive, alors la solution est $(2, 1)$. On calcule le déterminant $\det(D_x f^0(p))$ tel que $f(r, z) = (f_1(r, z), f_2(r, z))$ et $p = (2, 1)$.

$$\begin{aligned} \det(D_x f^0(p)) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial z} \end{array} \right|_{p=(2,1)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{2} - \frac{9}{8} r^2 z & -\frac{3}{8} r^3 \\ 0 & 4 z^3 \end{array} \right|_{p=(2,1)} \\ &= \left| \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right| = -12 \neq 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.2.1), il suit que le système (3.4) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit un cycle limite.

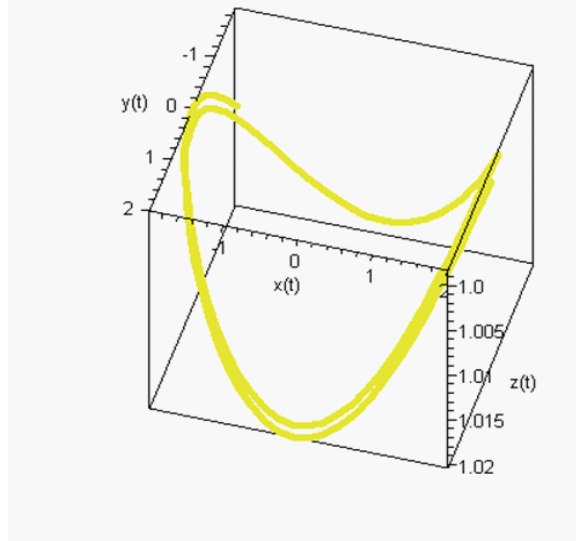
On cherche la valeur propre de la matrice

$$A = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial z} \end{array} \right|_{(r,z)=(2,1)} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -3 \\ 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

On trouve que $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -3$.

Alors le cycle limite est semi stable.



Cycle limite pour $\varepsilon = 0.001$

3.4 la méthode de la moyenne de second ordre dans \mathbb{R}^2

On considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y + \varepsilon(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3 + a_{0,2}y^2 + a_{0,1}y + a_{0,0} + a_{1,1}xy + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 \\ \quad + a_{1,3}xy^3 + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{4,0}x^4 + a_{4,0}x^4 + a_{2,1}x^2y + a_{1,0}x + a_{3,1}x^3y) \\ \quad + \varepsilon^2(A_{0,4}y^4 + A_{0,3}y^3 + A_{0,2}y^2 + A_{0,1}y + A_{0,0} + A_{1,1}xy + A_{1,2}xy^2 + A_{2,2}x^2y^2 + \\ \quad + A_{1,3}xy^3 + A_{2,0}x^2 + A_{3,0}x^3 + A_{4,0}x^4 + A_{4,0}x^4 + A_{2,1}x^2y + A_{1,0}x + A_{3,1}x^3y) \\ \dot{y} = -y + \varepsilon(b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}y + b_{0,0} + b_{1,1}xy + b_{1,2}xy^2 + b_{2,2}x^2y^2 \\ \quad + b_{1,3}xy^3 + b_{2,0}x^2 + b_{3,0}x^3 + b_{4,0}x^4 + b_{4,0}x^4 + b_{2,1}x^2y + b_{1,0}x + b_{3,1}x^3y) \\ \quad + \varepsilon^2(B_{0,4}y^4 + B_{0,3}y^3 + B_{0,2}y^2 + B_{0,1}y + B_{0,0} + B_{1,1}xy + B_{1,2}xy^2 + B_{2,2}x^2y^2 \\ \quad + B_{1,3}xy^3 + B_{2,0}x^2 + B_{3,0}x^3 + B_{4,0}x^4 + B_{4,0}x^4 + B_{2,1}x^2y + B_{1,0}x + B_{3,1}x^3y) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

On suppose que $a_{1,2} + 3a_{3,0} + 3b_{0,3} + b_{2,1} = 0$ et $b_{0,1} = -a_{1,0}$ dans le système (3.5).

Dans les coordonnées polaires on a $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système

3.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^2

précédant s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \phi_1(r, \theta) \\ \dot{\theta} = \phi_2(r, \theta) \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta) = & ((\cos(\theta))^4 B_{0,3} r^3 + (\cos(\theta))^5 A_{0,4} r^4 + (\cos(\theta))^5 B_{1,3} r^4 \\ & + \sin(\theta) B_{2,0} r^2 (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) B_{4,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + \sin(\theta) B_{1,0} r \cos(\theta) \\ & + \sin(\theta) \cos(\theta) B_{1,2} r^3 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 B_{0,4} r^4 + \sin(\theta) \cos(\theta) A_{0,3} r^3 \\ & + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 A_{1,3} r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{2,2} r^4 + \sin(\theta) B_{3,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \\ & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 B_{1,2} r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 A_{1,3} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 B_{2,2} r^4 \\ & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 A_{0,3} r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,2} r^2 + \cos(\theta) A_{0,0} - (\cos(\theta))^3 A_{0,2} r^2 \\ & - (\cos(\theta))^4 B_{2,1} r^3 - (\cos(\theta))^4 A_{1,2} r^3 - (\cos(\theta))^3 B_{1,1} r^2 + A_{2,0} r^2 (\cos(\theta))^3 \\ & + A_{4,0} r^4 (\cos(\theta))^5 + B_{0,3} r^3 + A_{3,0} r^3 (\cos(\theta))^4 + A_{1,0} r (\cos(\theta))^2 + A_{1,2} r^3 (\cos(\theta))^2 \\ & + B_{0,1} r + B_{2,1} r^3 (\cos(\theta))^2 + B_{3,1} r^4 (\cos(\theta))^3 + A_{2,2} r^4 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) B_{0,2} r^2 \\ & + \sin(\theta) B_{0,4} r^4 + \cos(\theta) A_{0,2} r^2 + \sin(\theta) B_{0,0} + A_{1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\ & + A_{2,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + A_{3,1} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) \\ & + \cos(\theta) A_{0,1} r \sin(\theta) - (\cos(\theta))^5 A_{2,2} r^4 - (\cos(\theta))^2 B_{0,1} r \\ & - (\cos(\theta))^5 B_{3,1} r^4 + B_{1,3} r^4 \cos(\theta) \\ & + B_{1,1} r^2 \cos(\theta) + \cos(\theta) A_{0,4} r^4 - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,4} r^4 - 2 (\cos(\theta))^2 B_{0,3} r^3 \\ & - 2 (\cos(\theta))^3 A_{0,4} r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 B_{1,3} r^4 \varepsilon^2 \\ & + (\cos(\theta) a_{0,0} + \sin(\theta) b_{0,0} + a_{1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + a_{2,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\ & + a_{3,1} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) + \cos(\theta) a_{0,1} r \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{2,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\ & + \sin(\theta) b_{3,0} r^3 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{4,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + \sin(\theta) b_{1,0} r \cos(\theta) \\ & + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2} r^4 + \cos(\theta) b_{1,3} r^4 + \cos(\theta) b_{1,1} r^2 + a_{4,0} r^4 (\cos(\theta))^5 \\ & + \cos(\theta) a_{0,4} r^4 + (\cos(\theta))^3 b_{3,1} r^4 + \cos(\theta) a_{0,2} r^2 + (\cos(\theta))^5 a_{0,4} r^4 + (\cos(\theta))^5 b_{1,3} r^4 \\ & + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4} r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3} r^4 \\ & + a_{2,0} r^2 (\cos(\theta))^3 - a_{1,0} r + b_{0,3} r^3 - (\cos(\theta))^5 b_{3,1} r^4 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1} r^2 \\ & - (\cos(\theta))^3 a_{0,2} r^2 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2} r^4 + (\cos(\theta))^3 a_{2,2} r^4 + \sin(\theta) b_{0,4} r^4 \\ & + \sin(\theta) b_{0,2} r^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3} r^3 \\ & - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2} r^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2} r^3 + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2} r^3 \\ & + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3} r^3 - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,4} r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3} r^4 \\ & + 2 a_{1,0} r (\cos(\theta))^2 + 4 a_{3,0} r^3 (\cos(\theta))^4 - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4} r^4 - 5 (\cos(\theta))^2 b_{0,3} r^3 \\ & - 3 (\cos(\theta))^2 r^3 a_{3,0} + 4 (\cos(\theta))^4 b_{0,3} r^3 \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(r, \theta) = & 1 + (-A_{0,1} + \cos(\theta) B_{0,1} \sin(\theta) - r(\cos(\theta))^3 B_{0,2} - r^3(\cos(\theta))^5 A_{1,3} - r^2 A_{0,3} \\
& + r^2 B_{1,2} (\cos(\theta))^2 + r \cos(\theta) B_{0,2} - r \sin(\theta) A_{0,2} + r^2 (\cos(\theta))^4 A_{2,1} \\
& - r^3 A_{3,1} (\cos(\theta))^3 + r^3 (\cos(\theta))^5 A_{3,1} - r A_{1,1} \cos(\theta) + r B_{2,0} (\cos(\theta))^3 \\
& + r^3 B_{4,0} (\cos(\theta))^5 + r^2 B_{3,0} (\cos(\theta))^4 + r^3 B_{2,2} (\cos(\theta))^3 + r^3 \cos(\theta) B_{0,4} \\
& + r^3 (\cos(\theta))^5 B_{0,4} - r^2 (\cos(\theta))^4 A_{0,3} + r (\cos(\theta))^3 A_{1,1} - \sin(\theta) A_{1,0} \cos(\theta) \\
& - r^3 \sin(\theta) A_{0,4} - r^3 A_{1,3} \cos(\theta) - r^3 (\cos(\theta))^5 B_{2,2} - r^2 A_{2,1} (\cos(\theta))^2 \\
& - r^2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 B_{0,3} + r B_{1,1} (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + r \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 A \\
& - r^2 \sin(\theta) A_{1,2} \cos(\theta) - r^3 \sin(\theta) A_{2,2} (\cos(\theta))^2 - r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 A_{0,4} \\
& - r \sin(\theta) A_{2,0} (\cos(\theta))^2 + r^2 B_{2,1} (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + r^3 B_{3,1} (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) \\
& + r^2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 A_{1,2} + r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 A_{2,2} + r^3 \sin(\theta) B_{1,3} (\cos(\theta))^2 \\
& + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) B_{0,3} - r^2 \sin(\theta) A_{3,0} (\cos(\theta))^3 - r^3 \sin(\theta) A_{4,0} (\cos(\theta))^4 \\
& - \frac{\sin(\theta) A_{0,0}}{r} + \frac{\cos(\theta) B_{0,0}}{r} + 2 r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 A_{0,4} \\
& - 2 r^3 (\cos(\theta))^3 B_{0,4} + 2 r^3 (\cos(\theta))^3 A_{1,3} + 2 r^2 (\cos(\theta))^2 A_{0,3} \\
& - r^2 (\cos(\theta))^4 B_{1,2} - r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 B_{1,3} + B_{1,0} (\cos(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 A_{0,1} \varepsilon^2 \\
& + (-a_{0,1} - r^2 (\cos(\theta))^4 a_{0,3} + r (\cos(\theta))^3 a_{1,1} - r^2 \sin(\theta) a_{1,2} \cos(\theta) \\
& - r^3 \sin(\theta) a_{2,2} (\cos(\theta))^2 + r b_{1,1} (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) - r^3 \sin(\theta) a_{4,0} (\cos(\theta))^4 \\
& + r \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2} + r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{2,2} + r^3 \sin(\theta) b_{1,3} (\cos(\theta))^2 \\
& + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3} - r \sin(\theta) a_{2,0} (\cos(\theta))^2 + r^3 b_{3,1} (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) \\
& - r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{1,3} - r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{0,4} + \frac{\cos(\theta) b_{0,0}}{r} - \frac{\sin(\theta) a_{0,0}}{r} \\
& + 2 r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,4} - 4 r^2 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) b_{0,3} - 4 r^2 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) a_{3,0} \\
& - r^3 (\cos(\theta))^5 a_{1,3} - r (\cos(\theta))^3 b_{0,2} + r^2 b_{1,2} (\cos(\theta))^2 + r^3 (\cos(\theta))^5 a_{3,1} \\
& + r^2 (\cos(\theta))^4 a_{2,1} + r^3 b_{2,2} (\cos(\theta))^3 + r \cos(\theta) b_{0,2} + r^3 \cos(\theta) b_{0,4} \\
& + r b_{2,0} (\cos(\theta))^3 + r^3 b_{4,0} (\cos(\theta))^5 - r^3 a_{1,3} \cos(\theta) + r^3 (\cos(\theta))^5 b_{0,4} \\
& + r^2 b_{3,0} (\cos(\theta))^4 - r^2 (\cos(\theta))^4 b_{1,2} - r^3 (\cos(\theta))^5 b_{2,2} - r^3 \sin(\theta) a_{0,4} \\
& - r^3 a_{3,1} (\cos(\theta))^3 - r^2 a_{2,1} (\cos(\theta))^2 - r a_{1,1} \cos(\theta) - r \sin(\theta) a_{0,2} \\
& + 2 r^2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3} - 2 \cos(\theta) a_{1,0} \sin(\theta) + 2 r^3 (\cos(\theta))^3 a_{1,3} \\
& - 2 r^3 (\cos(\theta))^3 b_{0,4} + (\cos(\theta))^2 a_{0,1} + b_{1,0} (\cos(\theta))^2 - r^2 a_{0,3} \varepsilon
\end{aligned}$$

pour appliquer la méthode de la moyenne on utilise la technique

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3)$$

3.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^2

tel que

$$\begin{aligned}
F_1(r, \theta) = & a_{3,1}r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) + \cos(\theta) a_{0,1}r \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{2,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + \sin(\theta) b_{3,0}r^3 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{4,0}r^4 (\cos(\theta))^4 + \sin(\theta) b_{1,0}r \cos(\theta) \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2}r^4 + \cos(\theta) b_{1,3}r^4 + \cos(\theta) b_{1,1}r^2 + a_{4,0}r^4 (\cos(\theta))^5 \\
& + \cos(\theta) a_{0,4}r^4 + (\cos(\theta))^3 b_{3,1}r^4 + \cos(\theta) a_{0,2}r^2 + (\cos(\theta))^5 a_{0,4}r^4 + (\cos(\theta))^5 b_{1,3}r^4 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3}r^4 \\
& + a_{2,0}r^2 (\cos(\theta))^3 - a_{1,0}r + b_{0,3}r^3 - (\cos(\theta))^5 b_{3,1}r^4 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1}r^2 \\
& - (\cos(\theta))^3 a_{0,2}r^2 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2}r^4 + (\cos(\theta))^3 a_{2,2}r^4 + \sin(\theta) b_{0,4}r^4 \\
& + \sin(\theta) b_{0,2}r^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3}r^3 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2}r^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2}r^3 + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2}r^3 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3}r^3 - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,4}r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3}r^4 \\
& + 2 a_{1,0}r (\cos(\theta))^2 + 4 a_{3,0}r^3 (\cos(\theta))^4 - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4}r^4 - 5 (\cos(\theta))^2 b_{0,3}r^3 \\
& - 3 (\cos(\theta))^2 r^3 a_{3,0} + 4 (\cos(\theta))^4 b_{0,3}r^3 \varepsilon
\end{aligned}$$

On pose $\theta = s$, dans $F_2(r, \theta)$

$$\begin{aligned}
F_2(r, s) = & -2 (\cos(s))^3 B_{1,3}r^4 - 4 a_{1,0} (\cos(s))^3 b_{0,0} + B_{1,3}r^4 \cos(s) \\
& + (\cos(s))^5 B_{1,3}r^4 - a_{1,0} \sin(s) a_{0,0} + B_{1,1}r^2 \cos(s) \\
& + (\cos(s))^5 A_{0,4}r^4 + A_{1,2}r^3 (\cos(s))^2 - (\cos(s))^3 B_{1,1}r^2 \\
& + B_{0,1}r - r^4 a_{1,0} \sin(s) a_{4,0} (\cos(s))^4 + \sin(s) B_{0,4}r^4 \\
& + A_{1,0}r (\cos(s))^2 - (\cos(s))^4 B_{2,1}r^3 - (\cos(s))^2 B_{0,1}r \\
& + r^3 (\cos(s))^4 b_{4,0}a_{0,0} + r^5 (\cos(s))^4 b_{2,0}a_{2,2} + r^6 (\cos(s))^7 b_{2,2}a_{1,2} \\
& - r^5 \sin(s) b_{3,0}^2 (\cos(s))^7 + r^6 (\cos(s))^3 b_{3,0}a_{0,4} \\
& + r^4 (\cos(s))^3 b_{2,0}a_{1,2} + r^2 (\cos(s))^3 b_{1,0}a_{2,0} + r^6 (\cos(s))^3 b_{2,2}a_{1,2} \\
& + r^2 (\cos(s))^3 b_{3,0}a_{0,0} + r^4 (\cos(s))^3 a_{1,1}a_{1,2} \\
& + r^6 (\cos(s))^3 a_{1,3}a_{1,2} - r^2 (\cos(s))^3 b_{0,0}a_{1,2} \\
& + r^3 a_{2,0}^2 (\cos(s))^5 \sin(s) - r^3 (\cos(s))^4 a_{0,1}a_{1,2} \\
& + r^3 b_{0,0}a_{0,4} + 3 a_{1,0} \cos(s) b_{0,0} - (\cos(s))^4 A_{1,2}r^3 \\
& + 2 \cos(s) a_{0,0}a_{0,1} + r^5 b_{0,3}a_{0,3} + r^4 \sin(s) b_{0,2}a_{2,1} (\cos(s))^2 \\
& + r^3 \sin(s) b_{0,2}a_{1,1} \cos(s) + A_{2,0}r^2 (\cos(s))^3 + r^3 b_{0,3}a_{0,1} \\
& + \cos(s) A_{0,2}r^2 + A_{2,2}r^4 (\cos(s))^3 + r b_{0,0}a_{0,2} - r a_{1,0}a_{0,1} \\
& + r^5 b_{0,2}a_{0,4} + A_{4,0}r^4 (\cos(s))^5 - 2 (\cos(s))^2 B_{0,3}r^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 (\cos (s)) ^3 A_{0,4} r^4 + \cos (s) b_{1,0} a_{0,0} + r^5 b_{0,4} a_{0,2} + B_{3,1} r^4 (\cos (s)) ^3 \\
& + B_{2,1} r^3 (\cos (s)) ^2 - r^3 a_{1,0} a_{0,3} + r^7 b_{0,4} a_{0,4} + r^3 b_{0,2} a_{0,2} + r^3 b_{0,4} a_{0,0} \\
& + \sin (s) b_{0,0} a_{0,1} + r b_{0,2} a_{0,0} - (\cos (s)) ^5 A_{2,2} r^4 - (\cos (s)) ^5 B_{3,1} r^4 \\
& + \cos (s) A_{0,4} r^4 - (\cos (s)) ^3 A_{0,2} r^2 + \sin (s) B_{0,2} r^2 + A_{3,0} r^3 (\cos (s)) ^4 \\
& + (\cos (s)) ^4 B_{0,3} r^3 + B_{0,3} r^3 + r^6 (\cos (s)) ^6 b_{1,3} \sin (s) a_{1,2} \\
& + r^5 \sin (s) (\cos (s)) ^3 b_{2,2} a_{1,1} + r^7 \sin (s) (\cos (s)) ^5 b_{2,2} a_{3,1} \\
& + r^2 (\cos (s)) ^2 a_{0,0} \sin (s) a_{1,2} + r^5 \sin (s) (\cos (s)) ^3 b_{1,2} a_{2,1} \\
& + r^4 \sin (s) (\cos (s)) ^2 b_{1,2} a_{1,1} - r^6 (\cos (s)) ^6 a_{2,2} \sin (s) a_{1,2} \\
& + r^6 b_{0,3} \sin (s) a_{2,2} (\cos (s)) ^2 + r^6 b_{0,3} \sin (s) a_{4,0} (\cos (s)) ^4 \\
& + r^5 b_{0,3} \sin (s) a_{1,2} \cos (s) + r^5 \sin (s) b_{2,0} (\cos (s)) ^3 a_{1,3} \\
& + r^2 \sin (s) b_{2,0} (\cos (s)) ^2 a_{0,1} + r^3 b_{1,3} \cos (s) \sin (s) a_{0,0} \\
& + r^4 \sin (s) b_{1,0} (\cos (s)) ^2 a_{1,3} - r^4 (\cos (s)) ^4 a_{0,2} \sin (s) a_{1,2} \\
& + r^4 \sin (s) b_{2,0} (\cos (s)) ^4 a_{2,1} + r^5 \sin (s) b_{2,0} (\cos (s)) ^5 a_{3,1} \\
& + r^3 \sin (s) b_{2,0} (\cos (s)) ^3 a_{1,1} + r^7 b_{3,1} (\cos (s)) ^7 \sin (s) a_{4,0} \\
& + \sin (s) B_{0,0} + r^7 b_{1,3} (\cos (s)) ^5 \sin (s) a_{4,0} + r^5 \sin (s) b_{0,2} a_{3,1} (\cos (s)) ^3 \\
& + \frac{b_{0,0} a_{0,0}}{r} - r \sin (s) b_{1,0} ^2 (\cos (s)) ^3 + r^5 \sin (s) \cos (s) a_{0,3} ^2 \\
& - r^5 \sin (s) (\cos (s)) ^7 a_{0,3} ^2 + r^5 (\cos (s)) ^2 b_{0,2} a_{2,2} + r^5 (\cos (s)) ^2 b_{2,2} a_{0,2} \\
& + r^7 (\cos (s)) ^2 b_{2,2} a_{0,4} + r^3 (\cos (s)) ^2 b_{1,0} a_{1,2} + r (\cos (s)) ^2 b_{2,0} a_{0,0} \\
& + r (\cos (s)) ^2 b_{0,0} a_{2,0} + r^5 (\cos (s)) ^2 b_{2,0} a_{0,4} + r^3 (\cos (s)) ^2 b_{0,0} a_{2,2} \\
& + r^3 (\cos (s)) ^2 b_{2,2} a_{0,0} + r^5 (\cos (s)) ^2 b_{0,4} a_{2,0} + r^3 (\cos (s)) ^2 b_{0,2} a_{2,0} \\
& + r^3 (\cos (s)) ^2 b_{2,0} a_{0,2} + r^3 (\cos (s)) ^2 a_{0,1} a_{1,2} + r^5 (\cos (s)) ^2 a_{0,3} a_{1,2} \\
& + r^4 b_{1,1} (\cos (s)) ^3 a_{2,1} + r^3 b_{1,1} (\cos (s)) ^2 a_{1,1} + r^5 b_{1,1} (\cos (s)) ^4 a_{3,1} \\
& + r^2 b_{1,1} \cos (s) a_{0,1} - r^7 \sin (s) (\cos (s)) ^9 a_{1,3} ^2 - r^5 \sin (s) (\cos (s)) ^3 b_{1,2} ^2 \\
& + r^3 \cos (s) a_{0,2} ^2 \sin (s) - r^4 a_{1,0} a_{1,3} \cos (s) - r^5 b_{0,3} ^2 \sin (s) \cos (s) + \\
& r^7 a_{2,2} ^2 (\cos (s)) ^5 \sin (s) + r^7 a_{4,0} ^2 (\cos (s)) ^9 \sin (s) \\
& + r^7 b_{3,1} (\cos (s)) ^4 a_{1,3} - r^2 a_{1,0} \sin (s) a_{0,2} - r^3 a_{1,0} a_{2,1} (\cos (s)) ^2 \\
& - r^2 a_{1,0} a_{1,1} \cos (s) - r^3 \sin (s) b_{0,2} ^2 \cos (s) + r^6 b_{1,3} (\cos (s)) ^3 a_{2,1}
\end{aligned}$$

3.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}
& +r^5 b_{1,3} (\cos(s))^2 a_{1,1} + r^7 b_{1,3} (\cos(s))^4 a_{3,1} + r^4 b_{1,3} \cos(s) a_{0,1} \\
& +r^3 (\cos(s))^4 b_{0,0} a_{4,0} + r^5 (\cos(s))^4 b_{2,2} a_{2,0} + r^3 (\cos(s))^4 b_{2,0} a_{2,0} \\
& +r^7 (\cos(s))^4 b_{2,2} a_{2,2} + r^5 (\cos(s))^4 a_{2,1} a_{1,2} + r^5 (\cos(s))^4 b_{4,0} a_{0,2} \\
& +r^5 (\cos(s))^4 b_{3,0} a_{1,2} + r^7 (\cos(s))^4 b_{0,4} a_{4,0} + r^4 (\cos(s))^3 b_{1,2} a_{2,0} \\
& +r^4 (\cos(s))^3 b_{1,0} a_{2,2} + r^4 (\cos(s))^3 b_{3,0} a_{0,2} - r^7 \sin(s) b_{0,4}^2 \cos(s) \\
& -r^3 \sin(s) b_{2,0}^2 (\cos(s))^5 + r^4 b_{1,1} \cos(s) a_{0,3} - r^3 b_{1,1}^2 (\cos(s))^3 \sin(s) \\
& +r^5 (\cos(s))^6 b_{4,0} a_{2,0} + r^5 (\cos(s))^6 b_{2,0} a_{4,0} + r^6 (\cos(s))^5 b_{4,0} a_{1,2} \\
& +r^6 (\cos(s))^5 a_{3,1} a_{1,2} + r^4 (\cos(s))^5 b_{1,0} a_{4,0} + r^4 (\cos(s))^5 b_{3,0} a_{2,0} \\
& +r^6 (\cos(s))^5 b_{3,0} a_{2,2} + r^6 (\cos(s))^5 b_{1,2} a_{4,0} + r^5 (\cos(s))^4 b_{0,2} a_{4,0} \\
& +r^6 b_{1,3} \cos(s) a_{0,3} - r^7 b_{1,3}^2 (\cos(s))^3 \sin(s) \\
& -r^3 a_{1,1}^2 (\cos(s))^5 \sin(s) + r^3 (\cos(s))^5 b_{1,1}^2 \sin(s) \\
& -r^4 a_{1,0} a_{3,1} (\cos(s))^3 - r^4 a_{1,0} \sin(s) a_{0,4} + r^6 b_{3,1} (\cos(s))^5 a_{2,1} \\
& +r^7 (\cos(s))^9 b_{1,3}^2 \sin(s) - r^7 \sin(s) (\cos(s))^9 b_{2,2}^2 + r^6 b_{0,3} a_{1,3} \cos(s) \\
& +r^6 (\cos(s))^7 b_{3,0} a_{4,0} + r^7 (\cos(s))^6 b_{4,0} a_{2,2} + r^5 b_{3,1} (\cos(s))^4 a_{1,1} \\
& +r^7 b_{3,1} (\cos(s))^6 a_{3,1} + r^4 b_{3,1} (\cos(s))^3 a_{0,1} + r^6 b_{3,1} (\cos(s))^3 a_{0,3} \\
& +r^7 (\cos(s))^4 b_{4,0} a_{0,4} + r^3 b_{1,1} (\cos(s))^3 \sin(s) a_{2,0} + r^5 \sin(s) b_{4,0} (\cos(s))^5 a_{1,1} \\
& +r^7 \sin(s) b_{4,0} (\cos(s))^7 a_{3,1} + r^4 \sin(s) b_{4,0} (\cos(s))^4 a_{0,1} \\
& +r^3 \sin(s) b_{0,0} a_{1,3} \cos(s) + r^6 \sin(s) b_{4,0} (\cos(s))^4 a_{0,3} \\
& +r^4 \sin(s) b_{2,0} (\cos(s))^2 a_{0,3} + r^7 \sin(s) b_{4,0} (\cos(s))^5 a_{1,3} \\
& +r^5 \sin(s) b_{0,2} a_{1,3} \cos(s) + r^6 \sin(s) b_{3,0} (\cos(s))^6 a_{3,1} \\
& +r^5 b_{1,1} \cos(s) \sin(s) a_{0,4} + r^4 b_{1,1} (\cos(s))^2 \sin(s) a_{1,2} \\
& +r^5 b_{1,1} (\cos(s))^3 \sin(s) a_{2,2} + r^5 b_{1,1} (\cos(s))^5 \sin(s) a_{4,0} \\
& +r b_{1,1} \cos(s) \sin(s) a_{0,0} + r^6 \sin(s) b_{0,4} a_{2,1} (\cos(s))^2 \\
& +r^5 \sin(s) b_{0,4} a_{1,1} \cos(s) + r^7 \sin(s) b_{0,4} a_{3,1} (\cos(s))^3 \\
& +r^6 \sin(s) (\cos(s))^4 b_{1,2} a_{3,1} + r^3 \sin(s) \cos(s) b_{1,2} a_{0,1} \\
& +r^5 \sin(s) \cos(s) b_{1,2} a_{0,3} + r^7 \sin(s) (\cos(s))^3 b_{2,2} a_{1,3} \\
& +r^6 \sin(s) b_{3,0} (\cos(s))^4 a_{1,3} + r^6 b_{3,1} (\cos(s))^4 \sin(s) a_{1,2} \\
& +r^7 b_{3,1} (\cos(s))^5 \sin(s) a_{2,2} + r^6 (\cos(s))^6 a_{0,4} \sin(s) a_{1,2} \\
& +r^6 \sin(s) (\cos(s))^4 b_{2,2} a_{2,1} + r^7 b_{3,1} (\cos(s))^3 \sin(s) a_{0,4} \\
& +r^3 \sin(s) b_{1,0} (\cos(s))^3 a_{2,1} + r^2 \sin(s) b_{1,0} (\cos(s))^2 a_{1,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +r^4 \sin(s) b_{1,0} (\cos(s))^4 a_{3,1} + r \sin(s) b_{1,0} \cos(s) a_{0,1} \\
& +r^3 \sin(s) b_{1,0} \cos(s) a_{0,3} + r^5 \sin(s) b_{3,0} (\cos(s))^3 a_{0,3} \\
& +r^7 \sin(s) b_{0,4} a_{1,3} \cos(s) + \cos(s) A_{0,0} + r^5 b_{3,1} (\cos(s))^3 \sin(s) a_{0,2} \\
& -r^4 a_{1,0} \sin(s) a_{2,2} (\cos(s))^2 + r^6 \sin(s) b_{4,0} (\cos(s))^6 a_{2,1} \\
& +r^4 b_{0,3} \sin(s) a_{2,0} (\cos(s))^2 - r^2 a_{1,0} \sin(s) a_{2,0} (\cos(s))^2 \\
& -r^3 a_{1,0} \sin(s) a_{1,2} \cos(s) + r^6 \sin(s) (\cos(s))^2 b_{1,2} a_{1,3} \\
& +r^6 \sin(s) (\cos(s))^2 b_{2,2} a_{0,3} + r^4 \sin(s) (\cos(s))^2 b_{2,2} a_{0,1} \\
& +r^4 a_{2,0} (\cos(s))^4 \sin(s) a_{1,2} + r^4 \sin(s) b_{3,0} (\cos(s))^4 a_{1,1} \\
& +r^6 a_{4,0} (\cos(s))^6 \sin(s) a_{1,2} + r^3 b_{1,1} \cos(s) \sin(s) a_{0,2} \\
& +r^3 b_{3,1} (\cos(s))^3 \sin(s) a_{0,0} + r^5 \sin(s) b_{3,0} (\cos(s))^5 a_{2,1} \\
& +r^6 a_{2,2} (\cos(s))^4 \sin(s) a_{1,2} - r^6 (\cos(s))^6 b_{3,1} \sin(s) a_{1,2} \\
& +r^3 \sin(s) b_{3,0} (\cos(s))^3 a_{0,1} + r^5 b_{1,3} (\cos(s))^3 \sin(s) a_{2,0} - \frac{\sin(s) b_{0,0}^2 \cos(s)}{r} \\
& -r^4 (\cos(s))^4 b_{1,1} \sin(s) a_{1,2} + r^5 b_{3,1} (\cos(s))^5 \sin(s) a_{2,0} + r^7 b_{1,3} (\cos(s))^2 a_{1,3} \\
& +r^7 \sin(s) (\cos(s))^3 a_{1,3}^2 - r^3 \sin(s) (\cos(s))^5 b_{0,2}^2 - r^5 \sin(s) (\cos(s))^7 b_{1,2}^2 \\
& +r^7 \cos(s) a_{0,4}^2 \sin(s) + r^7 (\cos(s))^6 b_{2,2} a_{4,0} - r^7 b_{3,1}^2 (\cos(s))^7 \sin(s) \\
& +r \cos(s) a_{0,1}^2 \sin(s) - r^5 a_{2,1}^2 (\cos(s))^7 \sin(s) - r^7 a_{3,1}^2 (\cos(s))^9 \sin(s) \\
& -r^7 \sin(s) b_{4,0}^2 (\cos(s))^9 - r^7 \sin(s) (\cos(s))^5 b_{2,2}^2 \\
& -r^7 \sin(s) (\cos(s))^9 b_{0,4}^2 + r^5 b_{1,1} (\cos(s))^2 a_{1,3} \\
& -r (\cos(s))^3 a_{0,1}^2 \sin(s) + r^2 b_{0,3} \sin(s) a_{0,0} + r^4 \sin(s) b_{0,4} a_{0,1} \\
& +r^7 (\cos(s))^9 a_{0,4}^2 \sin(s) + r^3 (\cos(s))^5 a_{0,2}^2 \sin(s) \\
& +r^7 (\cos(s))^9 b_{3,1}^2 \sin(s) + r^5 (\cos(s))^2 b_{1,2} a_{1,2} \\
& +r^7 (\cos(s))^9 a_{2,2}^2 \sin(s) + A_{1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& +A_{2,1} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) + r^3 a_{1,1}^2 (\cos(s))^3 \sin(s) \\
& +r^6 \sin(s) b_{0,4} a_{0,3} + r^2 \sin(s) b_{0,2} a_{0,1} + r^4 \sin(s) b_{0,2} a_{0,3} \\
& +r^7 (\cos(s))^2 b_{0,4} a_{2,2} + r^4 \cos(s) b_{1,2} a_{0,2} + r^2 \cos(s) b_{1,2} a_{0,0} \\
& +r^4 \cos(s) b_{1,0} a_{0,4} + r^2 \cos(s) b_{1,0} a_{0,2} + r^4 \cos(s) b_{0,2} a_{1,2} + r^2 \cos(s) b_{0,0} a_{1,2} \\
& +r^6 \cos(s) b_{1,2} a_{0,4} + r^6 \cos(s) b_{0,4} a_{1,2} + A_{3,1} r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) \\
& + \cos(s) A_{0,1} r \sin(s) + \sin(s) B_{2,0} r^2 (\cos(s))^2 \\
& + \sin(s) B_{3,0} r^3 (\cos(s))^3 + \sin(s) B_{4,0} r^4 (\cos(s))^4 \\
& + \sin(s) B_{3,0} r^3 (\cos(s))^3 + \sin(s) B_{4,0} r^4 (\cos(s))^4
\end{aligned}$$

