

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR – ANNABA – UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR – ANNABA –



جامعة باجي مختار
عنابسة

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme
De **MAGISTER**

thème

**ANALYSE INELASTIQUE DU
COMPORTEMENT DES MURS
EN BETON ARME**

Option :
MECANIQUES DES STRUCTURES

Présenté par :
BOUZID MOHAMED

Encadre par
Mr. REDJEL BACHIR : Professeur Université Badji Mokhtar – Annaba -

Devant le jury :

- Président: Mr Habita Med Fouzi Professeur Université Badji Mokhtar – Annaba –
- Rapporteurs: Mr. Redjel Bachir : Professeur Université Badji Mokhtar – Annaba -
Mr. Khalfallah Salah : M.C, Université de Jijel
Mr.Oucief Hocine : M.C, Université Badji Mokhtar – Annaba –

Année 2008

Résumé

Ce travail vise à présenter une contribution au comportement des voiles ou des poutres profondes en béton armé. Dans cette approche, nous avons combiné la théorie élastique avec le modèle de fissuration répartie. La réponse inélastique de telles structures est due principalement au phénomène de formation et de propagation des fissures et à la plastification des aciers de renforcement.

En se basant sur les lois de la statique, de la cinématique et de la mécanique, la matrice de rigidité du matériau composite "Béton armé" est formulée dans les différentes phases de comportement telles que : béton sain, béton fissuré et béton fissuré avec plastification des barres d'acier.

Dans cette étude, il est donc nécessaire de formuler les matrices de rigidité de chaque constituant. Pour des raisons simplificatrices, une adhérence parfaite entre l'acier et le béton est considérée.

Pour prédire le comportement des voiles en béton armé soumis à un chargement monotone, la méthode des éléments finis est sélectionnée comme méthode numérique pour traiter cette simulation. Les Subroutines nécessaires pour décrire cette étude ont été formulés et incorporés dans un programme numérique conçu à l'analyse du comportement non linéaire des structures en béton armé.

Les résultats obtenus par cette simulation incluent la réponse globale $P-\delta$, la réponse locale représentée par la distribution de contrainte, la formation et la propagation des fissures et la plastification des aciers.

Les résultats obtenus ont été confrontés aux données expérimentales dont la littérature dispose. La comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux montre que l'analyse présentée peut prédire avec satisfaction le comportement des voiles ou des poutres profondes en béton armé.

Abstract

This work aims to present a contribution of the behaviour of reinforced concrete walls or deep beams. In this contribution, we have combined the elastic theory with the smeared crack model. The inelastic response such structures are principally due to the phenomenon of formation and the propagation of cracks and to the yielding of steel bars.

Based on the static, cinematic and mechanics laws, the stiffness matrix of the composite material "reinforced concrete" is formulated corresponding to different phases of the behaviour; such as: un-cracked concrete, cracked concrete and cracked concrete with yielding of steel bars. In this study, it is necessary to formulate stiffness matrix for each components. For simplifying reasons, a perfect bond between concrete and steel is considered.

The finite element method is selected as a numerical method for this simulation to predicate the behaviour of reinforced concrete walls subjected to a monotone loading. The necessary subroutines to describe this study have already been formulated and incorporated in numerical program conceived to the non linear behaviour analysis of reinforced concrete structures.

The results obtained by this simulation include the global response $P-\delta$, the local response represented with distribution of stress, the formation and the propagation of cracks and the yielding of steel bars. The obtained results have been confronted to experimental data that literature disposed. The comparison between numerical results and experimental data shown that the present approach can predict satisfactory the walls behaviour and deep beams.

REMERCIEMENTS

Je voudrait avant tout remercier mon directeur de thèse le professeur Redjel Bachir qui m'a dirigé tout au long de cette étude et a donné les grand axes de recherche.

Mes remerciements s'adressent aussi à Khalfallah Salah maître de conférence à l'université de Jijel qui a assuré le suivi quotidien de cette étude, pour l'aide et les conseils qu'il m'a apportés pour résoudre les problèmes numériques, pour la confiance qu'il m'a témoignée et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer. Je le remercie aussi pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa sensibilité.

Je tiens à remercier monsieur Habita Med Fouzi qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse et l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail, et particulièrement messieurs Redjel Bachir, Khalfallah Salah et Oucief Hocine Qui ont accepté de rapporter ce travail. Je leur en suis très reconnaissant et les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

J'adresse mes remerciements à madame la directrice ainsi que tout les collègues de la D.U.C. de la wilaya d'Oum El Bouaghi ainsi qu'à tout le personnel enseignant, technique et administratif du département de génie civil de l'université d'Annaba qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

Mes plus vifs remerciements à tous mes amis.

Je conclurais par mes proches; mes chers parents; ma femme; mes enfants; mes sœurs et toute ma famille.

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE BADJI MOKHTAR – ANNABA –
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL**

THESE PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME

MAGISTER

SUJET DE LA THESE :

**ANALYSE INELASTIQUE DU COMPORTEMENT DES
MURS EN BETON ARME**

PRESENTEE PAR

BOUZID MOHAMED

ENCADRE PAR

REDJEL BACHIR

ANNEE 2007

ANALYSE INELASTIQUE DU COMPORTEMENT DES MURS
EN BETON ARME

Par

BOUZID MOHAMED

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme

MAGISTER

UNIVERSITE DE BADJI MOKHTAR ANNABA

ANNEE 2006 - 2007

Vue et approuvée par : REDJEL BACHIR Grade : Professeur

Directeur de thèse

Co – encadreur : Khalfallah Salah Grade : Maître de conférence

Spécialisation : Génie civil _____

Date : _____

Résumé

Ce travail vise à présenter une contribution au comportement des voiles ou des poutres profondes en béton armé. Dans cette approche, nous avons combiné la théorie élastique avec le modèle de fissuration répartie. La réponse inélastique de telles structures est due principalement au phénomène de formation et de propagation des fissures et à la plastification des aciers de renforcement.

En se basant sur les lois de la statique, de la cinématique et de la mécanique, la matrice de rigidité du matériau composite "Béton armé" est formulée dans les différentes phases de comportement telles que : béton sain, béton fissuré et béton fissuré avec plastification des barres d'acier.

Dans cette étude, il est donc nécessaire de formuler les matrices de rigidité de chaque constituant. Pour des raisons simplificatrices, une adhérence parfaite entre l'acier et le béton est considérée.

Pour prédire le comportement des voiles en béton armé soumis à un chargement monotone, la méthode des éléments finis est sélectionnée comme méthode numérique pour traiter cette simulation. Les Subroutines nécessaires pour décrire cette étude ont été formulés et incorporés dans un programme numérique conçu à l'analyse du comportement non linéaire des structures en béton armé.

Les résultats obtenus par cette simulation incluent la réponse globale $P-\delta$, la réponse locale représentée par la distribution de contrainte, la formation et la propagation des fissures et la plastification des aciers.

Les résultats obtenus ont été confrontés aux données expérimentales dont la littérature dispose. La comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux montre que l'analyse présentée peut prédire avec satisfaction le comportement des voiles ou des poutres profondes en béton armé.

Abstract

This work aims to present a contribution of the behaviour of reinforced concrete walls or deep beams. In this contribution, we have combined the elastic theory with the smeared crack model. The inelastic response such structures are principally due to the phenomenon of formation and the propagation of cracks and to the yielding of steel bars.

Based on the static, cinematic and mechanics laws, the stiffness matrix of the composite material "reinforced concrete" is formulated corresponding to different phases of the behaviour; such as: un-cracked concrete, cracked concrete and cracked concrete with yielding of steel bars. In this study, it is necessary to formulate stiffness matrix for each components. For simplifying reasons, a perfect bond between concrete and steel is considered.

The finite element method is selected as a numerical method for this simulation to predicate the behaviour of reinforced concrete walls subjected to a monotone loading. The necessary subroutines to describe this study have already been formulated and incorporated in numerical program conceived to the non linear behaviour analysis of reinforced concrete structures.

The results obtained by this simulation include the global response $P-\delta$, the local response represented with distribution of stress, the formation and the propagation of cracks and the yielding of steel bars. The obtained results have been confronted to experimental data that literature disposed. The comparison between numerical results and experimental data shown that the present approach can predict satisfactory the walls behaviour and deep beams.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 01 : INTRODUCTION GENERALE

1.1 Introduction	1
1.2 Intérêt de l'étude du comportement des voiles en béton armé	2
1.3 Etude du comportement des voiles en béton armé.....	3
1.4 Les objectifs de ce travail	5
1.5 La structure du manuscrit	6
1.6 La mise en œuvre numérique	7
1.7 Conclusion.....	7

CHAPITRE 02 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

2.1 Introduction.....	8
2.2 Les principales caractéristiques du comportement des voiles.....	9
2.3 Pratique pour le dimensionnement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement.....	11
2.3.1 L'analogie du treillis.....	11
2.3.2 Théorie du champ de compression.....	18
2.3.3 La théorie du treillis adoucissant.....	19
2.4 Modélisation des structures en béton armé.....	20
2.4.1 Fissuration des bétons.....	21
2.4.2 Différentes modélisation de comportement de structures en béton armé.....	25
2.4.2.1 La modélisation locale	25
2.4.2.2 La modélisation globale	28
2.4.2.3 Modèles de membrane fissurée.....	32
2.4.2.4 Utilisation des modèles unidimensionnels pour la modélisation de comportement bidimensionnels.....	33
2.4.2.5 Calcul par éléments finis	34
2.4.2.6 Modèle de calcul bidimensionnel	35
2.4.3 Application bidimensionnel de la LMT	35
2.4.4 Principes généraux	35
2.4.5 Directions principales.....	36
2.4.6 Armatures équivalentes.....	37
2.4.7 Zone efficace.....	39
2.4.8 Perte de rigidité	39
2.5 Processus général de calcul.....	40
2.6 Les modèles bidimensionnels.....	41
2.7 Elément de membrane en cisaillement pur	44
2.8 Conclusions.....	48
2.9 Calcul des contraintes au droit d'une fissure.....	49
2.10 Contraintes dans les armatures de la poutre.....	53
2.11 Plastification à l'état de service.....	53

CHAPITRE 03 : MODELISATION CONSTITUTIVE DU MATERIAU BETON ARME	
3.1 Introduction	55
3.2 Comportement mécanique des béton	56
3.2.1 Introduction	56
3.2.2 Comportement uni axial du béton	56
3.2.3 Comportement bi axial du béton.....	58
3.3 Comportement mécanique de l'acier.....	61
3.4 Propriété d'interaction acier – béton.....	62
3.4.1 Tension stiffening.....	63
3.4.2 Adhérence acier – béton.....	64
3.5 Modélisation constitutive – formulation théorique	65
3.5.1 Les caractéristique mécaniques de comportement du matériau composite.....	65
3.5.2 Les suppositions faites sur le comportement des bétons.....	67
3.5.3 Les suppositions faites sur le comportement des barres d'acier.....	67
3.5.4 Les suppositions faites sur le comportement de l'adhérence.....	67
3.6 Modélisation du matériau composite béton armé.....	68
3.6.1 Matrice de rigidité du matériau composite non fissuré.....	68
3.6.1.1 Les renforcements diagonaux.....	72
3.6.2 La modélisation de la fissuration.....	75
3.6.2.1 Quelques travaux et modélisation de la fissuration du béton.....	75
3.6.2.2 Modèle de fissurations discrètes.....	76
3.6.2.3 Modèle de fissurations réparties.....	77
3.6.3 Modélisation de la raideur “tension stiffening”.....	79
3.6.4 Modélisation de l'option cut – off	80
3.6.5 Comportement du béton complètement fissuré.....	81
3.6.5.1 Matrice de rigidité du matériau composite fissuré.....	83
3.6.5.2 Le renforcement orthogonal.....	84
3.7 Conclusions	84
3.7.1 Développement.....	85
3.7.2 Applications numériques.....	86
3.7.3 Recommandations.....	86
3.7.3.1 Armatures d'effort tranchant dans les poutres	86
3.7.3.2 Modélisation pour le calcul non linéaire.....	86
CHAPITRE 04 : METHODE D'ANALYSE NUMERIQUE : METHODE DES ELEMENTS FINIS	
4.1 Introduction.....	88
4.2 Principe de la méthode des éléments finis.....	88
4.3 Généralités sur les principes utilisés dans la modélisation par éléments finis.....	90
4.4 Les modèles éléments finis de représentation des barres d'acier.....	91
4.4.1 Modèle de la représentation discrète.....	91
4.4.2 Modèle de la représentation intégrée.....	92
4.5 Notion utilisées dans la méthode des éléments finis.....	92
4.6 Eléments de base de la méthode des éléments finis.....	94

4.6.1 Présentation matricielles de la méthode des éléments finis.....	95
4.7. Méthode des éléments finis (M.E.F)......	96
4.7.1 Introduction.....	96
4.7.2 Choix d'une méthode de résolution.....	97
4.7.2.1 Introduction.....	97
4.7.2.2 Méthode des éléments finis.....	97
4.7.3 Choix de l'élément de base de cette étude.....	97
4.7.3.1 Eléments linéaires.....	98
4.7.3.2 Eléments sur compatibles.....	99
4.7.3.3 Eléments à nœuds intermédiaires.....	99
4.7.3.4 Eléments iso paramétriques.....	100
4.8 Intégration numérique	103
4.8.1 Eléments iso paramétrique de membrane.....	105
4.8.2 Champs de déplacement de l'élément "parent".....	106
4.8.3 Transformation iso paramétrique des coordonnées.....	107
4.8.4 Déformations et contraintes.....	108
4.8.5 Calcul de la matrice de rigidité.....	108
4.8.5.1 Intégration numérique.....	109
4.8.5.2 Calcul de la matrice Jacobéenne (J).....	110
4.8.5.3 Calcul de la matrice (B _n).....	110
4.9 Elément de barre à trois nœuds.....	112
4.9.1 But	112
4.9.2 Calcul de la matrice de rigidité.....	112
4.9.2.1 Potentiel interne.....	112
4.9.2.2 Matrice de rigidité élémentaire.....	114
4.10 Conclusions.....	115
CHAPITRE 05 : VALIDATION NUMERIQUE	
5.1 Introduction.....	116
5.2 Description des murs testés.....	117
5.3 Propriétés mécaniques des matériaux.....	121
5.3.1 Propriétés des aciers utilisés.....	121
5.3.2 Propriétés des bétons.....	122
5.4 Comparaison des résultats.....	123
5.4.1 Description générale.....	123
5.4.2 Influence de la discrétisation géométrique.....	125
5.4.3 Analyse de la réponse du mur V1.....	126
5.4.4 Analyse de la réponse du mur V2.....	127
5.4.5 Analyse de la réponse du mur V3.....	129
5.4.5.1 Refend V3-2.....	129
5.4.5.2 Refend V3-1.....	130
5.4.6 Analyse de la réponse du mur V4.....	131
5.4.7 Comportement du béton fissuré : l'option "tension stiffening".....	132
5.4.8 Influence du facteur de transfert de cisaillement	134
5.4.9 Influence de la qualité du béton	135

Table des matières

5.5 Conclusion.....	136
5.5.1 Analyse locale du voile V1.....	137
5.5.2 Analyse locale du voile V4.....	139
5.6 Conclusions.....	141
CHAPITRE 06 : CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS.....	143
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES.....	145

Chapitre 1

INTRODUCTION GENERALE

1.1. Introduction

Jusqu'aux années 60, les structures étaient vérifiées à partir de la condition des contraintes admissibles permettant la garantie simultanément de la sécurité structurale et d'un comportement satisfaisant (la résistance satisfaisante). Avec les développements connus de différents domaines de recherches, les nouvelles méthodes visant une optimisation accrue de point de vue de la sécurité structurale et du coût de réalisation, ont poussé de plus en plus vers des théories et des méthodes robustes qui reflètent rigoureusement le comportement réel des matériaux et des structures.

Depuis lors, le bon fonctionnement des ouvrages et des structures est devenu un souci permanent des constructeurs et des chercheurs du domaine des constructions et de génie civil. A l'état actuel, les considérations d'adaptation au service et de durabilité ont une importance particulière vis-à-vis des critères relatifs de dimensionnement, abandonnant le calcul à la rupture au rang de simple vérification. Partant de ce point là, le recours aux outils de calcul adaptés est devenu indispensable, à même d'appréhender le comportement des ouvrages soumis à des sollicitations complexes.

Actuellement, le domaine du comportement des structures en béton armé ou en béton précontraint est particulièrement une tâche très difficile. Cette difficulté réside en général dans la modélisation du comportement de différentes composantes du matériau composite "béton armé". Ce matériau hétérogène en sa composition nécessite non seulement la connaissance de la réponse de ses composants ainsi que celui du milieu interface qui assure une liaison ou une adhérence entre les deux constituants : béton et acier. Devant une telle situation et pour une bonne représentation, ces multiples interactions requièrent souvent l'utilisation des modèles plus performants pour atteindre une réponse rigoureuse des matériaux ou des structures.

D'après nos connaissances bibliographiques le problème de dimensionnement est indifféremment effectué à l'état limite de service ou à l'état limite ultime et il est relativement simple et en même temps pratique dans leur mise en œuvre. Les théories récentes dont leurs hypothèses

impliquées peuvent être fort éloignées de celles régissant le comportement en service des structures. Pour atteindre une analyse réaliste, il est nécessaire de passer par une analyse de plus en plus fine des différentes composantes du système composé considéré. Dans ce cadre, la présente étude nécessite donc une connaissance approfondie de la modélisation du comportement des matériaux béton, acier et celui du milieu interface.

Les modèles de comportement des bétons ou du béton armé ont subi un développement considérable ces dernières décennies, surtout avec l'innovation connue dans le domaine des machines de calcul de haute puissance qui ont facilité la présentation de plusieurs modèles de comportement numériques. Ces modèles couvrent la majorité des modélisations allant des lois simples, qui considèrent que le béton est un matériau homogène et isotrope ne travaillant qu'en compression (les premiers modèles considérés) aux lois plus complexes tenant en compte les théories récentes confiées au comportement des matériaux, telles que : la théorie de la plasticité, la théorie d'endommagement, la théorie endocronique ainsi que leurs couplages. Devant la complexité relative à la taille des problèmes à résoudre ainsi que la disponibilité de moyens informatiques puissants, les approches numériques sont actuellement de plus en plus répandues.

La modélisation par éléments finis du béton armé est un sujet d'actualité et les modèles numériques sont déjà prolifiques et nombreux depuis la fin des années 60. La scène bibliographique recense, à l'état actuel, plus de quarante modèles. Cependant, la plupart des modèles permettant de prendre en considération les phénomènes complexes qui gouvernent le comportement du matériau béton armé sont des modèles d'utilisation lourde tant au niveau des données du problème à étudier que de la manipulation des résultats obtenus.

Le sujet qui nous occupe plus particulièrement ici est le comportement local des voiles en béton armé ou des poutres profondes. L'établissement de ce travail nécessite le recours à un outil puissant et capable permettant une bonne représentation de la géométrie des voiles d'une part et atteindre une réponse satisfaisante de leur comportement d'autre part.

1.2. Intérêt de l'étude du comportement des voiles en béton armé

Les structures en béton armé sont généralement modélisées et calculées comme si elles étaient homogènes et isotropes dont la réponse globale peut être considérée comme acceptable par rapport à la réponse réelle. En principe, la géométrie de ce type de structure nécessite une réponse structurale

fonction uniquement des caractéristiques mécaniques et des lois constitutives des matériaux ; béton et acier. Mais il est évident que l'incorporation du milieu interface peut jouer un rôle très intéressant en amélioration de la réponse des structures composites.

L'utilisation des voiles en béton armé pour la construction des structures devient de plus en plus fréquente. La raison est que les voiles, outre leur rôle porteur vis à vis des charges verticales auxquels y sont appliquées, sont pratiquement efficaces pour assurer la résistance aux charges horizontales. En général, les voiles dans les constructions conditionnent le comportement structural et jouent un rôle primordial pour la sécurité de la construction. Actuellement, le comportement des voiles en béton armé constitue un programme de travail commun des pays de l'union européenne et principalement leur conception aux sollicitations sismiques.

Par rapport à d'autres éléments de structures, le recours à l'utilisation des voiles en béton armé dans les structures des ouvrages entre autres (Penemis et al. 1997), a pour but :

- L'augmentation de la rigidité de l'ouvrage
- La diminution de l'influence des phénomènes du second ordre et éloigne la possibilité d'instabilité géométrique.
- La diminution des dégâts des éléments non porteurs, sachant que le coût de réparation est souvent plus grand que celui des éléments porteurs.
- De rendre le comportement structural plus fiable que celui d'une structure ne comportant que des portiques.

1.3. Etude du comportement des voiles en béton armé

L'étude et l'analyse du comportement des voiles en béton armé utilisent non seulement le comportement global de ce type de structure mais conduit en même temps à la compréhension d'autres effets pouvant accompagner le comportement mécanique des voiles sous un chargement monotone. D'après la bibliographie ouverte, plusieurs paramètres doivent être incorporés dans la réponse structurale, on peut citer dans ce cadre :

- La résistance et la nature du comportement du béton intact (non fissuré).

- La capacité de comportement du béton fissuré à transmettre les contraintes entre les lèvres.
- L'évaluation de l'effet de frottement ou d'engrènement entre les faces fissurées.
- Effet de présence des armatures transversales qui empêchent l'ouverture et la propagation des fissures.
- La résistance des armatures longitudinales au cisaillement (effet de goujon).

Ce projet a pour but le développement des outils et des algorithmes suffisamment robustes pouvant être employés pour évaluer numériquement la sécurité des structures en béton armé, notamment les structures ayant une importance particulière telles que : les enceintes et les centrales nucléaires, ce type de structures est soumis à un chargement de service très complexe. Néanmoins, les risques qui ont été enregistrés, entraînent de très graves incidents. Pour cela, l'étude et le contrôle de chaque composant sont devenus d'une importance particulière pour la sécurité et la protection humaine et de l'environnement.

Dans les pays industrialisés, un suivi strict et permanent est appliqué surtout après les désordres qui ont été remarqués sur un certain nombre d'enceintes nucléaires ou d'actions sismiques. D'après les experts du domaine, l'origine des conséquences constatées provient principalement d'une série de mécanismes difficiles à identifier à cause de la complexité du comportement des structures en béton armé.

En général, ces désordres sont liés à la combinaison de plusieurs phénomènes qui affectent le comportement du matériau béton depuis son jeune âge (retrait, séchage, fluage, localisation des fissures) jusqu'à son vieillissement (fluage et dégradation des propriétés thermomécaniques). Afin de comprendre tous ces mécanismes, des travaux de recherche investissent dans le développement de la simulation numérique de la qualité dans le domaine du génie civil. Les principaux phénomènes ayant un objet entrant dans la modélisation des structures composites, sont :

- ✓ Le développement des microfissures au cours de la construction.
- ✓ Effet de fluage durant la vie de l'ouvrage.
- ✓ La fissuration et son évolution en état de service de l'ouvrage.

On constate que parmi les effets cités ci-dessus, deux sont liés au phénomène de fissuration. C'est pour cela cet aspect est pris en considération avec une importance particulière. La capacité de simuler ces mécanismes permettra de répondre aux besoins souhaités par les désordres constatés sur des ouvrages ayant déjà subis des dégradations et des endommagements. Ces réponses sont essentielles pour les spécialistes du domaine dans l'organisation des travaux de réparation, l'évaluation de la durée de vie des ouvrages endommagés grâce à la qualité de sécurité d'une part et de l'amélioration de la conception de calcul d'autre part.

Pour ces raisons, la modélisation numérique appliquée dans le domaine de la mécanique des structures en béton armé devrait notamment permettre de reproduire correctement non seulement l'effet de dégradation, mais également le faciès de fissuration (nombre, espacement et ouverture des fissures, phénomène d'engrènement), éléments importants dans l'évaluation des propriétés de transfert. En ce qui concerne cette modélisation, deux objectifs ont été clairement pris en considération :

- L'établissement des modèles de comportement simulant de façon rigoureuse l'interface acier-béton.
- Construire des modèles de simulation du matériau composite « béton armé » comme matériau intégré.

Dans l'intention de satisfaire ces demandes et en considérant les limitations existantes pour simuler correctement un tel problème, nous avons redéfini les objectifs principaux de ce travail de recherche que nous présentons dans la section suivante :

1.4. Les objectifs de ce travail :

Ce travail est consacré pour décrire la réponse des voiles en béton armé sous un chargement monotone. Pour atteindre ce but, trois objectifs principaux ont été définis au cours de l'établissement de cette recherche :

- La présentation d'une procédure qui simule correctement le comportement des voiles ou des murs en béton armé en utilisant la méthode des éléments finis comme méthode numérique de base.

- La caractérisation et l'identification des modèles de comportement des différents composants.
- Le calibre des modèles dans la réponse des voiles en béton armé.

Les résultats numériques obtenus permettent de présenter quelques recommandations relatives à ce sujet.

Pour aboutir à une modélisation adéquate qui reflète le comportement global des voiles en béton armé, il est nécessaire qu'elle soit intégrée dans un code de calcul par éléments finis standard déjà développé dans le souci d'une conception plus large qui s'inscrit dans le cadre de la modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé.

1.5. La structure du manuscrit

Le présent manuscrit est composé en six chapitres :

Une introduction générale est présentée au début du document dans laquelle la présentation de la problématique, l'intérêt et l'étude du comportement des voiles en béton armé ainsi que les objectifs de ce travail sont présentés dans le chapitre premier. Le second chapitre est consacré à l'illustration des travaux déjà présentés dans la littérature qui prennent le comportement et la réponse des voiles en béton armé comme un projet principal des travaux de recherche. Cette étude bibliographique couvre indifféremment les travaux réalisés dans le domaine expérimental que le domaine de la modélisation numérique.

Dans le troisième chapitre est exposée de façon détaillée la démarche prise dans cette recherche. Il est considéré le cadre théorique de la modélisation numérique permettant la simulation numérique des voiles en béton armé. Il est évident que toute recherche s'appuie sur des hypothèses relatives aux quelques phénomènes qui entrent en jeu dans le cadre de la modélisation du matériau composite béton armé. Enfin, les lois de comportement ont été incorporées dans un programme numérique établi à l'analyse du comportement non linéaire des structures en béton armé.

En simulation numérique, le recours à une méthode numérique est indispensable. Pour cette raison, le quatrième chapitre est réservé à la présentation de la méthode des éléments finis prise comme une méthode numérique de cette analyse.

Dans le cinquième chapitre est consacré à la validation numérique dans lequel la simulation numérique bi-dimensionnelle (2D) des voiles en béton armé est présentée. Dans ce sujet, plusieurs voiles font l'objet de l'étude de la réponse et du comportement des voiles en béton armé.

Enfin, il est nécessaire d'inspirer les discussions et les conclusions à travers l'établissement de cette étude faisant le cadre littérature du dernier chapitre.

1.6. La mise en œuvre numérique:

Ces dernières années avec le développement considérable dans le domaine de machines de calcul de haute puissance, la simulation numérique est devenue une évidence. Le recours à l'utilisation de la méthode des éléments finis (MEF) est un outil indispensable permettant le passage d'une structure globale à une autre discrète. Ce passage d'idéalisation conduit à une simplification de l'écriture des équations gouvernant le comportement des structures en béton armé lorsqu'elles sont soumises à des chargements extérieurs. Dans ce travail, la méthode des éléments finis est choisie comme une méthode numérique de base pour établir ce travail de recherche. L'implantation numérique des modèles de comportement du matériau composite béton armé ainsi que celui du milieu interface ont été mis en œuvre dans un programme développé pour analyser le comportement des voiles en béton armé. Accompagnement, plusieurs phénomènes liés à ce type de comportement font l'objet d'une étude particulière pour caractériser son effet sur le comportement local ou global des voiles en béton armé.

1.7. Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons bien défini le sujet du travail à élaborer. Les aspects généraux de ce travail portent autour de la modélisation du comportement des voiles et des murs en béton armé. Les voiles, à savoir les poutres profondes, sont choisis comme une application directe de la démarche numérique exposée au chapitre 5 : validation numérique. Ce choix n'est pas intuitif mais il est en principe basé sur la large application des voiles dans le domaine de la construction et des ouvrages spéciaux.

Chapitre 2

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

2.1. Introduction

Comme nous avons déjà signalé au chapitre précédent, que la conception des voiles dans les structures de construction constitue une partie principale de contreventement aux charges extrêmes. De même, nous avons justifié le recours de leur utilisation. Sur le plan bibliographique, il y a un demi-siècle, le domaine de l'aptitude au service des structures pas à pas a fait son chemin, pour devenir au moins aussi important que celui de la sécurité structurale. Il est particulièrement devenu d'actualité, dans le milieu de la pratique comme dans celui de la recherche.

Le domaine du comportement des structures en béton armé est particulièrement une tâche très difficile. Cette difficulté réside en général dans la modélisation du comportement de différentes composantes du matériau "béton armé" ainsi que celui du milieu interface qui assure une liaison ou une adhérence entre les deux matériaux : béton et acier. Devant une telle situation et pour une bonne représentation, ces multiples interactions requièrent souvent l'utilisation des modèles de calcul fort complexes.

D'après nos connaissances bibliographiques le problème de dimensionnement effectué indifféremment à l'état limite de service ou à l'état limite ultime, est relativement simple et pratique dans leur mise en œuvre. Les théories récentes dont leurs hypothèses impliquées peuvent être fort éloignées de celles régissant le comportement en service des structures. Pour atteindre une analyse réaliste, il est nécessaire de passer par une analyse de plus en plus fine des différentes composantes du système composé considéré.

L'objectif principal recherché dans ce travail est le développement et l'application d'un outil numérique pour analyser le comportement et la réponse des voiles en béton armé. En plus, il est attaché plus d'importance à la modélisation de quelques phénomènes liés au comportement des structures en béton y compris des voiles en béton armé. Ce chapitre expose donc les principaux modèles que dispose la littérature du domaine. L'objectif de ce travail est de présenter ces modèles et

de les critiquer à partir des résultats obtenus. En outre, cette partie nous permet de bien situer la démarche que nous voulons proposer le long de ce travail.

2.2 Les principales caractéristiques du comportement des voiles

Les principaux paramètres influençant le comportement des voiles en béton armé sont l'élanement (rapport hauteur H sur la largeur L du voile), les armatures (pourcentages et dispositions) et la contrainte normale moyenne (Davidovici et al. 1985). Il y a lieu de distinguer les voiles élancés (élanement H/L supérieur à 1,5 environ) et les voiles courts (élanement H/L inférieur à 1,5).

a) Voiles élancés

Les principaux modes de rupture des voiles élancés sont représentés sur la figure 2.1. La rupture en flexion par plastification en traction des armatures verticales (a1) est le mode de rupture «normal» lorsque la flexion est prépondérante et que l'effort normal est faible.

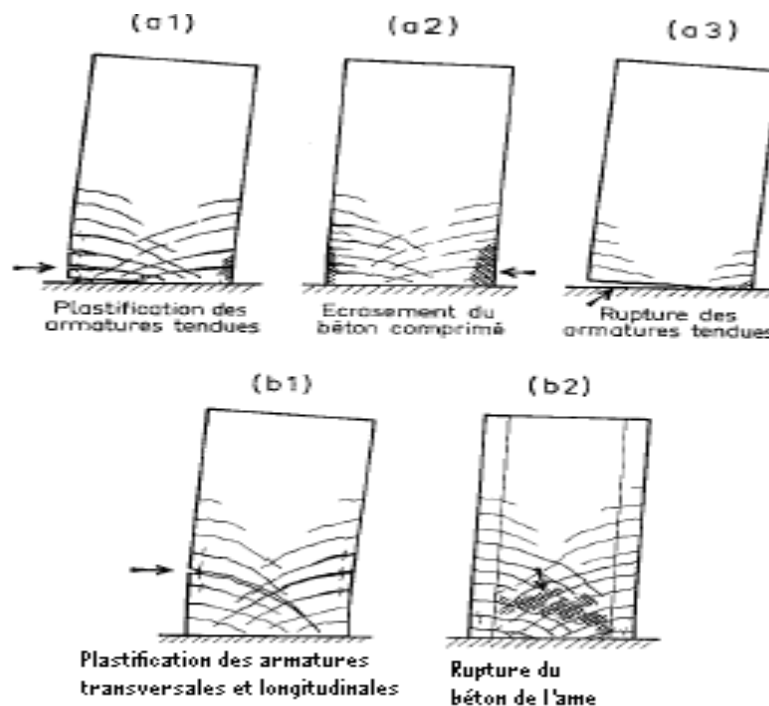


Figure 2.1 Modes de rupture des voiles élancés (Davidovici, 1985).

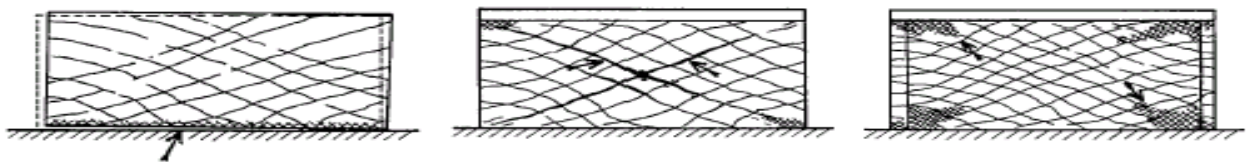
La rupture en flexion par écrasement du béton (a2) apparaît pour des voiles assez fortement sollicités et armés en flexion. Le mode de ruine (a3) concerne des voiles faiblement armés en flexion,

surtout si les armatures verticales sont essentiellement réparties et non pas concentrées aux bords, les deux derniers modes de ruptures – (b1) rupture en flexion effort tranchant par plastification des armatures verticales de flexion et des armatures transversales, (b2) rupture par écrasement dans le béton de l'âme – apparaissent quand le cisaillement devient prépondérant.

Le comportement d'un voile élancé est assimilable à des poutres et il n'y a pas de difficultés pour évaluer, par les méthodes classiques, la résistance et la déformabilité vis de la rupture par flexion ou par effort tranchant.

b) Voiles courts

Dans le cas des voiles courts, l'effort tranchant est généralement prépondérant par rapport à la flexion. Les principaux mécanismes de ruptures sont ceux de la figure 2.2. La rupture par glissement à l'encastrement - « sliding shear » - (c1) est obtenue par plastification progressive des armatures verticales sous l'action de la flexion et du cisaillement ou par insuffisance d'armatures verticales réparties. Ce mode de cisaillement est caractérisé par une fissure horizontale à la base de mur dont les lèvres glissent l'une par rapport à l'autre. Il apparaît souvent pour des chargements cycliques. La rupture par effort tranchant avec plastification (éventuellement rupture) des armatures le long des fissures diagonales - « tension failure » - (c2) est un cas aussi fréquemment rencontré. Enfin, la rupture par effort tranchant dans le béton de l'âme (c3) est produite par une destruction du béton à la base des bielles qui transmettent les efforts de compression - « compression failure ».



(c1) – Glissement
à l'encastrement

(c 2) – Fissures
critiques diagonales

(c3) – Ecrasement du
béton à la base des bielles

Figure (2.2) Modes de rupture de voiles courts (Davidovici et al. 1985)

Le calcul d'un voile court en flexion ne peut plus être basé sur l'hypothèse de la planéité des sections. Si l'on veut assimiler son comportement à celui d'une poutre, il faut enrichir la cinématique de la poutre en la dotant d'une distribution non linéaire des déformations. Dans la plupart des cas le calcul est effectué en utilisant des éléments plaques.

2.3 - Pratique pour le dimensionnement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement

Dans les codes de dimensionnement, l'effort tranchant V repris par une section est divisé en un terme apporté par le béton V_b (« concrete contribution ») et un terme apporté par l'acier transversal V_a (« steel contribution ») :

$$V = V_b + V_a \quad (2.1)$$

Pour des raisons de simplicité la contribution du béton comprend tous les autres phénomènes qui contribuent à la résistance autre que la contribution de l'acier. La contribution du béton est souvent considérée comme un paramètre fixe, empirique, qui est insensible aux séquences de chargement et à sa magnitude.

On constate qu'en réalité, l'augmentation de la déformation ou du nombre de cycle de chargement diminue l'influence de l'effet de goujon et d'engrènement, et donc la contribution de béton devient minime. Des recherches sont en cours sur le développement d'équations simples qui prennent en compte cette diminution en fonction de la demande en ductilité. Une telle expression, développée par Pérez et Pantazopoulou (1998), prend la forme suivante :

$$V_e = \frac{\beta \rho_t}{(1 + \mu_c)} \sqrt{f_c} \left[1 - \gamma \frac{N}{\sqrt{f_c}} \right] \text{ (MPa)} \quad (2.2)$$

Avec :

f_c : résistance de béton en compression issue d'un essai de compression sur cylindre, N : effort axial, β : constante (estimé égale à 37), γ : constante (estimé égale à 7.6), μ_c : demande en ductilité, ρ_t : pourcentage volumique d'armatures transversales.

La contribution apportée par l'acier est calculée à partir du modèle de treillis à 45 ° détaillé ci-dessous.

2.3.1- L'analogie du treillis

Les premiers modèles qui traitent de la simulation du comportement non linéaire d'une poutre en béton armé soumise à des efforts de cisaillement datent du début du siècle. Ritter (1889) et Mörsch (1909) introduisent l'analogie du treillis pour décrire le comportement d'une poutre fissurée (figure 2.3). Des fissures inclinées par rapport aux barres horizontales d'acier apparaissent et séparent le béton en une série de bielles diagonales (« compression concrete struts ») parallèles aux fissures. Les bielles de compression sont supposées résister en compression axiale. Avec les barres d'acier (« tension chord » and « tension ties ») qui ne reprennent que de la tension axiale, elles forment un treillis capable de résister à l'effort tranchant appliqué.

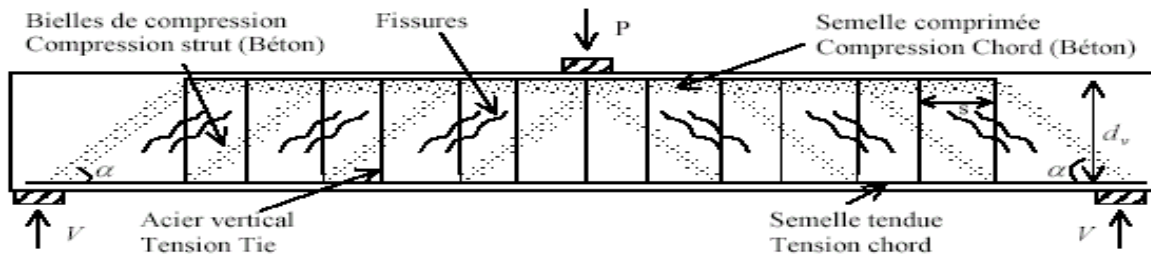


Figure 2.3 L'analogie du treillis

L'examen du corps libre (figure 2.4) nous montre que l'effort tranchant V dans la section est équilibré par la composante verticale de l'effort de compression D dans les bielles de béton. Cette composante se traduit en une traction exercée sur les armatures transversales. La composante horizontale de l'effort D est contrebalancée par des efforts de traction N dans les armatures horizontales. Pour des raisons de simplicité, l'angle de l'inclinaison des bielles est supposé égale à 45° , d'où le nom de la méthode « modèle des bielles à 45° ». Le modèle considère que la résistance au cisaillement est atteinte quand le ferrailage transversal est plastifié. Le pourcentage de ferrailage transversal nécessaire pour le dimensionnement de la poutre est ensuite calculé à partir de l'équation (2.5), connue aussi sous le nom de « trust equation for shear ».

$$N = \frac{2V}{\tan \alpha} = 2V \quad (2.3)$$

$$f_{ct} = \frac{D}{b_v d_v \cos \alpha} = \frac{V}{b_v d_v \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2V}{b_v d_v} \quad (2.4)$$

$$V = A_{vx} f_{ty} \frac{d_v / \tan \alpha}{s} = A_{vx} f_{ty} \frac{d_v}{s} \quad (2.5)$$

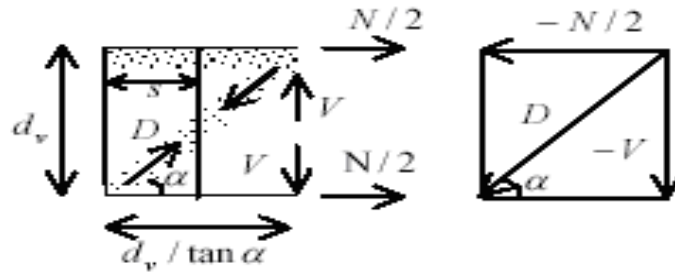


Figure 2.4 Equations du modèle bielles à 45°

Avec :

P : effort vertical exercé sur la poutre, s : espacement entre les armatures transversales, b_v : largeur effective de la poutre, d_v : distance entre les aciers longitudinaux, A_{vs} : section d'armatures transversales pour une distance s , V : effort de cisaillement dans la section, $N/2$: effort de traction exercé sur les armatures longitudinales, D : effort de compression exercé dans les bielles de béton, f_{cd} : contrainte de compression dans les bielles de béton, f_{ty} : résistance en traction des armatures transversales, α : angle entre les bielles de béton et les armatures horizontales.

On constate que :

- 1 - Le modèle des bielles à 45° laisse sous entendre qu'une quantité de ferrailage horizontal en plus du ferrailage vertical est nécessaire au cisaillement.
- 2 - Le modèle néglige la contribution du béton en traction.

Le modèle des bielles à 45° a eu beaucoup de succès grâce à sa simplicité et au sens physique qu'on peut facilement y raccorder. En effet, la modélisation du mécanisme de dégradation avec l'aide d'un treillis rend le cheminement des efforts visible et le phénomène plus compréhensible. Néanmoins, dès son apparition le modèle a été sérieusement critiqué. Des expériences ont montré

que les résultats étaient souvent trop conservateurs, surtout pour les poutres avec de faibles pourcentages de renforcement. (Le modèle ne préconise pas de résistance au cisaillement pour les poutres qui ne contiennent pas d'armatures transversales, alors qu'il y en a une en réalité. C'est d'ailleurs pour cette raison que le terme V_b - équation 2.1 – est introduit dans les codes de dimensionnement).

Pour le cas de murs à faible élancement le modèle semble surestimer la résistance jusqu'à 50% (Hsu 1988) les chercheurs se sont vite aperçus que le problème du cisaillement est très compliqué et que des paramètres supplémentaires doivent être pris en considération (qualité et résistance du béton, longueur de la poutre par rapport à sa hauteur etc.). Depuis 1960 plusieurs chercheurs ont travaillé sur le problème et aujourd'hui quatre développements majeurs sont proposés afin d'expliquer la différence entre le modèle des bielles à 45° et les résultats des essais :

1. Généralisation de l'inclinaison des bielles

Les expériences ont montré que l'inclinaison des bielles de compression n'est pas en général égale à 45°. Il y a déjà plus de vingt ans, le code CEB (1978) autorisait le concepteur à faire varier l'angle entre 31° et 59°. Ces valeurs étaient issues des valeurs empiriques déterminées par LAMPERT Thurlimann (1968) pour des poutres en torsion. Ces auteurs sont les premiers à utiliser des éléments membranes pour le dimensionnement des structures en béton armé. Ils considèrent des angles d'orientation différents de 45° et aboutissent aux équations d'équilibre pour un élément membrane chargé en contrainte normale et en contrainte de cisaillement. Ils apportent des fondements théoriques à ce modèle par la théorie de la plasticité, d'où le nom « Variable angle truss model » ou « plasticity truss model »

2. Détermination de l'angle des bielles de compression

Avant d'utiliser les équations d'équilibre de l'analogie du treillis, il faut connaître l'angle d'inclinaison des bielles de compression. Le premier à traiter un problème analogue est H.A.Wagner (1929). Wagner travaillait dans l'aéronautique sur le flambage des éléments métalliques minces soumis à des efforts de cisaillement. Il considère qu'après flambage l'élément métallique ne peut plus résister en compression et le cisaillement est transféré par un champ de traction diagonale. Afin de déterminer l'angle de l'inclinaison de la traction diagonale, Wagner considère les déformations du

système. Il suppose que l'angle de l'inclinaison de la contrainte de traction diagonale coïncide avec l'angle de l'inclinaison de la déformation principale de traction.

Son approche est connue sous le nom de « Tension Field theory ». En se basant sur les développements de Wagner, Collins (1978) suppose qu'après fissuration le béton n'a plus de résistance en traction et le cisaillement est transmis par un champ de compression. Il arrive ainsi à calculer l'angle de la compression diagonale pour tout le domaine de chargement à partir des déformations des armatures et du béton.

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_d}{\varepsilon_t + \varepsilon_d} \quad (2.6)$$

Avec :

$\varepsilon_l, \varepsilon_t$ et ε_d sont respectivement les déformations des armatures longitudinales, transversales et des bielles en béton.

De l'équation (2.6), on peut conclure que:

- Cette équation peut aussi être déterminée du cercle de Mohr. Elle est équivalente à l'équation de compatibilité qui lie les déformations du béton et des armatures horizontales et transversales ;
- L'angle de l'inclinaison des bielles coïncide avec l'angle de l'inclinaison de la contrainte et de déformation principale de compression.

3. L'adoucissement de bielles de béton

La prédiction du comportement non linéaire d'un élément en béton armé nécessite non seulement des équations d'équilibre et de compatibilité, mais aussi des lois de comportement pour le béton et l'acier. La relation obtenue lors d'un essai de compression simple sur cylindre en béton a été utilisée par plusieurs scientifiques comme loi pour le béton. Néanmoins, les résultats numériques se trouvaient souvent loin des résultats expérimentaux. La raison a été identifiée pour la première fois par Péter (1964) qui a observé que le comportement d'un panneau en béton armé soumis à effort de compression est adouci à cause de la traction dans la direction perpendiculaire. L'adoucissement serait donc causé par l'état triaxial de contrainte dans les bielles et la présence de traction perpendiculaire à leur axe. Une fois l'adoucissement identifié, plusieurs chercheurs ont travaillé pour

le quantifié. Collins (1978) choisit la résistance en compression des bielles inférieure à la résistance en compression obtenue lors d'un essai de compression simple sur cylindre. Il postule que la résistance en compression diminue avec l'augmentation du diamètre des déformations principales $1 + \epsilon_2$. Vecchio et Collins (1986) effectuent une série d'essais sur des éléments de béton armé soumis à un champ de contraintes membranaires. Pour cela un dispositif spécialement conçu a été développé. Ils concluent que la résistance du béton fissuré en diagonale de compression diminue avec l'augmentation des déformations de traction. Ils quantifient cette diminution à partir de leurs résultats expérimentaux et il proposent une loi où l'adoucissement dépend de la proportion des deux déformations principales (Vecchio et Collins 1986 équations 2.7 et 2.8 figure 2.5).

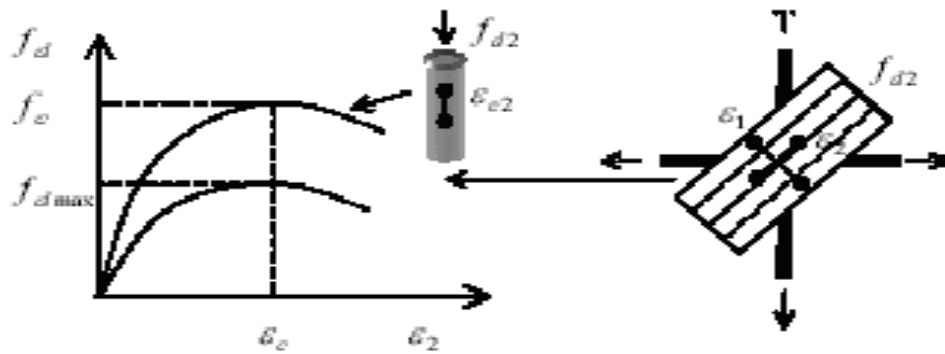


Figure 2.5 Adoucissement des bielles de béton

$$f_d = f_{d \max} \left[2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

$$f_{d \max} = \frac{f_c}{0,8 + 170 \epsilon_1} \leq f_\epsilon \quad (2.8)$$

f_c : résistance de béton en compression issue d'un essai de compression sur cylindre, ϵ_c : déformation qui correspond à f_c lors d'un essai de compression sur cylindre, ϵ_1 : déformation principale en traction, ϵ_2 : déformation principale en compression.

Depuis, un grand nombre d'essais similaires effectués par différents chercheurs a confirmé cette diminution de la capacité du béton fissuré des bielles à résister à la compression lorsque la déformation de traction perpendiculaire augmente (pour un résumé des campagnes expérimentales voir Vecchio et Collins 1993). On trouve aujourd'hui dans la littérature plusieurs propositions sur le paramètre qui gère l'adoucissement (Mo et Robert 1997) et de nouvelles lois de comportement (Belarbi et Hsu 1995, figure 2.6).

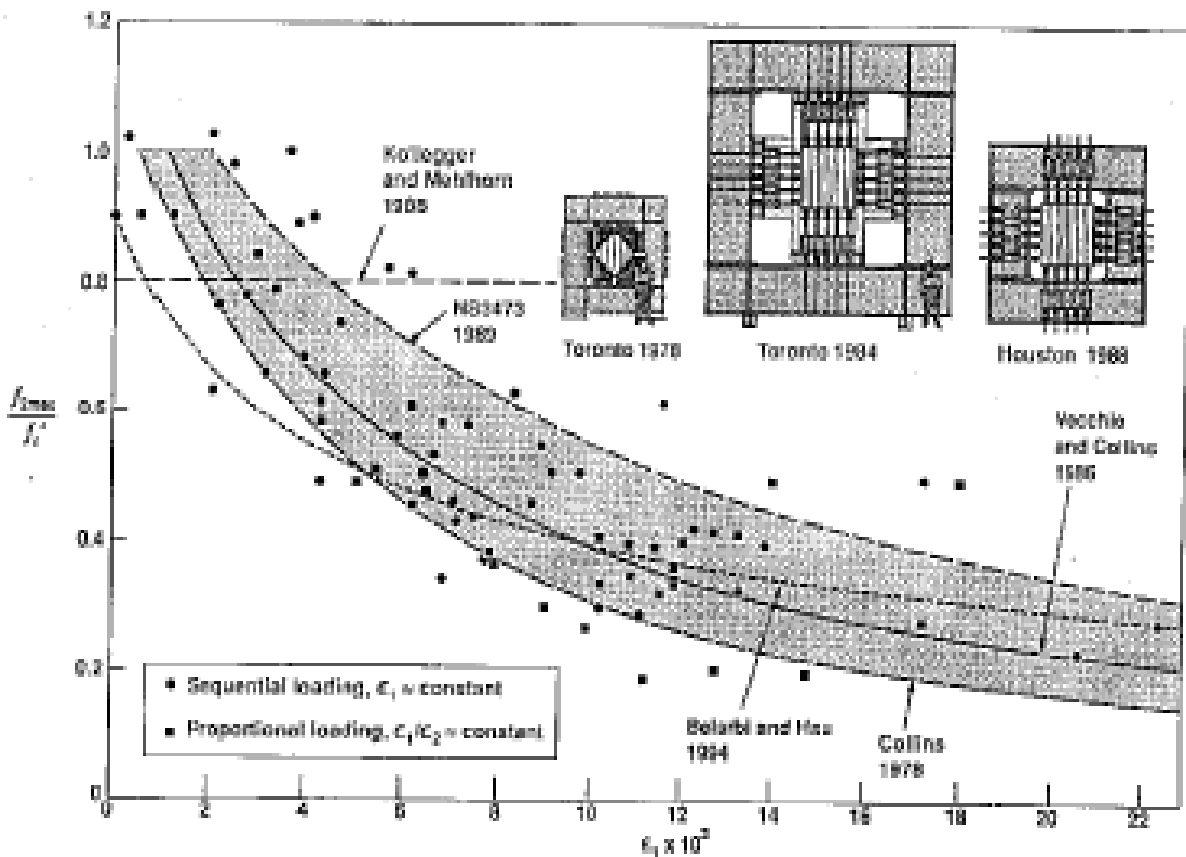


Figure 2.6 Contraintes maximales de compression du béton en fonction de la déformation principale de traction perpendiculaire (ASCE – ACI 1998)

A partir de ce constat, on peut dire :

- L'adoucissement du béton influence beaucoup la résistance au cisaillement des éléments sur – renforcés (Pérez et pantazopoulou 1998).

- Le phénomène de l'adoucissement en dynamique n'est pas encore bien quantifié (Mo et Rothert 1997).

4. contraintes de traction dans le béton

Le modèle des bielles à 45° suppose que le béton ne résiste pas en traction. Cependant, plusieurs essais prouvent que le béton, même après avoir subi une fissuration importante, est capable de transmettre des contraintes de traction (Vecchio et Collins 1986). Ces contraintes diminuent les déformations, rigidifient l'élément et le rendent capable de résister à de plus grandes déformations de cisaillement. Leur influence peut donc être significative et elles doivent être prises en compte (ASCE – ACI 1998). Ce phénomène connu comme « tension stiffening phenomenon » est souvent approché par une modélisation adéquate du comportement post-pic en traction du béton. Une représentation plus fine nécessiterait la modélisation de l'interaction acier – béton (« bond slip »).

A l'instar de ces résultats, plusieurs méthodes ont été développées pour le dimensionnement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement. Dans la suite, deux méthodes ainsi qu'une application pour le cas des voiles faiblement élancés vont être présentées.

2.3.2- Théorie du champ de compression

Cette modélisation fait suite au développement de la théorie du champ de compression dans laquelle la participation du béton tendu et l'effet de l'engrènement au droit des fissures n'est pris en considération. Les principales hypothèses adoptées dans cette approche sont :

1. Les conditions d'équilibre et de compatibilité correspondantes sont appliquées à un état plan de contrainte (état membranaire).

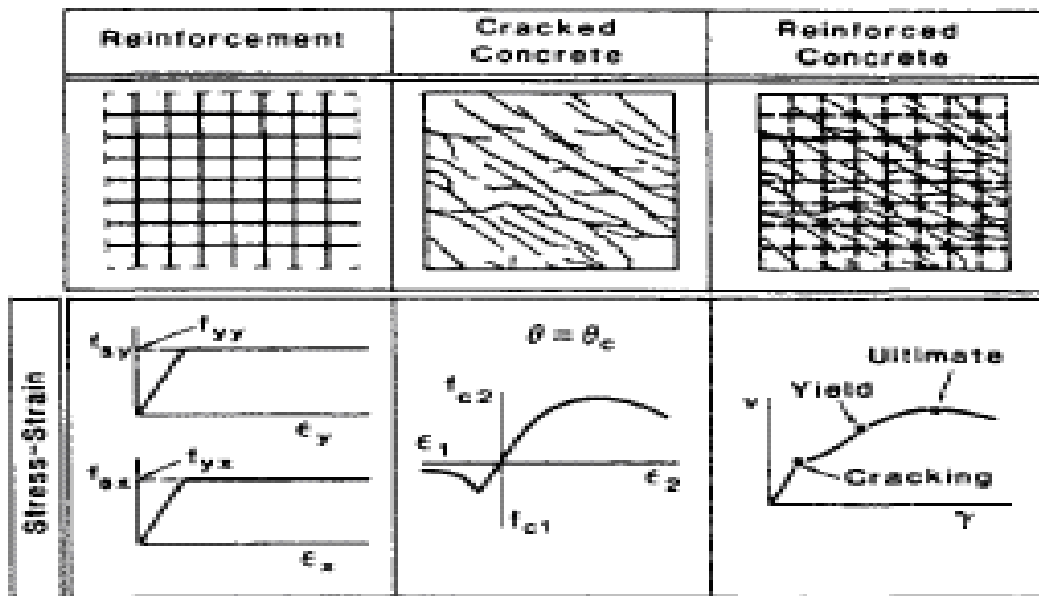
2. Les lois constitutives des matériaux acier et béton sont supposées des lois liant les contraintes moyennes et les déformations moyennes (fig.2.7) pouvant être différentes des lois constitutives habituelles. En l'occurrence, pour l'acier la loi $\sigma - \epsilon$ est la loi élastique – plastique bilinéaire classique. Par contre, celle du béton s'en écarte pour plusieurs raisons. Non seulement il s'agit d'une loi contrainte moyenne – déformation moyenne, mais elle intègre la participation du béton tendu entre les fissures, et tient également compte de l'état de contraintes – déformations bi – axial.

3. Les fissures sont supposées parallèlement à la direction principale moyenne de compression dans le béton (le modèle de fissures tournantes).

4. Les directions principales de contraintes et de déformations se coïncident. L'expérience (des résultats satisfaisants) a montré que l'écart entre les deux ne dépasse pas 10° de différence même au niveau de la rupture.

5. Les armatures ne transmettent que des contraintes axiales (pas de flexion locale des barres – dowel effect).

6. La transmission des forces à travers les fissures n'est assurée que par les armatures, sauf en cas de plastification de ces dernières, auquel cas l'engrènement des granulats au droit de la fissure (aggregate interlock) peut être mobilisé pour assurer l'équilibre jusqu'à la rupture complète.



Figure(2.7) lois constitutives de la MFCT et comportement du modèle en cisaillement pur

2.3.3 - La théorie du treillis adoucissant

Le modèle du treillis adoucissant avec la rotation de la fissure (Ra – STM) développé par Hsu est très semblable à la théorie modifiée du champ de compression (MCFT). Si ce n'est quelques différences dans la définition de la loi constitutive du béton. Concernant la transmission des forces à travers les fissures, les contrôles présents dans la version de 1986 de la théorie modifiée du champ de compression (MCFT) ne trouvent pas de correspondant dans le RA – STM, lequel n'introduit aucune participation du béton pour la transmission de cisaillement dans le plan de la fissure. Des

comparaisons sur des exemples numériques ont cependant montré une bonne concordance des deux modèles avec des résultats expérimentaux.

Partant du principe qu'un modèle de fissuration tournante ne peut pas prendre en compte correctement le cisaillement dans le plan d'une fissure, Hsu a développé un autre modèle basé sur la considération de la fissure fixe (FA–STM), dans lequel la direction de la fissuration n'est plus gouvernée par les directions principales des contraintes dans le béton mais par les directions principales des contraintes appliquées à l'élément de béton armé. Une condition de contrôle de plastification des armatures au droit des fissures est introduite. La confrontation avec des résultats expérimentaux a montré une sensible amélioration par rapport au RA – STM.

Il faut cependant noter que le critère de plastification introduit dans le FA–STM ne permet pas la plastification séparée des différentes nappes d'armatures, ni l'absence d'armatures dans une direction.

2.4 Modélisation des structures en béton armé

Le béton est déjà à lui seul un matériau fort complexe. Par sa nature et sa formulation, un mélange de granulats de tailles différentes, de liant et d'air, il est considéré hétérogène. En général, on le considère néanmoins comme un matériau homogène, du moins pour tout ce qui touche à l'analyse des structures. L'hétérogénéité se manifeste également à un autre niveau : la fissuration engendre des discontinuités locales et par conséquent une réponse anisotrope. De plus, partant de sa caractéristique; sa mauvaise résistance à la traction, le béton est rarement utilisé seul. Les armatures qui y sont associées sont des éléments discrets et linéaires, ce qui accentue encore l'hétérogénéité et l'anisotropie du matériau béton armé ou précontraint. Pour cette raison, les interactions entre les deux matériaux ; béton et acier, sont tenues en compte et qui présente en même temps des phénomènes plus complexes.

Cependant, selon le niveau de l'étude à réaliser; l'échelle de la modélisation utilisée, l'hétérogénéité du béton armé fissuré peut être traitée par l'utilisation d'un modèle de comportement basé sur l'hypothèse d'homogénéité du matériau composite. Dans ce cadre, L'anisotropie ne peut pas être ignorée dans la formulation des modèles numériques. Il est clair qu'une pièce de béton armé est moins rigide si elle est fissurée que si elle ne l'est pas. La rigidité apparente est donc plus grande dans la direction parallèle aux fissures que dans la direction perpendiculaire. Dans ce sujet, plusieurs modèles ont déjà été présentés et qui seront exposés dans le chapitre suivant.

2.4.1 - Fissuration des bétons

Du point de vue du comportement global d'une structure, l'aspect essentiel de la fissuration du béton conduit à des pertes locales de rigidité, entraînant au niveau de la structure des augmentations de déformations d'une part et des redistributions de contraintes d'autre part. La fissuration comme un phénomène mécanique qui se naît au sein de l'élément fini engendre de sa part une augmentation considérable de déformation et éventuellement une augmentation dans les déplacements. Le phénomène de fissuration se traite ici par des déplacements supplémentaires provoqués par la redistribution des forces de fissures.

D'une façon générale, l'analyse des réponses expérimentales; courbes charge déplacement d'une poutre en béton armé simplement appuyée est montrée sur la figure 2.3 La courbe peut être divisée en trois phases de comportement : la phase élastique linéaire, la phase de propagation des fissures et la dernière phase de plasticité (écoulement et rupture).

La non linéarité de la réponse d'un tirant en béton armé est due à deux effets principaux, à savoir, le phénomène de fissuration par traction et l'écoulement des aciers ou l'écrasement du béton par compression. La réponse non linéaire résulte également de l'interaction des constituants du matériau composite représentée par l'adhérence glissement entre l'acier et le béton qui l'entoure. Les effets dépendant du temps tels que : le retrait, le fluage et la variation de température contribuent également au comportement non linéaire du béton. En outre, la relation contraintes déformations du béton est non seulement caractérisée par une allure non linéaire mais elle se diffère en traction qu'en compression.

Les suppositions faites dans la description du comportement matériel du béton sont :

1. Les rigidités du béton et des barres d'acier sont séparément formulées, celle du matériau composite est obtenue par effet de superposition.
2. Le modèle de fissuration répartie est adopté pour décrire le comportement du béton fissuré et la direction des fissures reste inchangée pendant toute la durée du calcul.
3. On assume que l'acier reprend les contraintes de transfert uniquement le long de son axe.

Le matériau composite béton armé présente des caractéristiques mécaniques complexes. L'acier peut être considéré comme un matériau homogène et ses propriétés matérielles sont bien connues. Tandis que le béton est, d'autre part, un matériau hétérogène composé de ciment, du mortier et des agrégats. Leurs propriétés mécaniques sont largement dispersées et qu'elles ne peuvent pas être

définies facilement. Cependant, il est souvent considéré comme un matériau homogène dans le sens macroscopique pour simplifier l'analyse et la conception des structures qu'il en compose.

Le comportement d'un tirant en béton armé, par exemple, ne se résume pas à une phase élastique linéaire pour le stade non fissuré et au passage brusque au stade II-nu où seule l'armature contribue à la rigidité (fig. 2.8 a).

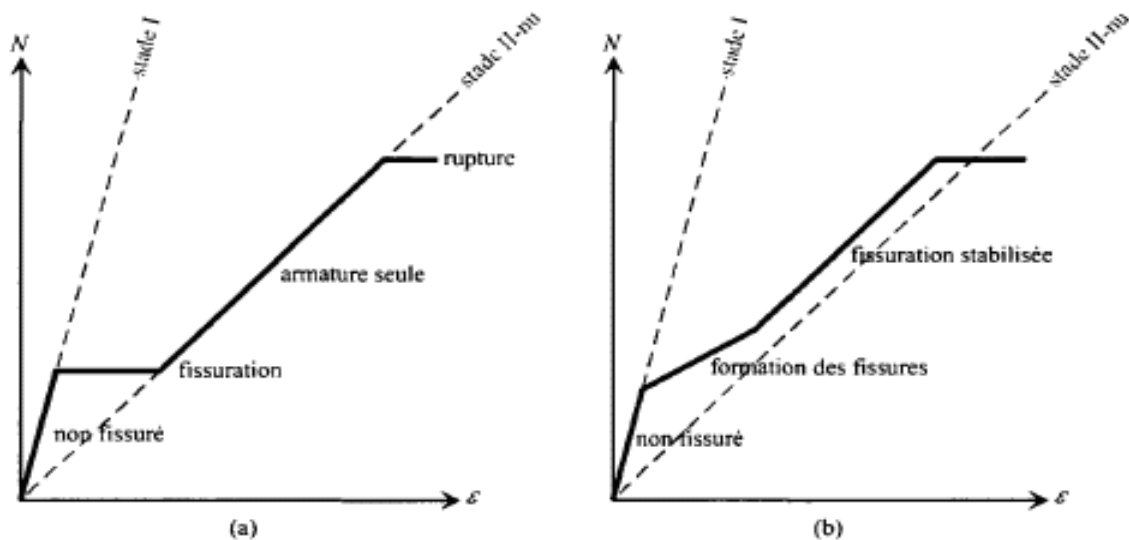


Figure 2.8 : Comportement idéalisé d'un tirant en béton armé (a) sans participation du béton après fissuration (b) avec participation du béton

Du fait de la nature hétérogène du béton, les bords d'une fissure ne sont pas des surfaces lisses. L'enchevêtrement des granulats et de la pâte de ciment permet la transmission de traction et de cisaillement, même si le béton est fissuré.

Le sujet de prédiction de la mécanique de la rupture, la transmission de traction à travers une zone fissurée est connu sous le nom de comportement adoucissant du béton «softening behaviour» (fig.2.9a). Le modèle de la fissure fictive proposée par Hiller Borg permet de représenter l'endommagement progressif de la zone de rupture par une ouverture de fissure équivalente w en y associant une loi contrainte déformation représentant le comportement de la zone fissurée (fig.2.9b).

La transmission de cisaillement à travers une fissure s'explique par la rugosité des faces de la fissure entravant leur glissement relatif (fig. 2.10). La capacité de transmission de cisaillement d'une fissure dépend essentiellement de l'ouverture de la fissure et de la taille maximale des granulats (Walraven).

Mentionnons enfin le fait que, sous chargement de longue durée, le béton peut se rompre sous une sollicitation de traction inférieure à sa résistance à la traction à court terme. Des réductions de la résistance à la traction d'un facteur pouvant aller de 0,6 (Shkoukani & Walraven) à 0,7 (Al-Kubaisi & Young) ont été observées. Ce comportement est connu sous le nom de fatigue statique.

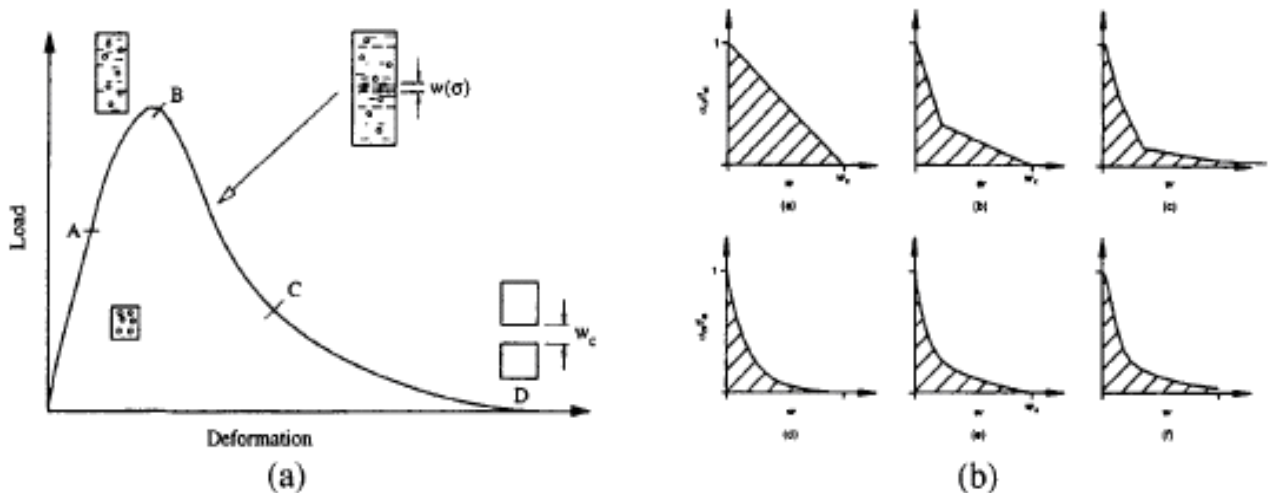


Figure 2.9 : (a) Diagramme charge – déformation d'une éprouvette en traction
(b) différentes formes de lois de softening

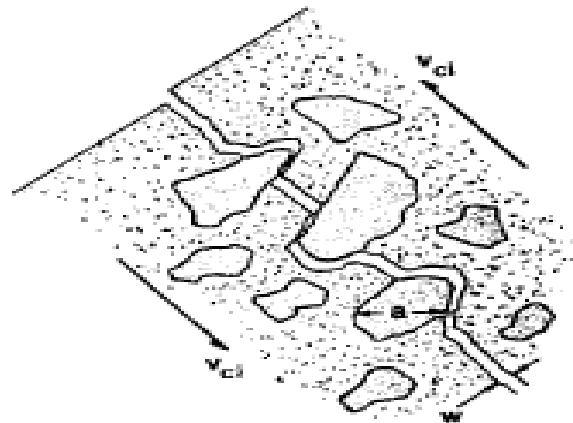


Figure 2.10 : Transmission de cisaillement à travers une fissure par engrènement des granulats

Ce paramètre fait l'objet d'une étude paramétrique, appelé facteur de transfert de contrainte ou de cisaillement. Dans ce concept, plusieurs valeurs l'ont été allant de zéro (aucun transfert est considéré) à une valeur égale unité (transfert total de contrainte). Enfin, cette étude a conduit à une conclusion proposant la tenue en considération du coefficient de transfert des contraintes de cisaillement à travers les lèvres de fissure dans les poutres en béton armé (Khalfallah, 2004).

Si les comportements mentionnés ci – avant sont fondamentaux pour l'étude du béton seul, il en est un encore plus important en présence d'armatures. La figure 2.11 montre les variations de l'état de contrainte le long d'un tirant en béton armé. Ces variations sont effectivement dues à l'effet de l'adhérence entre les barres d'acier et le béton qui les entoure. Cet effet est introduit pour décrire le phénomène de transmission de contraintes entre le béton et l'acier. C'est dans ce concept que la participation du béton ainsi tendu entre les fissures pouvant participer à la rigidité du tirant et qui ne peut pas être négligée dans une analyse des structures en béton armé.

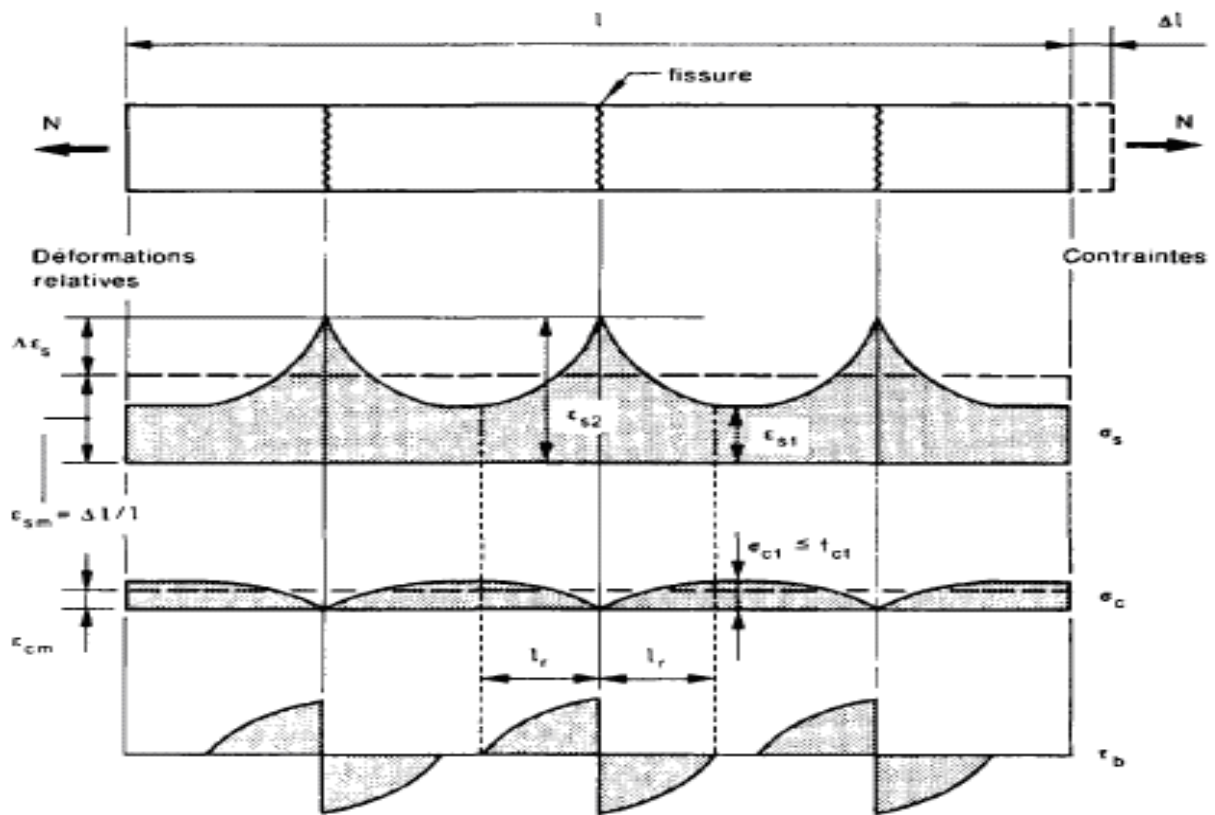


Figure 2.11 : Variation de l'allongement et des contraintes le long d'un tirant en béton armé fissuré

Les armatures peuvent également transmettre un effort de cisaillement à travers la fissure, par un effort axial, si les barres ne sont pas perpendiculaires aux fissures, et par flexion locale des barres (dowel effect 2.12). Ce phénomène engendre des déformations locales des barres d'acier comme le montre le figure (2.12) ce qui provoque éventuellement un champ de déplacement et par conséquent des contraintes résiduelles suivant les deux directions.

Les modèles de calcul de fissuration peuvent être regroupés dans deux grandes familles, à savoir : (1) les modèles locaux et (2) les modèles globaux. La première catégorie de modèles est basée sur une représentation explicite des composants du matériau béton armé.

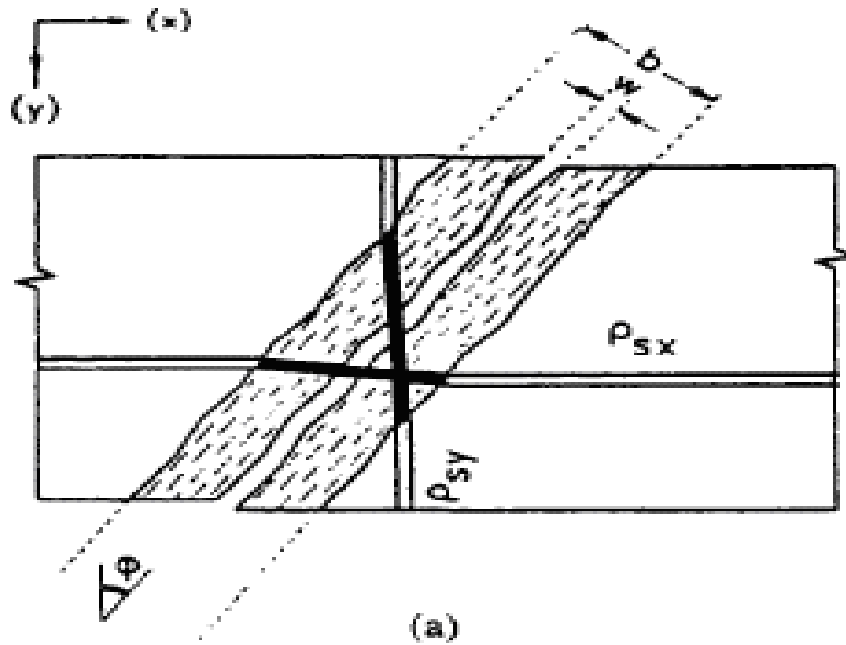


Figure 2.12 : Flexion locale des barres d'armature au droit d'une fissure

Chaque fissure est modélisée avec la tenue en forte considération de l'interaction entre le béton et chaque barre d'armature. Ici, il est notable d'introduire les modèles numériques du milieu interface. Tandis que, les modèles globaux, au contraire, considèrent le matériau composite béton armé comme un matériau homogène compris dans sa phase fissurée avec des lois de comportement tenant compte du changement mécanique pouvant être envisagé pendant l'application du chargement monotone. Ces modèles lient une relation entre l'effort transmis en fonction d'une déformation moyenne dans la zone fissurée. Pour réaliser ces modèles, il suffit d'introduire des lois de formulation simplifiée de la relation précédente.

2.4.2 - Différentes modélisations de comportement des structures en béton armé

2.4.2.1 - La modélisation locale

Le principe primordial de ce type de modèles est de représenter explicitement les comportements des différents composants et leur interaction. Chaque fissure est effectivement calculée de même que le comportement du béton entre les fissures, les variations de contraintes dans les armatures et

l'adhérence acier – béton. Ainsi, les lois constitutives utilisées sont généralement celles qui figurent au tableau 2.1.

Matériau, Localisation	Variables liées
Béton non fissuré	Contrainte - déformation
Acier d'armature	Contrainte - déformation
Béton au droit de la fissure (softening)	Contrainte de traction transmise à travers la fissure - ouverture de la fissure
Béton au droit de la fissure (aggregate interlock)	Contrainte de traction transmise à travers la fissure – glissement des lèvres de la fissure.
Armature au droit de la fissure (dowel effect)	Contrainte de cisaillement transmise à travers la fissure – glissement des lèvres des fissures.
Adhérence acier béton	Contrainte d'adhérence glissement

Tableau 2.1- Lois constitutives pour un modèle local de fissuration.

- Implémentation directe dans un modèle élément fini

Ce type de modèle peut être introduit de deux manières différentes. La première possibilité consiste en l'implémentation directe des lois constitutives des composants dans un modèle élément fini dans lequel la loi constitutive de chaque composant est séparément introduite de façon discrète (tableau 2.1). Dans la phase de comportement fissuré, précisément au niveau des éléments finis, les fissures peuvent être modélisées de différentes manières (fig.2.13) : (a) les modèles de fissuration discrète et (b) les modèles de fissuration répartie.

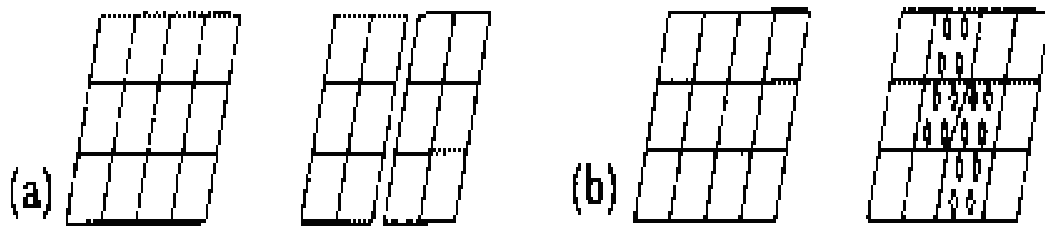


Figure 2.13 : (a) Modèle de fissuration discrète (b) Modèle d'endommagement au smeared crack

(a) Le premier type de modèle modélise effectivement la discontinuité géométrique provoquée par la fissuration du béton. La représentation du comportement de la fissure pouvant être assurée par des éléments spéciaux de contact. (b) Pour les modèles de la fissure répartie, la représentation d'une fissure se fait par la superposition de deux champs de déformation : celui des déformations élastiques

linéaires et un champ de déformation représentant l'endommagement dans la zone de rupture. Dans le cas de cette description, il n'y a pas de discontinuité géométrique dans le réseau de maillage des éléments finis. Pour éviter l'erreur préconisée par ce passage à travers ce type de modélisation, un changement rhéologique sur les lois constitutives des matériaux est nécessaire à introduire. De même, pour atteindre des résultats satisfaisants, les travaux effectués dans ce domaine exigent une tendance très fine de maillage au droit de la fissure de façon à permettre la formation et la propagation des fissures (fig.2.14).

Le problème de localisation d'endommagement n'est pas abordé dans cette section. Les détails concernant l'implémentation de la fissuration et les problèmes de localisation de l'endommagement peuvent être consultés dans plusieurs travaux de recherche dans la littérature, tels que : Bazant, Ozbolt ou plus général Bathe, Jirásek.

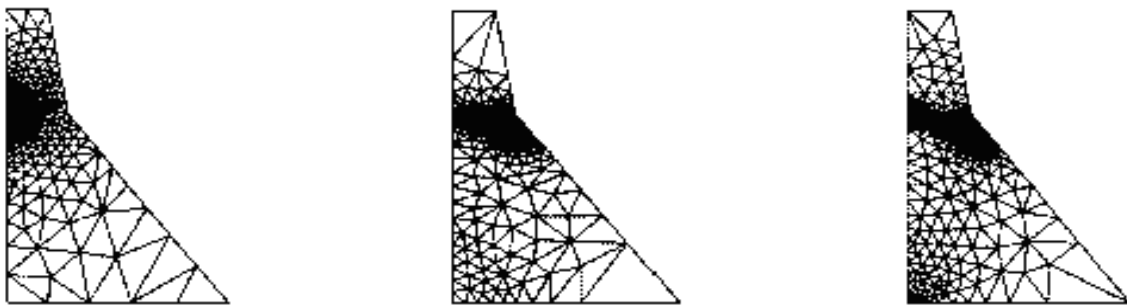


Figure 2.14 – Maillage adaptatif et propagation de la zone de rupture dans un barrage poids.

Dans la recherche, l'utilisation des lois constitutives fondamentales est abondamment mise en œuvre pour simuler de façon complète des éléments de structures simples. Dans ce sujet, on peut citer les travaux suivants : un tronçon de poutre fléchie (Rotilio), un tirant en béton précontraint (Laurence, Marti et al.), ou encore l'utilisation de la théorie membranaire à l'analyse des structures en béton armé (Hsu, Kaufman et Marti, Vecchio et Collins). Ces modélisations font, en général, appel à des nouvelles lois de comportement, dans un but de calibrer une telle étude paramétrique. Les équations qui en découlent peuvent souvent être résolues par des méthodes numériques plus simples, telle que la méthode des différences finies ou par le biais des processus itératifs.

Dans cette direction, on trouve notamment le travail de recherche de Marti et al. qui est destiné à modéliser le comportement d'un tirant en béton armé. L'étude entamée est basée sur l'incorporation des lois constitutives de l'acier, du béton ainsi que celui de l'adhérence. Cette hypothèse est supposée

valable dans la phase saine du comportement du tirant en béton armé ainsi que celle fissurée en y introduisant des lois de comportement ortho tropiques du matériau béton armé fissuré.

Commentaires

L'implémentation directe des lois constitutives de base dans un modèle d'élément finis est particulièrement adaptée pour l'analyse approfondie de détails compliqués qui n'autorisent pas de simplifications, dans la mesure où la méthode n'impose à priori pas de limitation géométriques. Néanmoins, l'utilisation de ce type de modèle est assez lourde et ne se justifie que pour des études locales.

L'approche qui consiste à développer une loi constitutive du matériau composite béton armé par l'intermédiaire d'introduction des lois constitutives non robustes est à première vue plus simple d'une part et non économique d'autre part. Du point de vue du coût de calcul, l'incorporation des lois de calcul étant réalisée au niveau d'un modèle de comportement local plutôt qu'au niveau du calcul par élément finis lui-même, une économie est réalisée sur le calcul par élément finis. Par, l'évaluation du modèle de comportement local requiert généralement des processus itératifs non linéaires. Il n'est donc pas évident de déterminer si un tel modèle est plus économique qu'un modèle local de fissuration.

Il n'en reste pas moins évident que, dans la mesure où c'est une analyse globale du comportement d'un ouvrage ou d'une structure qui est visée, des résultats aussi détaillés que ceux fournis par les méthodes décrites ci – avant ne sont pas indispensables. Dans la même optique, il serait souhaitable de réduire les données à saisir au strict nécessaire.

2.4.2.2 - La modélisation globale

A l'opposé des modèles locaux nécessitant, si non une informatique puissante, des calculs relativement complexes, les normes et codes destinés aux ingénieurs proposent des modèles globaux qui permettent de calculer de façon relativement simple le comportement moyen d'une section en béton armé en tenant compte de l'effet de la fissuration. Ces modèles sont plus ou moins empiriques et ont trouvé leur calibre sur la base de résultats expérimentaux.

Il s'agit de modèles globaux appliqués aux tirants, le principe de base reste toujours le même. Une relation est établie entre un effort transmis et la valeur moyenne d'une déformation généralisée sur un tronçon de l'élément considéré. Tant que l'élément n'est pas fissuré, la déformation est constante

le long de l'élément et égale à sa valeur calculée en stade premier (non fissuré). Au contraire, si l'élément est fissuré, la déformation varie le long de l'élément entre les valeurs en stade I et en stade II – nu (fig.2.16), de même que l'état de contrainte de la section. Dans ce cadre, la relation globale fournit une valeur moyenne de cette déformation.

- Le modèle tirant

De nombreux modèles numériques de tirant en béton armé ont été proposés par plusieurs auteurs : CEB, Van der Veen, Code modèle 90, Brugge Ling, Sippel et Farra. Leur allure générale se présente dans la plupart du temps sous la forme d'une lois multi – linéaire. Les résultats numériques obtenus, en général, sont représentés de quatre segments qui composent la réponse d'un tirant en béton armé (fig.2.15). La réponse est composée de : (1) stade non fissuré ou stade I, (2) stade de formation des fissures pendant lequel les fissures apparaissent, (3) stade de fissuration stabilisée, pendant lequel il n'y plus de formation de nouvelle fissures, et (4) le stade de rupture, qui correspond à la plastification des armatures.

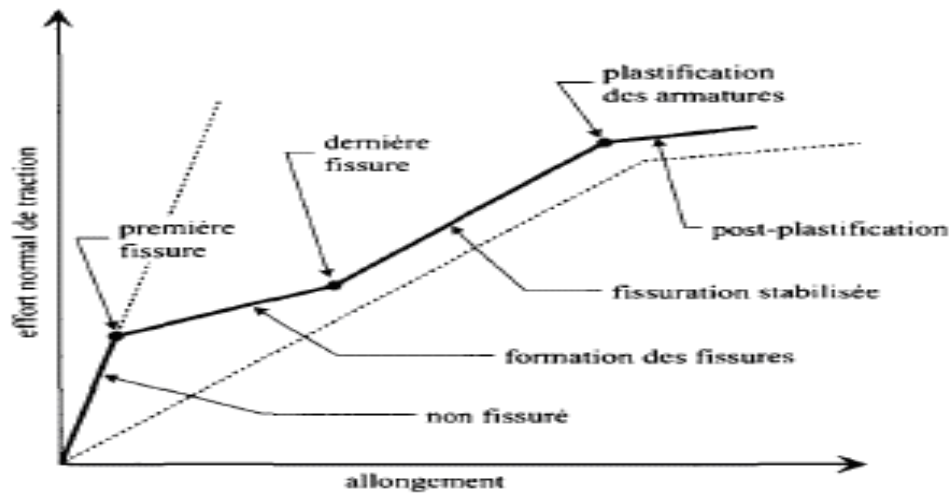


Figure 2.15 : Allure générale d'un modèle de tirant

Il est constaté que la plupart des modèles de tirant ayant cette allure (fig. 2.15), il est observable que des différences apparaissent d'une formulation à une autre vis à vis des points caractérisant l'apparition de la première fissure, la limite de propagation des fissures et leur stabilisation.

Il n'est pas utile de présenter ici en détail chacune de ces formulations (pour plus de détail, voir farra). Nous ne retiendrons ici que les formulations proposées par le code modèle 90 et Sippel dont est inspirée de la loi du tirant modifiée décrite ci-dessous. La figure 2.16 correspond aux deux

formulations. Les seules différences interviennent dans la définition des valeurs de la charge limite que peut reprendre les tirants, soient N_{srl} et N_{srm} .

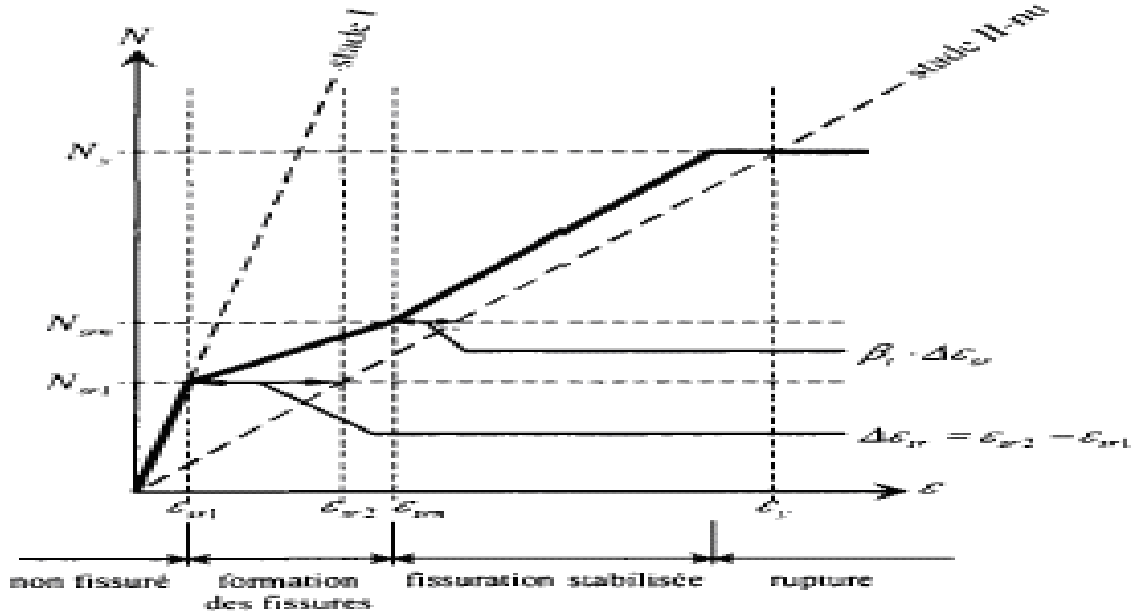


Figure 2.16 : Lois du tirant CEB – FIP et Sippel

➤ Définition des valeurs caractéristiques selon le Code Modèle CEB – FIP 90

$$N_{srl} = A_c \cdot (1 + (\alpha - 1)\rho) \cdot f_{cr} \quad (2.1)$$

$$N_{srm} = 1,3 \cdot N_{srl} \quad (2.2)$$

$$N_y = A_c \cdot f_y = A_c \cdot \rho \cdot f_y \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{sr1} = N_{srl} / E_c \cdot A_c (1 + (\alpha - 1) \cdot \rho) \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{sr2} = N_{srl} / E_s \cdot A_c \cdot \rho \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{srm} = \varepsilon_{sr2} \cdot N_{srm} / N_{srl} - \beta_l (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \quad (2.6)$$

$$\beta = \begin{cases} 0,4 & \text{sous sollicitation de courte durée} \\ 0,25 & \text{sous sollicitation de longue durée} \end{cases} \quad (2.7)$$

Où A_c est l'aire de béton brute, α le coefficient de transformation élastique acier – béton, ρ le taux d'armature. N_{srl} et N_{srm} correspondent respectivement à l'apparition de la première et de la

dernière fissure et délimitent le stade de formation des fissures. N_y est l'effort de plastification des armatures. La participation du béton tendu en stade de fissuration stabilisée est définie comme une fraction β_1 de la différence d'allongement entre le stade I et le stade II – nu au moment de l'apparition de la première fissure. Elle varie linéairement de 1 à β_1 pendant la phase de formation des fissures.

Les valeurs du modules d'élasticité du béton E_c et du coefficient de transformation α doivent être ajustées, le cas échéant, pour tenir compte du fluage. D'après les remarques fournies dans le CM90, la valeur de la résistance à la traction f_{ct} pour les calculs dépend du type de résultats recherchés. Les valeurs préconisées sont :

- Calcul de déformation : valeur moyenne ou fraction inférieur
- Dimensionnement d'armatures minimales : fraction supérieur
- Vérification de stabilité : valeur moyenne
- Calcul d'ouverture de fissures : valeur moyenne

➤ Définition des valeurs caractéristiques selon Sippel

Les seules différences de formulation interviennent dans la définition des bornes de la phase de formation des fissures. Les équations 2.1 et 2.2 sont remplacées par

$$N_{srl} = A_c (1 + (\alpha - 1)\rho) k \cdot f_{ct,fl5\%} \quad (2.8)$$

$$N_{srm} = A_c (1 + (\alpha - 1)\rho) k \cdot f_{ct,fl95\%} \quad (2.9)$$

$$f_{ct,fl5\%} = 0,75 \cdot f_{ct,fl} \quad (2.10)$$

$$f_{ct,fl95\%} = 1,25 \cdot f_{ct,fl} \quad (2.11)$$

$$k = \frac{13,63 - \log_{10} t}{14,46} \leq 0,5 \quad (t \text{ donné en secondes}) \quad (2.12)$$

$f_{ct,fl}$ est la résistance à la traction du béton en flexion. Ceci tient au fait que le modèle proposé par Sippel est avant tout destiné à des calculs de déformations en flexion. Les bornes inférieures et supérieures de la phase de formation des fissures sont déterminées comme étant les fractions 5 % et 95 % de la résistance à la traction. Un calcul simplifié, avec un coefficient de variation de 15 %, donne les relations 2.10 et 2.11.

Le coefficient k introduit l'effet de la durée de chargement sous la forme d'une réduction de la résistance à la traction pour des charges de longue durée. L'équation 2.12 a été proposée par Reinhardt et Cornelissen sur la base de résultats expérimentaux. D'autres formulations existent

(notamment Shkoukani et walraven), mais il s'agit toujours de lois logarithmiques avec des coefficients très semblables. Une constatation générale de tous les auteurs est l'absence de rupture au-delà d'une durée de chargement d'environ 9 mois, ce qui correspond à l'introduction d'une borne inférieure à la définition de k . contrairement aux coefficients de l'expression de k , la valeur de cette borne varie passablement d'une formulation à l'autre. Elle va de 0,5 pour la formulation ci-dessus jusqu'à 0,7 dans le cas d'Al-Kubaisi et Young.

Dans tous les cas, la valeur de k chute rapidement au début, et la borne inférieure est atteinte pour des durées de chargements allant de 1 à 9 mois. Ainsi, pour des calculs à long terme, correspondant à plusieurs années de chargement, c'est forcément la valeur plancher qui devra être utilisée.

Commentaires

La formulation de Sippel introduit deux aspects supplémentaires par rapport à la formulation standard CEB-FIP. Le modèle étant décrit comme destiné à des calculs flexionnels, la résistance à la traction utilisée tient compte d'un éventuel effet d'échelle dû au softening pour des éléments fléchis de faible hauteur (dalles). De plus, il introduit le phénomène de fatigue statique sous la forme d'une réduction de la résistance à la traction du béton.

Par contre, aucun de ces deux modèles ne tient compte d'effet de taille dus à une grande épaisseur transversale ou à la disposition des barres d'armatures. Cette dernière peut avoir en effet une influence sur la participation du béton tendu (Clark, Braam)

2.4.2.3 modèle de la membrane fissurée

Récemment, les travaux de Marti, Alvarez, Kaufman et Sigrist ont conduit encore un pas plus loin. Les fissures sont supposées perpendiculaires à la déformation principale de traction. Les principes de base sont le même que ceux de la MCFT concernant l'état de contrainte au droit d'une fissure, ainsi que la prise en compte de l'état de contrainte bi axial dans la loi constitutive du béton comprimé. En revanche, la participation du béton tendu est traitée de façon fondamentalement différente : en lieu et place d'une loi constitutive moyenne pour le béton en traction qui prenne en compte cet effet (MCFT, STM), le concept plus fondamental du Tension Chord Model (fig.2.17) est utilisé. Le béton homogène et les armatures sont traitées en tant que tels, tandis que l'interaction acier – béton est assurée par une loi d'adhérence, d'où un traitement implicite de la participation du béton tendu.

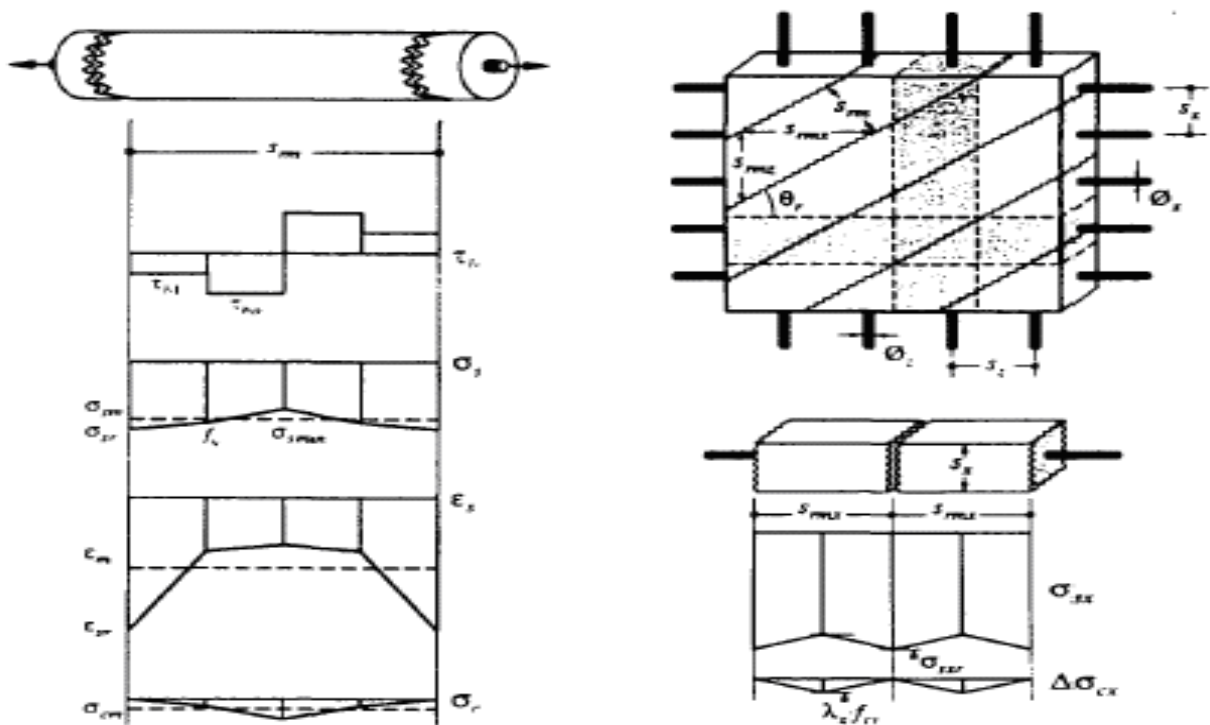


Figure 2.17 : Tension Chord Model (Marti et al.) et Cracked Membrane Model (Kaufmann et Marti)

Le modèle de membrane fissurée ainsi obtenu est donc très complet et, n'utilisant que des lois constitutives de bas niveau plutôt que des lois empiriques, très solides du point de vue théorique. Néanmoins, comme pour ses cousins, son application nécessite la résolution d'un système d'équations non linéaires par un processus itératif.

2.4.2.4 Utilisation des modèles unidimensionnels pour la modélisation de comportement bidimensionnel

Les modèles de comportement unidimensionnels pour le béton et le béton armé ne manquent pas, que ce soient des lois constitutives de bas niveau ou de modèles globaux tels que la loi du tirant ou la loi moment – courbure. Dès que l'on s'attaque à des éléments de structure bidimensionnels, membrane, dalle ou coque on se heurte au délicat problème de la définition de la rigidité à la torsion (pour les dalles) ou au cisaillement membranaire (pour les membranes). A moins de les traiter de façon explicite dans un modèle local de fissuration, il n'est aisé de prendre en compte dans le cisaillement ou la torsion les effets combinés de la fissuration, de l'engrènement (aggregate interlock), du goujonnage des armatures (Dowel effect) et des effets différés.

Les modèles de membrane fissurée présentés au paragraphe 2.4.2.3 sont une solution à ce problème. Une solution est de contourner le problème en appliquant un modèle de comportement

unidimensionnel selon les directions principales (fig.2.18), faisant ainsi disparaître le cisaillement (ou la torsion). Charif (1998) a appliqué avec succès cette méthode au calcul de flèches à long terme de dalles, à l'aide de la loi moment – courbure CEB – FIP.

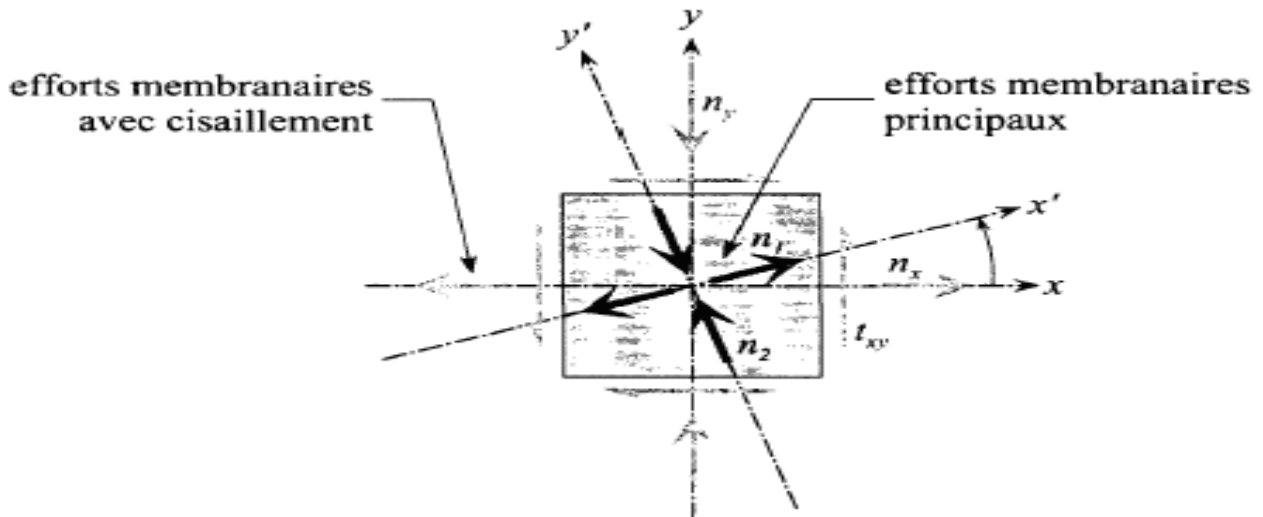


Figure 2.18 : Efforts membranaires avec cisaillement et efforts membranaires principaux (absence de cisaillement)

Peut – être en raison de sa trop grande simplicité, cette démarche n'est pratiquement pas référencée dans la littérature (Cope & Clark). Bien que nécessitant certains aménagements, son application au calcul de membranes en béton armé à l'aide d'un modèle global tel que la loi du tirant est peu onéreuse (voir paragraphe 2.4.2.2). Située dans la continuité logique des modèles de fissuration globaux, cette approche constitue donc un candidat particulièrement intéressant pour l'analyse d'ensemble d'ouvrage en béton à parois minces.

✚ Synthèse

Les modèles de membrane fissurée décrits ci – avant sont certainement adaptés pour décrire le comportement d'éléments de taille réduite. Une bonne concordance a été constatée avec les différents résultats expérimentaux, cependant l'épaisseur des spécimens testés ne dépasse pas 200 mm, alors qu'une âme de pont, élément structural membranaire par excellence, en fait généralement le double. Or, comme pour les modèles de tirant, aucun des modèles de membranes présentés ne prévoit une prise en compte d'effets de taille dus à l'épaisseur de la membrane. La disposition des barres d'armature n'entre pas non plus en ligne de compte dans les calculs. De plus, tous ces modèles de membrane nécessitent des processus de calcul itératifs locaux qui les rendent lourds à manipuler dans le cadre de l'analyse d'un ouvrage complet.

La dernière approche présentée, combinée à un modèle de tirant, devrait permettre d'obtenir un modèle de calcul de membrane à la fois simple et efficace, à même d'être utilisé pour le calcul de structures de grande taille.

2.4.2.5 Calcul par éléments finis

L'analyse de structure par la méthode des éléments finis est aujourd'hui très répandue. Dans les bureaux d'ingénieurs, elle est le plus souvent limitée au calcul élastique linéaire de modèles 2D, que ce soient pour des cadres plans ou des dalles, ce type d'analyse s'étend maintenant de plus en plus à des modèles spatiaux. Des modèles non linéaires, tant géométrique que matériel, ne sont plus des raretés, tout spécialement pour les projets de grandes envergures. Les simulations numériques de haut niveau ne sont plus l'apanage exclusif du monde académique.

Dans le domaine de la recherche, il n'est pas rare d'avoir recours à des modèles de calcul par éléments finis tels que ceux qui sont décrits au chapitre 3. Il s'agit alors le plus souvent de développer ou de tester de nouveaux modèles de comportement.

Les différents types de modélisation ayant déjà été esquissés, nous ne nous attardons ici que sur les aspects propres au contexte actuel qui n'ont pas encore été abordés. Afin de mieux situer les choses, quelques éclaircissements sont nécessaires concernant le point de départ du code de calcul par éléments finis qui a été utilisé dans ce travail.

2.4.2.6 Modèle de calcul bidimensionnel

Lorsque le comportement bi-dimensionnel est nécessaire à considérer pour représenter la réponse structurale. On en vient tout naturellement à un modèle de calcul permettant de représenter le comportement d'une membrane ou d'un voile.

D'une manière générale dans le cas d'une membrane, la LMT peut être appliquée localement selon les directions principales des efforts membranaires. Cette supposition peut conduire à supposer qu'au niveau de chaque point de la structure peut être considéré comme la superposition de tirant et ou de bielles de compression.

Par contre, la flexion locale est nécessaire pour assurer l'équilibre au niveau de la structure. A part dans le cas de structures dont le comportement est purement membranaire, un modèle de calcul statique ne tenant pas compte de cette flexion locale est insuffisant. C'est pourquoi le calcul de structures spatiales à parois minces requiert la plupart du temps une modélisation de type coque, bien que leur comportement global soit essentiellement membranaire.

2.4.3 Application bidimensionnelle de la LMT

Contrairement à la plupart des modèles courants pour le calcul d'éléments membranaires en béton armé, l'extension bidimensionnelle de la LTM 1D, ou LTM 2D, effectue la liaison acier – béton déjà au niveau du modèle de calcul unidimensionnel. La LTM 1D est considérée une loi constitutive uni axiale du matériau béton armé, Les problèmes de compatibilité des déformations entre les différentes composantes sont donc déjà résolus dans la LTM 1D. Cela inclut la prise en compte des non linéarités matérielles du béton et de la participation du béton tendu.

2.4.4 Principes généraux

Comme déjà discuté précédemment, l'état de contrainte dans une structure minces est essentiellement membranaire. Vis-à-vis du comportement global de la structure, les efforts flexionnels locaux sont négligeables. Toujours pour le comportement global de la structure, le calcul de la fissuration pourra donc se faire en ne tenant compte que des efforts membranaires. Le modèle d'éléments finis finalement utilisé pour le calcul de structures avec prise en compte de la fissuration sera donc un modèle membranaire dont le comportement non linéaire matériel est aussi dirigé par les efforts membranaires.

2.4.5 Directions principales

La LTM ne tient aucun compte des contraintes de cisaillement. Plutôt que de chercher à établir une relation d'interaction entre effort normal et effort de cisaillement, il semble plus judicieux – et beaucoup plus direct – de résoudre le problème en se plaçant dans un contexte adéquat. L'hypothèse généralement admise concernant l'orientation des fissures est que ces dernières se développent perpendiculairement à la contrainte principale de traction. Donc, si on se place dans un référentiel correspondant aux directions des contraintes principales, les contraintes de cisaillement disparaissent et les fissures sont orientées selon les mêmes axes, la LTM devient applicable.

La principale hypothèse est donc la suivante : les fissures sont perpendiculaires aux contraintes principales de traction. Le corollaire de cette hypothèse est qu'une fissure ne transmet pas de cisaillement dans son plan (aggregate interlock, Dowel action). Cela implique également que l'orientation des fissures peut changer durant le calcul. Une orientation fixe impliquerait forcément une transmission de cisaillement dans le plan de la fissure (FA – STM).

Dans un élément structural soumis au cisaillement, les directions principales des contraintes et des déformations ne coïncident pas nécessairement, même si cet élément est isotrope. Cela contredit, du moins en partie, les hypothèses du paragraphe précédent. Cependant, l'expérience a montré que ces directions diffèrent peu, et ce même jusqu'à la rupture. De fait, les valeurs mesurées ne s'écartent

jamais de plus de 10° . On gardera donc comme hypothèse que ces directions sont identiques. Il faut cependant garder à l'esprit que toutes ces considérations s'appliquent à des contraintes et déformations moyennes, du fait du type de modèle utilisé. Les variations locales – par exemple au droit d'une fissure – des champs de contraintes et de déformations ne pourront pas être extraites directement du modèle. Les informations que fournit réellement la LTM 2D sont uniquement des résultats moyens. On peut détecter les zones fissurées – et non pas les fissures – dans une structure, obtenir une mesure de leur degré de fissuration (fissuration stabilisée ou non) et l'orientation des fissures.

Au niveau du calcul de la structure, l'information principale est bien sûr la variation de rigidité apparente résultant des non linéarités matérielles. Par contre, aucun résultat local ne pourra être obtenu directement : ouverture et écartement des fissures, ainsi que les contraintes dans les aciers au droit d'une fissures, devront être déterminés par d'autres moyens (voir les applications dans le chapitre 5).

2.4.6 Armatures équivalentes

Dans une structure quelconque, les armatures ne sont pas toujours disposées selon les directions principales des efforts. Quant aux armatures des âmes, de même que dans une paroi porteuse dans un bâtiment, elles sont disposées en nappes horizontales et verticales, alors que les directions des efforts principaux peuvent fréquemment être inclinées à 45° .

Dans le cas général (fig.2.19) il faut définir de façon séparée les directions des différentes nappes d'armatures (les nappes ne sont pas forcément orthogonales) et les directions des efforts principaux. Le repère de référence est le repère local (x', y') au point de la structure considéré.

L'orientation des armatures ne coïncidant généralement pas avec les directions des efforts principaux, l'utilisation de la LTM selon ces dernières nécessite la définition d'armatures équivalentes. Considérant la figure 2.20, en faisant l'hypothèse que le glissement γ_{III} au droit de la fissure est nul, ce qui revient à dire que l'orientation de la fissure correspond aux directions principales de déformations, Cope et Clark ont proposé une armature équivalente pour le cas des dalles.

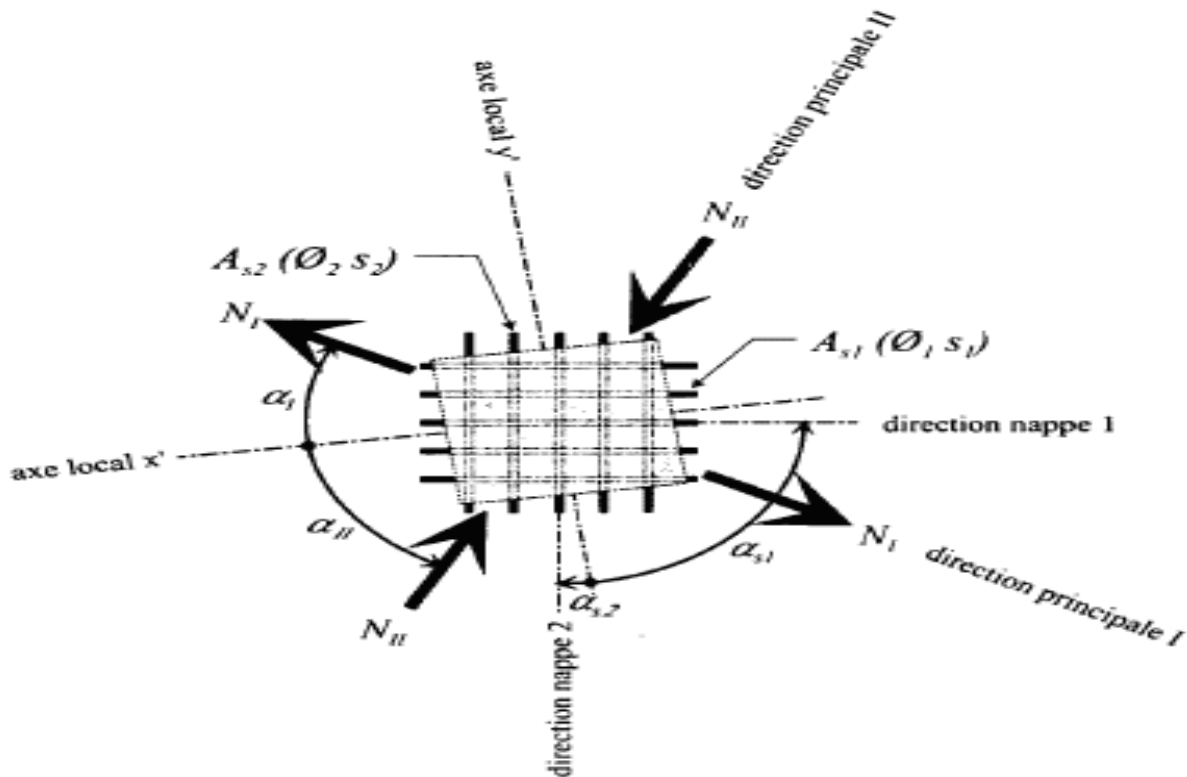


Figure 2.19 : Axes locaux, directions des efforts principaux et orientation des armatures

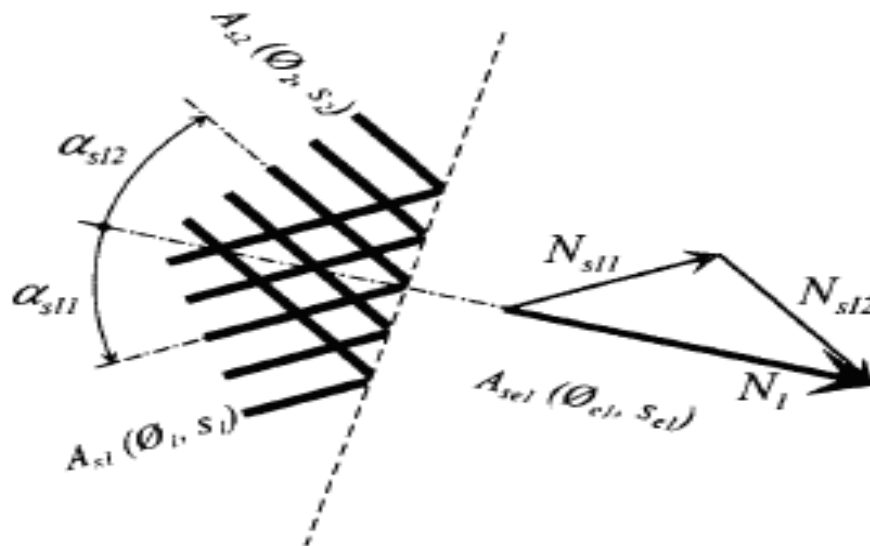


Figure 2.20 : Calcul des armatures équivalentes

le raisonnement, basé sur la compatibilité des déformations et l'équilibre dans le plan contenant les armatures, s'applique tel quel pour les membranes. Si le comportement des armatures est élastique, l'aire équivalente dans la direction j s'écrit :

$$A_{se,j} = \sum_{i=1}^n A_{s_i} \cos^4(\alpha_i - \alpha_j) \quad (2.13)$$

n étant le nombre de nappes d'armatures et A_{s_i} l'aire d'acier par unité de longueur de la nappe i . Cependant, si cette formulation reproduit bien la rigidité équivalente des armatures, elle ne convient pas pour déterminer leur résistance plastique. Il faut pour cela utiliser un critère de plastification. En reprenant le développement de Cope et Clark, mais avec cette fois-ci l'hypothèse de plastification de toutes les armatures, au lieu d'un calcul élastique de leurs contraintes, on aboutit à :

$$A_{sp,j} = \sum_{i=1}^n A_{s_i} \cos^2(\alpha_i - \alpha_j) \quad (2.14)$$

Qui n'est rien d'autre que le critère de plastification de Johanssen, sous une forme généralisée. Ainsi, l'aire équivalente d'armature n'est pas la même en stade élastique linéaire qu'en cas de plastification. Pour un angle de 45° , A_{se} (éq.2.13) est deux fois plus faible que A_{sp} (éq.2.14).

Pour obtenir un comportement correct du modèle à l'état de service, il faut donc introduire dans la LTM l'aire équivalente selon l'équation 2.13, et le cas échéant une limite d'élasticité de l'acier augmentée du ratio A_{sp}/A_{se} . Il faut cependant garder à l'esprit que ce modèle n'est correct à la rupture que si les directions des efforts principaux correspondent à l'orientation des armatures, la plastification n'intervenant pas au niveau d'une nappe d'armature en particulier mais de l'armature équivalente à l'ensemble des nappes. La modification de la limite élastique ne doit servir qu'à éviter une plastification prématurée à l'état de service.

A noter que la plastification de certaines armatures ne correspond pas nécessairement à la rupture. Des armatures constructives peuvent tout à fait se plastifier à l'état de service dans certaines conditions.

2.4.7 Zone efficace

Le même problème se pose pour la détermination de la zone efficace dans une direction quelconque. L'application de la LTM nécessite de connaître le diamètre et l'écartement des barres pour le calcul de la zone efficace. Des valeurs équivalentes doivent donc également être déterminées pour ces paramètres. Un raisonnement rigoureux tel que celui utilisé pour l'aire équivalente étant difficilement applicable ici, ces paramètres pourront être raisonnablement estimés en utilisant l'équation 2.14 et en y substituant les aires d'acier par les valeurs des paramètres à évaluer. On obtient par exemple pour l'écartement des barres

$$s_{eq,j} = \sum_{i=1}^n s_i \cdot \cos^2(\alpha_i - \alpha_j) \quad (2.15)$$

Et on opère de même pour le diamètre des barres. Il est également possible d'interpoler directement sur les dimensions de la zone efficace. Les résultats obtenus sont pratiquement identiques à la solution retenue ici. Ce choix s'est fait essentiellement pour des raisons de commodité d'implémentation.

2.4.8 Perte de rigidité

L'état moyen de fissuration et la rigidité apparente moyenne sont ainsi définis en tout point quelconque d'un élément de membrane en béton armé selon les directions des efforts membranaires principaux. Avant de passer au calcul structural proprement dit, il est encore nécessaire de définir un format pour décrire l'état d'un point de la structure (non –linéarités matérielles – fissuration, fluage).

Si on considère une direction principale, connaissant l'armature équivalente dans cette direction et son niveau de sollicitation, la LTM fournit la déformation moyenne correspondante. On peut également définir la rigidité apparente comme la pente de la droite passant par l'origine et le point de la LTM décrivant l'état du tirant (fig.2.21).

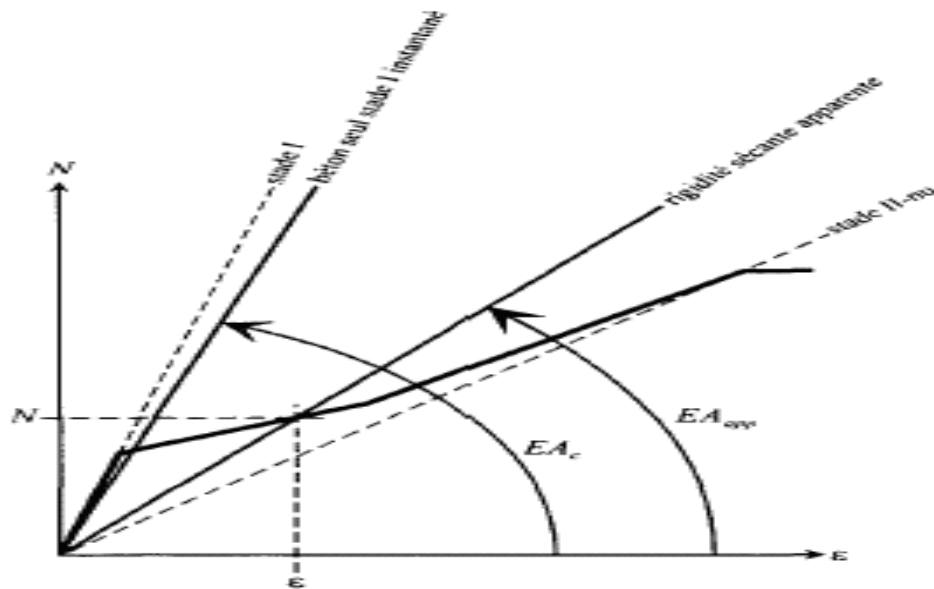


Figure 2.21 : Rigidité instantanée en stade I du béton seul et rigidité sécante apparente du tirant. le coefficient de perte de rigidité r est égal au rapport EA_{app}/EA_c .

En comparant cette rigidité apparente à la rigidité instantanée de la section de béton seule en stade I, on peut définir un coefficient de perte de rigidité r (équ.2.16). Ce coefficient englobe les effets des armatures, de la fissuration et du fluage.

$$r = \frac{EA_{app}}{EA_c} \quad (2.16)$$

Une valeur de $r = 1$ signifie que la rigidité apparente est la même que celle du béton seul en stade I à court terme. En pratique, ce coefficient peut prendre des valeurs légèrement supérieures à 1 à cause de la présence des armatures. C'est ce qui explique dans la figure 2.21 la pente du stade I légèrement supérieure à celle de référence. Par contre, dès l'apparition de la fissuration, sa valeur chute en dessous de l'unité. Pour une section non fissurée soumise au fluage, on retrouve en négligeant les armatures :

$$r = \frac{E_c^\varphi}{E_c} = \frac{1}{1 + \varphi} \quad (2.17)$$

2.5 Processus général de calcul

Pour l'implémentation dans le modèle de calcul par éléments finis, le calcul de fissuration est effectué à chaque point d'intégration (point de Gauss) de chaque élément finis. L'organigramme de la figure 4.8 décrit le déroulement du calcul non linéaire. Les cases blanches représentées les étapes présentent dans un calcul élastique linéaire classique.

A chaque itération, un calcul linéaire classique de la structure est effectué sur la base des rigidités apparentes réduites définies à l'aide des coefficients r_i de perte de rigidité définis ci-avant. Ces coefficients permettent de déterminer la matrice d'élasticité apparente en tout point de la structure. Cette matrice varie sur l'ensemble de la structure, et même à l'intérieur d'un élément fini selon son état de fissuration.

Ensuite, en chaque point de Gauss de la structure, les efforts membranaires principaux sont déterminés en partant des résultats de ce calcul. Les armatures équivalentes calculées selon ces directions principales permettent l'application de la LTM selon chacune d'elles. On obtient ainsi pour chaque direction principale une rigidité apparente EA_{app} , d'où on tire de nouvelles valeurs des coefficients de pertes de rigidité. Ces nouvelles valeurs de r_I , r_{II} et θ_r sont confrontées à celle de l'itération précédente sur l'ensemble de la structure. Le test de convergence à la fin de l'itération

porte précisément sur la variation de ces trois paramètres. Si la convergence est satisfaisante, les résultats sont stockés et le pas de calcul suivant est entamé.

La solution initiale pour le processus itératif est tout naturellement un calcul élastique linéaire de la structure, sans même tenir compte de la présence des armatures. Pour ce faire, il suffit d'initialiser tous les coefficients r_i à 1. L'orientation θ_r n'a aucune importance lorsque r_i est égal à r_{ij} .

2.6 Les modèles bidimensionnels

L'élément fini membranaire utilisé dans notre programme est un élément iso paramétrique quadrilatéral.

La matrice de rigidité de l'élément isoparamétrique est calculée par intégration de la matrice d'élasticité D' sur le volume de l'élément (le ' indique que la matrice est exprimée dans le référentiel local de l'élément). Pour l'intégration numérique, D' doit être connue en chaque point de Gauss (fig.2.22). C'est donc en ces points que le calcul de rigidité apparente est effectué, de façon à pouvoir déterminer la matrice D' apparente en fonction des paramètres r_i , r_{ij} et θ_r .

La figure 2.23 montre l'état de contrainte d'un petit élément de matière d'un feuillet dans un élément coque. L'équation 2.18 est une forme généralisée de la loi de Hooke. C'est la matrice D' qui y apparaît qui doit être formulée.

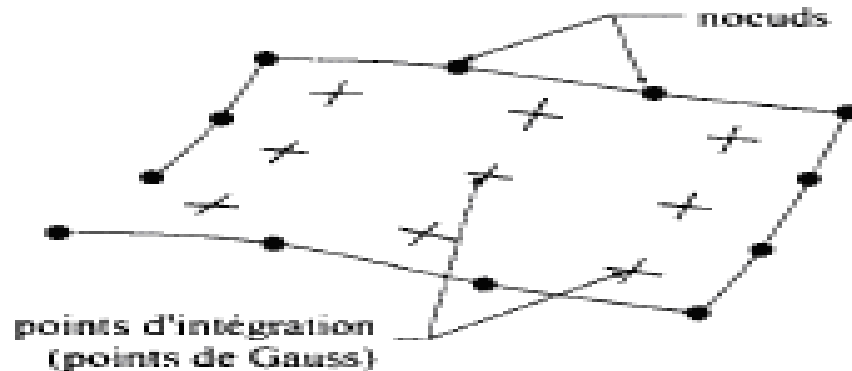


Figure 2.22 : Élément isoparamétrique bicubique (4 nœuds par côté)

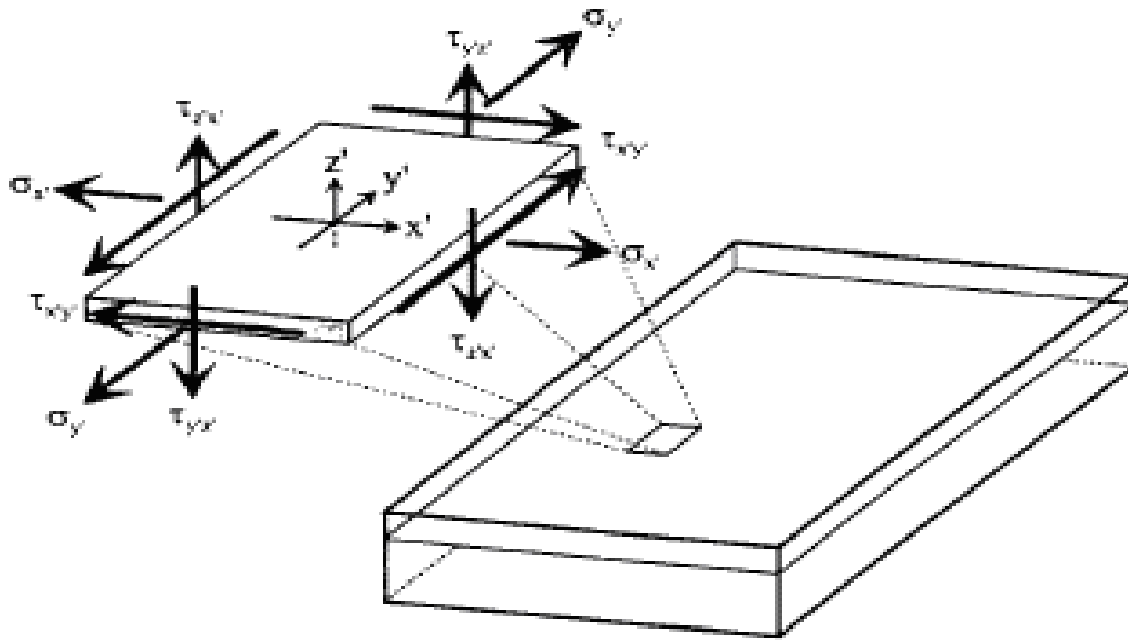


Figure 2.23 : Contraintes dans un petit élément de matière d'un feuillet d'un élément coque

$$\sigma' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \end{Bmatrix} = D' \cdot (\varepsilon' - \varepsilon_{\theta}') = D' \cdot \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{z'x'} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'\theta} \\ \varepsilon_{y'\theta} \\ \gamma_{x'z'\theta} \\ \gamma_{y'z'\theta} \\ \gamma_{z'x'\theta} \end{Bmatrix} \right) \quad (2.18)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, D' prend la forme suivante :

$$D' = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Où E est le module d'élasticité et ν le coefficient de poisson. Le coefficient k qui apparaît dans les termes liés aux contraintes de cisaillement transversal (et par là aux efforts tranchants) est un facteur

de forme qui permet de tenir compte de la répartition parabolique de ces contraintes sur l'épaisseur de la coque. Il prend la valeur $k=6/5$.

Pour la prise en compte des non linéarités matérielles, D'' doit être exprimée dans le référentiel défini par les coefficients de réduction de rigidité r_i et leur orientation θ_r (éq.2.20 et 2.21).

$$D'' = \begin{bmatrix} D_{x''} & D_{l''} & 0 & 0 & 0 \\ D_{l''} & D_{y''} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{x''y''} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{y''z''} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{z''x''} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$D'' = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} r_l & \nu \cdot \sqrt{r_l \cdot r_{ll}} & 0 & 0 & 0 \\ \nu \cdot \sqrt{r_l \cdot r_{ll}} & r_{ll} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \cdot \sqrt{r_l \cdot r_{ll}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \cdot r_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \cdot r_{ll} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$D' = R^r(-\theta_r) \cdot D'' \cdot R(-\theta_r) \quad (2.22)$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta \sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta \sin\theta & 0 & 0 \\ -2\cos\theta \sin\theta & 2\cos\theta \sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

L'équation 2.22 montre la formulation générale de la matrice D'' pour un matériau orthotrope. Dans son expression en fonction des coefficient r_l et r_{ll} (équation 2.23), en remplaçant $r_l = r_{ll} = 1$, on retrouve la matrice isotrope de l'équation 2.19. La formulation des termes $D_{l''}$ et $D_{x''y''}$ correspond à celle recommandée par Huber et Timoshenko (utilisation de la moyenne géométrique des rigidités principales). En ce qui concerne les deux termes liés aux efforts tranchants ($D_{y''z''}$ et $D_{z''x''}$), l'option a été prise de les réduire dans la même proportion que les termes membranaires associés.

Toujours dans l'équation 2.23, il apparaît que le coefficient de Poisson est indépendant des non linéarités matérielles du modèle. De ce fait, il est considéré comme constant, au même titre que le module instantané E_c du béton.

Cela est parfaitement correct localement, dans le béton situé entre les fissures, mais il ne faut pas perdre de vue que toute l'approche est basée sur des valeurs moyennes, tant au niveau des variables (contraintes et déformations) que des caractéristiques des matériaux. Concrètement ces moyens sont matérialisés par les coefficients de réduction de rigidité. Ainsi les termes de D'' dépendant du coefficient de poisson subissent des variations, les coefficients de réduction γ apparaissant également. Une importante réduction de rigidité due à la fissuration dans une direction se répercute donc automatiquement sur les termes non diagonaux, et l'effet du coefficient de poisson dans la direction perpendiculaire s'en trouve également réduit. Il en va de même pour la rigidité au cisaillement membranaire $D_{x''y''}$.

2.7 Élément de membrane en cisaillement pur

Plusieurs séries d'essais ont été réalisées sur des éléments de voiles en béton armé soumis à des sollicitations bi axiales, et plus particulièrement à du cisaillement membranaire. De tels essais ont notamment été menés par Vecchio et Collins et Zhang et Hsu. La LMT 2D a été confrontée aux résultats d'essais de ces derniers.

Zhang et Hsu ont testé plusieurs séries d'éléments de membrane en béton armé avec différents taux d'armature et qualités de béton (fig.2.24). Ce sont des éléments carrés de 1397 mm de côté et de 178 mm d'épaisseur. Ils ont été pour la plupart sollicités en cisaillement pur. Deux familles principales peuvent cependant être distinguées : dans certains essais, les armatures étaient disposées selon les directions des efforts principaux, et dans les autres à 45° par rapport à ces directions.

Plusieurs séries de résultats ont été comparées à la LTM 2D, mais une seule est présentée ici. Il s'agit d'une série de 5 panneaux en BHP. La disposition des armatures correspond à la figure 2.26b, à part l'écartement des barres. Les valeurs caractéristiques figurent aux tableaux 2.2 et 2.3. L'enrobage moyen des barres d'armatures a été estimé à 3 cm.

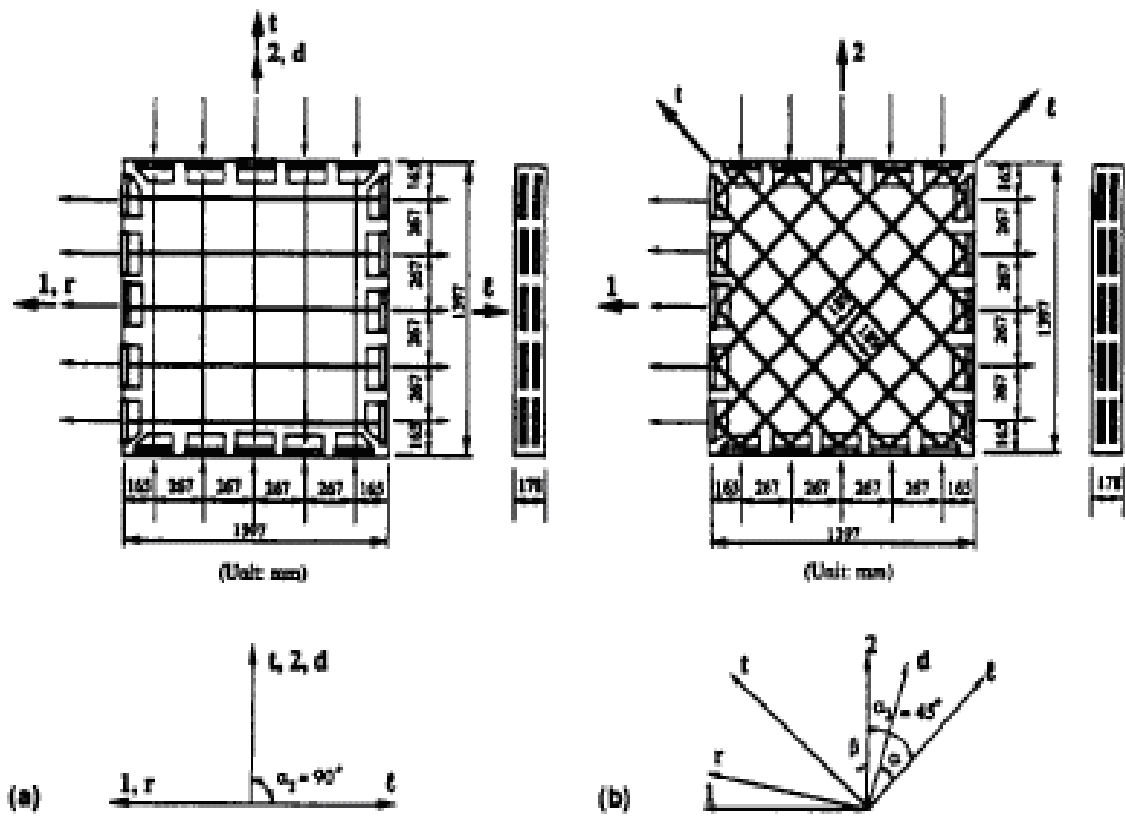


Figure 2.24 : Eléments de voile testés par Zhang et Hsu. Eléments avec armatures selon les directions principales (a) et à 45° (b).

Tableau 2.2 : Caractéristiques des bétons de la série VA. Les valeurs de E_c et f_{ct} n'étant pas fournies (elles n'interviennent pas directement dans les RA-STM et FA-STM), elles ont été estimés à partir des données disponibles : $E_c = 2 \cdot f'_c / \epsilon_0$ et $f_{ct} = 0,33 \cdot \sqrt{f'_c}$

Essai	Résistance à la compression sur cylindre f'_c [N/mm ²]	Déformation pour $\sigma = f'_c$ $\epsilon = [^\circ / \infty]$	Module d'élasticité E_c [N/mm ²]	Résistance à la traction f_{ct} [N/mm ²]
VA0	98,8	2,40	82300	3,3
VA1	95,1	2,45	77600	3,3
VA2	98,2	2,50	78600	3,3
VA3	94,6	2,45	77200	3,2
VA4	103,1	2,35	87700	3,4

Tableau 2.3 : Dimensions et armatures de la série VA. Dans cette série, les armatures sont les mêmes dans les deux directions. A noter que les diamètres effectifs réels des barres sont de 11,3 ; 15,9 ; 19,6 et 25,2 mm respectivement.

Essai	Epaisseur h [mm]	Ecartement s [mm]	Ø [mm]	ρ [%]	E_c [KN/mm ²]
VA0	178	188	10	0,60	181
VA1	178	94	10	1,20	181
VA2	178	94	15	2,39	192
VA3	178	94	20	3,59	200
VA4	203	94	25	5,24	200

Résultats

Les résultats comparatifs sont présentés à la figure 2.25. Les éléments testés sont sollicités en cisaillement pur. Les résultats représentés sont les contraintes de cisaillement appliquées τ en fonction du glissement associé γ_r .

Relativement une bonne corrélation peut d'ores et déjà être observée entre les résultats expérimentaux et la LTM 2D.

Comme pour les poutres du paragraphe précédent, aucun calibre particulier n'a été opéré sur les caractéristiques des matériaux. De plus, le module d'élasticité du béton et sa résistance à la traction n'étant pas nécessaire dans l'application du Softened Truss Model (RA - STM et FA - STM) utilisé par Zhang et Hsu, ces données n'étaient pas directement disponibles. Elles ont donc été estimées à l'aide des relations suggérées par Vecchio et Collins (voir tableau 2.2).

Il est important de noter que, d'une manière générale, les déviations observées se trouvent au début de la fissuration (VA0, VA1, VA2). Dans cette zone de la LTM, comme déjà mentionné plutôt, une erreur sur la résistance à la traction du béton peut être particulièrement sensible.

Le cas du spécimen VA0 est particulier : il a été volontairement sous armé. Il faut ici se rappeler que ce type de situation a été implémenté dans la LTM essentiellement pour pallier des simplifications dans les données du calcul et éviter des aberrations numériques. Le coefficient

définissant la résistance résiduelle a été calibré pour des zones jouant un rôle secondaire dans les déformations d'une structure.

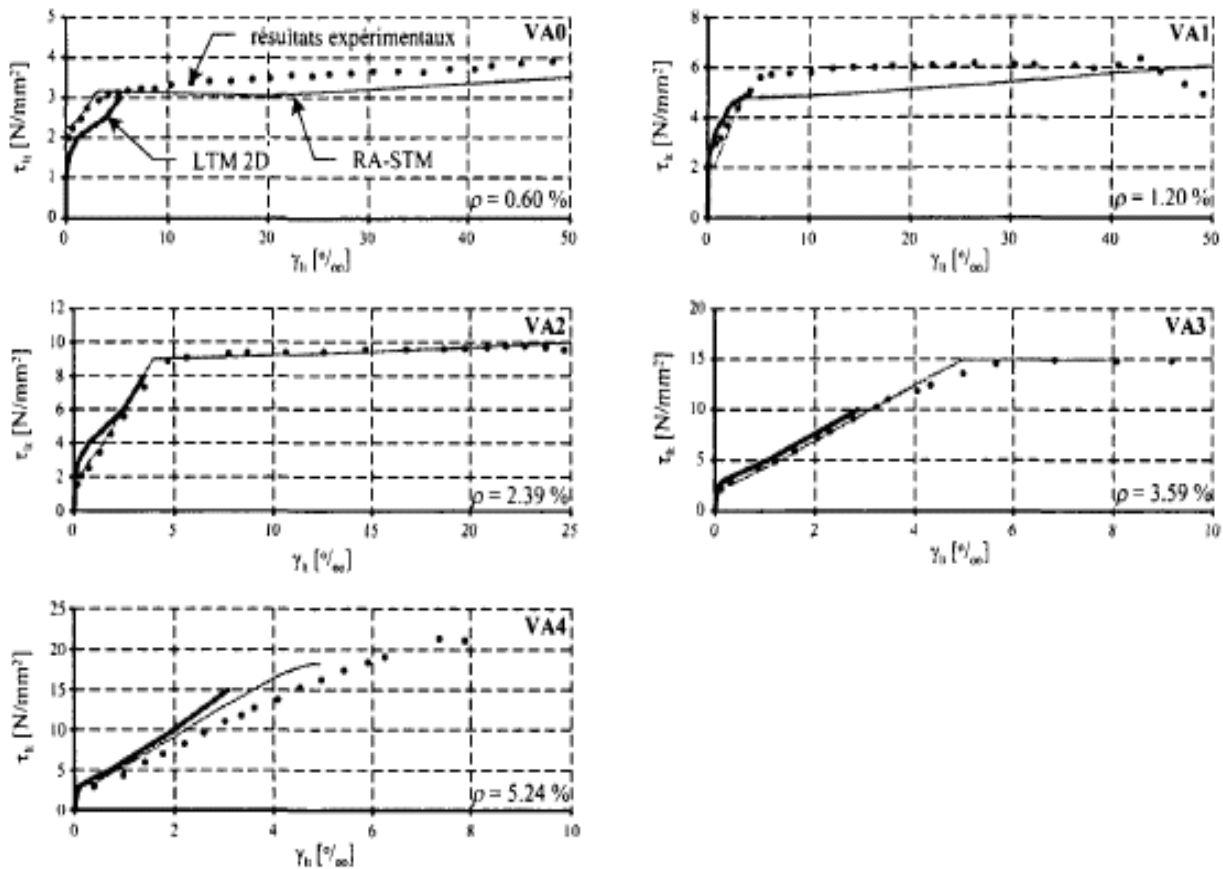


Figure 2.25 : Résultats expérimentaux de la série VA et comparaison avec la LTM 2D

Pour une analyse rigoureuse d'un élément de structure fondamentalement sous armé – ce qui n'est ordinairement pas le cas en pratique – un modèle plus fin est nécessaire. De fait, un tel comportement est pathologique et, s'il est détecté dans une structure, doit être corrigé.

Le cas VA4, fortement armé, montre clairement une surestimation de l'aire d'armature équivalente. Ce comportement est également visible avec le RA – STM. En plus de cela, la sur rigidité de la LTM 2D par rapport au RA – STM s'explique par le fait que ce spécimen est surarmé, et que la rupture se fait donc par écrasement du béton, sans plastification des armatures. La LTM 2D utilisant une loi élastique linéaire pour le béton en compression, le RA –STM doit nécessairement s'en écarter quand le niveau de sollicitation du béton augmente, puisqu'il utilise une loi non linéaire.

Réalisées par les mêmes auteurs, les séries d'essais VB (taux d'armature différent dans les deux directions), A et F (bétons conventionnels) ont montré des comportements vis-à-vis de la LTM 2D similaire aux résultats présentés ci-dessus.

Des essais, plus anciens, ont également été réalisés par Vecchio et collins. La encore, une excellente concordance avec la LTM 2D a été observée, pour autant qu'une zone efficace égale à la totalité de la section soit utilisée. Il s'agit ici d'éléments en micro béton de 70 mm d'épaisseur, pour lesquels les critères utilisés dans la LTM pour le calcul de la zone efficace semblent adéquats.

L'ensemble de ces résultats montre que, pour autant que les éléments structuraux aient des caractéristiques raisonnables, la LTM 2D reproduit bien leur comportement à l'état de service.

2.8 Conclusions

Les extensions nécessaires ont été apportées à la LTM pour permettre le calcul de voiles en béton armé. Cette nouvelle LTM 2D a été implémentée dans un élément fini de type coque et un processus itératif général pour le calcul par éléments finis a également été mis en place. Le programme peut donc modéliser et calculer une structure composée de parois minces a comportement essentiellement membranaire. Une procédure d'introduction de la précontrainte au niveau de la structure a été définie. Elle permet de saisir la précontrainte en donnant directement le tracé des câbles, plutôt que des armatures équivalentes et un jeu de forces de remplacement.

Le modèle ainsi développé a été confronté à différents résultats expérimentaux. D'une part des essais de flexion sur des poutres précontraintes en I, d'autre part des essais de cisaillement sur des éléments de voiles en béton armé. Les résultats ont globalement confirmé la bonne tenue du modèle, pour autant que les éléments structuraux calculés aient des caractéristiques raisonnables. La zone de transition proche de la fissuration reste cependant un point sensible du modèle, la détermination des paramètres qui gouvernent cette dernière (notamment la résistance à la traction) étant toujours délicate.

2.9 Calcul des contraintes au droit d'une fissure

Comme énoncé dans le paragraphe 2.4.5, si la LTM 2D se prête bien au calcul global d'une structure et, plus localement, au calcul du comportement moyen d'une zone d'un voile en béton armé, les paramètres locaux, tels que les contraintes dans les armatures au droit d'une fissure, sont plus délicats à évaluer. Ceci tient à différents aspects du problème.

La raison principale de cette difficulté vient du fait que la LTM 2D utilise les directions principales des contraintes dans le béton (hypothèse généralement admise). Ces directions ne sont pas

nécessairement identiques, mais leur écart reste faible à l'état de service (moins de 5°). Cela peut néanmoins conduire à des différences dans les valeurs des contraintes dans les armatures au droit d'une fissure. En effet, une divergence entre les directions principales des contraintes dans le système béton – armatures et l'orientation de la fissuration implique nécessairement la transmission d'un effort de cisaillement membranaire dans le plan de la fissure. Ce cisaillement peut être repris par le béton par le béton (engrènement) et /ou par les armatures.

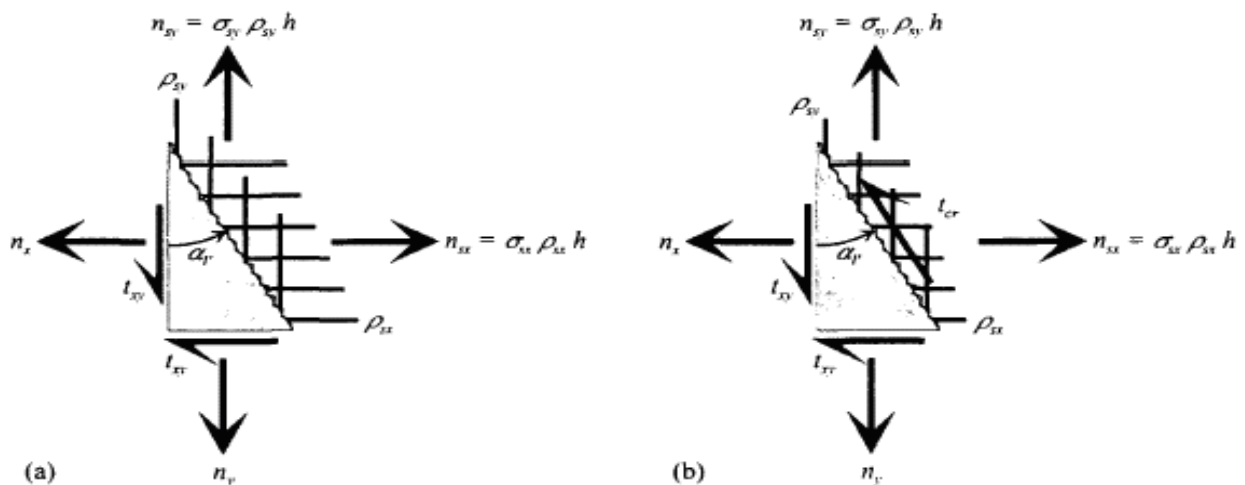


Figure 2.26 : Efforts membranaires moyens et efforts transmis au droit d'une fissure

(a) sans engrènement (b) avec engrènement

(t_{cr} = cisaillement transmis à travers la fissure par l'engrènement du béton)

La démarche proposée ci-après pour calculer les contraintes dans les armatures au droit d'une fissure est une version simplifiée de celle utilisée dans la MCFT (Modified Compression Field Theory) pour contrôler la transmission des efforts à travers les fissures. Les armatures supposées orthogonales et orientées selon les axes de coordonnées x et y (fig.2.26). Il est admis que, dans un premier temps, les efforts sont transmis intégralement par les armatures, lesquelles ne transmettent que des contraintes axiales (fig. 2.26 (a), éq. 2.24 à 2.27).

Tant qu'il n'y a pas plastification d'une des nappes, l'équilibre peut être assuré par les armatures seules. Le comportement iso adoucissant du béton au droit de la fissure n'est pas pris en compte. L'engrènement, par contre, est mobilisé en cas de plastification d'une des nappes pour rétablir l'équilibre dans la direction parallèle à la fissuration. L'équilibre dans la direction perpendiculaire à la fissuration est assuré par redistribution des contraintes sur les armatures non plastifiées (fig.2.26 (b) éq. 2.28 à 2.31).

En écrivant l'équilibre des contraintes de la figure 2.26 (a), on obtient :

$$\sigma_{sx'} = \frac{n_x + t_{xy} \cdot \tan \alpha_l'}{\rho_{xy} \cdot h} \quad (2.24)$$

$$\sigma_{sy'} = \frac{n_y + t_{xy} / \tan \alpha_l'}{\rho_{xy} \cdot h} \quad (2.25)$$

En l'absence de plastification des armatures, les contraintes s'écrivent directement :

$$\text{Si } \sigma_{sx'} \leq f_{yx} \text{ et } \sigma_{sy'} \leq f_{yy} : \sigma_{xx} = \sigma_{sx'} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{sy'} \quad (2.27)$$

Par contre si une des nappes se plastifie :

$$\text{Si } \sigma_{sy'} > f_{yx} : \sigma_{xx} = f_{yx} \quad (2.28)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{sy'} + (\sigma_{sx'} - f_{yx}) \frac{\rho_{sx}}{\rho_{sy}} \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha_l'} \quad (2.29)$$

$$\text{Si } \sigma_{sy'} \leq f_{yy} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{sx'} + (\sigma_{sy'} - f_{yy}) \frac{\rho_{sy}}{\rho_{sx}} \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha_l'} \quad (2.30)$$

$$\sigma_{xy} = f_{yy} \quad (2.31)$$

Avec :

n_x, n_y, t_{xy} : efforts membranaires moyens dans la zone considérée ; n_1 : effort de traction moyen dans la direction principale ; α_l' : orientation de la normale à la fissure ; ρ_{sx}, ρ_{sy} : taux d'armature dans la direction x resp. y ; h : épaisseur de la membrane ; f_{yx}, f_{yy} : limite d'élasticité des aciers d'armature ; $\sigma_{sx'}, \sigma_{sy'}$: contraintes de calcul dans les armatures (hyp. Non plastifié) ; σ_{sx}, σ_{sy} contraintes dans les armatures.

Si les redistributions (éq. 2.28 ou 2.30) engendrent la plastification de la deuxième nappe d'armature, toutes les réserves sont épuisées et la rupture est atteinte.

La première simplification de la MCFT est qu'il n'y a pas de contrôle de la résistance de l'engrènement au droit de la fissure. La capacité du béton est supposée suffisante pour assurer l'équilibre. Dans la mesure où le domaine de travail considéré est l'état de service, cette simplification est raisonnable. La prise en compte de la plastification des armatures est par contre nécessaire pour traiter les zones sous armées (voir résultats ci après). Il reste à déterminer la direction de la fissure pour le calcul. La direction de la traction principale moyenne est donnée par :

$$\tan \alpha_l = \frac{n_l - n_x}{t_{xy}} \quad (2.32)$$

$$\text{avec } n_l = \frac{n_x + n_y}{2} + \sqrt{\frac{(n_x - n_y)^2}{4} + t_{xy}^2} \quad (2.33)$$

La direction α_l de la normale à la fissure peut être définie comme suit :

$$\alpha_p = \alpha_l + \delta\alpha_l \quad (2.34)$$

$\delta\alpha_l$ étant la déviation de l'angle de la fissure par rapport à la normale à la traction principale moyenne. La seconde simplification par rapport à la MCFT est que, en 1^{ère} approximation, on peut admettre $\delta\alpha_l = 0$. Cette hypothèse simplifie considérablement les équations et ramène à un état d'équilibre hydrostatique des forces, ce qui donne :

$$\sigma_{sx} \cdot Q_{sx} = \sigma_{sy} \cdot Q_{sy} = n_l / h \quad (2.35)$$

Quelle que soit l'orientation des armatures. Les contraintes dans ces dernières ne dépendent dès lors plus que des différents taux d'armature en présence. Il faut cependant noter que cette dernière simplification peut conduire à des résultats particulièrement fantaisistes pour des armatures non orthogonales. Cette méthode simplifiée a été appliquée à des éléments de voile calculés par Vecchio et Collins et ses résultats sont comparés à ceux fournis par les auteurs (fig. 2.27 et 2.28).

Si on s'en tient au cas le plus fréquent de deux nappes disposées orthogonalement, la déviation de la direction de la fissuration par rapport aux directions principales moyenne peut aller jusqu'à 5° à l'état de service, et jusqu'à environ 10° à la rupture. Si l'erreur sur les contraintes dans les armatures à l'état de service reste en dessous de 15 %, elle peut s'écarter bien davantage à la rupture en raison de la plastification. (Fig. 2.27 et 2.28).

Une plus grande précision dans le calcul des contraintes dans les armatures n'est malheureusement pas accessible par des méthodes aussi directes que celle qui est proposée ci-dessus. Il est pour cela nécessaire de passer par un modèle de calcul plus complet, tel que la MCFT. Ce type d'approche passe par un processus itératif qui permet de déterminer de façon plus précise l'orientation des fissures et donc une valeur plus précise du paramètre α_l qui fait défaut dans la méthode simplifiée. Afin d'estimer la précision des résultats obtenus, on peut effectuer deux calculs en utilisant $\delta\alpha_l = \pm 5^\circ$ (domaine de variation constaté à l'état de service). De cette façon, même si l'orientation réelle de la fissuration n'est pas connue précisément, son influence sur les contraintes dans les armatures peut être évaluée.

Etant donné sa grande simplicité d'application et l'erreur relativement faible qui en découle, le modèle simplifié est néanmoins utilisé dans les calculs qui suivent.

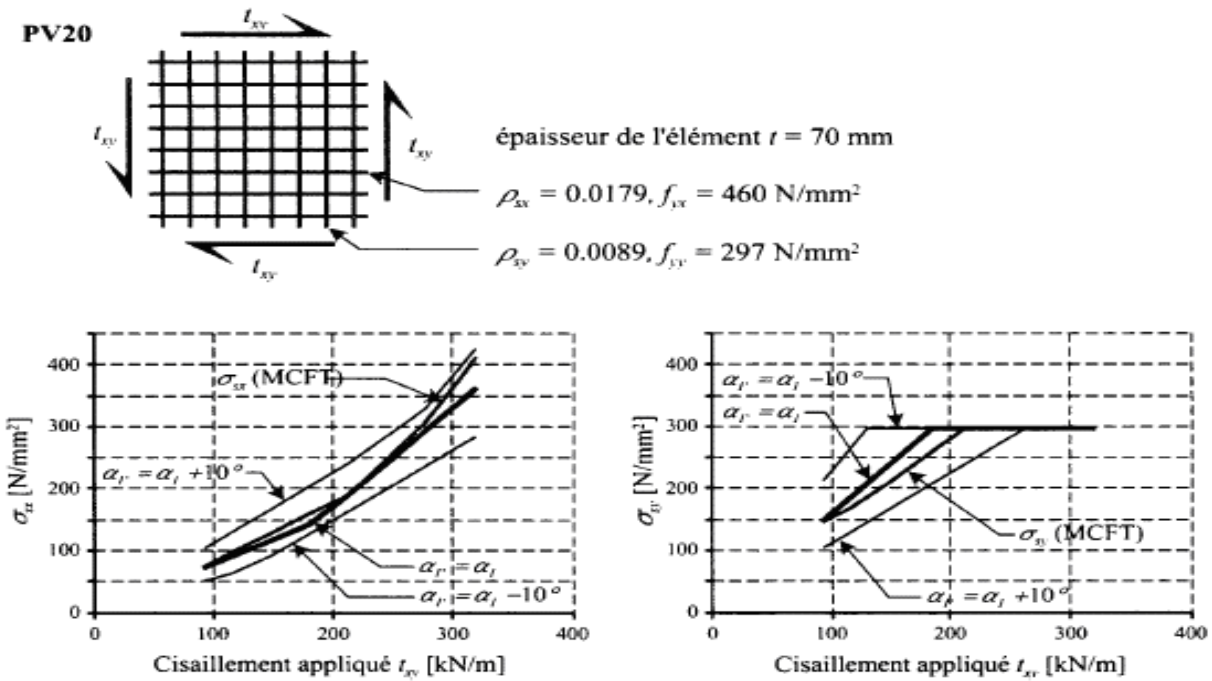


Figure 2.27 : Contraintes dans les armatures calculées selon différentes méthodes pour le spécimen PV20 de Vecchio et Collins. Méthode simplifiée sans déviation de l'orientation des fissures, méthode simplifiée avec déviation de $\pm 10^\circ$, et calcul selon la MCFT.

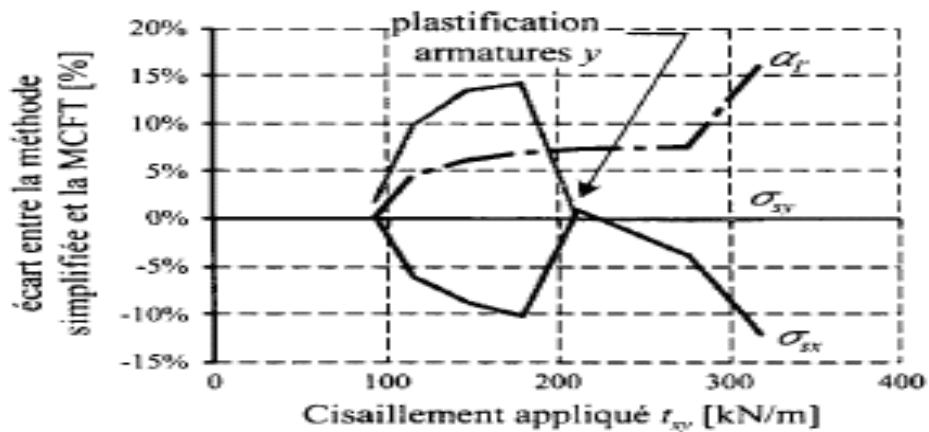


Figure 2.28 : Ecart entre la méthode simplifiée et la MCFT

2.10 Contrainte dans les armatures de la poutre

Le modèle décrit au paragraphe précédent permet d'évaluer les contraintes dans les armatures d'une structure. L'application au cas de la poutre simple du paragraphe 2.3.1 est immédiate. Le but étant ici d'observer l'influence du choix de l'angle d'inclinaison des bielles pour le dimensionnement à l'effort tranchant sur le comportement en service d'une structure, les résultats présentés portent sur la fissuration due à l'effort tranchant, et donc sur les contraintes dans les étriers et les armatures constructives longitudinales.

Il a déjà été mentionné au paragraphe 2.3.1 que la flèche varie très peu en fonction de l'angle d'inclinaison des bielles choisi pour le dimensionnement à l'effort tranchant. Il en va de même pour les contraintes dans les armatures principales (armatures longitudinales de flexion et d'effort tranchant) dont les variations n'excèdent pas 5 % d'une poutre à l'autre.

2.11 Plastification à l'état de service

La figure 2.29 présente l'état de fissuration des trois poutres à différents niveaux de chargement. Si les armatures principales ne dépassent jamais le stade de fissuration stabilisée – ce qui est normal à l'état de service, on voit apparaître, dès le début de la fissuration, des signes de plastification des armatures constructives longitudinales pour les deux poutres A25 et A45. La fissuration se propage, toujours avec une indication de plastification des armatures de l'âme, systématique pour la poutre A25 et quasi systématique pour la poutre A45. La poutre A65 dont les armatures d'âme sont plus importantes, échappe à ce phénomène. Il faut ici relativiser les résultats obtenus et clarifier certains points inhérents à la LTM 2D. Tout d'abord, le signal de plastification des armatures constructives situées juste au dessus des armatures principales dès l'apparition de la fissuration est clairement une fausse alerte. La LT/LTM est formulée de telle façon que, pour un tirant sous armé, dès l'apparition de la fissuration on se trouve sur le plateau de plastification, ce qui ne signifie pas nécessairement la plastification des armatures. On touche ici une limitation de la loi du tirant classique, qui ne permet pas de traiter de façon détaillée un tirant sous armé.

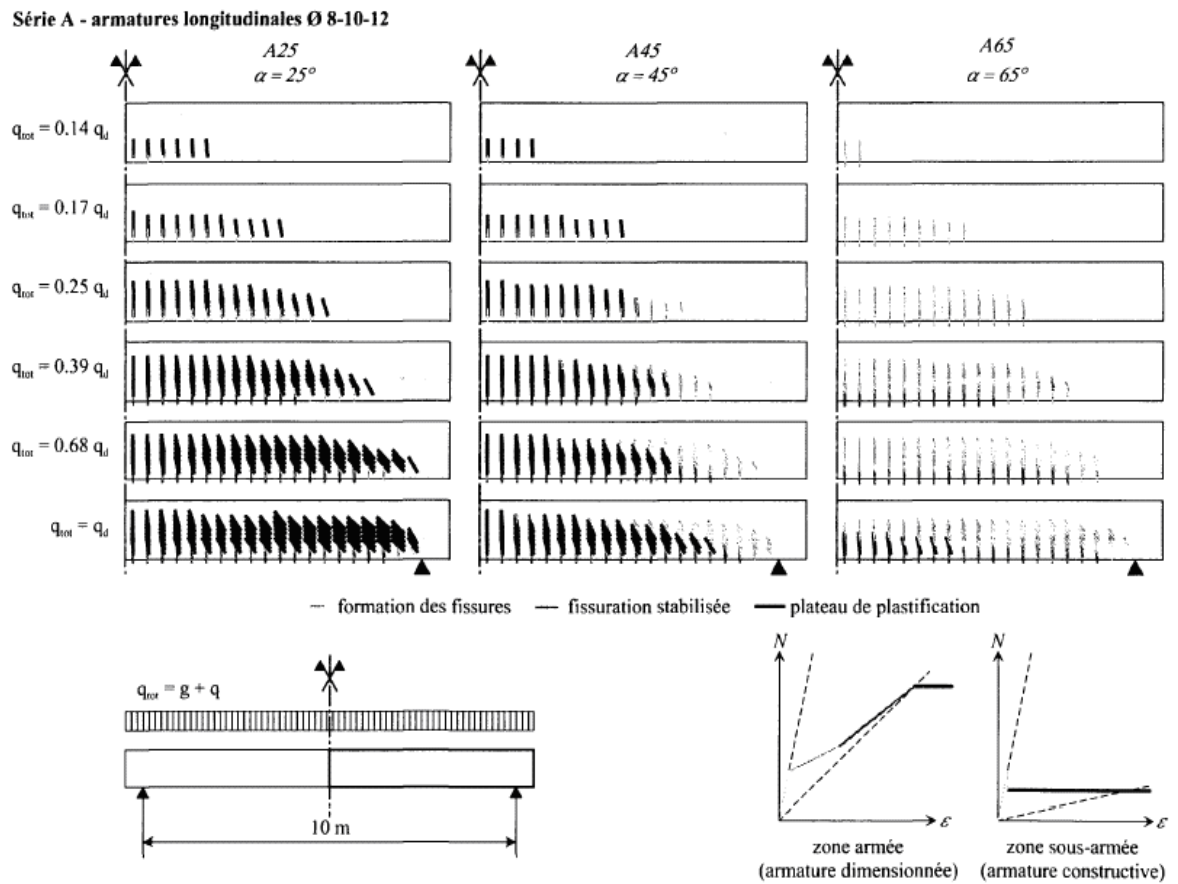


Figure 2.29 : Etat de fissuration en fonction de l'angle α de dimensionnement des armatures d'effort tranchant et du niveau de chargement.

Série A. armatures constructives longitudinales Ø8, 10 et 12, court terme.

Chapitre 3

MODELISATION CONSTITUTIVE DU MATERIAU BETON ARME

3.1 Introduction

L'objet principal de ce chapitre est de présenter la formulation nécessaire de la modélisation constitutive du matériau composite béton-armé. Cette formulation est décrite dans le cadre théorique qui représente les équations gouvernant le comportement des structures en béton armé. En ajoutant que cette formulation doit être en forte convenance avec l'aspect théorique de base de la méthode des éléments finis (la méthode numérique choisie). Cette description conduit en l'utilisant, cette fois-ci, comme un outil à l'analyse du comportement des murs ou des voiles en béton armé.

L'intérêt primordial consiste en l'établissement d'une formulation théorique d'un élément fini qui intègre simultanément les contributions matériaux : béton, acier et dans ce cas l'adhérence entre le béton et l'acier est considérée parfaite. Cette considération est prise pour donner l'importance aux paramètres principaux relatifs aux conditions géométriques et mécaniques des murs en béton armé. Parmi les effets pris en forte considération dans cette étude sont la fissuration des bétons, la quantité des aciers et la tenue en considération de comportement du béton fissuré.

L'étude bibliographique recueillie plusieurs travaux portant sur le comportement mécanique des bétons, ces derniers ayant une grande sensibilité au phénomène de fissuration à partir de petites valeurs de contraintes. Donc, les bétons s'initient à se fissurer à partir d'un niveau bas du chargement appliqué. Ce phénomène est à effet primordial sur le comportement des structures fléchies en béton armé. La fissuration des bétons est considérée parmi les facteurs qui entrent en jeu dans le comportement des structures en béton armé et surtout dans les structures profondes, telle que les murs ou poutres profondes, un autre facteur très important est celui du coefficient de transfert des contraintes de cisaillement à travers les fissures.

Cette formulation a été intégrée dans un programme numérique déjà établi à l'analyse du comportement non linéaire des structures en béton armé. Les résultats obtenus par la présente formulation ont été confrontés à d'autres résultats numériques d'une part et aux données expérimentales d'autres parts. Le dernier chapitre présente l'aptitude de la démarche présentée et la large utilisation à l'analyse des murs et des voiles en béton armé.

3.2 Comportement mécanique des bétons

3.2.1 Introduction

Le matériau béton est caractérisé par une composition hétérogène dont plusieurs paramètres sont à la base de sa formulation. En plus, d'autres effets peuvent accompagner cette composition. La complexité structurale du matériau béton est parmi les causes de son comportement mécanique. Son comportement est compliqué et les mécanismes qui conduisent à sa modification peuvent être bien définis à l'échelle macroscopique.

Le béton est considéré comme un matériau fragile en traction et robuste en compression. Dans cette analyse, nous considérons que le comportement du béton en compression est linéaire et qu'il est gouverné par le phénomène de fissuration. Cette supposition est consistante à partir des résultats obtenus à travers l'établissement de ce projet de recherche d'une part et par cette simulation d'autre part. Il est clairement constaté qu'initialement le béton se rompt par effet de traction que par un effet de compression. Donc, les éléments de béton situés un peu loin de l'axe des armatures se retrouvent dans une situation moins sollicitée par rapport à ceux situés au niveau de l'interface.

3.2.2 Comportement uni axial du béton

Le béton est un matériau non homogène par nature qui montre un comportement hautement non linéaire et qui se diffère lorsqu'il est soumis en traction ou en compression. Plusieurs travaux ont déjà été l'objet de plusieurs recherches expérimentales. La réponse des échantillons en béton soumis à une compression simple est montrée sur la figure 3.1.

La figure 3.1 représente la courbe typique d'essais de compression uni axiale sur divers bétons. On résume les caractéristiques principales de ces courbes en 3 points :

La courbe contrainte - déformation axiales est linéaire jusqu'à environ 30 % de la contrainte maximale de compression f_c . Pour des contraintes supérieures à $0.3 f_c$, le béton commence à s'écarter graduellement de la droite élastique jusque une contrainte comprise entre 0.75 et $0.90 f_c$. L'augmentation de courbure s'accélère à l'approche de f_c . Au-delà du pic de résistance, la valeur de la contrainte diminue jusqu'à écrasement du béton pour la déformation ultime ϵ_u . La déformation volumétrique ($\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$) est linéaire jusqu'à une contrainte comprise entre 0.75 et $0.90 f_c$.

A ce moment, la direction de la déformation volumétrique s'inverse et cela correspond à un accroissement de volume près de la contrainte maximale f_c . La contrainte correspondant à la déformation volumétrique minimale est appelée "contrainte critique". Quel que soit la résistance du béton, le pic est situé aux alentours d'une déformation de 0.0022 .

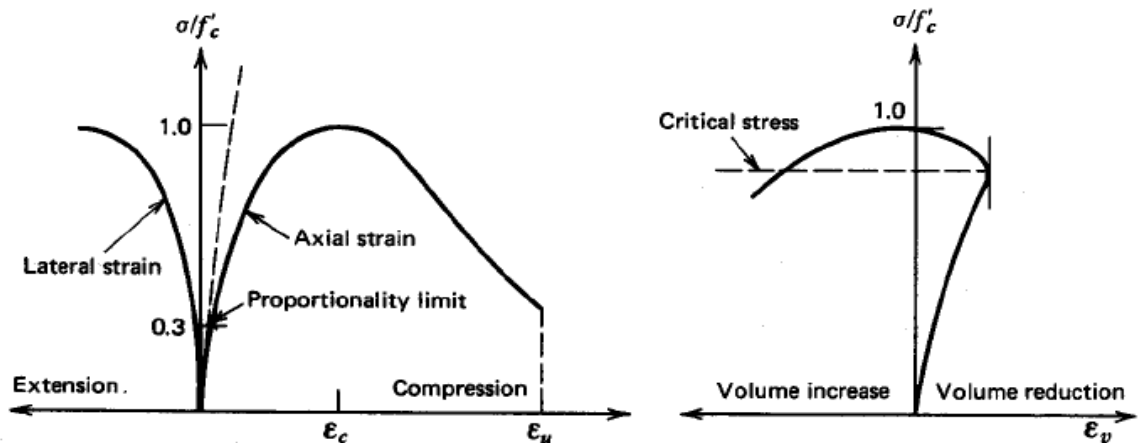


Figure 3.1 : Courbes contrainte – déformation d’un béton en compression uni axiale [Chen, 1994] (a) déformations axiale et latérale (b) déformation volumétrique ($\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$)

La branche descendante est d’autant plus raide que la résistance du béton est grande. La partie descendante de la courbe est cependant fonction de nombreux paramètres, tels la dimension des éprouvettes ainsi que leurs conditions d’appuis.

Le module d’élasticité du béton comprimé peut être choisi de différentes manières. On peut distinguer, en reprenant les notations suivantes :

- E_c , le module d’élasticité tangent à l’origine (de la courbe contrainte – déformation) d’un béton normal à 28 jours.

- $E_c(t)$, module d’élasticité tangent à l’origine d’un béton normal à un temps t .

- E_{cm} , un module d’élasticité sécant d’un béton normal. E_{cd} , module sécant de calcul.

Préconise pour les calculs de prendre un module sécant passant par le point de contrainte nulle et par $\sigma_c = 1/4 f_c$. La formule à appliquer est alors : $E_{cm} = 22 [f_{cm}/10]0.3$ avec f_{cm} en MPa. L’allure de la courbe contrainte – déformation pour une analyse structurale est présentée à la figure 3.2. Le coefficient de Poisson Les déformations transversales du béton soumis à la compression sont pratiquement élastiques jusqu’à la moitié de la résistance f_c .

Les déformations plastiques transversales apparaissent pour des contraintes supérieures et correspondent à une désorganisation interne du béton par microfissuration parallèle à l’effort de compression. Dans les essais de compression uni axiale, le coefficient de Poisson varie entre 0.15 et 0.25, 0.2 étant une valeur moyenne représentative.

Le comportement mécanique du béton à la traction est similaire avec celui en compression. Des courbes typiques sont représentées sur la figure 3.3 dépendante de la taille des graviers utilisée et l’âge de mesure de contrainte.

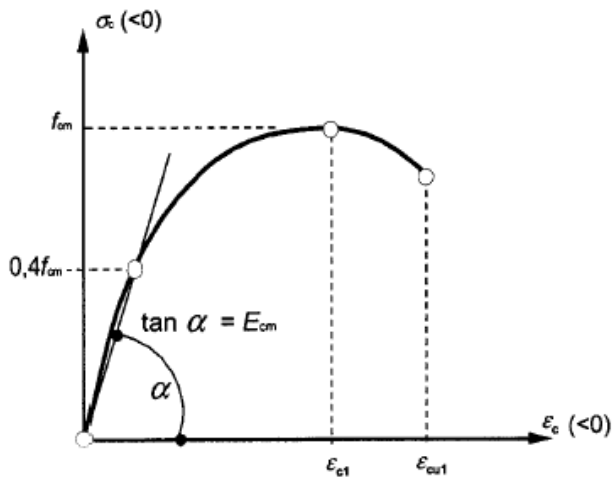


Figure : 3.2 Représentation schématique de la courbe contrainte – déformation en compression pour l'analyse des structures en béton armé.

En général, les courbes sont linéaires jusqu'à un niveau de contraintes assez élevé, environ 60 % de la résistance à la traction f_t . Au-delà de 75 % de la résistance à la traction, la propagation des fissures est très rapide et la branche descendante est assez difficile à suivre expérimentalement. Dans cette région, le comportement présente une non linéarité matérielle. Le rapport entre résistance à la traction uni axiale et résistance à la compression uni axiale varie généralement entre 0.05 et 0.1. Le module d'élasticité en traction uni axiale est un peu plus élevé et le coefficient de Poisson un peu plus faible qu'en compression uni axiale. En pratique, on considère les mêmes valeurs qu'en compression uni axiale.

3.2.3 Comportement bi axial du béton :

On peut résumer les principales caractéristiques de comportement du béton chargé de manière bi axiale (compression-compression, traction-compression et traction-traction) comme suit :

Comme les résultats expérimentaux de [Kupfer et al. 1969] repris sur la figure 3.4 le montrent, la résistance à la compression augmente dans un état de contrainte en bi compression. L'augmentation peut être de 25 % pour un rapport de contrainte $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$ et de 16 % pour $\sigma_2/\sigma_1 = 1$. En état de traction – compression, la résistance à la compression décroît quand la contrainte de traction appliquée croît. En traction bi axiale, la résistance à la traction reste quasiment égale à la résistance à la traction uni axiale.

On a deux types de ductilité en état bi axial de contraintes : ductilité en compression et ductilité en traction. En compression uni axiale et bi axiale (figure 3.5), la valeur moyenne de la déformation max. de compression est environ de 3 ‰ et la valeur moyenne de la déformation

max. de traction varie entre 2 et 4 ‰. On a une plus grande ductilité de traction en compression bi axiale qu'en compression uni axiale.

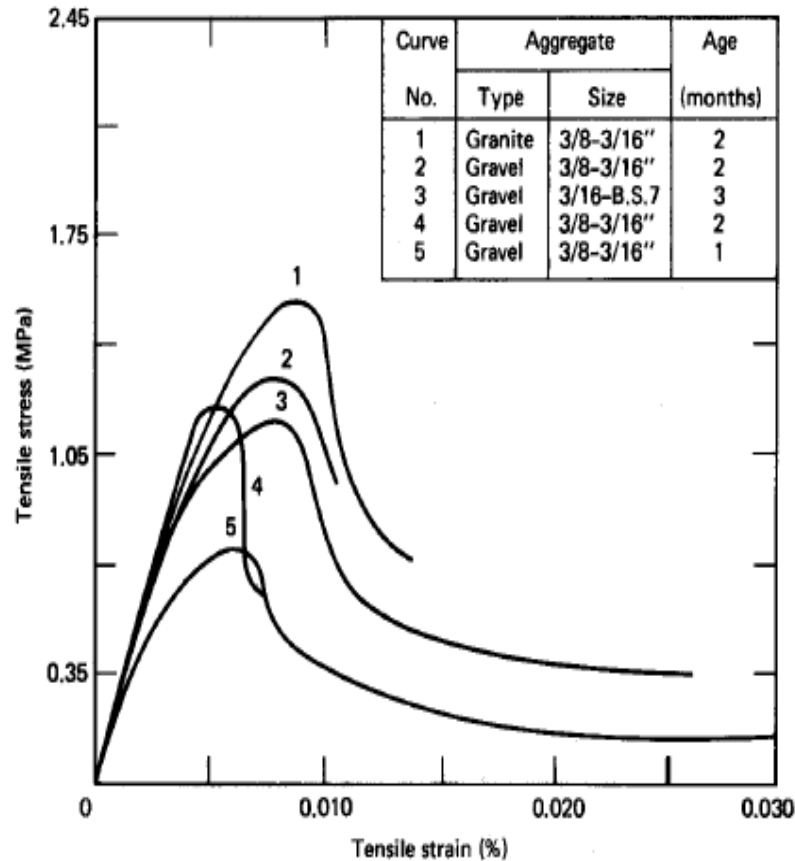


Figure : 3.3 Diverses courbes contraintes – déformation en traction uni axiale [Hugues et Chapman, 1966].

En traction-compression bi axiale, les déformations max. de traction et compression diminuent quand la contrainte de traction augmente. En traction uni et bi axiale, la valeur moyenne de la déformation principale max. de traction vaut environ 0.08 ‰.

La figure 3.6 illustre le phénomène d'accroissement de volume du béton au-delà d'un certain niveau de contrainte. Ce phénomène est appelé dilatance et est attribué à l'augmentation progressive des microfissures du béton.

La ruine du béton a lieu par rupture de traction (tension stiffening), avec les fissures orthogonales à la direction de traction maximale (contrainte ou déformation). Les déformations de traction sont très importantes dans le mécanisme de rupture du béton. La figure 3.7 [Nelissen, 1972] illustre les différents modes de ruine du béton sous diverses combinaisons de chargement bi axial.

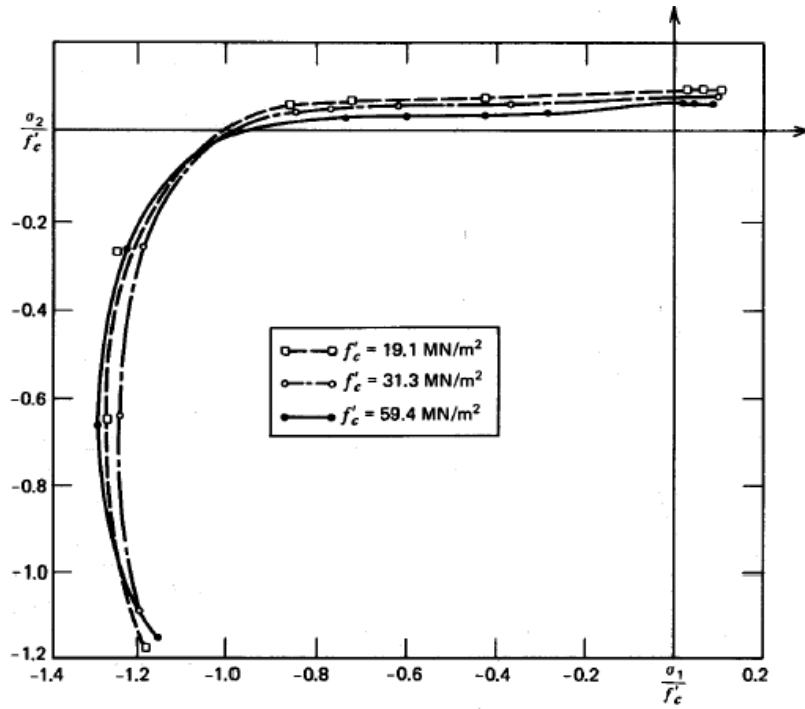


Figure 3.4 Enveloppe de la résistance bi axiale du béton [Kupfer et al. 1969].

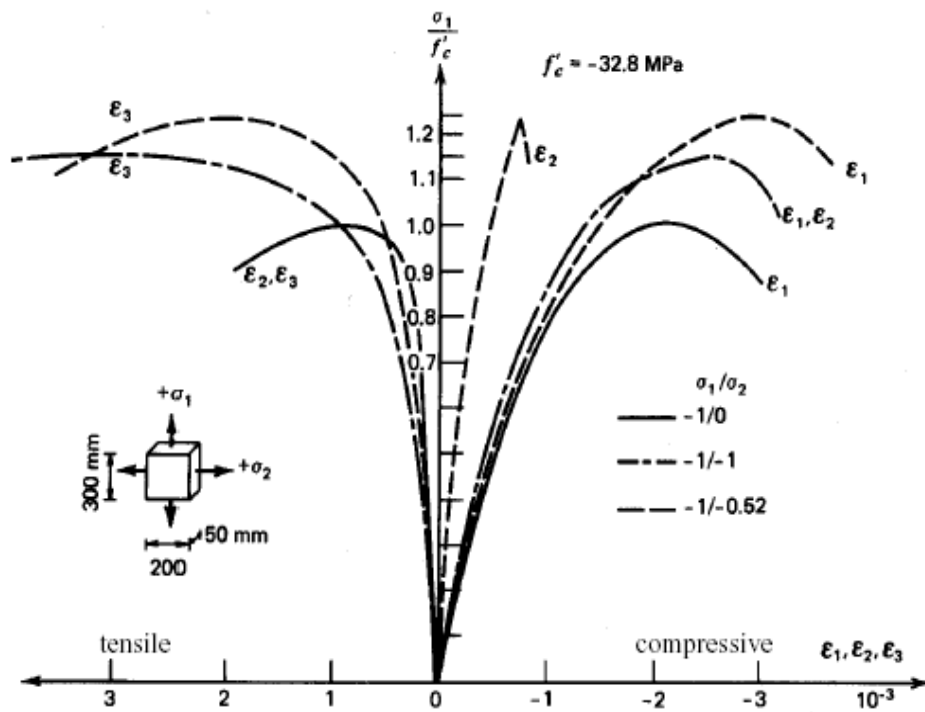


Figure 3.5 Courbes σ - ϵ béton en compression bi axiale [Kupfer et al. 1969]

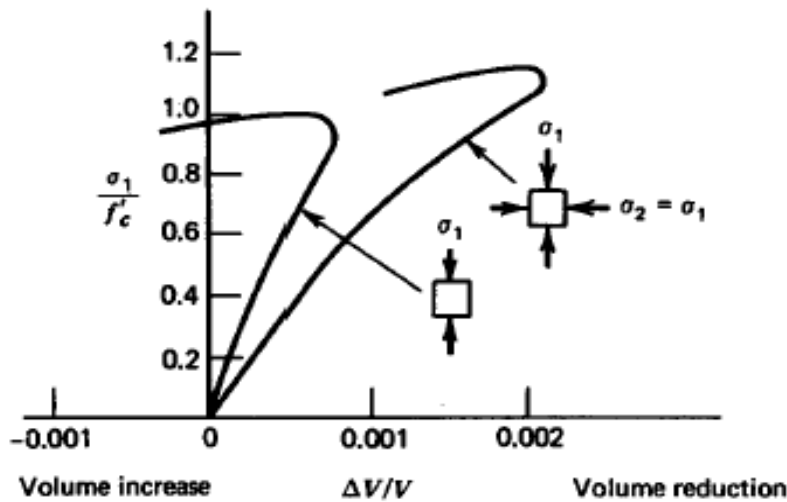


Figure 3.6 Courbe de variation de volume du béton en compression bi axiale [Chen, 1994]

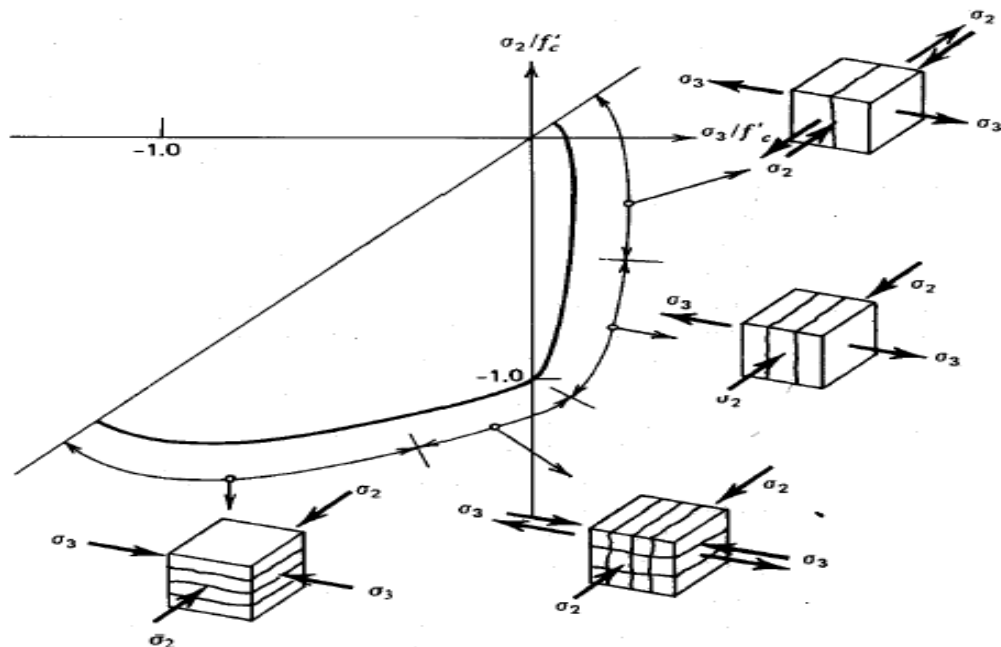


Figure 3.7 Modes de ruine du béton chargé de manière bi axiale [Nelissen, 1972]

Compressive tension

3.3 Comportement mécanique de l'acier :

Contrairement au béton, le comportement des barres d'acier est quasi identique en traction qu'en compression. La courbe donnant la loi constitutive (figure 3.8) montre l'allure du comportement d'une éprouvette d'acier soumise à un essai de traction. Nous y constatons clairement deux comportements [Lemaître et al. 1986]:

1 - Tant que nous restons dans le domaine de comportement élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge (quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve sa forme initiale).

2 - Quand le chargement dépasse la limite élastique, et si ensuite nous enlevons la charge des déformations permanentes apparaissent. Contrairement au béton, le module de décharge est pratiquement le même avec le module de Young initial.

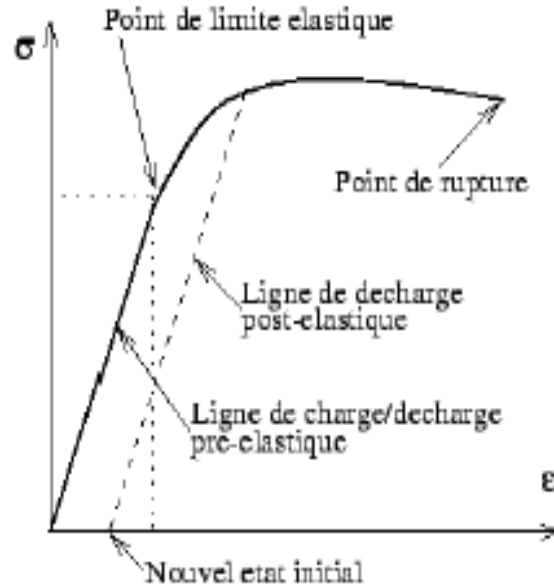


Figure 3.8 : Comportement de l'acier en traction simple

Lors de sollicitations cycliques de traction-compression, les propriétés de la plupart des aciers varient au cours des cycles. Lorsque nous soumettons une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de compression nous constatons que la traction préalable écrouit le matériau dans le sens de traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'adoucit dans le sens de la compression (effet Bauschinger). La figure (3.9) montre clairement que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression $|f_{eb}| < |f_e|$. L'effet Bauschinger est présent quelque soit l'amplitude de déformation imposée [Lemaître et al.1986].

Dans cette étude, le chargement cyclique ne fait pas l'objet de ce travail et l'effet de Bauschinger n'est pas pris en considération.

3.4 Propriétés d'interaction acier-béton

L'effet d'interaction entre les barres d'acier et les bétons qui l'entourent est une tâche importante dans une analyse par éléments finis des structures composites. Pour cette importance, la communauté internationale représentée par le comité européen du béton (CEB) et la fédération internationale de la précontrainte (FIP) organisent chaque deux années un congrès dans lequel les chercheurs dans le domaine présentent leurs travaux et résultats obtenus indifféremment sur la modélisation numérique qu'en des travaux expérimentaux. La bibliographie

ouverte a montré que plusieurs phénomènes peuvent être pris en considération en vue de modéliser le comportement de l'interface.

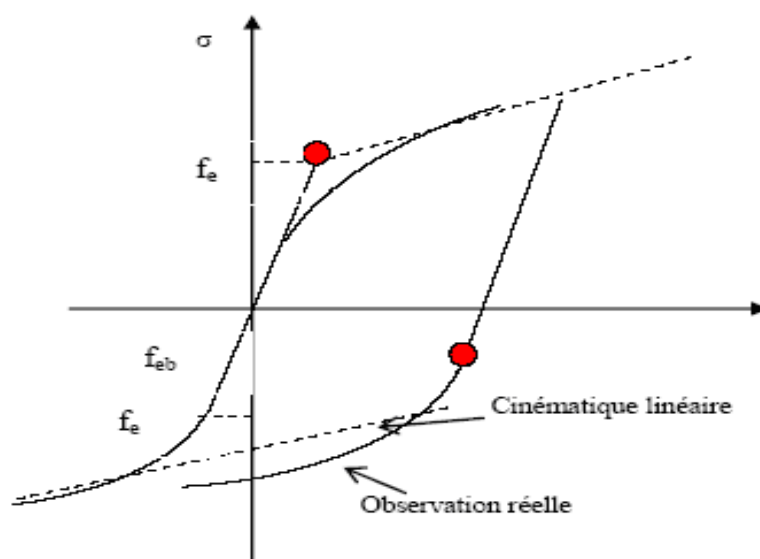


Figure 3.9 : Comportement de l'acier en traction – compression : effet Bauschinger.

Parmi ces phénomènes, on peut constater au premier point l'effet de tension stiffening et l'effet d'adhérence entre le béton et l'acier. Ces effets ont été sélectionnés pour leur importance dans la formulation de la procédure appliquée à l'analyse des voiles en béton armé ; objet de cette étude.

3.4.1 Option de tension stiffening

Nous ne nous attarderons pas sur le comportement des armatures seules, qui est bien connu. Le phénomène de tension stiffening est le fait que les armatures noyées dans du béton ont un comportement plus raide que les armatures seules. La figure 3.10 tirée du [Code Modèle 90 du CEB] compare les courbes contraintes -déformation d'une armature seule et d'une armature noyée dans un élément de béton armé, incluant la tension stiffening. La barre entourée de béton a un comportement plus raide et moins ductile.

En modélisation numérique et pour tenir compte de l'effet de tension-stiffening, une branche descendante au-delà la contrainte au pic est considérée, qui traduit une nature de comportement adoucissant du béton après fissuration. D'après nos connaissances bibliographiques, cet effet est primordial à l'analyse des structures nécessitant une répartition uniforme des armatures suivant les deux directions de comportement, telles que : les murs et les poutres profondes, les panneaux, les dalles, ...etc.

Numériquement, pour représenter l'effet de tension stiffening dans une analyse par éléments finis, il suffit d'introduire dans la matrice liant les contraintes et les déformations dans le repère d'orthotrope un terme supplémentaire E_{ts} correspondant au module tangent après fissuration.

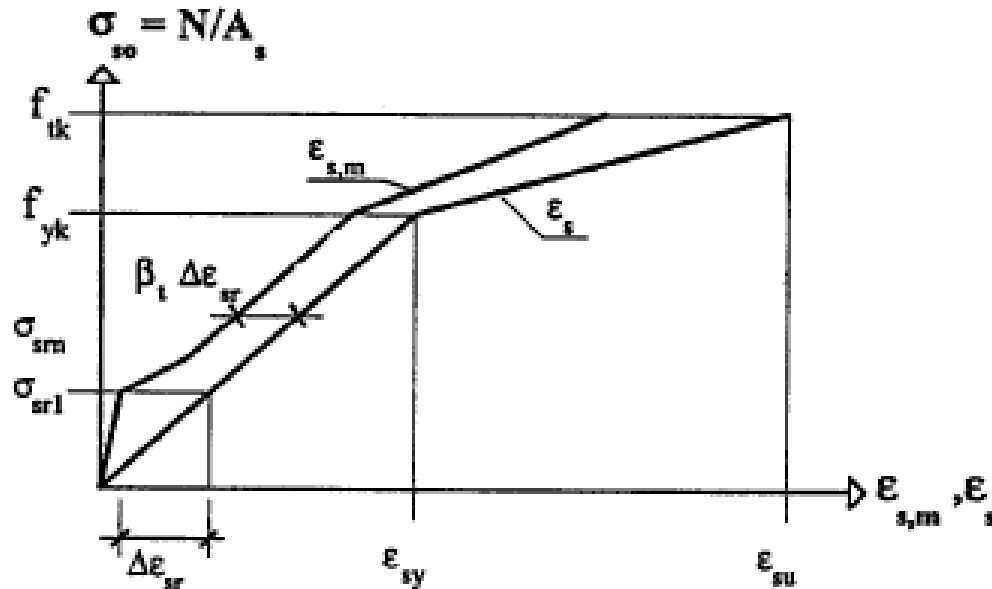


Figure 3.10 : Courbe contrainte – déformation simplifiée pour tenir compte de la tension stiffening des armatures [CEB-FIP, 1993].

Ce terme ajouté représente le comportement des bétons entre les fissures dans le comportement global des structures en béton armé. Dans cet environnement, le comportement du béton dans le système de directions principales liées à la fissure est découplé.

Enfin, pour l'importance de l'étude de tension stiffening et le comportement du béton armé fissuré, il a été consacré tout un travail autour de la modélisation de tension stiffening des bétons des poutres en béton armé (Merabet, 2007-1). L'étude effectuée par la candidate a conduit à présenter un modèle numérique basé sur le concept énergétique qui tient compte de la contribution du béton armé fissuré dans le comportement structural des poutres en béton armé (Merabet, 2007-2).

3.4.2 Adhérence acier-béton :

De même que la tension stiffening, l'adhérence joue un rôle fondamental dans le comportement des structures composites. Elle constitue l'action des forces de liaison qui s'opposent au glissement des armatures par rapport au béton qui les enrobe. En pratique, elle intervient dans le calcul des longueurs d'ancrage et de recouvrement et dans le calcul d'ouverture

des fissures. Dans les modèles numériques, l'adhérence peut être représentée par les relations analytiques contrainte d'adhérence (τ)- déplacement relatif (s) de la (figure 3.11) [Code Modèle 90 du CEB].

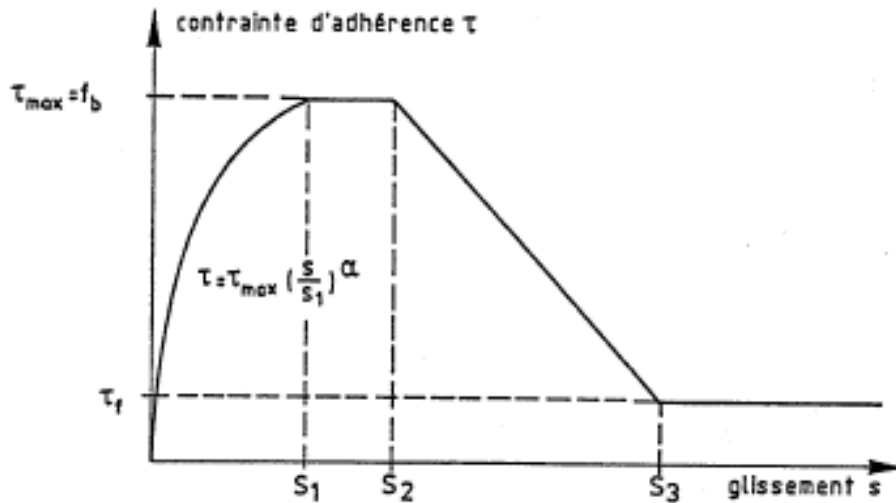


Figure 3.11 Relation contrainte d'adhérence – glissement sous charge monotone croissante [CEB-FIP, 1993]

L'ignorance de l'effet d'adhérence dans un modèle numérique éléments finis a pour conséquence de ne pas pouvoir représenter rigoureusement les transferts d'effort de l'armature aux bétons et inversement. Il est très difficile (voire impossible) de voir apparaître des mécanismes de bielles comprimées et tirants tendus sans la prise en compte d'une loi d'adhérence entre les bétons et l'acier. Cela affecte les résultats locaux mais pas le comportement global de la structure ou de l'élément étudié. Sa prise en compte n'est primordiale que dans le cas où la perte d'adhérence entraînerait la ruine de l'élément en béton armé.

La quantification de l'adhérence entre les barres d'acier et le béton a une importance aussi fondamentale dans l'étude du comportement structural en béton armé.

3.5 Modélisation constitutive – Formulation théorique

Dans cette section, nous avons considéré quelques suppositions qui concernent le comportement constitutif du matériau composite béton-armé ainsi que celui de l'interface. Ces suppositions représentent le modèle physique du matériau béton armé et celui de la base principale de la démarche que nous voulons exposée en sa partie théorique. Premièrement, les causes principales du comportement non linéaire sont déterminées. Dans ce cadre, la formulation du modèle de comportement du matériau composite est établie.

3.5.1 Les caractéristiques mécaniques de comportement du matériau composite :

Les différents stades de comportement du béton armé sont connus et sont déduites à partir des tests expérimentaux appliqués sur différents types de structures. Dans ce sens, plusieurs éléments en béton armé font l'objet de plusieurs travaux de recherche ; tels que : les éléments membranaires, les poutres, les murs et les voiles, les coques.....etc. Les comportements des différents éléments, en général, se ressemblent en leurs allures et se décomposent en trois phases :

- 1- Un comportement non fissuré.
- 2- Un comportement fissuré.
- 3- Ecoulement des barres d'acier accompagné ou non avec la rupture des bétons (Fig. 3-12).

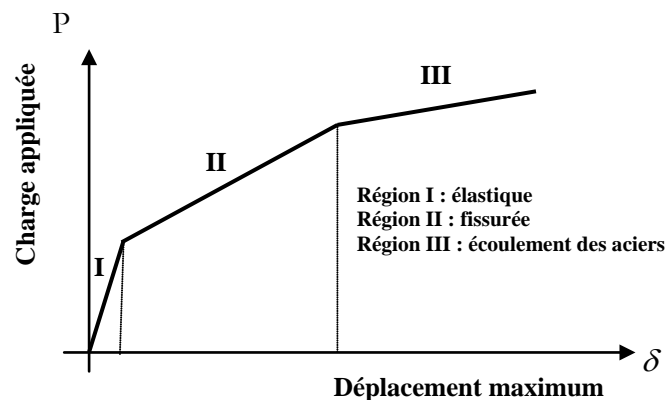


Figure 3-12 : La réponse typique charge-déplacement d'un élément en béton armé

Dans la première région qui correspond à un béton sain ou non fissuré, le comportement est supposé équivalent ; l'acier se comporte conjointement avec les bétons vis-à-vis de la charge appliquée. Dans ce cas, les deux composants forment un matériau intègre avec la considération de l'effet d'adhérence entre le béton et l'acier. Ce type de comportement est envisagé bien sûr pour des faibles contraintes appliquées où le comportement est élastique.

Le second intervalle est principalement caractérisé par la formation de la première fissure et sa propagation à travers l'élément de structure. Au début de cette région, le comportement des barres de renforcement reste dans le domaine élastique. Le chargement extérieur est appliqué de façon incrémentale ce qui conduit à la formation d'autres fissures et qui se propagent aussi au sein de l'élément.

Dans la troisième phase de comportement, une déformation permanente est observée sur les barres d'acier avec une plasticité dense et une rupture par une compression du béton prend place. Ces effets apparaissent de façon séparée ou simultanément causant enfin une rupture totale de la structure.

On peut conclure que le matériau composite béton –armé passe par trois régions de comportement au cours du processus du comportement incrémental, appelées (Figure 3-12) : (1)

la région élastique non fissurées, (2) la région de formation et de propagation des fissures, et (3) le stade de plasticité des barres d'acier et éventuellement la rupture structurale. En général, la non linéarité de la réponse matérielle est principalement due à deux effets majeurs : la fissuration du béton et la plasticité des barres d'acier.

Le comportement typique présenté sur la figure 3-12 montre une allure d'un élément en béton armé divisé en trois régions sert uniquement comme un exemple d'illustration et on peut dire qu'il y a d'autres courbes distinctes présentant des allures différentes. Il est clair que les passages d'un intervalle à un autre nécessitent des études spécifiques dans lesquelles les paramètres intervenants faisant l'objet d'une étude approfondie.

En plus, le phénomène d'adhérence qui a été tenu ici sous forme parfaite, contribue à la non linéarité matérielle. Dans ce contexte, le matériau béton –armé est supposé comme un matériau composite dans lequel son comportement dépend de la réponse de chaque constituant. Cependant le comportement analytique du matériau composite est déduit à partir des propriétés du béton et des barres d'acier qui sont définies avec plus de détails dans les sections suivantes.

3.5.2 Les suppositions faites sur le comportement des bétons

Pour ne pas tenir en compte des complications du comportement du béton, on l'a supposé qu'il est élastique linéaire en traction et en compression, la fissuration est prise ici en forte considération et qui sera présentée en détail dans les sections suivantes.

Après fissuration du béton, son comportement devient orthotrope dont la référence locale et le modèle de fissuration répartie est utilisé, ce qui nous conduit de considérer que la direction des fissures est perpendiculaire à la direction de la contrainte principale majeure .

Le béton sain ou non endommagé est supposé isotrope, cependant l'incorporation des armatures change cette situation puisqu'elle occupent une part du volume de l'élément et qui affaibli le béton dans certaines régions.

Il est donc admissible de supposer que le béton fissuré est continu ayant une loi constitutive orthotrope et qui est capable de résister suivant la direction de la contrainte principale majeure .cette supposition implique que les fissures sont infiniment espacées et uniformément réparties .

3.5.3 Les suppositions faites sur le comportement des barres d'acier.

Le comportement des barres d'acier est bien connu car le matériau utilisé est homogène et isotrope .la relation contrainte – déformation est supposée élastique – parfaitement plastique .le renforcement est considéré anisotrope, continu et capable de résister uniquement à des contraintes normales parallèlement à leurs directions .

3.5.4 Les suppositions faites sur le comportement de l'adhérence

Dans ce travail de recherche, une adhérence parfaite entre le béton et les barres d'acier est considérée. cela permet de supposer une compatibilité parfaite des déformation entre le béton et l'acier.

L'intérêt de notre recherche ne vise pas la quantification ou la modélisation de l'adhérence acier – béton mais cet effet doit être tenu en considération. Pour sa simplicité numérique, l'adhérence est considérée parfaite. Ce thème a fait plusieurs travaux de recherche (Ouchenane, 2007) (Khalfallah, 2007).

3.6 Modélisation du matériau composite béton-armé

Les relations contraintes – déformation qui expriment la rigidité matricielle sont définies à un élément infinitésimal dans la région qui correspond à un béton non fissuré. Dans cette partie, il est nécessaire de considérer les trois constituants du matériau composite béton–armé.

Une méthode générale de la construction de la matrice de rigidité du matériau composite est présentée. Dans le cas où le mur nécessitant une disposition des armatures suivant les deux directions, l'influence de la quantité d'armature semble primordiale ; qui veut dire que l'orthotropie due aux renforcements est étudiée.

3.6.1 Matrice de rigidité du matériau composite non fissuré

Considérons un élément extrait d'un mur en béton armé et qui est sollicité en état plan de contrainte (figure 3.13).

La relation contrainte-déformation pour l'élément considéré s'écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.1)$$

Où $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont respectivement les vecteurs incréments de contraintes et de déformation et $[D]$ est la matrice de rigidité du matériau composite supposé non fissuré.

Le vecteur déformation $\{\varepsilon\}$ est commun pour tous les constituants ; béton et acier, tandis que le vecteur contrainte s'évalue par la somme :

$$\{\sigma\} = \{\sigma^b\} + \{\sigma^a\} \quad (3.2)$$

Tels que $\{\sigma^b\}$ et $\{\sigma^a\}$ sont respectivement les contraintes dans le béton et les barres d'acier.

L'incrément de contraintes dans le béton s'évalue :

$$\{\sigma^b\} = [D^b]\{\varepsilon\} \quad (3.3)$$

Sachant que $[D^b]$ est la matrice de rigidité du matériau béton. Eventuellement, celle des barres de renforcement s'écrit ainsi :

$$\{\sigma^a\} = [D^a] \{\varepsilon\} \quad (3.4)$$

Où $[D^a]$ est la matrice de rigidité des barres d'acier prise même les armatures sont disposées suivant les deux directions.

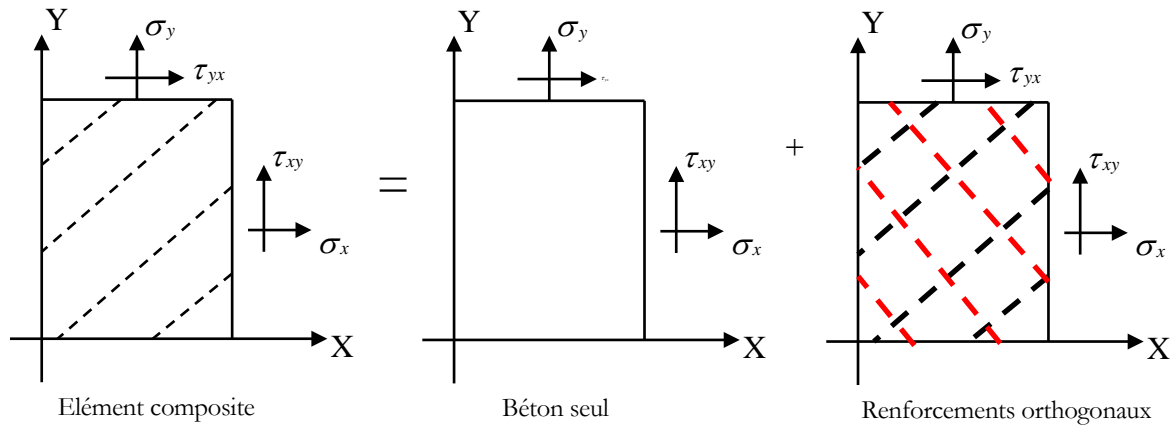


Figure 3.13: Matériau composite béton-armé non fissuré

La matrice de rigidité du matériau composite béton-armé est obtenue comme étant la somme des matrices de rigidité des bétons et celle des aciers.

$$[D] = [D^b] + [D^a] \quad (3.5)$$

Maintenant, il est nécessaire de calculer les matrices de rigidité de chaque composant pour déduire à la fin la matrice de rigidité du matériau composite béton-armé relativement à la phase correspondante du comportement. Relativement au matériau béton, la matrice de rigidité $[D^b]$ s'évalue de façon directe et il suffit de savoir le module de l'élasticité et le coefficient de Poisson du béton. D'après la loi de Hooke pour un état plan de contraintes d'un matériau isotrope, la matrice de l'élasticité s'écrit :

$$[D^b] = \frac{E_b}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

De la même manière, la matrice de rigidité des barres d'acier doit être évalué suivant la direction de leur disposition. Dans le cas où ces barres sont disposées suivant une direction faisant un angle α par rapport aux axes du repère globale, il est nécessaire d'effectuer une transformation matricielle permettant l'écriture de passage du repère local au repère fixe (ou global).

Dans une référence locale faisant une orientation de disposition d'un angle α la relation contrainte déformation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_U^a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho E_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_U \\ \varepsilon_V \\ \gamma_{UV} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Ou sous une autre forme :

$$\{\sigma^a\}_u = [D^a] \{\varepsilon\}_u \quad (3.8)$$

Les relations usuelles de transformation des contraintes et des déformations du repère global (XY) au repère local (UV) s'écrivent :

$$\{\sigma\}_u = [T_\sigma] \{\sigma\}_x \quad (3.9)$$

$$\{\varepsilon\}_u = [T_\varepsilon] \{\varepsilon\}_x \quad (3.10)$$

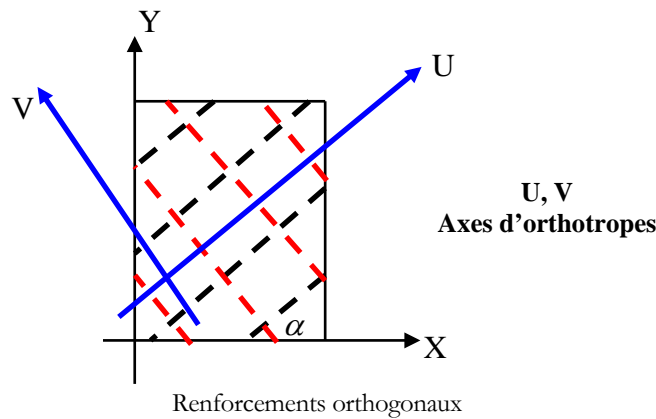


Figure 3.14

Avec

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -1/2 \sin 2\alpha & 1/2 \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

Et

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 1/2 \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -1/2 \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

Sachant que α est l'angle de l'orientation des barres d'acier par rapport à l'axe x x.

On obtient :

$$\{\sigma^s\}_x = [T_\sigma]^{-1} \cdot \{\sigma^s\}_u \quad (3.11)$$

$$\{\sigma^s\}_x = [T_\sigma]^{-1} \cdot [D^s]_u \cdot \{\varepsilon_u\} = [T_\sigma]^{-1} \cdot [D^s]_u \cdot [T_\sigma] \cdot \{\varepsilon\}_x \quad (3.12)$$

Ou bien :

$$\{\sigma^a\}_x = [D^a]_x \cdot \{\varepsilon\}_x \quad (3.13)$$

La matrice composée du produit de trois matrices représente la matrice de rigidité des barres de renforcement exprimée dans le repère global (XY).

$$[D^a]_x = [T_\sigma]^{-1} \cdot [D^a]_u \cdot [T_\varepsilon] \quad (3.14)$$

Qui peut s'écrire :

$$[D^a]_x = \rho E_a [L_a] \quad (3.15)$$

Où

$$[L_a] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Cette matrice (3.16) doit être formulée pour toute disposition d'armatures ayant un angle d'orientation α . La matrice de rigidité des barres d'acier se formule de :

$$[D^a]_x = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -1/2 \sin 2\alpha & 1/2 \cos 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 1/2 \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -1/2 \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$[D^a]_x = \rho E_s \begin{bmatrix} \cos^4 \alpha & \sin^4 \alpha & \cos^3 \alpha \sin \alpha \\ \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha & \sin^4 \alpha & \cos \alpha \sin^3 \alpha \\ \cos^3 \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \sin^3 \alpha & \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

On substitue (3.6) et (3.12) dans (3.5), on obtient la matrice de rigidité du matériau composite béton-armé. Si le champ de contraintes est ainsi spécifié, la relation inverse doit être utilisée pour évaluer de même le champ de déformation (équ.3.1).

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} \quad (3.18)$$

Enfin, les contraintes dans les différents composants peuvent être calculées à partir de la détermination des composantes de déformations.

La rigidité du matériau composite béton-armé doit obéir à la loi de Hooke généralisée des matériaux anisotrope. Le degré d'anisotropie dépend principalement de la quantité et, des

propriétés mécaniques des barres d'acier .en général cette anisotropie cause une déviation entre les directions des contraintes et déformations principales.

3.6.1.1 Les renforcements diagonaux

En général, la conception des murs, panneaux ou des dalles nécessite deux nappes de ferrailage. Ces éléments de structures travaillent en plan suivant deux directions perpendiculaires. C'est dans ce sens que les dits éléments de structures nécessitent donc des ferrillages suivant les deux directions orthogonales. Suite à cette exigence, ce cas doit être étudié en détail dans l'ordre d'illustrer le comportement des éléments non fissurés.

Il est convenant de choisir la même orientation des barres d'acier en parallèles que celle des axes des coordonnées géométriques. Dans ce cas, les éléments répondent comme un matériau homogène ortho tropique dont ses axes d'orthotropes sont dans le plan global (XY).

Pour les murs qui sont considérés des éléments plans possédants deux nappes de renforcement orthogonales, il convient d'orienter les axes suivant la disposition des barres d'acier.

La matrice de rigidité du béton est donnée par l'équation (3.6) mais celle des aciers est donnée dans ce cas par :

$$[D^a] = [D^1] + [D^2] = \begin{bmatrix} \rho_x E_a & 0 & 0 \\ 0 & \rho_y E_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Avec ρ_x et ρ_y sont respectivement les quantités des aciers de ferrailage suivant les directions d'orthotropes.

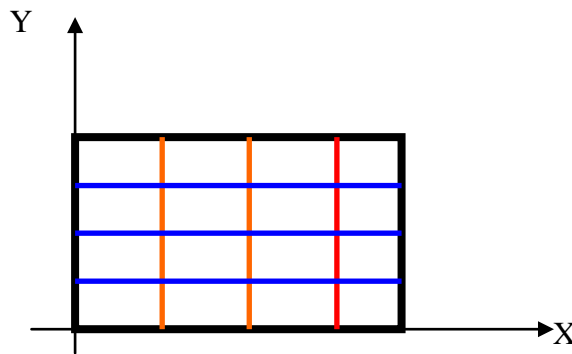


Figure 3.15 Deux nappes de ferrailage donnant un comportement ortho tropique

La matrice de rigidité du matériau composite est calculée :

$$[D] = E_b \begin{bmatrix} 1/1 - \nu^2 + \eta\rho_x & \nu/1 - \nu^2 & 0 \\ \nu/1 - \nu^2 & 1/1 - \nu^2 + \eta\rho_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1 + \nu) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Avec $\eta = E_a / E_b$

La propriété d'orthotropie de l'élément composé peut être décrite en fonction des constantes élastiques dans la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_X & -\nu_Y/E_X & 0 \\ -\nu_X/E_Y & 1/E_Y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Où E_X et E_Y sont les modules de l'élasticité suivant les directions d'orthotropie.

La relation inverse de l'équation (3.15) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_X}{1-\nu_X\nu_Y} & \frac{\nu_Y E_X}{1-\nu_X\nu_Y} & 0 \\ \frac{\nu_X E_Y}{1-\nu_X\nu_Y} & \frac{E_Y}{1-\nu_X\nu_Y} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

En faisant l'égalité avec l'expression : $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = E_C \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2 + \eta\rho_X} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2 + \eta\rho_Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Les nouvelles valeurs des constantes élastiques peuvent être liées aux valeurs des paramètres originaux par une comparaison des coefficients (équa. 3.21) et ceux de la matrice inverse (équa. 3.20).

$$E_X = E_b \left[\frac{1}{1-\nu^2} + \eta\rho_X - \left(\frac{\frac{\nu}{1-\nu^2}}{\frac{1}{1-\nu^2 + \eta\rho_Y}} \right) \right]$$

$$E_Y = E_b \left[\frac{1}{1-\nu^2} + \eta\rho_Y - \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} \right) \frac{1}{1-\nu^2 + \eta\rho_X} \right] \quad (3.24)$$

$$\nu_X = \left[\frac{\frac{\nu}{1-\nu^2}}{1-\nu^2 + \eta\rho_Y} \right]$$

$$\nu_Y = \left[\frac{\frac{\nu}{1-\nu^2}}{1-\nu^2 + \eta\rho_X} \right]$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+\nu)}$$

Les quatre valeurs de constantes indépendantes E_b , ν , $\rho_X E_a$, $\rho_Y E_s$ se transforiment, dans ce cas, en cinq valeurs constantes indépendantes E_x , E_y , ν_x , ν_y et G .

D'après les formules citées ci – dessus (3.24), le module d'élasticité suivant la direction x , par exemple, ne dépend pas seulement de la quantité de renforcement suivant cette direction ρ_X mais aussi de la quantité de renforcement ρ_Y suivant la deuxième direction y , Cependant, l'effet de ρ_Y sur E_X est très petit.

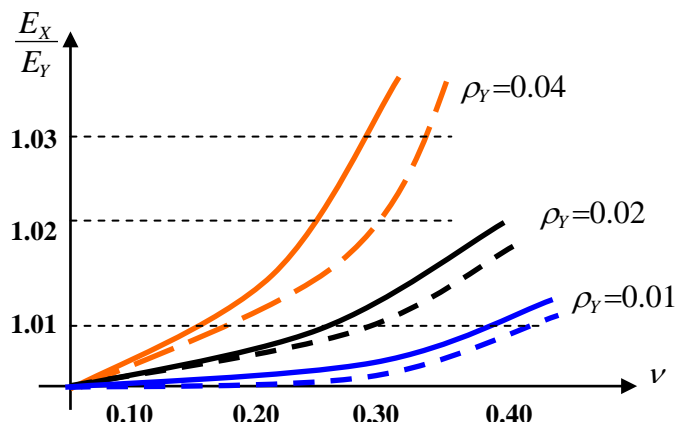


Figure 3.16 : Effet des renforcements transversaux sur le module de l'élasticité E_X .

Dans le cas où le coefficient de poisson $\nu = 0$, le module E_X se réduit à l'expression $E_{X'}$ ayant la même forme du module d'élasticité équivalent, généralement utilisé dans la conception des poutres.

$$E_x' = E_b(1 + \eta\rho_x) \quad (3.25)$$

$$E_y' = E_b(1 + \eta\rho_y) \quad (3.26)$$

L'effet de renforcement transversal sur E_x est montré sur la figure (3.16) pour différentes valeurs du coefficient de poisson avec $E_a/E_b = 10$. Il est montré que E_x et E_x' sont identiques dans les cas pratiques.

Les constantes ν_x, ν_y ayant une petite magnitude que le coefficient de poisson du béton ν , dû à l'effet de renforcement, par exemple, le rapport ν_x/ν est montré sur la figure (3.17) pour différentes valeurs de renforcement.

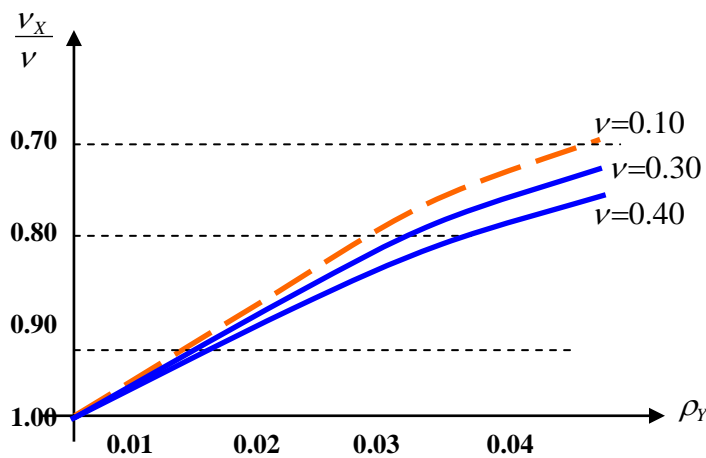


Figure 3.17 : Effet des renforcements transversaux sur le coefficient de Poisson ν_x .

3.6.2 La modélisation de la fissuration

3.6.2.1 Quelques travaux et modélisation de la fissuration du béton

La majorité des modèles éléments finis déjà présentés dans la bibliographie considère que le béton est un matériau homogène à l'échelle macroscopique. Mais, il existe d'autres modèles d'éléments finis de la bibliographie qui tiennent compte de la microstructure du béton (Wang et al. 1997). Dans ce cas, la modélisation du matériau composite exige de présenter le modèle de fissuration de la pâte de ciment et celui de l'interface pâte-granulat. Une autre façon de prendre en compte l'effet de l'hétérogénéité du béton consiste à distribuer de façon aléatoire le module de Young sur les éléments de maillage et la résistance limite de la traction du béton en fonction de leur valeur moyenne et de leur écart type obtenus (Rossi & Ulm 1997). En général, l'hétérogénéité du béton a rarement été prise en compte à savoir que la modélisation de la fissuration par éléments finis étant déjà relativement très complexe à maître en œuvre.

Depuis les années 70, la méthode des éléments finis est largement employée à l'analyse des structures en béton armé. Dans ce sujet, plusieurs travaux ont été présentés dans la littérature

traitant différents concepts de la fissuration (ACI 1997, Arafa 1998, de Borst 2002). Ces travaux peuvent être regroupés dans deux catégories d'approche : l'approche discrète et l'approche répartie. La technique de l'approche discrète est réaliste mais elle présente un problème au niveau numérique. De plus, elle nécessite la connaissance préalable de la direction des fissures. Pour ces raisons, la modélisation de fissurations réparties est souvent préférée. En ce sens, Georgin (Georgin 1998) a développé un modèle de comportement du béton basé sur l'approche continue, issue des travaux de Feenstra (1993). Il a supposé que l'ouverture de fissures puisse être traitée comme une déformation.

La difficulté principale de la modélisation de la fissure du béton par éléments finis réside dans la nature de la fissure elle-même. Une fissure est une discontinuité géométrique qui divise le matériau alors que la méthode des éléments finis est une technique basée sur la mécanique du milieu continu ce qui donne naissance à un problème d'incompatibilité entre le phénomène de fissuration et l'outil numérique. Dans ce souci, plusieurs résolutions ont été présentées dont on peut citer celle entraînant des changements de rigidité à l'endroit de la fissure.

Pratiquement, les contraintes principales et leur direction sont calculées aux points d'intégration, si une des contraintes positives dépasse une valeur limite alors une fissure perpendiculaire à la direction de cette contrainte y apparaît. La majorité des modèles suppose que la valeur limite est égale à la résistance limite de traction f_t (Dahlblom & Ottosen 1990, Mosalam & Paulino 1997, Jirasek & Zimmermann 1998).

3.6.2.2 Modèle de fissurations discrètes

Le premier modèle d'élément finis en béton armé qui inclut l'effet de fissuration a été développé par Ngo & Scordelis (1967) avec une approche linéaire à l'analyse des poutres en béton armé. Les fissures sont modélisées par une séparation des nœuds du maillage d'éléments finis (notion de l'approche discrète) (figure 3.18). Dans cette approche, une discontinuité géométrique réelle est introduite dans le maillage d'éléments finis à l'endroit de la fissure. Les auteurs ont modélisé la fissure en séparant par dédoublement des nœuds des deux éléments à côté commun. Ce modèle possède deux inconvénients, le premier relatif à la redéfinition des nœuds posant un problème majeur au niveau du calcul de la matrice de rigidité et le second concerne le manque de la généralité d'orientation de la fissure. Ces deux inconvénients conduisent à utilisation limitée du modèle de fissuration discrète. Malgré ces inconvénients, l'utilisation du modèle de fissurations discrètes dans l'analyse par éléments finis offre certains avantages à des problèmes entraînant plusieurs fissures dominantes. Cette approche montre aussi une description réelle des fissures, elles représentent une discontinuité de la déformation de la structure. Le

concept de la fissuration discrète se présente comme étant l'approche qui reflète le mieux l'état d'endommagement final d'une structure en béton armé car elle se rapproche de la conception naturelle de la fissuration.

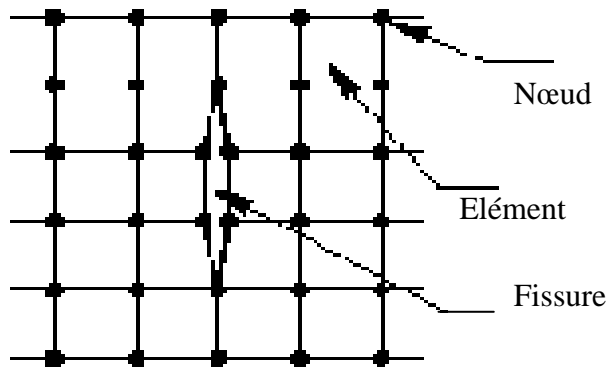


Figure 3.18 : Le modèle de fissurations discrètes

La nécessité au modèle de fissuration qui offre une génération automatique des fissures et une génération de leurs orientations sans le recours à une redéfinition des nœuds, ont conduit la majorité des chercheurs du domaine à choisir le modèle de fissuration répartie. Ce modèle présente les fissures espacées et perpendiculaires à la direction de la contrainte principale comme l'illustre la figure (3.19). Cette approximation du comportement du béton armé est vraiment réelle.

3.6.2.3 Modèle de fissurations réparties

Le modèle de fissurations réparties et les possibilités qu'il possède, sont clairement présentées en détail car le modèle présenté et le programme numérique développé pour ce souci sont basés sur le concept de l'approche de la fissuration répartie.

1. Principe général

La base principale du concept de l'approche de la fissuration répartie n'introduit pas de discontinuité dans le maillage. Cette approche (le milieu continu en présence de fissures) est basée sur le changement rhéologique en modifiant les propriétés mécaniques du matériau au niveau de la fissure. Cette approche a été développée pour la première fois par Rashid (1968).

La description de l'endommagement du béton engendré par fissuration, est représentée en termes de relation entre les contraintes et les déformations. Le comportement du béton sain (intact) est isotrope liant les contraintes aux déformations, il est transformé en une loi orthotrope après fissuration, les axes principaux coïncident avec ceux de la fissure.

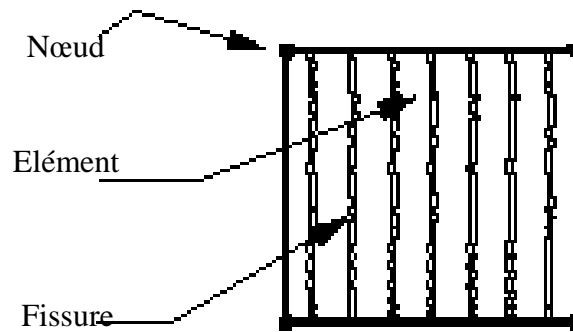


Figure 3.19 Le modèle de fissurations réparties

Comme le calcul de cette approche est local, les changements mécaniques aux points de résolution affectent la région entourant ces points et diffusent l'effet de la fissure dans cette région.

Cette approche est simple à implanter dans les codes de calcul et est largement utilisée. Néanmoins, elle possède un inconvénient majeur relatif à la dépendance des résultats en fonction des maillages en éléments finis (Vebo & Ghali 1977, Bazant & Cedolin 1980). L'utilisation des éléments finis grossiers influe sur la rigidité de la structure. Dans la plus part des cas, lorsqu'une fissure a eu lieu à un point d'intégration, la rigidité de l'élément diminue considérablement. D'autres fissures pouvant se produire dans les autres points d'intégration de l'élément au cours des itérations qui suivent. De cette manière, une fissure ne peut alléger le reste du matériau de l'élément puisqu'une continuité de déformation imposée augmente les déformations dans tous les points d'intégration. Cette approche souvent retenue pour l'analyse non linéaire de structures planes en béton armé.

2. Concept et modélisation de fissuration répartie

Dans l'approche de fissuration répartie, le comportement du béton initialement isotrope est remplacé après fissuration par une relation orthotrope. Le béton est supposé un matériau homogène à comportement élastique linéaire si le point de l'état de contraintes se retrouve dans le domaine initial d'écoulement. La relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha\nu}{1-\nu-\alpha\nu} & \frac{\nu(1-\alpha\nu)}{1-\nu-\alpha\nu} & 0 \\ \frac{\nu(1-\alpha\nu)}{1-\nu-\alpha\nu} & \frac{1-\alpha\nu}{1-\nu-\alpha\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \\ \Delta\sigma_z \end{Bmatrix} = E_c \begin{bmatrix} 1 & C_c & 0 & C_c \\ C_c & 1 & 0 & C_c \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ C_c & C_c & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \\ \Delta\varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Avec $\langle \Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\tau_{12} \rangle^T$ et $\langle \Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \Delta\gamma_{12} \rangle^T$ sont respectivement les vecteurs incréments des contraintes locales et des déformations. Dans cette formulation, le paramètre ν est égal à 0 dans le cas des problèmes en contraintes planes et égal à 1 en déformations planes.

$$E_c = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad C_c = \frac{\nu}{1-\nu}$$

Une fois la contrainte en traction excède la valeur de la résistante limite des béton en traction, le comportement du béton devient donc ortho tropique. La relation constitutive correspondante est :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Où E_1 et E_2 sont les modules d'élasticité sécants dans les directions des axes d'orthotropes, β est le facteur de transfert de cisaillement entre les lèvres du béton fissuré et G le module de cisaillement transversal.

3.6.3 Modélisation de la raideur " tension stiffening "

Il est considéré que le béton se fissure lorsque la contrainte en point de résolution excède la valeur limite correspondante. En plus, une fissure se produit perpendiculaire à la direction principale majeure. Dans la littérature, le béton entre les fissures peut contribuer dans le comportement global structural. Dans ce sujet, plusieurs travaux ont tenu en considération cette contribution sous le nom de tension stiffening.

Pour tenir en considération de l'effet de tension-stiffening, une branche descendante au-delà la contrainte de pic est considérée. Cette branche descendante traduit de façon directe le comportement du béton après fissuration (figure 3.20). Cet effet représente aussi le phénomène d'adhérence, notamment pour les structures qui nécessitent une répartition uniforme des armatures, telles que : les panneaux, les murs, les dalles, ...etc.

Théoriquement, nous introduisons dans la matrice liant les contraintes et les déformations dans le repère d'orthotrope un terme supplémentaire E_{ts} correspondant au module tangent après

fissuration. Le comportement du béton dans le système de directions principales liées à la fissure est découplé.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \Delta \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_1 \\ \Delta \varepsilon_2 \\ \Delta \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Et et Ets sont respectivement, le module tangent et la pente de la courbe de la partie adoucissante du béton.

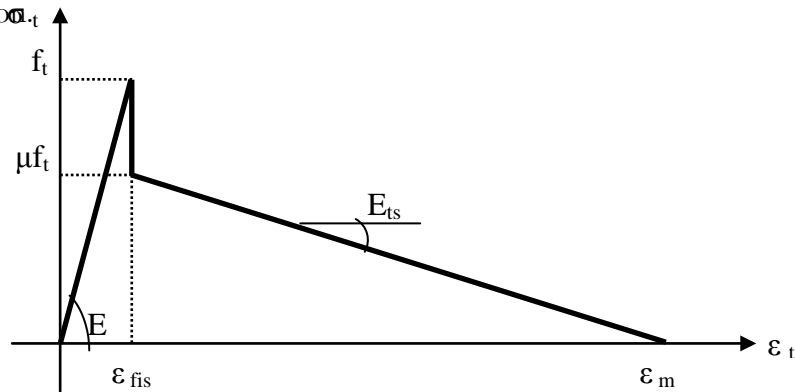


Figure 3.20 Modélisation du comportement du béton fissuré, option tension stiffening.

$$(3.31) \quad \begin{cases} \sigma_t = E \varepsilon_t & \varepsilon_t \leq \varepsilon_{fis} \\ \sigma_t = \mu f_t \left(1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m}\right) & \varepsilon_{fis} < \varepsilon_t \leq \varepsilon_m \\ \sigma = 0 & \varepsilon_t > \varepsilon_m \end{cases}$$

Avec :

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_t} = -\mu \frac{f_t}{\varepsilon_m} \quad \varepsilon_{fis} < \varepsilon_t \leq \varepsilon_m$$

$$E_t = 0 \quad \varepsilon_t > \varepsilon_m$$

Owen et al (1983) et Assan (2002) considèrent que $\mu = 0.8$ et $\varepsilon_m = 10^{-3}$.

3.6.4 Modélisation de l'option cut-off

Dans ce cas de comportement du béton, ce dernier ne peut présenter aucune contribution structurale. La force et éventuellement la contrainte qui provoque la fissuration, se répartie sur l'élément fini présentant la fissuration au premier lieu et par la suite sur la totalité de la structure (figure 3.21). Le comportement du béton fissuré devient donc uni axial suivant la direction de la fissure (figure 3.22). Chen et Suzuki (1980) considèrent que le comportement du béton fissuré est élastique linéaire en compression uni axiale.

$$\begin{cases} \sigma_t = E \varepsilon_t & \varepsilon_t \leq \frac{f_c}{E} \\ \sigma_t = f_c & \varepsilon_t > \frac{f_c}{E} \end{cases} \quad (3.32)$$

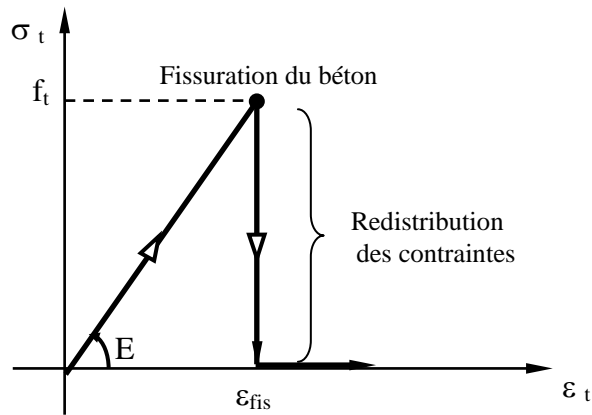


Figure 3.21 Comportement post-fissuration option : "cut-off "

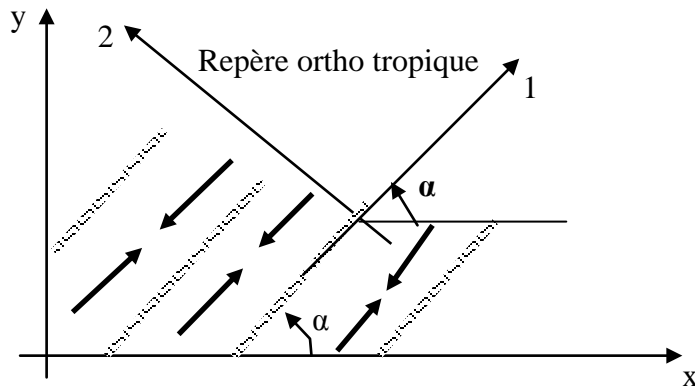


Figure 3.22 Fissuration du béton : comportement uni axial.

3.6.5 Comportement du béton complètement fissuré

Lorsque la contrainte de traction atteint une autre fois la contrainte limite de traction suivant la direction initialement non fissurée, une deuxième fissure se produit perpendiculaire à la première fissure (figure 3.23).

On obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1 = f_t \\ \sigma_1 = \sigma_x \cos 2\theta + \sigma_y \sin 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = f_t \end{cases} \quad (3.32)$$

Dans ce cas, le béton est complètement fissuré et il ne peut plus reprendre des accroissements de contraintes ce qui implique que les contraintes totales sont nulles.

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{cases} \quad (3.33)$$

En ce qui concerne le comportement du béton fissuré de type "tension-stiffening", la relation liant les accroissements de contraintes et de déformations s'écrit en supposant que le béton complètement fissuré ne transmet plus de cisaillement.

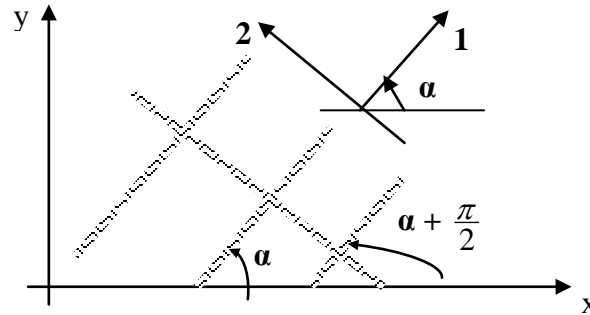


Figure 3.23 Béton fissuré suivant deux directions

Dans ce cas, les accroissements de contraintes et leurs déformations correspondantes s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} E_{ts1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{cases} \quad (3.34)$$

3.6.5.1 Matrice de rigidité du matériau composite fissuré

La rigidité matérielle d'un élément béton armé fissuré doit être construite dans cette section d'une manière similaire à celle déjà exposée à un élément béton armé fissuré. Pour une formulation générale, la matrice de rigidité du matériau composite doit être formulée au cas général qui correspond à une disposition arbitraire des barres de renforcement. Le cas d'une disposition orthogonale semble donc un cas particulier de cette analyse. Le cas correspondant à une disposition orthogonale n'est qu'un cas particulier.

Considérons un élément en béton armé fissuré soumis à un état de contraintes totales. Les déformations de l'élément sont communes à toutes les composantes et les contraintes totales résultantes sont déterminées par la superposition des contraintes des composantes cependant la matrice de rigidité peut être obtenue par la sommation des matrices de rigidité des composantes du matériau composé.

La matrice de rigidité du béton fissuré avec la considération de "cut off modèle", le béton n'est soumis qu'à une contrainte axiale parallèle au plan fissuré qui donne une relation contrainte-déformation dans le plan (UV) par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_u^c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_u \\ \varepsilon_v \\ \gamma_{uv} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

La supposition relative à la fissuration a eu lieu toujours dans le plan principal considéré. C'est dans ce contexte qu'on choisit l'axe U parallèle au plan de la fissure (Figure 3.24) faisant un angle β par rapport à l'axe X (repère de référence) .pour trouver les contraintes dans le repère globale il suffit d'utiliser les relations de transformation usuelles .

$$[D_x^c] = E_c [L_\beta] \quad (3.36)$$

Où $[L_\beta]$ est la matrice de transformation qui dépend de l'orientation de la fissure β .

Donc la matrice de rigidité du matériau composite sera :

$$[D] = E_c [L_\beta] + \sum_{i=1}^n \rho_i E_s [L_\alpha]^i \quad (3.37)$$

Il est clair que cette matrice de rigidité est singulière et que la matrice inverse est impossible à déduire.

Pour résoudre ce problème numérique, il est nécessaire donc de disposer des armatures dans deux plans perpendiculaires et la direction de la fissure ne coïncide pas avec l'orientation des dispositions des armatures $\beta \neq \alpha_1$ et $\beta \neq \alpha_2$.

La matrice de rigidité du matériau composite béton – armé représente la lois de Hooke généralisée d'un matériau anisotrope ; l'anisotropie d'un élément fissuré est plus importante que celle d'un élément semi ou non fissuré .en plus il est à noter que la matrice de rigidité du matériau composite est non invariante avec la rotation du système d'axes ce qui conduit à une actualisation de la matrice de rigidité à chaque configuration possible.

3.6.5.2 Le renforcement orthogonal

L'étude d'un élément composé fissuré avec un renforcement orthogonal peut être analysée en vue d'illustrer le comportement d'un élément fissuré. Les renforcements sont considérés parallèles aux axes X et Y et les fissures leurs sont inclinées d'un angle β . La matrice de rigidité du matériau composite, dans ce cas est donnée par :

$$[D] = E_b \begin{bmatrix} \eta\rho_x + \cos^4 \beta & \cos^2 \beta \sin^2 \beta & \cos^3 \beta \sin \beta \\ \cos^2 \beta \sin^2 \beta & \eta\rho_y + \sin^4 \beta & \cos \beta \sin^3 \beta \\ \cos^3 \beta \sin \beta & \cos \beta \sin^3 \beta & \cos^2 \beta \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

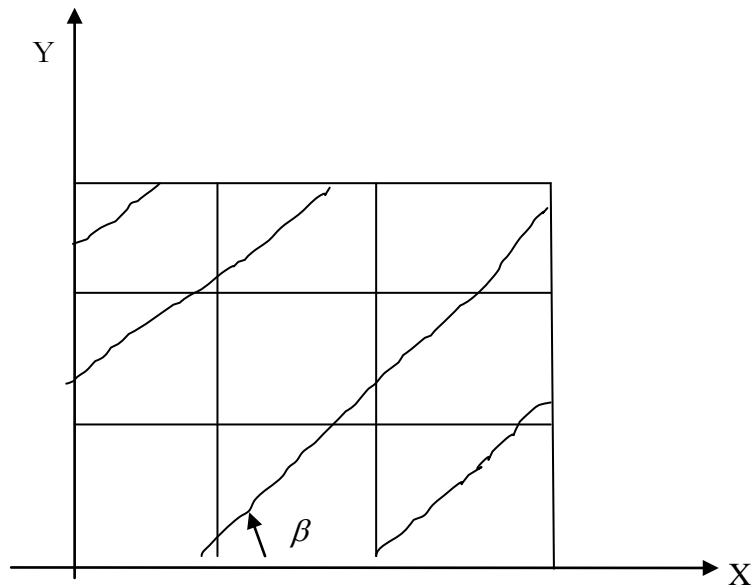


Figure 3.24 : Élément avec renforcement parallèles aux axes X et Y et les fissures leurs sont inclinées d'un angle β .

3.7 Conclusions

Le modèle de calcul développée a montré son efficacité pour le traitement de structures relativement complexes. Il a néanmoins été poussé dans ses derniers retranchements par son application à des cas répondants de façon approximatives à la définition de structure composée – tels que les murs en béton armé – l'exemple le plus extrême étant ici le calcul d'une poutre profonde. Des éléments de méthodes de calcul ont également été ajoutés, concernant le calcul des contraintes dans les armatures, ainsi que l'évaluation des déformations dues à l'effort tranchant.

Les exemples numériques traités dans le chapitre 5 ne sont certainement pas exhaustifs, ni nous ne prétendons pas avoir traités à fond les problèmes abordés. Un certain nombre de question sont néanmoins posées, et les éléments de réponses apportés montrent que ces problèmes méritent qu'on s'y intéresse de plus près.

Les calculs réalisés ont étendus et confirmés ce concept aux notions de déformations dues à l'effort de cisaillement. Concernant les valeurs de β inférieures ou égales à 0.6, leur utilisation nécessite, sinon le recours à des outils de calcul tels que celui utilisé ici, tout au moins une étude de sensibilité des phénomènes susmentionnés.

3.7.1 Développement

Un outil de calcul puissant, permettant d'analyser le comportement à long terme des structures en béton armé telles que : les murs en BA et les poutres profondes. Le modèle d'éléments finis sur lequel il s'appuie permet l'étude de géométries complexes, et d'autre part le modèle de comportement développé pour les membranes en béton armé a montré son efficacité et sa fiabilité tant dans la reproduction de résultats expérimentaux que dans l'étude de cas particuliers.

Une particularité du modèle de calcul développé est que le calcul des variations de rigidité dues aux non linéarités matérielles du béton armé ne prend en compte que les efforts membranaires. En effet, le comportement global de beaucoup de structures est essentiellement dirigé par le comportement local membranaire. Cette constatation a motivé le choix d'un modèle de comportement de membrane en béton armé. Le modèle développé est donc à même de représenter des structures dont le comportement est essentiellement membranaire.

L'objectif initial, qui visait la mise à disposition des ingénieurs de la pratique de cet outil, semble quelque peu sujet à caution. En effet, si la saisie des données et l'utilisation du programme de calcul développé répondent à cette attente compte tenu de la nature des calculs envisagés, l'exploitation des résultats reste délicate. Cela est notamment visible dans le cas du calcul des murs simples au chapitre 5. Somme toute, malgré une accessibilité d'un niveau comparable à celui d'un logiciel de calcul en coque classique, il paraît prudent de le réserver à un public averti.

Enfin, destiné avant tout à la recherche, le programme de calcul des structures et d'études paramétriques constitue une « boîte à outils » d'un secours appréciable pour tester et calibrer toutes sortes de modèles de calcul.

3.7.2 Applications numériques

Le modèle de calcul élément fini en béton armé développé a montré son efficacité pour le traitement de structures relativement complexes. Il a néanmoins été poussé dans ses derniers retranchements par son application à des cas répondants de façon approximative à la définition de structures composées.

Les exemples numériques traités ne sont certes pas exhaustifs, ni nous ne prétendons avoir traités à fond les problèmes abordés. Un certain nombre de questions sont néanmoins posées, et

les éléments de réponses apportées montrent que ces problèmes méritent qu'on s'y intéresse de plus près.

Les deux autres exemples de calcul ont montré – ou plus exactement confirmé – qu'une utilisation excessive de la théorie de l'élasticité pour le dimensionnement des structures conduit inévitablement à des comportements insatisfaisants à l'état de service. Preuve en faite notamment en ce qui concerne le dimensionnement des armatures d'effort tranchant dans les poutres et des armatures des poutres cloisons. Dans le même contexte, le rôle des armatures dites constructives ou de répartition ne peut pas être ignoré.

3.7.3 Recommandations

Certains enseignements peuvent être tirés des résultats obtenus, concernant tant la conception des ouvrages que leur modélisation à l'état de service. Etant donné le caractère limité des études numériques menées, les recommandations formulées ci après le sont également et ne doivent pas être inconsidérément extrapolées.

3.7.3.1 Armatures d'effort tranchant

Pour un comportement idéal à l'état de service, la meilleure solution serait de choisir une inclinaison des bielles pour le dimensionnement à la rupture identique à celle de l'état de service. Cela n'est évidemment pas possible en pratique, et somme toute peu économique. D'après les résultats obtenus, il serait souhaitable de choisir en tout les cas $\alpha \geq 45^\circ$ et de disposer des armatures constructives longitudinales suffisantes, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que les étriers. Ces résultats méritent toutefois d'être utilisés avec prudence, la LTM 2D ayant été poussée dans ces derniers retranchements dans ces calculs.

3.7.3.2 Modélisation pour le calcul non linéaire

Calcul simplifié en barre :

Pour des structures présentant un degré de compensation des déformations $\beta \geq 0.8$, les calculs habituels en barres restent d'application. Les déformations d'efforts tranchants – dont la prise en compte sont recommandées.

Si $\beta \leq 0.6$, il convient d'être prudent. Il devient alors nécessaire d'effectuer une étude de sensibilité en considérant les déformations d'effort tranchant et la largeur efficace réduite comme paramètre. En première approximation, on peut admettre que le pourcentage de déformation due à l'effort tranchant peut aller jusqu'à 10 % au dessus de sa valeur élastique linéaire (éq. 3.38) et (éq. 3.39).

$$\frac{w_{l'.\text{élastique}}}{w_{tot.\text{élastique}}} \leq \frac{w_{l'}}{w_{tot}} \leq \frac{w_{l'}}{w_{tot.\text{élastique}}} + 10 \% \quad (3.38)$$

$$b_{\text{eff.élastique}} \leq b_{\text{eff}} \leq b_{\text{tot}} \quad (3.39)$$

Calcul en élément membranaire :

Un calcul non linéaire en élément membranaire est évidemment possible à l'aide de l'outil de calcul développé ici. La règle quant aux incertitudes reste la même par rapport à la valeur $d\beta$. Il demeure néanmoins que pour $\beta \leq 0.6$, on ne peut pas faire l'économie d'une étude de sensibilité sur les paramètres potentiellement sujets à une forte variation (résistance à la traction notamment).

L'exploitation des résultats doit être faite avec la plus grande prudence. Contrairement à un calcul élastique linéaire, il est très difficile de contrôler le résultat d'un calcul membranaire non linéaire. Le bon sens de l'ingénieur est le meilleur outil de contrôle possible en l'occurrence.

Enfin, le respect des hypothèses du modèle de calcul est primordial. Rappelons une dernière fois que la LTM 2D ne traite pas la flexion locale dans les éléments membranaire. Seul les efforts membranaires sont pris en compte dans le calcul de fissuration.

Chapitre 4

METHODE D'ANALYSE NUMERIQUE : METHODE DES ELEMENTS FINIS

4.1 Introduction

L'objet principal de ce chapitre consiste en l'établissement d'une méthode d'analyse compatible à l'analyse du comportement inélastique des voiles ou des murs en béton armé. La présente analyse inclut en considération les effets inélastiques du matériau béton-armé ainsi que quelques paramètres ayant influence non négligeable sur le comportement des murs en béton armé.

La base de formulation présentée dans le chapitre 3 est incorporée dans la démarche proposée fondée sur les bases de la méthode numérique choisie. Il est très difficile d'atteindre les résultats ou les réponses par une méthode analytique, c'est pour ce souci, la méthode numérique et la théorie relative formulé en chapitre 3, ont été introduites dans un programme numérique conçu pour l'analyse du comportement des structures en béton armé d'une façon générale dont la réponse inélastique des voiles en béton armé faisant partie de cette catégorie.

Enfin, pour la large utilisation de la méthode des éléments finis, ces dernières années, comme méthode numérique à l'analyse des structures au premier lieu et les structures en béton armé en second lieu. Cette méthode numérique est sélectionnée comme une méthode de base de cette formulation. Notre choix de cette méthode n'est pas intuitif, car cette méthode numérique a trouvé sa large utilisation dans plusieurs disciplines des sciences de l'ingénieur et plus précisément en mécanique des structures.

4.2 Principe de la méthode des éléments finis

En général, le principe de toute méthode de discrétisation consiste à remplacer un milieu continu (structure) en un nombre fini d'éléments dont leur géométrie est simple et leur comportement est assez facile à l'introduire dans une analyse par éléments finis. Les éléments de discrétisation de la structure sont choisis suffisamment petits pour que leur comportement structural soit simple à déterminer.

La méthode des éléments finis constitue actuellement un outil efficace de calcul des structures complexes et son domaine d'application s'est considérablement étendu à l'étude même aux problèmes à comportement non linéaire en mécanique des solides. Elle est récemment utilisée à l'analyse du comportement statique qu'en dynamique. Cette méthode offre une solution maintenant classique aux différentes représentations géométriques. Dans le même concept, ces dernières années, le béton renforcé a été utilisé avec succès dans la construction des structures complexes. Ces structures sont des sujets à des variations de la charge d'environnement y compris le séisme, le vent et la neige.

Comme il a été signalé ci-dessus que la base principale de cette méthode consiste à effectuer un passage géométrique d'une structure réelle à une autre plus simple discrétisée. Dans la littérature technique, il existe deux types de modélisations qui ont été utilisés dans une analyse par éléments finis : la représentation discrète et la représentation continue appelée aussi répartie. En général, on fait appel à ce type de représentation puisque le matériau béton est susceptible au phénomène de fissuration et qu'il le présente à partir des premiers niveaux de chargement.

La distribution discrète des fissures a été proposée dans l'analyse par éléments finis des structures en béton renforcé par Yao et Murray (1993). Dans cette approche un simple critère de résistance basé sur la résistance à la traction est utilisé pour le fractionnement des nœuds et la propagation de la fissure, résultant donc de la coalescence de ces nœuds le long des frontières des éléments existants.

Dans cet environnement, il est nécessaire de recourir à une technique qui permet à modéliser le phénomène de la fissure discrète au droit des sections fissurées. Une fissure conduit à une division ou plusieurs divisions du milieu continu, dans ce cas, la notion du milieu continu est violé et qu'une modélisation semble nécessaire pour atteindre le but voulu. Pour ces raisons, l'utilisation des éléments de liaisons sont installés pour connecter les nœuds de fractionnement sur les deux cotés de la fissure (dans le béton ou entre le béton et l'acier -à l'interface-) et la réponse du matériau sous la traction est utilisée pour représenter proprement l'énergie qui a causé la rupture.

Une technique d'énumération complète pour le fractionnement des nœuds permet aux modèles traités dans le maillage par éléments finis d'être représentée par activation et désactivation d'un nombre de nœuds de fractionnement (Yao et Murray 1993). Cette technique a été appliquée pour la première fois sur les tests d'arrachement qui consiste à soumettre une barre d'acier ancrée dans un prisme en béton à un effet de traction monotone (Yao et Murray 1994).

La méthode des éléments finis est un outil de résolution numérique approchée des problèmes de structures et des solides de l'ingénieur constructeur et, plus généralement, des problèmes physiques régis par des équations différentielles. Il s'agit d'un outil de travail remarquable de plusieurs possibilités qu'il convient de savoir maîtriser et utiliser à bon escient. Ce chapitre présente une introduction aux bases théoriques et pratiques de la méthode numérique, en s'appuyant sur le concept de la mécanique des solides et des structures. On se limite cette fois-ci au domaine statique élastique linéaire et aux éléments finis du modèle déplacement. Cette démarche a permis à coupler le phénomène de fissuration des bétons avec la théorie de l'élasticité. La présentation recourt davantage au caractère physique attrayant de la méthode des éléments finis qu'à son aspect purement mathématique. Elle doit faire comprendre la simplicité et la force de la méthode mais aussi ses limitations et dangers. (Frey, 2002)

4.3 Généralités sur les principes utilisés dans la modélisation par éléments finis

Un seul exemple peut être modélisé en éléments finis par plusieurs modèles, car on fait la discrétisation « le maillage » suivant les deux directions du plan de la structure. Cette procédure d'idéalisation (longitudinale et transversale) conduit à une précision satisfaisante des résultats obtenus par des analyses de ce genre. Dans les analyses par éléments finis, les résultats convergent vers ceux analytiques ou expérimentaux, en général, lorsque le nombre des éléments finis lors d'une discrétisation géométrique pris est devenu important. Mais, il y'a d'autres facteurs qui influent sur la précision du calcul numérique. Il s'agit du nombre de nœuds dans chaque élément (4, 8, 9...nœuds) et le nombre de points d'intégrations ou de résolution. Dans la conception du programme développé, il est nécessaire de choisir de façon convenant le nombre de nœuds des éléments membranaires et celui des éléments barres. Par exemple, si le nombre de nœuds des éléments membranaires est égal à 4 il est nécessaire de prendre les éléments barres égal à 2 nœuds. Dans l'autre cas, il est nécessaire de choisir des éléments barres à 3 nœuds (figure 4.1).

Dans le même concept, il est essentiel de prendre dans une analyse par éléments finis le nombre de résolution d'intégration. Ce facteur a une influence directe sur la qualité des résultats numériques. Pour cette raison, le nombre de points d'intégration en respectant la conception du programme numérique développé, quatre points d'intégration de type de Gauss (2*2) est compatible avec les éléments membranaires à 4 nœuds géométriques. Au contraire dans le cas des éléments à 8 ou à 9 nœuds géométriques, l'utilisateur peut choisir le nombre de points

d'intégration à son analyse. La qualité des résultats numériques est la seule preuve du choix à adopter.

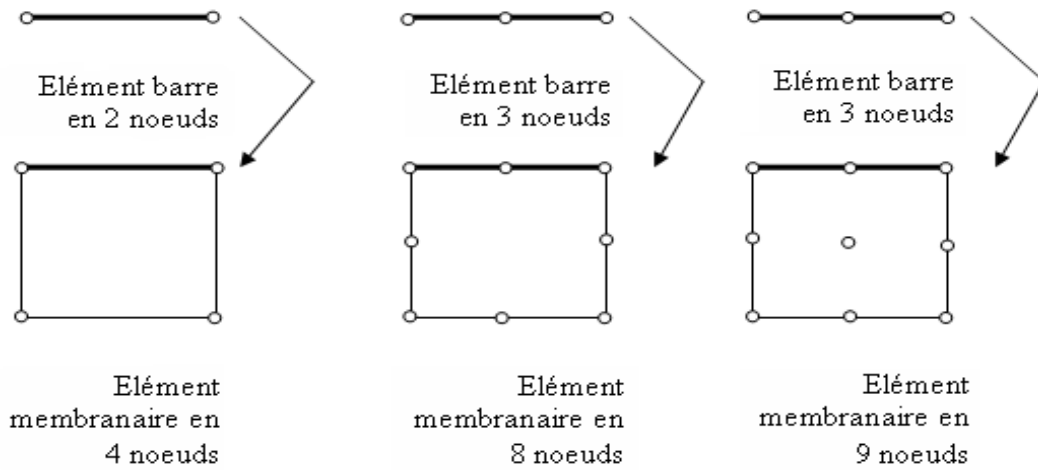


Figure 4.1 : Eléments membranaires et les éléments en barres correspondants

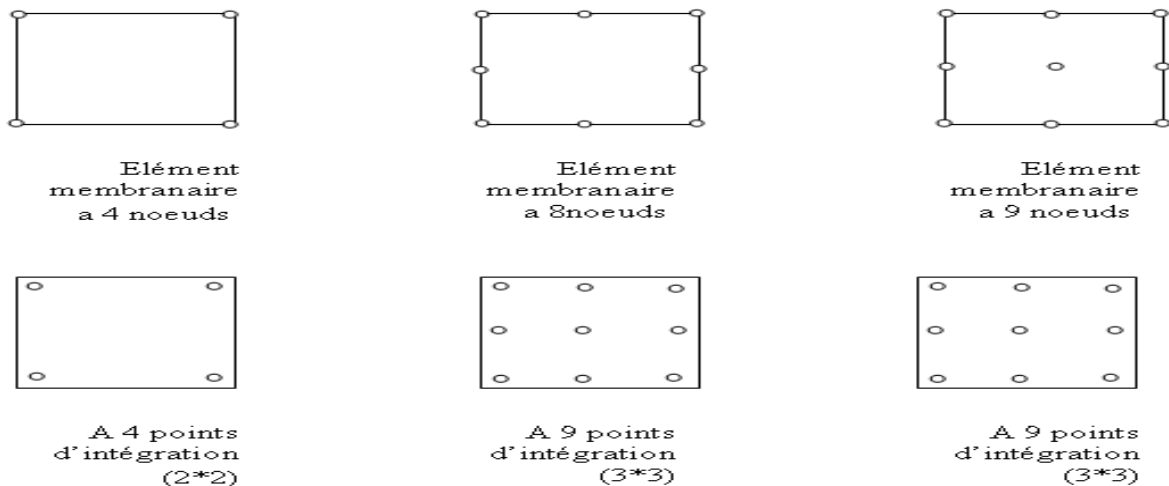


Figure 4.2 : les éléments membranaires avec le nombre de points d'intégrations (de Gauss) correspondants.

4.4 Les modèles éléments finis de représentation des barres d'acier

Dans la modélisation par éléments finis des structures en béton armé, il existe trois représentations alternatives des barres d'acier : la représentation répartie, la représentation discrète et celle intégrée. La modélisation répartie n'est pas largement utilisée et n'est pas exposée ici. La représentation discrète et intégrée ont été formulées et introduites dans le programme.

4.4.1. Modèle de la représentation discrète

La représentation discrète des barres de renforcement utilise les éléments unidimensionnels à 2 nœuds ou à 3 nœuds correspondant à l'élément membranaire de l'analyse.

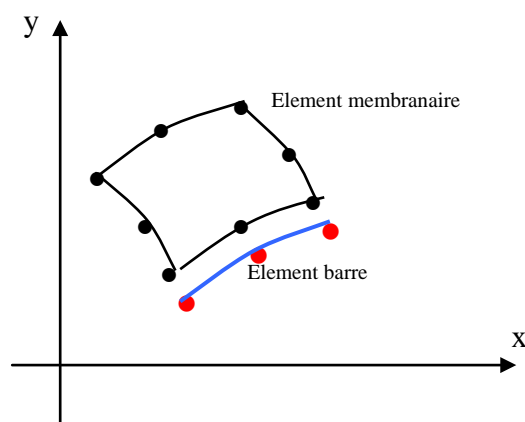


Figure4.3: la représentation discrète

En plus de sa simplicité, l'analyse significative de la représentation discrète est tel que les nœuds peuvent se déplacer en respectant les déplacements du béton qui l'entoure. Pour inclure l'effet d'adhérence entre les bétons et les barres d'acier, les méthodes d'adhérence parfaite ou de contact peuvent facilement être utilisées.

4.4.2 Modèle de la représentation intégrée

Dans telle représentation, les barres d'acier sont toujours considérées pour reprendre, en général, les efforts de traction ainsi que les efforts de transmission entre les bétons et les aciers aux droits des fissures. Les éléments barres sont considérés ici comme des éléments axiaux intégrés dans la masse de béton sachant que le champ de déplacements est supposé le même entre les éléments membranaires et les éléments barres. Plusieurs travaux ont été publiés présentant de différentes formulations de cette modélisation tels que : Balakrishna (1987), Allwood (1989) et Philips (1990).

L'inconvénient de ce modèle est la complication de la démarche numérique. Par conséquent, l'addition de degrés de libertés augmente l'effort de calcul (un redoublement de nœuds pour représenter des barres d'acier) et le rend plus lourd.

4.5 Notions utilisées dans la méthode des éléments finis

- Un système physique est représenté par un ensemble de variables qui dépendent des coordonnées d'espace $X = (x, y, z)$ et éventuellement du temps, t . Il est appelé un système stationnaire si ces variables d'état ne dépendent pas du temps (Dhatt & Gilbert 1984).

Certaines variables du système sont connues à priori : les propriétés physiques, les dimensions du système, les sollicitations, les conditions aux limites, ... etc.

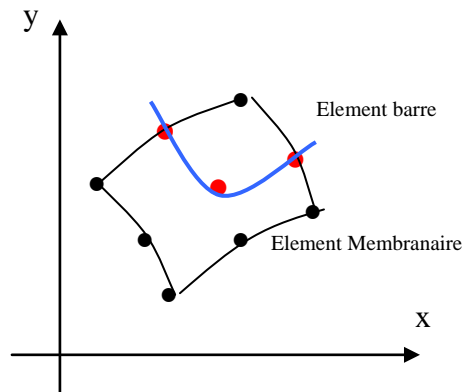


Figure4.4: la représentation intégrée

- Un modèle mathématique d'un système physique permet d'écrire des relations mathématiques entre les variables d'état et les variables des propriétés physiques en utilisant des lois physiques (Dhatt & Gilbert 1984).

- Le nombre de degré de liberté (DDL) du système est le nombre de paramètres nécessaires pour définir « u » à un instant donné « t ».

- Le champ de déplacement est discret s'il possède un nombre de DDL fini; et il est continu s'il possède un nombre de DDL infini. Le comportement d'un système discret est représenté par un système d'équations algébriques. Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équation aux dérivées partielles ou intégration différentielles associée à des conditions aux limites en espace et en temps (Dhatt & Gilbert 1984), (Zienkiewicz, Taylor 1991).

- Depuis le développement des machines de calcul de haute puissance, les problèmes discrets peuvent être en général résolus directement même si le nombre d'éléments est très grand; les équations algébriques des systèmes peuvent être résolues par les méthodes numériques. Par contre, les équations des systèmes continus ne peuvent en général pas être résolus directement. Lorsque la capacité d'ordinateur est finie, ces problèmes continus ne pourront être résolus exactement que par des opérations mathématiques, pour surmonter l'impossibilité de résoudre ces problèmes. Différentes méthodes de discrétisation ont été présentées. Toutes ces méthodes impliquent une approximation dont on espère qu'elle approche aussi précisément que possible la solution du problème continu lorsque le nombre de variables discrètes augmente. La MEF est l'une des méthodes qui peuvent être utilisées pour faire cette discrétisation.

- Pour l'analyse des problèmes discrets (Zienkiewicz, Taylor 1991), une méthode classique de résolution a été développée au cours des années. Dans le domaine de la mécanique des structures, l'ingénieur détermine tout d'abord les relations entre forces et déplacements pour chaque élément de la structure, puis il assemble ces relations en un système global selon une procédure telle que l'équilibre local en chaque « noeud » ou point de connexion de la structure soit satisfait. A partir des équations ainsi obtenues, on peut calculer la solution exprimée en fonction des déplacements.

- L'existence d'un traitement classique unifié des structures discrètes standard nous conduit à adopter une première définition de la méthode des éléments finis considérée, ici, comme une méthode d'approximation de problèmes continus tels que :

- Le milieu continu est subdivisé en un nombre d'éléments finis dont le comportement est défini par un nombre fini de paramètres;

- La relation de la structure globale obtenue par l'assemblage de ses éléments respecte précisément les mêmes règles que celles qui régissent les structures discrètes (Darve, 1987).

4.6 Eléments de base de la méthode des éléments finis

A titre d'introduction du concept général des structures discrètes, nous considérons tout d'abord un exemple de calcul des structures présenté en sa forme la plus générale (Zienkiewicz, Taylor 1991). L'écriture des forces nodales élémentaires basée sur le concept de la discrétisation géométrique, sous forme matricielle, s'écrit :

$$\{F^1\} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\text{Avec } \{F_1^1\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

Où $\{F_i^e\}$ est le vecteur forces appliquées à l'élément « e » aux nœuds « I » de cet élément; et $\{F^1\}$ le vecteur de sollicitation totale de l'élément '1'. Cette description est applicable au champ de déplacement. Elle conduit, donc, à l'écriture suivante :

$$\{\delta\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\delta^{N^e}\} \end{array} \right\} \text{ de toute la structure} \quad (4.2)$$

$$\text{Avec : } \{\delta^1\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \\ \delta_3^1 \\ \delta_4^1 \end{array} \right\} \text{ et } \{\delta_i^1\} = \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \end{array} \right\} \text{ chaque noeud}$$

Où : $\{\delta\}$ est le vecteur des déplacements nodaux de toute la structure, $\{\delta^{N^e}\}$ est le vecteur des déplacements nodaux élémentaire d'un élément «Ne» et $\{\delta_i^{N^e}\}$: les composantes de déplacements nodaux d'un élément Ne rapportées au nœud i.

Il est bien constaté que le vecteur de forces $\{F^e\}$ et le vecteur déplacements $\{\delta^e\}$ possèdent les mêmes tailles matricielles, c'est à dire que le nombre de composantes vectorielles ou le degré de liberté est identique.

4.6.1 Présentation matricielle de la méthode des éléments finis

Nous allons présenter une organisation matricielle qui facilite le passage de la formulation théorique de la procédure que nous voulons présenter en vu d'établir une analyse statique du comportement des voiles en béton armé à la programmation numérique. Cette dernière est considérée comme un outil qui permet de traduire la réponse structurale ou physique à une réponse numérique. Cette phase d'établissement fait une partie primordiale du programme numérique développé. Il s'agit de formuler un ensemble de sous-routines permettant d'introduire le comportement et la réponse des voiles sous un chargement croissant.

Il est difficile de saisir à première vue comment tels problèmes peuvent être discrétisés de la manière décrite dans le cas de structures plus simples. La difficulté de discrétisation en éléments finis d'une structure composite peut être surmontée de la façon suivante :

- a) Le milieu continu est subdivisé en un certain nombre d'éléments finis séparés par des lignes.
- b) Les éléments sont supposés interconnectés en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières. Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème de façon pareille comme dans le cas simple du calcul d'une structure discrète.

c) Le choix d'un ensemble de fonctions permet de définir de façon unique les déplacements en tous points internes de l'élément en fonction des déplacements nodaux.

d) L'état de déformation à l'intérieur d'un élément est alors déterminé de façon unique en fonction des déplacements nodaux. L'état de contraintes sera alors déterminé dans ces éléments, ainsi que sur les frontières à partir de ces déformations déjà calculées, des déformations initiales éventuelles et des propriétés constitutives du matériau.

e) Un système de forces concentrées aux nœuds équilibrant les contraintes s'exerçant aux frontières et les charges réparties sera déterminé.

Tout d'abord nous définissons la méthode des éléments finis comme la méthode de discrétisation de forme intégrale globale W remplacée par des formes intégrales élémentaires W^e , celle-ci est discrétisée en utilisant une approximation par *MEF*. Ceci conduit à la définition de convergence et présentons la technique dite du patch test utile pour vérifier la convergence des éléments non conformes.

La technique d'assemblage, caractéristique de la *MEF*, permet de passer des matrices et vecteurs élémentaires à des matrices et vecteurs globaux, ainsi que les diverses techniques de stockage de celle-ci et enfin nous décrivons les différentes manières d'introduire les conditions aux limites dans le système d'équation finale.

4.7 Méthode des éléments finis (MEF)

4.7.1 Introduction

La résolution d'un problème aussi complexe que celui du calcul des structures en béton jusqu'à la ruine ne peut pas être envisagée par une méthode analytique. En effet par suite de la fissuration du béton en traction, de son hétérogénéité, des phénomènes différés (les non linéarités matérielles, géométriques, le retrait, le fluage, ...), la présence des barres d'armatures et leur phénomène d'écoulement, dans le cas du béton armé, il est très difficile de trouver un modèle mathématique général représentant correctement le comportement de la structure. Même si ce modèle existait, il serait probablement impossible d'établir les équations différentielles le gouvernant. Elles seraient si compliquées qu'aucune solution ne saurait être trouvée. Il faut donc se tourner vers les méthodes de traitement numériques de la solution. Ces méthodes sont fondées sur une discrétisation de la structure. Alors que la solution classique des problèmes de la mécanique des milieux continus utilise des fonctions représentant les contraintes, les déformations ou les déplacements en tout point du corps, les méthodes numériques de calcul discrétisent ces fonctions en un nombre fini de points. Cette discrétisation présente beaucoup d'intérêt dans notre cas. En effet le champ des contraintes étant diversifié il est possible d'adapter

en chaque point le comportement du matériau et ainsi de se rendre compte de son caractère hétérogène.

4.7.2 Choix d'une méthode de résolution

4.7.2.1 Introduction

Parmi les méthodes numériques qui permettent le calcul des structures, on peut citer la méthode des différences finies, la théorie des équivalences et la méthode des éléments finis. C'est cette dernière qui semble offrir, à l'heure actuelle, le plus de possibilités. Elle est un outil particulièrement simple et puissant aussi bien pour traiter les problèmes linéaires que non linéaire. En effet de nombreuses études ont fixé aussi bien ses fondements mathématiques que ses applications techniques.

4.7.2.2 Méthode des éléments finis

Elle consiste à diviser la structure en éléments de forme simple liés entre eux par une série de points appelés nœuds. Ces éléments restent des corps déformables continus, mais leur géométrie plus simple permet de les étudier aisément par la mécanique des milieux continus. Dans chacun de ceux-ci une approximation est faite sur les deux à la fois. Chaque approximation prend le plus souvent la forme d'un polynôme dépendant d'un certain nombre de paramètres qui peuvent être interprétés comme des contraintes ou des déplacements généralisées, inconnus de la discrétisation.

Il faut cependant remarquer que l'approximation envisagée dans la méthode des éléments finis est de nature physique. En effet une représentation discrète est substituée au milieu continu. Ceci distingue la méthode des éléments finis de celle des différences finies dans laquelle les équations exactes de la structure réelle sont résolues par des procédés mathématiques approchés.

Le principe de la méthode des éléments finis du type déplacement, c'est-à-dire la discrétisation du champ des déplacements, sont maintenant bien connus, aussi ils ne sont pas détaillés dans cette étude. Cependant il apparaît intéressant d'expliquer les choix effectués et de définir les éléments utilisés.

4.7.3 Choix de l'élément de base de cette étude

Notre étude est limitée aux problèmes à contraintes planes de telle sorte que le déplacement d'un point perpendiculairement au plan de la structure étudiée peut être négligé. Le déplacement en un point est donc confondu avec celui du point du plan moyen le plus proche. En d'autres termes cela revient à supposer un déplacement uniforme selon l'épaisseur. De même les contraintes et les déformations sont supposées constantes selon l'épaisseur de l'élément. Celui-ci

est donc géométriquement défini par une figure plane et il s'offre à nous de nombreuses possibilités suivant le degré de l'expression polynomiale du champ des déplacements.

4.7.3.1. Éléments linéaires

La solution la plus simple est constituée par des éléments triangulaires à trois nœuds (figure 4.5). Le champ de déplacement est effectivement linéaire et par conséquent, les champs des déformations et des contraintes sont à variations constantes.

Cette dernière propriété facilite à priori la détermination de la rigidité d'un élément dans une analyse élasto plastique car la matrice $[D^{ep}]$, si le comportement élasto plastique est recommandé pour une telle analyse, est alors constante sur l'élément ce qui permet une intégration formelle de la matrice de rigidité. Cependant les défauts de cet élément sont bien connus. Il est rigide, c'est-à-dire qu'il conduit à des solutions qui surestiment trop la véritable rigidité et la convergence n'est acceptable qu'avec un grand nombre d'éléments.

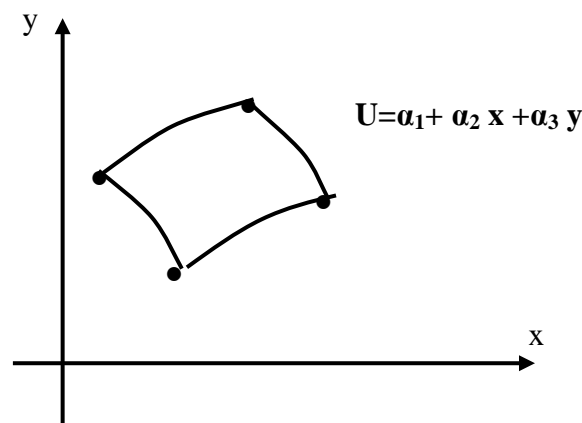


Figure4.5 : Élément à quatre nœuds

Son champ de contrainte étant constant, il est difficile de mettre en évidence des concentrations de contraintes ou de représenter un champ de contraintes diversifié. Enfin, il ne permet de définir des frontières courbes que par segments de droite, ce qui peut obliger à utiliser un grand nombre d'éléments pour serrer au plus près la géométrie.

Le deuxième élément simple est le rectangle (figure 4.6) qui doit être éliminé dans le cadre de cette étude car il ne permet pas de mailler n'importe quelle géométrie.

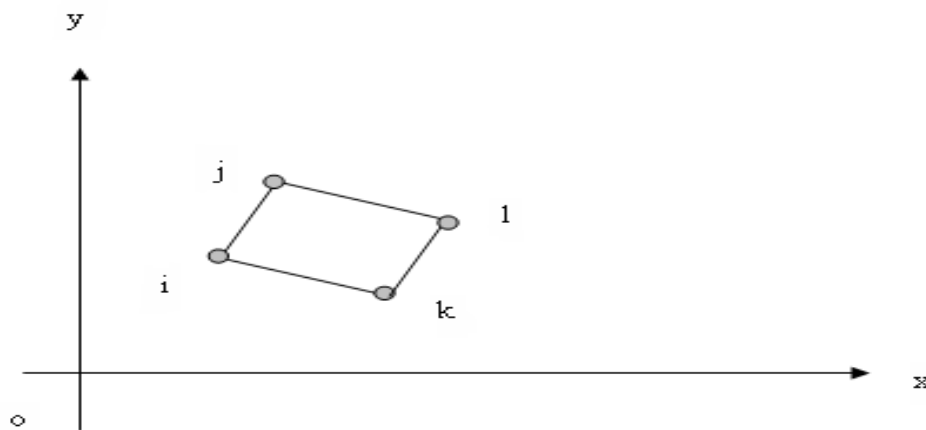


Figure 4.6 : Élément rectangulaire

4.7.3.2 Éléments sur compatibles

Deux voies sont offertes pour définir des éléments ayant des propriétés plus fines que les éléments linéaires, les éléments sur compatibles d'une part, les éléments à nœuds intermédiaires d'autres part. Les éléments sur compatibles sont des éléments pour lesquels une continuité, excessive, au moins locale du champ de déplacement est assurée, ce qui n'est pas strictement nécessaire du point de vue de la théorie de l'élasticité qui n'impose que la continuité des déplacements et non celle de leurs dérivées.

La méthode des éléments sur compatibles consiste à ajouter aux inconnues aux nœuds $\{u; v\}$, leurs dérivées $\{u_x'; u_y'; v_x'; v_y'\}$ et éventuellement $\{u_{xx}'; u_{xy}'; u_{yy}'; v_{xx}'; v_{xy}'; v_{yy}'\}$. Ce nombre important d'inconnues permet de définir un champ de déplacement de degré élevé dans l'élément. La mise en œuvre d'une telle technique s'avère délicate et d'utilisation coûteuse comme cela a été montré dans un précédent travail. D'autre part ils ne sont pas strictement corrects du point de vue mathématique. En conséquence ils ne sont pas retenus dans cette étude (éléments iso paramétriques).

4.7.3.3. Éléments à nœuds intermédiaires

Il reste donc la possibilité d'utiliser les éléments triangles ou rectangles en incluant des nœuds intermédiaires sur les côtés. Les diverses dispositions sont nombreuses (figure 4.7).

Le champ de déplacement de tels éléments est au moins quadratique. Ils sont strictement conformes. Ces éléments peuvent être en outre construits suivant la technique des éléments iso paramétriques. A partir d'un élément parent, un élément dérivé est obtenu par une transformation géométrique dans le plan, ce qui nous intéresse ici, ou dans l'espace.

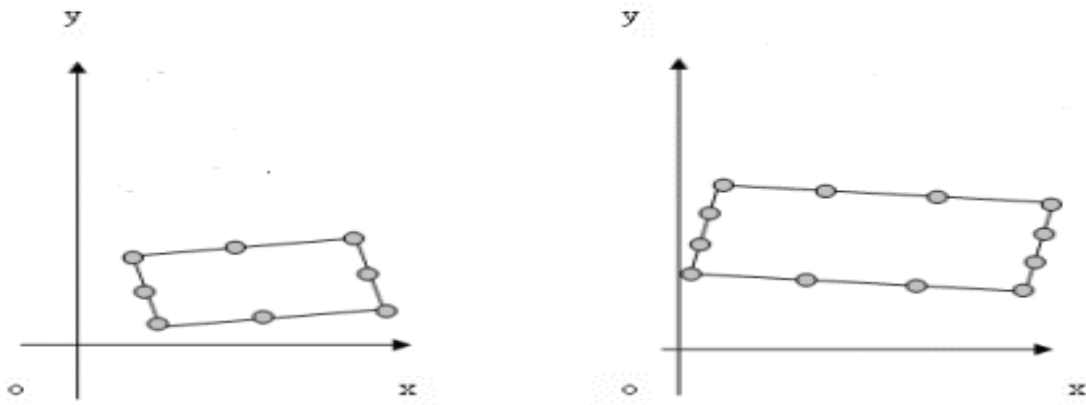


Figure 4.7 : Élément à nœuds intermédiaires

Les côtés de l'élément suivent alors une courbe définie par les positions des nœuds du côté considéré (figure 4.8). L'intégration de la matrice de rigidité doit être effectuée numériquement et il n'y a donc pas de difficultés à ce que la rigidité $[D^{ep}]$ varie d'un point d'intégration à un autre dans le même élément.

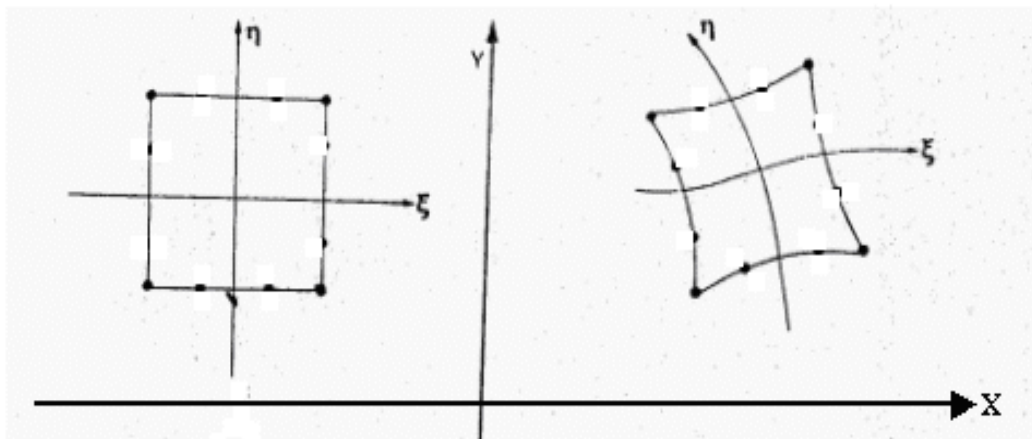


Figure 4.8 : Élément rectangulaire à 4 nœuds.

Parmi les nombreuses possibilités, nous retenons dans cette étude les conclusions suivantes : En augmentant le nombre des nœuds, la qualité des résultats est améliorée mais les difficultés de calcul ainsi que le coût croissent aussi rapidement. Il semble que pour les problèmes linéaires, c'est l'élément quadratique qui conduit aux meilleurs résultats et nous l'utiliserons bien qu'il ne soit pas possible de conclure que le meilleur résultat linéaire soit aussi le meilleur résultat non linéaire.

4.7.3.4. Éléments iso paramétriques

Les éléments finis iso paramétriques ont été introduits en 1968 par Ergatoudis, Irons et Zienkiewicz. Nous venons de montrer dans les paragraphes précédents que le découpage d'une structure à l'aide d'éléments à cotés rectilignes utilisés en nombre réduit, ne permet pas de

représenter correctement les contours géométriques réels. L'introduction d'éléments à côtés courbes, appelés "éléments distordus", est particulièrement intéressante. Ces éléments sont obtenus par anamorphose d'un élément de forme simple appelé "élément parent" ou "père". Les propriétés de cet élément distordu sont établies à partir de ses propriétés mécaniques, (module d'élasticité et fonction de forme) et de la transformation géométrique liant les éléments parent et distordu. La figure 4.9 montre une anamorphose d'éléments parents carré et triangulaire. Ceux-ci sont rapportés à un système de coordonnées locales, barycentriques (ξ, η) pour le carré, aréolaire t_1, t_2, t_3 pour le triangle.

Nous venons de voir que la transformation effectuée sur le champ de déplacement peut aussi être appliquée à la géométrie. Les deux transformations ne sont pas forcément définies par les mêmes fonctions aussi faut-il préciser certaines notions.

Considérons un élément dont la forme doit être définie par n_1 points nodaux de coordonnées $x_i, y_i, i = 1, \dots, n_1$. (Figure 4.10).

($n_1 = 4 - 8 - 12$ figure 4.10).

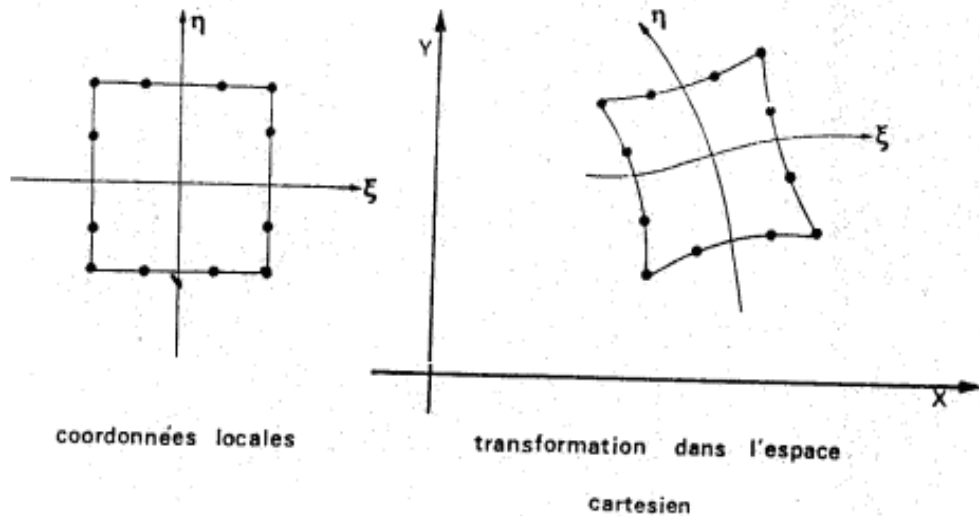


Figure 4.9 : coordonnées locales, transformations dans l'espace cartésien.

Soit N^i la fonction définissant la transformation sur la géométrie. Les relations permettant d'établir le lien entre un point de coordonnées x, y de l'élément distordu et le point correspondant de coordonnées ξ, η de l'élément parent sont les suivantes:

$$X = \sum_{i=1}^{n_1} N_i^i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (4.3)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n_1} N_i'(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (4.4)$$

Où N_i' sont les fonctions relatives au nœud i pour définir la géométrie.

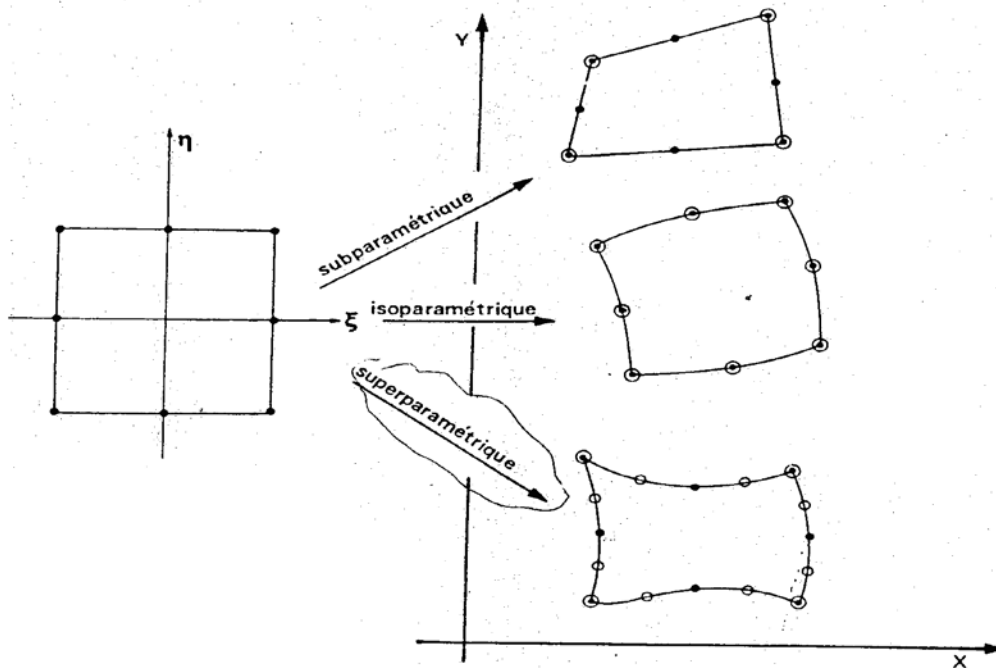
Supposons maintenant que, au sein de l'élément distordu. La fonction N définissant le champ de déplacement u , soit déterminée univoquement par des valeurs prises en n_2 points nodaux (figure 4.10). Nous avons :

$$u = \sum_{i=1}^{n_2} N_i \cdot u_i \quad (4.5)$$

u : champ de déplacement

u_i : déplacement au nœud i

N_i : fonction de forme relative au nœud i pour déterminer u .



● nœuds servant à discrétiser le champ de déplacement u

○ nœuds servant à définir la géométrie

Figure 4.10 : transformations dans l'espace cartésien en trois formes.

- Si $n_1 < n_2$ l'élément est dit « sous paramétrique ». Il faut moins de nœuds pour définir le champ de déplacement.
- Si $n_1 = n_2$ l'élément est dit « iso paramétrique ». Les mêmes nœuds sont utilisés pour définir la géométrie et le champ de déplacement.

- Si $n_1 > n_2$ l'élément est dit « super paramétrique ». Il faut plus de nœuds pour définir la géométrie que pour définir le champ de déplacement.

Les éléments distordus doivent aussi satisfaire à certains critères afin que la convergence soit assurée. Il s'agit de la contiguïté et de la conformité. En effet deux éléments adjacents sont contigus s'ils sont engendrés à partir d'éléments parents dans lesquels les fonctions de forme sont continues lorsqu'on passe d'un élément à son voisin. D'autre part la conformité doit être assurée. Si les fonctions définissant le champ de déplacement assument sa continuité dans l'élément parent, alors celle-ci sera réalisée dans l'élément distordu. Enfin l'élément doit pouvoir subir des déplacements d'ensemble. C'est-à-dire des translations ou des rotations sans engendrer de déformations. De même il doit pouvoir représenter au minimum un champ de déformations constant. Ceci est réalisé si la relation suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{n_2} N_i = 1 \quad (4.6)$$

4.8 Intégration numérique

Le calcul de la matrice de rigidité ou des charges équivalentes est rarement faisable par une méthode analytique ou directe. Il est toujours dans ces cas d'évaluer les formes intégrales qui doivent être calculées sur le domaine de l'élément distordu. Bien que ramenée à celui de l'élément parent la fonction à intégrer est devenue beaucoup plus compliquée du fait de la présence de l'inverse du Jacobien de la transformation. La matrice jacobéenne n'est en général pas constante et elle est difficilement calculable. Cette difficulté est levée par l'utilisation de l'intégration numérique approchée.

Celle-ci consiste à employer le calcul exact par une somme pondérée de valeurs de l'intégrand évaluées en diverses abscisse. Par exemple, au calcul de l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) \cdot d\xi \quad (4.7)$$

Cette expression peut être évaluée sous forme de la somme suivante :

$$I = \sum_{i=1}^n H_i \cdot f(\xi_i) \quad (4.8)$$

Où H_i est un poids affecté au point d'intégration i , $f(\xi_i)$ est la valeur prise par la fonction à intégrer au point d'intégration i d'abscisse ξ_i .

Deux techniques assez semblables sont possibles, la méthode de Gauss-Radau et celle de Hammer. Dans les deux cas, des tables donnant les valeurs des poids H_i ainsi que les abscisses des points ξ_i ont été établies (Figures 4.11, 4.12 et 4.13).

Dans ce concept, deux questions doivent être posées:

Quel est le nombre minimum de points d'intégration et quel en est l'optimum? En effet il est logique de chercher l'influence de ce nombre de points sur la vitesse de convergence des résultats de manière à obtenir la meilleure précision. Théoriquement il apparaît que le nombre des points doit être tel qu'il permet l'intégration exacte du volume de l'élément. Dans les travaux, il est montré quelles étaient les solutions à retenir.

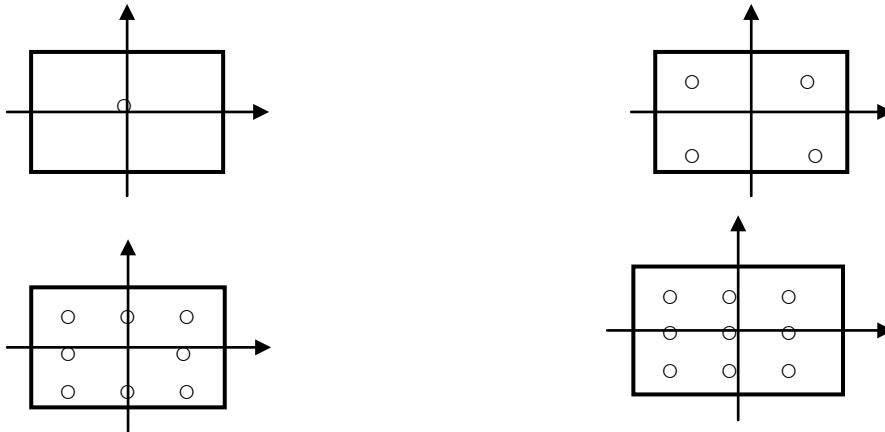


Figure 4.11 Méthode de GAUSS-RADAU- points d'intégration pour un rectangle.

$$n=2, \quad I = \int_0^1 \int_0^1 f(t_1, t_2, t_3) dt_1 . dt_2 \tag{4.9}$$

$$n=3, \quad I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Wf(t_1, t_2, t_3) \tag{4.10}$$

Nombre de points d'intégration dans chaque direc- tion	AJ (J)	Poids	AI (I)	AS (I)
	J = 1, n	H (J) J = 1, n	I = 1, n	I = 1, n
n = 1	0.5	1.0	0.3333333333 (1.0)	0.75 (0.25)
n = 2	0.2113248654 0.7886751346	0.5 0.5	0.1550510257 0.6449489743 (1.0)	0.3764030627 0.5124858262 (0.1111111111)
n = 3	0.1127016654 0.5 0.8872983346	0.2777777778 0.4444444444 0.2777777778	0.0885879595 0.4094668644 0.7876594618 (1.0)	0.2204622112 0.3881934688 0.3288443200 (0.0625)
n = 4	0.0694318442 0.3300094782 0.6699905218 0.9305681558	0.1739274226 0.3260725774 0.3260725774 0.1739274226	0.0571041961 0.2768430136 0.5835904324 0.8602401357 (1.0)	0.1437135608 0.2813560151 0.3118265230 0.2231039011 (0.04)
n = 5	0.0469100770 0.2307653449 0.5 0.7692346551 0.9530899230	0.1184634425 0.2393143353 0.2844444444 0.2393143353 0.1184634425	0.0398098571 0.1980134179 0.4379748102 0.6954642734 0.9014649142 (1.0)	0.1007941926 0.2084506672 0.2604633916 0.2426935942 0.1598203766 (0.277777778)

Figure 4.12 : Méthode de GAUSS-RADAU- constantes d'intégration.

$$I = \int_{(S)} f(t_1, t_2, t_3) \cdot dS = \sum_{i=1}^m W_K(i) \cdot f(t_1(i), t_2(i), t_3(i)) \quad (4.11)$$

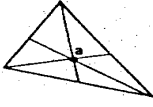
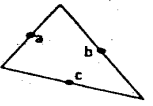
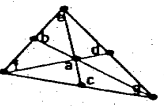
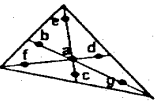
Ordre	Figure	Erreur	Points et coordonnées triangulaires	Poids $\frac{1}{2} W_k$
Linéaire $m = 1$		$R = O(h^2)$	a $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratique $m = 3$		$R = O(h^3)$	a $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ b $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ c $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Cubique $m = 7$		$R = O(h^4)$	a $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ b $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ c $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ d $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ e $1, 0, 0$ f $0, 1, 0$ g $0, 0, 1$	$\frac{27}{60}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{3}{60}$
Quintique $m = 7$		$R = O(h^6)$	a $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ b $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ c $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ d $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ e $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ f $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ g $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$ avec $\alpha_1 = 0.05961587$ $\beta_1 = 0.47014206$ $\alpha_2 = 0.79742699$ $\beta_2 = 0.10128651$	0.225 0.13239415 0.12593918

Figure 4.13 : Méthode de HAMMER- intégration pour les triangles.

4.8.1 Éléments iso paramétriques de membrane

L'élément ISOM est un élément fini plan à six nœuds. Il ne peut subir des déplacements et des efforts que dans son plan. Il permet donc de mailler des structures planes soumises à un état plan de déformation ou de contrainte. Sa géométrie de base est le triangle et les points nœuds sont placés aux sommets et aux milieux des côtés (figure 4.14)

La technique des éléments iso paramétriques permet de passer de cet élément "parent" à l'élément déformé (Figure 4.15). C'est alors un triangle curviligne à côtés paraboliques.

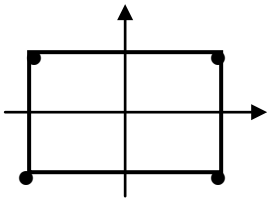


Figure 4.14 : Élément linéaire

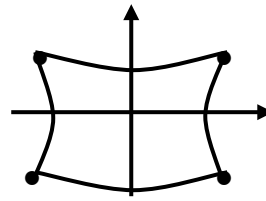


Figure 4.15 : Élément courbé

4.8.2 Champ de déplacement de l'élément "parent"

Le déplacement d'un point M quelconque, appartenant au plan moyen de l'élément s'effectue dans ce plan. Il est repéré par ses deux coordonnées $\{u, v\}$ (Figure 4.16). Le déplacement normal d'un point n'appartenant pas au plan moyen est négligé dans l'hypothèse des contraintes planes et il est nul dans celle des déformations planes. Le degré de liberté d'un point est égal à deux.

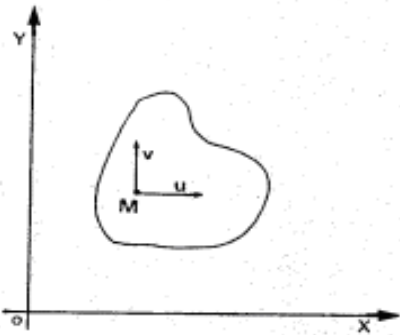


Figure 4.16 : Déplacement en M

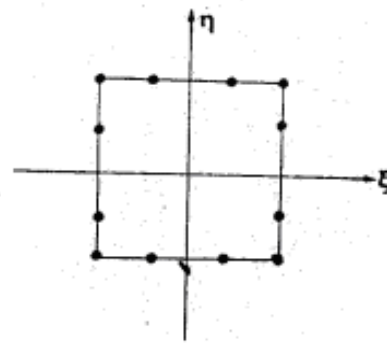


Figure 4.17 : Noeuds

Les six valeurs du déplacement u (ou v) aux six nœuds de l'élément imposent une surface d'interpolation à six coefficients. En coordonnées cartésiennes il vient :

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Le champ de déplacement est donc quadratique. Le long d'un côté de l'élément, l'interpolation est parabolique. Elle est définie par trois valeurs de u ou de v , aux trois nœuds correspondant, elle est donc unique. L'élément est bien conforme. En utilisant les coordonnées aréolaires (ou triangulaires) t_1, t_2, t_3 du point M, l'expression de u s'écrit:

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Les différentes fonctions $N_{i,i=1,6}$ sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} N_1 &= (2.t_1 - 1).t_1 \\ N_2 &= (2.t_2 - 1).t_2 \\ N_3 &= (2.t_3 - 1).t_3 \\ N_4 &= 4.t_1.t_2 \\ N_5 &= 4.t_2.t_3 \\ N_6 &= 4.t_1.t_3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

En effet si le point M est au nœud 1 (figure 4.17) alors $t_1 = 1$ et $t_2 = t_3 = 0$ par conséquent $u = u_1$, de même si le point M est au nœud 4, $t_3 = 0$, $t_1 = t_2 = 0,5$ et $u = u_4$.

4.8.3 Transformation iso paramétrique des coordonnées

Au point M de coordonnées curvilignes triangulaire (t_1 , t_2 , t_3) la transformation fait correspondre $M'(x, y)$ (figure 4.18).

Les couples (x_i, y_i) sont les coordonnées des nœuds de l'élément. Sous forme matricielle, la transformation s'écrit:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ avec } [N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \text{ et } i = (1, \dots, 6). \quad (4.15)$$

Les fonctions N_i sont définies dans le" paragraphe précédent. Il faut remarquer que la transformation est bien iso paramétrique. En effet les mêmes fonctions et les mêmes points servent à définir la géométrie et le champ de déplacement.

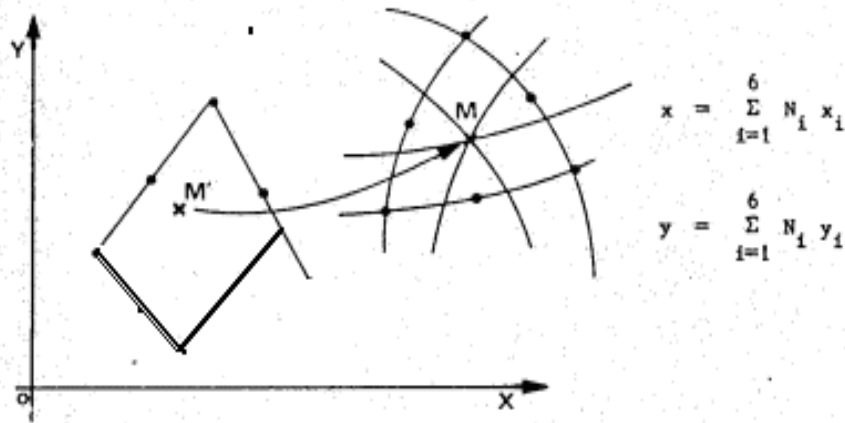


Figure 4.18 : Transformation des coordonnées.

4.8.4 Déformations et contraintes

En négligeant les déformations transversales, le vecteur déformation est défini comme suit :

$$[\varepsilon]^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}] \quad (4.16)$$

De même en négligeant les contraintes transversales, le vecteur contrainte est défini par:

$$[\sigma]^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (4.17)$$

D'une manière générale, la relation contrainte-déformation s'écrit:

$$[\sigma]^T = [D][\varepsilon]$$

$$\text{ou.....}[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{sym} & & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Les six coefficients d_{11} , d_{12} , d_{13} , d_{22} , d_{23} , d_{33} sont les données caractéristiques d'un matériau anisotrope. Dans le cas particulier d'un matériau isotrope soumis à un état de contrainte plane:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Avec E : module d'élasticité longitudinale et ν est le coefficient de Poisson.

Les champs de déplacements étant quadratique, les déformations et les contraintes varient linéairement dans l'élément, ce qui permet de mettre en évidence des concentrations de contraintes.

4.8.5 Calcul de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité est donnée par la relation suivante:

$$[K_{E,n}] = \int_{(V_n)} [B_n]^T \cdot [D][B_n] dV_n \quad (4.20)$$

Où $[K_{E,n}]$ est la matrice de rigidité de l'élément, (V_n) est le volume de l'élément n et $[B_n]$ est la matrice reliant les déformations au déplacement des nœuds de l'élément

4.8.5.1 Intégration numérique

Les cotés de l'élément étant curvilignes, le calcul de la matrice $[K_{E,n}]$ doit être effectué numériquement. C'est la méthode de Hammer qui est retenue. Sur la surface (S_n) de l'élément d'épaisseur e, l'expression de $[K_{E,n}]$ devient:

$$[K_{E,n}] = \int_{(S_n)} [B_n]^T \cdot [D][B_n] e dx dy \quad (4.21)$$

L'épaisseur e en un point de l'élément est connue à partir des épaisseurs e_i aux points nodaux par interpolation.

$$e = \sum_{i=1}^6 N_i \cdot e_i \quad (4.22)$$

En coordonnées curvilignes triangulaires, il vient:

$$dx \cdot dy = \det[J] dt_1 \cdot dt_2 \quad (4.23)$$

D'où :

$$[K_{E,n}] = \int_{(S_n)} ([B_n]^T \cdot [D][B_n] e \cdot \det[J]) dt_1 \cdot dt_2 \quad (4.24)$$

$[J]$: est la matrice jacobéenne, $\det(J)$ est son déterminant, t_1 et t_2 sont choisies comme coordonnées curviligne indépendantes. L'intégration numérique s'écrit en sommant les termes de l'intégration de l'équation de k précédente calculés aux m points de HAMMER choisis et affectés du poids

$[J]$ Correspondant :

$$[K_{E,n}] = \sum_{j=1}^m [B_n]^T \cdot [D][B_n] e \cdot H_j \cdot \det[J] \quad (4.25)$$

Plusieurs schémas d'intégration sont possibles selon l'ordre de l'erreur. Les cas 3, 2et 4 du tableau de la figure 4.13 sont retenus.

4.8.5.2 Calcul de la matrice Jacobéenne (J)

La matrice Jacobéenne (J) est la matrice des dérivées partielles de la transformation.

Si ξ et η sont choisis comme variables indépendantes:

$$\begin{aligned}\xi &= t_1 \\ \eta &= t_2 \\ 1 - \xi - \eta &= t_3\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$(J) \text{ a pour expression: } [J] = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix}$$

En revenant aux coordonnées triangulaires:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt_1} - \frac{dx}{dt_3} & \frac{dy}{dt_1} - \frac{dy}{dt_3} \\ \frac{dx}{dt_2} - \frac{dx}{dt_3} & \frac{dy}{dt_2} - \frac{dy}{dt_3} \end{bmatrix}\tag{4.27}$$

Soit en développant:

$$[J] = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \frac{dN_i}{dt_1} - \frac{dN_i}{dt_3} \\ \frac{dN_i}{dt_2} - \frac{dN_i}{dt_3} \end{array} \right]_{i=1,6} & \dots\dots\dots \end{bmatrix}\tag{4.28}$$

Les dérivées partielles définies par l'expression de (J) précédente sont facilement calculables à partir des expressions des fonctions de forme données au paragraphe 4.8.2.

4.8.5.3 Calcul de la matrice (Bn)

Dans l'hypothèse de la linéarité externe que nous avons admise, la relation déformation-déplacement s'écrit:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\tag{4.29}$$

Soit en introduisant les fonctions de forme:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}_{i=1,6} \dots \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

D'où:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^6 \frac{dN_i}{dx} \cdot u_i \\ \varepsilon_y &= \frac{dv}{dy} = \sum_{i=1}^6 \frac{dN_i}{dy} \cdot v_i \\ \gamma_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{dN_i}{dy} \cdot u_i + \frac{dN_i}{dx} \cdot v_i \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sous forme Matricielle, les expressions ci-dessus s'écrivent :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \frac{dN_i}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dy} \end{array} \right]_{i=1,6} & \dots & \left. \begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Soit :

$$\{\varepsilon\} = [B_n] \{U_{E,n}\} \quad (4.33)$$

La matrice $[B_n]$ est donc définie de la manière suivante:

$$[\varepsilon] = \left[\dots \left[\begin{array}{cc} \frac{dN_i}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dy} \end{array} \right]_{i=1,6} \dots \right] \quad (4.34)$$

Il suffit donc de calculer les dérivées partielles des fonctions de forme N_i . Il vient:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dy} \end{array} \right\} = [J]^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{dN_i}{d\xi} \\ \frac{dN_i}{d\eta} \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

Soit en développant:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dy} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dt_1} - \frac{dN_i}{dt_3} \\ \frac{dN_i}{dt_2} - \frac{dN_i}{dt_3} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

Tous les termes de l'intégrale $[K_{E,n}] = \int_{(V_n)} [B_N]^T \cdot [D] [B_n] dV_n$ peuvent donc être calculés

numériquement ainsi que la matrice de rigidité.

4.9 Élément de barre a trois nœuds

4.9.1 But

Pour introduire les parties de structure à géométrie linéique, il faut utiliser un élément ayant les mêmes degrés de liberté que l'élément surfacique, soit u et v .

Afin que la continuité des déplacements entre deux types d'éléments soit assurée, il est nécessaire que l'élément de barre ait aussi un champ de déplacement quadratique, donc définis par trois nœuds.

Dans le repère d'axes local (x', y') (figure 4.19), le déplacement u' prend la forme suivante:

$$u' = [1; x'; x'^2] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Cet élément ne peut subir que des efforts selon son axe x' et sa rigidité selon y' doit être nulle.

Cet élément ayant un champ de déformation, ou de contrainte, linéaire, il est évident qu'il doit être réservé à des usages particuliers. Il ne peut, par exemple, absolument pas servir à calculer des réseaux de barres.

Dans notre étude Il sera réservé à la modélisation des armatures du béton armé.

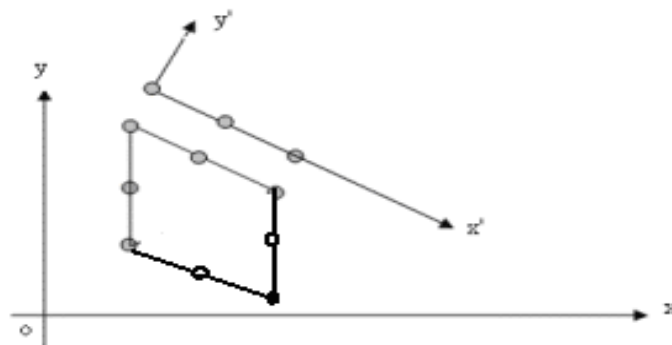


Figure 4.19 : Eléments linéiques et surfaciques.

4.9.2 Calcul de la matrice de rigidité

4.9.2.1 Potentiel interne

Le champ de déplacement est:

$$u' = \begin{bmatrix} 1; x'; x'^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Avec:

$$\begin{bmatrix} 1; x'; x'^2 \end{bmatrix} : \text{Fonctions polynomiales, } \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} : \text{degrés généralisés.}$$

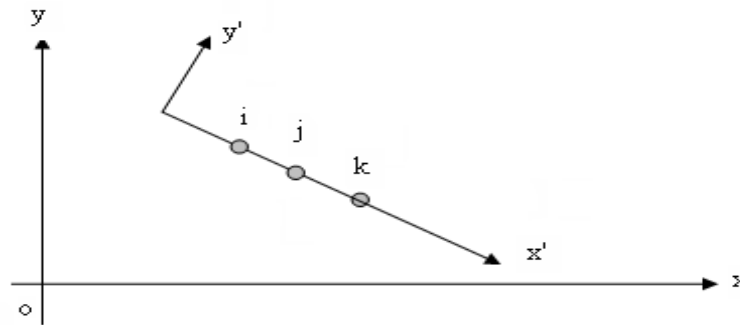


Figure 4.20 : Eléments de barre à 3 nœuds.

Les coefficients du polynôme sont obtenus en écrivant les relations aux trois nœuds de l'élément.

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \\ u'_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x'_i & x'^2_i \\ 1 & x'_j & x'^2_j \\ 1 & x'_k & x'^2_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Soit en inversant cette relation:

$$\{\alpha_n\} = [C_n]^{-1} \cdot \{U_{E,n}\} \quad (4.40)$$

D'où l'expression de la matrice :

$$[C_n]^{-1} = \begin{bmatrix} x'_j \cdot x'_k - x'_k \cdot x'_j & -(x'_i \cdot x'_k - x'_k \cdot x'_i) & x'_i \cdot x'_j - x'_j \cdot x'_i \\ -(x'_k - x'_j) & x'^2_k - x'^2_i & -(x'^2_j - x'^2_i) \\ x'_k - x'_j & -(x'_k - x'_i) & x'_j - x'_i \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Avec :

$$\Delta = x'^2_i \cdot (x'_k - x'_j) + x'^2_j \cdot (x'_i - x'_k) + x'^2_k \cdot (x'_j - x'_i) \quad (4.42)$$

Le déplacement u' s'écrit:

$$u' = \begin{bmatrix} 1; x'; x'^2 \end{bmatrix} [C_n]^{-1} \cdot \{U'_{E,n}\} \quad (4.43)$$

La déformation unitaire ε'_x est obtenue par déviation:

$$\varepsilon'_x = \frac{du'}{dx'} = [0; 1; 2x'] [C_n]^{-1} \{U'_{E,n}\} \quad (4.44)$$

Le potentiel interne s'écrit:

$$J_n = \frac{1}{2} \int_{(V_n)} \varepsilon_x'^T \cdot \sigma_x \cdot dV_n \quad (4.45)$$

Si: S_x , est la section de la barre à l'abscisse x' et suivant l'hypothèse de Hooke, E le module d'élasticité:

$$J_n = \frac{1}{2} \int_{x'_i}^{x'_k} \varepsilon_x'^T \cdot E \cdot \varepsilon_x' \cdot dx' \quad (\text{avec : } \sigma = E \cdot \varepsilon_x' \text{ et } dV_n = S_{x'} \cdot dx') \quad (4.46)$$

Soit:

$$J_n = \frac{1}{2} \int_{x'_i}^{x'_k} \{u'_{E,n}\}^T [C_n]^{-1.T} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x' \end{bmatrix} \cdot E \cdot [1 \ 0 \ 2x'] [C_n]^{-1} \cdot \{u'_{E,n}\} \cdot S_{x'} \cdot dx' \quad (4.47)$$

Si l'est supposé que le module d'élasticité E est constant le long de la barre ainsi que la section $S = S_{x'}$, il vient:

$$J_n = \frac{1}{2} \cdot E \cdot S \cdot \{u'_{E,n}\}^T [C_n]^{-1.T} \cdot \left\{ \int_{x'_i}^{x'_k} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x' \end{bmatrix} \cdot [0 \ 1 \ 2x'] \cdot dx' \right\} \cdot [C_n]^{-1} \cdot \{u'_{E,n}\} \quad (4.48)$$

4.9.2.2 Matrice de rigidité élémentaire

Le potentiel interne J_n peut se mettre sous la forme suivante :

$$J_n = \frac{1}{2} \cdot \{u'_{E,n}\}^T \cdot [K'_{E,n}] \cdot \{u'_{E,n}\} \quad (4.49)$$

L'expression dans laquelle $[K'_{E,n}]$ est la matrice de rigidité de l'élément de barre n , exprimée dans son repère local x', y' .

$$[K'_{E,n}] = E \cdot S \cdot [C_n]^{-1.T} \cdot \left\{ \int_{x'_i}^{x'_k} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x' \end{bmatrix} \cdot [0 \ 1 \ 2x'] \cdot dx' \right\} \cdot [C_n]^{-1} \quad (4.50)$$

Soit tout calcul fait :

$$[K'_{E,n}] = -E.S.[C_n]^{-IT} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x'_i - x'_k & x_i'^2 - x_k'^2 \\ 0 & x_i'^2 - x_k'^2 & \frac{4}{3} \cdot (x_i'^3 - x_k'^3) \end{bmatrix} \cdot [C_n]^{-1} \quad (4.51)$$

4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, on dispose d'une bibliothèque d'éléments. L'utilisateur ordinaire n'a donc plus à s'en préoccuper. L'objectif n'était que de faire comprendre les éléments sur la quelle se base cette méthode, et surtout de permettre à l'utilisateur d'un logiciel de les choisir en connaissance de cause.

Des écarts important entre la modélisation et la réalité peuvent être mis en évidence sur des incertitudes quant à la modélisation de liaisons. Un intérêt majeur et l'une des difficultés pratiques de l'utilisation des codes éléments finis résident dans la traduction de la liaison dans des codes éléments finis. En effet, les liaisons parfaites ou pas doivent être traduites en liaisons équivalentes dans la plupart des codes qui n'acceptent que des blocages aux nœuds du maillage. La création de repères locaux est souvent nécessaire pour projeter les degrés de liberté dans une base adéquate. Ce n'est pas sans poser de grosses difficultés.

Pour les forces la démarche est similaire : souvent la force de liaison est exprimée au centre de la liaison qui n'existe pas physiquement. Il convient donc de créer des efforts équivalents. L'autre problème est l'implantation des moments. En effet les moments ne « travaillent » pas dans le champ de translation du point d'application du moment. Il convient donc de traduire un moment en champ de forces élémentaires responsable du moment.

Chapitre 5

VALIDATION NUMÉRIQUE

5.1. Introduction

Le but de ce chapitre consiste à valider l'approche proposée et qui a déjà été exposée au chapitre précédent (chapitre 4). Pour atteindre les résultats voulus, nous avons apporté une extension très importante à un programme numérique déjà développé au sein du groupe de recherche, intitulé "Modélisation Numérique du Comportement Non Linéaire des Structures en Béton Armé". Cette extension consiste en incorporation de quelques sous-programmes (subroutines) qui permettent l'introduction du comportement des armatures perpendiculaires aux armatures longitudinales dans les structures nécessitant deux nappes de ferrailage- cas des voiles par exemple.

Dans le même contexte, cet objectif peut aussi servir le rôle des armatures transversales aux cas de poutres en béton armé. L'analyse des structures présentant une forte non linéarité matérielle et ou géométrique et qui ne peut être établie qu'après le recours à une des méthodes numériques. Dans cette recherche, la méthode des éléments finis est choisie comme une méthode numérique pour analyser explicitement la réponse des voiles en béton armé.

L'approche décrite dans les chapitres précédents peut effectivement résoudre les problèmes du comportement inélastiques des voiles en béton armé. Il est très important de constater qu'il y a deux catégories d'approximation qui ont été introduites dans cette analyse. Il s'agit d'une idéalisation du comportement matériel et d'un processus incrémental et itératif. Dans cette section, les résultats obtenus par la présente simulation sont illustrés dans la section 5.4.

En plus, les résultats obtenus sont largement discutés et comparés par rapport à d'autres résultats numériques d'une part et par rapport aux données expérimentales disponibles d'autre part. La démarche proposée a été appliquée à l'analyse des voiles en béton armé longitudinalement et transversalement armées en vu d'évaluer la capacité portante des voiles en béton armé, d'autre part, elle permet de suivre leurs réponses mécaniques ou leurs comportements sous un chargement monotone.

Avant d'établir les résultats obtenus par cette simulation, nous avons testé la performance du programme développé à l'analyse du comportement à ce type de structure. Dans ce cadre, nous avons choisi des voiles testés par Cervenka (1970).

L'intention de ce travail est de fournir les données nécessaires du comportement réel des voiles en béton armé. Ces données doivent être comparées avec les résultats analytiques ou doivent être approchées avec les données expérimentales. Les effets suivants ont principalement été étudiés :

1. La réponse globale charge déplacement des voiles.
2. L'évolution et la propagation des fissures.
3. Les mécanismes de rupture.

5.2 Description des voiles testés

Les voiles testés sont orthogonalement renforcés et ayant des dimensions en plan de 762* 762 mm et une épaisseur de 50.80 mm ou 76.20 mm. Deux voiles ont été combinés pour former une poutre (Figure 5-1), cet arrangement permet de tester aisément les voiles comme une poutre simplement appuyée avec une charge appliquée à son milieu. Cependant, la condition de symétrie du voile conduit à l'analyse de chaque panneau indépendamment. Les forces concentrées aux niveaux des supports et au point d'application sont transmises aux voiles par le biais de nervures comme la montre la figure (5-2).

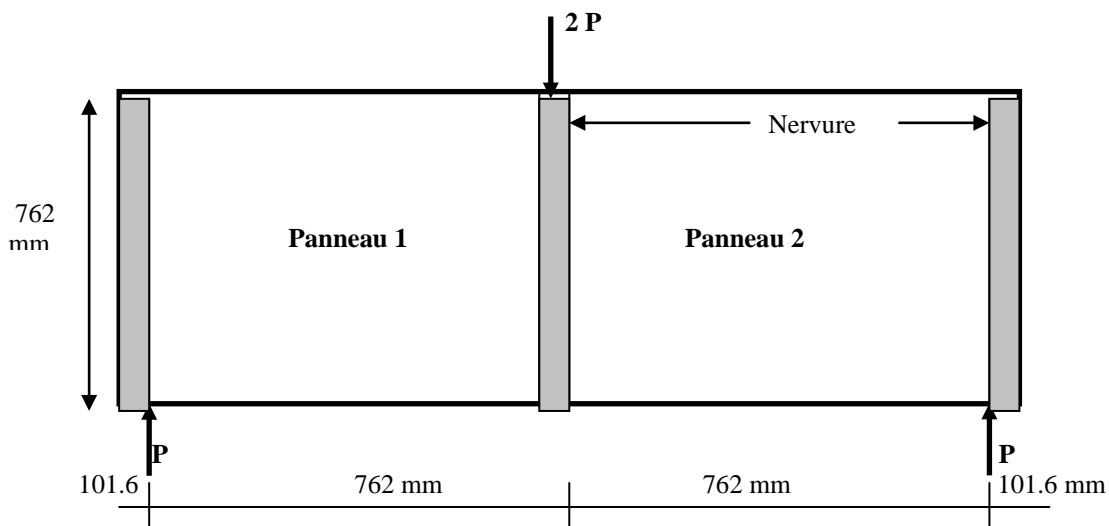


Figure 5-1 Description générale du voile étudié.

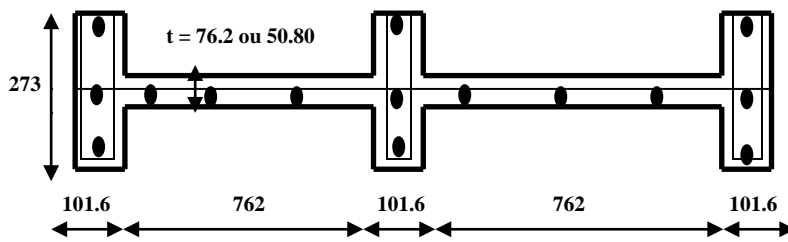


Figure 5-2 Détail de renforcement du voile.

Expérimentalement, ces nervures ont pour rôle d'assurer la stabilité latérale des échantillons pendant le test. Le voile est géométriquement modélisé par des voiles désignés par V1, V2, V3 et V4. Chaque échantillon est composé de deux voiles carrés, par exemple, l'échantillon V1 se divise en deux voiles V1-1 et V1-2. Les caractéristiques géométriques et de renforcement ont été regroupées dans le tableau (5-1).

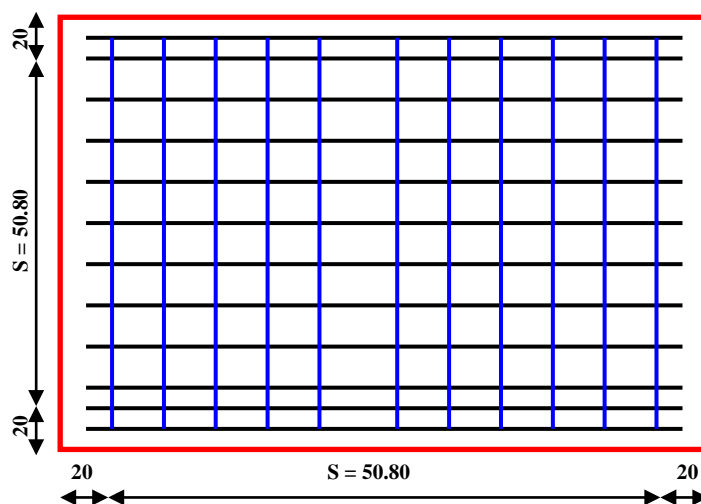
S_x , S_y sont respectivement les espacements des barres longitudinales et transversales. Et ρ_x , ρ_y sont respectivement les pourcentages des renforcements suivant les directions longitudinales et transversales.

Voile	Epaisseur	Aciers de renforcement et espacement				
		Type	S_x	ρ_x	S_y	ρ_y
V1-1	50.8 mm	T4	38.10	0.00576	38.10	0.00576
V1-2	50.8 mm	T4	38.10	0.00576	38.10	0.00576
V2-1	76.2 mm	T6	101.6	0.00916	101.6	0.00916
V2-2	76.2 mm	T6	50.8	0.01836	50.8	0.00916
V3-1	50.8 mm	T10	50.8	0.00785	50.8	0.00785
V3-2	50.8 mm	T10	50.8	0.00785	-	-
V4-1	76.2 mm	T6	76.2	0.0122	76.2	0.0122
V4-2	76.2 mm	T6	76.2	0.0122	76.2	0.0122

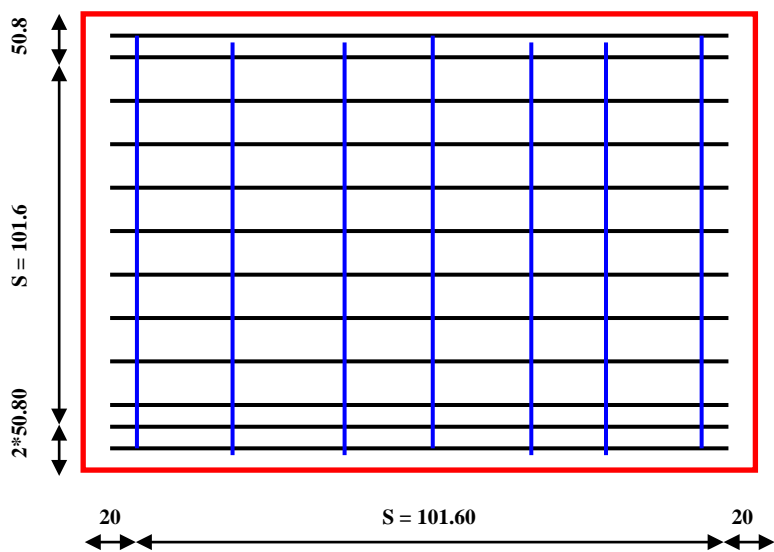
Tableau 5-1 Renforcement des voiles utilisés.

La figure suivante (5.3) nous montre les différents ferraillements utilisés pour les voiles V1, V2, V3 et V4. Le ferraillement utilisé dans le voile V1 est caractérisé par un diamètre faible ($T4$) mais il présente une forte condensation avec un espacement minimum entre les barres de renforcement. Le voile V2 est caractérisé par un espacement modéré suivant les deux directions planaire du voile mais la quantité des aciers utilisés suivant le sens longitudinal est le double que celle disposée suivant le sens transversal. Tandis que le voile V3 est composé de deux refends avec des caractéristiques différentes pour chacun. Le premier refend a eu un ferraillement conformément aux deux premiers voiles mais le second est uniquement caractérisé par des barres de renforcement longitudinales. On peut dire que ce cas de ferraillement est identique au ferraillement du voile V2 avec un ferraillement transversal nul. Enfin, les barres d'acier du voile V4 sont identiques suivant les deux dimensions du voile.

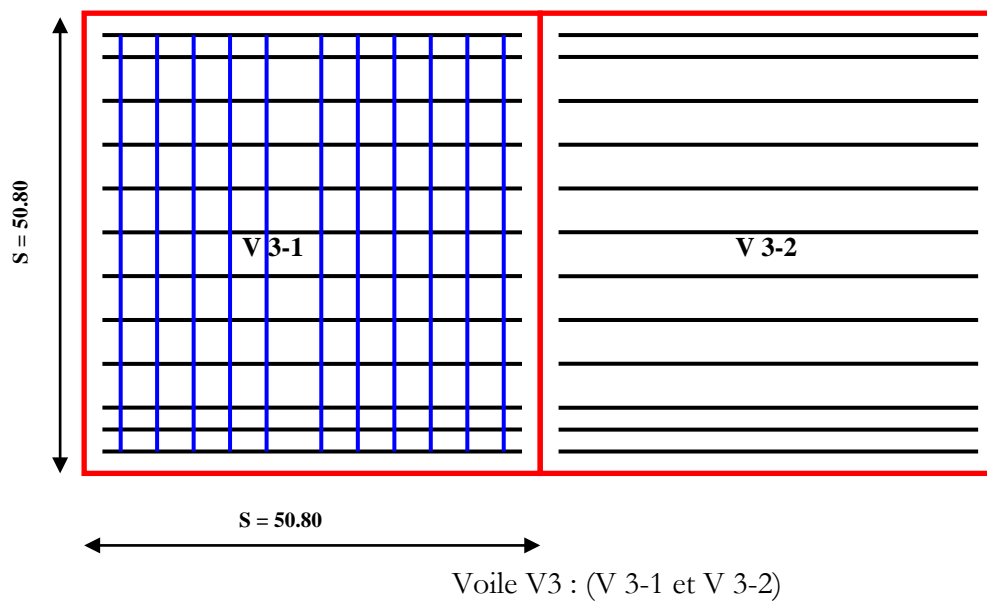
L'objet principal de ces configurations de ferraillement est pour but d'analyser la réponse des voiles d'une façon générale et de présenter l'effet des armatures d'acier sur la réponse structurale. Il est notable que la détermination de la charge limite (la capacité portante) d'un voile est facteur primordial dans l'étude des voiles en béton armé. Cette charge peut jouer un rôle d'identification des voiles lors de leur conception au niveau des bureaux d'études.

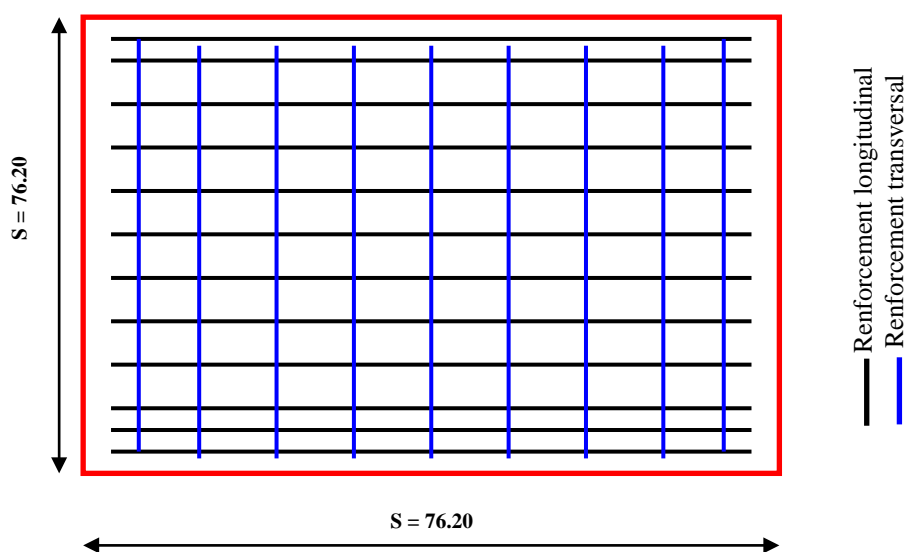


Voile V1



Voile V2





Voile V 4

Figure 5.3 Type de renforcement et différents espacements.

5.3 Les propriétés mécaniques des matériaux

5.3.1 Les propriétés des aciers utilisés

Les propriétés mécaniques des barres d'acier et des bétons utilisés sont regroupées respectivement dans les tableaux 5-2 et 5.3.

Type d'acier	Section (mm ²)	Contrainte d'écoulement (MPa)	Module de Young (MPa)	Utilisé Dans
T4	11.191	227.50	168000	V1
T6	70.96	353.66	192000	V2-V4
T10	20.25	461.90	192000	V3

Tableau 5-2 Propriétés mécaniques des barres d'acier utilisées.

Les renforcements des refends sont identiques seulement une distinction est associée au voile V3 que ces parties présentent des ferrillages différents. La disposition des barres de

renforcement est montrée sur la figure (5.3), les espacements entre les barres et les pourcentages de ferrailage sont regroupés dans le tableau (5.1).

Trois types de barres de renforcement sont utilisés dans ces échantillons. Pour les voiles à épaisseur de 50.80 mm, des barres de faible diamètre sont utilisées pour montrer le comportement des barres d'acier et une concentration de contraintes dans les barres d'acier est observée.

Les barres de renforcement : Les propriétés mécaniques des barres d'acier sont obtenus à partir des tests de traction appliquée sur des barres d'acier. Des diagrammes typiques donnant des allures contraintes déformations pour différents diamètres sont montrés sur la figure 5.4. Le module de l'élasticité longitudinale, la contrainte d'écoulement et les contraintes limites sont regroupés dans le tableau 5.2.

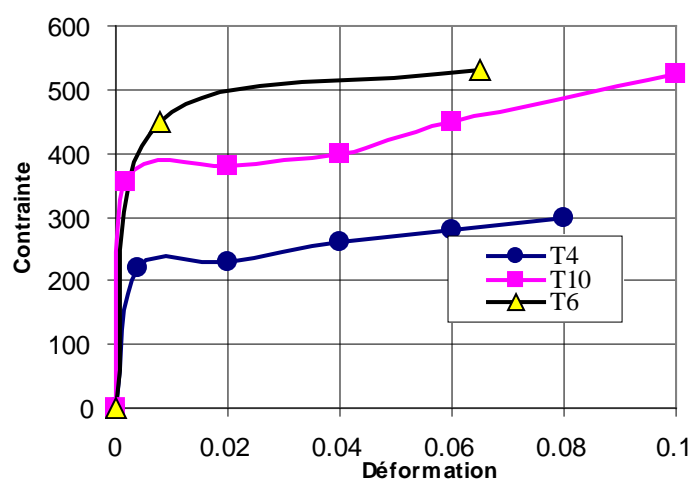


Figure 5.4-Diagrammes contraintes – déformations des barres d'acier utilisées.

5.3.2 Les propriétés des bétons

De la même façon, le béton utilisé est caractérisé par une contrainte à la compression égale environ à 26.7 MPa. Le module d'élasticité est obtenu à partir des courbes contraintes – déformations établies par le test de compression simple. Trois diagrammes de contraintes – déformations ont été obtenus (figure 5.5). Le module d'élasticité initial à l'origine est supposé égal à 20400 MPa. Cependant, la résistance à la traction est calculée à partir des tests cylindriques universels. La résistance à la traction dépend de la quantité d'acier utilisée.

Voile	Résistance f_c (Mpa)	Résistance f_t (MPa)	Module de Young
V1	26.70	3.40	20400
V2	26.70	3.40	20400
V3	26.70	3.40	20400
V4	26.70	3.40	20400

Tableau 5-3 Propriétés mécaniques des bétons

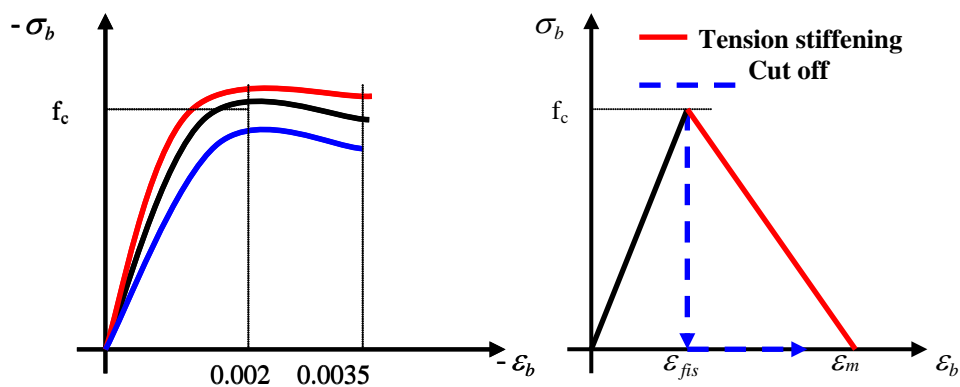


Figure 5.5-Diagrammes contraintes – déformations du béton utilisé.

En conclusion, les propriétés des bétons de différents échantillons sont regroupées dans le tableau 5.3. La déformation ultime en compression est comprise entre 3 et 7 ‰.

5.4 Comparaison des résultats

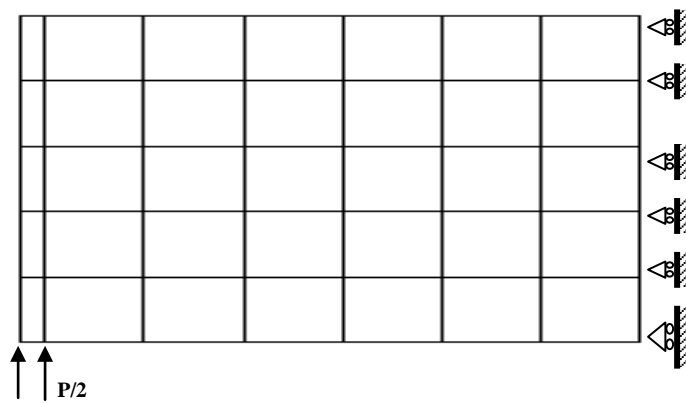
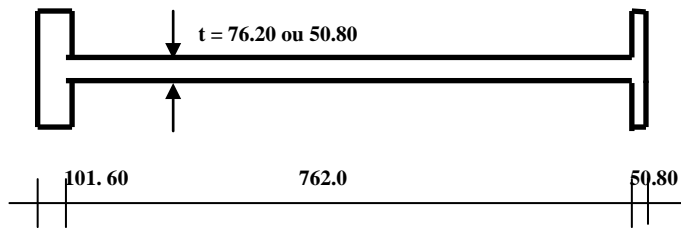
5.4.1 Description générale

Les voiles en béton armé cités ci-dessus ont été analysés par la méthode numérique choisie (chapitre 4) en utilisant le programme développé au sein de l'équipe de recherche "Modélisation du Comportement Non Linéaire des Structures en Béton Armé". Les résultats de cette simulation numérique appliquée sur les différents voiles ont été confrontés avec les résultats expérimentaux.

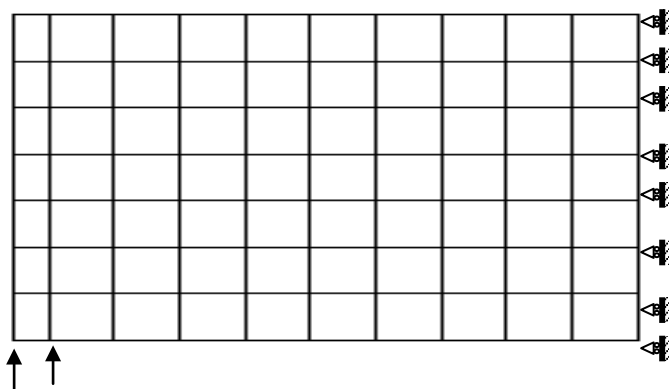
Chaque voile est composé de deux panneaux symétriques comme il a été décrit dans la section précédente. Ce qui permet d'analyser uniquement la moitié de chaque test qui est constitué

d'un seul panneau carré avec deux nervures adjacentes. De même, la nervure intermédiaire est divisé de sa part en deux parties en vu d'assurer la symétrie des panneaux.

L'idéalisation d'analyse de chaque panneau montrée sur la figure 5.1 est discrétisée en nombre d'éléments finis conçus à une analyse par éléments finis est montrée sur la figure 5.6.



Maillage grossier
(35 éléments)



Maillage moyen
(70 éléments)

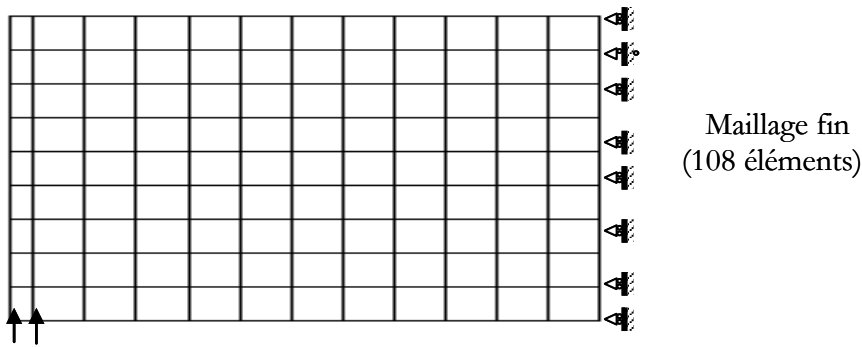


Figure 5.6 - Différentes discrétisations utilisées respectivement: M_1 (7×5), M_2 (10×7), M_3 (12×9).

Dans ce sens, trois maillages ont été utilisés M_1 (7×5), M_2 (10×7), M_3 (12×9) montrés sur la figure 5.6 ont été utilisés. Par la condition de symétrie du voile, le déplacement horizontal des nœuds de la ligne médiane est bloqué ayant un degré de liberté nul et les charges appliquées ont été aussi décomposées en forces équivalentes.

Sur le plan des caractères mécaniques des matériaux, les propriétés matérielles considérées dans cette analyse sont regroupées sur les tableaux 5.2 et 5.3.

5.4.2 Influence de la discrétisation géométrique

La courbe donnant la réponse des voiles sous un chargement monotone des trois maillages respectivement de 70, 140 et 216 éléments membranaires est représentée sur la figure 5.7.

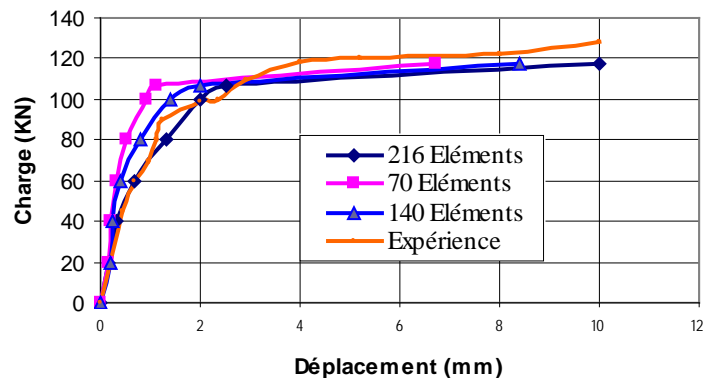


Figure 5.7- Effet de la discrétisation géométrique.

Une bonne concordance entre les résultats numériques obtenus (Figure 5.7). On observe que le nombre utilisé d'éléments finis n'a pas d'influence considérable [passage du maillage M_1 (70 éléments) au maillage M_3 (216 éléments)]. De plus, on ne constate pas de divergence significative sur les résultats numériques obtenus. Pour cette raison, on adopte dans les calculs

qui suivent un maillage modéré M_2 (la discrétisation de 140 éléments membranaires). Cette considération nous facilite l'exécution du travail proposé dans les délais courts de calcul.

5.4.3 Analyse de la réponse du voile V1

Le premier échantillon est considéré comme l'échantillon type auquel plusieurs résultats ont été présentés. Pour des raisons de temps de calcul, nous avons choisi le maillage M_2 avec 140 éléments de discrétisation du voile. La confrontation des résultats numériques obtenus par cette simulation numérique d'une part et les résultats expérimentaux dont dispose la bibliographie sont schématisés sur la figure (5.8). Le voile étudié est sous – armé et cependant il conduit à un écoulement des barres de renforcement à un niveau faible de chargement. Expérimentalement, les barres d'acier s'écoulent juste dès que le fissuration des bétons est apparue.

Les courbes charge – déplacement du voile V-1 sont montrées sur la figure 5.8. Cette réponse montre un faible comportement du voile considéré comparée par rapport au comportement expérimental. Il peut être envisagé une réponse du voile plus performante si on utilise un maillage très fin de la structure étudiée conduisant à un agrément anticipé. Dans le même concept, le mode de fissuration au niveau de la charge limite est montré sur la figure 5.8. Les résultats expérimentaux et même analytiques firent montrer que les fissures se développent le long de la nervure centrale.

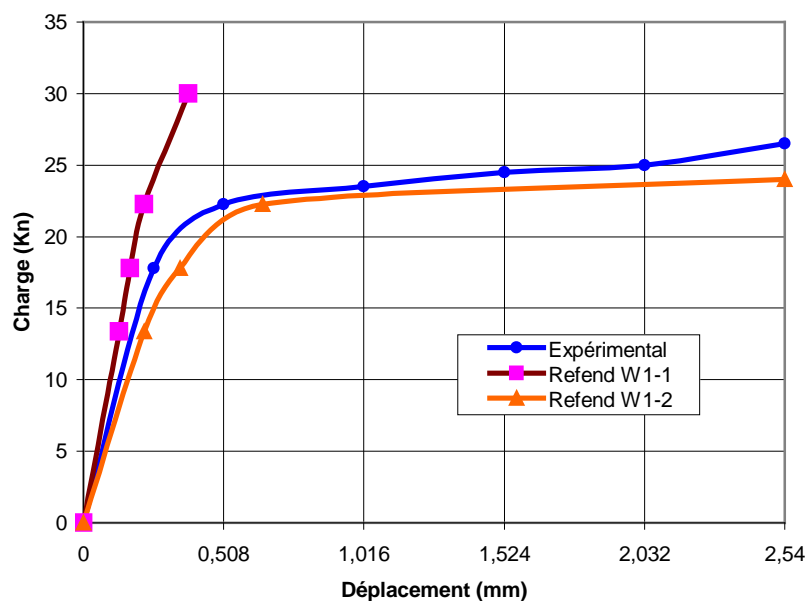


Figure 5.8 - Charge – déplacement du voile V1.

A partir des résultats obtenus, il est constatable que lorsque les voiles sont sous – armés le phénomène de fissuration se produit aux premiers niveaux de chargement. En faisant recours à ce type de structures, en général, pour suivre spécifiquement le comportement des aciers. C'est dans ce cadre que le comportement des armatures de renforcement entre dans le domaine d'écoulement juste après la fissuration des bétons.

En plus, il est remarquable que la réponse du refend reproduit le comportement expérimental tandis que le comportement du refend V1-1 présente une certaine rigidité vis à vis de la réponse expérimentale ou de la réponse du refend V1-2. Cette remarque est obtenue à partir d'un contrôle fait sur le champ des déformations. Il s'agit de fixer une déformation limite déduite des résultats expérimentaux des différents tests effectués au niveau du laboratoire.

Enfin, concernant le mode de rupture et suite à l'effet de l'adhérence considéré entre les bétons et les aciers ; une adhérence parfaite est considérée ce qui rend le matériau composite plus rigide, est causé par la rupture des barres d'acier par une action de type traction (figure 5.9). Le mode de rupture de l'échantillon est caractérisé par la rupture des armatures de renforcement par tension. De même, la fissuration se produit aux niveaux des éléments finis qui se rapprochent de l'axe médian du voile.

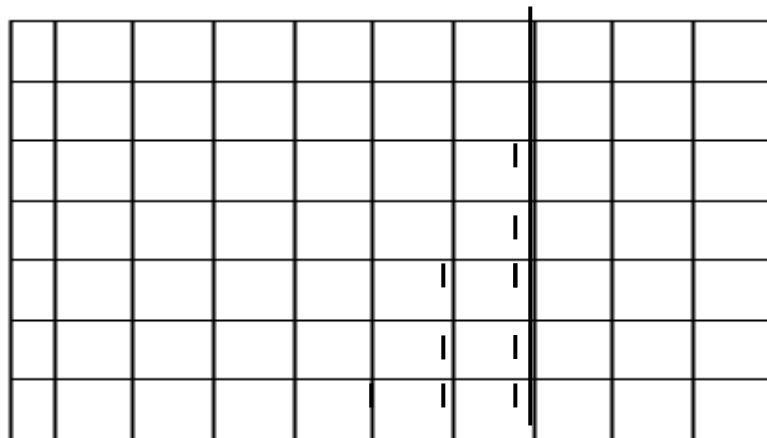


Figure 5.9- Propagation des fissures dans le voile V1.

Numériquement, l'angle entre les axes principaux et les axes de référence est plus important donnant une rupture verticale par une collision de fissures (figure 5.9).

5.4.4 Analyse de la réponse du voile V2

Les diagrammes charge – déplacement des résultats obtenus par la présente simulation numérique d'une part et les données expérimentales dont dispose la bibliographie, sont

montrées sur la figure 5.10. Ces courbes donnent la variation de la charge appliquée-déplacement du coin de la nervure où elle a été appliquée. Une différence minimale est observée entre les résultats numériques obtenus par cette simulation et les données expérimentales.

En général, le voile V2 reproduit fidèlement la réponse expérimentale. Il a été constaté qu'il y a une concordance très satisfaisante le long de la courbe des données expérimentales.

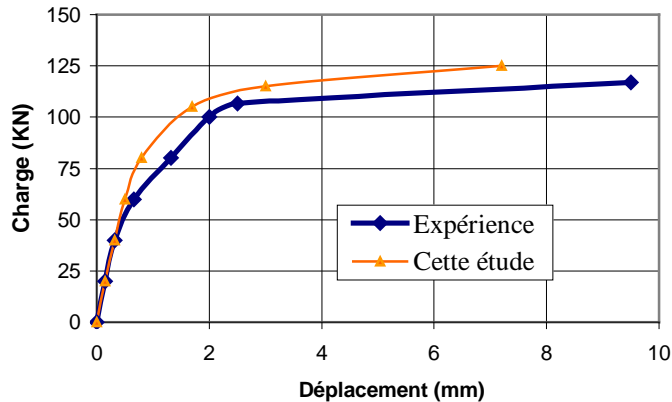
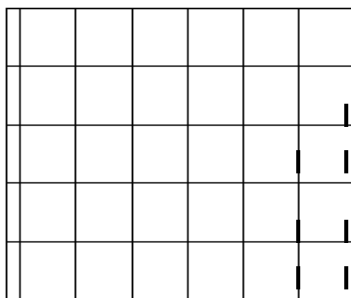


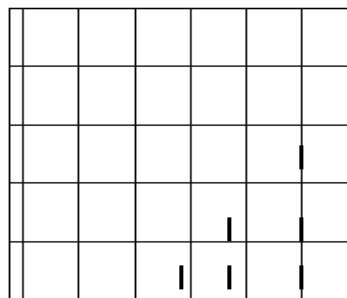
Figure 5.10- Courbe charge – déplacement du voile V2.

Particulièrement, la spécification du mode de ferrailage a conduit convenablement à cette réponse. En plus, on peut constater que la simulation numérique proposée donne une bonne évaluation de la capacité portante des voiles.

L'apparition et la propagation des fissures au cours de chargement sont montrées sur la figure 5.11. Au cours du processus de chargement, la répartition des fissures s'initie à mi-porté du voile et qu'elles se propagent d'une part vers les fibres supérieures et d'autre part vers l'intérieur du voile. Au niveau de la charge limite (la capacité portante du voile), une forte localisation de fissure apparaît sous forme d'un triangle isocèle dont son coté rectangulaire est la hauteur de la nervure. Enfin, la rupture se produit par une collision mutuelle des fissures.



$$\lambda = 0.25$$



$$\lambda = 0.50$$

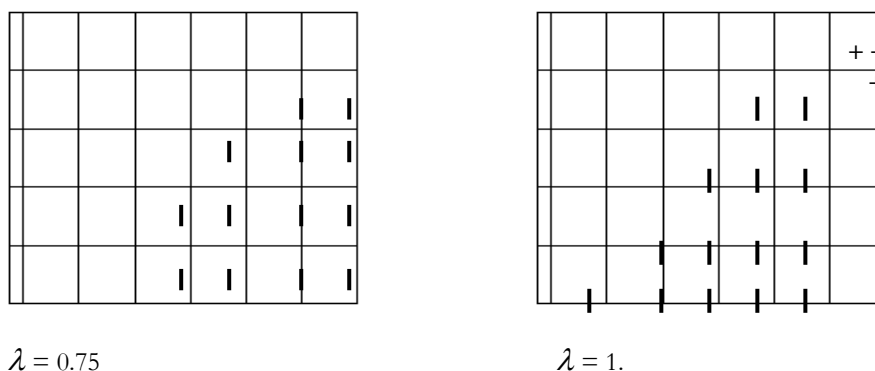


Figure 5.11- Propagation numérique des fissures- maillage M_2 (λ est le facteur de charge).

L'analyse de fissuration est montrée sur la figure (5.11). De cette représentation, les régions fissurées ainsi que les directions des fissures sont presque identiques pour tous les niveaux de chargement. Le mécanisme de fissures s'initie à partir de la zone qui est soumise à une traction puis elles se propagent au premier lieu vers les zones suivant la hauteur du voile ensuite en profondeur du voile. Les inclinaisons des fissures se diffèrent d'un point à un autre dépendant de l'état de contrainte du point de résolution.

5.4.5 Analyse de la réponse du voile V3

Ce voile est armé par différents ferraillements. Le refend V3-1 est armé des barres d'acier suivant les deux directions de son plan tandis que le refend V3-2 porte uniquement un ferraillement unidirectionnel. Par conséquent, les réponses de chaque refend sont différentes. Il est clair que la rupture du refend V3-2 est obtenue suite à son faible ferraillement.

Le maillage modéré M_2 est toujours considéré comme maillage de référence et que les réponses de chaque refend sont montrées de façon séparée.

5.4.5.1 Refend V3-2

En étudiant ce refend avec ces caractéristiques mécaniques, une analyse incrémentale est appliquée pour une comparaison avec les résultats expérimentaux. La courbe des résultats numériques montre une bonne concordance avec les données expérimentales (figure 5.12). Cette figure présente une confrontation entre les résultats expérimentaux et les résultats obtenus par cette simulation numérique. Il est remarquable qu'au niveau de la charge limite, la réponse expérimentale présente une chute de charge ceci explique que le comportement de la structure au delà de la charge limite est apparu dans ce type de voile. D'après nos recherches

bibliographiques, il nous semble que le béton, en son comportement réel, peut présenter une phase adoucissante dans son comportement.

En dehors de cette particularité de la réponse charge – déplacement, le comportement numérique est en concordance très favorable.

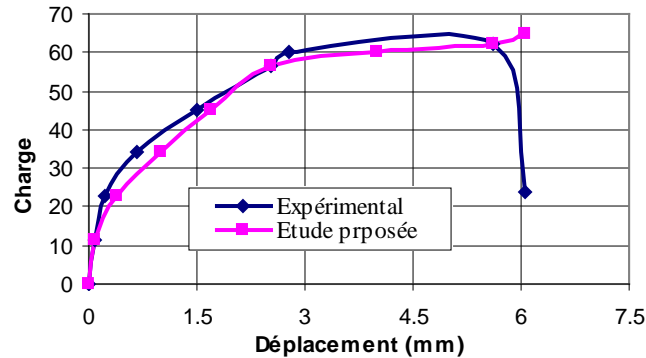


Figure 5.12- Charge- Déplacement du voile V3-2.

Dans le même concept, l'apparition et la propagation de fissures sont identique à celles observées sur les tests expérimentaux (figure 5.13). En général, le comportement de refend présente un agrément favorable avec les résultats de l'expérimentation sauf au voisinage de la charge limite, une différence est bien observée.

Le mode de fissuration dans ce cas est peu particulier et il est caractérisé par un fuseau de fissure suivant la diagonale du voile (figure 5.13). Il a été constaté une forte localisation de fissures suivant la diagonale comparée par rapport aux autres régions. Il est évident que les premières fissures s'initient dans la partie la plus tendue éventuellement cette de la partie médiane du voile.

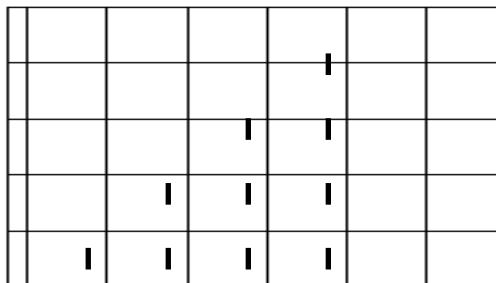


Figure 5.13- Mode de rupture du voile V3-2

5.4.5.2 Refend V3-1

Ce refend V3-1 est caractérisé par rapport au refend V3-2 par la présence des armatures transversales. La figure 5.14 montre la relation charge – déplacement obtenu par la présente étude d'une part et les données expérimentales d'autre part. Il est évident que la présence des armatures transversale donne une certaine rigidité supplémentaire du refend étudié. Cette rigidité supplémentaire va forcément diminuer la réponse totale représentée par le déplacement envisagé. Pour cette raison, on peut constaté que le comportement du voile V3-1 est plus raide que celui du voile V3-2.

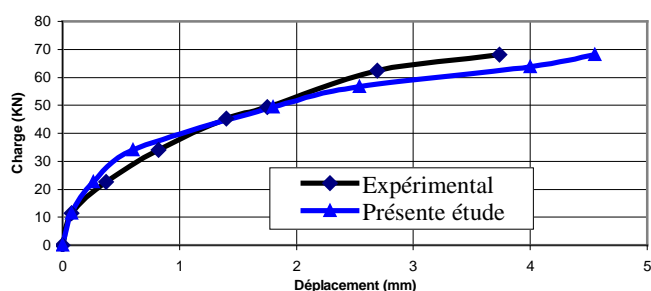


Figure 5.14- Charge – Déplacement du voile V3-1.

5.4.6 Analyse de la réponse du voile V4

Toujours le même maillage est conservé, la figure suivante (5.15) montre la réponse du voile V4 lorsqu'il est soumis à un chargement croissant. Cette courbe est caractérisée par une partie confondue jusqu'à une charge limite de l'ordre de 400 KN. Passant cette valeur, une légère différence entre la courbe numérique et celle expérimentale qu'on peut certainement la négliger. En ajoutant que la modélisation présentée simule avec une satisfaction la charge limite que peuvent supporter les voiles de cette catégorie.

Suite aux résultats déjà recueillis ci-dessus, on peut dire que cette catégorie de voiles peut être conçus dans le cas des voiles surchargés. Dans ce cas, le voile peut résister à des charges très élevées de l'ordre de 650 KN comparées par rapport aux voiles V1- et V2. De la même façon, le mode de rupture dû a la formation et à la propagation des fissures est montré sur la figure (5.16). Identiquement aux cas déjà présentés ci-dessus, la propagation du phénomène de fissuration se développe à partir de la zone la plus tendue et se propage vers les fibres supérieures d'une part et vers l'intérieur du voile d'autre part.

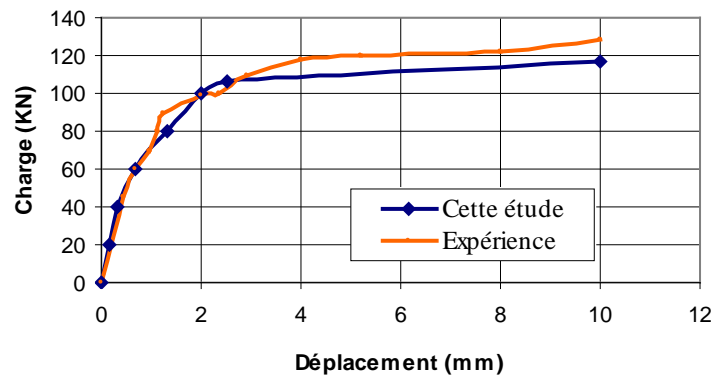


Figure 5.15 : Charge – déplacement du voile V4.

						+	+

Figure 5.16- Propagation de fissures dans le voile V4.

5.4.7 Comportement du béton fissuré : l'option "tension-stiffening"

Les facteurs affectant la résistance ultime des structures en béton armé sont nombreux (Bhatt et Abdelkader 1998) mais l'importance de chaque effet varie d'un paramètre à un autre. En général, ces paramètres dépendent de la géométrie, du type de chargement et des caractéristiques mécaniques des matériaux. Il est clair que les résistances du béton à la traction et à la compression jouent un rôle primordial et elles sont considérées parmi les facteurs les plus importants dans l'analyse des poutres en béton armé.

Un autre paramètre, qui a attiré l'attention de plusieurs chercheurs, est le facteur de transfert de cisaillement β entre les lèvres des blocs fissurés. Ce paramètre est aussi non négligeable et surtout pour les structures profondes, telles que : les poutres profondes, les voiles et les

structures planes. Dans ce sujet, une multitude de valeurs a été utilisée dans cette étude paramétrique pour évaluer leur effet sur la résistance au cisaillement des voiles en béton armé.

En outre, la contribution du béton entre les fissures peut apporter un apport au comportement structural considérable des voiles en béton armé. On peut justifier cela par la structure massive du cas de voiles ou de voile en béton armé. Certes, qu'une grande partie de la structure est susceptible d'être fissurée qui est le cas contraire à envisager dans le cas des poutres en béton armé par exemple.

La figure 5.17 montre que la contribution du comportement du béton entre les fissures ou ce qu'on appelle l'effet de la tension stiffening.

La caractéristique de l'option cut off est que lorsqu'une fissure se produit au niveau d'un point de résolution ou d'intégration la force correspondante calculée comme étant la résultante des contraintes de fissuration se répartie sur l'élément fini au premier lieu et sur toute la structure au second lieu. Dans ce cadre, il est nécessaire de signaler que l'option cut off ne signifie pas que la contribution du béton entre les fissures est négligée. Cette option est une manière de considération du béton fissuré mais elle ne donne pas des résultats satisfaisants vis à vis de l'option tension stiffening.

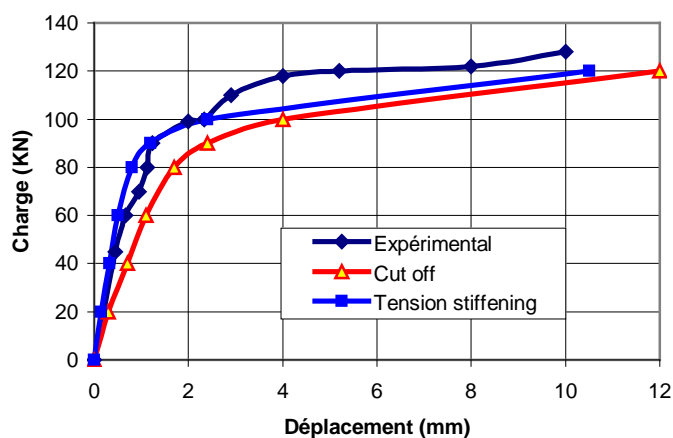


Figure 5.17- Contribution du béton fissuré dans la réponse globale, voile V2.

Pour analyser cet effet, nous avons choisi le voile V2 comme échantillon de cette analyse paramétrique. Il est bien remarquable que la tension stiffening reproduit avec satisfaction le comportement structural donné par les expériences. Pour cette raison, il est récemment recommandé la tenue en considération de la tension stiffening dans les calculs par éléments finis des structures en béton armé y compris les voiles et les voiles en béton armé.

A partir des résultats obtenus (figure 5.17), les deux analyses conduisent presque à la même charge limite. De cette remarque, on peut juger que la condensation de fissuration au sein de la structure influe considérablement sur la réponse des voiles en béton armé. Cette accumulation de fissuration, et surtout lorsqu'elle domine la région structurale, rend les deux options : cut off et tension stiffening, ayant le même effet et ceci est envisagé au voisinage de la charge limite.

5.4.8 Influence du facteur de transfert de cisaillement

Les phénomènes déjà présentés ou étudiés concernant la fissuration du béton prennent une place importante dans l'analyse expérimentale ou numérique des voiles en béton armé. Parmi ces facteurs, on peut distinguer celui de transfert des contraintes au droit de la fissure. En réalité, ce facteur de transfert dépend de plusieurs paramètres, tels que :

1. La rugosité de la face fissurée ; le frottement des lèvres de la fissure en regard engendre d'une part des efforts normaux et tangentiels à l'interface et d'autre part une dilatation de la fissure, la quantité des barres de renforcement.
2. Au droit de la fissure, l'effet de goujon est le transfert des efforts entre les deux blocs de béton par l'intermédiaire des armatures qui traversent perpendiculairement cette surface.
3. L'adhérence entre le béton et l'acier

Dans cette section, nous voulons présenter maintenant l'effet du facteur de transfert de cisaillement β , trois valeurs caractéristiques ont été sélectionnées, il s'agit de la négligence de ce facteur ($\beta=0$) ou de lui l'associer une valeur moyenne ($\beta=0,5$) ou de prendre la totalité de transfert ($\beta=1$). Il est évident que ce transfert dépend de plusieurs facteurs qui entrent en jeu et bouleversent le changement rhéologique du matériau.

La prise en compte du facteur de transfert des contraintes de cisaillement à travers les fissures représente le comportement structural du voile V2. Sa négligence et où on lui associe une valeur moyenne reproduit la même allure comportementale du voile V2 mais il est constatable que les valeurs confiées au facteur de transfert de cisaillement n'évaluent pas correctement la réponse expérimentale du voile. Et en plus, la charge limite est sous-estimée lorsque les valeurs de $\beta=0$ et $\beta=0.5$.

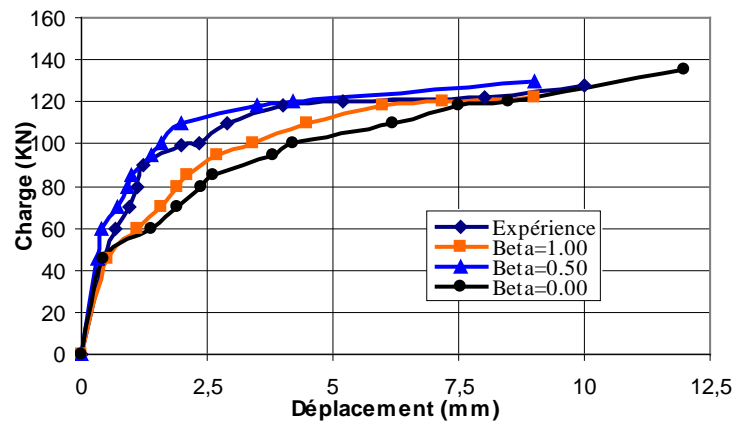


Figure 5.18- Facteur de transfert de cisaillement entre les fissures.

5.4.9 Influence de la qualité du béton

Dans cette partie, nous avons étudié l'effet de la résistance de traction du béton sur la réponse structurale des voiles en béton armé. Dans ce souci, nous avons adopté trois valeurs différentes et qui sont les plus utilisées dans la pratique. Le béton est caractérisé par sa résistance en traction suite à sa composition et les conditions environnementales dans lesquelles est formulé. Dans ce contexte, il est nécessaire de montrer cet effet sur la charge ultime qui peut être appliquée sur les poutres en béton armé.

Pour bien simuler le comportement des poutres en béton armé, nous avons varié la résistance limite du béton de traction consécutivement de 2.0 MPa (mauvaise qualité) et 3.40 MPa (béton de qualité normale). Pour bien présenter particulièrement l'effet de la qualité du béton, on a gardé le voile V2 pris comme celui de référence. Les résultats obtenus par cette simulation numérique sont schématisés sur la figure (5.19).

On peut constater de ces résultats que lorsque la contrainte de traction augmente la rigidité de la structure augmente aussi et pour toute valeur faible de la résistance à la traction du béton utilisé, les résultats divergent par rapport à la courbe expérimentale ou celle qui est plus proche de la courbe habituelle.

D'après les graphes schématisés ci-dessous, il y a une différence entre l'utilisation des bétons de bonne qualité et de mauvaise qualité. La qualité des bétons ici est définie par sa résistance en traction puisque le phénomène pris en forte considération est celui de fissuration. