

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR- ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار- عنابة

Année 2020

Faculté des Sciences de l'Ingéniorat

Département d'Electronique

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle

THEME

**Modélisation, Identification, Commande et Stabilité
des Systèmes à Retards**

Option: Automatique

**Par
BENSAKER Nadir**

Devant le Jury composé de :

Président :	DEBBACHE Nasr Eddine,	Professeur,	Université de Annaba
Directeur de Thèse :	KHERFANE Hamid,	MCA,	Université de Annaba
Examineurs :	BENNACER Layachi,	Professeur,	Université de Guelma
	LACHOURI Abderrazak,	Professeur,	Université de Skikda
	ABBASSI Hadj Ahmed,	Professeur,	Université de Annaba

Dédicaces

Je dédie cette thèse à tous les membres de ma famille, à tous mes amis et à tous ceux qui m'ont supporté durant les vicissitudes du parcours de mon Doctorat.

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier mon premier Directeur de thèse, le Docteur Nouredine Melouah, pour m'avoir proposé ce thème et guidé au début de cette thèse. Mes remerciements vont aussi au Docteur Hamid Kherfane, mon deuxième Directeur de thèse, pour la continuité et de m'avoir supporté tout au long de ce travail.

Je suis très reconnaissant au Professeur Nasr Eddine Debbache pour avoir accepté de présider le Jury de Thèse.

Mes remerciements vont également aux examinateurs le Professeur Bennacer Layachi, le Professeur Lachouri Abderrazak et le Professeur Hadj Ahmed Abbassi pour l'intérêt qu'ils portent pour ce thème ainsi que pour le temps qu'ils ont dépensé pour examiner le manuscrit de cette thèse et aussi les remarques et les suggestions positives qui m'ont aidé à améliorer le contenu de cette thèse.

Merci à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir cette tâche.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة أنظمة التأخير من وجهة نظر النمذجة، التعرف، الاستقرار، والتحكم. في جزء النمذجة، تتم دراسة التمثيلات المختلفة لأنظمة التأخير في المجال الزمني وفي مجال التردد اعتمادا على ما إذا كان التأخير ثابتا أو متغيرا أو دقيقا أو موزعا. لتحديد أنظمة التأخير، يتم استدعاء الطرق التقليدية مثل طريقة Broïda و Strejc. يتم إعطاء أهمية خاصة للطرق القائمة على فكرة اللحظات.

تم تفصيل جزء الاستقرار الذي يحتل مكانا مهما في هذه الأطروحة بشكل خاص إلى جانب الطرق القائمة على المتراجحات المصفوفية في المجال الزمني. من أجل تحقيق شروط الاستقرار التي تتعلق بالتأخر في شكل LMI، يتم تقديم عدة طرق.

لاستكمال دراسة أنظمة التأخير، يتم استدعاء طرق التحكم المطبقة في هذه الحالة من خلال تكييف طرق التحكم التقليدية للأنظمة دون تأخير.

تظهر نتائج المحاكاة لثلاثة أمثلة لأنظمة التأخير فعالية الأساليب المقترحة لاستقرار هذه الأنظمة.

الكلمات المفتاحية: أنظمة التأخير، النمذجة، التعرف، الاستقرار، المتراجحات المصفوفية، Lyapunov-Krasovskii، التحكم.

Abstract

The objective of this thesis is the study of delay systems from the point of view of modeling, identification, stability and control. In the modeling part, different representations of delay systems in the time domain and in the frequency domain are studied depending on whether the delay is constant, variable, punctual or distributed. For the identification of delay systems, conventional methods such as the method of Broïda and Strejc are recalled. Particular importance is given to methods based on the notion of moments.

The stability part which occupies an important place in this thesis is detailed in particular the methods based on the matrix inequalities in the time domain. In order to achieve conditions of delay-dependent stability in terms of LMI, several approaches are presented.

To complete the study of delay systems, the control methods applied in this case are recalled by adapting the conventional control methods for systems without delays.

The simulation results of three examples of delay systems show the effectiveness of the approaches proposed for the stability of these systems.

Keywords : Time-delay systems, modeling, identification, stability, LMI, Lyapunov-Krasovskii, control.

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude des systèmes à retards du point de vue modélisation, identification, stabilité et commande. Dans la partie modélisation, différentes représentations des systèmes à retards dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel sont étudiées en fonction que le retard soit constant, variable, ponctuel ou distribué. Pour l'identification des systèmes à retards, les méthodes classiques telles que la méthode de Broïda et Strejc sont rappelées. Une importance plus particulière est accordée pour les méthodes se basant sur la notion des moments.

La partie stabilité qui occupe une place importante dans cette thèse est détaillée notamment les méthodes se basant sur les inégalités matricielles dans le domaine temporel. Pour aboutir à des conditions de stabilité dépendante du retard sous forme de LMI, plusieurs approches sont présentées.

Pour compléter l'étude des systèmes à retards, les méthodes de commande appliquées dans ce cas sont rappelées en adaptant les méthodes classiques de commande des systèmes sans retards.

Les résultats de simulation de trois exemples de systèmes à retards montrent l'efficacité des approches proposées pour la stabilité de ces systèmes.

Mots clés : Systèmes à retards, modélisation, identification, stabilité, LMI, Lyapunov-Krasovskii, commande.

Table des matières

Table des figures	x
Liste des tableaux	xi
Notations et acronymes	xii
Introduction générale	1
1 Modélisation des systèmes à retards	4
1.1 Introduction	4
1.2 Représentations des systèmes à retards	5
1.3 Types de retards	7
1.4 Modélisation des systèmes à retards dans le domaine temporel . . .	8
1.4.1 Systèmes à retards sur l'état et la commande	9
1.4.2 Systèmes à retards distribués	10
1.4.3 Systèmes à retards de type neutre	10
1.4.4 Systèmes non linéaires à retards	11
1.5 Modélisation des systèmes à retards dans le domaine fréquentiel . .	12
1.5.1 Systèmes à retards de type neutre	12
1.5.2 Systèmes à retards distribués	14
1.6 Conclusion	15
2 Identification des systèmes à retards	17
2.1 Introduction	17
2.2 Identifiabilité	18
2.3 Méthodes d'estimation du retard	19
2.3.1 La méthode de Broïda	19
2.3.2 La méthode de Strejc	20
2.3.3 La méthode des moments simples	22

2.3.4	La méthode des moments fonctionnels de Poisson	24
2.3.5	La méthode des ondelettes de Poisson	28
2.3.6	Méthodes d'approximation du retard	34
2.4	Conclusion	35
3	Stabilité des systèmes à retards	37
3.1	Introduction	37
3.2	Généralités et définitions	37
3.3	Étude de la stabilité au sens de Lyapunov	39
3.3.1	Approche de Krasovskii	39
3.3.2	Approche de Razumikhin	40
3.4	Stabilité indépendante/dépendante du retard	42
3.4.1	Notion de stabilité indépendante du retard	43
3.4.2	Notion de stabilité dépendante du retard	44
3.4.3	Conditions de stabilité robuste pour un système incertain de type neutre avec un retard discret et un retard distribué . .	56
3.5	Stabilité des systèmes à retards dans le domaine fréquentiel	65
3.5.1	Théorème de Hermite-Biehler	66
3.5.2	Théorème de Hermite-Biehler pour les quasi-polynômes . . .	67
3.6	Analyse de stabilité des systèmes discrets à retards	69
3.6.1	Fonction de transfert des systèmes discrets à retards	69
3.6.2	Application de la méthode directe de Lyapunov	70
3.6.3	Critère de stabilité pour les systèmes discrets à retard variable dans un intervalle	76
3.7	Conclusion	80
4	Commande des systèmes à retards	81
4.1	Introduction	81
4.2	Commande par temps de retard	81
4.3	Commande utilisant la technique du prédicteur	82
4.3.1	Cas des systèmes linéaires à paramètres constants (LTI) . .	82
4.3.2	Cas des systèmes linéaires à paramètres variants (LTV) . . .	83
4.4	Approche de commande basée sur LMI	85
4.5	Commande des systèmes discrets à retards	89
4.6	Conclusion	92

5	Simulation de quelques systèmes à retards	93
5.1	Introduction	93
5.2	Exemple 1 : Etude de stabilité pour un système neutre incertain avec un retard discret et un retard distribué	94
5.3	Exemple 2 : Analyse de stabilité pour un système cloud computing dans le domaine discret avec retard variable	97
5.4	Exemple 3 : Conditions de stabilité dépendante du retard pour un système de suivi de ligne sur un écran tactile	99
5.5	Conclusion	104
	Conclusion générale	106
	Bibliographie	107

Table des figures

2.1	Principe de la méthode de Broïda	20
2.2	Principe de la méthode de Strejc	21
2.3	Erreur entre la réponse du système et la réponse désirée	24
2.4	Filtrage d'un signal par la fonction de Poisson	25
2.5	Famille d'ondelettes de Poisson pour $k=1,2,3,4$	30
5.1	Réponse du système pour $h = 1$ et $r = 6.21$	95
5.2	Réponse du système pour $r = 2$ et $h = 1.61$	96
5.3	Les pôles pour $\tau_1 = 0.0127147$, $\tau_2 = 0.01443$	102
5.4	Réponse du système pour $\tau_1 = 0.0127147$, $\tau_2 = 0.01443$	102
5.5	Réponse du système pour $\tau_1 = 0.5$ et $\tau_2 = 0.557$	103
5.6	Les pôles du système pour $\tau_1 = 0.5$ et $\tau_2 = 0.557$	104
5.7	Réponse du système pour $\tau_1 = 4.386$ et $\tau_2 = 0.4$	105
5.8	Les pôles du système pour $\tau_1 = 4.386$ et $\tau_2 = 0.4$	105

Liste des tableaux

2.1	Tableau de Strejc	22
5.1	Valeur maximale admissible de r pour différentes valeurs de h . . .	95
5.2	Valeur maximale admissible de h pour différentes valeurs de r . . .	96
5.3	Retard maximum h_M pour différentes valeurs de h_m	98
5.4	Retard maximum τ_2 pour différentes valeurs de τ_1	103
5.5	Retard maximum τ_1 pour différentes valeurs de τ_2	104

Notations et acronymes

Notations

\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}_+	L'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels.
\mathbb{R}^n	L'espace euclidien de dimension n .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	L'espace des matrices réelles de dimension $n \times m$.
t	La variable temps.
p	La variable de Laplace.
τ	le retard temporel constant.
$\tau(t)$	le retard temporel variable.
$[a, b]$	Un intervalle fermé de \mathbb{R} , d'extrémités a et b .
$C = C[-\tau, 0]$	L'ensemble des fonctions continues de $[-\tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n .
$x \in \mathbb{R}^n$	Le vecteur d'état instantané.
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	La dérivée de l'état x par rapport au temps.
$x_t \in C$	L'état du système à l'instant t avec $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$.
$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$	Fonction de la condition initiale, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$.
x^T	Le vecteur transposé du vecteur x .
A^T	La matrice transposée de la matrice A .
A^{-1}	La matrice inverse de la matrice A .
I_n	La matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$.
$A > 0$ ($A \geq 0$)	La matrice A est définie positive (semi-définie positive).
$A < 0$ ($A \leq 0$)	La matrice A est définie négative (semi-définie négative).
*	Dans une matrice pour indiquer les termes déduits par symétrie.
$col\{a, b\}$	Matrice composée des vecteurs colonnes a et b .
$diag\{M_1, M_2, \dots\}$	Matrice diagonale ayant M_1, M_2, \dots sur sa diagonale principale.
$\det(A)$	Déterminant de la matrice A .

$V(\cdot)$	La fonction de Lyapunov.
$\dot{V}(\cdot)$	La dérivée de la fonction de Lyapunov $V(\cdot)$ par rapport au temps.
$ \cdot $	La valeur absolue d'un réel ou norme Euclidienne d'un vecteur.
$\max\{\tau, h, r\}$	La valeur maximale que peut atteindre τ , h ou r
$\max_{x \in [a, b]} f(x)$	La valeur maximale de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.
$\min_{\rho} f(x)$	Minimum de la fonction $f(x)$ par rapport à ρ .
∇	Vecteur des opérateurs de retard sur des anneaux
$Prob[X = k]$	Probabilité que la variable X soit égale à k .

Acronymes

LMI	Linear Matrix Inequality / Inégalité Matricielle Linéaire
TL	Transformée de Laplace
TF	Transformée de Fourier
TDC	Time-delay control / Commande par temps de retard
Système LTI	Linear time-invariant system / Système à paramètres constants
Système LTV	Linear time-variant system / Système à paramètres variants
PID	Proportionnel, intégral, dérivé.

Introduction générale

Ces dernières années les systèmes à retards ont occupé une place importante dans le domaine de la recherche académique et aussi dans le domaine industriel notamment dans les systèmes de transport de matière, d'énergie et aussi d'information tels que les systèmes de communication où le contrôle/commande à distance de systèmes à travers des réseaux de communication reçoit un intérêt croissant. Cet intérêt est en effet motivé par l'essor des réseaux de communication sans fil. Dans le domaine de l'automatisation industrielle, l'insertion de réseaux de communication dans les chaînes de mesure rend leur analyse, en termes de stabilité, de performance et leur conception relativement complexe. Ces problèmes relèvent, entre autres, des inéluctables retards de communication. D'un point de vue commande, il est alors reconnu que ces éléments affectent le comportement global des systèmes commandés, aboutissant à une dégradation des performances et/ou des entrées en instabilité.

Le retard peut être constant, variable, localisé, distribué, ou ponctuel. Le plus simple est un système à retards constants, il est peut-être le plus facile à trouver, car contrairement à ce que l'on pourrait penser de prime abord, un retard peut s'avérer utile, il peut même parfois être absolument nécessaire pour stabiliser par exemple le système considéré.

L'objectif de cette thèse est d'étudier les systèmes à retards, leurs caractéristiques, les notions mathématiques qui sont utilisées pour la modélisation des ces systèmes ainsi que les problèmes qui s'y rapportent tels que l'identification du retard, la commande de tels systèmes et l'étude des conditions de leur stabilité et stabilisation.

Dans un premier chapitre nous allons présenter les systèmes à retards, les différents types de retards rencontrés dans la réalité ainsi que les différents modèles recensés dans la littérature scientifique. Les modèles temporels et les modèles fréquentiel seront développés en tenant compte du fait que le retard peut affecter l'état,

la commande ou les deux à la fois. Les modèles temporels utilisent la représentation par équations différentielles fonctionnelles, tandis que les modèles fréquentiels utilisent la notion de fonction de transfert.

Les différentes approches pour l'identification du retard seront présentées au chapitre deux de cette thèse. Nous commencerons par les approches classiques déjà connues telles que la méthode de Broïda et Strejc qui se basent sur une représentation fréquentielle du système de premier ordre dans le premier cas et d'ordre quelconque dans le second cas. Dans cette représentation, le retard apparaît par l'intermédiaire d'une fonction exponentielle. Des méthodes beaucoup plus évoluées utilisent une représentation temporelle en se basant sur la notion des moments telles que la méthode des moments pondérés, les moments fonctionnelles de Poisson et la méthode des ondelettes de Poisson.

La stabilité des systèmes à retards est présentée au troisième chapitre. La stabilité constitue la plus grande et la plus importante partie de cette thèse. De la même manière, les méthodes d'études de la stabilité des systèmes à retards utilisent une représentation fréquentielle ou temporelle. Dans le domaine fréquentielle, différentes méthodes d'approximation des termes exponentiels contenant le retard existent telles que l'approximation polynomiale, l'approximation de Padé, l'approximation de Laguerre-Fourier,...etc. Ces méthodes permettent de transformer le système à retards en un système sans retard ce qui donne la possibilité d'appliquer les méthodes classiques se basant sur la position des pôles et des zéros du système dans le plan complexe. Dans le domaine temporel, les méthodes d'étude de la stabilité des systèmes à retards se basent sur l'utilisation des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, pour établir des conditions de stabilité indépendante ou dépendante du retard. Dans le deux cas, les conditions de stabilité sont exprimés sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). De nombreuses techniques sont utilisées pour établir les conditions de stabilité dépendante du retard dont le but est de réduire le conservatisme des critères obtenus telles que les transformations de modèle, le choix adéquat des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, les inégalités intégrales, l'ajout des matrices de pondération, le fractionnement du retard,...etc. Dans ce contexte, une importante recherche bibliographique a été effectuée ce qui a abouti à la proposition de notre propre méthode d'analyse de la stabilité des systèmes à retards par combinaison de différentes fonctions de Lyapunov-Krasovskii et de différentes méthodes d'analyse et traitement de la dérivée de cette fonction pour assurer une stabilité robuste. L'analyse de stabilité des systèmes discrets à retards

sera également présentée, dans ce chapitre, dans le domaine fréquentiel et temporel.

Un quatrième chapitre est dédié à la commande des systèmes à retards. Ce chapitre résume les techniques de la commande des systèmes en général qui sont applicables aux systèmes à retards telles que la commande par temps de retard, la commande utilisant la technique du prédicteur. Les conditions de commande des systèmes à retards sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) joue un rôle très important.

Pour montrer l'efficacité des différentes approches proposées dans cette thèse pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards, une simulation de différents exemples sous l'environnement Matlab-Simulink est présentée au cinquième chapitre. Un premier exemple concerne l'étude de la stabilité robuste des systèmes incertains de type neutre avec un retard discret et un retard distribué. Un deuxième exemple concerne l'étude de la stabilité d'un système "Cloud computing" où le retard affecte l'état de ce système. Un exemple de suivi de ligne sur un écran tactile sera présenté comme un troisième exemple. Les résultats obtenus dans cette simulation prouvent l'efficacité de l'approche proposée pour l'analyse de la stabilité des systèmes à retards.

Une liste non exhaustive de références qui nous ont guidés tout au long de nos travaux pour avoir une vision d'ensemble des problèmes abordés est donnée en bibliographie de cette thèse.

Chapitre 1

Modélisation des systèmes à retards

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter certaines notions fondamentales, relatives aux systèmes à retards, nécessaires à l'élaboration des principaux modèles mathématiques de tels systèmes, en fonction des différents types de retards usuellement considérés. Tout d'abord le retard de l'acquisition de l'information à un instant donné est un phénomène de transport de matière ou de transmission de l'information. Ce retard peut être constant, variable, localisé ou distribué dans le temps.

Un système à retards est généralement modélisé par un ensemble d'équations différentielles fonctionnelles de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t(\theta)), \quad t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) &= \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état à l'instant t , $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ est l'état retardé, x_{t_0} est l'état initial du système, f est une fonction supposée continue, localement Lipschitz par rapport à la seconde variable et telle que $f(t, 0) = 0$. Le paramètre θ représente un retard variable et t est la variable indépendante représentant le temps.

L'équation (1.1) indique que la dérivée de l'état $x(t)$ à l'instant présent t , dépend

de l'état retardé $x_t(\theta) \in C$ défini par :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \quad (1.2)$$

Remarque 1.1. *L'état du système à chaque instant est constitué de l'ensemble des états instantanés, $\{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$, par conséquent, l'espace d'état de ce système est de dimension infinie.*

1.2 Représentations des systèmes à retards

Trois représentations différentes sont généralement utilisées pour la modélisation des systèmes à retards :

1. Équations différentielles avec des coefficients sur des anneaux d'opérateurs : Cette méthode a été développée en premier lieu pour étudier les systèmes à retards [1]-[6] et elle a été appliquée avec succès pour résoudre certains problèmes de contrôle tels que le découplage et le rejet de perturbations [7]. Dans ce contexte, un système linéaire à retards est modélisé par l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = A \nabla x(t) \quad (1.3)$$

où dans le cas général, $\nabla = \text{col}(\nabla_i)$ est un vecteur des opérateurs de retard tel que $x(t - \tau_i) = \nabla_i x(t)$. Dans ce cas, les coefficients de la matrice A sont des polynômes multivariables par rapport à la variable ∇ . Comme l'inverse de ∇ (l'opérateur de prédiction $x(t + \tau_i) = \nabla_i^{-1} x(t)$) n'est pas défini du point de vue causalité, les opérateurs ∇_i de la matrice A appartiennent alors à un anneau.

2. Équations différentielles sur un espace linéaire abstrait de dimension infinie : Ce type de représentation provient de l'application de la théorie des systèmes de dimension infinie au cas des systèmes à retards. Ce type de système est complètement caractérisé par l'état étendu ou augmenté :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

où $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ avec $\theta \in [-\tau, 0]$. Dans ce cas l'espace d'état est alors un espace de Hilbert.

On peut facilement voir que l'état du système correspond à un point dans un espace Euclidien $x(t)$ et une fonction d'énergie bornée $x_t(\theta)$, cette dernière appartient à un espace linéaire de dimension infinie. Cela motive la dénomination de "*espace linéaire abstrait de dimension infinie*" [8]-[11]. Dans cet espace d'état, le système s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(\cdot) \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(\cdot) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

où l'opérateur \mathcal{A} est donné par :

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(t) + A_d x_t(-\tau) \\ \frac{dx_t(\theta)}{d\theta} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

L'opérateur \mathcal{A} est l'analogue de dimension infinie de l'opérateur de dimension finie A pour les systèmes linéaires décrits par $\dot{x} = Ax$. Beaucoup d'outils impliqués dans la théorie des systèmes de dimension finie ont été étendus aux systèmes de dimension infinie (e.g. l'exponentielle d'une matrice, valeurs propres et fonctions propres, la matrice fondamentale ou aussi la solution explicite).

3. Équations différentielles fonctionnelles : Dans ce cas, les systèmes à retards peuvent être considérés comme des évolutions dans un espace Euclidien de dimension finie ou dans un espace fonctionnel. La première utilise la finitude de l'espace vectoriel pour analyser le comportement du système alors que la deuxième reflète le caractère de dimension infinie du système [12]. Bien que la manipulation des problèmes de dimension infinie en utilisant des outils de dimension finie a ses avantages, les résultats obtenus sont conservatifs. Dans cette thèse, seulement les équations différentielles fonctionnelles vont être utilisées pour représenter les systèmes à retards.

1.3 Types de retards

Les retards apparaissant dans les systèmes ou processus réels sont le plus souvent dus à des phénomènes de transfert d'information ou de matière. Différents types de retards peuvent affecter l'état, l'entrée (commande) ou la sortie (observation) d'un système. Ces retards peuvent être constants, variables, distribués ou une combinaison des différents types de retards.

Retard constant : Les premières études sur les systèmes à retards concernaient, principalement, les systèmes à retards constants. Dans la plupart des cas réellement rencontrés, seule une partie récente du passé exerce une influence sur le comportement du système. On parle alors de systèmes à retards bornés s'il existe un nombre réel $\tau > 0$ tel que les fonctionnelles de l'état x_t et de sa dérivée \dot{x}_t soient définies sur l'intervalle $[-\tau, 0]$.

Retard majoré : Dans ce cas, on suppose connaître la valeur maximale du retard :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_{\max} \quad (1.7)$$

Retard variable borné : Comme la constance du retard est une hypothèse rarement vérifiée dans la réalité, le cas des retards variables (connus ou inconnus) a fait lui aussi l'objet de nombreuses recherches. On définit alors les retards variables bornés comme suit :

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2 \quad (1.8)$$

Une grande partie des modèles de systèmes à retards suppose que le retard varie dans un intervalle $[0, \tau_2]$. Le fait d'autoriser le retard à prendre la valeur 0 revient à supposer qu'à un moment donné ce transfert se fait de manière instantanée.

Retard dépendent de l'état : Dans l'étude de la dynamiques des populations et les problèmes épidémiques, le retard dépend souvent de l'état présent ($\tau(x(t))$) et parfois même de l'état retardé [12].

Retard variable avec contrainte sur la dérivée : Comme le retard variable est borné on peut penser à introduire une contrainte sur la dynamique de sa va-

riation, autrement dit, une contrainte sur sa dérivée telle que :

$$\dot{\tau}(t) \leq d < 1 \quad (1.9)$$

où d est un réel positif.

Retard variable continu par morceaux : Ces retards apparaissent notamment lors de l'échantillonnage d'un signal. Ce cas particulier autorise notamment la dérivée du retard à prendre la valeur critique 1 : $\dot{\tau}(t) \leq 1$.

Retard distribué : Si l'on suppose que l'état x_t est une fonction continue sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R} , nous pouvons alors définir les retards distribués par :

$$\dot{x}(t) = \int_{t-\tau}^t f(t, x(\theta)) d\theta, \quad \tau \geq 0 \quad (1.10)$$

ou encore, les retards ponctuels ou discrets :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau_x)), \quad \tau_x \geq 0 \quad (1.11)$$

Retard inconnu : Aucune hypothèse sur le retard n'est considérée. Qu'il soit constant ou variant dans le temps, il peut prendre toutes les valeurs dans \mathbb{R}_+

1.4 Modélisation des systèmes à retards dans le domaine temporel

Nous rappelons que les systèmes à retards sont des systèmes dynamiques qui sont modélisés par des équations différentielles fonctionnelles où un ou plusieurs retards affectent à la fois l'état, la commande et la sortie du système pour des instants présents et/ou passés du temps. De tels systèmes sont aussi dits « systèmes retardés »

Ces systèmes retardés sont alors décrits par un modèle de la forme générale

suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, u_t), \quad t \geq t_0 \\ y(t) &= g(t, x_t, u_t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec $x_{t_0} = \phi(\theta)$, $u_{t_0} = \phi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$

où $x(t)$ est le vecteur d'état, $y(t)$ est le vecteur des sorties, $u(t)$ est le vecteur d'entrée ou de commande, f et g sont des fonctions vectorielles, Lipschitziennes vérifiant les propriétés analytiques de continuité et de dérivabilité, x_t et u_t désignent respectivement l'état $x(t)$ et la commande $u(t)$ sous des formes retardées, elles sont définies comme suit :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.13)$$

$$u_t(\theta) = u(t + \theta), \quad [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.14)$$

où τ est un réel strictement positif qui représente le plus grand retard du système.

On note alors usuellement $x(t_0, \phi)$, la solution de (1.12) définie pour la condition initiale (t_0, ϕ) de l'état x sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$.

1.4.1 Systèmes à retards sur l'état et la commande

Le modèle de cette classe de système est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau_1) + Bu(t) + B_d u(t - \tau_2) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0 + \theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (1.15)$$

où A , A_d , B , B_d et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées, $\tau > 0$ est un retard qui peut être constant ou variable et $x(t_0 + \theta)$ est la condition initiale.

Il est à noter que cette description mathématique peut être exploitée pour prendre en compte l'effet de certaines formes de retard inhérent à des transferts de matière ou d'informations ce qui a donc servi de base à plusieurs travaux.

Cette classe de systèmes peut être réduite aux systèmes avec un retard sur l'état ($B_d = 0$) ou sur la commande ($A_d = 0$).

1.4.2 Systèmes à retards distribués

Les systèmes à retards distribués constituent une classe particulière de systèmes à retards. De tels systèmes trouvent leurs applications dans certains processus réels tels que celui de la combustion du gaz propane dans les réacteurs des installations aérospatiales. De tels systèmes sont modélisés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau_1) + \int_0^{\tau_2} A_{d2}(\theta)x(t - \theta)d\theta + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0 + \theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]\end{aligned}\tag{1.16}$$

Une représentation beaucoup plus complète de systèmes à retard distribué est la suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_d(t)x(t - \tau_1) + B(t)u(t) + B_d(t)u(t - \tau_2) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t (M(\theta)x(\theta) + N(\theta)u(\theta))d\theta \\ y(t) &= C(t)x(t) + C_d(t)x(t - \tau_1) + D(t)u(t) + D_d(t)u(t - \tau_2)\end{aligned}\tag{1.17}$$

1.4.3 Systèmes à retards de type neutre

La classe des systèmes à retards de type neutre est une classe plus générale que celle des systèmes présentés précédemment, dans le sens où les modèles de ces systèmes considèrent que la dérivée de l'état au temps présent est une fonction qui dépend non seulement des valeurs de l'état passé, mais aussi de la dérivée de l'état passé dans un intervalle. Ces systèmes sont modélisés par des équations de la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - \tau) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + B_d u(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t) + C_d x(t - \tau) \\ x(t_0 + \theta) &= \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]\end{aligned}\tag{1.18}$$

Le comportement dynamique de nombreux procédés physiques peut être décrit par un modèle de système neutre par exemple le modèle des lignes de transmission sans perte (Télécommunications) ou des barres flexibles couplées à une charge

(Robotique).

1.4.4 Systèmes non linéaires à retards

Les modèles non linéaires nous permettent de se rapprocher du comportement des systèmes et processus réels. Les systèmes non linéaires autorisent un plus grand domaine d'analyse grâce aux multiples paramètres qu'ils impliquent. Les paramètres impliqués peuvent aussi varier avec le temps et même avec l'état du système. Les équations définissant ces modèles, par exemple le cas d'un système à retard sur l'état et la commande, se présentent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t, x_t)x(t) + B(t, x_t)u(t) + A_d(t, x_t)x(t - \tau) + B_d(t, x_t)u(t - \tau) \\ y(t) &= C(t, x_t)x(t)\end{aligned}\tag{1.19}$$

Deux types de modèles peuvent faciliter l'étude de tels systèmes. Le premier est le modèle polytopique et le second est le modèle à paramètres incertains.

Modèle polytopique : L'élaboration du modèle polytopique consiste à exprimer les fonctions matricielles comme une somme pondérée de matrices constantes. La modélisation polytopique transforme un modèle de la forme (1.19) en une représentation multi-modèle, c'est-à-dire, une somme de modèles linéaires pondérés de façon non constante. Ceci s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^r \lambda_i(t, x_t) [A_i x(t) + B_i u(t) + A_{di} x(t - \tau) + B_{di} u(t - \tau)] \\ y(t) &= \sum_{i=0}^r \lambda_i(t, x_t) [C_i x(t)]\end{aligned}\tag{1.20}$$

où les fonctions scalaires $\lambda_i(t, x_t)$, pour $i = 1, \dots, r$, sont des fonctions de pondération vérifiant les conditions suivantes de convexité :

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i(t, x_t) = 1, \quad \text{et} \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad \lambda_i(t, x_t) \geq 0\tag{1.21}$$

Si les fonctions matricielles $A(t, x_t)$, $A_d(t, x_t)$, $B(t, x_t)$, $B_d(t, x_t)$ sont continues, les fonctions $\lambda_i(t, x_t)$ le sont aussi.