3.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}
& + \sin(s) B_{1,0} r \cos(s) + \sin(s) \cos(s) B_{1,2} r^3 \\
& + \sin(s) (\cos(s))^4 B_{0,4} r^4 + \sin(s) \cos(s) A_{0,3} r^3 \\
& + \sin(s) (\cos(s))^2 A_{1,3} r^4 + \sin(s) (\cos(s))^2 B_{2,2} r^4 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 B_{1,2} r^3 - \sin(s) (\cos(s))^4 A_{1,3} r^4 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^4 B_{2,2} r^4 - \sin(s) (\cos(s))^3 A_{0,3} r^3 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,2} r^2 + r^7 a_{3,1}^2 (\cos(s))^7 \sin(s) \\
& + r^2 \sin(s) b_{0,0} a_{0,3} + r^4 b_{0,3} \sin(s) a_{0,2} + r^5 b_{0,3} a_{2,1} (\cos(s))^2 \\
& + r^4 b_{0,3} a_{1,1} \cos(s) + r^6 b_{0,3} a_{3,1} (\cos(s))^3 + r^6 b_{0,3} \sin(s) a_{0,4} \\
& + r^5 a_{2,1}^2 (\cos(s))^5 \sin(s) + r^5 (\cos(s))^6 b_{1,2} a_{1,2} - r^5 (\cos(s))^6 a_{2,1} a_{1,2} \\
& - r^5 (\cos(s))^6 b_{3,0} a_{1,2} + r^5 (\cos(s))^6 a_{0,3} a_{1,2} + r^4 (\cos(s))^5 b_{0,2} a_{1,2} \\
& - r^4 (\cos(s))^5 b_{2,0} a_{1,2} - r^6 (\cos(s))^7 b_{4,0} a_{1,2} - r^4 (\cos(s))^5 a_{1,1} a_{1,2} \\
& - r^6 (\cos(s))^7 a_{3,1} a_{1,2} + r^6 (\cos(s))^7 a_{1,3} a_{1,2} - r^6 (\cos(s))^7 b_{0,4} a_{1,2} \\
& - r^3 (\cos(s))^4 b_{1,0} a_{1,2} + r^6 (\cos(s))^3 b_{1,2} a_{2,2} + r^7 (\cos(s))^8 b_{4,0} a_{4,0} \\
& - 2 r^7 a_{4,0} (\cos(s))^{10} b_{0,4} - 2 r^5 a_{4,0} (\cos(s))^8 a_{1,1} - 2 r^6 a_{4,0} (\cos(s))^9 b_{3,0} \\
& - 2 r^5 a_{4,0} (\cos(s))^8 b_{2,0} - 2 r^7 a_{4,0} (\cos(s))^{10} b_{4,0} + \frac{\cos(s) a_{0,0}^2 \sin(s)}{r} \\
& + r^5 b_{1,3} \cos(s) \sin(s) a_{0,2} + r^7 b_{1,3} \cos(s) \sin(s) a_{0,4}^3 \sin(s) a_{2,2} \\
& + r^2 \sin(s) b_{0,0} a_{2,1} (\cos(s))^2 \\
& + r \sin(s) b_{0,0} a_{1,1} \cos(s) + r^3 \sin(s) b_{0,0} a_{3,1} (\cos(s))^3 \\
& + r^6 (\cos(s))^2 a_{0,4} \sin(s) a_{1,2} + r^4 (\cos(s))^2 a_{0,2} \sin(s) a_{1,2} \\
& - 4 r^7 a_{4,0} (\cos(s))^6 b_{0,4} - 3 r^5 a_{4,0} (\cos(s))^6 b_{0,2} \\
& - 3 r^7 a_{4,0} (\cos(s))^8 b_{2,2} - 2 r^6 a_{4,0} (\cos(s))^9 a_{2,1} \\
& - 6 r^7 (\cos(s))^8 b_{3,1} b_{0,4} - 3 r^6 (\cos(s))^7 b_{3,1} a_{2,1} \\
& - 3 r^5 (\cos(s))^6 b_{3,1} a_{1,1} - 3 r^7 (\cos(s))^8 b_{3,1} a_{3,1} \\
& + 6 r^5 (\cos(s))^6 a_{0,4} a_{1,1} - 2 r^5 (\cos(s))^8 b_{1,1} b_{2,2} \\
& + 2 r^5 (\cos(s))^8 b_{1,1} b_{0,4} - 7 r^6 (\cos(s))^7 b_{1,3} a_{0,3} \\
& + 2 r^6 (\cos(s))^9 b_{1,3} b_{1,2} + 2 r^7 (\cos(s))^{10} b_{1,3} b_{2,2} \\
& - 7 r^7 (\cos(s))^8 b_{1,3} a_{1,3} + 2 r^2 (\cos(s))^5 a_{0,2} b_{1,0} \\
& - 4 r^6 a_{2,2} (\cos(s))^5 b_{1,2} + 5 r^7 b_{3,1} (\cos(s))^8 a_{1,3} \\
& + 4 r^5 b_{3,1} (\cos(s))^6 b_{0,2} + 4 r^6 b_{3,1} (\cos(s))^7 b_{1,2} \\
& - 8 r^6 a_{3,0} (\cos(s))^9 b_{4,0} - 15 r^4 a_{3,0} (\cos(s))^5 b_{0,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+9r^6 b_{1,3} (\cos(s))^5 a_{0,3} + 14r^7 (\cos(s))^4 a_{0,4} b_{0,4} \\
&+2r^6 (\cos(s))^3 a_{0,4} a_{2,1} + 2r^5 (\cos(s))^2 a_{0,4} a_{1,1} \\
&-3r^4 a_{2,2} (\cos(s))^5 b_{1,0} - 4r^7 b_{3,1} (\cos(s))^6 a_{1,3} \\
&-9r^3 a_{1,0} (\cos(s))^4 a_{0,3} + 3ra_{1,0} b_{1,0} (\cos(s))^2 \\
&-19r^5 (\cos(s))^6 a_{3,0} a_{0,3} + 4r^4 b_{1,1} (\cos(s))^5 b_{1,2} \\
&-5r^5 (\cos(s))^2 a_{0,4} b_{0,2} - 5r^7 (\cos(s))^4 a_{0,4} b_{2,2} \\
&-6r^6 (\cos(s))^5 a_{0,4} a_{2,1} - 6r^7 (\cos(s))^6 a_{0,4} a_{3,1} \\
&-5r^6 (\cos(s))^3 a_{0,4} b_{1,2} + 6r^5 (\cos(s))^6 a_{0,2} a_{1,3} \\
&+5r^3 (\cos(s))^4 a_{0,2} b_{0,2} - 6r^4 (\cos(s))^3 a_{0,2} a_{0,3} \\
&+5r^4 (\cos(s))^5 a_{0,2} b_{1,2} - 30r^6 (\cos(s))^5 b_{0,3} b_{0,4} \\
&+2r^7 (\cos(s))^{10} b_{1,3} a_{1,3} + 2r^4 (\cos(s))^7 b_{3,1} a_{0,1} \\
&+4a_{1,0} (\cos(s))^2 \sin(s) a_{0,0} + 2r^7 a_{4,0} (\cos(s))^6 a_{1,3} \\
&-9r^4 a_{1,0} (\cos(s))^5 a_{1,3} - 7r^2 a_{1,0} (\cos(s))^3 b_{0,2} \\
&-7r^3 a_{1,0} (\cos(s))^4 b_{1,2} - 7r^4 a_{1,0} (\cos(s))^5 b_{2,2} \\
&+6r^4 a_{1,0} (\cos(s))^3 a_{1,3} + 2r^3 (\cos(s))^6 b_{1,1} a_{1,1} \\
&+2r^4 (\cos(s))^7 b_{1,1} b_{3,0} + 2r^3 (\cos(s))^6 b_{1,1} b_{2,0} \\
&+2r^5 (\cos(s))^8 b_{1,1} b_{4,0} + 2r^4 (\cos(s))^7 a_{2,2} a_{0,1}
\end{aligned}$$

On applique la méthode de la moyenne du deuxième ordre

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta$$

On a

$$f_1(r) = 0$$

On calcule

$$y^1(r, s), f^1(r, s)$$

telle que

$$y^1(r, s) = \int_0^s F_1(r, \theta) ds$$

3.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^2

alors

$$\begin{aligned}
y^1(r, s) = & b_{0,0} + b_{0,3}r^3 \sin(s) (\cos(s))^3 + a_{1,0}r \cos(s) \sin(s) \\
& - b_{0,3}r^3 \cos(s) \sin(s) + r^3 a_{3,0} \sin(s) (\cos(s))^3 \\
& - 1/3 b_{1,1}r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) - 1/3 a_{0,2}r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& - 1/5 b_{3,1}r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) + 1/3 a_{2,0}r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + \sin(s) a_{0,0} - \cos(s) b_{0,0} + 1/4 a_{0,3}r^3 + 2/15 b_{2,2}r^4 \\
& + 1/3 a_{1,1}r^2 + \frac{8}{15} b_{0,4}r^4 + 1/4 b_{1,2}r^3 + 2/3 b_{0,2}r^2 \\
& + 1/4 a_{2,1}r^3 + 1/5 a_{3,1}r^4 + 1/2 b_{1,0}r + 1/5 b_{4,0}r^4 \\
& + 1/4 b_{3,0}r^3 + 1/3 b_{2,0}r^2 + 1/2 a_{0,1}r + 2/15 a_{1,3}r^4 \\
& + 1/5 a_{0,4}r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) - 2/5 a_{0,4}r^4 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + 1/15 a_{2,2}r^4 (\cos(s))^2 \sin(s) - \cos(s) b_{0,2}r^2 + 2/3 a_{2,0}r^2 \sin(s) \\
& + 2/15 a_{2,2}r^4 \sin(s) + 2/15 b_{3,1}r^4 \sin(s) + \frac{8}{15} a_{4,0}r^4 \sin(s) \\
& - 1/3 a_{1,1}r^2 (\cos(s))^3 + 1/3 \sin(s) a_{0,2}r^2 + 1/5 \sin(s) a_{0,4}r^4 \\
& + 1/3 \sin(s) b_{1,1}r^2 + 1/5 \sin(s) b_{1,3}r^4 - 1/2 (\cos(s))^2 a_{0,3}r^3 \\
& - 1/4 a_{2,1}r^3 (\cos(s))^4 - 1/5 a_{3,1}r^4 (\cos(s))^5 - 1/2 (\cos(s))^2 a_{0,1}r \\
& - 1/4 (\cos(s))^4 b_{3,0}r^3 - 1/3 (\cos(s))^3 b_{2,0}r^2 + 1/3 (\cos(s))^3 b_{0,2}r^2 \\
& + 1/4 (\cos(s))^4 a_{0,3}r^3 + 1/5 (\cos(s))^5 b_{2,2}r^4 + 1/5 (\cos(s))^5 a_{1,3}r^4 \\
& - 1/3 (\cos(s))^3 a_{1,3}r^4 + 2/3 (\cos(s))^3 b_{0,4}r^4 - 1/5 (\cos(s))^5 b_{0,4}r^4 \\
& - 1/3 (\cos(s))^3 b_{2,2}r^4 - 1/2 (\cos(s))^2 b_{1,0}r - 1/5 (\cos(s))^5 b_{4,0}r^4 \\
& - 1/2 (\cos(s))^2 b_{1,2}r^3 + 1/4 (\cos(s))^4 b_{1,2}r^3 - 1/5 a_{2,2}r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) \\
& + 1/15 b_{3,1}r^4 (\cos(s))^2 \sin(s) + \frac{4}{15} a_{4,0}r^4 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + 1/5 a_{4,0}r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) - 2/5 b_{1,3}r^4 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + 1/5 b_{1,3}r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) - \cos(s) b_{0,4}r^4
\end{aligned}$$

et

$$f^1(r; s) = \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(r, s)$$

car

$$f_2(r) = f^{10}(r) + g^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(r, s) + F_1(r, s)) ds$$

alors

$$\begin{aligned}
 f_2(r) = & \left(\frac{1}{64} a_{1,3} b_{1,3} + \frac{3}{128} a_{1,3} a_{4,0} + \frac{7}{32} b_{0,4} a_{0,4} + \frac{7}{128} a_{1,3} a_{0,4} \right. \\
 & - \frac{3}{128} b_{1,3} b_{2,2} + \frac{1}{64} a_{0,4} b_{2,2} - \frac{1}{64} b_{3,1} a_{3,1} - \frac{1}{64} a_{4,0} b_{2,2} \\
 & - \frac{1}{128} b_{3,1} b_{0,4} - \frac{1}{64} a_{2,2} b_{4,0} - \frac{1}{32} b_{4,0} a_{4,0} - \frac{1}{128} b_{3,1} b_{2,2} \\
 & - \frac{1}{128} b_{0,4} b_{1,3} + \frac{1}{128} a_{4,0} a_{3,1} + \frac{1}{64} b_{0,4} a_{2,2} - \frac{1}{128} b_{4,0} b_{1,3} \\
 & \left. + \frac{1}{128} a_{0,4} a_{3,1} + \frac{1}{128} a_{2,2} a_{3,1} - \frac{1}{128} b_{3,1} b_{4,0} + \frac{1}{128} a_{1,3} a_{2,2} \right) r^7 \\
 & + \left(\frac{1}{16} a_{0,3} a_{1,2} - \frac{5}{48} b_{3,1} b_{2,0} + \frac{11}{24} a_{2,0} b_{0,4} + 1/8 a_{3,0} b_{1,2} \right. \\
 & - \frac{5}{12} b_{2,0} a_{4,0} - 1/48 b_{1,1} b_{2,2} + 1/12 b_{2,2} a_{2,0} + 1/16 a_{0,2} a_{3,1} \\
 & + 1/16 b_{0,3} b_{1,2} + 1/8 a_{3,0} a_{2,1} + \frac{7}{48} a_{1,3} a_{2,0} + 1/16 a_{0,4} a_{1,1} \\
 & - \frac{1}{24} b_{3,1} a_{1,1} - \frac{7}{48} b_{3,1} b_{0,2} + \frac{1}{16} b_{1,2} a_{1,2} - \frac{1}{12} b_{0,2} a_{2,2} \\
 & - \frac{5}{48} a_{4,0} a_{1,1} + 1/16 b_{3,0} a_{1,2} - \frac{1}{8} a_{2,0} b_{4,0} + 1/24 b_{1,1} a_{1,3} \\
 & + 1/16 a_{2,1} a_{1,2} + 1/24 a_{0,2} b_{2,2} + \frac{5}{48} b_{0,4} b_{1,1} - 1/16 b_{4,0} b_{1,1} \\
 & + \frac{5}{48} a_{0,2} a_{1,3} + \frac{5}{12} b_{0,4} a_{0,2} + 3/16 b_{0,3} a_{0,3} + 1/8 b_{0,2} a_{0,4} \\
 & + 1/16 b_{0,3} a_{2,1} - 3/16 b_{1,3} b_{0,2} + 3/16 b_{0,3} b_{3,0} + 1/48 a_{2,2} a_{1,1} \\
 & - 1/16 b_{2,0} b_{1,3} - 1/24 b_{2,0} a_{2,2} - \frac{11}{24} a_{4,0} b_{0,2} + 3/16 a_{2,0} a_{3,1} \Big) r^5 \\
 & + (3/8 b_{0,3} b_{1,0} + 3/8 A_{3,0} + 1/4 a_{1,0} b_{1,2} + 3/8 a_{3,1} a_{0,0} - 3/8 b_{1,3} b_{0,0} \\
 & - 3/2 a_{4,0} b_{0,0} + 1/8 a_{1,1} a_{2,0} + 1/8 a_{0,1} a_{1,2} + 3/8 b_{0,3} a_{0,1} + 1/8 B_{2,1} \\
 & + 3/8 a_{1,3} a_{0,0} + 3/2 b_{0,4} a_{0,0} - 1/8 b_{1,1} b_{2,0} - 1/8 b_{0,2} b_{1,1} \\
 & + 1/4 b_{0,2} a_{0,2} + 1/4 b_{2,2} a_{0,0} + 1/8 b_{1,0} a_{1,2} + 3/8 B_{0,3} \\
 & + 1/8 a_{1,1} a_{0,2} - 1/4 a_{2,0} b_{2,0} + 1/8 A_{1,2} + 1/4 a_{1,0} a_{0,0} \\
 & - 1/4 a_{2,2} b_{0,0} - 3/8 b_{3,1} b_{0,0}) r^3 \\
 & + (1/2 A_{1,0} + 1/2 B_{0,1} + b_{0,2} a_{0,0} - 1/2 b_{1,1} b_{0,0} + 1/2 a_{1,1} a_{0,0} - a_{2,0} b_{0,0}) r
 \end{aligned}$$

On conclut que $f_2(r) = 0$ possède au plus 3 racines positives.

Donc le système (3.5) a au maximum 3 cycles limites.

exemple 3.4.1 On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon (-x - xy^2 + 2x^3 - 2y - x^4) + \epsilon^2 x^4 \\ \dot{y} = x + \epsilon (y + x^2 y - 2y^3) + \epsilon^2 (y^4 - 8xy - y) \end{cases} \quad (3.6)$$

3.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^2

On utilise les coordonnées polaire (r, θ) où $x = r \cos \theta; y = r \sin \theta$. Le système (3.6) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = (r^4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 + r^4 (\cos(\theta))^5 - 2r^4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 - r + r^4 \sin(\theta) - 8r^2 \cos(\theta) \\ + 8r^2 (\cos(\theta))^3 + r (\cos(\theta))^2) \epsilon^2 \\ + (-2 \cos(\theta) r \sin(\theta) - 2r (\cos(\theta))^2 + 4r^3 (\cos(\theta))^2 - r^4 (\cos(\theta))^5 - 2r^3 + r) \epsilon \\ \dot{\theta} = 1 + (-r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 - \cos(\theta) \sin(\theta) - 8r (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + \cos(\theta) r^3 \\ - 2r^3 (\cos(\theta))^3 + r^3 (\cos(\theta))^5) \epsilon^2 \\ + (2 \cos(\theta) \sin(\theta) - 2 (\cos(\theta))^2 - r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 + 2) \epsilon \end{cases}$$

Où d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3)$$

tel que

$$F_1(r, \theta) = -2 \cos(\theta) r \sin(\theta) - 2r (\cos(\theta))^2 + 4r^3 (\cos(\theta))^2 - r^4 (\cos(\theta))^5 - 2r^3 + r$$

et

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) = & +(r^7 (\cos(\theta))^9 \sin(\theta) + 4r^4 (\cos(\theta))^6 \sin(\theta) - 5r^6 (\cos(\theta))^6 \sin(\theta) \\ & + 2r^6 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 + 4r^5 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) - 10r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) - 2r^4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 \\ & + 2 \cos(\theta) r \sin(\theta) + 5r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) - 2r^5 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^4 \sin(\theta) - 3r + 5r^4 (\cos(\theta))^5 \\ & + 4r^3 - 14r^3 (\cos(\theta))^2 + 10r^3 (\cos(\theta))^4 + 8r^2 (\cos(\theta))^3 + 11r (\cos(\theta))^2 - 8r^2 \cos(\theta) \\ & - 8r (\cos(\theta))^4 - 4r^4 (\cos(\theta))^7) \epsilon^2 \end{aligned}$$

On applique la méthode de la moyenne du second ordre

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a

$$f_1(r) = 0$$

On calcule

$$\begin{aligned} y^1(r, s) &= \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta \\ &= -r + r (\cos(s))^2 - \cos(s) r \sin(s) + 2r^3 \cos(s) \sin(s) - 1/5 r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) \\ &\quad - \frac{4}{15} r^4 \sin(s) (\cos(s))^2 - \frac{8}{15} r^4 \sin(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^1(r, s) &= \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(r, s) = \frac{\partial F_1}{\partial r} \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta = (-1 + (\cos(s))^2 - \cos(s) \sin(s) \\
 &+ 6r^2 \cos(s) \sin(s) - 4/5 r^3 (\cos(s))^4 \sin(s) - \frac{16}{15} r^3 (\cos(s))^2 \sin(s) - \frac{32}{15} r^3 \sin(s)) \times \\
 &(-r + r (\cos(s))^2 - \cos(s) r \sin(s) + 2r^3 \cos(s) \sin(s) - 1/5 r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) \\
 &\quad - \frac{4}{15} r^4 \sin(s) (\cos(s))^2 - \frac{8}{15} r^4 \sin(s))
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 f^1(r, s) + F_2(r, s) &= \frac{1}{15} r (-60 + 150r^2 + 120r (\cos(s))^3 + 390r^2 (\cos(s))^4 - 8r^3 (\cos(s))^3 \\
 &+ 45 \cos(s) \sin(s) - 540r^2 (\cos(s))^2 + 133r^3 (\cos(s))^5 + 7r^3 \sin(s) + 48r^5 \sin(s) \\
 &- 126r^3 (\cos(s))^7 - 120r \cos(s) + 16r^3 \cos(s) + 240 (\cos(s))^2 - 180 (\cos(s))^4 \\
 &+ 195r^2 \cos(s) \sin(s) + 5r^3 (\cos(s))^4 \sin(s) - 18r^3 (\cos(s))^2 \sin(s) + 27r^6 (\cos(s))^9 \sin(s) \\
 &+ 126r^3 (\cos(s))^6 \sin(s) - 231r^5 (\cos(s))^6 \sin(s) - 390r^2 (\cos(s))^3 \sin(s) \\
 &+ 420r^4 (\cos(s))^3 \sin(s) - 210r^4 \cos(s) \sin(s) - 72r^5 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
 &+ 16r^6 (\cos(s))^7 \sin(s) + 32r^6 (\cos(s))^5 \sin(s)
 \end{aligned}$$

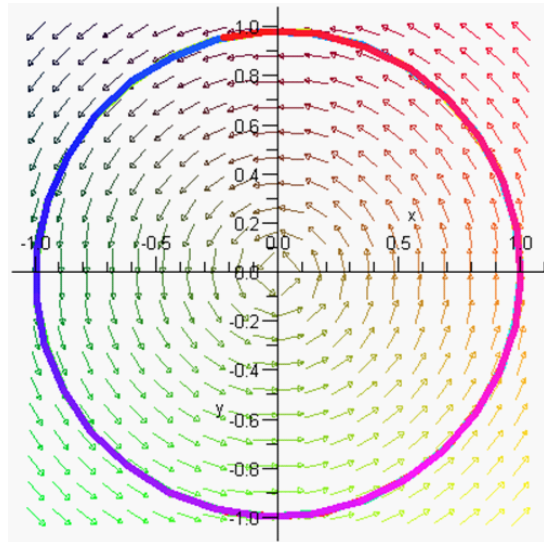
On calcule la fonction $f_2(r)$ tel que

$$\begin{aligned}
 f_2(r) &= f^{10}(r) + g^0(r) \\
 &= \frac{7}{4} r^3 - \frac{1}{2} r
 \end{aligned}$$

La racine positive unique de $f^0(r)$ est $r = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

D'après le théorème (2.2.2) le système (3.6) pour ε suffisamment petit possède un seul cycle limite. Puisque $\frac{\partial}{\partial r} (f^{10}(r) + g^0(r))_{r=\frac{\sqrt{14}}{7}} = 1$, le cycle limite est instable.

3.4. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^2



Cycle limite pour $\varepsilon = 0.001$

3.5 la méthode de la moyenne de second ordre

dans \mathbb{R}^3

On considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x} = -y + \varepsilon(a_{0,0,0} + a_{1,1,1}xyz + a_{2,1,1}x^2yz + a_{1,2,1}xy^2z + a_{1,1,2}xyz^2 + a_{2,2,0}x^2y^2 \\
 + a_{0,1,3}yz^3 + a_{1,0,2}xz^2 + a_{1,0,1}xz + a_{3,0,1}x^3z + a_{0,0,1}z + a_{0,0,2}z^2 + a_{0,0,3}z^3 \\
 + a_{0,0,4}z^4 + a_{1,1,0}xy + a_{2,1,0}x^2y + a_{1,2,0}xy^2 + a_{1,3,0}xy^3 + a_{2,0,1}x^2z + a_{3,0,1}x^3z \\
 + a_{1,0,0}x + a_{2,0,0}x^2 + a_{3,0,0}x^3 + a_{4,0,0}x^4 + a_{0,1,0}y + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,3,0}y^3 + a_{0,4,0}y^4 \\
 + a_{0,1,1}yz + a_{0,2,1}y^2z + a_{0,3,1}y^3z + a_{2,0,2}x^2z^2 + a_{0,1,2}yz^2 + a_{0,2,2}y^2z^2 + a_{1,0,3}xy^3) \\
 + \varepsilon^2(A_{0,0,0} + A_{1,1,1}xyz + A_{2,1,1}x^2yz + A_{1,2,1}xy^2z + A_{1,1,2}xyz^2 + A_{2,2,0}x^2y^2 \\
 + A_{0,1,3}yz^3 + A_{1,0,2}xz^2 + A_{1,0,1}xz + A_{3,0,1}x^3z + A_{0,0,1}z + A_{0,0,2}z^2 + A_{0,0,3}z^3 \\
 + A_{0,0,4}z^4 + A_{1,1,0}xy + A_{2,1,0}x^2y + A_{1,2,0}xy^2 + A_{1,3,0}xy^3 + A_{2,0,1}x^2z + A_{3,0,1}x^3z \\
 + A_{1,0,0}x + A_{2,0,0}x^2 + A_{3,0,0}x^3 + A_{4,0,0}x^4 + A_{0,1,0}y + A_{0,2,0}y^2 + A_{0,3,0}y^3 + A_{0,4,0}y^4 \\
 + A_{0,1,1}yz + A_{0,2,1}y^2z + A_{0,3,1}y^3z + A_{2,0,2}x^2z^2 + A_{0,1,2}yz^2 + A_{0,2,2}y^2z^2 + A_{1,0,3}xy^3) \\
 \dot{y} = -y + \varepsilon(b_{0,0,0} + b_{1,1,1}xyz + b_{2,1,1}x^2yz + b_{1,2,1}xy^2z + b_{1,1,2}xyz^2 + b_{2,2,0}x^2y^2 \\
 + b_{0,1,3}yz^3 + b_{1,0,2}xz^2 + b_{1,0,1}xz + b_{3,0,1}x^3z + b_{0,0,1}z + b_{0,0,2}z^2 + b_{0,0,3}z^3 + b_{0,0,4}z^4 \\
 + b_{1,1,0}xy + b_{2,1,0}x^2y + b_{1,2,0}xy^2 + b_{1,3,0}xy^3 + b_{2,0,1}x^2z + b_{3,0,1}x^3z + b_{1,0,0}x \\
 + b_{2,0,0}x^2 + b_{3,0,0}x^3 + b_{4,0,0}x^4 + b_{0,1,0}y + b_{0,2,0}y^2 + b_{0,3,0}y^3 + b_{0,4,0}y^4 + b_{0,1,1}yz \\
 + b_{0,2,1}y^2z + b_{0,3,1}y^3z + b_{2,0,2}x^2z^2 + b_{0,1,2}yz^2 + b_{0,2,2}y^2z^2 + b_{1,0,3}xy^3) \\
 + \varepsilon^2(B_{0,0,0} + B_{1,1,1}xyz + B_{2,1,1}x^2yz + B_{1,2,1}xy^2z + B_{1,1,2}xyz^2 + B_{2,2,0}x^2y^2 \\
 + B_{0,1,3}yz^3 + B_{1,0,2}xz^2 + B_{1,0,1}xz + B_{3,0,1}x^3z + B_{0,0,1}z + B_{0,0,2}z^2 + B_{0,0,3}z^3 \\
 + B_{0,0,4}z^4 + B_{1,1,0}xy + B_{2,1,0}x^2y + B_{1,2,0}xy^2 + B_{1,3,0}xy^3 + B_{2,0,1}x^2z + B_{3,0,1}x^3z \\
 + B_{1,0,0}x + B_{2,0,0}x^2 + B_{3,0,0}x^3 + B_{4,0,0}x^4 + B_{0,1,0}y + B_{0,2,0}y^2 + B_{0,3,0}y^3 + B_{0,4,0}y^4 \\
 + B_{0,1,1}yz + B_{0,2,1}y^2z + B_{0,3,1}y^3z + B_{2,0,2}x^2z^2 + B_{0,1,2}yz^2 + B_{0,2,2}y^2z^2 + B_{1,0,3}xy^3) \\
 \dot{z} = \varepsilon(c_{0,0,0} + c_{1,1,1}xyz + c_{2,1,1}x^2yz + c_{1,2,1}xy^2z + c_{1,1,2}xyz^2 + c_{2,2,0}x^2y^2 \\
 + c_{0,1,3}yz^3 + c_{1,0,2}xz^2 + c_{1,0,1}xz + c_{3,0,1}x^3z + c_{0,0,1}z + c_{0,0,2}z^2 + c_{0,0,3}z^3 \\
 + c_{0,0,4}z^4 + c_{1,1,0}xy + c_{2,1,0}x^2y + c_{1,2,0}xy^2 + c_{1,3,0}xy^3 + c_{2,0,1}x^2z + c_{3,0,1}x^3z \\
 + c_{1,0,0}x + c_{2,0,0}x^2 + c_{3,0,0}x^3 + c_{4,0,0}x^4 + c_{0,1,0}y + c_{0,2,0}y^2 + c_{0,3,0}y^3 + c_{0,4,0}y^4 \\
 + c_{0,1,1}yz + c_{0,2,1}y^2z + c_{0,3,1}y^3z + c_{2,0,2}x^2z^2 + c_{0,1,2}yz^2 + c_{0,2,2}y^2z^2 + c_{1,0,3}xy^3) \\
 + \varepsilon^2(C_{0,0,0} + C_{1,1,1}xyz + C_{2,1,1}x^2yz + C_{1,2,1}xy^2z + C_{1,1,2}xyz^2 + C_{2,2,0}x^2y^2 \\
 + C_{0,1,3}yz^3 + C_{1,0,2}xz^2 + C_{1,0,1}xz + C_{3,0,1}x^3z + C_{0,0,1}z + C_{0,0,2}z^2 + C_{0,0,3}z^3 \\
 + C_{0,0,4}z^4 + C_{1,1,0}xy + C_{2,1,0}x^2y + C_{1,2,0}xy^2 + C_{1,3,0}xy^3 + C_{2,0,1}x^2z + C_{3,0,1}x^3z \\
 + C_{1,0,0}x + C_{2,0,0}x^2 + C_{3,0,0}x^3 + C_{4,0,0}x^4 + C_{0,1,0}y + C_{0,2,0}y^2 + C_{0,3,0}y^3 \\
 + C_{0,4,0}y^4 + C_{0,1,1}yz + C_{0,2,1}y^2z + C_{0,3,1}y^3z + C_{2,0,2}x^2z^2 + C_{0,1,2}yz^2 \\
 + C_{0,2,2}y^2z^2 + C_{1,0,3}xy^3)
 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

Dans les coordonnées cylindriques on a $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système précédant s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \phi_1(r, \theta, z) \\ \dot{\theta} = \phi_2(r, \theta, z) \\ \dot{z} = \phi_3(r, \theta, z) \end{cases}$$

tel que

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, z) = & \varepsilon(\varepsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{2,2,0} r^4 + (\cos(\theta))^3 a_{2,2,0} r^4 \\ & - \varepsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,2,2} r^2 z^2 + a_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^5 \\ & + b_{0,3,1} r^3 z + \varepsilon B_{0,1,0} r + \cos(\theta) a_{0,0,2} z^2 + \cos(\theta) a_{0,0,1} z \\ & + \cos(\theta) a_{0,0,4} z^4 + \sin(\theta) b_{0,0,1} z + \sin(\theta) b_{0,0,2} z^2 - a_{1,0,3} r z^3 \\ & + \sin(\theta) b_{0,0,3} z^3 + \sin(\theta) b_{0,0,4} z^4 + 4 a_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^4 \\ & + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\theta) A_{0,3,1} r^3 z + \cos(\theta) a_{0,0,3} z^3 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,0} r^2 \\ & + \varepsilon \sin(\theta) B_{0,2,1} r^2 z + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,1} r^3 z + \varepsilon A_{1,0,0} r (\cos(\theta))^2 \\ & + \varepsilon A_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^4 + \varepsilon A_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^5 + \cos(\theta) \varepsilon A_{0,0,1} z \\ & + \cos(\theta) \varepsilon A_{0,0,2} z^2 + \cos(\theta) \varepsilon A_{0,0,3} z^3 + \cos(\theta) \varepsilon A_{0,0,4} z^4 + \sin(\theta) \varepsilon B_{0,0,1} z \\ & + \sin(\theta) \varepsilon B_{0,0,2} z^2 + \sin(\theta) \varepsilon B_{0,0,3} z^3 + \sin(\theta) \varepsilon B_{0,0,4} z^4 + a_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z \\ & + \varepsilon A_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + \varepsilon A_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z + 2 a_{1,0,0} r (\cos(\theta))^2 \\ & + (\cos(\theta))^5 b_{1,3,0} r^4 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,0} r^2 - (\cos(\theta))^5 b_{3,1,0} r^4 + \cos(\theta) b_{1,3,0} r^4 \\ & + \cos(\theta) a_{0,4,0} r^4 + (\cos(\theta))^3 b_{3,1,0} r^4 \\ & + \cos(\theta) a_{0,2,0} r^2 + \cos(\theta) b_{1,1,0} r^2 + \sin(\theta) b_{0,4,0} r^4 + \sin(\theta) b_{0,2,0} r^2 \\ & + a_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z + a_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 \\ & + \varepsilon A_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 z - 5 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,0} r^3 + 4 (\cos(\theta))^4 b_{0,3,0} r^3 - a_{1,0,1} r z \\ & - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4,0} r^4 + a_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 + a_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\ & + a_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + a_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) \\ & + \cos(\theta) a_{0,1,0} r \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{1,0,0} r \cos(\theta) + \sin(\theta) b_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\ & + \sin(\theta) b_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + \varepsilon \cos(\theta) B_{1,3,0} r^4 \\ & + \varepsilon \cos(\theta) A_{0,4,0} r^4 + \cos(\theta) b_{1,1,1} r^2 z + \cos(\theta) b_{1,1,2} r^2 z^2 + \cos(\theta) a_{0,2,2} r^2 z^2 \\ & + \cos(\theta) a_{0,2,1} r^2 z + \sin(\theta) b_{0,0,0} + \varepsilon \sin(\theta) B_{0,2,2} r^2 z^2 + \cos(\theta) a_{0,0,0} + b_{0,3,0} r^3 \\ & - (\cos(\theta))^5 a_{2,2,0} r^4 - \varepsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,2,1} r^2 z - \varepsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 A_{0,3,1} r^3 z \\ & - \varepsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 B_{1,2,1} r^3 z + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,1} r^3 z + \varepsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 A_{1,3,0} r^4 \\ & + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\theta) A_{0,3,0} r^3 + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\theta) B_{1,2,0} r^3 + \cos(\theta) \varepsilon A_{0,0,0} + \sin(\theta) \varepsilon B_{0,0,0} \\ & + a_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + \varepsilon B_{0,3,0} r^3 + (\cos(\theta))^5 a_{0,4,0} r^4 - a_{1,0,2} r z^2 \\ & + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\theta) B_{1,2,1} r^3 z + \varepsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 B_{0,4,0} r^4 \\ & + \varepsilon A_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z + \varepsilon A_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 + \varepsilon A_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 \\ & + \varepsilon A_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 + \varepsilon A_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\epsilon B_{0,1,2}r z^2 + \epsilon B_{0,1,1}r z + \epsilon B_{0,1,3}r z^3 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4,0}r^4 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2,0}r^4 + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,0}r^3 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3,0}r^4 + 4 a_{3,0,1}r^3 (\cos(\theta))^4 z \\
& + 2 a_{1,0,2}r (\cos(\theta))^2 z^2 + 2 a_{1,0,3}r (\cos(\theta))^2 z^3 + 2 a_{1,0,1}r (\cos(\theta))^2 z \\
& - 5 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,1}r^3 z - 2 (\cos(\theta))^2 \epsilon B_{0,3,0}r^3 - 2 (\cos(\theta))^3 \epsilon B_{1,3,0}r^4 \\
& - 2 (\cos(\theta))^3 \epsilon A_{0,4,0}r^4 - 3 (\cos(\theta))^2 r^3 z a_{3,0,1} + 4 (\cos(\theta))^4 b_{0,3,1}r^3 z \\
& - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,4,0}r^4 + \epsilon (\cos(\theta))^2 A_{1,2,1}r^3 z \\
& + \epsilon (\cos(\theta))^2 B_{2,1,1}r^3 z + \epsilon \cos(\theta) B_{1,1,2}r^2 z^2 + \epsilon \cos(\theta) A_{0,2,1}r^2 z \\
& + \epsilon \cos(\theta) A_{0,2,2}r^2 z^2 + \epsilon \cos(\theta) B_{1,1,1}r^2 z + (\cos(\theta))^4 \epsilon B_{0,3,1}r^3 z \\
& - (\cos(\theta))^4 \epsilon A_{1,2,1}r^3 z - (\cos(\theta))^2 \epsilon B_{0,1,2}r z^2 - (\cos(\theta))^2 \epsilon B_{0,1,1}r z \\
& - (\cos(\theta))^4 \epsilon B_{2,1,1}r^3 z - (\cos(\theta))^3 \epsilon B_{1,1,2}r^2 z^2 - (\cos(\theta))^2 \epsilon B_{0,1,3}r z^3 \\
& - (\cos(\theta))^3 \epsilon A_{0,2,1}r^2 z - (\cos(\theta))^3 \epsilon A_{0,2,2}r^2 z^2 - (\cos(\theta))^3 \epsilon B_{1,1,1}r^2 z \\
& - 2 \epsilon \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,4,0}r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3,0}r^4 - 3 (\cos(\theta))^2 r^3 a_{3,0,0} \\
& - 2 (\cos(\theta))^2 \epsilon B_{0,3,1}r^3 z) \\
& - r + \epsilon^2 A_{0,3,0}r^3 + \epsilon^2 A_{0,1,0}r + \epsilon a_{0,3,0}r^3 + \epsilon a_{0,1,0}r \\
& - \epsilon b_{1,0,1}r (\cos(\theta))^2 z + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,2,0}r^2 + \sin(\theta) \epsilon a_{0,4,0}r^4 \\
& + \sin(\theta) \epsilon a_{0,2,0}r^2 + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,4,0}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 \epsilon a_{0,4,0}r^4 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 \epsilon^2 B_{1,3,0}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 \epsilon b_{1,3,0}r^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 \epsilon^2 A_{0,2,0}r^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 \epsilon a_{0,2,0}r^2 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 \epsilon^2 A_{2,2,0}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 \epsilon a_{2,2,0}r^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 \epsilon^2 A_{1,2,0}r^3 - \sin(\theta) \epsilon b_{1,3,0}r^4 (\cos(\theta))^2 \\
& + \sin(\theta) \epsilon a_{0,2,1}r^2 z + \sin(\theta) \epsilon a_{1,2,1}r^3 \cos(\theta) z \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{1,2,0}r^3 \cos(\theta) + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{2,2,0}r^4 (\cos(\theta))^2 \\
& - \sin(\theta) \epsilon^2 B_{1,3,0}r^4 (\cos(\theta))^2 - \sin(\theta) \cos(\theta) \epsilon b_{0,3,0}r^3 \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta) \epsilon^2 B_{0,3,0}r^3 - \sin(\theta) \cos(\theta) \epsilon b_{0,3,1}r^3 z \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta) \epsilon^2 B_{0,3,1}r^3 z + \sin(\theta) \epsilon a_{0,2,2}r^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) \epsilon a_{1,2,0}r^3 \cos(\theta) + \sin(\theta) \epsilon a_{2,2,0}r^4 (\cos(\theta))^2 \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,2,2}r^2 z^2 + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,2,1}r^2 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 \epsilon a_{0,2,2}r^2 z^2 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 \epsilon^2 A_{0,2,2}r^2 z^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 \epsilon^2 A_{0,2,1}r^2 z \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 \epsilon^2 B_{0,3,1}r^3 z + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{1,2,1}r^3 \cos(\theta) z
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
\phi_2 = & -\frac{1}{r}(-\sin(\theta)(\cos(\theta))^2 \epsilon a_{0,2,1} r^2 z - \sin(\theta)(\cos(\theta))^3 \epsilon^2 A_{1,2,1} r^3 z \\
& - 2 \sin(\theta)(\cos(\theta))^2 \epsilon a_{0,4,0} r^4 - 2 \sin(\theta)(\cos(\theta))^2 \epsilon^2 A_{0,4,0} r^4 \\
& + \sin(\theta)(\cos(\theta))^3 \epsilon^2 B_{0,3,0} r^3 + \sin(\theta)(\cos(\theta))^4 \epsilon^2 A_{0,4,0} r^4 \\
& - 2(\cos(\theta))^2 \epsilon a_{0,3,1} r^3 z - 2(\cos(\theta))^2 \epsilon^2 A_{0,3,1} r^3 z \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 - \epsilon^2 B_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 z \\
& + (\cos(\theta))^4 \epsilon b_{1,2,1} r^3 z - (\cos(\theta))^4 \epsilon a_{2,1,1} r^3 z \\
& + (\cos(\theta))^4 \epsilon^2 B_{1,2,1} r^3 z - (\cos(\theta))^4 \epsilon^2 A_{2,1,1} r^3 z \\
& + (\cos(\theta))^3 \epsilon b_{0,2,1} r^2 z - 2(\cos(\theta))^3 \epsilon^2 A_{1,3,0} r^4 \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{1,0,0} r \cos(\theta) + (\cos(\theta))^3 \epsilon^2 B_{0,2,1} r^2 z \\
& + (\cos(\theta))^3 \epsilon^2 B_{0,2,2} r^2 z^2 + (\cos(\theta))^3 \epsilon b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - (\cos(\theta))^3 \epsilon^2 A_{1,1,1} r^2 z - (\cos(\theta))^3 \epsilon a_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& - (\cos(\theta))^3 \epsilon^2 A_{1,1,2} r^2 z^2 - (\cos(\theta))^3 \epsilon a_{1,1,1} r^2 z \\
& - (\cos(\theta))^2 \epsilon a_{0,1,1} r z - (\cos(\theta))^2 \epsilon a_{0,1,2} r z^2 \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,0,1} z + \sin(\theta) \epsilon a_{0,0,3} z^3 + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,0,4} z^4 + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,0,3} z^3 \\
& - \cos(\theta) \epsilon^2 B_{0,0,0} - \cos(\theta) \epsilon b_{0,0,0} + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{0,0,0} + \sin(\theta) \epsilon a_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + \sin(\theta) \epsilon a_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + 2 \cos(\theta) \epsilon a_{1,0,0} r \sin(\theta) + 4 \epsilon r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z a_{3,0,1} \\
& - \epsilon b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z - \epsilon b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z - \epsilon b_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& - \epsilon b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 - \epsilon b_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 - \epsilon^2 B_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z \\
& - \epsilon^2 B_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 - \epsilon^2 B_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 - \epsilon b_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& - \epsilon b_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) - \epsilon b_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
& - \epsilon b_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 + 4 \epsilon r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) b_{0,3,0} \\
& + 4 \epsilon r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) a_{3,0,0} - \epsilon^2 B_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& - \epsilon^2 B_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) - \epsilon^2 B_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
& - \epsilon^2 B_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z - \epsilon^2 B_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 \\
& - \cos(\theta) \epsilon^2 B_{0,1,0} r \sin(\theta) + 2 \cos(\theta) \epsilon a_{1,0,2} r \sin(\theta) z^2 + 2 \cos(\theta) \epsilon a_{1,0,1} r \sin(\theta) z \\
& - \cos(\theta) \epsilon^2 B_{0,1,1} r \sin(\theta) z - \cos(\theta) \epsilon^2 B_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 - \cos(\theta) \epsilon^2 B_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 \\
& + \sin(\theta) \epsilon a_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2 \\
& + \sin(\theta) \epsilon a_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{1,0,1} r \cos(\theta) z + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& + \sin(\theta) \epsilon^2 A_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z \\
\phi_3 = & \epsilon(c_{0,1,0} r \sin(\theta) + c_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 + c_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z + c_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2 \\
& + (-3c_{0,4,0} - 3c_{4,0,0}) r^4 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 + c_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 \\
& + c_{0,1,1} r \sin(\theta) z + c_{0,3,1} r^3 (\sin(\theta))^3 z + c_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 \\
& + c_{0,2,2} r^2 (\sin(\theta))^2 z^2 + c_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + c_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z \\
& + c_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + c_{1,2,1} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 z \\
& + c_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 - c_{2,0,1} r^2 (\sin(\theta))^2 z + c_{0,2,0} r^2 (\sin(\theta))^2 \\
& - c_{0,2,0} r^2 (\cos(\theta))^2 + c_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + c_{0,3,0} r^3 (\sin(\theta))^3 \\
& + c_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 + c_{1,0,0} r \cos(\theta) + c_{0,4,0} r^4 (\sin(\theta))^4 + c_{1,0,1} r \cos(\theta) z \\
& - c_{0,2,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 + c_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + c_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
& + c_{1,2,0} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 + c_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) (\sin(\theta))^3 + c_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z \\
& + \epsilon^2 (C_{0,0,1} z + C_{0,0,2} z^2 + C_{0,0,3} z^3 + C_{0,0,4} z^4 + C_{0,0,0} + C_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
& + C_{1,2,1} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 z + C_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 + C_{0,2,1} r^2 (\sin(\theta))^2 z \\
& + C_{0,3,1} r^3 (\sin(\theta))^3 z + C_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 + C_{0,2,2} r^2 (\sin(\theta))^2 z^2 + C_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 \\
& + C_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + C_{1,0,1} r \cos(\theta) z + C_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& + C_{0,4,0} r^4 (\sin(\theta))^4 + C_{0,3,0} r^3 (\sin(\theta))^3 + C_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^3 + C_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + C_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 + C_{1,0,0} r \cos(\theta) + C_{0,2,0} r^2 (\sin(\theta))^2 + C_{0,1,0} r \sin(\theta) \\
& + C_{0,1,1} r \sin(\theta) z + C_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z + C_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& + C_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + C_{1,2,0} r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 \\
& + C_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 + C_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) (\sin(\theta))^3 + C_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2 \\
& + C_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 + C_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 + C_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z)
\end{aligned}$$

où d'une manière équivalente

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \epsilon F_{11}(r, \theta, z) + \epsilon^2 F_{21}(r, \theta, z) + O(\epsilon^3) \\ \frac{dz}{d\theta} = \epsilon F_{12}(r, \theta, z) + \epsilon^2 F_{22}(r, \theta, z) + O(\epsilon^3) \end{cases}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

tel que

$$\begin{aligned}
F_{11}(r, \theta, z) = & -a_{1,0,1}rz + \cos(\theta) a_{0,4,0}r^4 + (\cos(\theta))^3 b_{3,1,0}r^4 + \cos(\theta) a_{0,0,3}z^3 + \sin(\theta) b_{0,0,4}z^4 \\
& -2(\cos(\theta))^3 a_{0,4,0}r^4 + \cos(\theta) a_{0,2,0}r^2 + a_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^3 - (\cos(\theta))^5 b_{3,1,0}r^4 \\
& + (\cos(\theta))^5 a_{0,4,0}r^4 + 2a_{1,0,1}r (\cos(\theta))^2 z + a_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^3 z + 4a_{3,0,1}r^3 (\cos(\theta))^4 z \\
& + 2a_{1,0,2}r (\cos(\theta))^2 z^2 + a_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 + 2a_{1,0,3}r (\cos(\theta))^2 z^3 \\
& + a_{3,1,0}r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) + a_{1,1,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + a_{2,1,0}r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
& + \cos(\theta) a_{0,1,0}r \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) b_{1,0,0}r \cos(\theta) \\
& + \sin(\theta) b_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) b_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^4 + 2a_{1,0,0}r (\cos(\theta))^2 \\
& + 4a_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^4 + a_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^5 + \cos(\theta) a_{0,0,4}z^4 + \cos(\theta) a_{0,0,1}z \\
& + \cos(\theta) a_{0,0,2}z^2 + \sin(\theta) b_{0,0,1}z + \sin(\theta) b_{0,0,2}z^2 + \sin(\theta) b_{0,0,3}z^3 + \cos(\theta) a_{0,0,0} \\
& + \sin(\theta) b_{0,0,0} + a_{1,1,1}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + a_{1,1,2}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 \\
& + a_{2,1,1}r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z + \cos(\theta) a_{0,1,1}r \sin(\theta) z + \cos(\theta) a_{0,1,2}r \sin(\theta) z^2 \\
& + \cos(\theta) a_{0,1,3}r \sin(\theta) z^3 + \sin(\theta) b_{1,0,1}r \cos(\theta) z + \sin(\theta) b_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& + \sin(\theta) b_{3,0,1}r^3 (\cos(\theta))^3 z + \sin(\theta) b_{1,0,2}r \cos(\theta) z^2 + \sin(\theta) b_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) b_{1,0,3}r \cos(\theta) z^3 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2,0}r^4 - a_{1,0,2}r z^2 - a_{1,0,0}r - a_{1,0,3}r z^3 \\
& + b_{0,3,0}r^3 + b_{0,3,1}r^3 z + 4(\cos(\theta))^4 b_{0,3,0}r^3 + (\cos(\theta))^5 b_{1,3,0}r^4 - 5(\cos(\theta))^2 b_{0,3,1}r^3 z \\
& + 4(\cos(\theta))^4 b_{0,3,1}r^3 z - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,2}r^2 z^2 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,1}r^2 z - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,2}r^2 z^2 \\
& - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,1}r^2 z - 3(\cos(\theta))^2 r^3 z a_{3,0,1} + \cos(\theta) b_{1,1,2}r^2 z^2 + \cos(\theta) a_{0,2,1}r^2 z \\
& + \cos(\theta) a_{0,2,2}r^2 z^2 + \cos(\theta) b_{1,1,1}r^2 z - 5(\cos(\theta))^2 b_{0,3,0}r^3 + \cos(\theta) b_{1,3,0}r^4 \\
& - 2(\cos(\theta))^3 b_{1,3,0}r^4 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,0}r^2 - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,0}r^2 + (\cos(\theta))^3 a_{2,2,0}r^4 \\
& - 3(\cos(\theta))^2 r^3 a_{3,0,0} + \cos(\theta) b_{1,1,0}r^2 + \sin(\theta) b_{0,4,0}r^4 + \sin(\theta) b_{0,2,0}r^2 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2,0}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,0}r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,0}r^3 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3,0}r^4 + \sin(\theta) b_{0,2,2}r^2 z^2 + \sin(\theta) b_{0,2,1}r^2 z + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,0}r^3 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4,0}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2,0}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3,0}r^4 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,0}r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,0}r^2 - 2\sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,4,0}r^4 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,1}r^3 z + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,1}r^3 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,1}r^2 z \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,1}r^3 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,1}r^3 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,2}r^2 z^2 \\
& - \frac{1}{r}(-a_{1,0,1}rz + \sin(s) b_{0,0,2}z^2 + (\cos(s))^5 a_{0,4,0}r^4 + \cos(s) a_{0,0,2}z^2 + 2a_{1,0,0}r (\cos(s))^2 \\
& - (\cos(s))^5 b_{3,1,0}r^4 + 4a_{3,0,0}r^3 (\cos(s))^4 + \sin(s) b_{0,0,1}z + \cos(s) a_{0,0,1}z + \sin(s) b_{0,0,3}z^3 \\
& - (\cos(s))^3 b_{1,1,0}r^2 + (\cos(s))^3 a_{2,2,0}r^4 - 3(\cos(s))^2 r^3 a_{3,0,0} + \cos(s) b_{1,1,0}r^2 \\
& + \sin(s) b_{0,4,0}r^4 + \sin(s) b_{0,2,0}r^2 + \sin(s) \cos(s) b_{1,2,1}r^3 z + \sin(s) \cos(s) a_{0,3,1}r^3 z
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3. PERTURBATION D'UN CENTRE LINÉAIRE PAR DES
POLYNÔMES DE DEGRÉ 4

$$\begin{aligned}
& -\sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,1} r^2 z - \sin(s) (\cos(s))^3 b_{1,2,1} r^3 z - \sin(s) (\cos(s))^3 a_{0,3,1} r^3 z \\
& -\sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,2} r^2 z^2 + \cos(s) a_{0,2,0} r^2 + a_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^3 - 2 (\cos(s))^3 a_{0,4,0} r^4 \\
& -a_{1,0,2} r z^2 - a_{1,0,0} r - a_{1,0,3} r z^3 + b_{0,3,0} r^3 + \cos(s) a_{0,0,3} z^3 + \sin(s) b_{0,0,4} z^4 + b_{0,3,1} r^3 z \\
& + (\cos(s))^3 b_{3,1,0} r^4 + \cos(s) a_{0,4,0} r^4 + \cos(s) a_{0,0,0} + 2 a_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z \\
& + a_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z + 4 a_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z + 2 a_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 + a_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2 \\
& + 2 a_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^3 + a_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) + a_{1,1,0} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + a_{2,1,0} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) + \cos(s) a_{0,1,0} r \sin(s) + \sin(s) b_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^3 \\
& + \sin(s) b_{1,0,0} r \cos(s) + \sin(s) b_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 + \sin(s) b_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^4 \\
& -5 (\cos(s))^2 b_{0,3,1} r^3 z + 4 (\cos(s))^4 b_{0,3,1} r^3 z - (\cos(s))^3 b_{1,1,2} r^2 z^2 - (\cos(s))^3 a_{0,2,1} r^2 z \\
& - (\cos(s))^3 a_{0,2,2} r^2 z^2 - (\cos(s))^3 b_{1,1,1} r^2 z - 3 (\cos(s))^2 r^3 z a_{3,0,1} + a_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^5 \\
& - (\cos(s))^5 a_{2,2,0} r^4 + 4 (\cos(s))^4 b_{0,3,0} r^3 + (\cos(s))^5 b_{1,3,0} r^4 - 5 (\cos(s))^2 b_{0,3,0} r^3 \\
& + \cos(s) b_{1,3,0} r^4 - 2 (\cos(s))^3 b_{1,3,0} r^4 - (\cos(s))^3 a_{0,2,0} r^2 + a_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z \\
& + a_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z^2 + a_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z + \cos(s) a_{0,1,1} r \sin(s) z \\
& + \cos(s) a_{0,1,2} r \sin(s) z^2 + \cos(s) a_{0,1,3} r \sin(s) z^3 + \sin(s) b_{1,0,1} r \cos(s) z \\
& + \sin(s) b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 z + \sin(s) b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^3 z + \sin(s) b_{1,0,2} r \cos(s) z^2 \\
& + \sin(s) b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 + \sin(s) b_{1,0,3} r \cos(s) z^3 + \cos(s) b_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& + \cos(s) a_{0,2,1} r^2 z + \cos(s) a_{0,2,2} r^2 z^2 + \cos(s) b_{1,1,1} r^2 z - \sin(s) (\cos(s))^4 b_{2,2,0} r^4 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 b_{1,2,0} r^3 - \sin(s) (\cos(s))^3 a_{0,3,0} r^3 - \sin(s) (\cos(s))^4 a_{1,3,0} r^4 \\
& + \sin(s) b_{0,2,2} r^2 z^2 + \sin(s) b_{0,2,1} r^2 z + \sin(s) \cos(s) b_{1,2,0} r^3 + \sin(s) (\cos(s))^4 b_{0,4,0} r^4 \\
& + \sin(s) (\cos(s))^2 b_{2,2,0} r^4 + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{1,3,0} r^4 + \sin(s) \cos(s) a_{0,3,0} r^3 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,0} r^2 - 2 \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,4,0} r^4 + \sin(s) b_{0,0,0} + \cos(s) a_{0,0,4} z^4 \\
& (-a_{0,1,3} r z^3 - a_{0,1,2} r z^2 - a_{0,3,1} r^3 z - a_{0,1,1} r z - a_{0,3,0} r^3 - a_{0,1,0} r + (\cos(s))^5 a_{3,1,0} r^4 \\
& + 2 (\cos(s))^2 a_{0,3,0} r^3 + 2 (\cos(s))^3 a_{1,3,0} r^4 - \sin(s) a_{0,2,0} r^2 - \sin(s) a_{0,4,0} r^4 \\
& + b_{2,2,0} r^4 (\cos(s))^3 + \cos(s) b_{0,2,0} r^2 + b_{1,2,0} r^3 (\cos(s))^2 - a_{2,1,0} r^3 (\cos(s))^2 \\
& - (\cos(s))^4 a_{0,3,0} r^3 - (\cos(s))^5 a_{1,3,0} r^4 + (\cos(s))^5 b_{0,4,0} r^4 + (\cos(s))^2 a_{0,1,0} r \\
& + \cos(s) b_{0,4,0} r^4 - a_{1,3,0} r^4 \cos(s) + (\cos(s))^3 a_{1,1,0} r^2 - (\cos(s))^3 b_{0,2,0} r^2 \\
& + (\cos(s))^4 a_{2,1,0} r^3 - (\cos(s))^4 b_{1,2,0} r^3 - (\cos(s))^5 b_{2,2,0} r^4 - \sin(s) a_{0,0,4} z^4 \\
& - \sin(s) a_{0,0,1} z - \sin(s) a_{0,0,2} z^2 + \cos(s) b_{0,0,4} z^4 + \cos(s) b_{0,0,1} z + \cos(s) b_{0,0,2} z^2 \\
& + \cos(s) b_{0,0,3} z^3 + b_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^5 + b_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^3 + b_{1,0,0} r (\cos(s))^2 \\
& + b_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^4 - 2 (\cos(s))^3 b_{0,4,0} r^4 - a_{1,1,0} r^2 \cos(s) - a_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^3 \\
& - \sin(s) a_{0,0,3} z^3 - \sin(s) a_{1,2,1} r^3 \cos(s) z + \sin(s) \cos(s) b_{0,3,1} r^3 z
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,1} r^2 z + b_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z + b_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z^2 \\
& - 2 \cos(s) a_{1,0,2} r \sin(s) z^2 + \cos(s) b_{0,0,0} - \sin(s) a_{0,0,0} - 2 \cos(s) a_{1,0,1} r \sin(s) z \\
& - \sin(s) a_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 z - \sin(s) a_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - 2 \cos(s) a_{1,0,3} r \sin(s) z^3 - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z b_{0,3,1} - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z a_{3,0,1} \\
& + \sin(s) b_{1,3,0} r^4 (\cos(s))^2 - \sin(s) a_{0,2,1} r^2 z - \sin(s) a_{0,2,2} r^2 z^2 - \sin(s) a_{1,2,0} r^3 \cos(s) \\
& + \sin(s) \cos(s) b_{0,3,0} r^3 + b_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^3 + b_{1,1,0} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + b_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) b_{0,3,0} - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) a_{3,0,0} \\
& - (\cos(s))^4 b_{1,2,1} r^3 z + (\cos(s))^4 a_{2,1,1} r^3 z - \sin(s) a_{2,2,0} r^4 (\cos(s))^2 \\
& + 2 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,4,0} r^4 + 2 (\cos(s))^2 a_{0,3,1} r^3 z - (\cos(s))^3 b_{0,2,1} r^2 z \\
& - (\cos(s))^3 b_{0,2,2} r^2 z^2 + (\cos(s))^3 a_{1,1,2} r^2 z^2 + (\cos(s))^3 a_{1,1,1} r^2 z + \cos(s) b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - a_{1,1,1} r^2 \cos(s) z - \sin(s) a_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^4 - \sin(s) a_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 \\
& - 2 \cos(s) a_{1,0,0} r \sin(s) + b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z + b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z + b_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 \\
& + b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2 + (\cos(s))^2 a_{0,1,1} r z + (\cos(s))^2 a_{0,1,2} r z^2 + (\cos(s))^2 a_{0,1,3} r z^3 \\
& - (\cos(s))^4 a_{0,3,1} r^3 z - a_{1,1,2} r^2 \cos(s) z^2 - a_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^2 z + b_{1,2,1} r^3 (\cos(s))^2 z \\
& + \cos(s) b_{0,2,1} r^2 z + b_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z - \sin(s) (\cos(s))^4 a_{0,4,0} r^4 - \sin(s) (\cos(s))^4 b_{1,3,0} r^4 \\
& + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,0} r^2 + \sin(s) (\cos(s))^4 a_{2,2,0} r^4 \\
& + \sin(s) B_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 z + \sin(s) B_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^3 z + \sin(s) B_{1,0,2} r \cos(s) z^2 \\
& + \sin(s) B_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 + \sin(s) B_{1,0,3} r \cos(s) z^3 + A_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 B_{1,2,1} r^3 z - \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,2,1} r^2 z - \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 A_{0,3,1} r^3 z - (\cos(s))^2 B_{0,1,1} r z - (\cos(s))^4 A_{1,2,1} r^3 z - (\cos(s))^2 B_{0,1,3} r z^3 \\
& - (\cos(s))^3 B_{1,1,1} r^2 z - (\cos(s))^3 A_{0,2,2} r^2 z^2 - (\cos(s))^3 A_{0,2,1} r^2 z - (\cos(s))^3 B_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& + \sin(s) B_{0,2,1} r^2 z + \sin(s) B_{0,2,2} r^2 z^2 + \sin(s) (\cos(s))^4 B_{0,4,0} r^4 + \sin(s) (\cos(s))^2 B_{2,2,0} r^4 \\
& + \sin(s) \cos(s) A_{0,3,0} r^3 + \sin(s) (\cos(s))^2 A_{1,3,0} r^4 + \sin(s) \cos(s) B_{1,2,0} r^3 \\
& - 2 \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,4,0} r^4 + A_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) + \sin(s) B_{1,0,0} r \cos(s) \\
& + \sin(s) B_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 + \sin(s) B_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^3 + \sin(s) B_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^4 \\
& - 2 (\cos(s))^2 B_{0,3,1} r^3 z + (\cos(s))^2 B_{2,1,1} r^3 z + (\cos(s))^2 A_{1,2,1} r^3 z + \cos(s) B_{1,1,1} r^2 z \\
& + \cos(s) A_{0,2,2} r^2 z^2 + \cos(s) A_{0,2,1} r^2 z + \cos(s) B_{1,1,2} r^2 z^2 + (\cos(s))^4 B_{0,3,1} r^3 z \\
& - (\cos(s))^4 B_{2,1,1} r^3 z - (\cos(s))^2 B_{0,1,2} r z^2 + \cos(s) A_{0,1,0} r \sin(s) - \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,2,0} r^2 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^4 B_{2,2,0} r^4 - \sin(s) (\cos(s))^4 A_{1,3,0} r^4 - \sin(s) (\cos(s))^3 B_{1,2,0} r^3 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 A_{0,3,0} r^3 + A_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 + A_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^3 + A_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z \\
& + A_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z + A_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z + A_{1,1,0} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + A_{2,1,0} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) + A_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{21}(r, \theta) & B_{0,3,0}r^3 + B_{0,1,0}r + B_{0,1,1}rz + B_{0,1,2}rz^2 + B_{0,1,3}rz^3 + B_{0,3,1}r^3z \\
& + A_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^3 z + A_{3,0,1}r^3 (\cos(\theta))^4 z + A_{1,0,2}r (\cos(\theta))^2 z^2 + A_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^3 z \\
& + A_{1,0,3}r (\cos(\theta))^2 z^3 + A_{1,1,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + A_{2,1,0}r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + \sin(\theta) B_{0,0,0} \\
& + \cos(\theta) A_{0,0,0} + A_{1,0,1}r (\cos(\theta))^2 z + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 B_{0,4,0}r^4 + (\cos(\theta))^5 B_{1,3,0}r^4 \\
& - 2 (\cos(\theta))^2 B_{0,3,0}r^3 + \sin(\theta) B_{0,2,0}r^2 + (\cos(\theta))^2 A_{1,2,0}r^3 + A_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^5 \\
& - (\cos(\theta))^4 B_{2,1,0}r^3 + \cos(\theta) A_{0,0,2}z^2 + (\cos(\theta))^3 B_{3,1,0}r^4 + A_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^4 \\
& + A_{1,0,0}r (\cos(\theta))^2 + \cos(\theta) B_{1,3,0}r^4 - (\cos(\theta))^4 A_{1,2,0}r^3 - (\cos(\theta))^5 A_{2,2,0}r^4 \\
& - (\cos(\theta))^2 B_{0,1,0}r + (\cos(\theta))^5 A_{0,4,0}r^4 + \sin(\theta) B_{0,0,3}z^3 + \cos(\theta) A_{0,4,0}r^4 + (\cos(\theta))^3 A_{2,2,0}r^4 \\
& - (\cos(\theta))^3 A_{0,2,0}r^2 - (\cos(\theta))^3 B_{1,1,0}r^2 - 2 (\cos(\theta))^3 B_{1,3,0}r^4 + \sin(\theta) B_{0,0,4}z^4 \\
& + \cos(\theta) A_{0,2,0}r^2 + \cos(\theta) B_{1,1,0}r^2 + \cos(\theta) A_{0,0,3}z^3 - (\cos(\theta))^5 B_{3,1,0}r^4 + \sin(\theta) B_{0,4,0}r^4 \\
& + (\cos(\theta))^4 B_{0,3,0}r^3 + \cos(\theta) A_{0,0,1}z + \sin(\theta) B_{0,0,2}z^2 + \sin(\theta) B_{0,0,1}z + A_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^3 \\
& + (\cos(\theta))^2 B_{2,1,0}r^3 + \cos(\theta) A_{0,0,4}z^4 - 2 (\cos(\theta))^3 A_{0,4,0}r^4 \\
& - \frac{1}{r}(b_{0,3,0}r^3 - a_{1,0,0}r - a_{1,0,2}rz^2 - a_{1,0,3}rz^3 - a_{1,0,1}rz + b_{0,3,1}r^3z + \sin(\theta) b_{0,0,0} \\
& + \cos(\theta) a_{0,0,0} + (\cos(\theta))^5 a_{0,4,0}r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,4,0}r^4 - 3 (\cos(\theta))^2 r^3 a_{3,0,0} \\
& - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,3,0}r^4 - (\cos(\theta))^5 b_{3,1,0}r^4 + \cos(\theta) b_{1,3,0}r^4 - 5 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,0}r^3 \\
& + 4 a_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^4 + 4 (\cos(\theta))^4 b_{0,3,0}r^3 + 2 a_{1,0,0}r (\cos(\theta))^2 + \cos(\theta) a_{0,2,0}r^2 \\
& + \sin(\theta) b_{0,2,0}r^2 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,0}r^2 + \sin(\theta) b_{0,0,3}z^3 + \cos(\theta) b_{1,1,0}r^2 + \cos(\theta) a_{0,4,0}r^4 \\
& + (\cos(\theta))^3 b_{3,1,0}r^4 + \cos(\theta) a_{0,0,4}z^4 + (\cos(\theta))^3 a_{2,2,0}r^4 + a_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^5 \\
& + \cos(\theta) a_{0,0,2}z^2 + \sin(\theta) b_{0,0,1}z + \cos(\theta) a_{0,0,1}z - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,0}r^2 + a_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^3 \\
& + \cos(\theta) a_{0,0,3}z^3 - (\cos(\theta))^5 a_{2,2,0}r^4 + (\cos(\theta))^5 b_{1,3,0}r^4 + \sin(\theta) b_{0,0,4}z^4 + \sin(\theta) b_{0,4,0}r^4 \\
& + \sin(\theta) b_{0,0,2}z^2 + a_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^3 z + a_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 + a_{1,1,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& + \sin(\theta) b_{0,0,2}z^2 + a_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^3 z + a_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 + a_{1,1,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& + \sin(\theta) b_{1,0,0}r \cos(\theta) + \sin(\theta) b_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) b_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^3 \\
& + \sin(\theta) b_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^4 + \cos(\theta) b_{1,1,1}r^2z + \cos(\theta) b_{1,1,2}r^2z^2 + \cos(\theta) a_{0,2,2}r^2z^2 \\
& + \cos(\theta) a_{0,2,1}r^2z - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,1}r^2z - (\cos(\theta))^3 b_{1,1,2}r^2z^2 - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,2}r^2z^2 \\
& - (\cos(\theta))^3 a_{0,2,1}r^2z + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,0}r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2,0}r^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3,0}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,0}r^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,0}r^3 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,0}r^3 + \sin(\theta) b_{0,2,1}r^2z + \sin(\theta) b_{0,2,2}r^2z^2 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4,0}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2,0}r^4 + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,0}r^3
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3,0} r^4 + 4 a_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z + 2 a_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + 2 a_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 + 2 a_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 z - 5 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,1} r^3 z \\
& - 3 (\cos(\theta))^2 r^3 z a_{3,0,1} + 4 (\cos(\theta))^4 b_{0,3,1} r^3 z - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,4,0} r^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,1} r^3 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,1} r^3 z + \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,1} r^3 z \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,1} r^3 z + a_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z \\
& + a_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 + \cos(\theta) a_{0,1,1} r \sin(\theta) z + \cos(\theta) a_{0,1,2} r \sin(\theta) z^2 \\
& + \cos(\theta) a_{0,1,3} r \sin(\theta) z^3 + \sin(\theta) b_{1,0,1} r \cos(\theta) z + \sin(\theta) b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& + \sin(\theta) b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 z + \sin(\theta) b_{1,0,2} r \cos(\theta) z^2 + \sin(\theta) b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) b_{1,0,3} r \cos(\theta) z^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,1} r^2 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& (-a_{0,3,0} r^3 - a_{0,1,0} r - a_{0,1,1} r z - a_{0,1,2} r z^2 - a_{0,1,3} r z^3 - a_{0,3,1} r^3 z - \sin(\theta) a_{0,0,0} + \cos(\theta) b_{0,0,0} \\
& - (\cos(\theta))^5 b_{2,2,0} r^4 - a_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^3 + (\cos(\theta))^5 b_{0,4,0} r^4 - \sin(\theta) a_{0,0,4} z^4 \\
& + b_{1,2,0} r^3 (\cos(\theta))^2 + \cos(\theta) b_{0,4,0} r^4 - a_{1,3,0} r^4 \cos(\theta) + b_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^5 \\
& - \sin(\theta) a_{0,4,0} r^4 + \cos(\theta) b_{0,0,3} z^3 + \cos(\theta) b_{0,0,2} z^2 + b_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& + b_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) - a_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) z - a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z - a_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) z^2 \\
& + b_{1,2,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + \cos(\theta) b_{0,2,1} r^2 z - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,1} r^2 z - (\cos(\theta))^4 a_{0,3,1} r^3 z \\
& + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,1} r^2 z - a_{1,1,0} r^2 \cos(\theta) - a_{2,1,0} r^3 (\cos(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,0} r \\
& + b_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^3 - (\cos(\theta))^4 b_{1,2,0} r^3 + \cos(\theta) b_{0,2,0} r^2 - (\cos(\theta))^5 a_{1,3,0} r^4 \\
& + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,0} r^2 - \sin(\theta) a_{0,0,2} z^2 + (\cos(\theta))^4 a_{2,1,0} r^3 - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,0} r^2 \\
& - \sin(\theta) a_{0,2,0} r^2 - (\cos(\theta))^4 a_{0,3,0} r^3 + (\cos(\theta))^5 a_{3,1,0} r^4 + b_{1,0,0} r (\cos(\theta))^2 \\
& + \cos(\theta) b_{0,0,4} z^4 + b_{3,0,0} r^3 (\cos(\theta))^4 + 2 (\cos(\theta))^3 a_{1,3,0} r^4 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{0,4,0} r^4 \\
& + 2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3,0} r^3 + b_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + \cos(\theta) b_{0,0,1} z - \sin(\theta) a_{0,0,3} z^3 \\
& - \sin(\theta) a_{0,0,1} z + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,2} r^2 z^2 - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,2} r^2 z^2 + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,2} r z^2 \\
& + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,3} r z^3 + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,1} r z - (\cos(\theta))^4 b_{1,2,1} r^3 z + (\cos(\theta))^4 a_{2,1,1} r^3 z \\
& - \sin(\theta) a_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^2 - \sin(\theta) a_{1,2,0} r^3 \cos(\theta) + \sin(\theta) b_{1,3,0} r^4 (\cos(\theta))^2 \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3,0} r^3 - \sin(\theta) a_{0,2,2} r^2 z^2 - \sin(\theta) a_{0,2,1} r^2 z + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,0} r^2 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{2,2,0} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{0,4,0} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{1,3,0} r^4 \\
& + \cos(\theta) b_{0,2,2} r^2 z^2 - \sin(\theta) a_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 - \sin(\theta) a_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \\
& + b_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 z + b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z + b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z + b_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 + b_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 - 2 \cos(\theta) a_{1,0,0} r \sin(\theta) \\
& + 2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3,1} r^3 z + 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,4,0} r^4 - 4 r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) b_{0,3,0} \\
& - 4 r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) a_{3,0,0} - \sin(\theta) a_{1,2,1} r^3 \cos(\theta) z + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3,1} r^3 z \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,1} r^2 z + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,2} r^2 z^2 + b_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b_{1,1,2}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 - \sin(\theta) a_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 - \sin(\theta) a_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& -2 \cos(\theta) a_{1,0,1}r \sin(\theta) z - 2 \cos(\theta) a_{1,0,2}r \sin(\theta) z^2 - 2 \cos(\theta) a_{1,0,3}r \sin(\theta) z^3 \\
& -4 r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z a_{3,0,1} - 4 r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z b_{0,3,1} \\
& +A_{3,1,0}r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) + \cos(\theta) A_{0,1,0}r \sin(\theta) + \sin(\theta) B_{1,0,0}r \cos(\theta) \\
& + \sin(\theta) B_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) B_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^3 + \sin(\theta) B_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,2,0}r^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 B_{2,2,0}r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 A_{1,3,0}r^4 \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 A_{0,3,0}r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 B_{1,2,0}r^3 + (\cos(\theta))^2 A_{1,2,1}r^3 z \\
& + (\cos(\theta))^2 B_{2,1,1}r^3 z + \sin(\theta) \cos(\theta) B_{1,2,0}r^3 + \sin(\theta) B_{0,2,2}r^2 z^2 + \sin(\theta) B_{0,2,1}r^2 z \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{2,2,0}r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 A_{1,3,0}r^4 + \sin(\theta) \cos(\theta) A_{0,3,0}r^3 \\
& + \cos(\theta) B_{1,1,2}r^2 z^2 + \cos(\theta) A_{0,2,1}r^2 z + \cos(\theta) A_{0,2,2}r^2 z^2 + \cos(\theta) B_{1,1,1}r^2 z \\
& + (\cos(\theta))^4 B_{0,3,1}r^3 z - (\cos(\theta))^4 A_{1,2,1}r^3 z - (\cos(\theta))^2 B_{0,1,2}r z^2 - (\cos(\theta))^2 B_{0,1,1}r z \\
& - (\cos(\theta))^4 B_{2,1,1}r^3 z - (\cos(\theta))^3 B_{1,1,2}r^2 z^2 - (\cos(\theta))^2 B_{0,1,3}r z^3 - (\cos(\theta))^3 A_{0,2,1}r^2 z \\
& - (\cos(\theta))^3 A_{0,2,2}r^2 z^2 - (\cos(\theta))^3 B_{1,1,1}r^2 z + \sin(\theta) \cos(\theta) A_{0,3,1}r^3 z \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) B_{1,2,1}r^3 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,2,1}r^2 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 A_{0,3,1}r^3 z \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 B_{1,2,1}r^3 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,2,2}r^2 z^2 + A_{1,1,1}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
& + A_{2,1,1}r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z + A_{1,1,2}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 + \cos(\theta) A_{0,1,1}r \sin(\theta) z \\
& + \cos(\theta) A_{0,1,2}r \sin(\theta) z^2 - 2 (\cos(\theta))^2 B_{0,3,1}r^3 z - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 B_{0,4,0}r^4 \\
& + \cos(\theta) A_{0,1,3}r \sin(\theta) z^3 + \sin(\theta) B_{1,0,1}r \cos(\theta) z + \sin(\theta) B_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& + \sin(\theta) B_{3,0,1}r^3 (\cos(\theta))^3 z + \sin(\theta) B_{1,0,2}r \cos(\theta) z^2 + \sin(\theta) B_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) B_{1,0,3}r \cos(\theta) z^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{12}(r, \theta, z) = & -c_{2,0,1}r^2 (\sin(\theta))^2 z + c_{3,1,0}r^4 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) - c_{0,2,2}r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + c_{2,1,0}r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + c_{0,1,2}r \sin(\theta) z^2 + c_{0,1,1}r \sin(\theta) z + c_{0,1,3}r \sin(\theta) z^3 \\
& + (-3c_{0,4,0} - 3c_{4,0,0})r^4 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 + c_{1,3,0}r^4 \cos(\theta) (\sin(\theta))^3 \\
& + c_{1,2,0}r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 + c_{3,0,1}r^3 (\cos(\theta))^3 z + c_{1,0,2}r \cos(\theta) z^2 + c_{1,0,3}r \cos(\theta) z^3 \\
& + c_{0,3,1}r^3 (\sin(\theta))^3 z + c_{1,2,1}r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 z + c_{2,1,1}r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
& + c_{1,1,1}r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z + c_{1,1,2}r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 + c_{1,0,1}r \cos(\theta) z + c_{0,2,0}r^2 (\sin(\theta))^2 \\
& + c_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^3 + c_{0,3,0}r^3 (\sin(\theta))^3 + c_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^4 - c_{0,2,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + c_{0,4,0}r^4 (\sin(\theta))^4 + c_{1,0,0}r \cos(\theta) + c_{0,2,2}r^2 (\sin(\theta))^2 z^2 + c_{1,1,0}r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& + c_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^2 z + c_{0,1,0}r \sin(\theta)
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
F_{22}(r, \theta, z) = & C_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^2 + C_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^3 + C_{0,0,1}z + C_{0,4,0}r^4 (\sin(\theta))^4 + C_{0,1,0}r \sin(\theta) \\
& + C_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^4 + C_{1,0,0}r \cos(\theta) + C_{0,2,0}r^2 (\sin(\theta))^2 + C_{0,0,0} + C_{0,1,1}r \sin(\theta) z \\
& + C_{0,2,1}r^2 (\sin(\theta))^2 z + C_{0,3,1}r^3 (\sin(\theta))^3 z + C_{0,1,2}r \sin(\theta) z^2 + C_{0,2,2}r^2 (\sin(\theta))^2 z^2 \\
& + C_{0,1,3}r \sin(\theta) z^3 + C_{1,1,0}r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + C_{1,0,1}r \cos(\theta) z + C_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^2 z \\
& + C_{3,0,1}r^3 (\cos(\theta))^3 z + C_{2,1,0}r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + C_{3,1,0}r^4 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) \\
& + C_{1,2,0}r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 + C_{2,2,0}r^4 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 + C_{1,3,0}r^4 \cos(\theta) (\sin(\theta))^3 \\
& + C_{1,0,2}r \cos(\theta) z^2 + C_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 + C_{1,0,3}r \cos(\theta) z^3 + C_{1,1,1}r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z \\
& + C_{2,1,1}r^3 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + C_{1,2,1}r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 z + C_{1,1,2}r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 \\
& + (-c_{3,0,0}r^2 (\cos(\theta))^3 - c_{0,3,0}r^2 (\sin(\theta))^3 - c_{0,1,2} \sin(\theta) z^2 - c_{0,1,1} \sin(\theta) z \\
& - c_{1,0,3} \cos(\theta) z^3 - c_{1,0,2} \cos(\theta) z^2 - c_{1,0,1} \cos(\theta) z - c_{0,4,0}r^3 (\sin(\theta))^4 \\
& - c_{0,1,3} \sin(\theta) z^3 - c_{4,0,0}r^3 (\cos(\theta))^4 - c_{0,2,0}r (\sin(\theta))^2 + c_{0,2,0}r (\cos(\theta))^2 \\
& - c_{2,1,0}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) - c_{3,1,0}r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) - c_{3,0,1}r^2 (\cos(\theta))^3 z \\
& - c_{1,2,0}r^2 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 - c_{0,1,0} \sin(\theta) + 3r^3 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 c_{0,4,0} \\
& + 3r^3 (\cos(\theta))^2 (\sin(\theta))^2 c_{4,0,0} - c_{1,2,1}r^2 \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 z - c_{1,1,2}r \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 \\
& - c_{2,1,1}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z - c_{1,1,1}r \cos(\theta) \sin(\theta) z - c_{1,3,0}r^3 \cos(\theta) (\sin(\theta))^3 \\
& - c_{0,3,1}r^2 (\sin(\theta))^3 z - c_{0,2,2}r (\sin(\theta))^2 z^2 - c_{1,1,0}r \cos(\theta) \sin(\theta) + c_{2,0,1}r (\sin(\theta))^2 z \\
& + c_{0,2,2}r (\cos(\theta))^2 z^2 - c_{2,0,1}r (\cos(\theta))^2 z - c_{1,0,0} \cos(\theta)) \\
& (-a_{0,1,3}r z^3 - a_{0,1,2}r z^2 - a_{0,3,1}r^3 z - a_{0,1,1}r z - a_{0,3,0}r^3 - a_{0,1,0}r + (\cos(\theta))^5 a_{3,1,0}r^4 \\
& + 2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3,0}r^3 + 2 (\cos(\theta))^3 a_{1,3,0}r^4 - \sin(\theta) a_{0,2,0}r^2 - \sin(\theta) a_{0,4,0}r^4 \\
& + b_{2,2,0}r^4 (\cos(\theta))^3 + \cos(\theta) b_{0,2,0}r^2 + b_{1,2,0}r^3 (\cos(\theta))^2 - a_{2,1,0}r^3 (\cos(\theta))^2 \\
& - (\cos(\theta))^4 a_{0,3,0}r^3 - (\cos(\theta))^5 a_{1,3,0}r^4 + (\cos(\theta))^5 b_{0,4,0}r^4 + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,0}r \\
& + \cos(\theta) b_{0,4,0}r^4 - a_{1,3,0}r^4 \cos(\theta) + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,0}r^2 - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,0}r^2 + (\cos(\theta))^4 a_{2,1,0}r^3 \\
& - (\cos(\theta))^4 b_{1,2,0}r^3 - (\cos(\theta))^5 b_{2,2,0}r^4 - \sin(\theta) a_{0,0,4}z^4 - \sin(\theta) a_{0,0,1}z - \sin(\theta) a_{0,0,2}z^2 \\
& + \cos(\theta) b_{0,0,4}z^4 + \cos(\theta) b_{0,0,1}z + \cos(\theta) b_{0,0,2}z^2 + \cos(\theta) b_{0,0,3}z^3 + b_{4,0,0}r^4 (\cos(\theta))^5 \\
& + b_{2,0,0}r^2 (\cos(\theta))^3 + b_{1,0,0}r (\cos(\theta))^2 + b_{3,0,0}r^3 (\cos(\theta))^4 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{0,4,0}r^4 \\
& - a_{1,1,0}r^2 \cos(\theta) - a_{3,1,0}r^4 (\cos(\theta))^3 - \sin(\theta) a_{0,0,3}z^3 - \sin(\theta) a_{1,2,1}r^3 \cos(\theta) z \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3,1}r^3 z + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,1}r^2 z + b_{1,1,1}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
& + b_{1,1,2}r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 - 2 \cos(\theta) a_{1,0,2}r \sin(\theta) z^2 + \cos(\theta) b_{0,0,0} - \sin(\theta) a_{0,0,0} \\
& - 2 \cos(\theta) a_{1,0,1}r \sin(\theta) z - \sin(\theta) a_{2,0,1}r^2 (\cos(\theta))^2 z - \sin(\theta) a_{2,0,2}r^2 (\cos(\theta))^2 z^2 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,2}r^2 z^2 - 2 \cos(\theta) a_{1,0,3}r \sin(\theta) z^3 - 4r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z b_{0,3,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z a_{3,0,1} + \sin(\theta) b_{1,3,0} r^4 (\cos(\theta))^2 - \sin(\theta) a_{0,2,1} r^2 z - \sin(\theta) a_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - \sin(\theta) a_{1,2,0} r^3 \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{0,3,0} r^3 + b_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^3 + b_{1,1,0} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
& + b_{3,1,0} r^4 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) - 4r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) b_{0,3,0} - 4r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) a_{3,0,0} \\
& - (\cos(\theta))^4 b_{1,2,1} r^3 z + (\cos(\theta))^4 a_{2,1,1} r^3 z - \sin(\theta) a_{2,2,0} r^4 (\cos(\theta))^2 \\
& + 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,4,0} r^4 + 2 (\cos(\theta))^2 a_{0,3,1} r^3 z - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,1} r^2 z \\
& - (\cos(\theta))^3 b_{0,2,2} r^2 z^2 + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,2} r^2 z^2 + (\cos(\theta))^3 a_{1,1,1} r^2 z + \cos(\theta) b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - a_{1,1,1} r^2 \cos(\theta) z - \sin(\theta) a_{4,0,0} r^4 (\cos(\theta))^4 - \sin(\theta) a_{2,0,0} r^2 (\cos(\theta))^2 - 2 \cos(\theta) a_{1,0,0} r \sin(\theta) \\
& + b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z + b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 z + b_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 + b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z^2 \\
& + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,1} r z + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,2} r z^2 + (\cos(\theta))^2 a_{0,1,3} r z^3 - (\cos(\theta))^4 a_{0,3,1} r^3 z \\
& - a_{1,1,2} r^2 \cos(\theta) z^2 - a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + b_{1,2,1} r^3 (\cos(\theta))^2 z + \cos(\theta) b_{0,2,1} r^2 z + b_{1,0,1} r (\cos(\theta)) \\
& - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{0,4,0} r^4 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{1,3,0} r^4 + \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{0,2,0} r^2 \\
& + \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{2,2,0} r^4 + C_{0,0,2} z^2 + C_{0,0,3} z^3 + C_{0,0,4} z^4 + C_{0,3,0} r^3 (\sin(\theta))^3
\end{aligned}$$

On applique la méthode de la moyenne du second ordre pour

$$\begin{pmatrix} f_{11}(r, z) \\ f_{12}(r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{11}(r, \theta, z) d\theta \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{12}(r, \theta, z) d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

un système de deux équations en (r, z)

$$\begin{cases} f_{11}(r, z) = 0 \\ f_{12}(r, z) = 0 \end{cases}$$

On calcule la fonction

$$\begin{pmatrix} f_{21}(r, z) \\ f_{22}(r, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{12}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{12}(r, s, z)}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \int_0^s F_{11}(r, \theta, z) d\theta \\ \int_0^s F_{12}(r, \theta, z) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^s F_{21}(r, s, z) \\ \int_0^s F_{22}(r, s, z) \end{pmatrix} \right] ds$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

tel que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial r} &= 2 a_{1,1,0} r (\cos(s))^2 \sin(s) + 3 a_{2,1,0} r^2 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + 4 a_{3,1,0} r^3 (\cos(\theta))^4 \sin(\theta) \\
&+ \cos(\theta) a_{0,1,0} \sin(\theta) + \sin(\theta) b_{1,0,0} \cos(\theta) + 2 \sin(\theta) b_{2,0,0} r (\cos(\theta))^2 \\
&+ 3 \sin(\theta) b_{3,0,0} r^2 (\cos(\theta))^3 + 4 \sin(\theta) b_{4,0,0} r^3 (\cos(\theta))^4 + 2 \cos(\theta) b_{1,1,1} r z \\
&+ 2 \cos(\theta) b_{1,1,2} r z^2 + 2 \cos(\theta) a_{0,2,2} r z^2 + 2 \cos(\theta) a_{0,2,1} r z - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,1,1} r z \\
&- 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,1,2} r z^2 - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,2,2} r z^2 - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,2,1} r z \\
&+ 3 \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,0} r^2 + 4 a_{4,0,0} r^3 (\cos(\theta))^5 + 4 (\cos(\theta))^3 a_{2,2,0} r^3 \\
&- 4 (\cos(\theta))^5 a_{2,2,0} r^3 - a_{1,0,0} + 2 a_{2,0,0} r (\cos(\theta))^3 + 4 (\cos(\theta))^5 a_{0,4,0} r^3 \\
&- a_{1,0,2} z^2 + 4 (\cos(\theta))^5 b_{1,3,0} r^3 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,1,0} r + 3 b_{0,3,0} r^2 \\
&- 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,2,0} r - 4 (\cos(\theta))^5 b_{3,1,0} r^3 + 4 \cos(\theta) b_{1,3,0} r^3 + 4 \cos(\theta) a_{0,4,0} r^3 \\
&+ 4 (\cos(\theta))^3 b_{3,1,0} r^3 + 2 \cos(\theta) a_{0,2,0} r + 2 \cos(\theta) b_{1,1,0} r + 4 \sin(\theta) b_{0,4,0} r^3 \\
&+ 2 \sin(\theta) b_{0,2,0} r - a_{1,0,3} z^3 - a_{1,0,1} z + 3 b_{0,3,1} r^2 z + 12 (\cos(\theta))^4 b_{0,3,0} r^2 \\
&- 15 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,0} r^2 - 8 (\cos(\theta))^3 a_{0,4,0} r^3 + 2 a_{1,0,0} (\cos(\theta))^2 + 12 a_{3,0,0} r^2 (\cos(\theta))^4 \\
&- 8 (\cos(\theta))^3 b_{1,3,0} r^3 - 9 (\cos(\theta))^2 r^2 a_{3,0,0} + 2 a_{2,0,2} r (\cos(\theta))^3 z^2 + 2 a_{2,0,1} r (\cos(\theta))^3 z \\
&- 4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{2,2,0} r^3 - 4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 a_{1,3,0} r^3 - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,0} r \\
&- 3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,0} r^2 - 3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,0} r^2 + 2 \sin(\theta) b_{0,2,1} r z \\
&+ 2 \sin(\theta) b_{0,2,2} r z^2 + 4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 b_{0,4,0} r^3 + 4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{2,2,0} r^3 \\
&+ 3 \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,0} r^2 + 4 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 a_{1,3,0} r^3 + 12 a_{3,0,1} r^2 (\cos(\theta))^4 z \\
&+ 2 a_{1,0,2} (\cos(\theta))^2 z^2 + 2 a_{1,0,3} (\cos(\theta))^2 z^3 + 2 a_{1,0,1} (\cos(\theta))^2 z - 15 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,1} r^2 z \\
&- 9 (\cos(\theta))^2 r^2 z a_{3,0,1} + 12 (\cos(\theta))^4 b_{0,3,1} r^2 z - 8 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,4,0} r^3 \\
&+ 3 \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,1} r^2 z + 3 \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,1} r^2 z + 2 a_{1,1,1} r (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z \\
&+ 3 a_{2,1,1} r^2 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) z + 2 a_{1,1,2} r (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z^2 + \cos(\theta) a_{0,1,1} \sin(\theta) z \\
&+ \cos(\theta) a_{0,1,2} \sin(\theta) z^2 + \cos(\theta) a_{0,1,3} \sin(\theta) z^3 + \sin(\theta) b_{1,0,1} \cos(\theta) z \\
&+ 2 \sin(\theta) b_{2,0,1} r (\cos(\theta))^2 z + 3 \sin(\theta) b_{3,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 z + \sin(\theta) b_{1,0,2} \cos(\theta) z^2 \\
&+ 2 \sin(\theta) b_{2,0,2} r (\cos(\theta))^2 z^2 + \sin(\theta) b_{1,0,3} \cos(\theta) z^3 - 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,1} r z \\
&- 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,2} r z^2 - 3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,1} r^2 z - 3 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,1} r^2 z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial z} &= \cos(\theta) b_{1,1,1} r^2 + 2 \cos(\theta) b_{1,1,2} r^2 z + 2 \cos(\theta) a_{0,2,2} r^2 z + \cos(\theta) a_{0,2,1} r^2 \\
&- (\cos(\theta))^3 b_{1,1,1} r^2 - 2 (\cos(\theta))^3 b_{1,1,2} r^2 z - 2 (\cos(\theta))^3 a_{0,2,2} r^2 z \\
&- (\cos(\theta))^3 a_{0,2,1} r^2 + \sin(\theta) b_{0,2,1} r^2 + 2 \sin(\theta) b_{0,2,2} r^2 z + 4 a_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^4 \\
&+ 4 a_{1,0,2} r (\cos(\theta))^2 z + 6 a_{1,0,3} r (\cos(\theta))^2 z^2 + 2 a_{1,0,1} r (\cos(\theta))^2 \\
&- 5 (\cos(\theta))^2 b_{0,3,1} r^3 - 3 (\cos(\theta))^2 r^3 a_{3,0,1} + 4 (\cos(\theta))^4 b_{0,3,1} r^3 \\
&- 2 a_{1,0,2} r z + 3 \cos(\theta) a_{0,0,3} z^2 + 2 \cos(\theta) a_{0,0,2} z + \cos(\theta) a_{0,0,1} + 4 \cos(\theta) a_{0,0,4} z^3 \\
&+ \sin(\theta) b_{0,0,1} + 2 \sin(\theta) b_{0,0,2} z + 3 \sin(\theta) b_{0,0,3} z^2 + 4 \sin(\theta) b_{0,0,4} z^3 - 3 a_{1,0,3} r z^2 \\
&- a_{1,0,1} r + b_{0,3,1} r^3 + 2 a_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^3 z + a_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^3 \\
&+ \sin(\theta) \cos(\theta) a_{0,3,1} r^3 + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{1,2,1} r^3 + a_{1,1,1} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \\
&+ a_{2,1,1} r^3 (\cos(\theta))^3 \sin(\theta) + 2 a_{1,1,2} r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) z + \cos(\theta) a_{0,1,1} r \sin(\theta) \\
&+ 2 \cos(\theta) a_{0,1,2} r \sin(\theta) z + 3 \cos(\theta) a_{0,1,3} r \sin(\theta) z^2 + \sin(\theta) b_{1,0,1} r \cos(\theta) \\
&+ \sin(\theta) b_{2,0,1} r^2 (\cos(\theta))^2 + \sin(\theta) b_{3,0,1} r^3 (\cos(\theta))^3 + 2 \sin(\theta) b_{1,0,2} r \cos(\theta) z \\
&+ 2 \sin(\theta) b_{2,0,2} r^2 (\cos(\theta))^2 z + 3 \sin(\theta) b_{1,0,3} r \cos(\theta) z^2 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,1} r^2 \\
&- 2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 b_{0,2,2} r^2 z - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 b_{1,2,1} r^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 a_{0,3,1} r^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{21}(r, s, z)}{\partial r} &= \sin(s) B_{0,2,0} r^2 + (\cos(s))^2 A_{1,2,0} r^3 + B_{0,3,0} r^3 + B_{0,1,0} r + (\cos(s))^5 B_{1,3,0} r^4 \\
&- 2 (\cos(s))^2 B_{0,3,0} r^3 - 2 (\cos(s))^3 B_{1,3,0} r^4 + A_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^5 \\
&- (\cos(s))^4 B_{2,1,0} r^3 + \cos(s) A_{0,0,2} z^2 + (\cos(s))^3 B_{3,1,0} r^4 + A_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^4 \\
&+ A_{1,0,0} r (\cos(s))^2 + \cos(s) B_{1,3,0} r^4 - (\cos(s))^4 A_{1,2,0} r^3 - (\cos(s))^5 A_{2,2,0} r^4 \\
&- (\cos(s))^2 B_{0,1,0} r + (\cos(s))^5 A_{0,4,0} r^4 + \sin(s) B_{0,0,3} z^3 + \cos(s) A_{0,4,0} r^4 + B_{0,1,1} r z \\
&+ (\cos(s))^3 A_{2,2,0} r^4 + B_{0,1,2} r z^2 - (\cos(s))^3 A_{0,2,0} r^2 - (\cos(s))^3 B_{1,1,0} r^2 + B_{0,1,3} r z^3 \\
&+ \sin(s) B_{0,0,4} z^4 + \cos(s) A_{0,2,0} r^2 + \cos(s) B_{1,1,0} r^2 + \cos(s) A_{0,0,3} z^3 \\
&- (\cos(s))^5 B_{3,1,0} r^4 + \sin(s) B_{0,4,0} r^4 + (\cos(s))^4 B_{0,3,0} r^3 + \cos(s) A_{0,0,1} z \\
&+ B_{0,3,1} r^3 z + \sin(s) B_{0,0,2} z^2 + \sin(s) (\cos(s))^4 B_{0,4,0} r^4 + A_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z \\
&+ A_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z + A_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z + A_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 \\
&+ A_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2 + A_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^3 + A_{1,1,0} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
&+ A_{2,1,0} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) + A_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) + \cos(s) A_{0,1,0} r \sin(s) \\
&+ \sin(s) B_{1,0,0} r \cos(s) + \sin(s) B_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 + \sin(s) B_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^3 \\
&+ \sin(s) B_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^4 - \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,2,0} r^2 - \sin(s) (\cos(s))^4 B_{2,2,0} r^4
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& -\sin(s)(\cos(s))^4 A_{1,3,0}r^4 - \sin(s)(\cos(s))^3 A_{0,3,0}r^3 - \sin(s)(\cos(s))^3 B_{1,2,0}r^3 \\
& + (\cos(s))^2 A_{1,2,1}r^3z + (\cos(s))^2 B_{2,1,1}r^3z + \sin(s)\cos(s)B_{1,2,0}r^3 \\
& + \sin(s)B_{0,2,2}r^2z^2 + \sin(s)B_{0,2,1}r^2z + \sin(s)(\cos(s))^2 B_{2,2,0}r^4 \\
& + \sin(s)(\cos(s))^2 A_{1,3,0}r^4 + \sin(s)\cos(s)A_{0,3,0}r^3 + \cos(s)B_{1,1,2}r^2z^2 \\
& + \cos(s)A_{0,2,1}r^2z + \cos(s)A_{0,2,2}r^2z^2 + \cos(s)B_{1,1,1}r^2z + (\cos(s))^4 B_{0,3,1}r^3z \\
& - (\cos(s))^4 A_{1,2,1}r^3z - (\cos(s))^2 B_{0,1,2}r^2z^2 - (\cos(s))^2 B_{0,1,1}r^2z \\
& - (\cos(s))^4 B_{2,1,1}r^3z - (\cos(s))^3 B_{1,1,2}r^2z^2 - (\cos(s))^2 B_{0,1,3}r^3z \\
& - (\cos(s))^3 A_{0,2,1}r^2z - (\cos(s))^3 A_{0,2,2}r^2z^2 - (\cos(s))^3 B_{1,1,1}r^2z + \sin(s)B_{0,0,1}z \\
& + A_{2,0,0}r^2(\cos(s))^3 + (\cos(s))^2 B_{2,1,0}r^3 + \cos(s)A_{0,0,4}z^4 \\
& - 2(\cos(s))^3 A_{0,4,0}r^4 + \sin(s)\cos(s)A_{0,3,1}r^3z + \sin(s)\cos(s)B_{1,2,1}r^3z \\
& - \sin(s)(\cos(s))^2 B_{0,2,1}r^2z - \sin(s)(\cos(s))^3 A_{0,3,1}r^3z - \sin(s)(\cos(s))^3 B_{1,2,1}r^3z \\
& - \sin(s)(\cos(s))^2 B_{0,2,2}r^2z^2 + A_{1,1,1}r^2(\cos(s))^2 \sin(s)z + A_{2,1,1}r^3(\cos(s))^3 \sin(s)z \\
& + A_{1,1,2}r^2(\cos(s))^2 \sin(s)z^2 + \cos(s)A_{0,1,1}r \sin(s)z + \cos(s)A_{0,1,2}r \sin(s)z^2 \\
& + \cos(s)A_{0,1,3}r \sin(s)z^3 \\
& - \frac{1}{r}((\cos(s))^5 a_{0,4,0}r^4 + \cos(s)b_{1,3,0}r^4 + a_{2,0,1}r^2(\cos(s))^3z + a_{2,0,2}r^2(\cos(s))^3z^2 \\
& + a_{1,1,0}r^2(\cos(s))^2 \sin(s) + a_{2,1,0}r^3(\cos(s))^3 \sin(s) \\
& + a_{3,1,0}r^4(\cos(s))^4 \sin(s) + \cos(s)a_{0,1,0}r \sin(s) + \sin(s)b_{1,0,0}r \cos(s) \\
& + \sin(s)b_{2,0,0}r^2(\cos(s))^2 + \sin(s)b_{3,0,0}r^3(\cos(s))^3 + \sin(s)b_{4,0,0}r^4(\cos(s))^4 \\
& + \cos(s)b_{1,1,1}r^2z + \cos(s)b_{1,1,2}r^2z^2 + \cos(s)a_{0,2,2}r^2z^2 + \cos(s)a_{0,2,1}r^2z \\
& - (\cos(s))^3 b_{1,1,1}r^2z - (\cos(s))^3 b_{1,1,2}r^2z^2 - (\cos(s))^3 a_{0,2,2}r^2z^2 \\
& - (\cos(s))^3 a_{0,2,1}r^2z + \sin(s)\cos(s)a_{0,3,0}r^3 - \sin(s)(\cos(s))^4 b_{2,2,0}r^4 \\
& - \sin(s)(\cos(s))^4 a_{1,3,0}r^4 - \sin(s)(\cos(s))^2 b_{0,2,0}r^2 - \sin(s)(\cos(s))^3 a_{0,3,0}r^3 \\
& - \sin(s)(\cos(s))^3 b_{1,2,0}r^3 + \sin(s)b_{0,2,1}r^2z + \sin(s)b_{0,2,2}r^2z^2 \\
& + \sin(s)(\cos(s))^4 b_{0,4,0}r^4 + \sin(s)(\cos(s))^2 b_{2,2,0}r^4 + \sin(s)\cos(s)b_{1,2,0}r^3 \\
& + \sin(s)(\cos(s))^2 a_{1,3,0}r^4 - 2(\cos(s))^3 b_{1,3,0}r^4 - 3(\cos(s))^2 r^3 a_{3,0,0} \\
& - 2(\cos(s))^3 a_{0,4,0}r^4 - (\cos(s))^5 b_{3,1,0}r^4 + 4a_{3,0,0}r^3(\cos(s))^4 - 5(\cos(s))^2 b_{0,3,0}r^3 \\
& + 4(\cos(s))^4 b_{0,3,0}r^3 + 2a_{1,0,0}r(\cos(s))^2 + \cos(s)a_{0,2,0}r^2 + \sin(s)b_{0,2,0}r^2 \\
& - (\cos(s))^3 a_{0,2,0}r^2 + \sin(s)b_{0,0,3}z^3 + \cos(s)b_{1,1,0}r^2 + \cos(s)a_{0,4,0}r^4 \\
& + (\cos(s))^3 b_{3,1,0}r^4 + \cos(s)a_{0,0,4}z^4 + (\cos(s))^3 a_{2,2,0}r^4 + a_{4,0,0}r^4(\cos(s))^5 \\
& + \cos(s)a_{0,0,2}z^2 + \sin(s)b_{0,0,1}z + \cos(s)a_{0,0,1}z - (\cos(s))^3 b_{1,1,0}r^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_{2,0,0}r^2 (\cos (s))^3 + \cos (s) a_{0,0,3}z^3 - (\cos (s))^5 a_{2,2,0}r^4 + (\cos (s))^5 b_{1,3,0}r^4 \\
& -a_{1,0,2}r^2z^2 + \sin (s) b_{0,0,4}z^4 + \sin (s) b_{0,4,0}r^4 + \sin (s) b_{0,0,2}z^2 - a_{1,0,3}r^3z^3 \\
& -a_{1,0,1}rz + b_{0,3,1}r^3z + b_{0,3,0}r^3 + \sin (s) b_{0,0,0} - a_{1,0,0}r + \cos (s) a_{0,0,0} \\
& -\sin (s) (\cos (s))^3 b_{1,2,1}r^3z - \sin (s) (\cos (s))^3 a_{0,3,1}r^3z + \sin (s) \cos (s) a_{0,3,1}r^3z \\
& + \sin (s) \cos (s) b_{1,2,1}r^3z + a_{1,1,1}r^2 (\cos (s))^2 \sin (s) z + a_{2,1,1}r^3 (\cos (s))^3 \sin (s) z \\
& + a_{1,1,2}r^2 (\cos (s))^2 \sin (s) z^2 + \cos (s) a_{0,1,1}r \sin (s) z + \cos (s) a_{0,1,2}r \sin (s) z^2 \\
& + \cos (s) a_{0,1,3}r \sin (s) z^3 + \sin (s) b_{1,0,1}r \cos (s) z + \sin (s) b_{2,0,1}r^2 (\cos (s))^2 z \\
& + \sin (s) b_{3,0,1}r^3 (\cos (s))^3 z + \sin (s) b_{1,0,2}r \cos (s) z^2 + \sin (s) b_{2,0,2}r^2 (\cos (s))^2 z^2 \\
& + \sin (s) b_{1,0,3}r \cos (s) z^3 - \sin (s) (\cos (s))^2 b_{0,2,1}r^2z - \sin (s) (\cos (s))^2 b_{0,2,2}r^2z^2 \\
& + 4 a_{3,0,1}r^3 (\cos (s))^4 z + 2 a_{1,0,2}r (\cos (s))^2 z^2 \\
& + 2 a_{1,0,3}r (\cos (s))^2 z^3 + 2 a_{1,0,1}r (\cos (s))^2 z - 5 (\cos (s))^2 b_{0,3,1}r^3z - 3 (\cos (s))^2 r^3z a_{3,0,1} \\
& + 4 (\cos (s))^4 b_{0,3,1}r^3z - 2 \sin (s) (\cos (s))^2 b_{0,4,0}r^4 (-a_{2,1,0}r^3 (\cos (s))^2 + \cos (s) b_{0,0,4}z^4 \\
& - (\cos (s))^5 b_{2,2,0}r^4 - a_{3,1,0}r^4 (\cos (s))^3 + (\cos (s))^5 b_{0,4,0}r^4 \\
& - \sin (s) a_{0,4,0}r^4 - \sin (s) a_{0,0,4}z^4 - \sin (s) a_{0,0,1}z + \cos (s) b_{0,0,3}z^3 + \cos (s) b_{0,0,2}z^2 \\
& - a_{1,1,0}r^2 \cos (s) + \cos (s) b_{0,0,1}z - (\cos (s))^4 a_{0,3,0}r^3 + b_{2,2,0}r^4 (\cos (s))^3 \\
& + \cos (s) b_{0,4,0}r^4 - a_{1,3,0}r^4 \cos (s) + b_{1,2,0}r^3 (\cos (s))^2 + b_{2,0,0}r^2 (\cos (s))^3 \\
& + (\cos (s))^2 a_{0,1,0}r - (\cos (s))^4 b_{1,2,0}r^3 + b_{4,0,0}r^4 (\cos (s))^5 + \cos (s) b_{0,2,0}r^2 \\
& - a_{0,1,1}rz - (\cos (s))^5 a_{1,3,0}r^4 + (\cos (s))^3 a_{1,1,0}r^2 - \sin (s) a_{0,0,2}z^2 \\
& + (\cos (s))^4 a_{2,1,0}r^3 - (\cos (s))^3 b_{0,2,0}r^2 - \sin (s) a_{0,2,0}r^2 + (\cos (s))^5 a_{3,1,0}r^4 \\
& + b_{1,0,0}r (\cos (s))^2 + b_{3,0,0}r^3 (\cos (s))^4 - 2 (\cos (s))^3 b_{0,4,0}r^4 + 2 (\cos (s))^3 a_{1,3,0}r^4 \\
& + 2 (\cos (s))^2 a_{0,3,0}r^3 - \sin (s) a_{0,0,3}z^3 - a_{0,1,2}r^2z^2 - a_{0,1,3}r^2z^3 - a_{0,3,1}r^3z - a_{0,3,0}r^3z \\
& - \sin (s) a_{0,0,0} + \cos (s) b_{0,0,0} - a_{0,1,0}r + b_{1,1,0}r^2 (\cos (s))^2 \sin (s) \\
& + b_{3,1,0}r^4 (\cos (s))^4 \sin (s) - a_{1,1,1}r^2 \cos (s) z - a_{2,1,1}r^3 (\cos (s))^2 z \\
& - a_{1,1,2}r^2 \cos (s) z^2 + b_{1,2,1}r^3 (\cos (s))^2 z + \cos (s) b_{0,2,1}r^2z - (\cos (s))^3 b_{0,2,1}r^2z \\
& - (\cos (s))^4 a_{0,3,1}r^3z + (\cos (s))^3 a_{1,1,1}r^2z + (\cos (s))^3 a_{1,1,2}r^2z^2 - (\cos (s))^3 b_{0,2,2}r^2z^2 \\
& + (\cos (s))^2 a_{0,1,2}r^2z^2 + (\cos (s))^2 a_{0,1,3}r^2z^3 + (\cos (s))^2 a_{0,1,1}rz - (\cos (s))^4 b_{1,2,1}r^3z \\
& + (\cos (s))^4 a_{2,1,1}r^3z - \sin (s) a_{2,2,0}r^4 (\cos (s))^2 - \sin (s) a_{1,2,0}r^3 \cos (s) \\
& + \sin (s) b_{1,3,0}r^4 (\cos (s))^2 + \sin (s) \cos (s) b_{0,3,0}r^3 - \sin (s) a_{0,2,2}r^2z^2 \\
& - \sin (s) a_{0,2,1}r^2z + \sin (s) (\cos (s))^2 a_{0,2,0}r^2 + \sin (s) (\cos (s))^4 a_{2,2,0}r^4 \\
& - \sin (s) (\cos (s))^4 a_{0,4,0}r^4 - \sin (s) (\cos (s))^4 b_{1,3,0}r^4 + \cos (s) b_{0,2,2}r^2z^2
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& -\sin(s) a_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 - \sin(s) a_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^4 + b_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z \\
& + b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z + b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z + b_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 + b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2 \\
& + b_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^3 - 2 \cos(s) a_{1,0,0} r \sin(s) + 2 (\cos(s))^2 a_{0,3,1} r^3 z \\
& + 2 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,4,0} r^4 - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) b_{0,3,0} - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) a_{3,0,0} \\
& - \sin(s) a_{1,2,1} r^3 \cos(s) z + \sin(s) \cos(s) b_{0,3,1} r^3 z + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,1} r^2 z \\
& + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,2} r^2 z^2 + b_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z + b_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z^2 \\
& - \sin(s) a_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 - \sin(s) a_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 z - 2 \cos(s) a_{1,0,1} r \sin(s) z \\
& - 2 \cos(s) a_{1,0,2} r \sin(s) z^2 - 2 \cos(s) a_{1,0,3} r \sin(s) z^3 - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z a_{3,0,1} \\
& - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z b_{0,3,1} + \sin(s) B_{1,0,1} r \cos(s) z + \sin(s) B_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 z \\
& + \sin(s) B_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^3 z + \sin(s) B_{1,0,2} r \cos(s) z^2 + \sin(s) B_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 \\
& + \sin(s) B_{1,0,3} r \cos(s) z^3 + \sin(s) B_{0,0,0} + \cos(s) A_{0,0,0} - 2 (\cos(s))^2 B_{0,3,1} r^3 z \\
& - 2 \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,4,0} r^4 \\
\frac{\partial F_{22}(r, s, z)}{\partial z} & = A_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 + 2 A_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z + 2 A_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z \\
& + 3 A_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^2 + (\cos(s))^2 A_{1,2,1} r^3 + (\cos(s))^2 B_{2,1,1} r^3 + 2 \sin(s) B_{0,2,2} r^2 z \\
& + 2 \cos(s) A_{0,0,2} z + 3 \sin(s) B_{0,0,3} z^2 + B_{0,1,1} r + 2 B_{0,1,2} r z + 3 B_{0,1,3} r z^2 \\
& + 4 \sin(s) B_{0,0,4} z^3 + 3 \cos(s) A_{0,0,3} z^2 + \cos(s) A_{0,0,1} + B_{0,3,1} r^3 + 2 \sin(s) B_{0,0,2} z \\
& + \sin(s) B_{0,0,1} + 4 \cos(s) A_{0,0,4} z^3 \\
& \frac{1}{r} (3 \sin(s) b_{0,0,3} z^2 + 4 \cos(s) a_{0,0,4} z^3 + a_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 + 2 a_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z \\
& + \cos(s) b_{1,1,1} r^2 + 2 \cos(s) b_{1,1,2} r^2 z + 2 \cos(s) a_{0,2,2} r^2 z + \cos(s) a_{0,2,1} r^2 \\
& - (\cos(s))^3 b_{1,1,1} r^2 - 2 (\cos(s))^3 b_{1,1,2} r^2 z - 2 (\cos(s))^3 a_{0,2,2} r^2 z \\
& - (\cos(s))^3 a_{0,2,1} r^2 + \sin(s) b_{0,2,1} r^2 + 2 \sin(s) b_{0,2,2} r^2 z + 4 a_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 \\
& + 4 a_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z + 6 a_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^2 + 2 a_{1,0,1} r (\cos(s))^2 \\
& - 5 (\cos(s))^2 b_{0,3,1} r^3 - 3 (\cos(s))^2 r^3 a_{3,0,1} + 4 (\cos(s))^4 b_{0,3,1} r^3 \\
& + 2 \cos(s) a_{0,0,2} z + \sin(s) b_{0,0,1} + \cos(s) a_{0,0,1} + 3 \cos(s) a_{0,0,3} z^2 - 2 a_{1,0,2} r z \\
& + 4 \sin(s) b_{0,0,4} z^3 + 2 \sin(s) b_{0,0,2} z - 3 a_{1,0,3} r z^2 - a_{1,0,1} r + b_{0,3,1} r^3 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 b_{1,2,1} r^3 - \sin(s) (\cos(s))^3 a_{0,3,1} r^3 + \sin(s) \cos(s) a_{0,3,1} r^3 \\
& + \sin(s) \cos(s) b_{1,2,1} r^3 + a_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) + a_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) \\
& + 2 a_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z + \cos(s) a_{0,1,1} r \sin(s) + 2 \cos(s) a_{0,1,2} r \sin(s) z \\
& + 3 \cos(s) a_{0,1,3} r \sin(s) z^2 + \sin(s) b_{1,0,1} r \cos(s) + \sin(s) b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 \\
& + \sin(s) b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^3 + 2 \sin(s) b_{1,0,2} r \cos(s) z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sin(s) b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z + 3 \sin(s) b_{1,0,3} r \cos(s) z^2 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,1} r^2 - 2 \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,2} r^2 z \\
& \times (-a_{0,3,0} r^3 - \sin(s) a_{0,0,0} + \cos(s) b_{0,0,0} - a_{0,1,0} r - (\cos(s))^5 b_{2,2,0} r^4 \\
& - a_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^3 + (\cos(s))^5 b_{0,4,0} r^4 - \sin(s) a_{0,0,4} z^4 \\
& + 2 (\cos(s))^2 a_{0,3,0} r^3 + \cos(s) b_{0,4,0} r^4 - a_{1,3,0} r^4 \cos(s) \\
& - \sin(s) a_{0,0,2} z^2 - \sin(s) a_{0,4,0} r^4 + \cos(s) b_{0,0,3} z^3 + \cos(s) b_{0,0,2} z^2 \\
& - a_{1,1,0} r^2 \cos(s) - a_{2,1,0} r^3 (\cos(s))^2 + b_{1,2,0} r^3 (\cos(s))^2 \\
& + (\cos(s))^2 a_{0,1,0} r + b_{2,2,0} r^4 (\cos(s))^3 - (\cos(s))^4 b_{1,2,0} r^3 \\
& + b_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^5 + \cos(s) b_{0,2,0} r^2 - a_{0,1,1} r z - (\cos(s))^5 a_{1,3,0} r^4 \\
& + (\cos(s))^3 a_{1,1,0} r^2 + (\cos(s))^4 a_{2,1,0} r^3 - (\cos(s))^3 b_{0,2,0} r^2 \\
& - \sin(s) a_{0,2,0} r^2 - (\cos(s))^4 a_{0,3,0} r^3 + (\cos(s))^5 a_{3,1,0} r^4 \\
& + b_{1,0,0} r (\cos(s))^2 + \cos(s) b_{0,0,4} z^4 + b_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^4 \\
& + 2 (\cos(s))^3 a_{1,3,0} r^4 - 2 (\cos(s))^3 b_{0,4,0} r^4 + b_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^3 \\
& + \cos(s) b_{0,0,1} z - \sin(s) a_{0,0,3} z^3 - \sin(s) a_{0,0,1} z - a_{0,1,2} r z^2 - a_{0,1,3} r z^3 \\
& - a_{0,3,1} r^3 z + b_{1,1,0} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) + b_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) \\
& - a_{1,1,1} r^2 \cos(s) z - a_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^2 z - a_{1,1,2} r^2 \cos(s) z^2 \\
& + b_{1,2,1} r^3 (\cos(s))^2 z + \cos(s) b_{0,2,1} r^2 z - (\cos(s))^3 b_{0,2,1} r^2 z \\
& - (\cos(s))^4 a_{0,3,1} r^3 z + (\cos(s))^3 a_{1,1,1} r^2 z + (\cos(s))^3 a_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& - (\cos(s))^3 b_{0,2,2} r^2 z^2 + (\cos(s))^2 a_{0,1,2} r z^2 + (\cos(s))^2 a_{0,1,3} r z^3 \\
& + (\cos(s))^2 a_{0,1,1} r z - (\cos(s))^4 b_{1,2,1} r^3 z + (\cos(s))^4 a_{2,1,1} r^3 z \\
& - \sin(s) a_{2,2,0} r^4 (\cos(s))^2 - \sin(s) a_{1,2,0} r^3 \cos(s) \\
& + \sin(s) b_{1,3,0} r^4 (\cos(s))^2 + \sin(s) \cos(s) b_{0,3,0} r^3 - \sin(s) a_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - \sin(s) a_{0,2,1} r^2 z + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,0} r^2 + \sin(s) (\cos(s))^4 a_{2,2,0} r^4 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^4 a_{0,4,0} r^4 - \sin(s) (\cos(s))^4 b_{1,3,0} r^4 + \cos(s) b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - \sin(s) a_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 - \sin(s) a_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^4 \\
& + b_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z + b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z + b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z \\
& + b_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 + b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2 + b_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^3 \\
& - 2 \cos(s) a_{1,0,0} r \sin(s) + 2 (\cos(s))^2 a_{0,3,1} r^3 z \\
& + 2 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,4,0} r^4 - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) b_{0,3,0} \\
& - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) a_{3,0,0} - \sin(s) a_{1,2,1} r^3 \cos(s) z
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& + \sin(s) \cos(s) b_{0,3,1} r^3 z + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,1} r^2 z \\
& + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,2} r^2 z^2 + b_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z \\
& + b_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z^2 - \sin(s) a_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 \\
& - \sin(s) a_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 z - 2 \cos(s) a_{1,0,1} r \sin(s) z \\
& - 2 \cos(s) a_{1,0,2} r \sin(s) z^2 - 2 \cos(s) a_{1,0,3} r \sin(s) z^3 \\
& - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z a_{3,0,1} - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z b_{0,3,1} \\
& + A_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 + A_{1,0,1} r (\cos(s))^2 + \sin(s) B_{0,2,1} r^2 + 2 \cos(s) B_{1,1,2} r^2 z \\
& + \cos(s) A_{0,2,1} r^2 + 2 \cos(s) A_{0,2,2} r^2 z + \cos(s) B_{1,1,1} r^2 + (\cos(s))^4 B_{0,3,1} r^3 \\
& - (\cos(s))^4 A_{1,2,1} r^3 - 2 (\cos(s))^2 B_{0,1,2} r z - (\cos(s))^2 B_{0,1,1} r - (\cos(s))^4 B_{2,1,1} r^3 \\
& - 2 (\cos(s))^3 B_{1,1,2} r^2 z - 3 (\cos(s))^2 B_{0,1,3} r z^2 - (\cos(s))^3 A_{0,2,1} r^2 \\
& - 2 (\cos(s))^3 A_{0,2,2} r^2 z - (\cos(s))^3 B_{1,1,1} r^2 - 2 (\cos(s))^2 B_{0,3,1} r^3 \\
& + \sin(s) \cos(s) A_{0,3,1} r^3 + \sin(s) \cos(s) B_{1,2,1} r^3 - \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,2,1} r^2 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 A_{0,3,1} r^3 - \sin(s) (\cos(s))^3 B_{1,2,1} r^3 - 2 \sin(s) (\cos(s))^2 B_{0,2,2} r^2 z \\
& + A_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) + A_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) + 2 A_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z \\
& + \cos(s) A_{0,1,1} r \sin(s) + 2 \cos(s) A_{0,1,2} r \sin(s) z \\
& - (a_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z + a_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2 + a_{1,1,0} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) \\
& + a_{2,1,0} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) + a_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) + \cos(s) a_{0,1,0} r \sin(s) \\
& + \sin(s) b_{1,0,0} r \cos(s) + \sin(s) b_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 + \sin(s) b_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^3 \\
& + \sin(s) b_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^4 + \cos(s) b_{1,1,1} r^2 z + \cos(s) b_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& + \cos(s) a_{0,2,2} r^2 z^2 + \cos(s) a_{0,2,1} r^2 z + (\cos(s))^5 a_{0,4,0} r^4 + b_{0,3,0} r^3 \\
& + \sin(s) b_{0,0,0} - a_{1,0,0} r + \cos(s) a_{0,0,0} - 5 (\cos(s))^2 b_{0,3,0} r^3 \\
& - 3 (\cos(s))^2 r^3 a_{3,0,0} - 2 (\cos(s))^3 b_{1,3,0} r^4 - 2 (\cos(s))^3 a_{0,4,0} r^4 \\
& - (\cos(s))^5 b_{3,1,0} r^4 + \cos(s) b_{1,3,0} r^4 + 4 (\cos(s))^4 b_{0,3,0} r^3 \\
& + 4 a_{3,0,0} r^3 (\cos(s))^4 + 2 a_{1,0,0} r (\cos(s))^2 + \cos(s) a_{0,2,0} r^2 \\
& + \sin(s) b_{0,2,0} r^2 - (\cos(s))^3 a_{0,2,0} r^2 + \sin(s) b_{0,0,3} z^3 + \cos(s) b_{1,1,0} r^2 \\
& + \cos(s) a_{0,4,0} r^4 + (\cos(s))^3 b_{3,1,0} r^4 + \cos(s) a_{0,0,4} z^4 + (\cos(s))^3 a_{2,2,0} r^4 \\
& + a_{4,0,0} r^4 (\cos(s))^5 + \cos(s) a_{0,0,2} z^2 + \sin(s) b_{0,0,1} z + \cos(s) a_{0,0,1} z \\
& - (\cos(s))^3 b_{1,1,0} r^2 + a_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^3 + \cos(s) a_{0,0,3} z^3 \\
& - (\cos(s))^5 a_{2,2,0} r^4 + (\cos(s))^5 b_{1,3,0} r^4 - a_{1,0,2} r z^2 + \sin(s) b_{0,0,4} z^4 \\
& + \sin(s) b_{0,4,0} r^4 + \sin(s) b_{0,0,2} z^2 - (\cos(s))^3 b_{1,1,1} r^2 z - (\cos(s))^3 b_{1,1,2} r^2 z^2 \\
& - (\cos(s))^3 a_{0,2,2} r^2 z^2 - (\cos(s))^3 a_{0,2,1} r^2 z + \sin(s) \cos(s) a_{0,3,0} r^3 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^4 b_{2,2,0} r^4 - \sin(s) (\cos(s))^4 a_{1,3,0} r^4 - \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,0} r^2 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 a_{0,3,0} r^3 - \sin(s) (\cos(s))^3 b_{1,2,0} r^3 + \sin(s) b_{0,2,1} r^2 z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(s) b_{0,2,2} r^2 z^2 + \sin(s) (\cos(s))^4 b_{0,4,0} r^4 + \sin(s) (\cos(s))^2 b_{2,2,0} r^4 \\
& + \sin(s) \cos(s) b_{1,2,0} r^3 + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{1,3,0} r^4 + 4 a_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z \\
& + 2 a_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 + 2 a_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^3 + 2 a_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z \\
& - 5 (\cos(s))^2 b_{0,3,1} r^3 z - 3 (\cos(s))^2 r^3 z a_{3,0,1} + 4 (\cos(s))^4 b_{0,3,1} r^3 z \\
& - 2 \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,4,0} r^4 - a_{1,0,3} r z^3 - a_{1,0,1} r z + b_{0,3,1} r^3 z \\
& - \sin(s) (\cos(s))^3 b_{1,2,1} r^3 z - \sin(s) (\cos(s))^3 a_{0,3,1} r^3 z + \sin(s) \cos(s) a_{0,3,1} r^3 z \\
& + \sin(s) \cos(s) b_{1,2,1} r^3 z + a_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z \\
& + a_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z + a_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z^2 \\
& + \cos(s) a_{0,1,1} r \sin(s) z + \cos(s) a_{0,1,2} r \sin(s) z^2 + \cos(s) a_{0,1,3} r \sin(s) z^3 \\
& + \sin(s) b_{1,0,1} r \cos(s) z + \sin(s) b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 z + \sin(s) b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^3 z \\
& + \sin(s) b_{1,0,2} r \cos(s) z^2 + \sin(s) b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 + \sin(s) b_{1,0,3} r \cos(s) z^3 \\
& - \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,1} r^2 z - \sin(s) (\cos(s))^2 b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& \times (-a_{1,1,1} r^2 \cos(s) - a_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^2 - 2 a_{1,1,2} r^2 \cos(s) z + b_{1,2,1} r^3 (\cos(s))^2 \\
& + \cos(s) b_{0,2,1} r^2 - (\cos(s))^3 b_{0,2,1} r^2 - (\cos(s))^4 a_{0,3,1} r^3 + (\cos(s))^3 a_{1,1,1} r^2 \\
& + 2 (\cos(s))^3 a_{1,1,2} r^2 z - 2 (\cos(s))^3 b_{0,2,2} r^2 z + 2 (\cos(s))^2 a_{0,1,2} r z \\
& + 3 (\cos(s))^2 a_{0,1,3} r z^2 + (\cos(s))^2 a_{0,1,1} r - (\cos(s))^4 b_{1,2,1} r^3 + (\cos(s))^4 a_{2,1,1} r^3 \\
& - 2 \sin(s) a_{0,2,2} r^2 z - \sin(s) a_{0,2,1} r^2 + 2 \cos(s) b_{0,2,2} r^2 z + b_{1,0,1} r (\cos(s))^2 \\
& + b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 + b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 + 2 b_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z + 2 b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z \\
& + 3 b_{1,0,3} r (\cos(s))^2 z^2 + 2 (\cos(s))^2 a_{0,3,1} r^3 - \sin(s) a_{1,2,1} r^3 \cos(s) \\
& + \sin(s) \cos(s) b_{0,3,1} r^3 + \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,1} r^2 + 2 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,2} r^2 z \\
& + b_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) - 4 \sin(s) a_{0,0,4} z^3 - 2 \sin(s) a_{0,0,2} z + 3 \cos(s) b_{0,0,3} z^2 \\
& + 2 \cos(s) b_{0,0,2} z - a_{0,1,1} r + 4 \cos(s) b_{0,0,4} z^3 + \cos(s) b_{0,0,1} - 3 \sin(s) a_{0,0,3} z^2 \\
& - \sin(s) a_{0,0,1} - 2 a_{0,1,2} r z - 3 a_{0,1,3} r z^2 - a_{0,3,1} r^3 + 2 b_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z \\
& - 2 \sin(s) a_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z - \sin(s) a_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 - 2 \cos(s) a_{1,0,1} r \sin(s) \\
& - 4 \cos(s) a_{1,0,2} r \sin(s) z - 6 \cos(s) a_{1,0,3} r \sin(s) z^2 - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) a_{3,0,1} \\
& - 4 r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) b_{0,3,1} \frac{1}{r} + 3 \cos(s) A_{0,1,3} r \sin(s) z^2 + \sin(s) B_{1,0,1} r \cos(s) \\
& + \sin(s) B_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^2 + \sin(s) B_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^3 + 2 \sin(s) B_{1,0,2} r \cos(s) z \\
& + 2 \sin(s) B_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^2 z + 3 \sin(s) B_{1,0,3} r \cos(s) z^2
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& \int_0^s F_{11}(r, \theta, z) d\theta - b_{0,0,1}z + b_{0,0,2}z^2 + b_{0,0,3}z^3 + b_{0,0,4}z^4 + 1/5 \sin(s) b_{1,3,0}r^4 + 1/2 a_{0,1,3}rz^3 \\
& + 1/2 a_{0,1,2}rz^2 + 1/4 a_{0,3,1}r^3z + 1/2 a_{0,1,1}rz + b_{0,0,0} + 1/4 a_{0,3,0}r^3 + 1/2 a_{0,1,0}r + \frac{8}{15} b_{0,4,0}r^4 \\
& + 1/3 \sin(s) b_{1,1,2}r^2z^2 - 1/5 (\cos(s))^5 a_{3,1,0}r^4 - 1/2 (\cos(s))^2 a_{0,3,0}r^3 \\
& - 1/3 (\cos(s))^3 a_{1,3,0}r^4 + 1/3 \sin(s) a_{0,2,0}r^2 + 1/5 \sin(s) a_{0,4,0}r^4 - 1/3 b_{2,2,0}r^4 (\cos(s))^3 \\
& - \cos(s) b_{0,2,0}r^2 - 1/2 b_{1,2,0}r^3 (\cos(s))^2 + 1/4 (\cos(s))^4 a_{0,3,0}r^3 + 1/5 (\cos(s))^5 a_{1,3,0}r^4 \\
& - 1/5 (\cos(s))^5 b_{0,4,0}r^4 - 1/2 (\cos(s))^2 a_{0,1,0}r - \cos(s) b_{0,4,0}r^4 - 1/3 (\cos(s))^3 a_{1,1,0}r^2 \\
& + 1/3 (\cos(s))^3 b_{0,2,0}r^2 - 1/4 (\cos(s))^4 a_{2,1,0}r^3 + 1/4 (\cos(s))^4 b_{1,2,0}r^3 \\
& + 1/5 (\cos(s))^5 b_{2,2,0}r^4 + \sin(s) a_{0,0,4}z^4 + \sin(s) a_{0,0,1}z + \sin(s) a_{0,0,2}z^2 - \cos(s) b_{0,0,4}z^4 \\
& - \cos(s) b_{0,0,1}z - \cos(s) b_{0,0,2}z^2 - \cos(s) b_{0,0,3}z^3 - 1/5 b_{4,0,0}r^4 (\cos(s))^5 - 1/3 b_{2,0,0}r^2 (\cos(s))^3 \\
& - 1/2 b_{1,0,0}r (\cos(s))^2 - 1/4 b_{3,0,0}r^3 (\cos(s))^4 + 2/3 (\cos(s))^3 b_{0,4,0}r^4 + \sin(s) a_{0,0,3}z^3 \\
& - \sin(s) \cos(s) b_{0,3,1}r^3z - 1/3 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,1}r^2z - 1/3 b_{1,1,1}r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z \\
& - 1/3 b_{1,1,2}r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) z^2 + \cos(s) a_{1,0,2}r \sin(s) z^2 + 2/3 b_{0,2,0}r^2 \\
& + 1/15 b_{3,1,0}r^4 \sin(s) (\cos(s))^2 + 2/3 a_{2,0,1}r^2z \sin(s) + 2/3 a_{2,0,2}r^2z^2 \sin(s) \\
& + \frac{4}{15} a_{4,0,0}r^4 \sin(s) (\cos(s))^2 + 1/3 \sin(s) b_{1,1,1}r^2z + 1/4 a_{2,1,0}r^3 - \cos(s) b_{0,0,0} \\
& + 2/15 b_{3,1,0}r^4 \sin(s) + 1/2 b_{1,0,1}rz + 2/3 b_{0,2,1}r^2z + 2/3 b_{0,2,2}r^2z^2 + 1/4 b_{1,2,1}r^3z \\
& + 1/4 a_{2,1,1}r^3z + 1/3 a_{1,1,1}r^2z + 1/2 b_{1,0,3}rz^3 + 1/3 b_{2,0,2}r^2z^2 + 1/3 a_{1,1,2}r^2z^2 + 1/2 b_{1,0,2}rz^2 \\
& + 1/3 b_{2,0,1}r^2z + 1/4 b_{3,0,1}r^3z + \sin(s) a_{0,0,0} + 2/15 \sin(s) a_{2,2,0}r^4 + \cos(s) a_{1,0,1}r \sin(s) z \\
& + 1/3 \sin(s) a_{2,0,1}r^2 (\cos(s))^2 z + 1/3 \sin(s) a_{2,0,2}r^2 (\cos(s))^2 z^2 - 1/3 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,2}r^2z^2 \\
& + \cos(s) a_{1,0,3}r \sin(s) z^3 + r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z b_{0,3,1} + r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) z a_{3,0,1} + 2/15 a_{1,3,0}r^4 \\
& + 1/5 a_{3,1,0}r^4 + 1/3 b_{2,0,0}r^2 + 1/2 b_{1,0,0}r + 1/3 a_{1,1,0}r^2 + 1/5 b_{4,0,0}r^4 + 1/4 b_{3,0,0}r^3 \\
& + 2/15 b_{2,2,0}r^4 + 1/3 \sin(s) b_{1,1,0}r^2 + 1/4 b_{1,2,0}r^3 - 2/5 \sin(s) b_{1,3,0}r^4 (\cos(s))^2 \\
& + 1/3 \sin(s) a_{0,2,1}r^2z + 1/3 \sin(s) a_{0,2,2}r^2z^2 - \sin(s) \cos(s) b_{0,3,0}r^3 - 1/2 b_{1,0,3}r (\cos(s))^2 z^3 \\
& - 1/3 b_{1,1,0}r^2 (\cos(s))^2 \sin(s) - 1/5 b_{3,1,0}r^4 (\cos(s))^4 \sin(s) + r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) b_{0,3,0} \\
& + r^3 (\cos(s))^3 \sin(s) a_{3,0,0} + 1/4 (\cos(s))^4 b_{1,2,1}r^3z - 1/4 (\cos(s))^4 a_{2,1,1}r^3z \\
& + 1/15 \sin(s) a_{2,2,0}r^4 (\cos(s))^2 - 2/5 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,4,0}r^4 - 1/2 (\cos(s))^2 a_{0,3,1}r^3z \\
& + 1/3 (\cos(s))^3 b_{0,2,1}r^2z + 1/3 (\cos(s))^3 b_{0,2,2}r^2z^2 - 1/3 (\cos(s))^3 a_{1,1,2}r^2z^2 \\
& - 1/3 (\cos(s))^3 a_{1,1,1}r^2z - \cos(s) b_{0,2,2}r^2z^2 + 1/5 \sin(s) a_{4,0,0}r^4 (\cos(s))^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1/3 \sin(s) a_{2,0,0} r^2 (\cos(s))^2 + \cos(s) a_{1,0,0} r \sin(s) - 1/3 b_{2,0,1} r^2 (\cos(s))^3 z \\
& -1/4 b_{3,0,1} r^3 (\cos(s))^4 z - 1/2 b_{1,0,2} r (\cos(s))^2 z^2 - 1/3 b_{2,0,2} r^2 (\cos(s))^3 z^2 \\
& -1/2 (\cos(s))^2 a_{0,1,1} r z - 1/2 (\cos(s))^2 a_{0,1,2} r z^2 - 1/2 (\cos(s))^2 a_{0,1,3} r z^3 \\
& +1/4 (\cos(s))^4 a_{0,3,1} r^3 z - 1/2 b_{1,2,1} r^3 (\cos(s))^2 z - \cos(s) b_{0,2,1} r^2 z - 1/2 b_{1,0,1} r (\cos(s))^2 z \\
& +1/5 \sin(s) (\cos(s))^4 a_{0,4,0} r^4 + 1/5 \sin(s) (\cos(s))^4 b_{1,3,0} r^4 - 1/3 \sin(s) (\cos(s))^2 a_{0,2,0} r^2 \\
& -1/5 \sin(s) (\cos(s))^4 a_{2,2,0} r^4 + \frac{8}{15} \sin(s) a_{4,0,0} r^4 + 2/3 \sin(s) a_{2,0,0} r^2 \\
& \int_0^s F_{12}(r, \theta, z) d\theta \quad c_{1,0,0} r \sin(s) + c_{2,0,1} r^2 z \cos(s) \sin(s) - c_{0,2,2} r^2 z^2 \cos(s) \sin(s) \\
& -c_{0,1,3} r \cos(s) z^3 + 2/3 c_{3,0,1} r^3 z \sin(s) - 2/3 c_{0,3,1} r^3 z \cos(s) + 3/4 r^4 c_{0,4,0} (\cos(s))^3 \sin(s) \\
& -3/4 r^4 c_{0,4,0} \cos(s) \sin(s) - 1/4 c_{0,4,0} r^4 (\sin(s))^3 \cos(s) - 1/3 c_{0,3,0} r^3 \cos(s) (\sin(s))^2 \\
& +1/3 c_{3,0,0} r^3 \sin(s) (\cos(s))^2 - 1/2 c_{1,1,2} r^2 (\cos(s))^2 z^2 - 1/2 c_{1,1,1} r^2 (\cos(s))^2 z \\
& -1/3 c_{2,1,1} r^3 (\cos(s))^3 z + 1/3 c_{1,2,1} r^3 (\sin(s))^3 z - 1/2 c_{1,1,0} r^2 (\cos(s))^2 \\
& -1/3 c_{2,1,0} r^3 (\cos(s))^3 + 1/2 c_{1,1,1} r^2 z + 1/3 c_{2,1,1} r^3 z + 2/3 c_{3,0,0} r^3 \sin(s) \\
& -2/3 c_{0,3,0} r^3 \cos(s) - c_{0,1,0} r \cos(s) + c_{0,1,3} r z^3 + c_{0,1,2} r z^2 + c_{0,1,1} r z + 2/3 c_{0,3,1} r^3 z \\
& +1/2 c_{1,1,2} r^2 z^2 - 1/4 c_{3,1,0} r^4 (\cos(s))^4 + 1/4 c_{1,3,0} r^4 (\sin(s))^4 + 1/3 c_{1,2,0} r^3 (\sin(s))^3 \\
& +1/3 c_{3,0,1} r^3 z \sin(s) (\cos(s))^2 - 1/3 c_{0,3,1} r^3 z \cos(s) (\sin(s))^2 + r^4 c_{4,0,0} (\cos(s))^3 \sin(s) \\
& -c_{0,2,0} r^2 \cos(s) \sin(s) + c_{1,0,3} r \sin(s) z^3 + c_{1,0,1} r \sin(s) z + c_{1,0,2} r \sin(s) z^2 - c_{0,1,1} r \cos(s) z \\
& -c_{0,1,2} r \cos(s) z^2 + c_{0,1,0} r + 1/2 c_{1,1,0} r^2 + 1/4 c_{3,1,0} r^4 + 2/3 c_{0,3,0} r^3 + 1/3 c_{2,1,0} r^3
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
f_{21}(r, z) & -6 a_{0,4,0} r^4 a_{1,1,0} - 96 a_{0,4,0} r^2 b_{0,0,0} - 24 a_{0,1,1} r^4 c_{0,4,0} + 10 b_{1,1,0} r^4 a_{1,3,0} \\
& -6 a_{0,4,0} r^4 a_{1,1,0} - 96 a_{0,4,0} r^2 b_{0,0,0} - 24 a_{0,1,1} r^4 c_{0,4,0} + 10 b_{1,1,0} r^4 a_{1,3,0} \\
& +144 b_{0,2,1} r^2 c_{1,0,0} + 288 b_{0,2,1} z a_{0,0,0} - 96 a_{0,2,0} b_{0,0,0} - 104 a_{2,0,1} r^4 c_{0,3,0} \\
& -24 b_{3,0,1} r^4 c_{0,2,0} - 48 a_{0,0,1} c_{2,1,0} r^2 + 40 a_{1,1,1} r^4 c_{3,0,0} - 48 b_{1,1,1} r^2 c_{0,1,0} \\
& +8 a_{1,1,1} r^4 c_{1,2,0} - 144 a_{2,0,1} r^2 c_{0,1,0} - 48 b_{1,0,1} r^2 c_{0,2,0} + 96 b_{2,0,0} a_{0,0,0} \\
& +48 a_{1,0,0} a_{0,3,0} r^2 - 48 a_{0,1,0} r^2 a_{3,0,0} - 10 b_{3,1,0} r^4 a_{1,1,0} + 10 b_{2,2,0} r^4 b_{1,1,0} \\
& +24 b_{0,3,1} r^4 c_{1,1,0} + 144 b_{0,0,1} c_{3,0,0} r^2 - 96 a_{0,2,1} z^2 b_{0,0,1} - 170 b_{0,2,0} r^4 a_{4,0,0} \\
& +38 a_{2,0,0} r^4 a_{1,3,0} - 38 b_{3,1,0} r^4 b_{0,2,0} + 10 a_{0,2,0} r^4 b_{2,2,0} + 96 b_{2,0,1} z a_{0,0,0} \\
& -96 b_{1,1,2} z^3 b_{0,0,1} + 48 b_{2,0,1} r^2 c_{1,0,0} + 40 b_{0,2,1} r^4 c_{1,2,0} + 192 b_{0,0,1} c_{1,0,3} z^3
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& +8 b_{2,0,1} r^4 c_{1,2,0} - 96 b_{1,3,0} r^2 b_{0,0,0} - 42 a_{0,4,0} r^4 b_{0,2,0} - 96 b_{1,1,1} z^5 b_{0,0,4} \\
& - 24 b_{1,0,1} r^4 c_{0,4,0} - 48 a_{1,0,1} r^2 c_{1,1,0} - 480 a_{4,0,0} r^2 b_{0,0,0} + 6 b_{1,1,0} r^4 b \\
& - 15 b_{1,2,1} r^6 c_{0,4,0} + 480 b_{0,4,0} r^2 a_{0,0,0} - 70 b_{2,0,0} r^4 a_{4,0,0} + 9 b_{1,2,1} r^6 c_{4,0,0} \\
& - 40 a_{2,0,1} r^4 c_{2,1,0} - 96 a_{0,2,0} b_{0,0,3} z^3 - 96 b_{1,1,0} b_{0,0,0} + 6 a_{0,2,0} r^4 a_{3,1,0} \\
& - 96 a_{0,2,1} z^5 b_{0,0,4} + 192 b_{0,0,1} c_{1,0,2} z^2 + 48 a_{1,0,0} a_{2,1,0} r^2 - 38 a_{2,2,0} r^4 b_{0,2,0} \\
& + 96 a_{1,1,0} a_{0,0,0} - 96 b_{3,1,0} r^2 b_{0,0,0} - 24 a_{0,3,1} r^4 c_{0,2,0} - 24 a_{1,0,1} r^4 c_{1,3,0} \\
& - 288 a_{2,0,1} z^4 b_{0,0,3} + 9 a_{0,3,1} r^6 c_{4,0,0} - 96 a_{0,2,2} z^5 b_{0,0,3} + 96 a_{1,1,2} z^4 a_{0,0,2} \\
& - 8 b_{1,1,1} r^4 c_{2,1,0} - 15 a_{3,0,1} r^6 c_{3,1,0} + 768 b_{0,0,4} z^3 c_{1,0,0} + 96 b_{2,2,0} r^2 a_{0,0,0} \\
& - 40 b_{1,1,1} r^4 c_{0,3,0} + 24 a_{0,1,1} r^4 c_{4,0,0} + 24 b_{1,0,1} r^4 c_{4,0,0} - 24 a_{2,1,1} r^4 c_{0,2,0} \\
& + 48 a_{1,0,0} b_{3,0,0} r^2 + 38 a_{2,0,0} r^4 b_{2,2,0} + 96 b_{4,0,0} r^2 a_{0,0,0} - 192 a_{0,0,1} c_{0,1,0} \\
& - 288 a_{2,0,0} b_{0,0,0} + 192 b_{0,0,1} c_{1,0,0} + 40 b_{2,0,1} r^4 c_{3,0,0} - 48 a_{0,2,1} r^2 c_{0,1,0} \\
& - 40 a_{0,2,1} r^4 c_{0,3,0} + 15 b_{3,0,1} r^6 c_{4,0,0} + 42 a_{3,1,0} r^4 a_{2,0,0} - 144 a_{0,0,1} c_{0,3,0} r^2 \\
& - 10 b_{3,1,0} r^4 b_{2,0,0} - 96 a_{2,2,0} r^2 b_{0,0,0} - 24 a_{1,0,1} r^4 c_{3,1,0} + 48 a_{1,0,0} b_{1,2,0} r^2 \\
& + 10 a_{0,2,0} r^4 a_{1,3,0} - 42 b_{1,3,0} r^4 b_{0,2,0} + 15 b_{0,3,1} r^6 c_{1,3,0} + 96 a_{1,1,2} z^5 a_{0,0,3} \\
& + 48 b_{0,3,0} r^2 a_{0,1,0} - 48 a_{0,1,1} r^2 c_{0,2,0} + 96 a_{1,3,0} r^2 a_{0,0,0} - 6 a_{1,1,0} r^4 b_{1,3,0} \\
& - 9 r^6 a_{3,0,1} c_{1,3,0} + 96 a_{3,1,0} r^2 a_{0,0,0} + 288 b_{0,2,0} a_{0,0,2} z^2 + 42 b_{4,0,0} r^4 a_{2,0,0} \\
& + 96 a_{1,1,0} a_{0,0,1} z + 96 b_{2,0,2} z^2 a_{0,0,0} + 48 b_{0,3,0} r^2 b_{1,0,0} + 15 a_{2,1,1} r^6 c_{4,0,0} \\
& + 6 b_{1,1,0} r^4 a_{3,1,0} + 6 b_{4,0,0} r^4 a_{0,2,0} + 9 b_{0,3,1} r^6 c_{3,1,0} - 48 r^2 a_{3,0,0} b_{1,0,0} \\
& - 6 b_{1,3,0} r^4 b_{2,0,0} - 9 a_{2,1,1} r^6 c_{0,4,0} - 10 a_{2,2,0} r^4 b_{2,0,0} + 104 b_{0,2,1} r^4 c_{3,0,0} \\
& - 15 a_{0,3,1} r^6 c_{0,4,0} + 170 b_{0,4,0} r^4 a_{2,0,0} - 8 a_{0,2,1} r^4 c_{2,1,0} + 192 b_{0,0,1} c_{1,0,1} z \\
& - 6 b_{2,0,0} r^4 a_{0,4,0} + 70 b_{0,4,0} r^4 b_{1,1,0} + 48 b_{0,0,1} c_{1,2,0} r^2 + 48 a_{1,1,1} r^2 c_{1,0,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(r, z) = & +288 b_{0,2,0} a_{0,0,0} - 24 a_{3,0,1} r^4 c_{1,1,0} - 70 a_{4,0,0} r^4 a_{1,1,0} - 192 a_{0,0,1} c_{0,1,2} z^2 \\
& - 10 a_{2,2,0} r^4 a_{1,1,0} - 9 b_{3,0,1} r^6 c_{0,4,0} + 70 a_{0,2,0} r^4 b_{0,4,0} - 24 b_{1,2,1} r^4 c_{0,2,0} \\
& + 288 b_{0,2,0} a_{0,0,4} z^4 + 96 b_{2,0,1} z^3 a_{0,0,2} - 96 b_{1,1,2} z^5 b_{0,0,3} - 288 a_{2,0,2} z^5 b_{0,0,3} \\
& - 96 b_{1,1,2} z^2 b_{0,0,0} + 96 b_{2,0,2} z^6 a_{0,0,4} + 192 b_{0,0,4} z^3 c_{1,2,0} r^2 + 192 b_{0,0,4} z^4 c_{1,2,1} r^2 \\
& + 40 b_{0,2,1} r^4 c_{1,2,1} z + 96 b_{4,0,0} r^2 a_{0,0,3} z^3 + 288 b_{0,2,2} r^2 z^4 c_{1,0,3} - 96 a_{0,4,0} r^2 b_{0,0,3} z^3 \\
& - 96 b_{1,0,2} r^2 z^3 c_{0,2,2} - 96 a_{0,4,0} r^2 b_{0,0,4} z^4 - 24 r^4 a_{3,0,1} c_{1,1,2} z^2 - 8 a_{0,2,1} r^4 c_{2,1,1} z \\
& - 144 a_{0,1,3} r^2 z^4 c_{0,2,2} - 288 a_{0,0,2} z^2 c_{0,3,1} r^2 - 576 a_{0,0,4} z^3 c_{0,3,0} r^2 + 48 b_{0,3,1} r^2 z^4 b_{1,0,3}
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3. PERTURBATION D'UN CENTRE LINÉAIRE PAR DES
POLYNÔMES DE DEGRÉ 4

$$\begin{aligned}
& +48 a_{1,0,0} a_{2,1,1} r^2 z + 48 a_{1,0,1} z a_{0,3,0} r^2 + 48 b_{1,0,1} r^2 c_{2,0,1} z + 70 b_{0,4,0} r^4 b_{1,1,2} z^2 \\
& +170 b_{0,4,0} r^4 a_{2,0,1} z + 48 a_{1,1,1} r^2 c_{1,0,1} z - 38 b_{0,2,1} r^4 z b_{3,1,0} + 48 a_{1,1,1} r^2 c_{1,0,2} z^2 \\
& +96 a_{1,1,2} r^2 z^2 c_{1,0,1} + 96 a_{1,3,0} r^2 a_{0,0,3} z^3 - 80 a_{0,2,2} r^4 z^2 c_{0,3,1} - 96 a_{0,1,2} r^2 z^3 c_{0,2,2} \\
& +48 a_{1,0,1} z^2 a_{0,3,1} r^2 + 48 b_{0,3,1} r^2 z^3 a_{0,1,2} + 432 b_{0,0,3} z^2 c_{3,0,0} r^2 + 48 b_{0,3,1} r^2 z a_{0,1,0} \\
& +48 b_{0,3,0} r^2 a_{0,1,3} z^3 + 104 b_{0,2,1} r^4 c_{3,0,1} z - 38 b_{3,1,0} r^4 b_{0,2,2} z^2 + 288 b_{0,0,2} z^2 c_{3,0,1} r^2 \\
& +38 b_{2,2,0} r^4 a_{2,0,1} z - 10 a_{2,2,0} r^4 b_{2,0,2} z^2 - 38 a_{2,2,0} r^4 b_{0,2,2} z^2 - 576 a_{0,0,4} z^4 c_{0,3,1} r^2 \\
& +42 a_{2,0,2} r^4 z^2 a_{3,1,0} + 48 a_{1,0,0} b_{3,0,1} r^2 z + 48 a_{1,0,3} z^3 b_{3,0,0} r^2 - 104 a_{2,0,1} r^4 c_{0,3,1} z \\
& +96 b_{1,0,2} r^2 z^2 c_{2,0,1} - 144 a_{1,0,3} r^2 z^3 c_{1,1,1} - 144 b_{1,0,3} r^2 z^4 c_{0,2,2} - 144 a_{2,0,1} r^2 c_{0,1,2} z^2 \\
& -10 b_{3,1,0} r^4 b_{2,0,1} z - 96 a_{0,4,0} r^2 b_{0,0,1} z - 72 a_{1,0,3} r^4 z^2 c_{1,3,0} + 48 b_{0,3,1} r^2 z^2 a_{0,1,1} \\
& +48 b_{0,3,0} r^2 b_{1,0,2} z^2 - 10 b_{3,1,0} r^4 a_{1,1,1} z - 48 r^2 z^4 a_{3,0,1} b_{1,0,3} + 208 b_{0,2,2} r^4 z c_{3,0,0} \\
& -48 a_{0,1,2} r^4 z c_{0,4,0} + 6 a_{3,1,0} r^4 b_{1,1,1} z - 96 b_{1,1,2} r^2 z^2 c_{0,1,1} - 8 b_{1,1,1} r^4 c_{2,1,1} z \\
& -432 a_{0,0,3} z^3 c_{0,3,1} r^2 - 48 r^2 a_{3,0,0} b_{1,0,2} z^2 + 24 a_{2,1,1} r^4 c_{2,0,1} z + 48 a_{1,1,1} r^2 c_{1,0,3} z^3 \\
& +80 a_{1,1,2} r^4 z^2 c_{3,0,1} - 42 b_{1,3,0} r^4 b_{0,2,1} z - 80 b_{1,1,2} r^4 z^2 c_{0,3,1} + 6 b_{4,0,0} r^4 b_{1,1,1} z \\
& +70 b_{1,1,1} r^4 z b_{0,4,0} + 96 b_{4,0,0} r^2 a_{0,0,1} z + 480 b_{0,4,0} r^2 a_{0,0,3} z^3 - 768 a_{0,0,4} z^3 c_{0,1,0} \\
& +96 a_{1,1,0} a_{0,0,4} z^4 - 768 a_{0,0,4} z^5 c_{0,1,2} - 288 a_{2,0,2} z^4 b_{0,0,2} + 768 b_{0,0,4} z^6 c_{1,0,3} \\
& +288 b_{0,2,0} a_{0,0,1} z + 288 b_{0,2,2} z^6 a_{0,0,4} - 96 b_{1,1,2} z^6 b_{0,0,4} - 288 a_{2,0,2} z^3 b_{0,0,1} \\
& -288 a_{2,0,1} z^3 b_{0,0,2} - 70 a_{1,1,1} r^4 z a_{4,0,0} + 16 a_{1,1,2} r^4 z c_{1,2,0} + 288 b_{0,2,2} r^2 z c_{1,0,0} \\
& -96 a_{0,1,2} r^2 z c_{0,2,0} - 6 b_{1,3,0} r^4 a_{1,1,2} z^2 - 480 a_{4,0,0} r^2 b_{0,0,3} z^3 - 72 a_{1,0,3} r^4 z^2 c_{3,1,0} \\
& -6 b_{1,3,0} r^4 b_{2,0,2} z^2 + 480 b_{0,4,0} r^2 a_{0,0,4} z^4 + 10 a_{0,2,1} r^4 z b_{2,2,0} - 96 b_{1,3,0} r^2 b_{0,0,3} z^3 \\
& -48 b_{1,1,1} r^2 c_{0,1,1} z + 80 b_{0,2,2} r^4 z^2 c_{1,2,1} - 6 a_{0,4,0} r^4 a_{1,1,2} z^2 - 144 a_{1,0,3} r^2 z^2 c_{1,1,0} \\
& +48 b_{0,3,0} r^2 b_{1,0,3} z^3 - 24 a_{0,3,1} r^4 c_{0,2,2} z^2 + 144 b_{0,0,3} z^3 c_{1,2,1} r^2 + 8 a_{1,1,1} r^4 c_{1,2,1} z \\
& -96 b_{3,1,0} r^2 b_{0,0,3} z^3 - 432 a_{0,0,3} z^2 c_{0,3,0} r^2 + 24 a_{0,3,1} r^4 c_{2,0,1} z \\
& -96 b_{3,1,0} r^2 b_{0,0,4} z^4 - 480 a_{4,0,0} r^2 b_{0,0,2} z^2 - 48 a_{0,1,1} z r^2 a_{3,0,0} + 42 b_{4,0,0} r^4 a_{2,0,1} z \\
& -6 a_{1,1,1} r^4 z b_{1,3,0} \\
& -96 a_{0,0,2} z^2 c_{2,1,1} r^2 - 48 a_{0,2,1} r^2 c_{0,1,2} z^2 - 288 a_{2,0,2} r^2 z c_{0,1,0} - 144 b_{1,0,3} r^2 z^2 c_{0,2,0} \\
& -80 a_{0,2,2} r^4 z c_{0,3,0} + 48 b_{0,3,0} r^2 a_{0,1,1} z + 48 a_{1,0,2} z^3 a_{2,1,1} r^2 - 144 a_{0,0,3} z^3 c_{2,1,1} r^2 \\
& -10 a_{1,1,2} r^4 z^2 b_{3,1,0} + 96 a_{3,1,0} r^2 a_{0,0,4} z^4 - 6 a_{1,1,1} r^4 z a_{0,4,0} - 24 b_{3,0,1} r^4 c_{0,2,2} z^2 \\
& +48 a_{1,0,1} z^2 b_{3,0,1} r^2 - 96 a_{0,0,2} z c_{2,1,0} r^2 - 48 r^2 a_{3,0,0} b_{1,0,3} z^3 \\
& +6 a_{3,1,0} r^4 a_{0,2,1} z + 96 a_{1,3,0} r^2 a_{0,0,2} z^2 + 288 b_{0,2,2} r^2 z^2 c_{1,0,1} + 96 a_{0,1,2} r^2 z^2 c_{2,0,1} \\
& +72 b_{1,0,3} r^4 z^2 c_{4,0,0} + 10 b_{2,2,0} r^4 b_{1,1,2} z^2 - 40 a_{2,0,1} r^4 c_{2,1,1} z - 96 a_{2,2,0} r^2 b_{0,0,4} z^4
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& +480 b_{0,4,0} r^2 a_{0,0,1} z - 96 b_{1,0,2} r^2 z c_{0,2,0} + 576 b_{0,0,4} z^3 c_{3,0,0} r^2 + 24 b_{0,3,1} r^4 c_{1,1,1} z \\
& +96 b_{2,0,2} r^2 z^2 c_{1,0,1} - 72 b_{1,0,3} r^4 z^2 c_{0,4,0} - 480 a_{4,0,0} r^2 b_{0,0,4} z^4 - 24 a_{2,1,1} r^4 c_{0,2,2} z^2 \\
& -192 a_{0,0,4} z^4 c_{2,1,1} r^2 + 38 a_{1,3,0} r^4 a_{2,0,1} z - 48 a_{1,0,1} r^2 c_{1,1,2} z^2 - 144 a_{2,0,1} r^2 c_{0,1,3} z^3 \\
& +96 b_{2,2,0} r^2 a_{0,0,3} z^3 - 208 a_{2,0,2} r^4 z c_{0,3,0} - 192 a_{0,0,4} z^3 c_{2,1,0} r^2 - 16 b_{1,1,2} r^4 z^2 c_{2,1,1} \\
& -48 r^2 z^3 a_{3,0,1} b_{1,0,2} - 96 a_{0,2,2} r^2 z^3 c_{0,1,2} - 96 a_{2,2,0} r^2 b_{0,0,3} z^3 + 48 a_{1,0,3} z^3 a_{0,3,0} r^2 \\
& +48 b_{0,3,0} r^2 a_{0,1,2} z^2 + 144 b_{0,0,1} c_{3,0,1} r^2 z - 48 a_{1,0,1} r^2 c_{1,1,1} z + 24 b_{0,3,1} r^4 c_{1,1,2} z^2 \\
& +48 a_{1,0,3} z^4 b_{3,0,1} r^2 - 16 b_{1,1,2} r^4 z c_{2,1,0} - 48 r^2 z^4 a_{3,0,1} a_{0,1,3} - 208 a_{2,0,2} r^4 z^2 c_{0,3,1} \\
& +48 a_{1,0,1} z b_{1,2,0} r^2 + 48 a_{1,0,3} z^4 a_{0,3,1} r^2 - 48 a_{3,0,1} r^2 z a_{0,1,0} + 96 b_{2,0,2} z^5 a_{0,0,3} \\
& +384 b_{0,0,2} z^2 c_{1,0,1} - 288 a_{2,0,0} b_{0,0,3} z^3 \\
& -288 a_{2,0,1} z^5 b_{0,0,4} - 768 a_{0,0,4} z^6 c_{0,1,3} + 96 a_{1,1,2} z^2 a_{0,0,0} - 96 a_{0,2,0} b_{0,0,1} z \\
& +768 b_{0,0,4} z^4 c_{1,0,1} + 96 a_{1,1,1} z a_{0,0,0} - 384 a_{0,0,2} z c_{0,1,0} + 288 b_{0,2,2} z^5 a_{0,0,3} \\
& +288 b_{0,2,1} z^3 a_{0,0,2} + 288 b_{0,2,1} z^5 a_{0,0,4} - 96 b_{1,1,1} z b_{0,0,0} + 96 b_{2,0,1} z^5 a_{0,0,4} \\
& +96 b_{2,0,2} z^4 a_{0,0,2} + 288 b_{0,2,2} z^3 a_{0,0,1} - 96 a_{0,2,0} b_{0,0,4} z^4 - 288 a_{2,0,1} z b_{0,0,0} \\
& +288 b_{0,2,2} z^2 a_{0,0,0} + 96 a_{1,1,1} z^5 a_{0,0,4} - 96 b_{1,1,0} b_{0,0,1} z + 96 a_{1,1,2} z^3 a_{0,0,1} \\
& -576 a_{0,0,3} z^4 c_{0,1,2} - 384 a_{0,0,2} z^4 c_{0,1,3} - 96 a_{0,2,1} z b_{0,0,0} - 288 a_{2,0,2} z^2 b_{0,0,0} \\
& -96 b_{1,1,2} z^4 b_{0,0,2} + 288 b_{0,2,1} z^4 a_{0,0,3} - 96 a_{0,2,2} z^2 b_{0,0,0} + 288 b_{0,2,0} a_{0,0,3} z^3 \\
& -96 b_{1,1,0} b_{0,0,2} z^2 + 96 b_{2,0,0} a_{0,0,3} z^3 + 576 b_{0,0,3} z^5 c_{1,0,3} + 384 b_{0,0,2} z c_{1,0,0} \\
& +576 b_{0,0,3} z^4 c_{1,0,2} - 768 a_{0,0,4} z^4 c_{0,1,1} - 96 b_{1,1,1} z^4 b_{0,0,3} + 96 a_{1,1,0} a_{0,0,3} z^3 \\
& +288 b_{0,2,1} z^2 a_{0,0,1} + 576 b_{0,0,3} z^3 c_{1,0,1} - 96 a_{0,2,2} z^6 b_{0,0,4} + 80 b_{2,0,2} r^4 z^2 c_{3,0,1} \\
& -96 b_{3,1,0} r^2 b_{0,0,1} z + 144 b_{1,0,3} r^2 z^3 c_{2,0,1} + 48 a_{1,0,2} z^2 a_{2,1,0} r^2 + 48 a_{1,0,1} z^2 a_{2,1,1} r^2 \\
& +48 a_{1,0,1} z a_{2,1,0} r^2 - 288 a_{2,0,2} r^2 z^4 c_{0,1,3} + 48 a_{1,0,1} z b_{3,0,0} r^2 + 48 a_{1,0,2} z^2 b_{3,0,0} r^2 \\
& -96 b_{3,1,0} r^2 b_{0,0,2} z^2 - 24 r^4 a_{3,0,1} c_{1,1,1} z - 96 b_{1,1,2} r^2 z c_{0,1,0} + 24 b_{1,2,1} r^4 c_{2,0,1} z \\
& +72 a_{0,1,3} r^4 z^2 c_{4,0,0} + 96 b_{2,0,2} r^2 z^3 c_{1,0,2} + 48 b_{0,3,1} r^2 z^4 a_{0,1,3} + 96 b_{2,2,0} r^2 a_{0,0,4} z^4 \\
& +48 a_{1,0,2} z^2 b_{1,2,0} r^2 + 144 b_{0,2,1} r^2 c_{1,0,3} z^3 + 6 a_{0,2,1} r^4 z b_{4,0,0} + 96 a_{3,1,0} r^2 a_{0,0,1} z \\
& -48 a_{1,0,2} r^4 z c_{1,3,0} + 48 b_{0,3,0} r^2 b_{1,0,1} z - 6 b_{2,0,2} r^4 z^2 a_{0,4,0} + 10 a_{1,3,0} r^4 a_{0,2,1} z \\
& -96 a_{1,0,2} r^2 z^2 c_{1,1,1} + 6 a_{3,1,0} r^4 b_{1,1,2} z^2 + 48 b_{2,0,1} r^2 c_{1,0,2} z^2 + 40 b_{2,0,1} r^4 c_{3,0,1} z \\
& +48 b_{0,3,1} r^2 z^2 b_{1,0,1} - 48 b_{1,1,1} r^2 c_{0,1,2} z^2 + 96 b_{2,0,2} r^2 z c_{1,0,0} - 70 a_{4,0,0} r^4 b_{2,0,1} z \\
& -24 b_{1,2,1} r^4 c_{0,2,2} z^2 - 170 b_{0,2,1} r^4 z a_{4,0,0} - 48 b_{1,0,1} r^2 c_{0,2,2} z^2 - 40 a_{0,2,1} r^4 c_{0,3,1} z \\
& +48 a_{0,1,2} r^4 z c_{4,0,0} - 144 a_{2,0,1} r^2 c_{0,1,1} z - 10 b_{2,0,2} r^4 z^2 b_{3,1,0} + 96 b_{0,0,2} z c_{1,2,0} r^2 \\
& +42 a_{3,1,0} r^4 a_{2,0,1} z - 96 a_{0,2,2} r^2 z^2 c_{0,1,1} + 48 a_{0,1,1} r^2 c_{2,0,1} z + 48 b_{0,3,1} r^2 z b_{1,0,0}
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3. PERTURBATION D'UN CENTRE LINÉAIRE PAR DES
POLYNÔMES DE DEGRÉ 4

$$\begin{aligned}
& -96 a_{1,0,2} r^2 z c_{1,1,0} - 70 a_{4,0,0} r^4 a_{1,1,2} z^2 + 16 a_{1,1,2} r^4 z^2 c_{1,2,1} - 96 b_{1,1,2} r^2 z^3 c_{0,1,2} \\
& -42 a_{0,4,0} r^4 b_{0,2,2} z^2 - 80 a_{2,0,2} r^4 z^2 c_{2,1,1} - 38 a_{2,2,0} r^4 b_{0,2,1} z + 96 a_{1,3,0} r^2 a_{0,0,1} z \\
& -96 a_{0,2,2} r^2 z^4 c_{0,1,3} + 10 a_{1,3,0} r^4 a_{0,2,2} z^2 - 144 a_{1,0,3} r^2 z^4 c_{1,1,2} + 38 a_{2,0,2} r^4 z^2 b_{2,2,0} \\
& -16 a_{0,2,2} r^4 z c_{2,1,0} + 480 b_{0,4,0} r^2 a_{0,0,2} z^2 + 80 b_{0,2,2} r^4 z c_{1,2,0} - 48 r^2 z a_{3,0,1} b_{1,0,0} \\
& +70 b_{0,4,0} r^4 a_{0,2,1} z - 42 b_{1,3,0} r^4 b_{0,2,2} z^2 + 96 a_{1,1,2} r^2 z^3 c_{1,0,2} + 96 b_{2,2,0} r^2 a_{0,0,1} z \\
& +8 b_{2,0,1} r^4 c_{1,2,1} z \\
& +48 a_{1,0,3} z^3 b_{1,2,0} r^2 + 48 a_{1,0,2} z^3 b_{3,0,1} r^2 - 48 a_{0,1,2} z^2 r^2 a_{3,0,0} - 70 b_{2,0,2} r^4 z^2 a_{4,0,0} \\
& +48 b_{2,0,1} r^2 c_{1,0,1} z - 144 a_{0,0,1} c_{0,3,1} r^2 z + 48 a_{1,0,3} z^3 a_{2,1,0} r^2 - 48 r^2 a_{3,0,0} a_{0,1,3} z^3 \\
& -48 b_{1,1,1} r^2 c_{0,1,3} z^3 + 16 b_{2,0,2} r^4 z c_{1,2,0} + 10 b_{2,2,0} r^4 a_{0,2,2} z^2 + 48 b_{0,0,1} c_{1,2,1} r^2 z \\
& +42 a_{2,0,2} r^4 z^2 b_{4,0,0} + 40 a_{1,1,1} r^4 c_{3,0,1} z - 288 a_{2,0,2} r^2 z^3 c_{0,1,2} \\
& -96 b_{1,1,1} z^2 b_{0,0,1} - 96 a_{0,2,0} b_{0,0,2} z^2 - 384 a_{0,0,2} z^2 c_{0,1,1} - 576 a_{0,0,3} z^2 c_{0,1,0} \\
& -576 a_{0,0,3} z^5 c_{0,1,3} + 96 b_{2,0,0} a_{0,0,2} z^2 - 96 a_{0,2,1} z^4 b_{0,0,3} - 288 a_{2,0,0} b_{0,0,2} z^2 \\
& +576 b_{0,0,3} z^2 c_{1,0,0} - 384 a_{0,0,2} z^3 c_{0,1,2} - 192 a_{0,0,1} c_{0,1,3} z^3 - 288 a_{2,0,1} z^2 b_{0,0,1} \\
& -96 b_{1,1,0} b_{0,0,3} z^3 - 96 b_{1,1,0} b_{0,0,4} z^4 - 192 a_{0,0,1} c_{0,1,1} z + 96 a_{1,1,1} z^4 a_{0,0,3} \\
& +96 b_{2,0,2} z^3 a_{0,0,1} - 576 a_{0,0,3} z^3 c_{0,1,1} + 96 a_{1,1,1} z^2 a_{0,0,1} + 768 b_{0,0,4} z^5 c_{1,0,2} \\
& +384 b_{0,0,2} z^3 c_{1,0,2} + 96 a_{1,1,2} z^6 a_{0,0,4} - 96 a_{0,2,2} z^4 b_{0,0,2} - 48 a_{0,2,1} r^2 c_{0,1,1} z \\
& -170 a_{4,0,0} r^4 b_{0,2,2} z^2 + 16 b_{2,0,2} r^4 z^2 c_{1,2,1} + 96 a_{1,1,2} r^2 z c_{1,0,0} + 48 a_{1,0,3} z^4 a_{2,1,1} r^2 \\
& +6 a_{0,2,2} r^4 z^2 b_{4,0,0} + 96 b_{4,0,0} r^2 a_{0,0,2} z^2 - 144 a_{0,1,3} r^2 z^2 c_{0,2,0} \\
& +10 a_{1,3,0} r^4 b_{1,1,1} z + 170 a_{2,0,2} r^4 z^2 b_{0,4,0} - 16 a_{0,2,2} r^4 z^2 c_{2,1,1} - 96 a_{2,2,0} r^2 b_{0,0,2} z^2 \\
& +144 b_{0,0,3} z^2 c_{1,2,0} r^2 + 96 b_{0,0,2} z^2 c_{1,2,1} r^2 + 48 a_{1,0,2} z^3 a_{0,3,1} r^2 \\
& +48 a_{1,0,1} z^2 b_{1,2,1} r^2 + 48 a_{1,0,0} a_{0,3,1} r^2 z + 432 b_{0,0,3} z^3 c_{3,0,1} r^2 - 10 a_{2,2,0} r^4 a_{1,1,1} z \\
& +144 b_{0,2,1} r^2 c_{1,0,2} z^2 + 576 b_{0,0,4} z^4 c_{3,0,1} r^2 + 70 a_{0,2,2} r^4 z^2 b_{0,4,0} \\
& +144 b_{0,2,1} r^2 c_{1,0,1} z + 80 b_{2,0,2} r^4 z c_{3,0,0} + 288 b_{0,2,2} r^2 z^3 c_{1,0,2} - 72 a_{0,1,3} r^4 z^2 c_{0,4,0} \\
& -48 a_{1,0,2} r^4 z c_{3,1,0} - 80 a_{2,0,2} r^4 z c_{2,1,0} + 96 b_{4,0,0} r^2 a_{0,0,4} z^4 - 48 b_{1,0,2} r^4 z c_{0,4,0} \\
& +48 a_{1,0,2} z^2 a_{0,3,0} r^2 - 48 a_{0,0,1} c_{2,1,1} r^2 z + 48 a_{1,0,2} z^3 b_{1,2,1} r^2 - 48 a_{0,1,1} r^2 c_{0,2,2} z^2 \\
& +48 b_{2,0,1} r^2 c_{1,0,3} z^3 - 80 b_{1,1,2} r^4 z c_{0,3,0} - 96 b_{1,1,2} r^2 z^4 c_{0,1,3} - 48 a_{3,0,1} r^2 z^2 b_{1,0,1} \\
& +80 a_{1,1,2} r^4 z c_{3,0,0} - 48 a_{0,2,1} r^2 c_{0,1,3} z^3 - 48 r^2 a_{3,0,0} b_{1,0,1} z + 48 b_{1,0,2} r^4 z c_{4,0,0} \\
& +10 a_{1,3,0} r^4 b_{1,1,2} z^2 + 10 b_{1,1,1} r^4 z b_{2,2,0} + 96 b_{2,2,0} r^2 a_{0,0,2} z^2 - 96 b_{1,3,0} r^2 b_{0,0,4} z^4 \\
& +24 b_{3,0,1} r^4 c_{2,0,1} z - 6 b_{1,3,0} r^4 b_{2,0,1} z - 96 a_{0,2,2} r^2 z c_{0,1,0} - 144 a_{0,0,3} z^2 c_{2,1,0} r^2 \\
& +208 b_{0,2,2} r^4 z^2 c_{3,0,1} - 96 b_{1,3,0} r^2 b_{0,0,1} z - 10 a_{2,2,0} r^4 a_{1,1,2} z^2 - 480 a_{4,0,0} r^2 b_{0,0,1} z
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& +288 b_{0,0,2} z c_{3,0,0} r^2 + 6 a_{0,2,2} r^4 z^2 a_{3,1,0} - 288 a_{2,0,2} r^2 z^2 c_{0,1,1} + 144 a_{0,1,3} r^2 z^3 c_{2,0,1} \\
& +6 b_{1,1,2} r^4 z^2 b_{4,0,0} + 48 a_{1,0,3} z^4 b_{1,2,1} r^2 - 96 a_{0,4,0} r^2 b_{0,0,2} z^2 + 48 a_{1,0,0} b_{1,2,1} r^2 z \\
& +48 b_{0,3,1} r^2 z^3 b_{1,0,2} - 42 b_{0,2,1} r^4 z a_{0,4,0} + 96 a_{1,3,0} r^2 a_{0,0,4} z^4 - 96 a_{1,0,2} r^2 z^3 c_{1,1,2} \\
& +96 a_{3,1,0} r^2 a_{0,0,2} z^2 + 96 a_{1,1,2} r^2 z^4 c_{1,0,3} - 40 b_{1,1,1} r^4 c_{0,3,1} z - 48 a_{0,1,1} z^2 r^2 a_{3,0,1} \\
& -48 a_{0,1,2} z^3 r^2 a_{3,0,1} + 96 a_{3,1,0} r^2 a_{0,0,3} z^3 - 288 a_{0,0,2} z c_{0,3,0} r^2 + 96 b_{2,0,2} r^2 z^4 c_{1,0,3} \\
& -6 a_{0,4,0} r^4 b_{2,0,1} z - 96 a_{2,2,0} r^2 b_{0,0,1} z + 38 a_{2,0,2} r^4 z^2 a_{1,3,0} - 96 b_{1,3,0} r^2 b_{0,0,2} z^2 \\
& -10 a_{2,2,0} r^4 b_{2,0,1} z - 96 a_{0,2,2} z^3 b_{0,0,1} - 96 b_{1,1,1} z^3 b_{0,0,2} + 288 b_{0,2,2} z^4 a_{0,0,2} \\
& -288 a_{2,0,0} b_{0,0,1} z + 96 a_{1,1,0} a_{0,0,2} z^2 + 96 b_{2,0,0} a_{0,0,1} z - 288 a_{2,0,0} b_{0,0,4} z^4 \\
& +384 b_{0,0,2} z^4 c_{1,0,3} + 96 b_{2,0,1} z^4 a_{0,0,3} + 96 b_{2,0,1} z^2 a_{0,0,1} + 96 b_{2,0,0} a_{0,0,4} z^4 \\
& -96 a_{0,2,1} z^3 b_{0,0,2} - 288 a_{2,0,2} z^6 b_{0,0,4} + 96 a_{1,1,1} z^3 a_{0,0,2} \\
f_{22}(r, z) & \quad 1/4 r^6 c_{0,2,2} z c_{3,1,0} + 9/4 c_{0,3,1} r^2 z^2 a_{0,0,1} - 1/2 c_{2,0,1} r^2 z^2 b_{1,0,1} + 1/2 c_{0,2,2} r^2 z^4 a_{0,1,2} \\
& +1/4 c_{0,2,2} r^4 z^3 a_{0,3,1} + 3/4 c_{2,1,1} r^2 z^5 a_{0,0,4} + 3/4 c_{0,1,0} a_{2,0,2} r^2 z^2 - 5/8 c_{1,0,3} z^3 b_{0,4,0} r^4 \\
& +1/4 r^6 c_{0,2,2} z c_{1,3,0} + 1/2 c_{0,2,2} r^2 z^5 b_{1,0,3} - \frac{5}{16} r^6 c_{4,0,0} b_{3,0,1} z + 1/2 c_{0,2,0} r^2 a_{0,1,2} z^2 \\
& - \frac{5}{16} c_{1,3,0} r^6 z b_{0,3,1} + 5/8 c_{0,3,1} r^4 z a_{0,2,0} + 1/4 c_{0,1,2} z^2 a_{0,2,0} r^2 - 1/4 c_{1,0,3} z^3 b_{2,0,0} r^2 \\
& +1/2 c_{0,2,0} r^2 b_{1,0,2} z^2 + 1/2 c_{0,4,0} r^4 b_{1,0,2} z^2 - 1/2 c_{2,0,1} r^2 z^4 b_{1,0,3} + 5/8 c_{0,1,3} z^3 a_{4,0,0} r^4 \\
& + \frac{5}{16} c_{0,4,0} r^6 b_{1,2,1} z + 1/4 r^4 c_{2,0,1} c_{1,1,2} z^2 - 1/4 c_{1,1,2} r^4 z^2 b_{0,3,0} - 3/4 c_{1,2,0} r^2 b_{0,0,1} z \\
& +9/4 c_{0,3,0} r^2 a_{0,0,3} z^3 - 9/4 c_{3,0,0} r^2 b_{0,0,3} z^3 + 5/8 c_{2,1,1} r^4 z^3 a_{2,0,2} - 3/4 c_{1,2,1} r^2 z b_{0,0,0} \\
& -1/8 c_{1,0,0} b_{4,0,0} r^4 - 1/8 c_{1,2,0} r^4 b_{2,0,1} z - 1/8 c_{1,2,1} r^4 z^2 b_{2,0,1} - 1/4 c_{1,0,1} z^3 a_{1,1,2} r^2 \\
& - \frac{21}{64} c_{3,0,0} r^6 a_{3,1,0} - 1/4 c_{1,0,2} z^4 b_{2,0,2} r^2 + 1/4 r^4 c_{0,1,1} c_{1,2,0} + \frac{85}{64} c_{0,3,0} r^6 a_{4,0,0} \\
& + \frac{3}{64} c_{2,1,0} r^6 a_{0,4,0} - 1/4 c_{1,0,0} b_{2,0,0} r^2 + 9/4 c_{0,3,0} r^2 a_{0,0,4} z^4 + \frac{13}{8} c_{0,3,1} r^4 z^2 a_{2,0,1} \\
& +3/4 c_{2,1,1} r^2 z^4 a_{0,0,3} - \frac{13}{8} c_{3,0,1} r^4 z^3 b_{0,2,2} + 1/2 r^4 c_{0,1,2} z c_{1,2,0} + 1/4 c_{0,1,1} z a_{0,2,0} r^2 \\
& +9/4 c_{0,3,1} r^2 z^3 a_{0,0,2} - 5/8 c_{3,0,0} r^4 b_{2,0,2} z^2 + \frac{19}{64} c_{0,3,1} r^6 z a_{2,2,0} - 5/8 c_{1,0,2} z^2 b_{0,4,0} r^4 \\
& -5/8 c_{3,0,1} r^4 z^3 a_{1,1,2} + 1/4 c_{0,2,2} r^4 z^3 b_{1,2,1} + 1/8 c_{2,1,0} r^4 a_{0,2,1} z - 1/4 c_{1,0,0} a_{1,1,1} r^2 z \\
& -1/8 c_{1,2,1} r^4 z^3 a_{1,1,2} + 1/2 c_{1,1,2} r^2 z^5 a_{1,0,3} - 1/2 c_{2,0,1} r^2 z a_{0,1,0} + 1/8 c_{0,1,3} z^3 a_{2,2,0} r^4 \\
& -3/4 c_{1,0,1} z b_{0,2,0} r^2 + 5/8 c_{2,1,1} r^4 z^2 a_{2,0,1} + 1/4 c_{0,1,2} z^4 a_{0,2,2} r^2 + 1/4 c_{0,2,0} r^4 a_{2,1,1} z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2r^2c_{0,1,1}c_{1,0,3}z^3 - \frac{5}{16}c_{4,0,0}r^6a_{2,1,1}z - 3/4c_{1,2,1}r^2z^3b_{0,0,2} + 3/2r^4c_{0,1,2}zc_{3,0,0} \\
& -3/4c_{1,0,0}b_{0,2,0}r^2 + 1/2c_{0,2,0}r^2a_{0,1,0} + \frac{5}{16}c_{3,1,0}r^6a_{3,0,0} + 1/4c_{0,2,0}r^4b_{3,0,0} \\
& + \frac{5}{16}r^6c_{0,4,0}a_{0,3,0} + 5/8c_{0,3,0}r^4b_{1,1,0} - 5/8c_{3,0,0}r^4a_{1,1,0} + 1/4c_{0,1,0}a_{0,2,0}r^2 \\
& + 1/2c_{3,1,0}r^4a_{1,0,0} + 1/4c_{0,2,0}r^4a_{0,3,0} + 1/2r^4c_{0,4,0}a_{0,1,0} + 1/4c_{0,1,0}b_{1,1,1}r^2z \\
& + 1/8c_{2,1,0}r^4b_{1,1,0} + 1/4c_{0,1,1}z^3b_{1,1,2}r^2 - 1/4c_{2,0,1}r^4za_{2,1,0} + 5/8c_{0,1,2}z^2a_{4,0,0}r^4 \\
& - 1/4c_{1,0,2}z^3b_{2,0,1}r^2 - 1/2c_{2,0,1}r^2z^3a_{0,1,2} + 1/2c_{3,1,0}r^4a_{1,0,1}z - \frac{19}{64}c_{3,0,1}r^6za_{1,3,0} \\
& + 5/8c_{0,3,1}r^4z^2a_{0,2,1} - 1/2c_{2,0,1}r^2z^4a_{0,1,3} - 1/2r^4c_{4,0,0}b_{1,0,2}z^2 - 1/4c_{1,0,2}z^3a_{1,1,1}r^2 \\
& - \frac{3}{64}c_{1,2,1}r^6za_{3,1,0} + 1/2c_{0,2,0}r^2a_{0,1,3}z^3 + 3/4c_{2,1,0}r^2a_{0,0,3}z^3 \\
& + 1/4c_{0,1,3}z^5b_{1,1,2}r^2 + 1/4c_{0,1,2}z^3b_{1,1,1}r^2 \\
& + 1/2c_{0,2,0}r^2b_{1,0,1}z - \frac{35}{64}c_{1,2,1}r^6zb_{0,4,0} - \frac{5}{64}c_{1,2,1}r^6za_{1,3,0} + 1/2c_{1,3,0}r^4a_{1,0,2}z^2 \\
& + \frac{13}{8}c_{0,3,0}r^4a_{2,0,0} + 1/4c_{0,2,0}r^4a_{2,1,0} - 1/8r^6c_{2,0,1}c_{3,1,0} + 1/4c_{0,1,0}a_{0,2,2}r^2z^2 \\
& + 3/4c_{0,1,1}z^3a_{2,0,2}r^2 - 1/4c_{1,0,3}z^4b_{2,0,1}r^2 + \frac{3}{64}c_{2,1,1}r^6za_{0,4,0} + 3/2r^4c_{0,1,3}z^3c_{3,0,1} \\
& + 1/2c_{0,2,2}r^2z^2a_{0,1,0} - 1/4c_{1,0,3}z^4a_{1,1,1}r^2 + 3/4c_{2,1,0}r^2a_{0,0,2}z^2 + 1/8c_{0,1,1}za_{0,4,0}r^4 \\
& + 1/4c_{1,1,2}r^4z^3a_{3,0,1} + 1/2r^4c_{0,4,0}b_{1,0,3}z^3 + 2r^2c_{0,1,3}z^3c_{1,0,1} + 9/4c_{0,3,0}r^2a_{0,0,2}z^2 \\
& - 1/4c_{2,0,1}r^4z^2b_{3,0,1} - 9/4c_{3,0,0}r^2b_{0,0,0} + \frac{3}{64}c_{2,1,0}r^6b_{1,3,0} - 1/8c_{1,0,0}a_{3,1,0}r^4 \\
& - \frac{19}{64}c_{3,0,0}r^6b_{2,2,0} - \frac{19}{64}c_{3,0,1}r^6zb_{2,2,0} + 3/16r^6c_{0,4,0}b_{3,0,1}z - 1/4c_{1,0,0}a_{1,1,2}r^2z^2 \\
& - r^2c_{0,1,2}z^4c_{1,0,3} - 9/4c_{3,0,1}r^2zb_{0,0,0} + 1/8c_{0,1,2}z^2b_{1,3,0}r^4 - 1/4c_{2,0,1}r^4za_{0,3,0} \\
& + 3/4c_{0,1,0}a_{2,0,0}r^2 - \frac{35}{64}c_{1,2,0}r^6b_{0,4,0} + \frac{21}{64}c_{0,3,0}r^6a_{0,4,0} + 3/4r^4c_{0,1,1}c_{3,0,0} \\
& - 1/8r^6c_{2,0,1}c_{1,3,0} - 1/4r^4c_{1,2,1}c_{0,1,0} + \frac{5}{64}c_{2,1,0}r^6b_{3,1,0} + 1/8c_{0,1,0}b_{3,1,0}r^4 \\
& + 3/16c_{0,4,0}r^6b_{3,0,0} + \frac{5}{64}c_{2,1,0}r^6a_{2,2,0} - 3/4r^4c_{1,0,1}c_{0,3,0} + 1/2c_{0,2,0}r^2b_{1,0,0} \\
& - \frac{3}{64}c_{1,2,0}r^6a_{3,1,0} - 1/8c_{1,2,0}r^4a_{1,1,0} + \frac{19}{64}c_{0,3,0}r^6b_{3,1,0} - \frac{13}{8}c_{3,0,0}r^4b_{0,2,0} \\
& - 1/2r^4c_{4,0,0}b_{1,0,0}
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& +3/16 r^6 c_{0,4,0} a_{2,1,0} + 1/4 c_{1,1,0} r^4 a_{3,0,0} - \frac{5}{24} r^6 c_{3,0,1} c_{2,1,0} - 3/16 c_{3,1,0} r^6 b_{0,3,0} \\
& -1/8 c_{1,0,1} z b_{2,2,0} r^4 - 1/2 r^4 c_{4,0,0} a_{0,1,3} z^3 + 3/4 c_{0,1,3} z^5 a_{2,0,2} r^2 + r^2 c_{0,1,3} z^4 c_{1,0,2} \\
& - c_{1,0,0} b_{0,0,2} z^2 - c_{1,0,3} z^3 b_{0,0,0} - c_{1,0,0} b_{0,0,4} z^4 - c_{1,0,2} z^3 b_{0,0,1} - r^2 c_{1,0,1} c_{0,1,0} \\
& + c_{0,1,2} z^2 a_{0,0,0} - c_{1,0,1} z^4 b_{0,0,3} + c_{0,1,3} z^3 a_{0,0,0} - c_{1,0,0} b_{0,0,1} z - 3/4 c_{1,2,1} r^2 z^2 b_{0,0,1} \\
& + \frac{5}{64} c_{2,1,1} r^6 z a_{2,2,0} - 5/8 c_{1,2,0} r^4 b_{0,2,2} z^2 + c_{0,1,3} z^5 a_{0,0,2} + c_{0,1,0} a_{0,0,3} z^3 \\
& + c_{0,1,0} a_{0,0,4} z^4 + c_{0,1,2} z^3 a_{0,0,1} + c_{0,1,3} z^6 a_{0,0,3} + r^2 c_{0,1,1} c_{1,0,0} + c_{0,1,3} z^7 a_{0,0,4} \\
& + c_{0,1,1} z^3 a_{0,0,2} - c_{1,0,1} z^2 b_{0,0,1} + c_{0,1,1} z^4 a_{0,0,3} + c_{0,1,1} z a_{0,0,0} + c_{0,1,1} z^5 a_{0,0,4} \\
& + c_{0,1,2} z^6 a_{0,0,4} + c_{0,1,3} z^4 a_{0,0,1} + c_{0,1,1} z^2 a_{0,0,1} + c_{0,1,2} z^4 a_{0,0,2} + c_{0,1,2} z^5 a_{0,0,3} \\
& + c_{0,1,0} a_{0,0,1} z + c_{0,1,0} a_{0,0,2} z^2 - 1/4 c_{1,0,0} a_{1,1,0} r^2 - 5/8 c_{1,0,0} b_{0,4,0} r^4 \\
& -1/8 c_{1,0,0} a_{1,3,0} r^4 - \frac{5}{64} c_{1,2,0} r^6 a_{1,3,0} - \frac{19}{64} c_{3,0,0} r^6 a_{1,3,0} + 1/2 c_{1,3,0} r^4 a_{1,0,0} \\
& -1/2 r^4 c_{1,1,2} z c_{0,2,0} + 1/4 c_{0,2,2} r^4 z^3 b_{3,0,1} + 1/8 c_{0,1,2} z^2 b_{3,1,0} r^4 - 3/4 c_{1,2,0} r^2 b_{0,0,0} \\
& -1/4 c_{1,1,2} r^4 z^3 b_{0,3,1} - \frac{3}{64} c_{1,2,0} r^6 b_{4,0,0} + 1/24 r^6 c_{2,1,1} c_{1,2,0} - 1/4 r^4 c_{1,0,1} c_{2,1,0} \\
& - \frac{5}{16} r^6 c_{4,0,0} a_{2,1,0} - \frac{5}{64} c_{1,2,0} r^6 b_{2,2,0} + 1/4 c_{0,2,0} r^4 b_{1,2,0} + 1/2 c_{1,1,0} r^2 a_{1,0,0} \\
& + 1/8 c_{0,1,0} b_{1,3,0} r^4 + \frac{21}{64} c_{0,3,0} r^6 b_{1,3,0} + \frac{5}{24} r^6 c_{0,3,1} c_{1,2,0} - 5/8 c_{3,0,1} r^4 z b_{2,0,0} \\
& -1/2 r^4 c_{1,0,2} z c_{2,1,0} + 1/2 c_{0,2,0} r^2 a_{0,1,1} z + 1/8 c_{0,1,1} z b_{1,3,0} r^4 + \frac{35}{64} c_{2,1,1} r^6 z a_{4,0,0} \\
& + 1/2 c_{1,1,0} r^2 a_{1,0,3} z^3 - 5/8 c_{3,0,1} r^4 z^2 a_{1,1,1} + 9/4 c_{0,3,1} r^2 z^4 a_{0,0,3} + 1/8 c_{0,1,1} z b_{3,1,0} r^4 \\
& - 3/4 c_{1,0,2} z^3 b_{0,2,1} r^2 + 5/8 c_{0,3,1} r^4 z^2 b_{1,1,1} - 1/4 c_{1,0,1} z^2 a_{1,1,1} r^2 \\
& - 1/4 c_{2,0,1} r^4 z b_{1,2,0} + 1/4 c_{0,1,1} z^2 b_{1,1,1} r^2 - 5/8 c_{1,0,1} z b_{0,4,0} r^4 - 5/8 c_{3,0,1} r^4 z^2 b_{2,0,1} \\
& - 1/4 c_{1,0,3} z^3 a_{1,1,0} r^2 - 1/24 r^6 c_{1,2,1} c_{2,1,0} - \frac{13}{8} c_{3,0,0} r^4 b_{0,2,1} z + 1/8 c_{0,1,2} z^2 a_{0,4,0} r^4 \\
& + 3/4 c_{2,1,0} r^2 a_{0,0,1} z - 3/16 r^6 c_{4,0,0} a_{0,3,1} z - 9/4 c_{3,0,1} r^2 z^2 b_{0,0,1} + 1/2 c_{1,1,1} r^2 z^4 a_{1,0,3} \\
& + 9/4 c_{0,3,1} r^2 z a_{0,0,0} + \frac{13}{8} c_{0,3,1} r^4 z a_{2,0,0} + 1/8 c_{2,1,1} r^4 z^3 a_{0,2,2} + 1/4 c_{0,1,1} z^3 a_{0,2,2} r^2 \\
& - 1/8 c_{1,0,2} z^2 a_{1,3,0} r^4 - 1/4 c_{1,0,2} z^2 a_{1,1,0} r^2 + 1/4 r^4 c_{0,1,2} z^2 c_{1,2,1} - 3/4 c_{1,2,0} r^2 b_{0,0,3} z^3 \\
& - 1/2 c_{2,0,1} r^2 z^2 a_{0,1,1} - 1/8 c_{1,2,1} r^4 z^2 a_{1,1,1} + 1/4 c_{0,2,2} r^4 z^2 b_{1,2,0} - 1/8 c_{1,2,0} r^4 b_{2,0,0} \\
& - r^2 c_{0,1,1} c_{1,0,2} z^2 + 1/8 c_{0,1,0} a_{2,2,0} r^4 + 3/16 c_{1,3,0} r^6 a_{3,0,0} - \frac{5}{16} r^6 c_{4,0,0} b_{3,0,0}
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3. PERTURBATION D'UN CENTRE LINÉAIRE PAR DES
POLYNÔMES DE DEGRÉ 4

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{16} c_{1,3,0} r^6 b_{0,3,0} - 1/8 r^6 c_{1,1,1} c_{0,4,0} - \frac{85}{64} c_{3,0,0} r^6 b_{0,4,0} + 5/8 c_{0,3,1} r^4 z^3 a_{0,2,2} \\
& + 1/2 r^4 c_{0,2,2} z c_{1,1,0} + 3/4 c_{2,1,1} r^2 z a_{0,0,0} - 1/4 c_{1,0,3} z^5 b_{2,0,2} r^2 - 1/8 c_{1,2,0} r^4 a_{1,1,2} z^2 \\
& + 1/4 c_{0,2,0} r^4 b_{3,0,1} z + 2 r^2 c_{0,1,2} z c_{1,0,0} - 1/8 c_{1,0,2} z^2 b_{2,2,0} r^4 + 1/2 c_{1,1,2} r^2 z^4 a_{1,0,2} \\
& - 1/4 c_{2,0,1} r^4 z b_{3,0,0} - \frac{5}{64} c_{1,2,1} r^6 z b_{2,2,0} + 3/4 c_{0,1,0} a_{2,0,1} r^2 z - 1/4 c_{1,0,2} z^2 b_{2,0,0} r^2 \\
& - 1/8 c_{1,0,3} z^3 a_{3,1,0} r^4 - 9/4 c_{3,0,1} r^2 z^5 b_{0,0,4} - c_{1,0,2} z^4 b_{0,0,2} - c_{1,0,1} z b_{0,0,0} - c_{1,0,2} z^5 b_{0,0,3} \\
& - c_{1,0,1} z^5 b_{0,0,4} - c_{1,0,1} z^3 b_{0,0,2} - c_{1,0,3} z^7 b_{0,0,4} - c_{1,0,2} z^2 b_{0,0,0} \\
& - c_{1,0,3} z^6 b_{0,0,3} + 3/4 r^4 c_{0,1,3} z^2 c_{1,2,0} + 3/4 c_{0,1,3} z^3 a_{2,0,0} r^2 + 1/8 c_{2,1,0} r^4 b_{1,1,1} z \\
& - 1/8 c_{1,0,2} z^2 a_{3,1,0} r^4 + 1/4 c_{0,2,2} r^4 z^3 a_{2,1,1} + 1/2 c_{0,2,2} r^2 z^5 a_{0,1,3} + 5/8 c_{0,3,1} r^4 z^3 b_{1,1,2} \\
& - 5/8 c_{1,2,1} r^4 z b_{0,2,0} + 3 r^2 c_{0,1,3} z^2 c_{1,0,0} - 1/4 c_{1,0,1} z^2 b_{2,0,1} r^2 - 3/4 c_{1,0,2} z^2 b_{0,2,0} r^2 \\
& - 3/16 r^6 c_{4,0,0} b_{1,2,1} z + 1/2 c_{1,1,1} r^2 z^3 a_{1,0,2} - 3/4 c_{1,2,0} r^2 b_{0,0,4} z^4 + \frac{3}{64} c_{2,1,1} r^6 z b_{1,3,0} \\
& - 3/4 r^4 c_{1,0,3} z^2 c_{2,1,0} + 1/4 c_{0,1,3} z^5 a_{0,2,2} r^2 + 1/2 c_{1,1,2} r^2 z^3 a_{1,0,1} - 9/4 c_{3,0,1} r^2 z^4 b_{0,0,3} \\
& + 3/4 c_{0,1,1} z^2 a_{2,0,1} r^2 + \frac{13}{8} c_{0,3,0} r^4 a_{2,0,1} z - 5/8 c_{1,2,1} r^4 z^2 b_{0,2,1} + 1/2 c_{1,1,0} r^2 a_{1,0,1} z \\
& + 1/4 c_{0,2,2} r^4 z^2 a_{0,3,0} + 3/4 c_{0,1,3} z^4 a_{2,0,1} r^2 \\
& - \frac{21}{64} c_{3,0,1} r^6 z a_{3,1,0} - 5/8 c_{1,2,0} r^4 b_{0,2,1} z + \frac{13}{8} c_{0,3,1} r^4 z^3 a_{2,0,2} + \frac{21}{64} c_{0,3,1} r^6 z a_{0,4,0} \\
& + 5/8 c_{0,3,0} r^4 a_{0,2,1} z - \frac{3}{64} c_{1,2,1} r^6 z b_{4,0,0} - 1/8 c_{1,0,3} z^3 a_{1,3,0} r^4 - 1/8 c_{1,0,1} z b_{4,0,0} r^4 \\
& + 1/4 c_{0,1,0} b_{1,1,2} r^2 z^2 - 3/16 c_{3,1,0} r^6 b_{0,3,1} z + 1/4 c_{1,1,1} r^4 z a_{3,0,0} - 1/4 r^6 c_{1,1,2} z c_{0,4,0} \\
& - 3/4 c_{1,2,1} r^2 z^5 b_{0,0,4} - 9/4 c_{3,0,0} r^2 b_{0,0,1} z - 3/4 c_{1,0,2} z^4 b_{0,2,2} r^2 + 1/8 c_{0,1,2} z^2 a_{2,2,0} r^4 \\
& + 1/4 c_{0,1,3} z^4 b_{1,1,1} r^2 - 1/8 c_{1,0,1} z a_{3,1,0} r^4 + 1/4 c_{0,1,0} a_{0,2,1} r^2 z + 1/4 c_{0,1,2} z^3 a_{0,2,1} r^2 \\
& - 1/8 c_{1,2,1} r^4 z a_{1,1,0} + 1/2 c_{0,2,0} r^2 b_{1,0,3} z^3 - 3/4 c_{1,0,3} z^5 b_{0,2,2} r^2 - 1/4 c_{2,0,1} r^4 z^2 a_{2,1,1} \\
& - 1/4 r^4 c_{1,1,1} c_{0,2,0} - 1/8 c_{1,2,0} r^4 b_{2,0,2} z^2 + 5/8 c_{0,3,0} r^4 b_{1,1,2} z^2 - 3/4 c_{1,0,0} b_{0,2,2} r^2 z^2 \\
& - 3/4 c_{1,0,0} b_{0,2,1} r^2 z + \frac{13}{24} r^6 c_{0,3,1} c_{3,0,0} + \frac{19}{64} c_{0,3,0} r^6 a_{2,2,0} + 1/4 c_{0,1,0} b_{1,1,0} r^2 - c_{1,0,0} b \\
& - 2 r^2 c_{1,0,2} z c_{0,1,0} - 1/4 c_{1,0,0} b_{2,0,1} r^2 z + 1/8 c_{2,1,1} r^4 z^2 b_{1,1,1} + 1/8 c_{2,1,1} r^4 z a_{0,2,0} \\
& + \frac{19}{64} c_{0,3,1} r^6 z b_{3,1,0} + 1/8 c_{2,1,1} r^4 z^2 a_{0,2,1} + 1/4 c_{0,1,3} z^4 a_{0,2,1} r^2 - \frac{13}{8} c_{3,0,0} r^4 b_{0,2,2} z^2 \\
& - 1/8 c_{1,0,2} z^2 b_{4,0,0} r^4 + 1/4 r^6 c_{1,1,2} z c_{4,0,0} - 5/8 c_{3,0,1} r^4 z a_{1,1,0} - 1/2 c_{2,0,1} r^2 z b_{1,0,0} \\
& - 1/4 r^4 c_{1,0,2} z^2 c_{2,1,1} + 1/4 c_{1,1,0} r^4 z a_{3,0,1} - 3/4 c_{1,0,3} z^4 b_{0,2,1} r^2 + 1/8 c_{0,1,3} z^3 b_{1,3,0} r^4 \\
& + 1/2 c_{3,1,0} r^4 a_{1,0,2} z^2 - 1/4 c_{1,0,1} z^3 b_{2,0,2} r^2 - 1/4 c_{1,0,3} z^5 a_{1,1,2} r^2 - 1/2 r^4 c_{1,0,3} z^3 c_{2,1,1}
\end{aligned}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
& +1/4 c_{0,1,2} z^4 b_{1,1,2} r^2 - 1/2 c_{2,0,1} r^2 z^3 b_{1,0,2} + 1/2 c_{1,3,0} r^4 a_{1,0,3} z^3 + 1/4 c_{0,2,2} r^4 z^2 b_{3,0,0} \\
& +5/8 c_{0,1,1} z a_{4,0,0} r^4 + \frac{5}{16} c_{3,1,0} r^6 z a_{3,0,1} + 1/4 r^4 c_{0,2,2} z^2 c_{1,1,1} + 1/4 c_{0,2,0} r^4 a_{0,3,1} z \\
& +1/8 c_{2,1,1} r^4 z b_{1,1,0} + 1/4 c_{1,1,2} r^4 z^2 a_{3,0,0} + 1/2 c_{1,1,0} r^2 a_{1,0,2} z^2 + 1/2 c_{0,2,2} r^2 z^3 b_{1,0,1} \\
& -9/4 c_{3,0,0} r^2 b_{0,0,2} z^2 + 5/8 c_{2,1,1} r^4 z a_{2,0,0} + 1/4 c_{1,1,1} r^4 z^2 a_{3,0,1} - 1/2 r^4 c_{4,0,0} a_{0,1,1} z \\
& -1/8 c_{1,0,1} z a_{1,3,0} r^4 - \frac{21}{64} c_{3,0,1} r^6 z b_{4,0,0} - 1/8 c_{1,2,0} r^4 a_{1,1,1} z - 1/8 c_{1,2,1} r^4 z b_{2,0,0} \\
& +3/4 c_{0,1,2} z^2 a_{2,0,0} r^2 - 1/4 c_{1,0,0} b_{2,0,2} r^2 z^2 - c_{1,0,3} z^5 b_{0,0,2} - c_{1,0,2} z^6 b_{0,0,4} \\
& -c_{1,0,0} b_{0,0,3} z^3 - 9/4 c_{3,0,0} r^2 b_{0,0,4} z^4 + 1/2 c_{0,2,2} r^2 z^2 b_{1,0,0} - \frac{85}{64} c_{3,0,1} r^6 z b_{0,4,0} \\
& +c_{0,1,0} a_{0,0,0} - 1/8 c_{1,0,3} z^3 b_{2,2,0} r^4 - \frac{13}{8} c_{3,0,1} r^4 z^2 b_{0,2,1} + 3/4 c_{0,1,2} z^3 a_{2,0,1} r^2 \\
& +1/4 c_{0,1,3} z^3 a_{0,2,0} r^2 - 1/4 c_{1,1,0} r^4 z b_{0,3,1} + \frac{21}{64} c_{0,3,1} r^6 z b_{1,3,0} + 1/8 r^6 c_{1,1,1} c_{4,0,0} \\
& +1/8 c_{2,1,0} r^4 a_{0,2,0} + 5/8 c_{2,1,0} r^4 a_{2,0,0} - \frac{13}{24} r^6 c_{3,0,1} c_{0,3,0} \\
& +5/8 c_{0,1,0} a_{4,0,0} r^4 + 3/4 r^4 c_{0,3,1} c_{1,0,0} - \frac{5}{24} r^6 c_{1,2,1} c_{0,3,0} - 1/8 c_{1,0,0} b_{2,2,0} r^4 \\
& +5/8 c_{0,3,0} r^4 a_{0,2,0} \\
& +1/4 r^4 c_{2,1,1} c_{1,0,0} - 3/16 c_{4,0,0} r^6 a_{0,3,0} - 5/8 c_{1,2,0} r^4 b_{0,2,0} - 1/4 r^4 c_{2,0,1} c_{1,1,0} \\
& + \frac{35}{64} c_{2,1,0} r^6 a_{4,0,0} + \frac{5}{24} r^6 c_{2,1,1} c_{3,0,0} - \frac{21}{64} c_{3,0,0} r^6 b_{4,0,0} - 1/4 c_{1,1,0} r^4 b_{0,3,0} \\
& +9/4 c_{0,3,0} r^2 a_{0,0,0} - 5/8 c_{3,0,0} r^4 b_{2,0,0} - c_{1,0,3} z^4 b_{0,0,1} - 3/4 c_{1,0,1} z^3 b_{0,2,2} r^2 \\
& -1/2 r^4 c_{4,0,0} a_{0,1,2} z^2 - 3/4 c_{1,0,1} z^2 b_{0,2,1} r^2 + 1/4 c_{0,1,2} z^2 b_{1,1,0} r^2 \\
& -3/4 c_{1,2,1} r^2 z^4 b_{0,0,3} + 5/8 c_{0,3,1} r^4 z b_{1,1,0} + 5/8 c_{0,3,0} r^4 a_{0,2,2} z^2 - 1/4 c_{1,0,2} z^4 a_{1,1,2} r^2 \\
& +1/2 c_{1,3,0} r^4 a_{1,0,1} z + \frac{5}{16} r^6 c_{0,4,0} a_{0,3,1} z + 1/4 c_{0,1,1} z^2 a_{0,2,1} r^2 + 1/4 c_{0,1,3} z^3 b_{1,1,0} r^2 \\
& -1/8 c_{1,0,3} z^3 b_{4,0,0} r^4 - 1/4 c_{2,0,1} r^4 z^2 a_{0,3,1} + 1/8 c_{0,1,3} z^3 b_{3,1,0} r^4 + 3/4 c_{0,1,1} z a_{2,0,0} r^2 \\
& + \frac{85}{64} c_{0,3,1} r^6 z a_{4,0,0} + 5/8 c_{2,1,0} r^4 a_{2,0,2} z^2 - 1/4 c_{1,1,1} r^4 z^2 b_{0,3,1} + 3/4 c_{2,1,0} r^2 a_{0,0,0} \\
& +1/2 c_{0,4,0} r^4 b_{1,0,0} - 3/4 r^4 c_{3,0,1} c_{0,1,0} + \frac{5}{16} c_{0,4,0} r^6 b_{1,2,0} - 3/16 c_{4,0,0} r^6 b_{1,2,0} \\
& -9/4 r^4 c_{1,0,3} z^2 c_{0,3,0} - 1/2 r^4 c_{4,0,0} b_{1,0,3} z^3 + 9/4 c_{0,3,0} r^2 a_{0,0,1} z - 3/4 c_{1,0,3} z^3 b_{0,2,0} r^2 \\
& +1/2 r^4 c_{0,4,0} a_{0,1,2} z^2 + 1/4 c_{0,2,2} r^4 z^2 a_{2,1,0} + 1/2 c_{0,2,2} r^2 z^4 b_{1,0,2} - 3 r^2 c_{1,0,3} z^2 c_{0,1,0}
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3. PERTURBATION D'UN CENTRE LINÉAIRE PAR DES
POLYNÔMES DE DEGRÉ 4

$$\begin{aligned}
& +3/4 c_{2,1,1} r^2 z^2 a_{0,0,1} - 1/4 c_{1,0,1} z b_{2,0,0} r^2 + 1/2 r^4 c_{0,4,0} a_{0,1,1} z - 1/4 c_{1,0,1} z a_{1,1,0} r^2 \\
& + \frac{13}{8} c_{0,3,0} r^4 a_{2,0,2} z^2 + r^2 c_{0,1,2} z^2 c_{1,0,1} + 3/4 c_{0,1,2} z^4 a_{2,0,2} r^2 + 9/4 r^4 c_{0,1,3} z^2 c_{3,0,0} \\
& + 1/2 r^4 c_{0,4,0} b_{1,0,1} z - 5/8 c_{1,2,1} r^4 z^3 b_{0,2,2} - 1/2 r^4 c_{4,0,0} b_{1,0,1} z + 1/8 c_{2,1,0} r^4 a_{0,2,2} z^2 \\
& - 1/4 c_{2,0,1} r^4 z^2 b_{1,2,1} - 5/8 c_{3,0,0} r^4 a_{1,1,2} z^2 - 1/4 c_{1,1,1} r^4 z b_{0,3,0} + 1/2 c_{1,1,1} r^2 z a_{1,0,0} \\
& - 5/8 c_{3,0,0} r^4 b_{2,0,1} z + 1/8 c_{0,1,1} z a_{2,2,0} r^4 + 1/2 r^4 c_{0,1,3} z^3 c_{1,2,1} + 1/2 c_{0,2,2} r^2 z^3 a_{0,1,1} \\
& + 1/8 c_{0,1,0} a_{0,4,0} r^4 + 1/2 c_{1,1,2} r^2 z^2 a_{1,0,0} + 1/2 c_{1,1,1} r^2 z^2 a_{1,0,1} - 1/8 c_{1,2,1} r^4 z^3 b_{2,0,2} \\
& + 1/4 c_{0,2,0} r^4 b_{1,2,1} z + 3/4 c_{2,1,0} r^2 a_{0,0,4} z^4 + 5/8 c_{2,1,0} r^4 a_{2,0,1} z + 1/2 c_{0,4,0} r^4 a_{0,1,3} z^3 \\
& - 3/2 r^4 c_{1,0,2} z c_{0,3,0} + 1/2 c_{3,1,0} r^4 a_{1,0,3} z^3 - 9/4 c_{3,0,1} r^2 z^3 b_{0,0,2} - 3/4 r^4 c_{0,3,1} c_{1,0,2} z^2 \\
& + 1/4 c_{0,1,1} z b_{1,1,0} r^2 - 3/2 r^4 c_{0,3,1} c_{1,0,3} z^3 + 3/4 r^4 c_{0,1,2} z^2 c_{3,0,1} - \frac{13}{8} c_{3,0,1} r^4 z b_{0,2,0} \\
& + 3/16 r^6 c_{0,4,0} a_{2,1,1} z - 3/4 c_{1,2,0} r^2 b_{0,0,2} z^2 + 1/8 c_{2,1,0} r^4 b_{1,1,2} z^2 + 3/16 c_{1,3,0} r^6 z a_{3,0,1} \\
& + 1/8 c_{0,1,3} z^3 a_{0,4,0} r^4 + 3/4 c_{2,1,1} r^2 z^3 a_{0,0,2} - 5/8 c_{3,0,1} r^4 z^3 b_{2,0,2} - 5/8 c_{3,0,0} r^4 a_{1,1,1} z \\
& - 1/2 c_{4,0,0} r^4 a_{0,1,0} + \frac{5}{64} c_{2,1,1} r^6 z b_{3,1,0} + 5/8 c_{0,3,0} r^4 b_{1,1,1} z + 1/8 c_{2,1,1} r^4 z^3 b_{1,1,2} \\
& + 9/4 c_{0,3,1} r^2 z^5 a_{0,0,4}
\end{aligned}$$

En suite

$$\begin{cases} f_{21}(r, z) = 0 \\ f_{22}(r, z) = 0 \end{cases}$$

On prend ce système en (r, z) avec la condition $r > 0$ et $z \in \mathbb{R}$ quelconque.

On pose

$$f_{ij}(r, z) = r \xi(r, z)$$

$$f_{ij}(r, z) = 0 \Rightarrow \xi(r, z) = 0 \text{ puisque } r > 0$$

On remarque que le degré de $f_{21}(r, z)$ est 6 et le degré de $f_{22}(r, z)$ est 7. D'après le théorème de Bézout on déduit que le nombre de racines est inférieure ou égale à $6 \times 7 = 42$.

Comme r intervient dans le système suivant avec r^2

$$\begin{cases} f_{21}(r, z) = 0 \\ f_{22}(r, z) = 0 \end{cases}$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

On déduit que le nombre de cycles limites est borné par $\frac{1}{2} \times 6 \times 7 = 21$ selon le théorème de Bezout

exemple 3.5.1 *On considère le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon (xz + x^3 - xy^2z) + \epsilon^2 (y^3 + x^3 - z^4) \\ \dot{y} = x + \epsilon (-yz - y^3 + x^2yz) + \epsilon^2 (1 - y + x^2y^2) \\ \dot{z} = \epsilon (x^2 - y^2 + 3y^4 - 3x^4) + \epsilon^2 (1 - z^2 - y^4) \end{cases} \quad (3.8)$$

En coordonnées cylindriques on trouve

$$\begin{cases} \dot{r} = \phi_1(r, \theta, z) \\ \dot{\theta} = \phi_2(r, \theta, z) \\ \dot{z} = \phi_3(r, \theta, z) \end{cases}$$

tel que

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, z) = & -\epsilon(-\sin(\theta)\epsilon - \sin(\theta)\epsilon r^4(\cos(\theta))^2 + \sin(\theta)\epsilon r^3(\cos(\theta))^3 \\ & + \sin(\theta)\epsilon(\cos(\theta))^4 r^4 - \sin(\theta)\epsilon \cos(\theta)r^3 + \epsilon r - \epsilon r^3(\cos(\theta))^4 + \cos(\theta)\epsilon z^4 \\ & - 2r(\cos(\theta))^2 z - (\cos(\theta))^2 \epsilon r + rz + r^3 - 2r^3(\cos(\theta))^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(r, \theta, z) = & \frac{1}{r}(2\cos(\theta)\epsilon r \sin(\theta)z + \cos(\theta)\epsilon^2 r \sin(\theta) + \sin(\theta)\epsilon \cos(\theta)r^3 \\ & - \sin(\theta)\epsilon r^3 \cos(\theta)z - \sin(\theta)\epsilon^2 z^4 + \sin(\theta)\epsilon^2 r^3(\cos(\theta))^3 - \cos(\theta)\epsilon^2 + \epsilon^2 r^3 \\ & - 2\epsilon^2 r^3(\cos(\theta))^2 - \epsilon^2 r^4(\cos(\theta))^3 - r + (\cos(\theta))^5 \epsilon^2 r^4 + \epsilon^2 r^3(\cos(\theta))^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3(r, \theta, z) = & ((r^2(\cos(\theta))^2 - r^2(\sin(\theta))^2 + 3r^4(\sin(\theta))^4 - 3(\cos(\theta))^4 r^4)\epsilon \\ & + ((1 - z^2 - r^4(\sin(\theta))^4 - r(-(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 - 3r^2(\sin(\theta))^4 \\ & + 3(\cos(\theta))^4 r^2)(2\cos(\theta)r \sin(\theta)z - \sin(\theta)r^3 \cos(\theta)z + \sin(\theta)\cos(\theta)r^3))\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Où d'une manière équivalente

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \epsilon F_{11}(r, \theta, z) + \epsilon^2 F_{21}(r, \theta, z) + O(\epsilon^3) \\ \frac{dz}{d\theta} = \epsilon F_{12}(r, \theta, z) + \epsilon^2 F_{11}(r, \theta, z)O(\epsilon^3) \end{cases}$$

tel que

$$\begin{aligned}
 F_{11}(r, \theta, z) &= (2r \cos(\theta))^2 z - rz - r^3 + 2r^3 (\cos(\theta))^2 \\
 F_{21}(r, \theta, z) &= (\sin(\theta) r^4 (\cos(\theta))^2 - r - \sin(\theta) r^3 (\cos(\theta))^3 - \sin(\theta) (\cos(\theta))^4 r^4 \\
 &+ \sin(\theta) + r (\cos(\theta))^2 + r^3 (\cos(\theta))^4 - \cos(\theta) z^4 + \sin(\theta) \cos(\theta) r^3 \\
 &- (-2 (\cos(\theta))^2 z + z + r^2 - 2r^2 (\cos(\theta))^2)(2 \cos(\theta) r \sin(\theta) z - \sin(\theta) r^3 \cos(\theta) z \\
 &+ \sin(\theta) \cos(\theta) r^3) \epsilon^2) + O(\epsilon^3) \\
 F_{12}(r, \theta, z) &= (r^2 (\cos(\theta))^2 - r^2 (\sin(\theta))^2 + 3r^4 (\sin(\theta))^4 - 3 (\cos(\theta))^4 r^4 \\
 F_{22}(r, \theta, z) &= +(1 - z^2 - r^4 (\sin(\theta))^4 - r(-(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 - 3r^2 (\sin(\theta))^4 \\
 &+ 3 (\cos(\theta))^4 r^2)(2 \cos(\theta) r \sin(\theta) z - \sin(\theta) r^3 \cos(\theta) z + \sin(\theta) \cos(\theta) r^3) \epsilon^2) \\
 &+ O(\epsilon^3)
 \end{aligned}$$

Donc on peut appliquer la méthode de la moyenne du second ordre

$$\begin{pmatrix} f_{11}(r, z) \\ f_{12}(r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{11}(r, \theta, z) d\theta \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{12}(r, \theta, z) d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un système de deux équations en (r, z)

$$\begin{cases} f_{11}(r, z) = 0 \\ f_{12}(r, z) = 0 \end{cases}$$

On calcule la fonction

$$\begin{pmatrix} f_{21}(r, z) \\ f_{22}(r, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{12}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{12}(r, s, z)}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \int_0^s F_{11}(r, \theta, z) d\theta \\ \int_0^s F_{12}(r, \theta, z) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^s F_{21}(r, s, z) \\ \int_0^s F_{22}(r, s, z) \end{pmatrix} \right] ds$$

3.5. LA MÉTHODE DE LA MOYENNE DE SECOND ORDRE DANS \mathbb{R}^3

telle que

$$\frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial r} = 2 (\cos(s))^2 z - z - 3r^2 + 6r^2 (\cos(s))^2$$

$$\frac{\partial F_{11}(r, s, z)}{\partial z} = 2r (\cos(s))^2 - r$$

$$\frac{\partial F_{12}(r, s, z)}{\partial r} = 2r (\cos(s))^2 - 2r (\sin(s))^2 + 12r^3 (\sin(s))^4 - 12r^3 (\cos(s))^4$$

$$\frac{\partial F_{12}(r, s, z)}{\partial z} = 0$$

$$\int_0^s F_{11}(r, \theta, z) d\theta = \cos(s) r \sin(s) z + r^3 \cos(s) \sin(s)$$

$$\int_0^s F_{12}(r, \theta, z) d\theta = r^2 \cos(s) \sin(s) - 3/4 r^4 (\sin(s))^3 \cos(s)$$

$$-9/4 r^4 \cos(s) \sin(s) - 3/4 r^4 (\cos(s))^3 \sin(s)$$

On a

$$f_{21}(r, z) = \frac{1}{8} r (-4 + 3r^2)$$

et

$$f_{22}(r, z) = -\frac{3}{8} r^4 + 1 - z^2$$

En suite

$$\begin{cases} f_{21}(r, z) = 0 \\ f_{22}(r, z) = 0 \end{cases}$$

On prend ce système en (r, z) , avec la condition $r > 0$ et $z \in \mathbb{R}$ quelconque.

Alors les solutions sont $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

On cherche les valeurs propres de ce matrice

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{21}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{21}(r, s, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{22}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{22}(r, s, z)}{\partial z} \end{pmatrix}_{(r; z) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} \sqrt{3} & -\frac{2}{3} \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -\frac{4}{3} \sqrt{3} & -\frac{2}{3} \sqrt{3} - \lambda \end{vmatrix}$$

CHAPITRE 3. PERTURBATION D'UN CENTRE LINÉAIRE PAR DES
POLYNÔMES DE DEGRÉ 4

Alors

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{3}, \det(G) = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

Alors le cycle limite est stable

On cherche la valeur propre de la matrice

$$S = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F_{21}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{21}(r, s, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{22}(r, s, z)}{\partial r} & \frac{\partial F_{22}(r, s, z)}{\partial z} \end{array} \right)_{(r; z) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{array} \right)$$

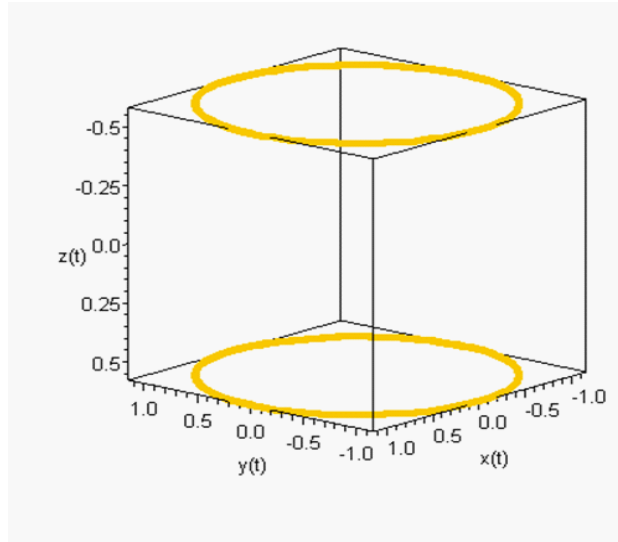
$$\det(S - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} - \lambda \end{vmatrix}$$

Alors

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \lambda_2 = 1, \det(S) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Alors le cycle limite est instable.

D'après le théorème (2.2.2), il suit que le système (3.8) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit deux cycles limites de même amplitude.



Cycle limite pour $\varepsilon = 0.001$

Chapitre 4

Perturbation d'un centre cubique par des polynômes de degré 2

4.1 Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la recherche du nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires cubiques de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x, y) + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} = xf(x, y) + \varepsilon Q(x, y) \end{cases}$$

où $f(x, y)$ est donnée par une des deux coniques

1-Elipse $f(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$

2-Elipse complexe $f(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1$

perturbées par des polynômes quadratiques dans \mathbb{R}^2 , en utilisant la méthode de la moyenne du premier ordre.

La perturbation d'un système différentiel qui a un centre conduit à la production des cycles limites. Quelques orbites périodiques du système non perturbé persistent.

Pour le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

on a au plus $\left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil$ cycles limites qui apparaissent quand on a le perturbe par des polynômes de degré n .

Pour le système quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1+x) \\ \dot{y} = x(1+x) \end{cases}$$

on a n cycles limites qui apparaissent quand on a le perturbe par des polynômes de degré n . voir [6]

Dans tout ce qui suit on s'intéresse au système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x, y) \\ \dot{y} = xf(x, y) \end{cases} \quad (4.1)$$

Appliquons la méthode de la moyenne du premier ordre au système perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x, y) + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} = xf(x, y) + \varepsilon Q(x, y) \end{cases} \quad (4.2)$$

On écrit P et Q sous la forme $P(x, y) = \sum_{k=1}^n p_k(x, y)$

et $Q(x, y) = \sum_{k=1}^n q_k(x, y)$, où p_k et q_k sont les parties homogènes de degré k des polynômes P et Q tels que

$$p_k(x, y) = \sum_{i+j=k} p_{ij}(x, y) \text{ et } q_k(x, y) = \sum_{i+j=k} q_{ij}(x, y) \quad (4.3)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -xyf(x, y) + \varepsilon xP(x, y) + xyf(x, y) + \varepsilon yQ(x, y) \\ &= \varepsilon r \cos(\theta)P(x, y) + \varepsilon r \sin(\theta)Q(x, y) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \varepsilon \cos(\theta)P(x, y) + \varepsilon \sin(\theta)Q(x, y) \\
 &= \varepsilon \cos(\theta) \sum_{k=1}^n p_k(x, y) + \varepsilon \sin(\theta) \sum_{k=1}^n q_k(x, y) \\
 &= \varepsilon r [\cos(\theta)p_1(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \sin(\theta)q_1(\cos(\theta), \sin(\theta))] \\
 &\quad + \varepsilon r^2 [\cos(\theta)p_2(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \sin(\theta)q_2(\cos(\theta), \sin(\theta))] \\
 &\quad + \dots + \varepsilon r^n [\cos(\theta)p_n(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \sin(\theta)q_n(r \cos(\theta), r \sin(\theta))] \\
 &= \varepsilon [f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n] \\
 &= \varepsilon \sum_{k=1}^n f_k(\theta)r^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r^2 \dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \\
 &= x^2 f(x, y) + \varepsilon x Q(x, y) + y^2 f(x, y) - \varepsilon y P(x, y) \\
 &= r^2 f(x, y) + \varepsilon r \cos(\theta)Q(x, y) - \varepsilon r \sin(\theta)P(x, y) \\
 \dot{\theta} &= f(x, y) + \frac{\varepsilon}{r} (\cos(\theta)Q(x, y) - \varepsilon \sin(\theta)P(x, y)) \\
 &= f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \varepsilon \left[\cos(\theta) \sum_{k=1}^n q_k(x, y) - \varepsilon \sin(\theta) \sum_{k=1}^n p_k(x, y) \right] \\
 &= f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \varepsilon r [\cos(\theta)q_1(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin(\theta)p_1(\cos(\theta), \sin(\theta))] \\
 &\quad + \varepsilon r^2 [\cos(\theta)q_2(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin(\theta)p_2(\cos(\theta), \sin(\theta))] \\
 &\quad + \dots + \varepsilon r^n [\cos(\theta)q_n(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \varepsilon \sin(\theta)p_n(\cos(\theta), \sin(\theta))] \\
 &= f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \varepsilon [g_1(\theta)r + g_2(\theta)r^2 + \dots + g_n(\theta)r^n]
 \end{aligned}$$

Où

$$f_i(\theta) = \cos(\theta)p_i(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta)q_i(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

$$g_i(\theta) = \cos(\theta)q_i(x, y) - \sin(\theta)p_i(x, y)$$

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{\varepsilon [f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n]}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \varepsilon [g_1(\theta)r + g_2(\theta)r^2 + \dots + g_n(\theta)r^n]}$$

selon Taylor, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon [f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n] \\ &\quad \times [f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \varepsilon [g_1(\theta)r + g_2(\theta)r^2 + \dots + g_n(\theta)r^n]]^{-1} \\ &= \frac{\varepsilon [f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n]}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} + \varepsilon^2 T(r, \theta, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Maintenant, on peut appliquer la méthode de la moyenne parce l'équation (4.4) vérifiées toutes les conditions.

Donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r)$$

où

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} d\theta$$

Mais le problème est le calcul des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_i(\theta)r^i}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} d\theta \text{ pour } i = 0..n$$

c'est- à- dire de trouver les intégrales

$$I_{p,q}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^p(\theta) \sin^q(\theta)}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} d\theta$$

Par la méthode de la moyenne du premier ordre on étudiera le nombre maximum des cycles limites selon les coefficients $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ du système (4.1) telle que $f(x, y)$ est donnée par les deux coniques

1–Ellipse $f(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1 = 0$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$

2–Ellipse complexe $f(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 + 1 = 0$

4.2. ELLIPSE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 - 1 = 0$ AVEC $A^2 + B^2 \neq 0$

4.2 Ellipse $f(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 - 1 = 0$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$

On applique la méthode de la moyenne du premier ordre au système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x, y) + \varepsilon(p_1x + p_2y + p_3x^2 + p_4xy + p_5y^2) \\ \dot{y} = xf(x, y) + \varepsilon(q_1x + q_2y + q_3x^2 + q_4xy + q_5y^2) \end{cases} \quad (4.5)$$

Les points critiques du système (4.5) sont

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -yf(x, y) + \varepsilon(p_1x + p_2y + p_3x^2 + p_4xy + p_5y^2) = 0 \\ xf(x, y) + \varepsilon(q_1x + q_2y + q_3x^2 + q_4xy + q_5y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc le centre $(0, 0)$ est un point critique.

En coordonnées polaires, on a $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \Rightarrow r\dot{r} = \varepsilon[xp(x, y) + yq(x, y)]$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{r} [x(a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2) + y(b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2)] \\ &= \varepsilon[\cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{aligned}$$

$$r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x} \Rightarrow r^2\dot{\theta} = x^2f(x, y) + y^2f(x, y) + \varepsilon[\cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)]$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= ([r \cos \theta + a]^2 + [r \sin \theta + b]^2 - 1) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{r^2} [r \cos \theta (b_0 + b_1r \cos \theta + b_2r \sin \theta + b_3r^2 \cos^2 \theta + b_4r^2 \cos \theta \sin \theta + b_5r^2 \sin^2 \theta) \\ &\quad - r \sin \theta (a_0 + a_1r \cos \theta + a_2r \sin \theta + a_3r^2 \cos^2 \theta + a_4r^2 \cos \theta \sin \theta + a_5r^2 \sin^2 \theta)] \end{aligned}$$

Pour appliquer la méthode de la moyenne, on utilise la technique

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon[\cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta)]}{f(r \cos \theta, r \sin \theta) + \varepsilon\left[\frac{1}{r} \cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)\right]}$$

on pose

$$G(r, \theta) = \cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$H(r, \theta) = \frac{1}{r} \cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{f(r, \theta)} \cdot \frac{G(r, \theta)}{1 + \frac{H(r, \theta)}{f(r, \theta)}} = \frac{\varepsilon G(r, \theta)}{f(r, \theta)} \left[1 - \frac{\varepsilon H(r, \theta)}{f(r, \theta)} + \frac{\varepsilon^2 H^2(r, \theta)}{f^2(r, \theta)} + O(\varepsilon^2) \right] \\ &= \frac{\varepsilon G(r, \theta)}{f(r, \theta)} - \frac{\varepsilon^2 G(r, \theta) H(r, \theta)}{f(r, \theta)} + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F(r) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Maintenant, on peut appliquer la méthode de la moyenne parce que les conditions du théorème (2.2.1) sont vérifiées avec

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta (p_1 r \cos \theta + p_2 r \sin \theta + p_3 r^2 \cos^2 \theta + p_4 r^2 \cos \theta \sin \theta + p_5 r^2 \sin^2 \theta)}{(r \cos \theta + a)^2 + (r \sin \theta + b)^2 - 1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta (q_1 r \cos \theta + q_2 r \sin \theta + q_3 r^2 \cos^2 \theta + q_4 r^2 \cos \theta \sin \theta + q_5 r^2 \sin^2 \theta)}{(r \cos \theta + a)^2 + (r \sin \theta + b)^2 - 1} d\theta \\ &= \frac{(p_1 - q_2)r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{f} d\theta + \frac{(p_2 + q_1)r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta}{f} d\theta \\ &\quad + \frac{(p_3 + q_4)r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{f} d\theta + \frac{q_5 r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \theta}{f} d\theta \\ &\quad + \frac{p_4 r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \theta}{f} d\theta + \frac{(p_5 + q_3)r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{f} d\theta + \frac{q_2 r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} \end{aligned}$$

4.2. ELLIPSE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 - 1 = 0$ AVEC $A^2 + B^2 \neq 0$

Maintenant, le problème est le calcul des intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p(\theta) \sin^q(\theta)}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} d\theta$.

Proposition 4.2.1 $\frac{\cos^p(\theta) \sin^q(\theta)}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}$ pour $2 \leq p + q \leq n + 1$ peut exprimer par les fonctions $\lambda(\theta, r), r, \frac{1}{f}, \frac{\cos \theta}{f}, \frac{\sin \theta}{f}$ avec $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta = 0$.

Preuve. On pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\alpha = a^2 + b^2$ et $\gamma = r^2 + \alpha - 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{(r \cos \theta + a)^2 + (r \sin \theta + b)^2 - 1} \\
 &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{r^2 \cos^2 \theta + 2ar \cos \theta + a^2 + r^2 \sin^2 \theta + 2br \sin \theta + b^2 - 1} \\
 &= \frac{\cos^{n+1} \theta}{2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma} \\
 &= \frac{[2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma] \cos^n \theta - 2b \cos^n \theta \sin \theta - \gamma \cos^n \theta}{2arf} \\
 &= \frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b \cos^n \theta \sin \theta}{a f} - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f} \\
 &= \frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b f \cos^{n-1} \theta \sin \theta - 2br \cos^{n-1} \theta \sin^2 \theta - \gamma \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2arf} \\
 &\quad - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f} \\
 &= \frac{1}{2ar} \cos^n \theta - \frac{b}{a} \left(\frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar} - \frac{b}{a} \left(\frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{\gamma \cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar f} - \frac{\gamma \cos^n \theta}{2ar f}
 \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} &= \frac{1}{2ar} (a \cos^n \theta - b \cos^{n-1} \theta \sin \theta) + \frac{1}{2ar} (2br^2 \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \\
 &\quad + b\gamma \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} - a\gamma \frac{\cos^n \theta}{f})
 \end{aligned}$$

Où

$$\frac{1}{2\alpha r}(a \cos^n \theta - b \cos^{n-1} \theta \sin \theta) = \begin{cases} h_0(r) + \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n+1} \theta \sin \theta}{f} &= \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar} - \frac{b}{a} \left(\frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} \right) - \frac{\gamma}{2ar} \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} \\ &= \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{2ar} - \frac{b \cos^{n-1} \theta}{a f} - \frac{b \cos^{n+1} \theta}{a f} - \frac{\gamma}{2ar} \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} \\ &= \frac{1}{2ar} \left(b \cos^n \theta + a \cos^{n-1} \theta \sin \theta - 2abr \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - a\gamma \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} \right. \\ &\quad \left. - b\gamma \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \right) \\ &= \Psi(\theta, r) - \frac{1}{2\alpha r} \left(2abr \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - a\gamma \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{f} + b\gamma \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} \right) \end{aligned}$$

Où

$$\Psi(\theta, r) = \frac{1}{2\alpha r}(b \cos^n \theta - a \cos^{n-1} \theta \sin \theta) = \begin{cases} h_0(r) + \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \lambda(\theta, r) & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{n-1} \theta \sin^2 \theta}{f} &= \frac{\cos^{n-1} \theta}{f} - \frac{\cos^{n+1} \theta}{f} \\ \frac{\sin^{n+1} \theta}{f} &= \begin{cases} \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n}{2}} \sin \theta}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k C_{\frac{n}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta \sin \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n+1}{2}}}{f} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k C_{\frac{n+1}{2}}^k \frac{\cos^{2k} \theta}{f} & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases} \end{aligned}$$

■

Proposition 4.2.2 *On trouve que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} = \begin{cases} \frac{2\pi}{g} & \text{si } \alpha < 1 \text{ or } r > r_2 \\ \frac{-2\pi}{g} & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases}$$

4.2. ELLIPSE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 - 1 = 0$ AVEC $A^2 + B^2 \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} f = \begin{cases} \frac{-\pi a}{\alpha r g}(\gamma - g) \text{ si } \alpha > 1 \text{ or } r > r_2 \\ \frac{\alpha r g}{\pi a}(\gamma + g) \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} = \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)}$$

Où

$$r_1 = |1 - \sqrt{\alpha}|, r_2 = 1 + \sqrt{\alpha}, g = \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha r^2}.$$

Preuve. Posons $z = e^{i\theta}$ et $C = \{z : |z| = 1\}$, on obtient $\bar{z} = \frac{1}{z} = e^{-i\theta} \Rightarrow$

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$$

qui implique que $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ et $d\theta = \frac{dz}{iz}$
donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma} \\ &= \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{(a - ib)r z^2 + \gamma z + (a + ib)r} \end{aligned}$$

Les pôles sont

$$\text{on a } \Delta = \frac{\gamma^2}{r^2} - 4(a^2 + b^2) = \frac{\gamma^2 - 4\alpha r^2}{r^2} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{1}{r} \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha r^2}$$

$$\text{posons } g = \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha r^2}, z_1 = -\frac{\gamma + g}{2(a - ib)r}; z_2 = -\frac{\gamma - g}{2(a - ib)r}$$

On trouve

$$|z_1 \cdot z_2| = \frac{|a + ib|}{|a - ib|} = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 = 1 \\ |z_1| = \left| \frac{1}{z_2} \right| \text{ avec } |z_1| > |z_2| \\ |z_2| = \left| \frac{1}{z_1} \right| \text{ avec } |z_2| > |z_1| \end{cases}$$

Si $\gamma^2 - 4\alpha r^2 \leq 0$, on trouve $|z_1| = |z_2| = 1$

Si $\gamma^2 - 4\alpha r^2 > 0$, on trouve

$$|z_1| = \frac{|\gamma + g|}{2r\sqrt{\alpha}} \text{ et } |z_2| = \frac{|\gamma - g|}{2r\sqrt{\alpha}}$$

(i) Si $\gamma = 0$, on trouve $|z_1| = |z_2| = 1$.

(ii) Si $\gamma > 0$, on trouve $|z_1| < |z_2|$ mais $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, implique que $|z_2| < 1$ et $|z_1| > 1$.

(iii) Si $\gamma < 0$, on trouve $|z_2| > |z_1|$. Qui implique que $|z_2| > 1$ et $|z_1| < 1$. Par le théorème du Résidu, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= 2\pi \sum_k \text{rés}\left(\frac{1}{(a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r}, z_k\right) \\ &= \begin{cases} 2\pi \text{rés}\left(\frac{1}{(a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r}, z_2\right) & \text{pour } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2 \\ 2\pi \text{rés}\left(\frac{1}{(a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r}, z_1\right) & \text{pour } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2(a-ib)rz_2 + \gamma} = \frac{2\pi}{g} & \text{pour } \alpha > 1 \text{ ou } r > r_2 \\ \frac{2\pi}{2(a-ib)rz_1 + \gamma} = \frac{-2\pi}{g} & \text{pour } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve $\gamma^2 - 4\alpha r^2 = (r - \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} + 1)(r + \sqrt{\alpha} - 1)(r + \sqrt{\alpha} + 1)$, avec $\alpha \in]0, 1[\cup]1, \infty[$.

Si $\alpha \in]1, \infty[$, $\gamma > 0$ et $\gamma^2 - 4\alpha r^2 > 0$ si $(r - \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} + 1) > 0$. est réalisé pour $r \in]0, \sqrt{\alpha} - 1[\cup]\sqrt{\alpha} + 1, \infty[$.

Si $\alpha \in]0, 1[$, $r^2 > 1 - \alpha \implies r > \sqrt{1 - \alpha}$ et $(r + \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} - 1) > 0$, est réalisé si $r \in]0, r_1[\cup]r_2, \infty[$ et $r > \sqrt{1 - \alpha}$.

$\sqrt{1 - \alpha} > 1 - \sqrt{\alpha} \implies r \in]r_2, \infty[$. Si $r^2 < 1 - \alpha \implies r < \sqrt{1 - \alpha}$ et $(r + \sqrt{\alpha} - 1)(r - \sqrt{\alpha} - 1) > 0$, est réalisé si $r \in]0, r_1[$, dans ce cas $|z_1| < 1$ et $|z_2| > 1$.

$$\text{On trouve } \begin{cases} r \in (0, \sqrt{\alpha} - 1) \cup (1 + \sqrt{\alpha}, \infty) & \text{si } \alpha > 1 \\ r \in (0, 1 - \sqrt{\alpha}) \cup (1 + \sqrt{\alpha}, \infty) & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Donc le système (4.1) a deux anneaux périodiques $A_1 = \left\{ (x, y) : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < |1 - \sqrt{\alpha}| \right\}$

et $A_2 = \left\{ (x, y) : 1 + \sqrt{\alpha} < \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$

De même manière on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma} \\ &= \frac{1}{2i} \oint \frac{z^2 + 1}{(a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r} \frac{dz}{z} \\ &= \pi \sum \text{rés}(R(z), z_k) \\ &= \begin{cases} \pi \text{rés}(f(z), z_2) + \text{rés}(f(z), 0) & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } r < r_2 \\ \pi \text{rés}(f(z), z_1) + \text{rés}(f(z), 0) & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{-\pi a}{\alpha r g} (\gamma - g) & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } r < r_2 \\ \frac{\alpha r g}{\pi a} (\gamma + g) & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases} \end{aligned}$$

4.2. ELLIPSE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 - 1 = 0$ AVEC $A^2 + B^2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Où } R(z) &= \frac{z^2 + 1}{z((a - ib)rz^2 + \gamma z + (a + ib)r)}. \\
 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma} \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \phi d\phi}{2r(b \cos \phi + a \sin \phi) + \gamma} \\
 &= \begin{cases} \frac{-\pi b}{\alpha r g}(\gamma - g) \text{ si } \alpha > 1 \text{ ou } r < r_2 \\ \frac{\alpha r g}{\pi b}(\gamma + g) \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \\ \frac{\pi b}{\alpha r g}(\gamma + g) \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } r < r_1 \end{cases} \\
 &= \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha > 1$ ou $r > r_2$ on pose $\alpha = a^2 + b^2, \gamma = r^2 + \alpha - 1, g =$

$$\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha r^2}$$

et selon les propositions (4.2.1) et (4.2.2) on trouve que

$$M = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f(r, \theta)} d\theta = \frac{\pi a}{\alpha r g} (g - \gamma)$$

$$N = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r, \theta)} = \frac{2\pi}{g}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{f(r, \theta)} d\theta &= \frac{1}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta + \frac{2b^2 r}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r, \theta)} + \frac{b\gamma}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &\quad - \frac{a\gamma}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &= 0 + \frac{b^2}{\alpha} N + \frac{b\gamma}{2\alpha r} \frac{b}{a} M - \frac{a\gamma}{2\alpha r} M \\
 &= \frac{1}{2\alpha \alpha r} ((b^2 - a^2)\gamma M + 2ab^2 r N)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \theta}{f(r, \theta)} d\theta &= \frac{1}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} (h_0(r, \theta) + \lambda(\theta, r)) d\theta + \frac{2b^2 r}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &\quad + \frac{b\gamma}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta}{f(r, \theta)} d\theta - \frac{a\gamma}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &= \pi + \frac{2b^2 r}{2\alpha r} M - \frac{b^2 \gamma^2}{2\alpha^2 r^2} M - \frac{ab^2 \gamma^2 r}{2\alpha^2 r} N - \frac{2a^2 b^2 \gamma r}{4a\alpha^2 r^2} N - \frac{(b^2 - a^2) \gamma^2}{4\alpha^2 r^2} M \\
 &= \frac{1}{4\alpha^2 r^2} (2a\alpha r \pi + (4b^2 \alpha r^2 + (a^2 - 3b^2) \gamma^2) M - 4ab^2 \gamma r N)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{f(r, \theta)} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(r, \theta)} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &= N - \frac{1}{2a\alpha r} ((b^2 - a^2) \gamma M + 2ab^2 r N) \\
 &= \frac{1}{2a\alpha r} ((a^2 - b^2) \gamma M + 2a^3 r N)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \theta}{f(r, \theta)} d\theta &= \frac{b}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta + \frac{(-b^2 + \alpha)}{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &\quad - \frac{b\gamma}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{f(r, \theta)} d\theta + \frac{a\alpha}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta}{f} d\theta \\
 &= \frac{b}{4a\alpha^2 r^2} (-2a\alpha r \pi + (4(2a^2 + b^2) \alpha r^2 + (b^2 - 3a^2) \gamma^2) M + 2a(a^2 - b^2) \gamma r N)
 \end{aligned}$$

4.2. ELLIPSE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 - 1 = 0$ AVEC $A^2 + B^2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta}{f} d\theta &= \frac{1}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta - \frac{abr}{\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &\quad - \frac{a\gamma}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{f(r, \theta)} d\theta - \frac{b\gamma}{2\alpha r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{\alpha r} (-b\gamma M - abrN)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{f(r, \theta)} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(r, \theta)} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &= N - \frac{b}{4a\alpha^2 r^2} (-2a\alpha r\pi + (4(2a^2 + b^2)\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma^2)M \\
 &\quad + 2a(a^2 - b^2)\gamma rN) \\
 &= \frac{b}{4a\alpha^2 r^2} (2a\alpha r\pi - (4a^2\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma^2)M + 2a(a^2 - b^2)\gamma rN)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{f(r, \theta)} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(r, \theta)} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{f(r, \theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{4\alpha^2 r^2} (-2a\alpha r\pi + (4a^2\alpha r^2 + (3b^2 - a^2)\gamma^2)M + 4ab^2\gamma rN)
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha > 0$ ou $r > r_2$

$$\begin{aligned}
 f^0(r) &= \frac{(p_1 - q_2)r}{2\pi} \cdot \frac{1}{2a\alpha r} ((b^2 - a^2)\gamma M + 2ab^2rN) \\
 &+ \frac{(p_2 + q_1)r}{2\pi} \frac{1}{\alpha r} (-b\gamma M - abrN) \\
 &+ \frac{(p_3 + q_4)r^2}{2\pi} \frac{1}{4a\alpha^2 r^2} (2a\alpha r\pi - (4a^2\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma^2)M + 2a(a^2 - b^2)\gamma rN) \\
 &+ \frac{(p_5 + q_3)r^2}{2\pi} \frac{b}{4a\alpha^2 r^2} (-2a\alpha r\pi + (4(2a^2 + b^2)\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma^2)M \\
 &+ 2a(a^2 - b^2)\gamma rN) \\
 &+ \frac{p_4 r^2}{2\pi} \frac{1}{4a\alpha^2 r^2} (2a\alpha r\pi - (4a^2\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma^2)M + 2a(a^2 - b^2)\gamma rN) \\
 &+ \frac{q_5 r^2}{2\pi} \frac{b}{4a\alpha^2 r^2} (-2a\alpha r\pi - (4a^2\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma^2)M + 2a(a^2 - b^2)\gamma rN) \\
 &= \left[\frac{(p_1 - q_2)r(a^2 - b^2)\gamma}{4a\alpha r\pi} + \frac{(p_5 + q_3)(4a^2\alpha r^2 + (3b^2 - a^2)\gamma^2)}{8\alpha^2\pi} - \frac{(p_2 + q_1)b\gamma}{2\pi\alpha} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(p_3 + q_4)(4a^2\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma)}{8a\alpha^2\pi} + \frac{p_4(4b^2\alpha r^2 + (a^2 - 3b^2)\gamma^2)}{8\alpha^2\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q_5 b(4(2a^2 + b^2)\alpha r^2 + (b^2 - 3a^2)\gamma^2)}{8a\alpha^2\pi} \right] M \\
 &+ \left[\frac{2b^2(p_1 - q_2)r}{4\alpha\pi} - \frac{ab(p_2 + q_1)r}{2\alpha\pi} + \frac{(p_3 + q_4)r(a^2 - b^2)\gamma}{4\alpha^2\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(p_5 + q_3)(4ab^2a^2\gamma r)}{8\alpha^2\pi} - \frac{p_4 ab^2\gamma r}{2\alpha^2\pi} + \frac{q_5 br(a^2 - b^2)\gamma}{4\alpha^2\pi} \right] N \\
 &+ \frac{(p_3 + q_4)br}{4\alpha} - \frac{(p_5 + q_3)ar}{4\alpha} + \frac{p_4 ar}{4\alpha} - \frac{q_5 br}{4\alpha}
 \end{aligned}$$

On a $\gamma = r^2 + \alpha - 1 \Rightarrow \gamma^2 = r^4 + 2(\alpha - 1)r^2 + (\alpha - 1)^2$ et $\gamma^3 = r^6 + 3(\alpha - 1)^2 r^2 + 3(\alpha - 1)r^4 + (\alpha - 1)^3$;

$$g = \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha r^2}$$

on obtient

4.2. ELLIPSE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 - 1 = 0$ AVEC $A^2 + B^2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
f^0(r) = & \frac{1}{8a\alpha^3rg} ([-(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2 - (a^2 - 3b^2)a^2 - q_5ab(b^2 - 3a^2) \\
& + 8b^2(p_1 - q_2)a]r^6 + [-2(p_1 - q_2)(b^2 - a^2)a\alpha - 2(p_5 + q_3)a^4\alpha \\
& - 3(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2(\alpha - 1) + 4(p_2 + q_1)ba^2\alpha + 4(p_3 + q_4)a^3\alpha \\
& + (p_3 + q_4)(b^2 - 3a^2)a - 4p_4b^2a^2\alpha - 3(\alpha - 1)(a^2 - 3b^2)a^2 \\
& - 4q_5b(2a^2 + b^2)a\alpha - 3(\alpha - 1)q_5ab(b^2 - 3a^2) + 16b^2(p_1 - q_2)a(\alpha - 1)^2 \\
& + 4(a^2 - b^2(p_3 + q_4)a\alpha + 8(p_5 + q_3)a^2b^2\alpha - 8p_4a^2b^2\alpha \\
& + 4q_5b(a^2 - b^2)a\alpha]r^4 + [-4(p_1 - q_2)(b^2 - a^2)a\alpha(\alpha - 1) \\
& - 2(p_5 + q_3)a^4\alpha(\alpha - 1) - 3(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2(\alpha - 1)^2 \\
& + 8(\alpha - 1)(p_2 + q_1)ba^2\alpha + 4(\alpha - 1)(p_3 + q_4)a^3\alpha + 2(\alpha - 1)(p_3 + q_4)(b^2 - 3a^2)a \\
& - 4p_4b^2a^2\alpha(\alpha - 1) - 3(\alpha - 1)^2(a^2 - 3b^2)a^2 - 4(\alpha - 1)q_5b(2a^2 + b^2)a\alpha \\
& - 3(\alpha - 1)^2q_5ab(b^2 - 3a^2) + 8(\alpha - 1)^2b^2(p_1 - q_2)a - 8a^2b(p_2 + q_1)\alpha^2 \\
& + 4(\alpha - 1)(a^2 - b^2)(p_3 + q_4)a\alpha + 8(\alpha - 1)(p_5 + q_3)a^2b^2\alpha - 8(\alpha - 1)p_4a^2b^2\alpha \\
& + 4(\alpha - 1)q_5b(a^2 - b^2)a\alpha]r^2 + [-2(\alpha - 1)^2(p_1 - q_2)(b^2 - a^2)a\alpha \\
& + (\alpha - 1)^3(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2(\alpha - 1) + 4(\alpha - 1)^2(p_2 + q_1)ba^2\alpha \\
& + (\alpha - 1)^2a(p_3 + q_4)(b^2 - 3a^2) - (\alpha - 1)^3a^2(a^2 - 3b^2) - q_5ab(\alpha - 1)^3(b^2 - 3a^2)]) \\
& + \frac{g}{8a\alpha^3rg} ([-(-(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2 - (a^2 - 3b^2)a^2 - q_5ab(b^2 - 3a^2) \\
& + 8b^2(p_1 - q_2)a]r^4 + [(\alpha + 1)(-(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2 - (a^2 - 3b^2)a^2 - q_5ab(b^2 - 3a^2) \\
& + 8b^2(p_1 - q_2)a) + -2(p_1 - q_2)(b^2 - a^2)a\alpha - 2(p_5 + q_3)a^4\alpha \\
& - 3(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2(\alpha - 1) + 4(p_2 + q_1)ba^2\alpha + 4(p_3 + q_4)a^3\alpha \\
& + (p_3 + q_4)(b^2 - 3a^2)a - 4p_4b^2a^2\alpha - 3(\alpha - 1)(a^2 - 3b^2)a^2 \\
& - 4q_5b(2a^2 + b^2)a\alpha - 3(\alpha - 1)q_5ab(b^2 - 3a^2) + 16b^2(p_1 - q_2)a(\alpha - 1)^2 \\
& + 4(a^2 - b^2(p_3 + q_4)a\alpha + 8(p_5 + q_3)a^2b^2\alpha - 8p_4a^2b^2\alpha \\
& + 4q_5b(a^2 - b^2)a\alpha]r^2 + [-2(\alpha - 1)(p_1 - q_2)(b^2 - a^2)a\alpha \\
& + (\alpha - 1)^2(p_5 + q_3)(3b^2 - a^2)a^2 + 4(\alpha - 1)^2(p_2 + q_1)ba^2\alpha \\
& + (\alpha - 1)a(p_3 + q_4)(b^2 - 3a^2) - (\alpha - 1)^2a^2(a^2 - 3b^2) - q_5ab(\alpha - 1)^2(b^2 - 3a^2)])
\end{aligned}$$

posons

$$A_2 = a_6r^6 + a_4r^4 + a_2r^2 + (1 - \alpha)b_0$$

$$B_2 = -a_6r^6 - ((\alpha + 1)a_6 + a_4)r^2 + b_0$$

on trouve

$$f^0(r) = \frac{A_2 + B_2g}{8a\alpha^3rg}$$

Soit la fonction

$$\begin{aligned} h(r) &= A_2^2 + B_2^2 g^2 \\ &= r^2(c_6 r^6 + c_4 r^4 + c_2 r^2 + c_0) \end{aligned}$$

Alors $h(r)$ a au plus 3 racines positives c'est à dire $f^0(r)$ a au plus 3 cycles limites.

dans le cas où $\alpha < 0$ ou $r < r_1$, de même manière on trouve

$$A_2 = a_6 r^6 + a_4 r^4 + a_2 r^2 + (\alpha - 1)b_0$$

$$B_2 = a_6 r^6 + ((\alpha + 1)a_6 + a_4)r^2 + b_0$$

Donc le système (4.5) a au maximum 3 cycles limites.

4.3 Ellipse complexe $f(x, y) = (x+a)^2 + (y+b)^2 + 1$

On applique la méthode de la moyenne du premier ordre au système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -yf(x, y) + \varepsilon(p_1x + p_2y + p_3x^2 + p_4xy + p_5y^2) \\ \dot{y} = xf(x, y) + \varepsilon(q_1x + q_2y + q_3x^2 + q_4xy + q_5y^2) \end{cases} \quad (4.6)$$

Les points critiques du système (4.6) sont

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -yf(x, y) + \varepsilon(p_1x + p_2y + p_3x^2 + p_4xy + p_5y^2) = 0 \\ xf(x, y) + \varepsilon(q_1x + q_2y + q_3x^2 + q_4xy + q_5y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc le centre $(0, 0)$. est un point critique.

En coordonnées polaires, on trouve que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{r} [x(a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2) + y(b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2)] \\ &= \varepsilon[\cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= ([r \cos \theta + a]^2 + [r \sin \theta + b]^2 - 1) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{r^2} [r \cos \theta (b_0 + b_1 r \cos \theta + b_2 r \sin \theta + b_3 r^2 \cos^2 \theta + b_4 r^2 \cos \theta \sin \theta + b_5 r^2 \sin^2 \theta) \\ &\quad - r \sin \theta (a_0 + a_1 r \cos \theta + a_2 r \sin \theta + a_3 r^2 \cos^2 \theta + a_4 r^2 \cos \theta \sin \theta + a_5 r^2 \sin^2 \theta)] \end{aligned}$$

4.3. ELLIPSE COMPLEXE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 + 1$

Pour appliquer la méthode de la moyenne, on utilise la technique

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{f(r, \theta)} \cdot \frac{G(r, \theta)}{1 + \frac{H(r, \theta)}{f(r, \theta)}} = \frac{\varepsilon G(r, \theta)}{f(r, \theta)} \left[1 - \frac{\varepsilon H(r, \theta)}{f(r, \theta)} + \frac{\varepsilon^2 H^2(r, \theta)}{f^2(r, \theta)} + O(\varepsilon^2) \right] \\ &= \frac{\varepsilon G(r, \theta)}{f(r, \theta)} - \frac{\varepsilon^2 G(r, \theta) H(r, \theta)}{f(r, \theta)} + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F(r) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Maintenant on peut appliquer la méthode de la moyenne parceque les conditions du théorème (2.2.1) sont vérifiées avec

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta (p_1 r \cos \theta + p_2 r \sin \theta + p_3 r^2 \cos^2 \theta + p_4 r^2 \cos \theta \sin \theta + p_5 r^2 \sin^2 \theta)}{(r \cos \theta + a)^2 + (r \sin \theta + b)^2 - 1} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta (q_1 r \cos \theta + q_2 r \sin \theta + q_3 r^2 \cos^2 \theta + q_4 r^2 \cos \theta \sin \theta + q_5 r^2 \sin^2 \theta)}{(r \cos \theta + a)^2 + (r \sin \theta + b)^2 - 1} d\theta \\ &= \frac{(p_1 - q_2)r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{f} d\theta + \frac{(p_2 + q_1)r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta}{f} d\theta \\ &\quad + \frac{(p_3 + q_4)r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{f} d\theta + \frac{q_5 r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \theta}{f} d\theta \\ &\quad + \frac{p_4 r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \theta}{f} d\theta + \frac{(p_5 + q_3)r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{f} d\theta + \frac{q_2 r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} \end{aligned}$$

Maintenant, le problème est le calcul des intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p(\theta) \sin^q(\theta)}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} d\theta$.

Proposition 4.3.1 1) $I_{p,q} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^p(\theta) \sin^q(\theta)}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} d\theta$ peut exprimer par

les fonctions $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta, r, \frac{1}{R}, \frac{\cos \theta}{f}, \frac{\sin \theta}{f}$ avec $\int_0^{2\pi} \lambda(\theta, r) d\theta, r, \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f}, \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{f} d\theta$

2) On trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} = \frac{2\pi}{g}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} = \frac{-\pi a}{\alpha r g} (\gamma - g)$$

où $\gamma = r^2 + \alpha + 1$, $g = \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha r^2}$.

Preuve. 1) Dans ce cas on remplace $r^2 + \alpha - 1$ par $r^2 + \alpha + 1$ de même façon, on trouve

les mêmes résultats

2) On pose $z = e^{i\theta}$ et $C = \{z : |z| = 1\}$ on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f} = \oint \frac{1}{i((a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r)} dz \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f} = \oint \frac{z^2 + 1}{2iz((a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r)} dz \end{array} \right.$$

les pôles sont

$$z_1 = \frac{\gamma + g}{2(a-ib)r}, z_2 = \frac{\gamma - g}{2(a-ib)r}$$

on trouve $\gamma^2 - 4\alpha r^2 = ((r + \sqrt{\alpha})^2 + 1)((r - \sqrt{\alpha})^2 + 1) > 0, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

Donc le système

1) A une anneaux périodique unique $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2) $|z_1 z_2| = \left| \frac{a+ib}{a-ib} \right| = 1$, donc $|z_2| < 1, |z_1| > 1$

z_2 est le pôle contenu dans l'intérieur du disque

Appliquons le théorème du Residu, on obtient le resultat

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= 2\pi \text{rés} \left(\frac{1}{(a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r}, z_2 \right) \\ &= \frac{2\pi}{2(a-ib)rz_2 + \gamma} = \frac{2\pi}{g} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + \gamma} \\ &= \frac{1}{2i} \oint \frac{z^2 + 1}{(a-ib)rz^2 + \gamma z + (a+ib)r} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

4.3. ELLIPSE COMPLEXE $F(X, Y) = (X + A)^2 + (Y + B)^2 + 1$

$$= \pi(\text{rés}(f(z), z_2) + \text{rés}(f(z), 0)) = \frac{-\pi g}{\alpha r g}(\gamma - g)$$

Finalemment, en remplaçant chaque intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^p(\theta) \sin^q(\theta)}{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} d\theta$$

pour $2 \leq p + q \leq n + 1$, on trouve

$$f^0(r) = \frac{A_2 + B_2}{2^3 a \alpha^3 r g} ,$$

$$\text{où } A_2 = a_6 r^6 + a_4 r^4 + a_2 r^2 - (\alpha + 1) b_0$$

$$B_2 = -a_6 r^4 - ((\alpha - 1) a_6 + a_4) r^2 + b_0$$

et les coefficients a_i et b_i sont des polynômes de P , Q , a , et b .

Donc le système (4.6) a au plus 3 cycles limites. ■

Chapitre 5

Conclusion

La méthode de la moyenne est une méthode efficace pour le calcul du nombre de cycles limites et la stabilité de ces cycles limites, des systèmes différentiels polynomiaux..Notre futur travail, consiste à appliquer cette méthode à d'autres centres non linéaires et à d'autre problèmes.

Chapitre 6

Appendice

Cet appendice est réservé aux calculs de certaines intégrales, de racines d'équations algébriques et de la résolution de certain système non linéaire par le logiciel Maple 10 et nous avons élaboré un programme pour la méthode de la moyenne.

Bibliographie

- [1] A. Makhlouf U.B.M Annaba". Cours de magister. Annaba, 2008.
- [2] A. Makhlouf and J. Llibre."les orbites périodiques par la méthode de la moyenne "
- [3] Belen Garcia, Jaume Llibre and Jesús Pérez Del Río : On the number of limitcycles surrounding a unique singular point for polynomialdiferential systems of arbitrary degree.[2005] , 1707 – 1721
- [4] F. Verhulst " Nonlinear Differential Equations & dynamical systems " Springer-Verloug, 1990.
- [5] Jaume Giné,Jaume Llibre : Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory. Nonlinnear Analysis 66 [2006] , 1707 – 1721.
- [6] J. Llibre. "Periodic orbits via averaging theory". Univ. Annaba 22-24 Octobre.
- [7] J. Llibre. "second order averaging method for periodic orbits". Univ. Annaba 22-24 Octobre
- [8] J. P. Françoise. "La théorie des bifurcation"
- [9] L.Perko. " Differential equations & dynamical systems ". Appl. Math, 7, Third Edition, Springer ,2001.
- [10] Makhlouf Amar & Bouatia Yassine : Limit cycles of quadratic polynomialdiferential systems via the averaging theory.
- [11] V. Î. Arnold. "Mathematical methods of classical machanics". second edition. Springer. 1989.
- [12] .I-R-Shafaravich ,Basic algebraic geometry ,Springer ,[1974]
- [13] V. I. Arnold et A. Avez. "Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris 1967.