Par la suite, l'objectif sera de faire ressortir des propriétés communes à tous les sous-modèles linéaires pour en déduire celles du modèle global.

Modèles à paramètres incertains : La modélisation des systèmes à paramètres incertains considère que chaque fonction matricielle définissant le système est la somme d'une matrice constante représentant le comportement nominal et d'une matrice, dépendant de t et de x_t représentant les perturbations par rapport au système nominal. Le modèle est alors défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t, x_t))x(t) + (A_d + \Delta A_d(t, x_t))x(t - \tau) \\ &\quad + (B + \Delta B(t, x_t))u(t) + (B_d + \Delta B_d(t, x_t))u(t - \tau) \\ y(t) &= (C + \Delta C(t, x_t))x(t)\end{aligned}\tag{1.22}$$

où les matrices représentant les perturbations sont généralement présentées sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta A(t, x_t) &= G\Delta(t, x_t)D, & \Delta A_d(t, x_t) &= G_d\Delta(t, x_t)D_d \\ \Delta B(t, x_t) &= H\Delta(t, x_t)E, & \Delta B_d(t, x_t) &= H_d\Delta(t, x_t)E_d \\ \Delta C(t, x_t) &= J\Delta(t, x_t)F\end{aligned}$$

où $\Delta(t, x_t)$ est une matrice qui vérifie : $\forall t, \quad \Delta^T(t, x_t)\Delta(t, x_t) \leq I_n$.

Cette représentation est généralement utilisée dans le problème de la synthèse de lois de commande robuste. Elle permet en effet de caractériser la robustesse par rapport à des incertitudes paramétriques. De plus, cette modélisation sera elle-aussi utile pour établir d'autres conditions de stabilité exponentielle pour les systèmes à retards variables.

1.5 Modélisation des systèmes à retards dans le domaine fréquentiel

1.5.1 Systèmes à retards de type neutre

Les modèles fréquentiels sont généralement obtenus à partir des modèles temporels par application de la transformation de Laplace. Pour plus de simplicité nous considérons que le retard est constant et égale à τ . Dans ces conditions le modèle fréquentiel correspondant au modèle (1.18) d'un système de type neutre avec un

retard sur l'état et la commande s'écrit (conditions initiales nulles) :

$$pX(p) - pFX(p)e^{-\tau p} = AX(p) + A_dX(p)e^{-\tau p} + BU(p) + B_dU(p)e^{-\tau p} \quad (1.23)$$

$$X(p) = [pI - pFe^{-\tau p} - A - A_de^{-\tau p}]^{-1} [B + B_de^{-\tau p}] U(p) \quad (1.24)$$

$$Y(p) = CX(p) + C_de^{-\tau p}X(p) = [C + C_de^{-\tau p}] X(p) \quad (1.25)$$

D'où la relation entre la sortie et la commande :

$$Y(p) = [C + C_de^{-\tau p}] [pI - A - (pF + A_d)e^{-\tau p}]^{-1} [B + B_de^{-\tau p}] U(p) \quad (1.26)$$

La matrice de fonction de transfert est alors :

$$H(p) = [C + C_de^{-\tau p}] [pI - A - (pF + A_d)e^{-\tau p}]^{-1} [B + B_de^{-\tau p}] \quad (1.27)$$

Selon les valeurs numériques des matrices F , A_d , B_d et C_d on peut obtenir les modèles fréquentiels des systèmes à retards sur l'état et/ou sur la commande et sur l'observation. Par exemple, un modèle de type neutre avec un retard sur l'état seulement est obtenu lorsque les matrices $B_d = 0$ et $C_d = 0$. Dans ce cas la matrice de transfert se réduit à :

$$H(p) = C [pI - A - (pF + A_d)e^{-\tau p}]^{-1} B \quad (1.28)$$

La matrice de transfert du système avec un retard sur l'état uniquement est alors :

$$H(p) = C [pI - A - A_de^{-\tau p}]^{-1} B \quad (1.29)$$

Le modèle avec un retard sur l'état et la commande a pour matrice de transfert :

$$H(p) = C [pI - A - A_de^{-\tau p}]^{-1} [B + B_de^{-\tau p}] \quad (1.30)$$

D'une manière similaire, la matrice de transfert du système à retard sur la commande seulement s'écrit :

$$H(p) = C [pI - A]^{-1} [B + B_de^{-\tau p}] \quad (1.31)$$

Remarque 1.2. Lorsque le retard est nul ($\tau = 0$), nous retrouvons les matrices de transfert des systèmes classiques, c'est-à-dire sans retard.

1.5.2 Systèmes à retards distribués

Dans le domaine fréquentiel le modèle du système à retard distribué (1.17) s'écrit alors sous la forme suivante (conditions initiales nulles) :

$$\begin{aligned} pX(p) = & AX(p) + A_d e^{-\tau p} X(p) + [B + B_d e^{-\tau p}] U(p) \\ & + \frac{1}{p} [M(\theta) X(p) e^{-\theta p} + N(\theta) U(p) e^{-\theta p}] \end{aligned} \quad (1.32)$$

D'où :

$$\begin{aligned} X(p) = & \left[pI - A - A_d e^{-\tau p} - \frac{1}{p} M(\theta) e^{-\theta p} \right]^{-1} \\ & \times \left[(B + B_d e^{-\tau p}) + \frac{1}{p} N(\theta) e^{-\theta p} \right] U(p) \end{aligned} \quad (1.33)$$

L'équation d'observation s'écrit alors :

$$Y(p) = [C + C_d e^{-\tau p}] X(p) + [D + D_d e^{-\tau p}] U(p) \quad (1.34)$$

La relation d'entrée-sortie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Y(p) = & [C + C_d e^{-\tau p}] \left[pI - A - A_d e^{-\tau p} - \frac{1}{p} M(\theta) e^{-\theta p} \right]^{-1} \\ & \times \left[(B + B_d e^{-\tau p}) + \frac{1}{p} N(\theta) e^{-\theta p} \right] U(p) \end{aligned} \quad (1.35)$$

D'où la matrice de fonction de transfert :

$$\begin{aligned} H(p) = & [C + C_d e^{-\tau p}] \left[pI - A - A_d e^{-\tau p} - \frac{1}{p} M(\theta) e^{-\theta p} \right]^{-1} \\ & \times \left[(B + B_d e^{-\tau p}) + \frac{1}{p} N(\theta) e^{-\theta p} \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Une représentation beaucoup plus complète des systèmes à retards distribués

est la suivante (conditions initiales nulles) :

$$\begin{aligned}
 pX(p) = & AX(p) + A_d X(p)e^{-\tau_1 p} + M \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) X(p) + BU(p) + B_d e^{-\tau_2 p} U(p) \\
 & + N \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) U(p)
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}
 X(p) = & \left[pI - A - A_d e^{-\tau_1 p} - M \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) \right]^{-1} \\
 & \times \left[B + B_d e^{-\tau_2 p} + N \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) \right] U(p)
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

L'équation de la sortie s'écrit :

$$Y(p) = [C + C_d e^{-\tau_1 p}] X(p) + [D + D_d e^{-\tau_2 p}] U(p) \tag{1.39}$$

La relation entrée-sortie devient alors :

$$\begin{aligned}
 Y(p) = & [C + C_d e^{-\tau_1 p}] \left[pI - A - A_d e^{-\tau_1 p} - M \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) \right]^{-1} \\
 & \times \left[B + B_d e^{-\tau_2 p} + N \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) \right] U(p) + [D + D_d e^{-\tau_2 p}] U(p)
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

D'où la matrice de fonction de transfert :

$$\begin{aligned}
 H(p) = & [C + C_d e^{-\tau_1 p}] \left[pI - A - A_d e^{-\tau_1 p} - M \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) \right]^{-1} \\
 & \times \left[B + B_d e^{-\tau_2 p} + N \left(\frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \right) \right] + [D + D_d e^{-\tau_2 p}]
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons vu que le retard peut affecter l'état du système et/ou la commande (actionneur) et éventuellement l'observation (capteur) et que sa présence peut avoir une influence positive ou négative sur le comportement global des systèmes commandés.

Une présentation générale de l'analyse de différents modèles des systèmes à retards dans le domaine temporel (équations différentielles) et fréquentiel (fonctions de transfert) a été effectuée. Dans le domaine fréquentiel, le retard apparaît dans la fonction de transfert de système par l'intermédiaire du terme $e^{-\tau p}$, comme dans le cas des modèles de Broïda et de Strejc. Par conséquent quelle que soit la fonction de transfert du système à retards, on peut la décomposer en éléments simples de type Broïda ou Strejc et appliquer les techniques de l'automatique pour l'étude, l'analyse et la synthèse de ces systèmes telles que l'identification, la commande et la stabilité.

Chapitre 2

Identification des systèmes à retards

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse des méthodes d'identification des paramètres et des retards d'une structure de modèles à temps continu les plus utilisées dans la littérature.

Le phénomène de retard apparaît couramment dans les systèmes dynamiques. Les capteurs et/ou les actionneurs ou le système d'élaboration de la commande introduisent un décalage temporel. Le processus lui-même présente naturellement un transport de matière, une transmission d'énergie ou d'information. Un temps d'attente se traduit par un retard.

L'identification du retard s'avère une tâche importante, souvent indispensable, pour la conception d'une commande. En effet, la présence de retards en boucle ouverte a souvent une influence considérable sur le comportement du système bouclé. C'est ainsi que, bien souvent, des mouvements oscillatoires instables, qui peuvent apparaître, sont lissés ou même éliminés en introduisant un retard dans la chaîne d'action ou de rétroaction.

Les méthodes classiques, comme le prédicteur de Smith qui a pour rôle de réduire l'effet du retard et d'éviter l'apparition des oscillations, demandent la connaissance de ce retard. Dans d'autres cas, l'estimation du retard entre deux signaux est un problème important dans de nombreux domaines (sismique, biomédical, sonar, ra-

dar, télécommunications). Dans le cas du sonar en mode passif, par exemple, la mesure du retard est utilisée pour estimer la position et la vitesse d'une source acoustique.

L'estimation du retard des systèmes du premier et du second ordre a reçu une grande attention en raison de leur utilisation répandue dans les techniques de réglage des contrôleurs PID. Souvent la détermination d'un modèle rigoureux est difficile en raison de la nature complexe de certains processus. Par conséquent, identifier ces systèmes à l'aide des modèles d'ordre inférieur à partir des données entrée-sortie est une solution très adoptée.

2.2 Identifiabilité

L'identifiabilité est un concept fondamental dans les problèmes d'identification. Ce concept consiste à s'assurer que la procédure d'identification donnera une valeur unique des paramètres du système à partir du couple de données entrées sorties et que le modèle qui en résulte correspond au système réel [13]. L'identifiabilité est liée principalement à deux facteurs : le choix du modèle et de sa complexité, d'une part, et la disponibilité des données (en général, des mesures), d'autre part. Cette disponibilité conduit à deux notions :

Identifiabilité a priori : appelée encore identifiabilité théorique, elle revient à tester l'injectivité du comportement entrée-sortie de la structure et représente une condition préalable à l'identification a posteriori.

Identifiabilité a posteriori : appelée aussi identifiabilité pratique. Une fois l'identifiabilité a priori vérifiée, l'objectif de l'identifiabilité a posteriori est de montrer que la condition d'unicité de la solution du problème d'estimation est vérifiée à partir des mesures disponibles.

L'analyse d'identifiabilité d'un système s'articule autour de deux étapes. La première étape fait appel à la notion d'un signal test suffisamment riche en informations ou varié de façon à exciter les différentes dynamiques du système considéré. Le choix de ce type d'entrée renforce l'identifiabilité et assure que deux trajectoires différentes correspondent obligatoirement à deux signaux de commande (test) différents. Dans la deuxième étape, on donne les conditions suffisantes sous lesquelles une réponse donnée T a une représentation unique. Il est à noter que cette analyse suppose que la trajectoire du système est définie dans un intervalle de temps fini.

2.3 Méthodes d'estimation du retard

Les premières méthodes d'identification du retard en même temps que les paramètres d'un système utilisent un modèle fréquentiel (fonction de transfert) en raison de l'utilisation très répandue du modèle fréquentiel dans les systèmes de régulation industrielle. Le principe de ces premières méthodes se base sur l'exploitation de la réponse indicielle ou impulsionnelle du système considéré pour déterminer le retard ainsi les paramètres du système. Autrement dit ce sont des méthodes graphiques. Il existe plusieurs méthodes parmi lesquelles, on peut citer la méthode de Broïda, la méthode de Strejc et les variantes de la méthode des moments.

2.3.1 La méthode de Broïda

Elle permet d'identifier les paramètres d'un système du premier ordre avec un retard à partir de sa réponse indicielle en boucle ouverte. Le système est modélisé par une fonction de transfert du premier ordre avec un retard pur de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{(1 + Tp)} \quad (2.1)$$

où τ , T et K représentent respectivement le retard, la constante de temps et le gain statique.

Son principe est de trouver deux points qui correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale de la réponse indicielle du système comme le montre la figure 2.1. A partir de la projection de ces deux points sur l'axe des abscisses, on détermine respectivement deux instants t_1 et t_2 . Le retard et la constante du temps peuvent être ainsi déterminés de la manière suivante :

Soit $y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}$ la réponse indicielle d'un système de premier ordre. La réponse retardée de ce système est alors :

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} \quad (2.2)$$

Pour $t = t_1$, $y(t_1) = 28\% = 1 - e^{-\frac{1}{T}(t_1-\tau)}$

Et pour $t = t_2$, $y(t_2) = 40\% = 1 - e^{-\frac{1}{T}(t_2-\tau)}$

La résolution de ce système d'équation à deux inconnues aboutit aux relations

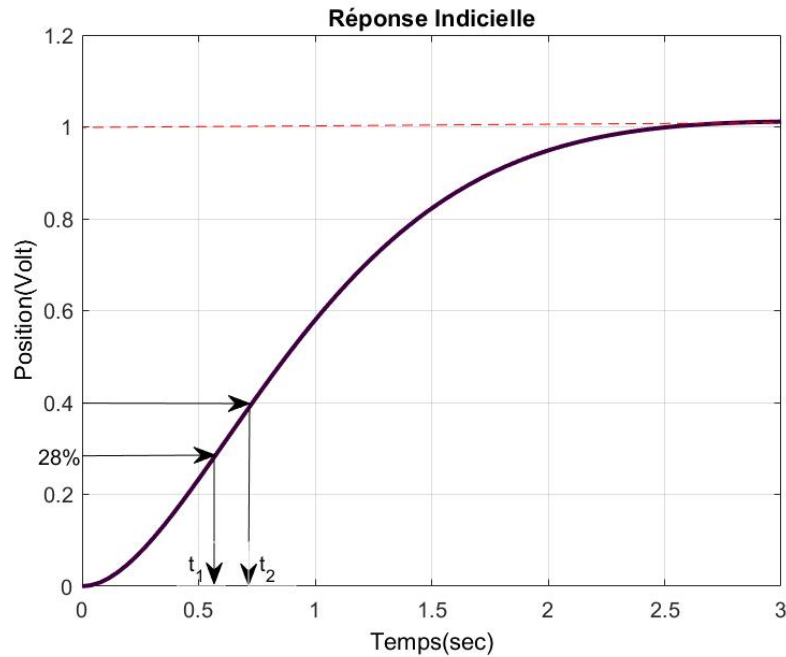


FIGURE 2.1 – Principe de la méthode de Broïda

suivantes :

$$T = 5.5(t_2 - t_1) \quad (2.3)$$

$$\tau = 2.8t_1 - 1.8t_2 \quad (2.4)$$

Le gain est aussi déterminé à partir de la valeur finale de la sortie.

L'application d'une telle méthode reste limitée lorsque le système est non amorti ou la dynamique est d'ordre élevé. Certains modèles d'ordre élevé lorsqu'ils sont approximés par un modèle du premier ordre donnent une constante du temps négative et donc le modèle du second ordre s'avère nécessaire. C'est ainsi que les modèles d'ordre supérieur ou égal à deux sont identifiés par la méthode de Strejc.

2.3.2 La méthode de Strejc

Cette méthode graphique permet d'identifier un système d'ordre n à partir de sa réponse indicielle ne présentant pas de dépassement (pseudo-apériodique). Le modèle du système considéré est modélisé par une fonction de transfert de la forme

générale suivante :

$$H(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{(1 + Tp)^n} \quad (2.5)$$

où K est le gain statique, T représente la constante du temps, τ est le retard et n est l'ordre du système.

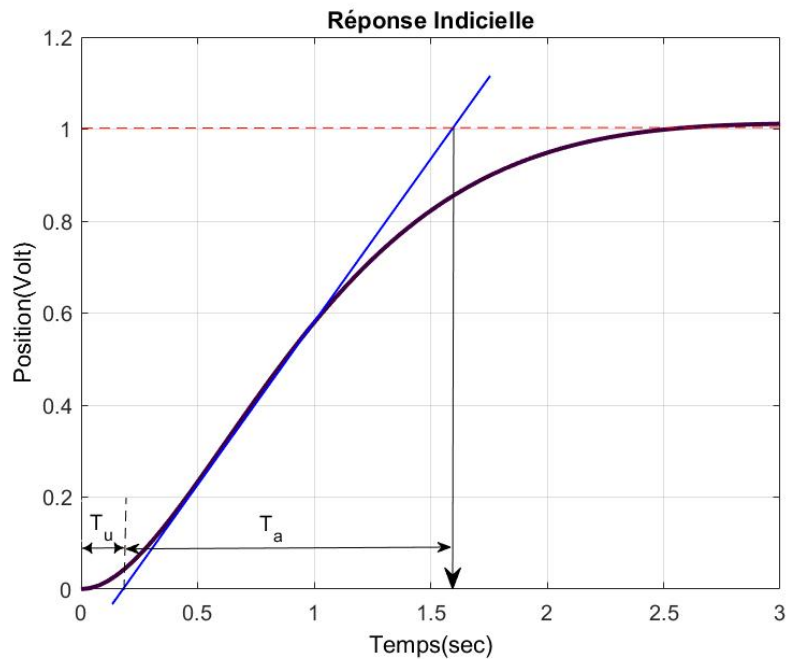


FIGURE 2.2 – Principe de la méthode de Strejc

Le principe de la méthode consiste à tracer une tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle du système en boucle ouverte. Cette tangente coupe l'axe des temps en point t_1 et l'asymptote en un point dont la projection sur l'axe des temps est t_2 comme le montre la figure 2.2. A partir des mesures des intervalles $[0, t_1]$ et $[t_1, t_2]$ qu'on note respectivement T_u et T_a et à l'aide du tableau de Strejc on détermine les valeurs numériques des paramètres du système et par conséquent on détermine aussi le retard.

Pour cela, on calcule le rapport (T_u/T_a) . Si la valeur numérique de ce rapport existe dans le tableau de Strejc (table 2.1) alors le retard est nul. Sinon le retard

existe et il est donné par la relation suivante :

$$\tau = T_a(\text{mesuré}) \left[\frac{T_u}{T_a}(\text{mesuré}) - \frac{T_u}{T_a}(\text{tableau}) \right] \quad (2.6)$$

n	$\frac{T_u}{T_a}$	$\frac{T_u}{T}$	$\frac{T_a}{T}$
1	0	0	1
2	0.1	0.28	2.72
3	0.22	0.8	3.7
4	0.32	1.42	4.46
5	0.41	2.10	5.12
6	0.49	2.81	5.70

TABLE 2.1 – Tableau de Strejc

Les méthodes de Broida et de Strejc ne fournissent pas une identification très précise des paramètres du système considéré mais les résultats obtenus sont suffisants pour l'élaboration des systèmes de régulation très performants.

2.3.3 La méthode des moments simples

Dans cette méthode, c'est une impulsion qui est utilisée comme signal test pour exciter les dynamiques du système à identifier. L'enregistrement de la réponse impulsionnelle du système à identifier fournit des informations nécessaires à l'identification des paramètres de sa structure.

Par définition, le moment d'ordre k d'une fonction $g(t)$, supposée la réponse impulsionnelle d'un système de fonction de transfert $G(p)$, est défini par la relation suivante [14] :

$$m_k = \int_0^{+\infty} t^k g(t) dt \quad (2.7)$$

D'autre part, la définition de la transformée de Laplace d'une fonction $g(t)$ est donnée par :

$$G(p) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt \quad (2.8)$$

Dans cette méthode, il s'agit de trouver les relations qui peuvent exister entre m_k et $G(p)$. Pour cela, on commence par considérer le cas où l'indice $k = 0$, ce qui

donne :

$$\text{Moment d'ordre zéro : } m_0 = \int_0^{+\infty} g(t)dt = G(p)|_{p=0}$$

Le moment d'ordre zéro représente la surface limitée par la courbe de $g(t)$ et l'axe des temps. En général on s'arrange pour avoir une surface unitaire ($m_0 = 1$)

$$\text{Moment d'ordre un : } m_1 = \int_0^{+\infty} tg(t)dt = -\frac{dG(p)}{dp}|_{p=0}$$

Il présente l'abscisse du centre de gravité de la surface en question. si celle-ci est unitaire.

$$\text{Moment d'ordre deux : } m_2 = \int_0^{+\infty} t^2g(t)dt = \frac{d^2G(p)}{d^2p}|_{p=0}$$

Il représente le moment d'inertie de la surface par rapport à l'origine.

D'une façon générale, le moment d'ordre k est donné par la forme générale suivante :

$$m_k = \int_0^{+\infty} t^k g(t)dt = (-1)^k \frac{d^k G(p)}{d^k p}|_{p=0} \quad (2.9)$$

Connaissant les valeurs numériques des différents moments, on peut déterminer les paramètres du système représenté par la fonction de transfert $G(p)$ et par conséquent le retard impliqué. Les valeurs numériques des différents moments peuvent être obtenues directement à partir de la courbe graphique représentant la réponse impulsionnelle du système ou par intégration successive de la réponse impulsionnelle analytique du système considéré.

En général, la réponse d'un système se rapproche de la réponse désirée, ce qui met en évidence la présence de certaines erreurs comme le montre la figure 2.3.

Pour forcer les deux réponses à se superposer et éliminer ou du moins diminuer ces erreurs on introduit un coefficient de pondération par l'intermédiaire d'une fonction exponentielle. Le terme de pondération est de la forme $e^{-\alpha t}$. Le coefficient α est appelé le coefficient de pondération.

Dans ces conditions, la définition des moments simples sera modifiée comme suit [15] :

$$m_k^\alpha = \int_0^{+\infty} t^k e^{-\alpha t} g(t)dt \quad (2.10)$$

D'une manière similaire à la procédure précédente, on aboutit à la relation

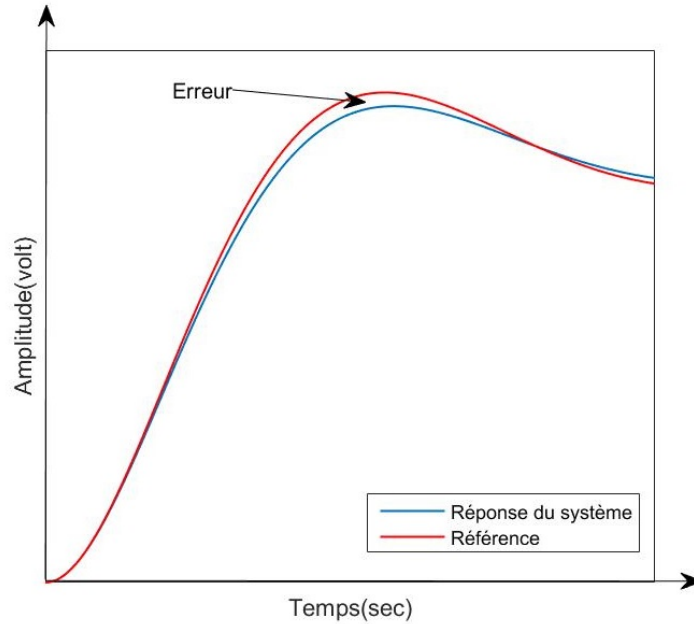


FIGURE 2.3 – Erreur entre la réponse du système et la réponse désirée

générale suivante pour les moments pondérés :

$$m_k^\alpha = \int_0^{+\infty} t^k e^{-\alpha t} g(t) dt = (-1)^k \frac{d^k G(p)}{d^k p} \Big|_{p=\alpha} \quad (2.11)$$

2.3.4 La méthode des moments fonctionnels de Poisson

En analysant la définition des moments pondérés, relation (2.10), on remarque qu'elle contient le début de la fonction de Poisson. Par conséquent, en modifiant la relation précédente de la manière suivante, on obtient la définition des moments fonctionnels de Poisson [16], [17] :

$$m_k^\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t} g(t) dt \quad (2.12)$$

Dans ce cas, la fonction de Poisson agit comme une fonction de pondération de la réponse impulsionnelle $g(t)$. Par conséquent, la définition des moments fonctionnels de Poisson peut s'écrire :

$$m_k^\alpha = \int_0^{+\infty} P_k(t) g(t) dt \quad (2.13)$$

avec la fonction de Poisson

$$P_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t} \quad (2.14)$$

En procédant de la même manière que précédemment, on obtient la relation générale suivante :

$$m_k^\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t} g(t) dt = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k G(p)}{d^k p} \Big|_{p=\alpha} \quad (2.15)$$

Dans la définition des moments fonctionnels de Poisson, on peut retarder la fonction de Poisson par rapport à la réponse impulsionnelle du système. On obtient alors l'intégrale du produit de convolution qui peut être relié au produit des transformées de Laplace des deux fonctions comme suit :

$$m_k^\alpha = \int_0^\tau P_k(\tau - t) g(t) dt = TL^{-1} [P_k(p) G(p)] \quad (2.16)$$

avec

$$P_k(p) = TL[P_k(t)] = \frac{1}{(p + \alpha)^{k+1}} \quad (2.17)$$

On remarque, relation (2.17), que la transformée de Laplace de la fonction de Poisson est une cascade de filtres du premier ordre. Par conséquent, son application à un signal quelconque $s(t)$ permet d'effectuer un filtrage de ce signal comme le montre la figure 2.4.

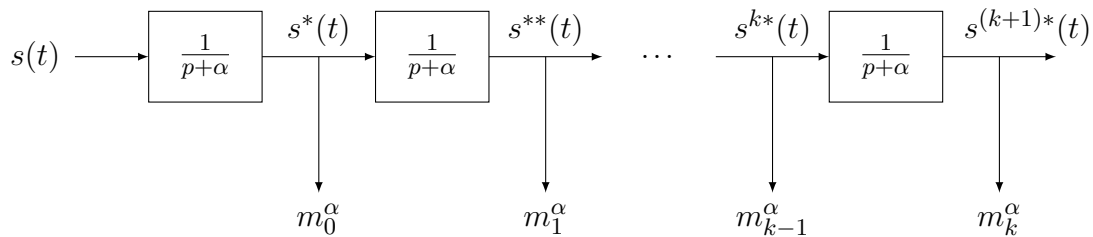


FIGURE 2.4 – Filtrage d'un signal par la fonction de Poisson

Donc, pour un signal $y(t)$, on peut appliquer le filtre de Poisson comme suit :

$$y(t) \rightarrow P_k[y(t)] = \int_0^\tau P_k(\tau - t) y(t) dt = TL^{-1} [P_k(p) Y(p)] \quad (2.18)$$

Le filtre de Poisson peut aussi être appliqué aux différentes dérivées du signal $y(t)$ comme suit :

$$P_k \left[\frac{dy}{dt} \right] = \int_0^\tau P_k(\tau - t) \frac{dy(t)}{dt} dt \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} &= TL^{-1} \left[P_k(p)(pY(p) - y(0^+)) \right] \\ &= TL^{-1} [pP_k(p)Y(p)] - TL^{-1} [P_k(p)y(0^+)] \\ &= TL^{-1} \left[\frac{p}{(p+\alpha)^{k+1}} Y(p) \right] - P_k(\tau)y(0^+) \end{aligned} \quad (2.20)$$

La décomposition en éléments simples du premier terme de droite conduit à :

$$P_k \left[\frac{dy}{dt} \right] = TL^{-1} \left[\left(\frac{C_1}{(p+\alpha)^{k+1}} + \frac{C_2}{(p+\alpha)^k} \right) Y(p) \right] - P_k(\tau)y(0^+) \quad (2.21)$$

En utilisant la méthode d'identification terme à terme, on détermine les constantes C_1 et C_2 comme suit :

$$\frac{C_1}{(p+\alpha)^{k+1}} + \frac{C_2}{(p+\alpha)^k} = \frac{p}{(p+\alpha)^{k+1}} \quad (2.22)$$

$$\frac{C_1 + C_2(p+\alpha)}{(p+\alpha)^{k+1}} = \frac{p}{(p+\alpha)^{k+1}} \quad (2.23)$$

Par comparaison, on obtient : $C_1 + C_2\alpha = 0 \implies C_1 = -C_2\alpha$

Et : $C_2p = p \implies C_2 = 1 \implies C_1 = -\alpha$

D'après la transformée de Laplace

$$TL^{-1} \left[-\alpha \frac{Y(p)}{(p+\alpha)^{k+1}} \right] = -\alpha m_k^\alpha \quad (2.24)$$

et

$$TL^{-1} \left[\frac{Y(p)}{(p+\alpha)^k} \right] = m_{k-1}^\alpha \quad (2.25)$$

$$TL^{-1} \left[\left(\frac{-\alpha}{(p+\alpha)^{k+1}} + \frac{1}{(p+\alpha)^k} \right) Y(p) \right] = -\alpha m_k^\alpha + m_{k-1}^\alpha \quad (2.26)$$

$$\implies P_k \left[\frac{dy}{dt} \right] = -\alpha m_k^\alpha + m_{k-1}^\alpha - P_k(\tau)y(0^+) \quad (2.27)$$

— Le calcul de $P_k \left[\frac{d^2y}{dt^2} \right]$

$$P_k \left[\frac{d^2y}{dt^2} \right] = TL^{-1} \left[P_k(p) \left[p^2Y(p) - py(0^+) - \frac{dy}{dt}(0^+) \right] \right] \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} P_k \left[\frac{d^2y}{dt^2} \right] = & TL^{-1} \left[\left(\frac{C_1}{(p+\alpha)^{k+1}} + \frac{C_2}{(p+\alpha)^k} + \frac{C_3}{(p+\alpha)^{k-1}} \right) Y(p) \right] - TL^{-1} [pP_k(p)y(0^+)] \\ & - TL^{-1} \left[P_k(p) \frac{dy}{dt}(0^+) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

On calcule C_1 , C_2 et C_3 en utilisant la méthode qu'on a utilisé dans (2.22) et on obtient : $C_1 = \alpha^2$, $C_2 = -2\alpha$ et $C_3 = 1$

$$\begin{aligned} P_k \left[\frac{d^2y}{dt^2} \right] = & TL^{-1} \left[\left(\frac{\alpha^2}{(p+\alpha)^{k+1}} - \frac{2\alpha}{(p+\alpha)^k} + \frac{1}{(p+\alpha)^{k-1}} \right) Y(p) \right] + \alpha P_k(\tau)y(0^+) \\ & - P_{k-1}(\tau)y(0^+) - P_k(\tau)y'(0^+) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$P_k \left[\frac{d^2y}{dt^2} \right] = \alpha^2 m_k^\alpha - 2\alpha m_{k-1}^\alpha + m_{k-2}^\alpha + \alpha P_k(\tau)y(0^+) - P_{k-1}(\tau)y(0^+) - P_k(\tau)y'(0^+) \quad (2.31)$$

$$\text{On a : } P_k(\tau) = \frac{\tau^k}{k!} e^{-\alpha\tau}$$

Les relations (2.18)-(2.31) montrent qu'on peut appliquer la méthode aux systèmes représentés par des équations différentielles et par conséquent aux systèmes à représentation d'état.

En effet, pour un système modélisé dans l'espace d'état comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX\end{aligned}\tag{2.32}$$

l'application de l'opérateur de Poisson donne :

$$P_k[\dot{X}] = AP_k[X] + BP_k[U]\tag{2.33}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} \Rightarrow P_k[\dot{X}] = \begin{bmatrix} P_k[\dot{x}_1] \\ P_k[\dot{x}_2] \\ \vdots \\ P_k[\dot{x}_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha m_1^{x_1} + m_0^{x_1} - P_1(\tau)x_1(0^+) \\ -\alpha m_2^{x_2} + m_1^{x_2} - P_2(\tau)x_2(0^+) \\ \vdots \\ -\alpha m_k^{x_k} + m_{k-1}^{x_k} - P_k(\tau)x_k(0^+) \end{bmatrix}\tag{2.34}$$

$$P_k[X] = \begin{bmatrix} P_k[x_1] \\ P_k[x_2] \\ \vdots \\ P_k[x_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^x \\ m_2^x \\ \vdots \\ m_k^x \end{bmatrix}, \quad P_k[U] = \begin{bmatrix} P_k[u_1] \\ P_k[u_2] \\ \vdots \\ P_k[u_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^u \\ m_2^u \\ \vdots \\ m_k^u \end{bmatrix}\tag{2.35}$$

En remplaçant dans l'équation (2.33), on obtient la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} -\alpha m_1^{x_1} + m_0^{x_1} - P_1(\tau)x_1(0^+) \\ -\alpha m_2^{x_2} + m_1^{x_2} - P_2(\tau)x_2(0^+) \\ \vdots \\ -\alpha m_k^{x_k} + m_{k-1}^{x_k} - P_k(\tau)x_k(0^+) \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} m_1^x \\ m_2^x \\ \vdots \\ m_k^x \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} m_1^u \\ m_2^u \\ \vdots \\ m_k^u \end{bmatrix}\tag{2.36}$$

De la même manière connaissant les différents moments, on peut alors identifier les paramètres et le retard.

2.3.5 La méthode des ondelettes de Poisson

Le terme "d'ondelette de Poisson" est utilisé pour désigner une famille d'ondelettes marquées par l'ensemble des nombres entiers positifs associés à la distribution de probabilité de Poisson.

Dans un autre contexte, le terme se réfère à une certaine ondelette qui implique une forme de la fonction de Poisson [18]. La terminologie est aussi utilisée pour décrire une famille d'ondelettes complexes indexées par des entiers positifs qui sont reliés avec les dérivés de la fonction de Poisson [19]-[21].

La transformée en ondelettes de Poisson a été appliquée dans l'analyse multi-résolution, l'identification du système et l'estimation des paramètres. Elle est particulièrement utile dans l'étude des problèmes dans lesquels les fonctions du domaine temporel sont constituées de combinaisons linéaires de fonctions de type exponentielles avec retard.

L'identification des systèmes avec retard par la méthode des ondelettes de Poisson présente les avantages suivants [22] :

1. Les paramètres des systèmes continus sont estimés directement.
2. L'estimation du retard et de la constante de temps est découplée.
3. Le retard peut être estimé sans connaître l'ordre du système.
4. L'ordre du système peut être vérifié.

On rappelle que la distribution de Poisson, pour une variable aléatoire discrète X , de paramètre α (moyenne) et k (nombre entier non négatif de réalisation de X) est donnée par :

$$Prob[X = k] = P_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t} \quad (2.37)$$

où $P_k(t)$ est la fonction de distribution de Poisson.

L'ondelette de Poisson est définie par la différence suivante [22] :

$$\Psi_k(t) = P_k(t) - P_{k-1}(t) \quad (2.38)$$

En effet, nous avons :

$$\text{Pour } k = 1 : \Psi_1(t) = P_1(t) - P_0(t) = (t - 1)e^{-\alpha t}$$

$$\text{Pour } k = 2 : \Psi_2(t) = P_2(t) - P_1(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t)e^{-\alpha t}$$

$$\text{Pour } k = 3 : \Psi_3(t) = P_3(t) - P_2(t) = \frac{1}{6}(t^3 - 3t^2)e^{-\alpha t}$$

$$\text{Pour } k = 4 : \Psi_4(t) = P_4(t) - P_3(t) = \frac{1}{24}(t^4 - 4t^3)e^{-\alpha t}$$

$$\text{Pour } k = 5 : \Psi_5(t) = P_5(t) - P_4(t) = \frac{1}{120}(t^5 - 5t^4)e^{-\alpha t}$$

Pour $k = 6$: $\Psi_6(t) = P_6(t) - P_5(t) = \frac{1}{720}(t^6 - 6t^5)e^{-\alpha t}$

Pour $k = 7$: $\Psi_7(t) = P_7(t) - P_6(t) = \frac{1}{5040}(t^7 - 7t^6)e^{-\alpha t}$

D'une façon générale :

$$\Psi_k(t) = \frac{1}{k!}(t^k - kt^{k-1})e^{-\alpha t} \quad (2.39)$$

L'ondelette de Poisson $\Psi_k(t)$ est alors la différence retardée des valeurs de la distribution de Poisson. Elle peut aussi être définie comme :

$$\Psi_k(t) = \left(\frac{t-k}{k!}\right)t^{k-1}e^{-\alpha t}; \quad t \geq 0 \quad (2.40)$$

L'ondelette de Poisson $\Psi_k(t)$ pour $\alpha = 1$ peut être exprimée par :

$$\Psi_k(t) = -\frac{d}{dt}P_k(t) \quad (2.41)$$

La figure 2.5 présente une famille d'ondelettes de Poisson pour $k = 1, 2, 3, 4$

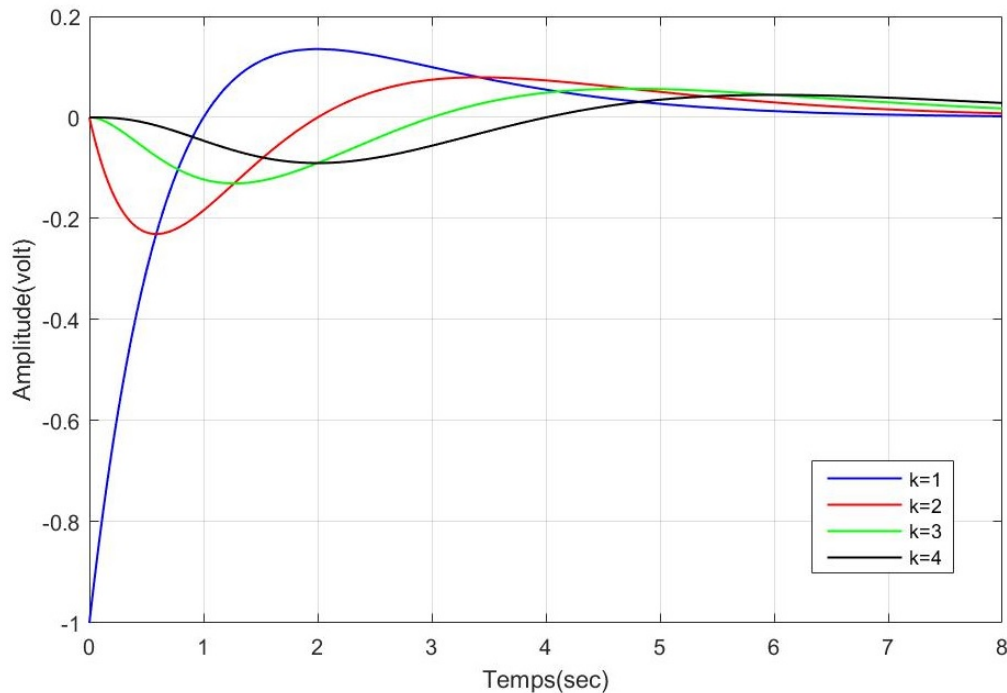


FIGURE 2.5 – Famille d'ondelettes de Poisson pour $k=1,2,3,4$

Si $s(t)$ est un signal de fonction intégrable sur \mathbb{R} , alors sa transformée de Fourier

(TF) est donnée par la formule :

$$TF[s(t)] = S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.42)$$

avec $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence.

Par application de la transformée de Fourier de l'ondelette de Poisson $\Psi_k(t)$ pour $\alpha = 1$ et selon le développement effectué en relation (2.38), on aboutit à la relation suivante :

$$\Psi_k(w) = \frac{-jw}{(1+jw)^{k+1}} \quad (2.43)$$

C'est une cascade de filtre du premier ordre composée d'une alternance de filtre passe bas passe haut.

La constante de recevabilité associée à l'ondelette $\Psi_k(t)$ est définie par :

$$C_{\Psi_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi_k(w)|^2}{|w|} dw = \frac{1}{k} \quad (2.44)$$

Remarque 2.1. *L'ondelette de Poisson n'est pas une famille orthogonale d'ondelettes par conséquent $\Psi_l(w)\Psi_k(w) \neq 0$*

La transformée en ondelettes de Poisson d'un signal $s(t)$ défini dans le domaine temporel est donnée par :

$$W_k[s(t)](\lambda, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\Psi_k\left(\frac{t-\lambda}{\beta}\right) dt \quad (2.45)$$

où λ et β sont les paramètres de l'ondelette de Poisson.

L'expression analytique de l'ondelette de Poisson est obtenue pour la réponse indicielle d'un système du premier ordre, après élimination du régime permanent. Dans ces conditions la réponse indicielle $s(t)$ du système est donnée par :

$$s(t) = \begin{cases} -Ke^{-\frac{t-\tau}{T}} & \text{pour } t \geq \tau \\ -K & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (2.46)$$

Démonstration. soit un système du premier ordre de fonction de transfert $F(p) =$

$\frac{K}{1+Tp} = \frac{S(p)}{U(p)}$, alors :

$$S(p) = \frac{K}{T} \frac{1}{p + \frac{1}{T}} U(p) = \frac{K}{T} \frac{1}{p + \frac{1}{T}} \frac{1}{p} = \frac{A}{p + \frac{1}{T}} + \frac{B}{p} \quad (2.47)$$

En identifiant les termes A et B , on obtient :

$$S(p) = \frac{-K}{p + \frac{1}{T}} + \frac{K}{p} \quad (2.48)$$

Par conséquent, la réponse indicielle est la transformée inverse de Laplace de $S(p)$ qui est :

$$s(t) = TL^{-1}[S(p)] = K \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right) \quad (2.49)$$

En introduisant le retard, la réponse indicielle devient :

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} \right) \quad (2.50)$$

En éliminant le régime permanent, on obtient :

$$s(t) = -K e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} \quad (2.51)$$

□

Puisque $\Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) = 0$ pour $\lambda > t$, la limite inférieure de l'intégrale peut être remplacée par λ comme suit :

$$W_k[s(t)](\lambda, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{\lambda}^{+\infty} s(t) \Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) dt \quad (2.52)$$

La valeur de λ détermine les régions pour lesquelles l'intégrale doit être évaluée.

Lorsque $\lambda \geq 0$, deux possibilités se présentent :

- $\lambda \geq \tau$ l'intégrale n'est pas divisée en deux parties, car seule la région de $s(t)$ où $t \geq \tau$ entre en vigueur.
- $\lambda < \tau$ l'intégrale est divisée en deux parties, car $s(t)$ est différente pour $t < \lambda$ et $t \geq \tau$

Par conséquent, W_k est divisée en deux régions de λ ; $\lambda \geq \tau$ et $0 \leq \lambda \leq \tau$ comme

suit :

$$W_k = -\frac{K}{\sqrt{\beta}} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} \Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) dt \quad \text{pour } \lambda \geq \tau \quad (2.53)$$

$$W_k = -\frac{K}{\sqrt{\beta}} \int_{\lambda}^{\tau} \Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) dt - \frac{K}{\sqrt{\beta}} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} \Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) dt \quad \text{pour } 0 \leq \lambda < \tau \quad (2.54)$$

En posant :

$$C_1 = -\frac{K}{\sqrt{\beta}} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} \Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) dt \quad (2.55)$$

$$C_2 = -\frac{K}{\sqrt{\beta}} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} \Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) dt \quad (2.56)$$

$$C_3 = -\frac{K}{\sqrt{\beta}} \int_{\lambda}^{\tau} \Psi_k \left(\frac{t-\lambda}{\beta} \right) dt \quad (2.57)$$

Par conséquent, la transformée en ondelette de Poisson se réduit à :

$$W_k = \begin{cases} C_1 & \text{pour } \lambda \geq \tau \\ C_2 + C_3 & \text{pour } 0 \leq \lambda < \tau \end{cases} \quad (2.58)$$

Les intégrales sont évaluées pour obtenir les expressions suivantes pour les C_1 , C_2 et C_3

$$C_1 = \frac{K\sqrt{\beta}e^{-\frac{(\lambda-\tau)}{T}} \left(\frac{\beta}{T}\right)}{\left(1 + \frac{\beta}{T}\right)^{k+1}} \quad (2.59)$$

$$C_2 = -\frac{K\sqrt{\beta}e^{\frac{(\lambda-\tau)}{\beta}}}{\left(1 + \frac{\beta}{T}\right)} \left[\frac{\left(\frac{-(\lambda-\tau)}{\beta}\right)^k}{k!} - \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{-(\lambda-\tau)}{\beta}\right)^h \left(1 + \frac{\beta}{T}\right)^h \left(\frac{\beta}{T}\right)}{h! \left(1 + \frac{\beta}{T}\right)^k} \right] \quad (2.60)$$

$$C_3 = K\sqrt{\beta} \left[\frac{\left(\frac{\tau-\lambda}{\beta}\right)^k}{k!} e^{-\left(\frac{\tau-\lambda}{\beta}\right)} \right] \quad (2.61)$$

En remplaçant ces termes, l'expression analytique est obtenue :

$$W_k = \frac{K\sqrt{\beta} e^{-\frac{|\lambda-\tau|}{T}} \left(\frac{\beta}{T}\right)}{\left(1 + \frac{\beta}{T}\right)^{k+1}} \quad \text{pour } \lambda \geq \tau \quad (2.62)$$

$$W_k = -\frac{K\sqrt{\beta} e^{\frac{|\lambda-\tau|}{T}}}{\left(1 + \frac{\beta}{T}\right)} \left[\frac{\left(\frac{|\lambda-\tau|}{\beta}\right)^k}{k!} - \frac{\frac{\beta}{T}}{\left(1 + \frac{\beta}{T}\right)^k} \left(\sum_{h=0}^{k-1} \frac{\left(1 + \frac{\beta}{T}\right)^h}{h!} \left(\frac{|\lambda-\tau|}{\beta}\right)^h \right) \right] \\ + K\sqrt{\beta} \left[\frac{\left(\frac{|\tau-\lambda|}{\beta}\right)^k}{k!} e^{-\left(\frac{|\tau-\lambda|}{\beta}\right)} \right] \quad \text{pour } 0 \leq \lambda < \tau \quad (2.63)$$

L'analyse de la sensibilité de l'ondelette de Poisson par rapport à ses paramètres λ et β donne un aperçu très utile et conduit à certaines expressions permettant l'estimation du retard et de la constante de temps. Pour plus de détails voir [22].

2.3.6 Méthodes d'approximation du retard

L'intérêt principal de ces méthodes réside dans l'espoir de traiter un système de dimension infini comme un système de dimension fini. Plusieurs approximations peuvent être utilisées, parmi lesquelles, on cite l'approximation polynomiale [23], [24], l'approximation de Padé [25]-[27] et l'approximation de Laguerre [26], [28], [29].

L'approximation polynomiale : Il s'agit d'approcher la fonction exponentielle contenant le paramètre de retard par un polynôme. Plusieurs polynômes sont proposés dans la littérature [30] pour répondre à cet objectif, le plus simple étant le développement de Taylor :

$$e^{-\tau p} \cong 1 - \tau p + \frac{\tau^2}{2!} p^2 - \frac{\tau^3}{3!} p^3 + \frac{\tau^4}{4!} p^4 - \frac{\tau^5}{5!} p^5 + \dots \quad (2.64)$$

L'approximation de Padé : Elle est définie par un quotient de polynômes de degré n au dénominateur et au numérateur. La forme générale est donnée

par :

$$e^{-\tau p} \cong \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k C_k \tau^k p^k}{\sum_{k=0}^n C_k \tau^k p^k} \quad (2.65)$$

avec $C_k = \frac{(2n-k)!n!}{2n!k!(n-k)!}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

L'approximation de Laguerre : l'approximation de Laguerre de la fonction exponentielle a la forme suivante :

$$e^{-\tau p} \cong \frac{e^{-\tau \frac{p}{2}}}{e^{\tau \frac{p}{2}}} \cong L_n(p) = \frac{\left(1 - \tau \frac{p}{2n}\right)^n}{\left(1 + \tau \frac{p}{2n}\right)^n} \quad (2.66)$$

avec $L_n(p)$ est le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Laguerre.

L'approximation de Laguerre-Fourier : Elle est donnée par :

$$e^{-\tau p} \cong \left(1 - \frac{\tau p}{2n}\right)^n \quad (2.67)$$

L'approximation de Kautz : L'approximation de Kautz d'ordre n de la fonction exponentielle est la suivante :

$$e^{-\tau p} \cong \left(1 - \frac{\tau p}{2n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau p}{2n}\right)^2\right)^n \quad (2.68)$$

2.4 Conclusion

On peut dire que la présence du retard rend le problème d'identification plus complexe. La difficulté vient de la manière selon laquelle apparaît le retard dans le système. Ce retard peut être constant, variable ou fonction de l'état du système ce qui rend le système considéré non linéaire et augmente la difficulté d'identification.

Dans ce chapitre on a rappelé les méthodes classiques d'identification des systèmes du premier et du second ordre par les techniques graphiques utilisant la réponse indicielle et impulsionnelle. Un bref aperçu de quelques méthodes récentes se basant sur la notion de moments est aussi présenté.

L'avantage des méthodes d'identification graphiques est qu'elles sont simples lorsqu'on dispose de la réponse indicielle obtenue dans un contexte non ou peu

bruité. Néanmoins, ces méthodes sont imprécises (détermination du point d'inflexion pour les deux premières méthodes), se limitent à une classe de modèle, nécessitent des signaux de grandes amplitudes, sensibles aux perturbations et possèdent des procédures longues. De plus, leur principal inconvénient est la nécessité de déconnecter le système de son environnement (méthodes en boucle ouverte) et d'attendre que le système soit au repos.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes à retards

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différentes méthodes d'étude de stabilité des systèmes à retards dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel, nous présenterons les méthodes qui dépendent de l'information sur le retard et les méthodes qui sont indépendantes du retard. Les méthodes basées sur l'utilisation des inégalités matricielles linéaires occupent une place très importante dans ce chapitre. Avant d'aborder ceci, nous allons commencer par donner les généralités et définitions nécessaires à l'étude de la stabilité des systèmes à retards.

3.2 Généralités et définitions

La stabilité d'un point d'équilibre d'un système avec ou sans retard, consiste toujours à observer si l'évolution du système reste proche du point d'équilibre lorsqu'on l'écarte d'un certain voisinage autour du point d'équilibre. La stabilité asymptotique, garantit la condition précédente, mais encore, au bout d'un temps plus long et éventuellement infini. Elle indique que le système reviendra exactement au point d'équilibre, si le système s'en écarte 'légèrement'. La stabilité exponentielle garantit, quant à elle, non seulement le caractère asymptotique mais aussi la rapidité de la convergence.

Ces définitions peuvent être, également, exprimées de manière mathématique.

Pour cela, considérons à nouveau le cas des systèmes à retards décrits par un modèle général de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t(\theta)), \quad t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) &= \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $f(t, 0) = 0$ et $x_t(\cdot)$ pour $t \geq t_0$ donné, représente la restriction de $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$ translaté sur $[-\tau, 0]$ tel que :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (3.2)$$

Hypothèses de travail :

1. L'application $f(t, \phi) : \mathbb{R}_+ \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et Lipschitzienne en la deuxième variable ϕ avec $f(t, 0) = 0$.
2. $x(t, t_0, \phi(\cdot)) = x_{(t_0, \phi)}(\cdot)$ représente la solution de l'équation différentielle fonctionnelle avec la condition initiale $(t_0, \phi) \in C$.

Nous pouvons, à présent, introduire l'ensemble des définitions suivantes [12] :

Définition 3.1. *La solution triviale $x(t) = 0$ est dite stable si, pour n'importe quel nombre $k > 0$ et pour n'importe quel instant initial t_0 , il existe une boule $\delta(t_0, k)$ telle que pour toutes les valeurs initiales $\phi \in \beta(0, \delta)$, la solution $x(t_0, \phi)$ satisfait $x_t(t_0, \phi) \in \beta(0, k)$ pour tout $t \geq t_0$. Avec $\beta(0, \delta)$, où $\delta > 0$ est un voisinage de l'origine.*

Définition 3.2. *La solution triviale $x(t) = 0$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe un $b_0(t_0) > 0$ tel que, pour toutes les valeurs initiales $\phi \in \beta(0, b_0)$, la solution $x(t_0, \phi)$ satisfait $x_t(t_0, \phi) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.*

Définition 3.3. *La solution triviale $x(t) = 0$ est dite uniformément stable si, pour n'importe quel $k > 0$ et pour n'importe quel t_0 , il existe un $\delta(k)$ indépendant de t_0 tel que, pour toutes les valeurs initiales $\phi \in \beta(0, \delta)$, la solution $x(t_0, \phi)$ satisfait $x_t(t_0, \phi) \in \beta(0, k)$ pour tout $t \geq t_0$.*

Définition 3.4. *La solution triviale $x(t) = 0$ est dite exponentiellement stable avec un taux de décroissance α , s'il existe un $M > 0$ et un $\alpha > 0$ tels que, pour n'importe quelle condition initiale ϕ avec $\|\phi\|_c \leq v_0 \leq v$, la solution $x(t_0, \phi)$ satisfait l'inégalité :*

$$\|x_t(t_0, \phi(\theta))\| \leq M e^{-\alpha(t-t_0)} \|\phi\|_c, \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (3.3)$$

3.3 Étude de la stabilité au sens de Lyapunov

L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov se base sur l'utilisation de la seconde méthode de Lyapunov, appelée également méthode directe, qui consiste à rechercher l'existence d'une fonction $V(t, x(t))$ définie positive telle que sa dérivée soit définie négative. Une telle méthode peut être appliquée sans modification majeure aux systèmes à retards. Cependant celle-ci présente, dans le cas général, un inconvénient majeur qui est d'imposer des conditions sévères sur le système pour montrer que la dérivée de la fonction de Lyapunov calculée le long des trajectoires est négative. Cette méthode est donc difficilement exploitable pour de nombreux cas de systèmes à retards. Deux extensions de la seconde méthode de Lyapunov ont alors été développées d'un côté par Krasovskii [31] et, de l'autre par Razumikhin [32].

3.3.1 Approche de Krasovskii

La méthode de Krasovskii est une extension de la seconde méthode de Lyapunov pour les équations différentielles fonctionnelles. Elle consiste à rechercher des fonctionnelles $V(t, x_t)$ qui décroissent le long des solutions du système à retards modélisé par les relations (3.1).

Théorème 3.1. [31] Soient u, v et $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes, telles que $u(\theta)$ et $v(\theta)$ soient strictement positives pour tout $\theta > 0$.

Supposons que le champ de vecteur f de (3.1) est borné pour des valeurs bornées de ses arguments. S'il existe une fonctionnelle continue $V : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$ pour tout $t \geq t_0$ le long des trajectoires de (3.1), alors la solution de (3.1) est uniformément stable.

Si de plus $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$, alors la solution de (3.1) est uniformément asymptotiquement stable.

Si V vérifie plutôt les conditions :

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$ pour tout $t \geq t_0$ et $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$
3. V est Lipschitzienne par rapport à son second argument,

alors la solution de (3.1) est exponentiellement stable.

Une telle fonctionnelle V est appelée fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. L'idée principale de ce théorème est donc de déterminer une fonctionnelle V définie positive dont la dérivée le long des trajectoires de (3.1) est définie négative. Le principal problème dans l'application de ce théorème est la conception, lorsqu'elle existe, de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.

Les fonctionnelles recherchées sont généralement de la forme suivante :

$$\begin{aligned} V(t, \phi) = & \phi^T(0)P(t)\phi(0) + \phi^T(0) \left(\int_{-\tau}^0 Q(t, \sigma)\phi(\sigma)d\sigma \right) + \left(\int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)Q^T(t, \sigma)d\sigma \right) \phi(0) \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)R(t, \sigma, p)\phi(p)d\sigma dp + \int_{-\tau}^0 \phi^T(\zeta)S(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta \end{aligned} \quad (3.4)$$

où P , Q , R et S sont des matrices carrées de dimension $n \times n$. $P(t)$ et $S(\zeta)$ sont symétriques définies positives. R vérifie $R(t, \sigma, p) = R^T(t, p, \sigma)$. On suppose que chacun des éléments de ces matrices est borné et admet une dérivée continue par morceaux et bornée.

Dans la pratique, la recherche de ces fonctions pose des problèmes difficiles à résoudre. On préfère se restreindre aux fonctionnelles dont les fonctions matricielles P , Q et R sont des matrices constantes. On se propose alors de trouver une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii de la forme :

$$\begin{aligned} V(t, \phi) = & \phi^T(0)P\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)S\phi(\sigma)d\sigma + \phi^T(0) \int_{-\tau}^0 Q\phi(\sigma)d\sigma \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \phi^T(\sigma)R\phi(\sigma)d\sigma dp \end{aligned} \quad (3.5)$$

où les matrices P , Q , R et S sont symétriques définies positives.

3.3.2 Approche de Razumikhin

Dans cette approche, on considère une fonction de Lyapunov $V(t, x(t))$ classique pour les équations différentielles ordinaires. Toutefois le théorème suivant montre qu'il est inutile de vérifier que $\dot{V}(t, x(t)) \leq 0$ le long de toutes les trajectoires du système. Effectivement, ce test peut se restreindre aux solutions qui ont tendance à quitter un voisinage de $V(t, x(t)) \leq c$ du point d'équilibre.

Théorème 3.2. [32] Soient u , v et $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes, telles

que $u(\theta)$ et $v(\theta)$ soient strictement positives pour tout $\theta > 0$. Supposons que le champ de vecteur f de (3.1) est borné pour des valeurs bornées de ses arguments. Si, il existe une fonction continue $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$ pour toutes les trajectoires vérifiant : $V(t+\theta, \phi(t+\theta)) \leq V(t, \phi(t))$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$,

alors la solution de (3.1) est uniformément stable.

Si de plus $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$ et s'il existe une fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ strictement croissante avec $p(\theta) > \theta$ pour tout $\theta > 0$ telle que :

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$ pour tout $t \geq t_0$ et $w(\theta) > 0$ pour toutes les trajectoires de (3.1) vérifiant : $V(t+\theta, x(t+\theta)) \leq pV(t, x(t))$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$,

alors une telle fonction V est appelée fonction de Lyapunov-Razumikhin et la solution de (3.1) est uniformément asymptotiquement stable.

Dans la pratique, les fonctions p les plus souvent utilisées sont celles de la forme $p = q\theta$ où q est une constante strictement supérieure à 1. De plus les fonctions de Lyapunov recherchées dans l'approche de Razumikhin sont souvent des fonctions quadratiques de la forme :

$$V(t) = x^T(t)Px(t) \quad (3.6)$$

où P est une matrice symétrique définie positive.

La condition (2) devient la plupart du temps :

$$x^T(t+\theta)Px(t+\theta) \leq qx^T(t)Px(t), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \text{ et } q > 1 \quad (3.7)$$

Ainsi dans l'approche de Lyapunov-Razumikhin, la négativité n'est requise que pour les trajectoires qui, à l'instant t , appartiennent à un certain espace défini par l'évolution du système sur l'intervalle $[t-\tau, t]$.

Même si l'approche Lyapunov-Razumikhin conduit généralement à des résultats plus conservatifs que ceux tirés de l'approche de Lyapunov-Krasovskii, présentée au paragraphe précédent, elle permet de prendre en compte des retards variables sans restriction sur la dérivée du retard. Il a par ailleurs été montré que, pour des retards constants, l'existence d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin entraîne celle d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Cependant, dans la littérature, la

stabilité des systèmes à retards fait plus généralement appel à des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

Dans tout ce qui suit nous nous intéressons uniquement aux fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards.

Les approches pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards à base de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii se divisent en deux classes. Dans la première classe, on trouve les approches qui établissent des conditions de stabilité indépendantes du retard alors que les approches de la deuxième classe s'intéressent aux conditions de stabilité dépendantes du retard impliqué dans le système considéré.

3.4 Stabilité indépendante/dépendante du retard

Afin d'appréhender les notions d'indépendance/dépendance de la stabilité vis-à-vis du retard et les méthodes d'analyse qui en découlent, considérons un système linéaire à état retardé décrit par le modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (3.8)$$

avec la condition initiale $x(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ où τ est le retard du système, supposé constant et incertain, autrement dit, le retard est supposé connu dans un intervalle borné.

Considérons également le système régi par (3.8) sans retard ($\tau = 0$) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ce système est asymptotiquement stable si la matrice $(A + A_d)$ est stable au sens d'Hurwitz (valeurs propres négatives ou à parties réelles négatives).

Si le retard existe alors deux possibilités sont envisageables à savoir :

1. La stabilité asymptotique est assurée pour toutes les valeurs positives du retard τ , et, dans ce cas, la stabilité est qualifiée d'indépendante de la taille du retard.
2. Il existe une valeur non nulle τ^* telle que le système est asymptotiquement

stable pour n'importe quel retard positif τ tel que $0 \leq \tau < \tau^*$, et le système devient instable pour $\tau = \tau^*$. Dans ce cas, la stabilité est dite dépendante de la taille du retard.

De telles notions ont donné lieu à l'établissement de différents critères de stabilité, à savoir :

1. Les critères de stabilité indépendants de la taille du retard qui s'avèrent particulièrement adaptés à l'étude de la stabilité des systèmes dont le retard n'est absolument pas connu et peut prendre une grande valeur.
2. Les critères dépendants du retard qui permettent de garantir la stabilité pour tout retard inférieur à une valeur maximale en dessous de laquelle le système est toujours stable

Les premières études sur la stabilité des systèmes à retards ont principalement été portées sur la stabilité indépendante de la taille du retard. Puis, plus tard de nombreux critères de stabilité dépendants de la taille du retard ont été établis dans le but de réduire le conservatisme des résultats obtenus. Les approches alors utilisées dans ces derniers travaux ont été fondées sur les théorèmes de Lyapunov-Krasovskii ou de Lyapunov-Razumikhin, associés avec l'établissement de conditions à base d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). La section suivante est alors consacrée à l'exposé de certains résultats relatifs à ces approches.

3.4.1 Notion de stabilité indépendante du retard

Afin d'appréhender la notion de stabilité indépendante du retard, rappelons que le système est dit stable indépendamment de la taille du retard si, quelle que soit la valeur du retard $\tau \geq 0$ (constant), il reste stable [33]-[36]. Dans ce cas, l'analyse de la stabilité peut ainsi directement porter sur le système d'origine. Pour mieux comprendre cette particularité, considérons le système (3.8), pour lequel le choix classique de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est le suivant [12] :

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+\theta)Sx(t+\theta)d\theta \quad (3.10)$$

La stabilité asymptotique du système est alors garantie par la proposition suivante. Le système (3.8) est asymptotiquement stable $\forall \tau \geq 0$ s'il existe deux matrices

symétriques et définies positives P et S telles que LMI suivante soit satisfaite :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PA_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

Remarque 3.1. *Le retard τ n'apparaît pas explicitement dans la condition LMI (3.11), ce qui justifie l'appellation de critère indépendant de la taille du retard.*

Signalons que des résultats similaires avec une transformation de l'inégalité matricielle en équation de Riccati ont été établis. Soit S une matrice symétrique et définie positive. Si l'équation de Riccati :

$$A^T P + PA + PA_d S^{-1} A_d^T P + S = 0 \quad (3.12)$$

possède une solution $P = P^T \geq 0$, alors le système est asymptotiquement stable indépendamment du retard.

Il est nécessaire de souligner, qu'à l'instar du problème de traitement des incertitudes (structurées ou non) que l'on rencontre dans le cadre de la synthèse de commandes robustes (notamment, le cadre de l'approche H_∞), stabiliser un système à retards quelle que soit la valeur du retard conduit inéluctablement à des résultats conservatifs, c'est-à-dire un nombre important de conditions, ce qui augmente le temps de calcul et par conséquent le temps de retard dans l'exécution de la commande stabilisante, par exemple. Afin de diminuer ce conservatisme, il apparaît alors préférable d'imposer une condition sur la taille du retard, ce qui conduit alors à la notion de critères de stabilité dépendants de la taille du retard présentée dans la section suivante.

3.4.2 Notion de stabilité dépendante du retard

Comme déjà mentionné, la notion de stabilité dépendante du retard est basée sur la considération d'une limitation de la taille du retard dans un intervalle fermé, pour lequel il est possible de garantir la stabilité du système. Dans ce cadre, contrairement à l'approche indépendante du retard, l'information donnée sur le retard est alors explicitement prise en compte dans l'élaboration du critère de stabilité. Cette information est donnée soit par :

- La valeur maximale du retard, si ce dernier est constant ou variable.
- Les valeurs maximales du retard variable et de sa dérivée.

Pour faire apparaître l'information du retard dans le critère final de stabilité, il est alors nécessaire d'appliquer des méthodes de transformation du modèle du système d'origine. Certaines transformations sont présentées dans ce qui suit.

On considère les deux systèmes à retards suivants [37] :

$$(S_1) : \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (3.13)$$

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (3.14)$$

$$\text{et } (S_2) : \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) \quad (3.15)$$

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau_M, 0] \quad (3.16)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\phi(\theta)$ est la condition initiale. Dans le système (S_1) , le scalaire $\tau > 0$ représente le retard constant, tandis que dans le système (S_2) , le retard variable $\tau(t)$ est majoré et satisfait la condition suivante :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_M \quad (3.17)$$

où τ_M est un scalaire positif représentant la borne supérieure de $\tau(t)$

Approach I : Transformation de modèle

En utilisant la formule de Newton-Leibniz, on a $x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds$, ainsi, le système (S_1) peut être écrit sous les deux formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^t [Ax(s) + A_d x(s - \tau)] ds \quad (3.18)$$

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds \quad (3.19)$$

De la même manière, pour le système (S_2) , on a :

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau(t)}^t [Ax(s) + A_d x(s - \tau(s))] ds \quad (3.20)$$

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \quad (3.21)$$

Il est à noter que (3.18)-(3.21) sont les transformations des systèmes à retards (3.13) ou (3.15) en utilisant la formule de Newton-Leibniz. En se basant sur les systèmes transformés (3.18)-(3.21), beaucoup de résultats de stabilité dépendante

du retard sont obtenus [38]-[41]. Cependant, l'inconvénient associé à cette approche est que tous les systèmes transformés ne sont pas équivalents à (3.13) ou (3.15).

Approach II : Techniques de bornage

Il est bien connu que les produits croisés pondérés de quelques variables peuvent apparaître dans la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii retenue pour l'analyse du problème de la stabilité dépendante du retard. Un meilleur bornage pour ces produits croisés joue un rôle très important pour la réduction du conservatisme. Par exemple, l'inégalité suivante a été largement exploitée [38]-[40], [42] :

$$-2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b \quad (3.22)$$

où $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $X > 0$

Pour réduire le conservatisme, Park a présenté le lemme suivant :

Lemme 3.1 (Inégalité de Park [43]). *On suppose que $a(s) \in \mathbb{R}^n$, et $b(s) \in \mathbb{R}^n$ sont donnés pour $s \in \Omega$. Alors, pour toute matrice $X > 0$ et toute matrice M , l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$-2 \int_{\Omega} a(s)^T b(s) ds \leq \int_{\Omega} \begin{bmatrix} a(s) \\ b(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & XM \\ M^T X & (2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(s) \\ b(s) \end{bmatrix} ds \quad (3.23)$$

où $(2,2) = (M^T X + I)X^{-1}(M^T X + I)^T$

Puis, en utilisant cette inégalité, une condition améliorée de stabilité dépendante du retard a été reportée, qui est indiquée dans le théorème suivant :

Théorème 3.3. [43] *Le système à retards (S_1) est asymptotiquement stable pour tout retard τ , $0 < \tau \leq \tau_M$ si, il existe une matrice $P > 0$, $Q > 0$, $V > 0$ et W telle que :*

$$\begin{bmatrix} \Psi & -W^T A_d & A^T A_d^T V & \tau_M (W^T + P) \\ * & -Q & A_d^T A_d^T V & 0 \\ * & * & -V & 0 \\ * & * & * & -V \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

où $\Psi = (A + A_d)^T P + P(A + A_d) + W^T A_d + A_d^T W + Q$

On doit noter que l'inégalité de Park a été encore améliorée en utilisant l'inégalité de Moon suivante :

Lemme 3.2 (Inégalité de Moon [44]). *Supposant que $a(s) \in \mathbb{R}^n$, $b(s) \in \mathbb{R}^n$ et $N(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont donnés pour $s \in \Omega$. Alors, pour toute matrice $X > 0$, $Z > 0$ et Y , les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$-2 \int_{\Omega} a(s)^T N(s) b(s) ds \leq \int_{\Omega} \begin{bmatrix} a(s) \\ b(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - N(s) \\ Y^T - N(s)^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(s) \\ b(s) \end{bmatrix} ds \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.26)$$

Théorème 3.4. [44] *Le système à retards (S_1) est asymptotiquement stable pour tout retard τ , $0 < \tau \leq \tau_M$ si, il existe des matrices $P > 0$, $Q > 0$, X , Y et Z telles que les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & PA_d - Y & \tau_M A^T Z \\ * & -Q & \tau_M A_d^T Z \\ * & * & \tau_M Z \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.28)$$

où $(1,1) = PA + A^T P + \tau_M X + Y + Y^T + Q$

En se basant sur l'inégalité de Moon, beaucoup de conditions dépendantes du retard pour différents systèmes ont été établies [45]-[48].

En appliquant l'inégalité de Moon, l'inégalité intégrale présentée dans le lemme suivant a été introduite pour les systèmes avec retard variable.

Lemme 3.3. [49] *Soit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle avec une dérivée du premier ordre. Alors, l'inégalité intégrale suivante est satisfaite pour toutes matrices*

$M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $X > 0$:

$$\begin{aligned}
-\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) X \dot{x}(s) ds \leq & \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \xi(t) \\
& + \tau(t) \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \xi(t)
\end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\text{où } \xi = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \end{bmatrix}$$

En plus de l'inégalité de Park et de l'inégalité de Moon, une autre inégalité appelée l'inégalité de Jensen a été exploitée pour établir des conditions moins conservatives de stabilité des systèmes à retards.

Lemme 3.4 (Inégalité de Jensen [50]). *Pour toute matrice constante $M > 0$, et tout scalaire $b > a$ et une fonction vectorielle $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que les intégrales suivantes sont bien définies, alors :*

$$(b - a) \int_a^b w^T(s) M w(s) ds \geq \left[\int_a^b w(s) ds \right]^T M \left[\int_a^b w(s) ds \right] \quad (3.30)$$

Une autre forme de l'inégalité de Jensen est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.5. [51] *Pour toute matrice constante $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W = W^T > 0$ et tout scalaire $\gamma > 0$, alors :*

$$-\gamma \int_{t-\gamma}^t \dot{x}^T(s) W \dot{x}(s) ds \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \gamma) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & W \\ W & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \gamma) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

L'exploitation de l'inégalité de Jensen pour le système à retard constant (S_1) aboutit au théorème suivant :

Théorème 3.5. [52] *Le système à retards (S_1) est asymptotiquement stable pour tout retard τ , $0 < \tau \leq \tau_M$ si, il existe des matrices $P > 0$, $Q > 0$ et $Z > 0$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + Q - Z & PA_d + Z & \tau_M A^T Z \\ * & -Q - Z & \tau_M A_d^T Z \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (3.32)$$

De la même manière, l'exploitation de l'inégalité de Jensen pour le système à retard variable (S_2) aboutit au théorème suivant :

Théorème 3.6. [52] *Le système à retards (S_2) est asymptotiquement stable pour tout retard continu $\tau(t)$, satisfaisant la condition (3.17) si, il existe des matrices $P > 0$ et $Z > 0$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - Z & PA_d + Z & \tau_M A^T Z \\ * & -Z & \tau_M A_d^T Z \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (3.33)$$

L'inégalité de Jensen a été utilisée pour traiter différents types de systèmes à retards pour obtenir des résultats dépendants du retard [53]-[56].

Récemment, différentes inégalités intégrales ont été introduites et publiées dans la littérature pour encore réduire le conservatisme des conditions de stabilité des systèmes à retards. Parmi ces inégalités intégrales on cite l'inégalité de Wirtinger, Bessel-Legendre, inégalité utilisant les fonctions auxiliaires...etc [57]-[59].

En utilisant l'inégalité de Wirtinger, une borne inférieure plus large que celle obtenue en utilisant l'inégalité de Jensen a été établie [57]. Ensuite, en introduisant une fonction auxiliaire, une autre inégalité a été développée dans [58]. Tout ceci est donné dans le lemme suivant :

Lemme 3.6. *Pour toute matrice constante $R > 0$, deux scalaires a et b ($b > a$), et une fonction vectorielle $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que les intégrales ci-dessous sont bien définies, les inégalités suivantes sont satisfaites :*

i. Inégalité de Wirtinger :

$$\int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds \geq \sum_{i=0}^1 \frac{2i+1}{b-a} v_i^T R v_i \quad (3.34)$$

ii. Inégalité utilisant les fonctions auxiliaires :

$$\int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds \geq \sum_{i=0}^2 \frac{2i+1}{b-a} v_i^T R v_i \quad (3.35)$$

où

$$\begin{aligned} v_0 &:= \int_a^b \omega(s) ds, & v_1 &:= v_0 - \frac{2}{b-a} \int_a^b \int_s^b \omega(\theta) d\theta ds \\ v_2 &:= 3v_1 - 2v_0 + \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_s^b \int_r^b \omega(\theta) d\theta dr ds \end{aligned}$$

Il est à noter que l'inégalité intégrale utilisant les fonctions auxiliaires (3.35) est une amélioration de l'inégalité de Wirtinger (3.34). D'une manière naturelle, une généralisation de l'inégalité (3.35) peut être établie en introduisant les polynômes de Legendre conduisant à la forme canonique de l'inégalité de Bessel-Legendre [59], [60].

Lemme 3.7. *Sous les conditions du lemme précédent, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^N (2i+1) \Omega_i^T R \Omega_i = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^N (2i+1) \hat{\Omega}_i^T R \hat{\Omega}_i \quad (3.36)$$

où

$$\Omega_i := \int_a^b \tilde{L}_i(s) \omega(s) ds, \quad \hat{\Omega}_i := \int_a^b \hat{L}_i(s) \omega(s) ds$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i(s) &:= \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} \binom{k+i}{k} \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^k \\ \hat{L}_i(s) &:= \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} \binom{k+i}{k} \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^k \end{aligned}$$

L'inégalité canonique de Bessel-Legendre inclue l'inégalité de Wirtinger et l'inégalité utilisant les fonctions auxiliaires comme des cas particuliers. L'idée de l'inégalité de Bessel-Legendre est de fournir une inégalité générique et généralisable qui est asymptotiquement non conservative [61].

Le principe d'utilisation de l'inégalité de Bessel avec les polynômes orthogonaux tels que les polynômes de Legendre peut être interprété comme la minimisation de la distance entre la fonction vectorielle ω et l'ensemble des polynômes de degré moindre.

Approach III : L'approche du système descripteur

Il est bien connu que le modèle transformé n'est pas équivalent au système à retards original, et peut conduire à plus de conservatisme. Pour réduire de tel conservatisme potentiel, une méthode basée sur les systèmes descripteur a été introduite dans [62] pour réaliser l'analyse de stabilité et la synthèse de la commande pour les systèmes avec retard variable dans le temps. Cette méthode utilise un modèle de système descripteur pour obtenir des conditions de stabilité dépendante du retard, qui est équivalent au système à retards original.

Pour introduire l'approche du système descripteur, on réécrit le système (S_2) sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (3.37)$$

$$0 = -y(t) + (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds \quad (3.38)$$

qui peut être réécrite comme suit :

$$E\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) - \bar{A}_d \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds \quad (3.39)$$

$$\text{où } \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + A_d & -I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix}$$

La fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii associée à cette approche peut être choisie comme :

$$V(t) = \bar{x}^T(t)EP\bar{x}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t y^T(s)Ry(s)dsd\theta \quad (3.40)$$

$$\text{où } P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

Les conditions de stabilité imposées par la négativité de la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii conduisent au théorème suivant :

Théorème 3.7. [45] *Pour tout retard dérivable $\tau(t)$ satisfaisant la condition (3.17) et $\dot{\tau}(t) \leq \rho < 1$ (ρ étant la borne supérieure de $\dot{\tau}(t)$), le système à retard (S_2) est asymptotiquement stable si, il existe des matrices $P_1 > 0$, P_2 , P_3 , $R_1 > 0$, S_1 , Y_{11} ,*

Y_{12} , Z_{11} , Z_{12} et Z_{13} , telles que :

$$\begin{bmatrix} \Omega + \tau_M Z_1 & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - Y_1^T \\ * & -(1-\rho)S_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

et

$$\begin{bmatrix} R_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.42)$$

où

$$\Omega = P^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix}^T P + \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \tau_M R_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.43)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{13} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Approach IV : L'approche des matrices de pondération

A partir de la formule de Newton-Leibniz, les équations suivantes sont correctes pour toute matrice Y et W (matrices de pondération), de dimensions appropriées :

$$2x^T(t)Y \left[x(t) - x(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds \right] = 0 \quad (3.45)$$

et

$$2x^T(t-\tau)W \left[x(t) - x(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds \right] = 0 \quad (3.46)$$

D'autre part, l'équation suivante est aussi correcte :

$$\tau \zeta^T(t)X\zeta(t) - \int_{t-\tau}^t \zeta^T(t)X\zeta(t)ds = 0 \quad (3.47)$$

où $\zeta(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) \end{bmatrix}^T$, $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix}$

Tenant compte des observations ci-dessus, la condition de stabilité dépendante

du retard suivante peut être obtenue.

Théorème 3.8. [63] *Le système à retard (S_1) est asymptotiquement stable pour tout retard τ , $0 < \tau \leq \tau_M$ si, il existe des matrices $P > 0$, $Q > 0$, $Z > 0$, X_{11} , X_{12} , X_{22} , Y et W telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & PA_d - Y + W^T + \tau_M X_{12} & \tau_M A^T Z \\ * & -Q - W - W^T + \tau_M X_{22} & \tau_M A_d^T Z \\ * & * & -\tau_M Z \end{bmatrix} < 0 \quad (3.48)$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & Y \\ * & X_{22} & W \\ * & * & Z \end{bmatrix} \geq Z \quad (3.49)$$

où $(1,1) = PA + A^T P + Y + Y^T + Q + \tau_M X_{11}$

En se basant sur l'approche des matrices de pondération, beaucoup de conditions de stabilité dépendante du retard ont été obtenues [64]-[66].

Approach V : Construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

Le choix d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii appropriée est important pour obtenir des critères de stabilité moins conservatifs pour les systèmes à retards. Cependant, la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii exacte est une tâche très difficile. Par conséquent, beaucoup de chercheurs ont choisi des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii simples telles que :

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta \quad (3.50)$$

Si $P > 0$ et $R > 0$, il est prouvé que la définition positive de la matrice Q peut être affaiblie par :

$$\begin{bmatrix} P + R & R \\ R & \tau_M Q + R \end{bmatrix} > 0 \quad (3.51)$$

telle que $V(t)$ est définie positive.

Afin de réduire le conservatisme du critère de stabilité, un nombre important de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii sont construites en se basant sur l'amélioration de la fonctionnelle simple (3.50). Dans ce qui suit, on mentionne typiquement

les différents types de fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii présentées dans la littérature.

Fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii augmentées : Une fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii est introduite dans [67], [68]. Sa principale caractéristique est d’ajouter quelques termes à (3.50) afin d’exploiter plus d’information sur les états retardés. Par exemple, les deux premiers termes $x^T(t)Px(t)$ et $\int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds$ de (3.50) sont augmentés, respectivement, par :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_M) \\ \int_{t-\tau_M}^t x(s)ds \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_M) \\ \int_{t-\tau_M}^t x(s)ds \end{bmatrix}, \quad \int_{t-\tau(t)}^t \begin{bmatrix} \dot{x}(s) \\ x(s) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{x}(s) \\ x(s) \end{bmatrix} ds \quad (3.52)$$

La fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii augmentée peut relier directement l’état du système à quelques états retardés, ce qui est possible d’améliorer la faisabilité des LMIs correspondantes dans un critère de stabilité. Les exemples numériques montrent qu’un tel critère de stabilité peut réellement produire une borne supérieure τ_M plus large telle que le système correspondant reste stable [69], [70].

Le but de l’augmentation d’une fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii est d’aider à trouver une estimation plus étroite sur sa dérivée en introduisant quelques nouvelles variables matricielles ainsi que quelques vecteurs liés à l’état. Il est vrai que l’estimation de la dérivée d’une fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii dépend principalement du traitement des termes contenant des intégrales. Cependant, une telle estimation n’est pas parfois suffisante pour obtenir un critère de stabilité moins conservatif. Dans [71], [72], Il a été démontré que l’utilisation de l’inégalité de Wirtinger peut fournir une estimation plus étroite de la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii que l’inégalité intégrale de Jensen, mais les deux critères de stabilité obtenus ont le même conservatisme si la fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii n’est pas augmentée. La recherche récente [59], [60] montre que l’utilisation d’une fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii augmentée plus l’inégalité de Bessel–Legendre d’ordre N peut en effet aboutir à des critères de stabilité moins conservatifs.

Fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii avec des intégrales multiples :
Un autre développement sur la construction d’une fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii

appropriée est d'introduire des termes avec des intégrales triples comme dans [73] :

$$\int_{-\tau_M}^0 \int_r^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds dr d\theta \quad (3.53)$$

Suivant cette idée, un terme avec intégrale quadruple est introduit à la fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii augmentée, qui a une forme différente comme dans [69] :

$$\int_{t-\tau_M}^t (\tau_M - t + s)^3 \begin{bmatrix} \dot{x}(s) \\ x(s) \end{bmatrix}^T R_2 \begin{bmatrix} \dot{x}(s) \\ x(s) \end{bmatrix} ds \quad (3.54)$$

Plus généralement, des termes avec des intégrales multiples sont introduits comme dans [74] :

$$\sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_M}^t (\tau_M - t + s)^j \dot{x}^T(s) \hat{R}_j \dot{x}(s) ds \quad (3.55)$$

où m est un entier positif certain. En se basant sur les fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii augmentées avec des termes contenant des intégrales multiples, il a été démontré à travers des exemples numériques que les conditions résultantes de stabilité dépendante du retard sont moins conservatives [75]. Cependant, l'introduction de termes avec intégrales multiples peut aboutir à de nouveaux termes intégrales à estimer dans la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii [74], [76], [77].

Fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii pour les systèmes linéaires avec des retards qui varient dans un intervalle : Pour un système à retard variable dans un intervalle $\tau(t) \in [\tau_m, \tau_M]$ avec $\tau_m > 0$, la stabilité peut être analysée en construisant une fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii appropriée telle que :

$$\begin{aligned} V(t) = & x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} x^T(s) Q_2 x(s) ds \\ & + \int_{-\tau_m}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-\tau_M}^{-\tau_m} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (3.56)$$

En se basant sur l'équation (3.56), plusieurs fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii augmentées sont introduites en exploitant plus d'états retardés tels que $x(t - \tau_m)$ [54], [73], [75], [78]–[83].

En supposant que la borne supérieure et la borne inférieure de $\dot{\tau}(t)$ sont constantes,

une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii est introduite dans [84], où la matrice de Lyapunov P est choisie comme une combinaison convexe $(\tau_M - \tau(t))P_1 + (\tau(t) - \tau_m)P_2$ par rapport à $\tau(t) \in [\tau_m, \tau_M]$. P_1 et P_2 sont deux matrices symétriques définies positives. Cette idée est aussi valable dans le cas où $\tau_m = 0$.

Fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii basées sur le fractionnement du retard : L'idée principale dans cette approche est d'introduire des fractions $\frac{\tau_M}{r}$ de τ_M de telle sorte que la fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii ainsi obtenue soit de la forme suivante :

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\frac{\tau_M}{r}}^t J^T(s)QJ(s)ds + \int_{-\frac{\tau_M}{r}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta \quad (3.57)$$

où $J(s) := \text{col}\{x(s), x\left(t - \frac{1}{r}\tau_M\right), \dots, x\left(t - \frac{r-1}{r}\tau_M\right)\}$ avec r est un entier positif. Il est démontré que, lorsque l'entier r devient plus grand, le critère de stabilité obtenu est moins conservatif [52]. L'idée du fractionnement du retard a été largement exploitée pour construire différentes fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii [85]-[89].

3.4.3 Conditions de stabilité robuste pour un système incertain de type neutre avec un retard discret et un retard distribué

On considère le système incertain de type neutre suivant, avec un retard discret et un retard distribué [90] :

$$\dot{x}(t) - (C + \Delta C)\dot{x}(t - \tau) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - h) + (D + \Delta D) \int_{t-r}^t x(s)ds \quad (3.58)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [-\max\{\tau, h, r\}, 0] \quad (3.59)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, τ , h et r représentent, respectivement, le retard de type neutre, le retard discret et le retard distribué, $\phi \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des conditions initiales. A , B , C et $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes connues, $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$ et $\Delta D(t)$ représentent les incertitudes paramétriques supposées avoir

la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B(t) & \Delta C(t) & \Delta D(t) \end{bmatrix} = LF(t) \begin{bmatrix} E_a & E_b & E_c & E_d \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

où L, E_a, E_b, E_c et E_d sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées et $F(t)$ est une fonction continue inconnue qui varie dans le temps et satisfait la condition suivante :

$$F^T(t)F(t) \leq I \quad (3.61)$$

Pour le système (3.58), on suppose aussi que la condition $\|C + \Delta C(t)\| \leq I$ est satisfaite, qui est nécessaire pour assurer la stabilité asymptotique.

On cherche à trouver un critère qui assure la stabilité asymptotique du système (3.58), pour cela les deux lemmes suivants sont nécessaires :

Lemme 3.8. [50] [91] *Pour toute matrice symétrique $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tout scalaire a et b (avec $a < b$) et une fonction vecteur $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que les intégrales concernées sont bien définies, alors :*

- i. $\left(\int_a^b \omega(s) ds \right)^T M \left(\int_a^b \omega(s) ds \right) \leq (b-a) \int_a^b \omega^T(s) M \omega(s) ds$
- ii. $\left(\int_a^b \int_{t+\theta}^t \omega(s) ds d\theta \right)^T M \left(\int_a^b \int_{t+\theta}^t \omega(s) ds d\theta \right) \leq \frac{(b^2 - a^2)}{2} \int_a^b \int_{t+\theta}^t \omega^T(s) M \omega(s) ds d\theta$

Lemme 3.9. [91] *Soient U, V, W et M des matrices réelles de dimensions appropriées avec M satisfaisant $M = M^T$, alors $M + UVW + W^T V^T U^T < 0$ pour tout V satisfaisant $V^T V \leq I$, si et seulement si, il existe un scalaire $\varepsilon > 0$ tel que $M + \varepsilon^{-1} U U^T + \varepsilon W^T W < 0$*

On commence par proposer des conditions de stabilité asymptotique pour le système nominal suivant :

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + Bx(t - h) + D \int_{t-r}^t x(s) ds \quad (3.62)$$

On choisit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) \quad (3.63)$$

où

$$V_1(t) = \eta^T(t)P\eta(t) + \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)Q\dot{x}(s)ds$$

$$V_2(t) = \int_{-\tau}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta d\lambda + \int_{-h}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta d\lambda \\ + \int_{-r}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)dsd\theta d\lambda$$

$$V_3(t) = \int_{t-h}^t \omega^T(s)S_1\omega(s)ds + \int_{t-r}^t \omega^T(s)S_2\omega(s)ds \\ + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \omega^T(s)S_3\omega(s)dsd\theta + \int_{-r}^0 \int_{t+\theta}^t \omega^T(s)S_4\omega(s)dsd\theta$$

$$V_4(t) = (\tau - h) \int_{-\tau}^{-h} \int_{t+\theta}^t \omega^T(s)U_1\omega(s)dsd\theta + (h - r) \int_{-h}^{-r} \int_{t+\theta}^t \omega^T(s)U_2\omega(s)dsd\theta$$

$$V_5(t) = \int_{t-\frac{\tau}{2}}^t \alpha^T(s)W_1\alpha(s)ds + \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)dsd\theta + \int_{t-\frac{h}{2}}^t \beta^T(s)W_2\beta(s)ds \\ + \int_{-\frac{h}{2}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)dsd\theta$$

avec

$$\eta^T(t) = \left[x^T(t) \quad x^T(t-\tau) \quad x^T(t-h) \quad \int_{t-\tau}^t x^T(s)ds \quad \int_{t-h}^t x^T(s)ds \quad \int_{t-r}^t x^T(s)ds \right] \\ \omega^T(s) = \left[x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right], \quad \alpha^T(s) = \left[x^T(s) \quad x^T\left(s - \frac{\tau}{2}\right) \right], \quad \beta^T(s) = \left[x^T(s) \quad x^T\left(s - \frac{h}{2}\right) \right]$$

La dérivée de $V(t)$ le long de la trajectoire du système nominale (3.62) est donnée par :

$$\dot{V}_1(t) = 2\eta^T(t)P\dot{\eta}(t) + \dot{x}^T(t)Q\dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-\tau)Q\dot{x}(t-\tau) \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \dot{x}^T(t) \left[\frac{\tau^2}{2} R_1 + \frac{h^2}{2} R_2 + \frac{r^2}{2} R_3 \right] \dot{x}(t) - \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds d\theta \\ & - \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds d\theta - \int_{-r}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{11} + S_{21} & S_{12} + S_{22} \\ * & S_{13} + S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(t-h) \\ \dot{x}(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ \dot{x}(t-h) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} x(t-r) \\ \dot{x}(t-r) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ * & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-r) \\ \dot{x}(t-r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} hS_{31} + rS_{41} & hS_{32} + rS_{42} \\ * & hS_{33} + rS_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \\ & - \int_{t-h}^t \omega^T(s) S_3 \omega(s) ds - \int_{t-r}^t \omega^T(s) S_4 \omega(s) ds \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\tau-h)^2 U_{11} & (\tau-h)^2 U_{12} \\ * & (\tau-h)^2 U_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} - (\tau-h) \int_{t-\tau}^{t-h} \omega^T(s) U_1 \omega(s) ds \\ & + \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (h-r)^2 U_{21} & (h-r)^2 U_{22} \\ * & (h-r)^2 U_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} - (h-r) \int_{t-h}^{t-r} \omega^T(s) U_2 \omega(s) ds \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) = & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{\tau}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ * & W_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{\tau}{2}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(t-\frac{\tau}{2}) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ * & W_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\frac{\tau}{2}) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{21} & W_{22} \\ * & W_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h}{2}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(t-\frac{h}{2}) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{21} & W_{22} \\ * & W_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\frac{h}{2}) \\ x(t-h) \end{bmatrix} \\ & + \dot{x}^T(t) \left[\frac{\tau}{2} Z_1 + \frac{h}{2} Z_2 \right] \dot{x}(t) - \int_{t-\frac{\tau}{2}}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-\frac{h}{2}}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (3.68)$$

En utilisant les inégalités intégrales du lemme 3.8, on obtient :

$$- \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\frac{2}{\tau^2} \left[\tau x(t) - \int_{t-\tau}^t x(s) ds \right]^T R_1 \left[\tau x(t) - \int_{t-\tau}^t x(s) ds \right] \quad (3.69)$$

$$-\int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\frac{2}{h^2} \left[hx(t) - \int_{t-h}^t x(s) ds \right]^T R_2 \left[hx(t) - \int_{t-h}^t x(s) ds \right] \quad (3.70)$$

$$-\int_{-r}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds d\theta \leq -\frac{2}{r^2} \left[rx(t) - \int_{t-r}^t x(s) ds \right]^T R_3 \left[rx(t) - \int_{t-r}^t x(s) ds \right] \quad (3.71)$$

$$-\int_{t-h}^t \omega^T(s) S_3 \omega(s) ds \leq - \begin{bmatrix} \int_{t-h}^t x(s) ds \\ x(t) - x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{h} S_{31} & \frac{1}{h} S_{32} \\ * & \frac{1}{h} S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-h}^t x(s) ds \\ x(t) - x(t-h) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$-\int_{t-r}^t \omega^T(s) S_4 \omega(s) ds \leq - \begin{bmatrix} \int_{t-r}^t x(s) ds \\ x(t) - x(t-r) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{r} S_{41} & \frac{1}{r} S_{42} \\ * & \frac{1}{r} S_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-r}^t x(s) ds \\ x(t) - x(t-r) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & -(\tau-h) \int_{t-\tau}^{t-h} \omega^T(s) U_1 \omega(s) ds \\ & \leq - \begin{bmatrix} \int_{t-\tau}^t x(s) ds - \int_{t-h}^t x(s) ds \\ x(t-h) - x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ * & U_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-\tau}^t x(s) ds - \int_{t-h}^t x(s) ds \\ x(t-h) - x(t-\tau) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} & -(h-r) \int_{t-h}^{t-r} \omega^T(s) U_2 \omega(s) ds \\ & \leq - \begin{bmatrix} \int_{t-h}^t x(s) ds - \int_{t-r}^t x(s) ds \\ x(t-r) - x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_{21} & U_{22} \\ * & U_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-h}^t x(s) ds - \int_{t-r}^t x(s) ds \\ x(t-r) - x(t-h) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$-\int_{t-\frac{\tau}{2}}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \leq -\frac{2}{\tau} \left[x(t) - x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]^T Z_1 \left[x(t) - x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (3.76)$$

$$-\int_{t-\frac{h}{2}}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \leq -\frac{2}{h} \left[x(t) - x\left(t - \frac{h}{2}\right) \right]^T Z_2 \left[x(t) - x\left(t - \frac{h}{2}\right) \right] \quad (3.77)$$

On introduit des matrices de pondération dans la dérivée de $V(t)$ telles que :

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t) + \dot{V}_5(t) + \gamma \quad (3.78)$$

où

$$\gamma = 2\rho^T(t)M \times \left[Ax(t) + Bx(t-h) - \dot{x}(t) + C\dot{x}(t-\tau) + D \int_{t-r}^t x(s) ds \right] = 0 \quad (3.79)$$

avec

$$\rho^T(t) = \left[x^T(t) \quad x^T(t-h) \quad \dot{x}^T(t) \quad \dot{x}^T(t-\tau) \quad \int_{t-r}^t x^T(s) ds \right],$$

$$M^T = [M_1^T \quad M_2^T \quad M_3^T \quad M_4^T \quad M_5^T]$$

En remplaçant les inégalités (3.69)-(3.77) dans (3.78), il s'en suit que :

$$\dot{V}(t) \leq \zeta^T(t) \Xi \zeta(t) \quad (3.80)$$

où

$$\zeta^T(t) = \left[x^T(t) \quad x^T(t-\tau) \quad x^T(t-h) \quad x^T(t-r) \quad \dot{x}^T(t) \quad \dot{x}^T(t-\tau) \quad \dot{x}^T(t-h) \quad \dot{x}^T(t-r) \right. \\ \left. \int_{t-\tau}^t x^T(s) ds \quad \int_{t-h}^t x^T(s) ds \quad \int_{t-r}^t x^T(s) ds \quad x^T\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad x^T\left(t - \frac{h}{2}\right) \right]$$

et Ξ est définie dans la relation (3.81)

avec

$$\Xi_{11} = P_{14} + P_{14}^T + P_{15} + P_{15}^T + P_{16} + P_{16}^T - 2R_1 - 2R_2 - 2R_3 + S_{11} + S_{21} + hS_{31} + rS_{41} - \frac{1}{h}S_{33} \\ - \frac{1}{r}S_{43} + (\tau-h)^2 U_{11} + (h-r)^2 U_{21} + W_{11} + W_{21} - \frac{2}{\tau}Z_1 - \frac{2}{h}Z_2 + M_1 A + A^T M_1^T$$

$$\Xi_{12} = -P_{14} + P_{24}^T + P_{25}^T + P_{26}^T, \quad \Xi_{13} = -P_{15} + P_{34}^T + P_{35}^T + P_{36}^T + \frac{1}{h}S_{33} + M_1 B + A^T M_2^T$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & P_{13} & 0 & \Xi_{19} & \Xi_{1,10} & \Xi_{1,11} & \Xi_{1,12} & \Xi_{1,13} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & -P_{26} & P_{12}^T & P_{22} & P_{23} & 0 & \Xi_{29} & \Xi_{2,10} & -P_{46} & -W_{12}^T & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & \Xi_{35} & \Xi_{36} & \Xi_{37} & 0 & \Xi_{39} & \Xi_{3,10} & \Xi_{3,11} & 0 & -W_{22}^T \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & -S_{22} & -P_{46}^T & \Xi_{4,10} & \Xi_{4,11} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \Xi_{56} & 0 & 0 & P_{14} & P_{15} & \Xi_{5,11} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & P_{24} & P_{25} & \Xi_{6,11} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S_{13} & 0 & P_{34} & P_{35} & P_{36} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{99} & U_{11} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{10,10} & U_{21} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{11,11} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{12,12} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{13,13} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{14} &= -P_{16} + \frac{1}{r}S_{43}, & \Xi_{15} &= P_{11} + (\tau - h)^2U_{12} + (h - r)^2U_{22} + S_{12} + S_{22} + hS_{32} + rS_{42} \\ & - M_1 + A^T M_3^T, & \Xi_{16} &= P_{12} + M_1C + A^T M_4^T, & \Xi_{19} &= P_{44} + P_{45}^T + P_{46}^T + \frac{2}{\tau}R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{1,10} &= P_{45} + P_{55} + P_{56}^T + \frac{2}{h}R_2 - \frac{1}{h}S_{32}^T, & \Xi_{1,11} &= P_{46} + P_{56} + P_{66} + \frac{2}{r}R_3 - \frac{1}{r}S_{42}^T + M_1D \\ & + A^T M_5^T, & \Xi_{1,12} &= W_{12} + \frac{2}{\tau}Z_1, & \Xi_{1,13} &= W_{22} + \frac{2}{h}Z_2 \end{aligned}$$

$$\Xi_{22} = -P_{24} - P_{24}^T - U_{13} - W_{13}, \quad \Xi_{23} = -P_{25} - P_{34}^T + U_{13}, \quad \Xi_{29} = -P_{44} + U_{12}^T$$

$$\Xi_{2,10} = -P_{45} - U_{12}^T, \quad \Xi_{33} = -P_{35} - P_{35}^T - S_{11} - \frac{1}{h}S_{33} - U_{13} - U_{23} - W_{23} + M_2B + B^T M_2^T$$

$$\Xi_{34} = -P_{36} + U_{23}, \quad \Xi_{35} = P_{13}^T - M_2 + B^T M_3^T, \quad \Xi_{36} = P_{23}^T + M_2C + B^T M_4^T$$

$$\Xi_{37} = P_{33} - S_{12}, \quad \Xi_{39} = -P_{45}^T - U_{12}^T, \quad \Xi_{3,10} = -P_{55} + \frac{1}{h}S_{32}^T + U_{12}^T + U_{22}^T$$

$$\Xi_{3,11} = -P_{56} - U_{22}^T + M_2 D + B^T M_5^T, \quad \Xi_{44} = -S_{21} - \frac{1}{r} S_{43} - U_{23}, \quad \Xi_{4,10} = -P_{56}^T - U_{22}^T$$

$$\begin{aligned} \Xi_{4,11} = & -P_{66} + \frac{1}{r} S_{42}^T + U_{22}^T, \quad \Xi_{55} = Q + \frac{\tau^2}{2} R_1 + \frac{h^2}{2} R_2 + \frac{r^2}{2} R_3 + S_{13} + S_{23} + h S_{33} \\ & + r S_{43} + (\tau - h)^2 U_{13} + (h - r)^2 U_{23} + \frac{\tau}{2} Z_1 + \frac{h}{2} Z_2 - M_3 - M_3^T, \quad \Xi_{56} = M_3 C - M_4^T \end{aligned}$$

$$\Xi_{5,11} = P_{16} + M_3 D - M_5^T, \quad \Xi_{66} = -Q + M_4 C + C^T M_4^T, \quad \Xi_{6,11} = P_{26} + M_4 D + C^T M_5^T$$

$$\begin{aligned} \Xi_{99} = & -\frac{2}{\tau^2} R_1 - U_{11}, \quad \Xi_{10,10} = -\frac{2}{h^2} R_2 - \frac{1}{h} S_{31} - U_{11} - U_{21}, \quad \Xi_{11,11} = -\frac{2}{r^2} R_3 - \frac{1}{r} S_{41} - U_{21} \\ & + M_5 D + D^T M_5^T, \quad \Xi_{12,12} = W_{13} - W_{11} - \frac{2}{\tau} Z_1, \quad \Xi_{13,13} = W_{23} - W_{21} - \frac{2}{h} Z_2 \end{aligned}$$

Si $\Xi < 0$ alors $\dot{V}(t) < 0$ et le système nominal (3.62) est asymptotiquement stable. On aura donc le théorème suivant :

Théorème 3.9. *Le système nominal (3.62) est asymptotiquement stable si, il existe*

$$\text{des matrices } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \\ * & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & P_{26} \\ * & * & P_{33} & P_{34} & P_{35} & P_{36} \\ * & * & * & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ * & * & * & * & P_{55} & P_{56} \\ * & * & * & * & * & P_{66} \end{bmatrix} > 0, \quad Q > 0, R_1 > 0, R_2 > 0, R_3 >$$

$$0, S_i = \begin{bmatrix} S_{i1} & S_{i2} \\ * & S_{i3} \end{bmatrix} > 0, U_j = \begin{bmatrix} U_{j1} & U_{j2} \\ * & U_{j3} \end{bmatrix} > 0, W_j = \begin{bmatrix} W_{j1} & W_{j2} \\ * & W_{j3} \end{bmatrix} > 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0$$

et M_k , ($i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, k = 1, 2, 3, 4, 5$) telles que LMI suivante est satisfaite pour des scalaires donnés τ, h et r :

$$\Xi < 0 \tag{3.82}$$

où Ξ est définie dans la relation (3.81)

Dans ce qui suit, on cherche à trouver un critère qui assure la stabilité robuste du système (3.58) en se basant sur le théorème 3.9.

En remplaçant les matrices, A, B, C et D dans le théorème 3.9 par $A + LF(t)E_a$,

$B + LF(t)E_b$, $C + LF(t)E_c$, et $D + LF(t)E_d$ respectivement, on obtient :

$$\Xi + \Gamma F(t) \Upsilon^T + \Upsilon F^T(t) \Gamma^T < 0 \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \Gamma^T &= \begin{bmatrix} L^T M_1^T & 0 & L^T M_2^T & 0 & L^T M_3^T & L^T M_4^T & 0 & 0 & 0 & 0 & L^T M_5^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{et } \Upsilon^T &= \begin{bmatrix} E_a & 0 & E_b & 0 & 0 & E_c & 0 & 0 & 0 & 0 & E_d & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.9, on obtient :

$$\Xi + \varepsilon \Upsilon \Upsilon^T + \varepsilon^{-1} \Gamma \Gamma^T < 0 \quad (3.84)$$

En utilisant le complément de Schur, on peut facilement voir que l'inégalité (3.84) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \Psi & \Gamma \\ * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.85)$$

avec $\Psi = \Xi + \varepsilon \Upsilon \Upsilon^T$ d'où le théorème suivant :

Théorème 3.10. *Le système incertain (3.58) est robustement asymptotiquement*

stable si, il existe des matrices $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \\ * & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & P_{26} \\ * & * & P_{33} & P_{34} & P_{35} & P_{36} \\ * & * & * & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ * & * & * & * & P_{55} & P_{56} \\ * & * & * & * & * & P_{66} \end{bmatrix} > 0$, $Q > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $R_3 > 0$, $S_i = \begin{bmatrix} S_{i1} & S_{i2} \\ * & S_{i3} \end{bmatrix} > 0$, $U_j = \begin{bmatrix} U_{j1} & U_{j2} \\ * & U_{j3} \end{bmatrix} > 0$, $W_j = \begin{bmatrix} W_{j1} & W_{j2} \\ * & W_{j3} \end{bmatrix} > 0$, $Z_1 > 0$, $Z_2 > 0$, M_k ($i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$) et un scalaire ε tels que LMI suivante est satisfaite pour des scalaires donnés τ , h et r :

$$\begin{bmatrix} \Psi & \Gamma \\ * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.86)$$

3.5 Stabilité des systèmes à retards dans le domaine fréquentiel

Un système linéaire à retards est décrit par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - \tau_i) \quad (3.87)$$

avec $x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$

où les matrices A et A_i ainsi que les retards τ_i sont supposés constants.

Par application de la transformée de Laplace, on obtient l'équation caractéristique du système suivante :

$$F(p) = \det \left(pI_n - A - \sum_{i=1}^n A_i e^{-p\tau_i} \right) \quad (3.88)$$

L'équation caractéristique du système est de forme polynomiale. La présence du terme comprenant le retard ($e^{-p\tau_i}$) lui donne la désignation de quasi-polynôme. Il est à remarquer que si les retards τ_i sont tous multiples d'un même réel positif τ alors le système est dit à retards commensurables. Le retard τ est alors appelé le retard de base. Dans ce cas, le système (3.87) et l'équation caractéristique associée $F(p)$ seront décrits respectivement par les expressions suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - i\tau) \quad (3.89)$$

$$F(p) = \det \left(pI_n - A - \sum_{i=1}^n A_i e^{-pi\tau} \right) \quad (3.90)$$

On appelle quasi-polynôme les fonctions entières de la forme suivante :

$$F(p) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N C_{hk} p^h e^{\tau_k p} \quad (3.91)$$

La fonction $F(p)$ peut être écrite sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$F_1(p) = \sum_{k=0}^N R_k(p) e^{\tau_k p} \quad (3.92)$$

$$F_2(p) = \sum_{h=0}^M Q_h(p) p^h \quad (3.93)$$

avec $R_k(p) = \sum_{h=0}^M C_{hk} p^h$ et $Q_h(p) = \sum_{k=0}^N C_{hk} e^{\tau_k p}$

La stabilité du système dans le domaine fréquentiel consiste à observer la position, dans le plan complexe, des racines de cette équation caractéristique quasi-polynômiale. Si les racines de l'équation $F(p) = 0$ sont négatives (ou à partie réelle négative), alors on peut dire que le système considéré est stable. Plusieurs méthodes sont utilisées pour l'analyse de la stabilité des quasi-polynômes. Parmi les méthodes les plus simples et les plus utilisées pour la résolution de ces équations on peut citer l'approximation polynomiale. Cette méthode consiste à approximer les termes en $e^{-\tau p}$ par leur développement en série de Taylor du premier ou du deuxième ordre comme suit :

$$e^{-\tau p} = 1 - \tau p + \frac{\tau^2}{2!} p^2 - \frac{\tau^3}{3!} p^3 + \frac{\tau^4}{4!} p^4 - \dots + \dots \quad (3.94)$$

D'autres méthodes développées spécialement pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards de fonction caractéristique de forme quasi-polynomiale, utilisent le théorème de Hermite-Biehler suivant :

3.5.1 Théorème de Hermite-Biehler

Ce théorème a été initialement développé pour vérifier la stabilité des systèmes dont la fonction caractéristique est de forme polynômiale et ensuite il a été étendu pour l'étude de la stabilité des systèmes de forme quasi-polynômiale. On propose de rappeler le théorème de Hermite-Biehler sur la stabilité des polynômes à coefficients réels ou complexes [92].

Pour cela, soit $H(p) = h_0 + h_1 p + \dots + h_n p^n$ un polynôme réel de degré n .

$H(p)$ est dit polynôme de Hurwitz si toutes ses racines sont situées dans la partie

gauche du plan complexe, c'est-à-dire réelles négatives ou à parties réelles négatives.

Si $H(p)$ est un polynôme de Hurwitz, alors tous ses coefficients sont non nuls et possèdent le même signe. Si $H(p)$ est un polynôme de Hurwitz de degré n , alors la phase de $H(j\omega)$ est une fonction continue et strictement croissante en ω .

Théorème 3.11. [92] Soit $H(p) = h_0 + h_1p + \dots + h_np^n$ un polynôme réel de degré n tel que h_n et h_{n-1} ont le même signe. On peut écrire $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = h_e(p^2) + ph_0(p^2) \quad (3.95)$$

où $h_e(p^2)$ et $ph_0(p^2)$ sont respectivement les deux composantes de $H(p)$ d'exposant pair et impair. Pour chaque pulsation $\omega \in \mathbb{R}$, soit $H(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$ où $p(\omega) = h_e(-\omega^2)$ et $q(\omega) = \omega h_0(-\omega^2)$

On pose dans la suite $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \dots$ et $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots$ respectivement les racines positives réelles de $h_e(-\omega^2)$ et $h_0(-\omega^2)$ arrangées par ordre croissant.

$H(p)$ est Hurwitz (stable) si et seulement si toutes les racines de $h_e(-\omega^2)$ et de $h_0(-\omega^2)$ sont réelles, simples et celles qui sont positives vérifient la propriété d'entrelacement ci-dessous :

$$0 < \omega_{e1} < \omega_{01} < \omega_{e2} < \omega_{01} \dots$$

La propriété d'entrelacement peut être vérifiée en traçant les courbes de $h_e(-\omega^2)$ et $h_0(-\omega^2)$

Dans ce qui suit, nous allons présenter le théorème de Hermite-Biehler pour l'étude de la stabilité des systèmes de fonction de transfert de forme quasi-polynômiale.

3.5.2 Théorème de Hermite-Biehler pour les quasi-polynômes

La stabilité des systèmes sans retard est relativement facile à étudier puisque le nombre de racines de leur équation caractéristique est fini. Néanmoins, cette facilité disparaît par l'introduction des retards puisque le nombre de racines devient infini. Dans la suite, on va présenter une extension du théorème de Hermite-Biehler pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards. Pour cela, soit $h(p, t)$ un polynôme à

deux variables avec des coefficients C_{hk} complexes ou réels :

$$h(p,t) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N C_{hk} p^h t^k \quad M, N > 0 \quad (3.96)$$

On dit que $h(p,t)$ admet un terme principal s'il existe un coefficient non nul C_{hk} tel que ses deux indices ont des valeurs maximales. Ce terme est donné par $C_{MNP} p^M t^N$. Ceci veut dire que pour tout autre terme $C_{hk} p^h t^k$, on a $M > h$, $N > k$ ou $M > h$, $N = k$.

Théorème 3.12. [92] Soit $H(p) = h(p, e^p)$, avec $h(p,t)$ un polynôme ayant un terme principal, et soient $H_r(\omega)$ et $H_i(\omega)$ respectivement les parties réelles et imaginaires de $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega) \quad (3.97)$$

Soit $\omega_{r1}, \omega_{r2}, \dots$ et $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots$, respectivement les racines réelles de $H_r(\omega)$ et $H_i(\omega)$

On dit que les racines de $H_r(\omega)$ et $H_i(\omega)$ sont alternées si : $\omega_{r1} < \omega_{i1} < \omega_{r2} < \omega_{i2} < \dots$

Si toutes les racines de $H(p)$ se trouvent dans le demi plan complexe gauche, alors les racines de $H_r(\omega)$ et $H_i(\omega)$ sont réelles, simples et alternées.

De plus, nous avons la relation suivante entre $H_r(\omega)$ et $H_i(\omega)$:

$$\frac{dH_i(\omega)}{d\omega} H_r(\omega) - H_i(\omega) \frac{dH_r(\omega)}{d\omega} > 0 \quad (3.98)$$

où $\frac{dH_i(\omega)}{d\omega}$ et $\frac{dH_r(\omega)}{d\omega}$ représentent respectivement la première dérivée par rapport à ω de $H_i(\omega)$ et $H_r(\omega)$

Pour que toutes les racines de $H(p)$ soient dans le demi-plan complexe gauche, il est suffisant que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1. Toutes les racines de $H_r(\omega)$ et $H_i(\omega)$ sont réelles, simples et alternées et l'inégalité (3.98) est satisfaite pour au moins une valeur de ω
2. Toutes les racines de $H_r(\omega)$ sont réelles et pour chaque racine $\omega = \omega_r$, l'inégalité (3.98) est satisfaite c'est-à-dire $H_i(\omega) \frac{dH_r(\omega)}{d\omega} < 0$
3. Toutes les racines de $H_i(\omega)$ sont réelles et pour chaque racine $\omega = \omega_i$, l'inégalité (3.98) est satisfaite c'est-à-dire $\frac{dH_i(\omega)}{d\omega} H_r(\omega) > 0$

Théorème 3.13. [92] Soit $H(p) = h(p, e^p)$, avec $h(p, t)$ un polynôme ayant un terme principal. Pour que toutes les racines de $H(p)$ soient dans le demi-plan complexe gauche, il est nécessaire et suffisant que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. Les racines de $H_r(\omega)$ et $H_i(\omega)$ définies par la relation (3.97) sont réelles, simples et alternées.
2. La relation (3.98) est vérifiée pour une certaine valeur quelconque $\omega_0 \in \mathbb{R}$

3.6 Analyse de stabilité des systèmes discrets à retards

3.6.1 Fonction de transfert des systèmes discrets à retards

On considère le système discret suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=0}^r A_i x(k-h_i) + \sum_{i=0}^r B_i u(k-h_i), \quad k \in \mathbb{N}, \quad h_i \in \mathbb{N}, \\ y(k) &= \sum_{i=0}^r C_i x(k-h_i) + \sum_{i=0}^r D_i u(k-h_i) \end{aligned} \quad (3.99)$$

avec des matrices A_i , B_i , C_i et D_i constantes et de dimensions appropriées et les retards tels que :

$$0 = h_0 < h_1 < \dots < h_r = h \quad (3.100)$$

En prenant les transformées en Z de (3.99) on obtient $Y(z) = G(z)U(z)$, où la matrice de fonction de transfert $G(z)$ est donnée par :

$$G(z) = \sum_{i=0}^r D_i z^{-h_i} + \sum_{i=0}^r C_i z^{-h_i} \left[zI - \sum_{i=0}^r A_i z^{-h_i} \right]^{-1} \sum_{i=0}^r B_i z^{-h_i} \quad (3.101)$$

Chaque terme de $G(z)$ est un rapport de polynômes. La condition de stabilité est assurée lorsque tous les pôles de la fonction de transfert $G(z)$ se trouvent à l'intérieur du cercle de rayon unité.

3.6.2 Application de la méthode directe de Lyapunov

Pour obtenir des conditions de stabilité suffisantes et simples, des fonctions de Lyapunov–Razumikhin ou des fonctionnelles de Lyapunov–Krasovskii discrètes peuvent être appliquées.

Conditions de stabilité indépendantes du retard dans le cas d'un retard variable

Comme pour les systèmes continus, ce cas est traité en adoptant l'approche de Lyapunov–Razumikhin [93]. Dans cette approche, les fonctions de Lyapunov $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont utilisées et la condition de stabilité suivante :

$$V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) \leq -\alpha |x(k)|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.102)$$

pour un $\alpha > 0$ doit être satisfaite sous la condition de Razumikhin :

$$\exists \rho > 1 : \quad V(k+i, x(k+i)) \leq \rho V(k, x(k)), \quad -h_M \leq i \leq -1 \quad (3.103)$$

Proposition 3.1. [94] *On considère le système suivant avec un retard variable dans le temps :*

$$x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-h(k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad h(k) \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq h(k) \leq h \quad (3.104)$$

Soit un scalaire de réglage $q \in (0, 1)$, ce système est asymptotiquement stable si, il existe une matrice $P > 0$ de dimension $n \times n$ qui satisfait LMI suivante :

$$\Gamma_{ind} = \begin{bmatrix} A^T P A - (1-q)P & A^T P A_d \\ * & A_d^T P A_d - qP \end{bmatrix} < 0 \quad (3.105)$$

Démonstration. En choisissant la fonction de Lyapunov–Razumikhin $V(x(k)) = x^T(k) P x(k)$ et en supposant que pour un $\rho > 1$ la condition de Razumikhin

$$x^T(k-h(k)) P x(k-h(k)) \leq \rho x^T(k) P x(k), \quad -h_M \leq i \leq -1, \quad k \geq 0 \quad (3.106)$$

est satisfaite. On trouve, en utilisant la S-procédure avec $q > 0$, que :

$$\begin{aligned}
V(x(k+1)) - V(x(k)) &= \left[x^T(k)A^T + x^T(k-h(k))A_d^T \right] P \left[Ax(k) + A_dx(k-h(k)) \right] \\
&\quad - x^T(k)Px(k) \\
&\leq \left[x^T(k)A^T + x^T(k-h(k))A_d^T \right] P \left[Ax(k) + A_dx(k-h(k)) \right] \\
&\quad - x^T(k)Px(k) + q \left[\rho x^T(k)Px(k) - x^T(k-h(k))Px(k-h(k)) \right] \\
&\leq \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-h(k)) \end{bmatrix} \bar{\Gamma}_{ind} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où

$$\bar{\Gamma}_{ind} = \begin{bmatrix} A^T P A - (1 - q\rho)P & A^T P A_d \\ * & A_d^T P A_d - qP \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

On note que $\bar{\Gamma}_{ind} < 0$ est faisable avec $\rho = 1 + \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit si $\Gamma_{ind} < 0$. A partir de $\Gamma_{ind} < 0$, il s'en suit que $q < 1$. Donc, sous la condition de Razumikhin, $V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq -\alpha|x(k)|^2$ pour un $\alpha > 0$, le système (3.104) est asymptotiquement stable. \square

Remarque 3.2. La faisabilité des conditions indépendantes du retard (3.105) donne les inégalités de Lyapunov $A^T P A - P < 0$ et $A_d^T P A_d - P < 0$, i.e., que A et A_d sont toutes les deux des matrices de Schur (Avec toutes les valeurs propres à l'intérieur du cercle unitaire). Ceci est différent du cas des systèmes continus, où la stabilité indépendante du retard implique que A est seulement une matrice de Hurwitz.

On note que LMI (3.105) donne pour tout $0 \neq x(k) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} x^T(k) & \pm x^T(k) \end{bmatrix} \Gamma_{ind} \begin{bmatrix} x(k) \\ \pm x(k) \end{bmatrix} = x^T(k) \left[(A \pm A_d)^T P (A \pm A_d) - P \right] x(k) < 0 \quad (3.108)$$

Ainsi, l'inégalité de Lyapunov $(A \pm A_d)^T P (A \pm A_d) - P < 0$ est satisfaite, impliquant que $A \pm A_d$ sont des matrices de Schur. Cette dernière relation est similaire à la stabilité indépendante du retard des systèmes continus, où $A \pm A_d$ sont des matrices de Hurwitz.

Conditions de stabilité dépendante du retard

On note :

$$x_k(j) \triangleq x(k+j), \quad j = -h, \dots, -1, 0 \quad (3.109)$$

Les conditions de stabilité dépendante du retard sont déterminées par le lemme suivant [85] :

Lemme 3.10. *Si, il existe deux nombres positifs α , β et une fonctionnelle $V : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{h+1 \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$*

$$0 \leq V(x_k) \leq \beta \left\{ \max_{j \in [-h_M, 0]} |x(k+j)|^2 \right\} \quad (3.110)$$

et

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\alpha |x(k)|^2 \quad (3.111)$$

pour $x(k)$ satisfaisant (3.104), alors le système (3.104) est asymptotiquement stable.

Démonstration. De l'équation (3.111) on obtient :

$$\sum_{j=0}^k (V(x_{j+1}) - V(x_j)) = V(x_{k+1}) - V(x_0) \leq -\alpha \sum_{j=0}^k |x(j)|^2 \quad (3.112)$$

Donc, pour $x(k)$ avec les conditions initiales :

$$\text{col}\{x(0), x(-1), \dots, x(-h_M)\} = \text{col}\{\phi(0), \phi(-1), \dots, \phi(-h_M)\} \quad (3.113)$$

et satisfaisant (3.104), en tenant compte de (3.110), on a :

$$|x(k)|^2 \leq \sum_{j=0}^k |x(j)|^2 \leq \frac{1}{\alpha} V(x_0) \leq \frac{\beta}{\alpha} \max_{j \in [-h_M, 0]} |\phi(j)|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.114)$$

L'inégalité (3.114) implique que $|x(k)|^2$ est petit pour un $\max_{j \in [-h_M, 0]} |\phi(j)|^2$ suffi-

samment petit. De plus :

$$\sum_{j=0}^{\infty} |x(j)|^2 \leq \frac{1}{\alpha} V(x_0) \leq \infty \quad (3.115)$$

Alors, $|x(j)|^2 \rightarrow 0$ pour $j \rightarrow \infty$ □

L'analyse de la stabilité dépendante du retard des systèmes discrets basée sur la théorie Lyapunov utilise la forme suivante de l'inégalité de Jensen :

Lemme 3.11. *Pour tout $\xi(j) \in \mathbb{R}^n (j = 0, \dots, N-1)$ et toute matrice $R > 0$ de dimension $n \times n$:*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^T(j) R \xi(j) \geq \frac{1}{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi^T(j) \right) R \left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi(j) \right) \quad (3.116)$$

Pour le système (3.104), la fonctionnelle discrète de Lyapunov–Krasovskii a la forme :

$$V(x_k) = V_P(k) + V_S(k) + V_R(k), \quad P > 0, R \geq 0, S \geq 0, \quad (3.117)$$

$$V_P(k) = x^T(k) P x(k), \quad V_S(k) = \sum_{j=k-h_M}^{k-1} x^T(j) S x(j) \quad (3.118)$$

$$V_R(k) = h_M \sum_{m=-h_M}^{-1} \sum_{j=k+m}^{k-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j), \quad \bar{y}(j) = x(j+1) - x(j) \quad (3.119)$$

La technique pour obtenir des conditions sous forme de LMI est similaire au cas des systèmes continus [94], [95]. On a :

$$V_P(k+1) - V_P(k) = 2x^T(k) P \bar{y}(k) + \bar{y}^T(k) P \bar{y}(k)$$

$$\begin{aligned} V_S(k+1) - V_S(k) &= \sum_{j=k+1-h_M}^k x^T(j) S x(j) - \sum_{j=k-h_M}^{k-1} x^T(j) S x(j) \\ &= x^T(k) S x(k) - x^T(k-h_M) S x(k-h_M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_R(k+1) - V_R(k) &= h_M \sum_{m=-h_M}^{-1} \sum_{j=k+m+1}^k \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) - h_M \sum_{m=-h_M}^{-1} \sum_{j=k+m}^{k-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) \\ &= h_M^2 \bar{y}^T(k) R \bar{y}(k) - h_M \sum_{j=k-h_M}^{k-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) \end{aligned}$$

On utilise la représentation :

$$-h_M \sum_{j=k-h_M}^{k-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) = -h_M \sum_{j=k-h_M}^{k-h(k)-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) - h_M \sum_{j=k-h(k)}^{k-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) \quad (3.120)$$

et on applique ensuite l'inégalité de Jensen deux fois :

$$\begin{aligned} h_M \sum_{j=k-h_M}^{k-h(k)-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) &\geq \frac{h_M}{h_M - h(k)} \left(\sum_{j=k-h_M}^{k-h(k)-1} \bar{y}(j) \right)^T R \left(\sum_{j=k-h_M}^{k-h(k)-1} \bar{y}(j) \right) \\ &= \frac{h_M}{h_M - h(k)} [x(k-h(k)) - x(k-h_M)]^T R [x(k-h(k)) - x(k-h_M)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_M \sum_{j=k-h(k)}^{k-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) &\geq \frac{h_M}{h(k)} \left(\sum_{j=k-h(k)}^{k-1} \bar{y}(j) \right)^T R \left(\sum_{j=k-h(k)}^{k-1} \bar{y}(j) \right) \\ &= \frac{h_M}{h(k)} [x(k) - x(k-h(k))]^T R [x(k) - x(k-h(k))]. \end{aligned}$$

En utilisant l'approche de la convexité réciproque [85], on obtient :

$$\begin{aligned} -h_M \sum_{j=k-h_M}^{k-1} \bar{y}^T(j) R \bar{y}(j) &\leq -\frac{h_M}{h_M - h(k)} [x(k-h(k)) - x(k-h_M)]^T R \\ &\times [x(k-h(k)) - x(k-h_M)] - \frac{h_M}{h(k)} [x(k) - x(k-h(k))]^T R [x(k) - x(k-h(k))] \\ &\leq \begin{bmatrix} x(k) - x(k-h(k)) \\ x(k-h(k)) - x(k-h_M) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & S_{12} \\ * & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) - x(k-h(k)) \\ x(k-h(k)) - x(k-h_M) \end{bmatrix} \quad (3.121) \end{aligned}$$

pour un $S_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, où la dernière inégalité est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} R & S_{12} \\ * & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.122)$$

est faisable.

Puis, en utilisant la méthode du descripteur, où les termes de droite de l'expres-

sion :

$$0 = 2 \left[x^T(k)P_2^T + \bar{y}^T(k)P_3^T \right] [(A - I)x(k) + A_d x(k - h(k)) - \bar{y}(k)] \quad (3.123)$$

avec $P_2, P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont ajoutés à $V(x_{k+1}) - V(x_k)$, et en posant :

$$\eta_{dis}(k) = col\{x(k), \bar{y}(k), x(k - h_M), x(k - h(k))\} \quad (3.124)$$

on obtient alors :

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq \eta_{dis}^T(k) \Phi_{dis} \eta_{dis}(k) \leq -\alpha |x(k)|^2 \quad (3.125)$$

Cette inégalité est satisfaite pour $\alpha > 0$, par conséquent, le système (3.104) est asymptotiquement stable si LMI suivante est faisable :

$$\Phi_{dis} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & S_{12} & R - S_{12} + P_2^T A_d \\ * & \Phi_{22} & 0 & P_3^T A_d \\ * & * & -(S + R) & R - S_{12}^T \\ * & * & * & -2R + S_{12} + S_{12}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.126)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= (A^T - I)P_2 + P_2^T(A - I) + S - R, \\ \Phi_{12} &= P - P_2^T + (A^T - I)P_3, \quad \Phi_{22} = -P_3 - P_3^T + P + h_M^2 R \end{aligned} \quad (3.127)$$

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 3.14. [85] *Étant donné $0 \leq h$. Si, il existe des matrices $P > 0$, $S > 0$, $R > 0$, S_{12} , P_2 , P_3 de dimension $n \times n$ qui satisfont les LMIs (3.122) et (3.126), alors le système (3.104) est asymptotiquement stable pour tout retard variable $0 \leq h(k) \leq h_M$*

Pour un retard constant $h \leq h_M$, on obtient le corollaire suivant en modifiant les relations précédentes et les arguments de façon similaire aux cas des systèmes continus :

Corollaire 3.1. [85] *Étant donné $0 \leq h_M$. Si, il existe des matrices $P > 0$, $S > 0$,*

$R > 0$, P_2, P_3 de dimension $n \times n$ qui satisfont LMI :

$$\begin{bmatrix} (A-I)^T P_2 + P_2^T (A-I) + S - R & P - P_2^T + A^T P_3 & P_2^T A + R \\ * & -P_3 - P_3^T + P + h_M^2 R & P_3^T A_d \\ * & * & -S - R \end{bmatrix} < 0 \quad (3.128)$$

alors le système (3.104) est asymptotiquement stable pour tout retard constant $0 \leq h \leq h_M$. De plus, si (3.128) est faisable avec $R = 0$, alors (3.104) est stable indépendamment du retard pour tout retard constant h .

On note que, de manière similaire au cas des systèmes continus, les LMIs basées sur le descripteur (3.126) et (3.128) sont affines par rapport aux matrices du système et peuvent facilement être appliquées aux systèmes incertains avec des incertitudes de type polytopique.

3.6.3 Critère de stabilité pour les systèmes discrets à retard variable dans un intervalle

On considère le système discret suivant avec un retard variable dans l'état :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-h(k)) \\ x(k) &= \phi(k), \quad k = -h_M, -h_M+1, \dots, 0 \end{aligned} \quad (3.129)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont connues et constantes. $\phi(k)$ est la condition initiale et le retard $h(k)$ est un entier positif supposé variable qui satisfait la relation suivante :

$$0 < h_m \leq h(k) \leq h_M \quad (3.130)$$

où h_m et h_M sont des entiers constants qui représentent respectivement le retard minimum et maximum.

Le but est de proposer un critère de stabilité dépendante du retard pour le système (3.129), pour cela, le lemme suivant est nécessaire :

Lemme 3.12. [96] Pour toute matrice constante $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M = M^T > 0$, tout entier γ_1, γ_2 (avec $\gamma_2 \geq \gamma_1$), toute fonction vecteur $\omega : \{\gamma_1, \gamma_1+1, \dots, \gamma_2\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels

que les sommes suivantes sont bien définies, alors :

$$-(\gamma_2 - \gamma_1 + 1) \sum_{i=\gamma_1}^{\gamma_2} \omega^T(i) M \omega(i) \leq - \left(\sum_{i=\gamma_1}^{\gamma_2} \omega(i) \right)^T M \left(\sum_{i=\gamma_1}^{\gamma_2} \omega(i) \right) \quad (3.131)$$

On choisit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) \quad (3.132)$$

où

$$\begin{aligned} V_1(k) &= x^T(k) P x(k) \\ V_2(k) &= \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} x^T(i) Q x(i) \\ V_3(k) &= \sum_{j=-h_M+2}^{-h_m+1} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^T(i) Q x(i) \\ V_4(k) &= \sum_{i=-h_M}^{-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \eta^T(m) Z \eta(m) \end{aligned}$$

avec

$$\eta(m) = x(m+1) - x(m) = (A - I)x(m) + A_d x(m - d(m))$$

On a $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$, puis tout au long de la solution du système (3.129), on a :

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) + \Delta V_4(k) \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &= x^T(k) [A^T P A - P] x(k) + x^T(k) A^T P A_d x(k - h(k)) + x^T(k - h(k)) A_d^T P A x(k) \\ &\quad + x^T(k - h(k)) A_d^T P A_d x(k - h(k)) \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) = & x^T(k)Qx(k) - x^T(k-h(k))Qx(k-h(k)) + \sum_{i=k-h(k+1)+1}^{k-1} x^T(i)Qx(i) \\ & - \sum_{i=k-h(k)+1}^{k-1} x^T(i)Qx(i) \end{aligned}$$

On note que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-h(k+1)+1}^{k-1} x^T(i)Qx(i) &= \sum_{i=k-h(k+1)+1}^{k-h_m} x^T(i)Qx(i) + \sum_{i=k-h_m+1}^{k-1} x^T(i)Qx(i) \\ &\leq \sum_{i=k-h_M+1}^{k-h_m} x^T(i)Qx(i) + \sum_{i=k-h(k)+1}^{k-1} x^T(i)Qx(i) \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\Delta V_2(k) \leq x^T(k)Qx(k) - x^T(k-h(k))Qx(k-h(k)) + \sum_{i=k-h_M+1}^{k-h_m} x^T(i)Qx(i) \quad (3.135)$$

De plus :

$$\Delta V_3(k) = (h_M - h_m)x^T(k)Qx(k) - \sum_{i=k-h_M+1}^{k-h_m} x^T(i)Qx(i) \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_4(k) = & x^T(k) \left[h_M(A-I)^T Z(A-I) \right] x(k) + x^T(k) \left[h_M(A-I)^T Z A_d \right] x(k-h(k)) \\ & + x^T(k-h(k)) \left[h_M A_d^T Z(A-I) \right] x(k) + x^T(k-h(k)) \left[h_M A_d^T Z A_d \right] x(k-h(k)) \\ & - \sum_{m=k-h_M}^{k-1} \eta^T(m) Z \eta(m) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.12, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} - \sum_{m=k-h_M}^{k-1} \eta^T(m) Z \eta(m) &\leq -\frac{1}{h_M} \left[\sum_{m=k-h_M}^{k-1} \eta(m) \right]^T Z \left[\sum_{m=k-h_M}^{k-1} \eta(m) \right] \\ &\leq -\frac{1}{h_M} \left[\sum_{m=k-h(k)}^{k-1} \eta(m) \right]^T Z \left[\sum_{m=k-h(k)}^{k-1} \eta(m) \right] \end{aligned}$$

En utilisant la relation suivante :

$$\sum_{m=k-h(k)}^{k-1} \eta(m) = x(k) - x(k-h(k))$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} \Delta V_4(k) &\leq x^T(k) \left[h_M(A-I)^T Z(A-I) - \frac{1}{h_M} Z \right] x(k) \\ &\quad + x^T(k) \left[h_M(A-I)^T Z A_d + \frac{1}{h_M} Z \right] x(k-h(k)) \\ &\quad + x^T(k-h(k)) \left[h_M A_d^T Z(A-I) + \frac{1}{h_M} Z \right] x(k) \\ &\quad + x^T(k-h(k)) \left[h_M A_d^T Z A_d - \frac{1}{h_M} Z \right] x(k-h(k)) \end{aligned} \quad (3.137)$$

A partir des relations (3.133)-(3.137) on a :

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &\leq x^T(k) \left[A^T P A - P + (h_M - h_m + 1)Q + h_M(A-I)^T Z(A-I) - \frac{1}{h_M} Z \right] x(k) \\ &\quad + x^T(k) \left[A^T P A_d + h_M(A-I)^T Z A_d + \frac{1}{h_M} Z \right] x(k-h(k)) \\ &\quad + x^T(k-h(k)) \left[A_d^T P A + h_M A_d^T Z(A-I) + \frac{1}{h_M} Z \right] x(k) \\ &\quad + x^T(k-h(k)) \left[A_d^T P A_d - Q + h_M A_d^T Z A_d - \frac{1}{h_M} Z \right] x(k-h(k)) \end{aligned} \quad (3.138)$$

Ou bien sous la forme suivante :

$$\Delta V(k) \leq \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-h(k)) \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \end{bmatrix}$$

où

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ * & \Omega_{22} \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

avec

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= A^T P A - P + (h_M - h_m + 1)Q + h_M(A - I)^T Z(A - I) - \frac{1}{h_M}Z \\ \Omega_{12} &= A^T P A_d + h_M(A - I)^T Z A_d + \frac{1}{h_M}Z, \quad \Omega_{22} = A_d^T P A_d - Q + h_M A_d^T Z A_d - \frac{1}{h_M}Z\end{aligned}$$

Si $\Omega < 0$ alors $\Delta V(k) < 0$ et le système (3.129) est asymptotiquement stable.

En appliquant le complément de Schur sur la condition $\Omega < 0$ puis le changement de la variable $\frac{1}{h_M}Z$ en Z , on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.15. *le système (3.129) est asymptotiquement stable pour tout retard $h(k)$ satisfaisant (3.130) si, il existe des matrices $P > 0$, $Q > 0$ et $Z > 0$ telles que LMI suivante est satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} \Gamma & Z & A^T P & h_M(A - I)^T Z \\ * & -Q - Z & A_d^T P & h_M A_d^T Z \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (3.140)$$

où $\Gamma = -P + (h_M - h_m + 1)Q - Z$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résumé les différentes approches permettant d'étudier la stabilité des systèmes à retards en se basant sur l'utilisation des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Ces approches s'appuient sur l'expression des conditions de stabilité sous formes d'inégalités linéaires matricielles (LMI) dépendantes ou indépendantes du retard.

Les conditions de stabilité sont également examinées dans le domaine fréquentiel en se basant sur l'approche quasi-polynômiale.

Les conditions de stabilité des systèmes à retards continus et discrets ont été présentées dans ce chapitre.

Chapitre 4

Commande des systèmes à retards

4.1 Introduction

Depuis le prédicteur de Smith à la fin des années 50, la commande par/de système à retards a été beaucoup considérée. Plusieurs techniques ont été basées sur des méthodes d'approximations, lesquelles ne sont pas forcément adéquates quand des incertitudes significatives (incluant la variation du retard) sont impliquées.

Durant la dernière décennie, plusieurs méthodes de commande des systèmes à retards ont été développées, tout simplement en adaptant les méthodes qui ont prouvé leur efficacité pour les systèmes sans retards. Dans ce qui suit nous allons présenter les plus fréquemment utilisées.

4.2 Commande par temps de retard

La commande par temps de retard (« TDC » Time Delay Control) est une technique qui introduit volontairement un petit retard τ dans la conception de commande, afin de réduire l'effet de perturbations additives $d(t)$ représentant des dynamiques inconnues. Plutôt que d'ajuster les gains de la commande (commande adaptative) ou les paramètres du modèle, son idée essentielle est d'utiliser les observations antérieures concernant à la fois l'entrée de commande et la réponse du système. Par exemple, et afin de présenter le principe fondamental de TDC, considérons un système linéaire stationnaire (à paramètres constants) perturbé sous sa

forme normale [97] :

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i(t) + bu(t) + d(t) \quad (4.2)$$

L'utilisation de la dérivée retardée $\dot{x}(t - \tau)$ (calculée à partir des mesures antérieures de $x(t)$) nous permet de définir la commande par :

$$u(t) = v(t) + u(t - \tau) - b^{-1} \left[\dot{x}_n(t - \tau) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i(t - \tau) \right] \quad (4.3)$$

où $v(t)$ est une commande auxiliaire.

Le système (4.1)-(4.2) devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t) \\ \dot{x}_n(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i(t) + bv(t) + \Delta(t) \\ \Delta(t) &= d(t) - d(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Donc, le remplacement du terme de perturbation $d(t)$ (modèle initial) par la différence $[d(t) - d(t - \tau)]$ permet le rejet des perturbations qui varient lentement.

4.3 Commande utilisant la technique du prédicteur

4.3.1 Cas des systèmes linéaires à paramètres constants (LTI)

On considère le système LTI avec entrée retardée :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (4.5)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$. Le retard constant $\tau > 0$ et les matrices constantes A et B sont supposées être connus. On cherche une commande stabilisante par retour

d'état. On suppose qu'il existe un gain K tel que $A + BK$ est une matrice de Hurwitz. Mathématiquement, cela signifie que la commande :

$$v(t) = u(t - \tau) = Kx(t) \quad \text{ou} \quad u(t) = Kx(t + \tau) \quad (4.6)$$

stabilise le système (4.5). Ensuite, en intégrant (4.5) avec la condition initiale $x(t)$ on trouve :

$$x(t + \tau) = e^{A\tau}x(t) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)}Bu(s - \tau)ds \quad (4.7)$$

Ainsi, les termes de droite de (4.7) prédisent la valeur de $x(t + \tau)$. Après le changement de variable $\xi = s - t - \tau$ dans l'intégrale, on aboutit à la commande stabilisante suivante :

$$u(t) = K \left[e^{A\tau}x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\xi}Bu(t + \xi)d\xi \right] \quad (4.8)$$

C'est l'idée de la commande basée sur le prédicteur [98], [99], qui réduit la stabilisation des systèmes à retards à celle des systèmes sans retards.

Remarque 4.1. *Les mécanismes d'instabilité, liés à l'implémentation des contrôleurs à retard distribué (4.8), et les techniques efficaces pour surmonter ces problèmes d'instabilité sont étudiés dans [100], [101].*

4.3.2 Cas des systèmes linéaires à paramètres variants (LTV)

La réduction des problèmes de commande pour les systèmes LTV à retard quelconque dans l'entrée de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_{-\tau}^0 d_\theta \eta(t, \theta)u(t + \theta), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^{n_u} \quad (4.9)$$

où la matrice η de dimension $n \times n_u$ est une fonction de variation bornée par rapport à θ , à ceux des systèmes sans retards peut être accomplie en utilisant l'approche de réduction de modèle [102], [103].

Cette approche est basée sur le changement de la variable d'état. En effet, pour

le système (4.5), le changement de l'état :

$$z(t) = e^{A\tau}x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (4.10)$$

conduit à

$$\dot{z}(t) = Ae^{A\tau}x(t) + e^{A\tau}Bu(t-\tau) + A \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + Bu(t) - e^{A\tau}Bu(t-\tau) \quad (4.11)$$

ou au système sans retards suivant :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \quad (4.12)$$

On suppose qu'il existe un gain K tel que la matrice $A+BK$ est une matrice de Hurwitz. Alors le retour d'état $u(t) = Kz(t)$ stabilise le système (4.12) de la même manière que pour les systèmes LTI.

Pour un système plus général avec un retard $\tau > 0$ dans l'entrée :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_0u(t) + Bu(t-\tau), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^{n_u} \quad (4.13)$$

le même changement d'état réduit le système original au système sans retards suivant :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + [e^{A\tau}B_0 + B]u(t) \quad (4.14)$$

Pour un système linéaire avec retard dans l'entrée et l'état, Fiagbedzi et Pearson [104] ont suggéré un changement d'état qui conduit à un système sans retards. L'approche de réduction a été étendue aux systèmes linéaires incertains avec retard dans l'entrée [105], [106]. Pour cela on considère le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^{n_u} \quad (4.15)$$

avec un retard incertain $\tau(t) = \tau + \eta(t)$, où τ est la valeur nominale constante connue et $|\eta(t)| \leq \mu < \tau$ est une incertitude sur le retard. Le changement de variable d'état

(4.10) conduit le système (4.15) à :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + e^{A\tau} B[u(t - \tau(t)) - u(t - \tau)] \quad (4.16)$$

On suppose qu'il existe un gain K tel que la matrice $A + BK$ est une matrice de Hurwitz. Alors la commande par retour d'état $u(t) = Kz(t)$ stabilise (4.16) si le système suivant est stable :

$$\dot{z}(t) = (A + BK)z(t) + e^{A\tau} BK[z(t - \tau(t)) - z(t - \tau)] \quad (4.17)$$

La stabilité du système (4.17) peut être analysée en utilisant la méthode direct de Lyapunov–Krasovskii en employant la fonctionnelle suivante :

$$V(z(t), \dot{z}_t) = z^T(t)Pz(t) + \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\theta-\tau}^t \dot{z}^T(s)R_1\dot{z}(s)dsd\theta, \quad R_1 > 0 \quad (4.18)$$

Ceci conduit à des conditions sous forme de LMI si K est donnée. La formulation des conditions sous forme de LMI pour trouver un gain convenable K peut être ensuite obtenue en appliquant la méthode présentée dans la section 4.4 ci-dessous.

4.4 Approche de commande basée sur LMI

Différents problèmes de commande pour les systèmes linéaires incertains avec retard dans l'état et l'entrée/sortie constant ou variable peuvent être résolus en utilisant les LMIs [107]-[109]. On considère ci-dessous la commande par retour d'état en suivant la procédure suggérée dans [108]. Dans ces conditions, le système à retard variable a pour modèle :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t)) \quad (4.19)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est la commande et $\tau(t) \in [0, \tau_M]$ est le retard variable dans l'entrée. On suppose que le retard soit il varie lentement avec $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$, soit il varie rapidement. On cherche une commande par retour d'état stabilisante de la forme $u(t) = Kx(t)$ qui conduit à un système en boucle fermée asymptotiquement uniformément stable. Le modèle du système en boucle fermée a

pour expression :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \tau(t)) \quad (4.20)$$

Dans [85], des conditions de stabilité asymptotique sous forme de LMI ont été établies pour le système (4.20) avec K connu. Si K est inconnu, les inégalités deviennent non-linéaires et auront les formes suivantes :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S + Q - R & 0 & PBK + R & \tau_M A^T R \\ * & -S - R & R & 0 \\ * & * & -(1-d)Q - 2R & \tau_M K^T B^T R \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

et

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & P - P_2^T + A^T P_3 & S_{12} & P_2^T BK + R - S_{12} \\ * & -P_3 - P_3^T + \tau_M^2 R & 0 & P_3^T BK \\ * & * & -(S + R) & R - S_{12}^T \\ * & * & * & -(1-d)Q - 2R + S_{12} + S_{12}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.22)$$

$$\phi_{11} = A^T P_2 + P_2^T A + S + Q - R \quad (4.23)$$

$$\begin{bmatrix} R & S_{12} \\ * & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.24)$$

On voit que ces deux inégalités sont non-linéaires : (4.21) à cause des termes PBK , RBK et (4.22) à cause de $P_2^T BK$, $P_3^T BK$.

Afin de trouver le gain inconnu K , on utilise soit une procédure itérative [44], soit une transformation de l'inégalité matricielle non linéaire en LMI. Il est difficile de linéariser (4.21) sans des conditions restrictives sur les matrices de la fonctionnelle de Lyapunov P et R . D'autre part, P_2 et P_3 sont des variables intermédiaires dans l'inégalité de la méthode basée sur le descripteur (4.22) et, donc, le choix $P_3 = \epsilon P_2$ avec un scalaire d'ajustement ϵ ne doit pas conduire à des résultats très conservatifs. On note :

$$\bar{P}_2 = P_2^{-1}, \quad Y = K\bar{P}_2, \quad \begin{bmatrix} \bar{P} & \bar{R} & \bar{S} & \bar{Q} & \bar{S}_{12} \end{bmatrix} = \bar{P}_2^T \begin{bmatrix} P & R & S & Q & S_{12} \end{bmatrix} \bar{P}_2 \quad (4.25)$$

On multiplie (4.22) par $diag\{\bar{P}_2, \bar{P}_2, \bar{P}_2, \bar{P}_2\}$ et sa transposée, respectivement, du côté droit et gauche. On obtient alors :

$$\bar{\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{11} & \bar{P} - \bar{P}_2 + \epsilon \bar{P}_2^T A^T & \bar{S}_{12} & BY + \bar{R} - \bar{S}_{12} \\ * & -\epsilon \bar{P}_2 - \epsilon \bar{P}_2^T + \tau_M^2 \bar{R} & 0 & \epsilon BY \\ * & * & -(\bar{S} + \bar{R}) & \bar{R} - \bar{S}_{12}^T \\ * & * & * & -(1-d)\bar{Q} - 2\bar{R} + \bar{S}_{12} + \bar{S}_{12}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

$$\bar{\phi}_{11} = A\bar{P}_2 + \bar{P}_2^T A^T + \bar{S} + \bar{Q} - \bar{R} \quad (4.27)$$

De la même façon, on multiplie (4.24) par $diag\{\bar{P}_2, \bar{P}_2\}$ et sa transposée, respectivement, du côté droit et gauche, on aboutit à :

$$\begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{S}_{12} \\ * & \bar{R} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.28)$$

Soit ϵ un paramètre de réglage, les inégalités (4.26) et (4.28) sont des LMIs par rapport à $\bar{P} > 0$, $\bar{R} > 0$, $\bar{Q} \geq 0$, $\bar{S} > 0$, \bar{P}_2 et \bar{S}_{12} .

La résolution de ces LMIs par utilisation du logiciel Matlab-Simulink permet de déterminer la valeur numérique du gain K et les bornes du retard.

On considère dans ce qui suit la commande H_∞ par retour d'état du système à retard variable suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t - \tau(t)) + B_1 w(t) \quad (4.29)$$

$$z(t) = C_0 x(t) + Du(t - \tau(t)) \quad (4.30)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est la commande, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est la perturbation, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est la sortie commandée, et $\tau(t) \in [0, \tau_M]$ est le retard variable. Comme précédemment, on suppose que le retard varie soit lentement avec $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$ soit rapidement. On considère le critère de performance J suivant :

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt \quad (4.31)$$

où $\gamma > 0$, on cherche un retour d'état $u(t) = Kx(t)$ qui stabilise le système et conduit

à un gain L_2 inférieur à γ . Le système en boucle fermée a la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2Kx(t - \tau(t)) + B_1w(t) \quad (4.32)$$

$$z(t) = C_0x(t) + DKx(t - \tau(t)) \quad (4.33)$$

Soit l'inégalité matricielle suivante [85] :

$$\left[\begin{array}{c|cc} \Xi_0 & P_2^T B_1 & C_0^T \\ & P_3^T B_1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & K^T D^T \\ \hline * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{array} \right] < 0 \quad (4.34)$$

où

$$\Xi_0 = \left[\begin{array}{cccc} \phi_{11} & \phi_{12} & S_{12} & (R - S_{12}) + P_2^T B_2 K \\ * & \phi_{22} & 0 & P_3^T B_2 K \\ * & * & -(S + R) & R - S_{12}^T \\ * & * & * & -2R + S_{12} + S_{12}^T + (1 - d)Q \end{array} \right] \quad (4.35)$$

$$\phi_{11} = A^T P_2 + P_2^T A + S + Q - R$$

$$\phi_{12} = P - P_2^T + A^T P_3, \quad \phi_{22} = -P_3 - P_3^T + \tau_M^2 R \quad (4.36)$$

L'inégalité matricielle (4.34) assure $J < 0$ pour (4.32)-(4.33). Comme précédemment, on multiplie (4.34) par $\text{diag}\{\bar{P}_2, \bar{P}_2, \bar{P}_2, \bar{P}_2, I, I\}$ et sa transposée, respectivement, du côté droit et gauche, on obtient :

$$\left[\begin{array}{c|cc} \bar{\phi} & B_1 & \bar{P}_2^T C_0^T \\ & \epsilon B_1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & Y^T D^T \\ \hline * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{array} \right] < 0 \quad (4.37)$$

où $\bar{\phi}$ est donnée par (4.26)

Proposition 4.1. Soit $\gamma > 0$, $\tau_M > 0$, $0 \leq d < 1$ et un paramètre de réglage $\epsilon > 0$, on

suppose qu'il existe des matrices $\bar{P} > 0$, $\bar{R} > 0$, $\bar{P}_2 > 0$, \bar{R} , $\bar{S} > 0$, \bar{Q} , \bar{S}_{12} de dimension $n \times n$ et une matrice Y de dimension $n_u \times n$ qui satisfont les LMIs (4.28) et (4.37), où $\bar{\phi}$ est donnée par (4.26). Alors pour tout retard $\tau(t) \in [0, \tau_M]$ avec $\dot{\tau}(t) \leq d$, le système en boucle fermée (4.32)-(4.33) est exponentiellement stable et a un gain L_2 inférieur à γ . Le gain du retour d'état est donné par $K = Y\bar{P}_2^{-1}$. De plus, si les LMIs ci-dessus sont faisable avec $\bar{Q} = 0$, alors (4.32)-(4.33) est exponentiellement stable et a un gain L_2 inférieur à γ pour tout retard $\tau(t) \in [0, \tau_M]$ qui varie rapidement.

Remarque 4.2. On note que les LMIs de la proposition 4.1 sont affines par rapport aux matrices du système. Par conséquent, dans le cas d'incertitude de type polytopique avec A , B_1 , B_2 , C_0 , et D du polytope variable et incertain suivant :

$$\Omega = \sum_{j=1}^M f_j \Omega_j, \quad 0 \leq f_j(t) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^M f_j = 1, \quad \Omega_j = \begin{bmatrix} A^{(j)} & B_1^{(j)} & B_2^{(j)} & C_0^{(j)} & D^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

on doit alors résoudre ces LMIs simultanément pour tous les M vertex Ω_j , en appliquant les mêmes matrices de décision.

4.5 Commande des systèmes discrets à retards

Le problème de la synthèse de la commande des systèmes discrets à retards basée sur l'approche des LMIs peut être résolu d'une manière similaire au cas des systèmes continus. On considère ci-dessous le problème de la commande des systèmes à retard variable et incertain de la forme suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h(k)), \quad k \geq 0 \quad (4.39)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(k) = 0, \quad k \leq 0 \quad (4.40)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$, A et B sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $h(k) \in [0, h_M]$. On considère aussi le critère suivant :

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} z^T(k)z(k) \quad (4.41)$$

où le vecteur objectif $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est défini par :

$$z(k) = Lx(k) + Du(k - h(k)) \quad (4.42)$$

pour des matrices L et D de dimensions appropriées.

Pour les systèmes avec retard et/ou matrices de systèmes incertains, la commande optimale et le critère J n'existent pas. Dans ce cas, soit une condition initiale x_0 , une loi de commande peut être trouvée qui conduit à un coût minimum δ pour J ($J \leq \delta$) pour toutes les incertitudes. Une commande par retour d'état $u(k) = Kx(k)$ est recherchée dans ce qui suit, pour une condition initiale donnée x_0 , conduit à un coût minimum δ pour J ($J(x_0) \leq \delta$) pour tout retard incertain $h(k)$. Le système en boucle fermée a la forme suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + BKx(k - h(k)), \quad z(k) = Lx(k) + DKx(k - h(k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.43)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(k) = 0, \quad k \leq 0 \quad (4.44)$$

On choisit la fonction de Lyapunov $V(x_k)$ de (3.117), on a donc :

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) + z^T(k)z(k) \leq \bar{\xi}^T(k)\Gamma\bar{\xi}(k) < -\alpha|x(k)|^2, \quad \alpha > 0 \quad (4.45)$$

où $\bar{\xi}(k) = \text{col}\{x(k), y(k), x(k - h_M), x(k - h(k)), z(k)\}$ si

$$\Gamma = \left[\begin{array}{c|c} & L^T \\ \hline \Phi_{dis} & 0 \\ & K^T D^T \\ \hline * & -I \end{array} \right] < 0, \quad \begin{bmatrix} R & S_{12} \\ * & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.46)$$

ici Φ_{dis} est donnée par (3.126) avec $A_d = BK$.

On prend la somme des deux cotés de (4.45), de 0 à N , et on obtient :

$$\sum_{k=0}^N z^T(k)z(k) \leq V(x_0) - V(x_{N+1}) \leq V(x_0) \quad (4.47)$$

et ainsi :

$$J \leq V(x_0) = x^T(0)Px(0) \quad (4.48)$$

On choisit, comme dans le cas des systèmes continus, $P_3 = \epsilon P_2$ et

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 &= P_2^{-1}, \quad \bar{P} = \bar{P}_2^T P \bar{P}_2, \quad \bar{R} = \bar{P}_2^T R \bar{P}_2, \quad \bar{S} = \bar{P}_2^T S \bar{P}_2, \quad \bar{S}_{12} = \bar{P}_2^T S_{12} \bar{P}_2, \\ Y &= K \bar{P}_2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

En multipliant la première inégalité (4.46) par $\text{diag}\{\bar{P}_2, \bar{P}_2 \bar{P}_2, \bar{P}_2, I\}$ et sa transposée, respectivement, du côté droit et gauche, et la deuxième par $\text{diag}\{\bar{P}_2, \bar{P}_2\}$ et sa transposée, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Theta & \bar{P} - \bar{P}_2 + \epsilon \bar{P}_2^T A^T & \bar{S}_{12} & BY + \bar{R} - \bar{S}_{12} & L^T \\ * & \bar{P} - \epsilon \bar{P}_2 - \epsilon \bar{P}_2^T + h_M^2 \bar{R} & 0 & \epsilon BY & 0 \\ * & * & -(\bar{S} + \bar{R}) & \bar{R} - \bar{S}_{12}^T & 0 \\ * & * & * & -2\bar{R} + \bar{S}_{12} + \bar{S}_{12}^T & Y^T D^T \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{S}_{12} \\ * & \bar{R} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.51)$$

où

$$\Theta = (A - I)\bar{P}_2 + \bar{P}_2^T(A - I)^T + \bar{S} - \bar{R} \quad (4.52)$$

Ensuite, soit $\delta > 0$, $V(0) = x^T(0)Px(0) < \delta$ si

$$\begin{bmatrix} -\delta & x^T(0)P \\ * & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (4.53)$$

ou d'une façon similaire à [85], si :

$$\begin{bmatrix} -\delta & x_0^T \\ * & -\bar{P}_2 - \bar{P}_2^T + \bar{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.54)$$

Proposition 4.2. *Soit une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, une constante $h_M > 0$ et un paramètre de réglage ϵ , on suppose qu'il existe des matrices $\bar{P} > 0$, $\bar{R} > 0$, $\bar{P}_2 > 0$,*

$\bar{S} > 0$, $\bar{S}_{12} > 0$ de dimension $n \times n$, une matrice Y de dimension $n_u \times n$ et $\delta > 0$ tels que les LMIs (4.50)-(4.51) et (4.54) avec la notation (4.52) sont faisable. Alors, pour tout retard $h(k) \in [0, h_M]$ le système en boucle fermée (4.43)-(4.44) est exponentiellement stable et il garantit un coût δ pour J ($J \leq \delta$). Le gain du retour d'état est alors donné par $K = Y\bar{P}_2^{-1}$.

Pour minimiser le critère, le problème d'optimisation suivant peut être résolu : minimiser $\delta > 0$ sous les contraintes (4.50)-(4.51) et (4.54).

Remarque 4.3. Comme dans le cas des systèmes continus, les LMIs, pour l'analyse et la synthèse de la proposition 4.2, sont affines par rapport aux matrices du système. Par conséquent, dans le cas d'incertitude variable de type polytopique dans ces matrices, on doit résoudre ces LMIs simultanément pour toutes les vertex, en appliquant les mêmes matrices de décision.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes les plus utilisées pour la commande des systèmes à retards. Ces méthodes sont celles qui ont prouvé leur efficacité pour la commande des systèmes sans retards ensuite elles ont été adaptées au systèmes avec retards. Un important intérêt a été accordé aux méthodes qui utilisent les LMI pour définir les conditions de commande des systèmes à retards.

Chapitre 5

Simulation de quelques systèmes à retards

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, une simulation de quelques exemples de systèmes à retards est présentée afin d'illustrer la validité des approches proposées dans cette thèse.

Le premier exemple traite la stabilité d'un système neutre incertain avec un retard discret et un retard distribué, le deuxième traite l'étude de la stabilité d'un système "cloud computing" dans le domaine discret avec retard variable et le dernier traite la stabilité d'un système de suivi de ligne sur un écran tactile. Les résultats obtenus dans les différents exemples sont comparés aux résultats présentés dans la littérature.

L'analyse des résultats obtenus par un choix judicieux d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii et une combinaison de différentes approches de bornage des différents termes de la dérivée, montre une supériorité très significative de notre approche par rapport aux résultats présentés dans la littérature.

5.2 Exemple 1 : Etude de stabilité pour un système neutre incertain avec un retard discret et un retard distribué

On considère le système incertain proposé dans les références [110]-[114] afin de comparer nos résultats aux différents résultats obtenus dans ces références. Le modèle de ce système est le suivant :

$$\dot{x}(t) - (C + \Delta C)\dot{x}(t - \tau) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - h) + (D + \Delta D) \int_{t-r}^t x(s) ds \quad (5.1)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [-\max\{\tau, h, r\}, 0] \quad (5.2)$$

avec $[\Delta A(t) \quad \Delta B(t) \quad \Delta C(t) \quad \Delta D(t)] = LF(t) [E_a \quad E_b \quad E_c \quad E_d]$ et $F^T(t)F(t) \leq I$

Les paramètres du modèle sont :

$$A = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1.1 & -0.2 \\ -0.1 & -1.1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.12 \\ -0.12 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$L = I$, $E_a = E_b = E_c = E_d = 0.1I$ et $\tau = 0.1$

La fonction de Lyapunov-Krasovskii retenue pour déterminer les conditions de stabilité de ce système est donnée par la relation (3.63). La dérivée de cette fonction est donnée par la relation (3.78).

Les conditions de négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov-Krasovskii sont données par LMI (3.86) du théorème 3.10. La simulation de ces conditions de stabilité sous l'environnement Matlab a fourni les résultats présentés aux tableaux 5.1 et 5.2.

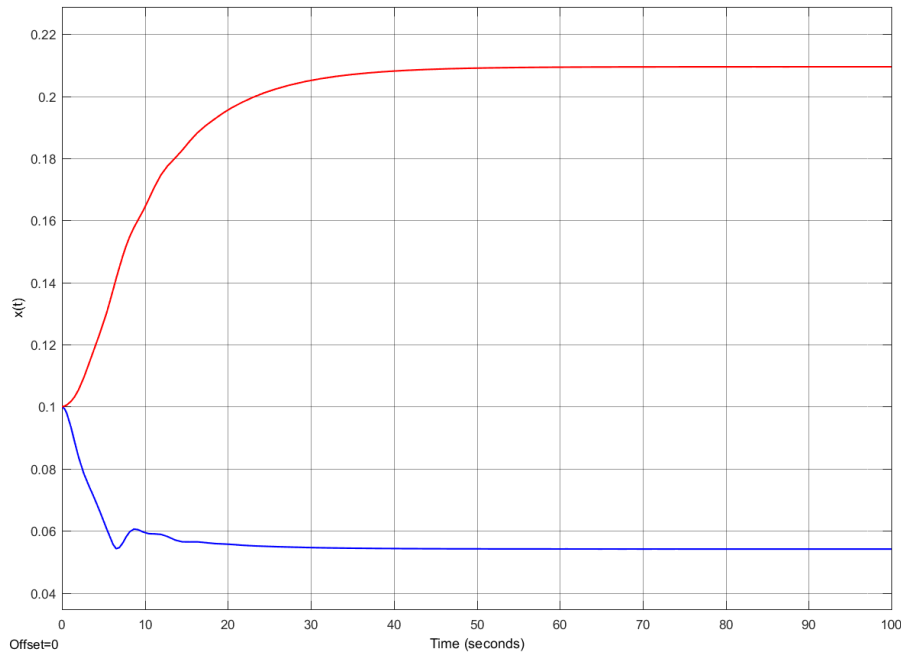
La valeur maximale du retard distribué r pour laquelle le système considéré reste stable est donnée dans le tableau 5.1 pour différentes valeurs du retard discret h . On peut facilement voir que les valeurs calculées en utilisant le théorème 3.10 que nous proposons sont meilleures que celles calculées par d'autres critères dans la littérature.

Prenant les valeurs des retards $h = 1$ et $r = 6.21$ à partir du tableau 5.1, par

h	0.1	0.5	1	1.5	1.6	1.7
Li et al. [110]	6.64	5.55	1.62	–	–	–
Sun et al. [111]	6.67	6.12	2.75	1.31	0.93	0.42
Chen et al. [113]	6.67	6.02	3.19	1.50	1.25	1.02
Liu et al. [112]	6.65	6.21	4.95	1.36	1.07	0.81
Liu et al. [112](N=3)	6.65	6.21	5.01	1.54	1.18	0.92
Chen et al. [114]	6.67	6.67	5.52	1.95	1.55	1.46
Théorème 3.10	6.67	6.67	6.21	2.69	2.06	1.65

TABLE 5.1 – Valeur maximale admissible de r pour différentes valeurs de h

exemple, on peut voir sur la figure 5.1 que le système est bien stable pour les valeurs initiales $\phi^T(0) = [0.1 \ 0.1]$

FIGURE 5.1 – Réponse du système pour $h = 1$ et $r = 6.21$

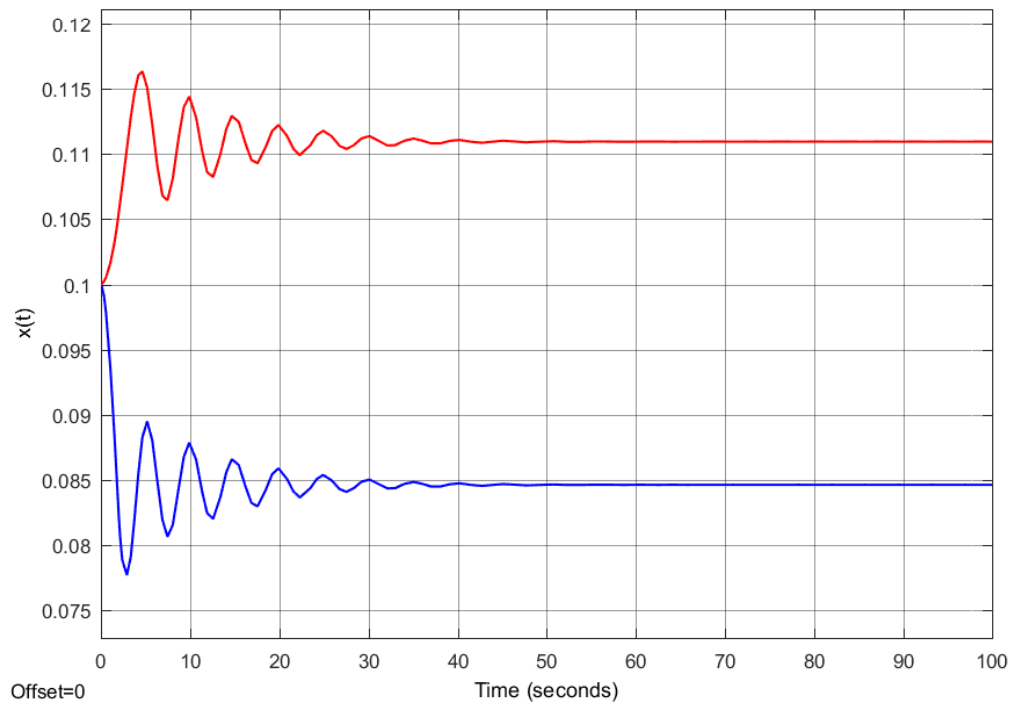
Le tableau 5.2 donne la borne supérieure du retard discret h qui assure la stabilité du système considéré pour différentes valeurs du retard distribué r . Les résultats obtenus en appliquant le théorème 3.10 y sont comparés avec d'autres valeurs calculées en utilisant différents critères. On voit bien que le théorème 3.10 est moins conservatif.

Si on prend les valeurs des retard $r = 2$ et $h = 1.61$ du tableau 5.2, la stabilité du système peut facilement être déduite à partir de la réponse du système sur la

r	1	2	3	4	5	6
Li et al.[110]	1.12	0.93	0.77	0.65	0.55	0.43
Sun et al.[111]	1.58	1.20	0.95	0.77	0.64	0.51
Chen et al. [113]	1.71	1.71	1.09	0.83	0.68	0.51
Liu et al.[112]	1.62	1.40	1.27	1.14	0.99	0.63
Liu et al. [112](N=3)	1.67	1.43	1.30	1.16	1.00	0.63
Chen et al. [114]	1.90	1.49	1.34	1.20	1.07	0.91
Théorème 3.10	1.90	1.61	1.46	1.35	1.22	1.05

TABLE 5.2 – Valeur maximale admissible de h pour différentes valeurs de r

figure 5.2 pour les conditions initiales $\phi^T(0) = [0.1 \ 0.1]$.

FIGURE 5.2 – Réponse du système pour $r = 2$ et $h = 1.61$

5.3 Exemple 2 : Analyse de stabilité pour un système cloud computing dans le domaine discret avec retard variable

Dans ce deuxième exemple de simulation nous présentons l'analyse de la stabilité d'un système discret avec un retard variable. Pour cela considérons le modèle du système "cloud computing" suivant [115] :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h(k))$$

avec $x^T(k) = [x_1^T(k) \ x_2^T(k) \ x_3^T(k) \ x_4^T(k)]$ où $x_1(k)$ est l'utilisation du CPU, $x_2(k)$ est le temps de réponse, $x_3(k)$ est le débit, $x_4(k)$ est une augmentation de l'état qui définit l'erreur et $u(k)$ représente le nombre de machines virtuelles. $h(k)$ est le retard qui varie dans un intervalle $[h_m, h_M]$.

Les matrices A et B ont les valeurs suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0.8448 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0044 & 0.9861 & 0 & 0 \\ -104.8700 & 0 & 0.8678 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.6687 \\ -0.0149 \\ 837.263 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La commande par retour d'état suivante est proposée pour stabiliser le système :

$$u(k) = [-K_p \ K_I] x(k)$$

avec $K_p = [-0.0670 \ 0 \ 0]$ et $K_I = 0.0002$, d'où le modèle du système en boucle

fermée suivant :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8448 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0044 & 0.9861 & 0 & 0 \\ -104.8700 & 0 & 0.8678 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.0448 & 0 & 0 & 0.0000 \\ 0.0010 & 0 & 0 & -0.0000 \\ -56.0966 & 0 & 0 & 0.0167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k-h(k))$$

En choisissant la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (3.132) et en calculant la différence $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ en utilisant le lemme 3.12, on obtient, après quelques manipulations, le théorème 3.15 et par conséquent LMI (3.140) définissant les conditions de stabilité asymptotique du système "Cloud Computing".

D'après le théorème 3.15, les valeurs du retard maximum h_M pour lesquelles le système cloud computing est asymptotiquement stable sont calculées et présentées dans le tableau 5.3 pour différentes valeurs de h_m

h_m	1	2	3	4	Variables de décision
Gao et al [116]	6	5	5	6	33
Stojanović et al [117]	2	3	3	4	18
Théorème 3.15	12	12	12	12	18

TABLE 5.3 – Retard maximum h_M pour différentes valeurs de h_m

Il est claire que le théorème 3.15 est moins conservatif vu que le retard maximum pour lequel le système est stable est largement plus grand que celui calculé par d'autres méthodes. Par contre, il faut noter que le théorème 3.15 que nous proposons utilise moins de variables de décision, ce qui diminue suffisamment le temps de calcul.

5.4 Exemple 3 : Conditions de stabilité dépendante du retard pour un système de suivi de ligne sur un écran tactile

Ce troisième exemple présente les conditions de stabilité dépendante du retard d'un système de suivi d'une cible mobile. Pour cela soit le modèle du système représentant un doigt d'un opérateur humain essayant de suivre une ligne mobile sur un écran tactile [118], [119] :

$$\dot{\zeta}(t) = A\zeta(t) + B_1\zeta(t - \tau_1) + B_2\zeta(t - \tau_2) \quad (5.3)$$

avec $\zeta^T(t) = [a^T(t) \quad u^T(t) \quad x^T(t) - r^T(t)]$ où $x(t)$, $u(t)$ et $a(t)$ représentent la position, la vitesse et l'accélération, respectivement. $r(t)$ satisfait la relation suivante :

$$r(t - \tau_1) = x_T(t - \tau_d)$$

où $x_T(t)$ est l'échelon d'entrée servant de référence. τ_1 est le retard dans la position du doigt, τ_d est le retard dans la position de la référence et τ_2 est le retard dans la vitesse et l'accélération.

Les matrices A , B_1 et B_2 sont définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} k_a & k_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où k_x , k_v et k_a sont les paramètres du système.

On cherche à trouver des conditions de stabilité dépendante du retard pour le système (5.3). Pour cela, on choisit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$\begin{aligned} V(x(t)) = & \zeta^T(t)P\zeta(t) + \int_{t-\tau_1}^t \zeta^T(s)Q_1\zeta(s)ds + \int_{t-\tau_2}^t \zeta^T(s)Q_2\zeta(s)ds \\ & + \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\zeta}^T(s)Z_1\dot{\zeta}(s)dsd\theta + \tau_2 \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\zeta}^T(s)Z_2\dot{\zeta}(s)dsd\theta \quad (5.4) \end{aligned}$$

On a donc la dérivée de $V(x(t))$ suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2\zeta^T(t)P[A\zeta(t) + B_1\zeta(t - \tau_1) + B_2\zeta(t - \tau_2)] + \zeta^T(t)[Q_1 + Q_2]\zeta(t) \\ &\quad - \zeta^T(t - \tau_1)Q_1\zeta(t - \tau_1) + [A\zeta(t) + B_1\zeta(t - \tau_1) + B_2\zeta(t - \tau_2)]^T \\ &\quad \times [\tau_1^2 Z_1 + \tau_2^2 Z_2][A\zeta(t) + B_1\zeta(t - \tau_1) + B_2\zeta(t - \tau_2)] - \zeta^T(t - \tau_2)Q_2\zeta(t - \tau_2) \\ &\quad - \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{\zeta}^T(s)Z_1\dot{\zeta}(s)ds - \tau_2 \int_{t-\tau_2}^t \dot{\zeta}^T(s)Z_2\dot{\zeta}(s)ds \end{aligned} \quad (5.5)$$

En utilisant le lemme 3.4, les inégalités suivantes sont obtenues :

$$-\tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{\zeta}^T(s)Z_1\dot{\zeta}(s)ds \leq -[\zeta(t) - \zeta(t - \tau_1)]^T Z_1 [\zeta(t) - \zeta(t - \tau_1)] \quad (5.6)$$

et

$$-\tau_2 \int_{t-\tau_2}^t \dot{\zeta}^T(s)Z_2\dot{\zeta}(s)ds \leq -[\zeta(t) - \zeta(t - \tau_2)]^T Z_2 [\zeta(t) - \zeta(t - \tau_2)] \quad (5.7)$$

En remplaçant les inégalités (5.6) et (5.7) dans (5.5), on obtient l'inégalité suivante pour la dérivée de la fonctionnelle :

$$\dot{V}(x(t)) \leq \eta^T(t)\Xi\eta(t) \quad (5.8)$$

où

$$\eta^T(t) = \begin{bmatrix} \zeta^T(t) & \zeta^T(t - \tau_1) & \zeta^T(t - \tau_2) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

et

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Xi_{11} &= A^T P + PA + Q_1 + Q_2 - Z_1 - Z_2 + \tau_1^2 A^T Z_1 A + \tau_2^2 A^T Z_2 A \\
\Xi_{12} &= PB_1 + Z_1 + \tau_1^2 A^T Z_1 B_1 + \tau_2^2 A^T Z_2 B_1 \\
\Xi_{13} &= PB_2 + Z_2 + \tau_1^2 A^T Z_1 B_2 + \tau_2^2 A^T Z_2 B_2 \\
\Xi_{22} &= -Q_1 - Z_1 + \tau_1^2 B_1^T Z_1 B_1 + \tau_2^2 B_1^T Z_2 B_1 \\
\Xi_{23} &= \tau_1^2 B_1^T Z_1 B_2 + \tau_2^2 B_1^T Z_2 B_2 \\
\Xi_{33} &= -Q_2 - Z_2 + \tau_1^2 B_2^T Z_1 B_2 + \tau_2^2 B_2^T Z_2 B_2
\end{aligned}$$

Si $\Xi < 0$ alors $\dot{V}(x(t)) < 0$ et le système (5.3) est asymptotiquement stable.

En appliquant le complément de Schur, on obtient que l'inégalité $\Xi < 0$ est équivalente à :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Gamma & PB_1 + Z_1 & PB_2 + Z_2 & \tau_1 A^T Z_1 & \tau_2 A^T Z_2 \\ * & -Q_1 - Z_1 & 0 & \tau_1 B_1^T Z_1 & \tau_2 B_1^T Z_2 \\ * & * & -Q_2 - Z_2 & \tau_1 B_2^T Z_1 & \tau_2 B_2^T Z_2 \\ * & * & * & -Z_1 & 0 \\ * & * & * & * & -Z_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.11)$$

avec $\Gamma = A^T P + PA + Q_1 + Q_2 - Z_1 - Z_2$.

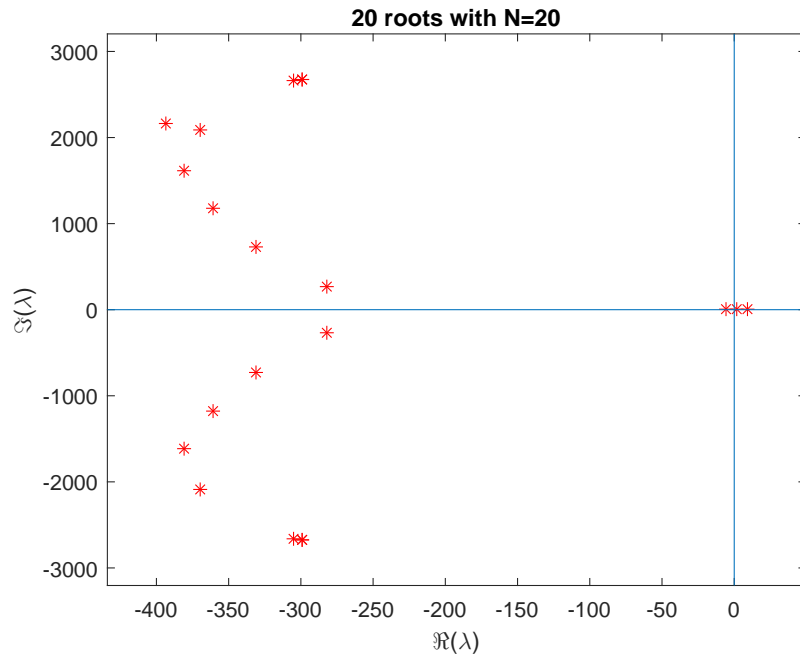
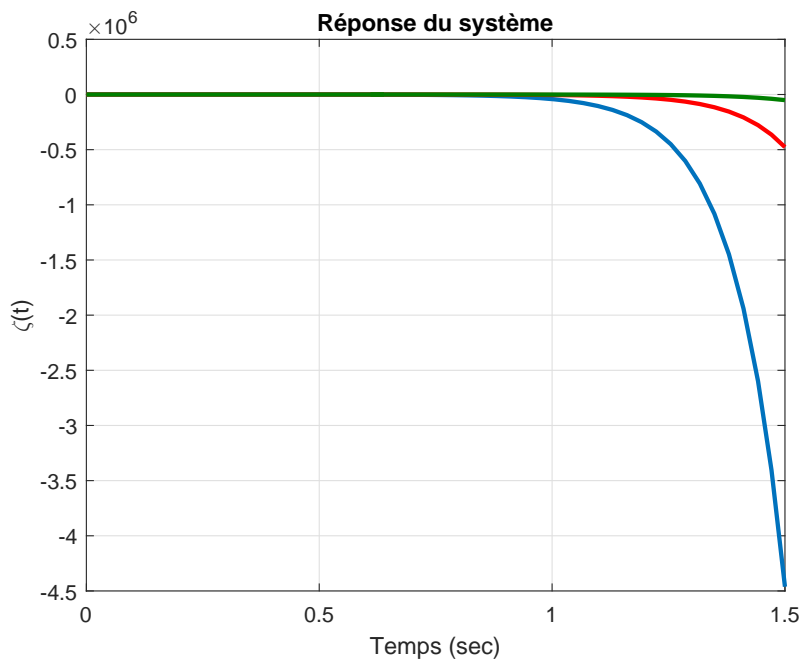
On aboutit donc au théorème suivant :

Théorème 5.1. [119] *Le système (5.3) est asymptotiquement stable pour les valeurs des retards τ_1 et τ_2 , si, il existe, des matrices définies positives P , Q_1 , Q_2 , Z_1 et Z_2 telles que $\Omega < 0$, où Ω est définie dans la relation (5.11).*

En appliquant le théorème 5.1 pour le système (5.3) avec les paramètres [118] $k_x = 95.3538$, $k_a = 6.7827$ et $k_v = 47.0387$, on obtient que le système n'est pas stable pour toutes valeurs des retards τ_1 et τ_2 comme le montre la figure 5.3 qui présente la position des pôles dans le plan complexe. L'instabilité est causée par la position de deux pôles dans la partie droite du plan complexe.

la figure 5.4 présente la réponse du système pour les retards τ_1 et τ_2 , c'est à dire l'évolution du doigt et de la vitesse par rapport à la référence.

Il est nécessaire de mentionner que pour que le théorème 5.1 soit applicable, il faut que le système (5.3) soit stable avec des valeurs nulles de τ_1 et τ_2 .

FIGURE 5.3 – Les pôles pour $\tau_1 = 0.0127147$, $\tau_2 = 0.01443$ FIGURE 5.4 – Réponse du système pour $\tau_1 = 0.0127147$, $\tau_2 = 0.01443$

En utilisant le critère de stabilité de Routh-Hurwitz pour le système (5.3) sans

retards, on obtient facilement les conditions de stabilité suivantes par rapport aux coefficients du système :

$$k_x > 0, \quad k_a < 0, \quad k_v < 0, \quad k_x < k_a k_v \quad (5.12)$$

Selon les conditions (5.12), le système (5.3) avec les paramètres $k_x = 0.2$, $k_a = -2$ et $k_v = -1.2$ est stable pour les valeurs nulles des retards τ_1 et τ_2 . On peut donc appliquer le théorème 5.1.

τ_1	0.1	0.2	0.5	1	2	3	4	5
τ_2	0.567	0.565	0.557	0.540	0.501	0.464	0.419	0.364

TABLE 5.4 – Retard maximum τ_2 pour différentes valeurs de τ_1

Le tableau 5.4 présente la valeur maximale admissible du retard τ_2 pour différentes valeurs du retard τ_1 , tandis que le tableau 5.5 donne la valeur maximum de τ_1 pour laquelle le système (5.3) reste stable pour différentes valeurs de τ_2 .

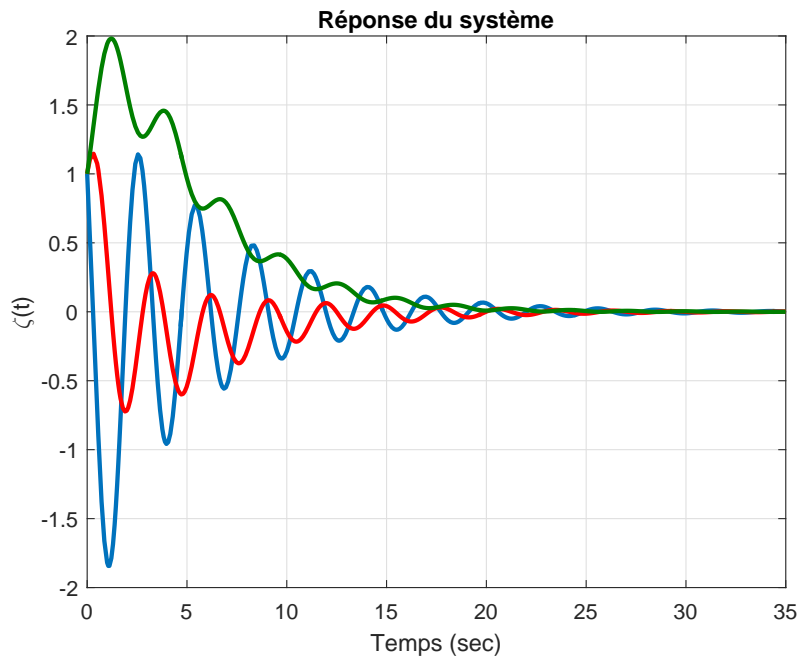


FIGURE 5.5 – Réponse du système pour $\tau_1 = 0.5$ et $\tau_2 = 0.557$

Prenons, par exemple, $\tau_1 = 0.5$ et $\tau_2 = 0.557$ du tableau 5.4, on peut facilement voir à partir de la réponse du système sur la figure 5.5 qu'il est stable. Sur la

figure 5.6, on voit clairement que les pôles sont situés dans la partie gauche du plan complexe.

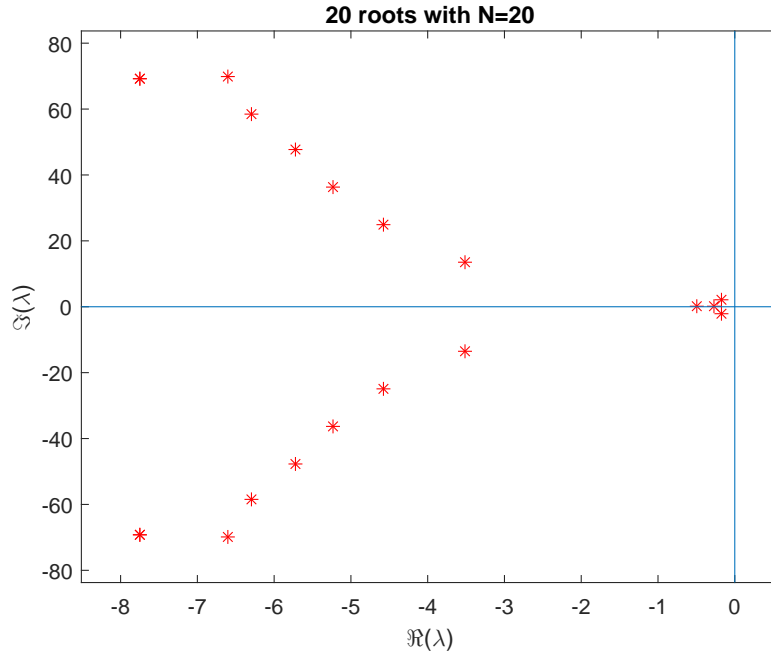


FIGURE 5.6 – Les pôles du système pour $\tau_1 = 0.5$ et $\tau_2 = 0.557$

τ_2	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
τ_1	7.345	7.175	6.762	5.878	4.386	2.043	–

TABLE 5.5 – Retard maximum τ_1 pour différentes valeurs de τ_2

Prenons également $\tau_2 = 0.4$ et $\tau_1 = 4.386$ du tableau 5.5, on peut facilement voir à partir de la réponse du système sur la figure 5.7 qu'il est stable. On peut aussi voir sur la figure 5.8 que les pôles du système sont tous dans la partie gauche du plan complexe.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois exemples de simulation pour montrer l'efficacité de l'approche proposée pour définir les conditions de stabilité de quelques systèmes à retards. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats présentés dans la littérature. La comparaison des résultats obtenus montre la supériorité de notre

approche du point de vue conservatisme et du temps de calcul en terme de nombre de variables de décision.

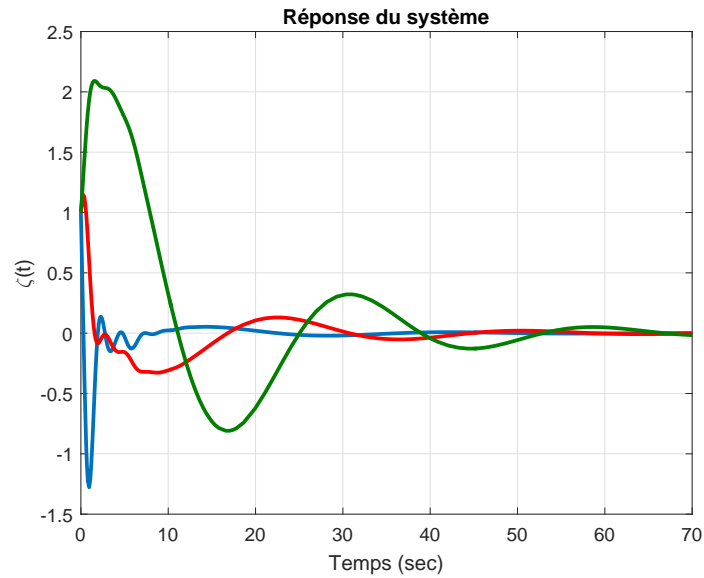


FIGURE 5.7 – Réponse du système pour $\tau_1 = 4.386$ et $\tau_2 = 0.4$

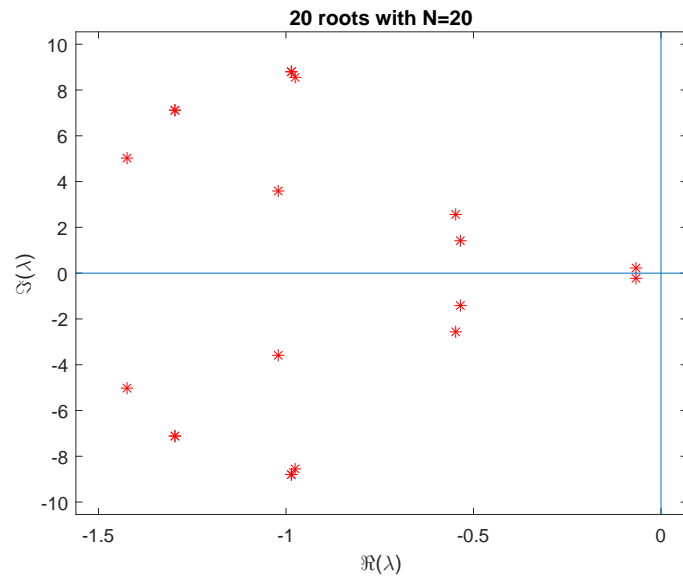


FIGURE 5.8 – Les pôles du système pour $\tau_1 = 4.386$ et $\tau_2 = 0.4$

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié les systèmes à retards, leurs caractéristiques, les notions mathématiques qui sont utilisées pour la modélisation des ces systèmes ainsi que les problèmes qui s'y rapportent tels que l'identification du retard, la commande et l'étude des conditions de leur stabilité et stabilisation.

Pour la modélisation des systèmes à retards, différentes représentations ont été données en fonction du retard qu'il soit constant, variable, ponctuel ou distribué.

En ce qui concerne l'identification, des méthodes classiques ainsi que des méthodes plus avancées ont été présentées dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.

L'étude de la stabilité des systèmes à retards a occupé une plus grande place dans cette thèse en raison de son importance dans les applications pratiques et aussi de la diversité des approches selon que le retard est constant, variable, continu, discret, localisé ou distribué. Nous avons insisté beaucoup plus sur l'approche utilisant les LMI pour établir les conditions de stabilité dépendante du retard qui sont beaucoup moins conservatives que les approches indépendantes du retard.

Pour la commande des systèmes à retards, nous avons simplement rappelé les méthodes classiques applicables dans ce cas, notamment la méthode par temps de retard, la méthode utilisant le prédicteur ainsi que la méthode se basant sur les LMI.

Quelques exemples ont été expérimentés en simulation pour montrer et mettre en évidence les résultats obtenus et notre contribution à travers les théorèmes en combinant différentes approches présentées dans la littérature.

Une riche bibliographie est présentée en fin de thèse afin d'aider les personnes intéressées.

Bibliographie

- [1] G. CONTE et A. PERDON, “The decoupling problem for systems over a ring”, in *34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, 1995, p. 2041-2045.
- [2] —, “Noninteracting control problems for delay-differential systems via systems over rings”, *Journal européen des systèmes automatisés*, t. 31, n° 6, p. 1059-1076, 1997.
- [3] G. CONTE, A. PERDON et A. LOMBARDO, “The decoupling problem with weak output controllability for systems over a ring”, in *36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, USA, 1997, p. 313-317.
- [4] E. W. KAMEN, “Lectures on algebraic system theory : Linear systems over rings”, 1978.
- [5] A. S. MORSE, “Ring models for delay-differential systems”, *Automatica*, t. 12, n° 5, p. 529-531, 1976.
- [6] O. SENAME, J. F. LAFAY et R. RABAH, “Controllability indices of linear systems with delays”, *Kybernetika*, t. 31, n° 6, p. 559-580, 1995.
- [7] O. SENAME, “New trends in design of observers for time-delay systems”, *Kybernetika*, t. 37, n° 4, p. 427-458, 2001.
- [8] A. BENSOUSSAN, G. DA PRATO, M. C. DELFOUR et S. K. MITTER, *Representation and control of infinite dimensional systems*. Springer, 2007.
- [9] R. F. CURTAIN, H. LOGEMANN, S. TOWNLEY et H. J. ZWART, “Well-posedness, stabilizability, and admissibility for Pritchard-Salamon systems”, *Journal of mathematical systems, estimation and control*, t. 4, n° 4, p. 493-496, 1994.
- [10] O. V. IFTIME, H. J. ZWART et R. F. CURTAIN, “A representation of all solutions of the control algebraic Riccati equation for infinite-dimensional systems”, *International journal of control*, t. 78, n° 7, p. 505-520, 2005.
- [11] G. MEINSMA et H. ZWART, “On H_∞ control for dead-time systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 45, n° 2, p. 272-285, 2000.
- [12] J. K. HALE et S. M. V. LUNEL, *Introduction to functional differential equations*. Springer, 2013.
- [13] L. LJUNG, *System identification : Theory for the User*. Prentice-hall, New Jersey, 1987.

- [14] H. GARNIER, P. SIBILLE, H. NGUYEN et T. SPOTT, "A bias-compensating least-squares method for continuous-time system identification via Poisson moment functionals", *IFAC Proceedings Volumes*, t. 27, n° 8, p. 1591-1596, 1994.
- [15] A. ANDERSSEN et E. WHITE, "Parameter estimation by the weighted moments method", *Chemical Engineering Science*, t. 26, n° 8, p. 1203-1221, 1971.
- [16] B. BENSACKER et F. OUCHENE, "Fault detection for continuous-time systems, the PMF identification approach", *IFAC Proceedings Volumes*, t. 31, n° 10, p. 395-400, 1998.
- [17] T. BASTOGNE, H. GARNIER et P. SIBILLE, "A PMF-based subspace method for continuous-time model identification. Application to a multivariable winding process", *International Journal of Control*, t. 74, n° 2, p. 118-132, 2001.
- [18] R. KLEES et R. HAAGMANS, *Wavelets in the Geosciences*. Springer, 2000, t. 90.
- [19] K. A. KOSANOVICH, A. R. MOSER et M. J. PIOVOSO, "The poisson wavelet transform", *Chemical Engineering Communications*, t. 146, n° 1, p. 131-138, 1996.
- [20] K. A. KOSANOVICH, A. R. MOSER et M. J. PIOVOSO, "A new family of wavelets : the Poisson wavelet transform", *Computers & chemical engineering*, t. 21, n° 6, p. 601-620, 1997.
- [21] A. J. JERRI, *The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations*. Springer, 2013, t. 446.
- [22] J. RAMARATHNAM et A. K. TANGIRALA, "On the use of Poisson wavelet transform for system identification", *Journal of Process Control*, t. 19, n° 1, p. 48-57, 2009.
- [23] P. GAWTHROP et M. NIHTILÄ, "Identification of time delays using a polynomial identification method", *Systems & control letters*, t. 5, n° 4, p. 267-271, 1985.
- [24] G. K. SMYTH, "Polynomial Approximation", *Encyclopedia of Biostatistics*, t. 6, 2005.
- [25] C. BREZINSKI, "The long history of continued fractions and Padé approximants", in *Padé Approximation and its Applications*, Springer, 1981, p. 1-27.
- [26] R. PICHE, "Low-Order Rational All-Pass Approximations to e^s ", *IFAC Proceedings Volumes*, t. 23, n° 8, p. 183-186, 1990.
- [27] E.-W. BAI et D. CHYUNG, "Improving delay estimation using the pade approximation", in *30th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1991, p. 2028-2029.
- [28] A. ELNAGGAR, "Online parameter estimation of the Laguerre functions", in *36th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, t. 2, 1997, p. 1273-1276.
- [29] P. MAKILA et J. PARTINGTON, "Laguerre and Kautz shift approximations of delay systems", *International Journal of Control*, t. 72, n° 10, p. 932-946, 1999.
- [30] F. JEDRZEJEWSKI, *Introduction aux méthodes numériques*. Springer, 2006.
- [31] N. KRASOVSKII, "Problems of the Theory of Stability of Motion", *Stanford University Press*, 1963.

-
- [32] B. RAZUMIKHIN, "On the stability of systems with lag", *PMM*, t. 20, n° 4, 1956.
- [33] T. AMEMIYA, "On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1st order", *Journal of mathematical analysis and applications*, t. 142, n° 1, p. 13-25, 1989.
- [34] J. CHEN, D. XU et B. SHAFI, "On sufficient conditions for stability independent of delay", *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 40, n° 9, p. 1675-1680, 1995.
- [35] R. LEWIS et B. ANDERSON, "Necessary and sufficient conditions for delay-independent stability of linear autonomous systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 25, n° 4, p. 735-739, 1980.
- [36] J. LUO, A. JOHNSON et P. VAN DEN BOSCH, "Delay-independent robust stability of uncertain linear systems", *Systems & Control Letters*, t. 24, n° 1, p. 33-39, 1995.
- [37] Y. XIA, M. FU et P. SHI, *Analysis and synthesis of dynamical systems with time-delays*. Springer, 2009, t. 387.
- [38] Y.-Y. CAO, Y.-X. SUN et C. CHENG, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays", *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 43, n° 11, p. 1608-1612, 1998.
- [39] Y.-Y. CAO, Y.-X. SUN et J. LAM, "Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time-varying delays", *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, t. 145, n° 3, p. 338-344, 1998.
- [40] X. LI et C. E. DE SOUZA, "Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay", *Automatica*, t. 33, n° 9, p. 1657-1662, 1997.
- [41] R. C. LUO et L.-Y. CHUNG, "Stabilization for linear uncertain system with time latency", *IEEE Transactions on Industrial electronics*, t. 49, n° 4, p. 905-910, 2002.
- [42] X. LI et C. E. DE SOUZA, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : a linear matrix inequality approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 42, n° 8, p. 1144-1148, 1997.
- [43] P. PARK, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays", *IEEE Transactions on Automatic control*, t. 44, n° 4, p. 876-877, 1999.
- [44] Y. S. MOON, P. PARK, W. H. KWON et Y. S. LEE, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems", *International Journal of control*, t. 74, n° 14, p. 1447-1455, 2001.
- [45] E. FRIDMAN et U. SHAKED, "An improved stabilization method for linear time-delay systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 47, n° 11, p. 1931-1937, 2002.
- [46] V. SUPLIN, E. FRIDMAN et U. SHAKED, "A projection approach to H_∞ control of time-delay systems", in *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, t. 5, 2004, p. 4548-4553.
- [47] J.-H. PARK, "A new delay-dependent criterion for neutral systems with multiple delays", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, t. 136, n° 1-2, p. 177-184, 2001.

- [48] W.-H. CHEN et W. X. ZHENG, “Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays”, *Automatica*, t. 43, n° 1, p. 95-104, 2007.
- [49] X.-M. ZHANG, M. WU, J.-H. SHE et Y. HE, “Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays”, *Automatica*, t. 41, n° 8, p. 1405-1412, 2005.
- [50] K. GU, “An integral inequality in the stability problem of time-delay systems”, in *39th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 2000, p. 2805-2810.
- [51] Q.-L. HAN, “Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity”, *Automatica*, t. 41, n° 12, p. 2171-2176, 2005.
- [52] F. GOUAISBAUT et D. PEAUCELLE, “Delay-dependent stability analysis of linear time delay systems”, *IFAC Proceedings Volumes*, t. 39, n° 10, p. 54-59, 2006.
- [53] Q.-L. HAN, “Stability criteria for a class of linear neutral systems with time-varying discrete and distributed delays”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, t. 20, n° 4, p. 371-386, 2003.
- [54] X. JIANG et Q.-L. HAN, “On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay”, *Automatica*, t. 41, n° 12, p. 2099-2106, 2005.
- [55] C. LIEN, “Delay-dependent stability criteria for uncertain neutral systems with multiple time-varying delays via LMI approach”, *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, t. 152, n° 6, p. 707-714, 2005.
- [56] O. KWON et J. H. PARK, “Guaranteed cost control for uncertain large-scale systems with time-delays via delayed feedback”, *Chaos, Solitons & Fractals*, t. 27, n° 3, p. 800-812, 2006.
- [57] A. SEURET et F. GOUAISBAUT, “Wirtinger-based integral inequality : Application to time-delay systems”, *Automatica*, t. 49, n° 9, p. 2860-2866, 2013.
- [58] P. PARK, W. I. LEE et S. Y. LEE, “Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems”, *Journal of the Franklin Institute*, t. 352, n° 4, p. 1378-1396, 2015.
- [59] X.-M. ZHANG, Q.-L. HAN et Z. ZENG, “Hierarchical type stability criteria for delayed neural networks via canonical Bessel–Legendre inequalities”, *IEEE transactions on cybernetics*, t. 48, n° 5, p. 1660-1671, 2017.
- [60] A. SEURET et F. GOUAISBAUT, “Stability of linear systems with time-varying delays using Bessel–Legendre inequalities”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 63, n° 1, p. 225-232, 2017.
- [61] L. W. JOHNSON et R. ROSS, *Numerical Analysis*, 1982.
- [62] E. FRIDMAN, “New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems”, *Systems & control letters*, t. 43, n° 4, p. 309-319, 2001.

-
- [63] M. WU, Y. HE et J.-H. SHE, “New delay-dependent stability criteria and stabilizing method for neutral systems”, *IEEE transactions on automatic control*, t. 49, n° 12, p. 2266-2271, 2004.
- [64] Y. HE, M. WU, J.-H. SHE et G.-P. LIU, “Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays”, *Systems & Control Letters*, t. 51, n° 1, p. 57-65, 2004.
- [65] ———, “Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties”, *IEEE Transactions on Automatic control*, t. 49, n° 5, p. 828-832, 2004.
- [66] H. GAO et T. CHEN, “New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 52, n° 2, p. 328-334, 2007.
- [67] Y. HE, Q.-G. WANG, C. LIN et M. WU, “Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control : IFAC-Affiliated Journal*, t. 15, n° 18, p. 923-933, 2005.
- [68] C. LIN, Q.-G. WANG et T. H. LEE, “A less conservative robust stability test for linear uncertain time-delay systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 51, n° 1, p. 87-91, 2006.
- [69] J.-H. KIM, “Note on stability of linear systems with time-varying delay”, *Automatica*, t. 47, n° 9, p. 2118-2121, 2011.
- [70] O. KWON, M.-J. PARK, J. H. PARK, S.-M. LEE et E.-J. CHA, “Improved results on stability of linear systems with time-varying delays via Wirtinger-based integral inequality”, *Journal of the Franklin Institute*, t. 351, n° 12, p. 5386-5398, 2014.
- [71] X.-M. ZHANG, Q.-L. HAN, A. SEURET et F. GOUAISBAUT, “An improved reciprocally convex inequality and an augmented Lyapunov–Krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay”, *Automatica*, t. 84, p. 221-226, 2017.
- [72] C.-K. ZHANG, Y. HE, L. JIANG et M. WU, “Notes on stability of time-delay systems : bounding inequalities and augmented Lyapunov-Krasovskii functionals”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 62, n° 10, p. 5331-5336, 2016.
- [73] J. SUN, G. LIU, J. CHEN et D. REES, “Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays”, *Automatica*, t. 46, n° 2, p. 466-470, 2010.
- [74] É. GYURKOVICS et T. TAKACS, “Multiple integral inequalities and stability analysis of time delay systems”, *Systems & Control Letters*, t. 96, p. 72-80, 2016.
- [75] J. SUN, Q.-L. HAN, J. CHEN et G.-P. LIU, “Less conservative stability criteria for linear systems with interval time-varying delays”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, t. 25, n° 4, p. 475-485, 2015.
- [76] X.-M. ZHANG et Q.-L. HAN, “Global asymptotic stability analysis for delayed neural networks using a matrix-based quadratic convex approach”, *Neural networks*, t. 54, p. 57-69, 2014.

- [77] M. PARK, O. KWON, J. H. PARK, S. LEE et E. CHA, “Stability of time-delay systems via Wirtinger-based double integral inequality”, *Automatica*, t. 55, p. 204-208, 2015.
- [78] K. LIU, A. SEURET et Y. XIA, “Stability analysis of systems with time-varying delays via the second-order Bessel–Legendre inequality”, *Automatica*, t. 76, p. 138-142, 2017.
- [79] E. FRIDMAN, “Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems”, *European Journal of Control*, t. 20, n° 6, p. 271-283, 2014.
- [80] Y. HE, Q.-G. WANG, C. LIN et M. WU, “Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay”, *Automatica*, t. 43, n° 2, p. 371-376, 2007.
- [81] Y. HE, Q.-G. WANG, L. XIE et C. LIN, “Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay”, *IEEE Transactions on automatic control*, t. 52, n° 2, p. 293-299, 2007.
- [82] X. JIANG et Q.-L. HAN, “Delay-dependent robust stability for uncertain linear systems with interval time-varying delay”, *Automatica*, t. 42, n° 6, p. 1059-1065, 2006.
- [83] X.-M. ZHANG et Q.-L. HAN, “Novel delay-derivative-dependent stability criteria using new bounding techniques”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, t. 23, n° 13, p. 1419-1432, 2013.
- [84] E. FRIDMAN, U. SHAKED et K. LIU, “New conditions for delay-derivative-dependent stability”, *Automatica*, t. 45, n° 11, p. 2723-2727, 2009.
- [85] E. FRIDMAN, *Introduction to time-delay systems : Analysis and control*. Springer, 2014.
- [86] Q.-L. HAN, “A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems”, *Automatica*, t. 45, n° 2, p. 517-524, 2009.
- [87] H.-B. ZENG, Y. HE, M. WU et C.-F. ZHANG, “Complete delay-decomposing approach to asymptotic stability for neural networks with time-varying delays”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, t. 22, n° 5, p. 806-812, 2011.
- [88] X.-M. ZHANG et Q.-L. HAN, “New Lyapunov–Krasovskii functionals for global asymptotic stability of delayed neural networks”, *IEEE Transactions on Neural networks*, t. 20, n° 3, p. 533-539, 2009.
- [89] D. YUE, E. TIAN et Y. ZHANG, “A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control : IFAC-Affiliated Journal*, t. 19, n° 13, p. 1493-1518, 2009.
- [90] N. BENSACKER, H. KHERFANE et B. BENSACKER, “New Robust Stability Criteria for Uncertain Neutral Time-Delay Systems With Discrete and Distributed Delays”, *Iranian Journal of Electrical and Electronic Engineering*, t. 16, n° 2, p. 174-183, 2020.
- [91] Y. CHEN, S. FEI, Z. GU et Y. LI, “New mixed-delay-dependent robust stability conditions for uncertain linear neutral systems”, *IET Control Theory & Applications*, t. 8, n° 8, p. 606-613, 2014.

-
- [92] G. J. SILVA, A. DATTA et S. P. BHATTACHARYYA, *PID controllers for time-delay systems*. Springer, 2007.
- [93] S. ZHANG et M.-P. CHEN, “A new Razumikhin theorem for delay difference equations”, *Computers & Mathematics with Applications*, t. 36, n° 10-12, p. 405-412, 1998.
- [94] E. FRIDMAN et U. SHAKED, “Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems”, *International Journal of Control*, t. 78, n° 4, p. 235-246, 2005.
- [95] W.-H. CHEN, Z.-H. GUAN et X. LU, “Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay”, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, t. 150, n° 4, p. 412-416, 2003.
- [96] X.-L. ZHU et G.-H. YANG, “Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay”, in *American Control Conference*, IEEE, 2008, p. 1644-1649.
- [97] J.-P. RICHARD, “Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems”, *automatica*, t. 39, n° 10, p. 1667-1694, 2003.
- [98] A. MANITIUS et A. OLBROT, “Finite spectrum assignment problem for systems with delays”, *IEEE transactions on Automatic Control*, t. 24, n° 4, p. 541-552, 1979.
- [99] O. J. SMITH, “A controller to overcome dead time”, *ISA*, t. 6, p. 28-33, 1959.
- [100] L. MIRKIN, “On the approximation of distributed-delay control laws”, *Systems & Control Letters*, t. 51, n° 5, p. 331-342, 2004.
- [101] S. MONDIÉ et W. MICHIELS, “Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 48, n° 12, p. 2207-2212, 2003.
- [102] W. KWON et A. PEARSON, “Feedback stabilization of linear systems with delayed control”, *IEEE Transactions on Automatic control*, t. 25, n° 2, p. 266-269, 1980.
- [103] Z. ARTSTEIN, “Linear systems with delayed controls : A reduction”, *IEEE Transactions on Automatic control*, t. 27, n° 4, p. 869-879, 1982.
- [104] Y. FIAGBEDZI et A. PEARSON, “Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 31, n° 9, p. 847-855, 1986.
- [105] Y. S. MOON, P. PARK et W. H. KWON, “Robust stabilization of uncertain input-delayed systems using reduction method”, *Automatica*, t. 37, n° 2, p. 307-312, 2001.
- [106] D. YUE et Q.-L. HAN, “Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay”, *Automatica*, t. 41, n° 2, p. 233-240, 2005.
- [107] V. SUPLIN, E. FRIDMAN et U. SHAKED, “ H_∞ control of linear uncertain time-delay systems—a projection approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 51, n° 4, p. 680-685, 2006.
- [108] —, “Sampled-data H_∞ control and filtering : Nonuniform uncertain sampling”, *Automatica*, t. 43, n° 6, p. 1072-1083, 2007.

-
- [109] M. WU, Y. HE et J.-H. SHE, *Stability analysis and robust control of time-delay systems*. Springer, 2010.
- [110] X. LI et X. ZHU, “Stability analysis of neutral systems with distributed delays”, *Automatica*, t. 44, n° 8, p. 2197-2201, 2008.
- [111] J. SUN, J. CHEN, G. LIU et D. REES, “On robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays”, in *American Control Conference, IEEE*, 2009, p. 5469-5473.
- [112] D. LIU et Q. HUANG, “Stability analysis of neutral systems with distributed delays”, in *International Conference on Intelligent Computing*, Springer, 2011, p. 9-16.
- [113] H. CHEN, Y. ZHANG et Y. ZHAO, “Stability analysis for uncertain neutral systems with discrete and distributed delays”, *Applied Mathematics and Computation*, t. 218, n° 23, p. 11 351-11 361, 2012.
- [114] Y. CHEN, W. QIAN et S. FEI, “Improved robust stability conditions for uncertain neutral systems with discrete and distributed delays”, *Journal of the Franklin Institute*, t. 352, n° 7, p. 2634-2645, 2015.
- [115] P. SAIKRISHNA, R. PASUMARTHY et H. KRUTHIKA, “Stability analysis of cloud computing systems under uncertain time delays”, in *21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Groningen, The Netherlands*, 2014.
- [116] H. GAO, J. LAM, C. WANG et Y. WANG, “Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay”, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, t. 151, n° 6, p. 691-698, 2004.
- [117] S. B. STOJANOVIĆ et D. L. DEBELJKOVIĆ, “Delay-dependent stability analysis for discrete-time systems with time varying state delay”, *Chemical Industry and Chemical Engineering Quarterly/CICEQ*, t. 17, n° 4, p. 497-503, 2011.
- [118] W. B. BEDADA, “Parametric linear time delay models and stability analysis for action-perception behavior of human subjects”, in *IEEE AFRICON*, 2017, p. 149-154.
- [119] N. BENSACKER et H. KHERFANE, “Delay-Dependent stability conditions for a line-tracking on a touch panel model”, in *2019 International Conference on Advanced Electrical Engineering (ICAEE)*, Algiers, Algeria, 2019.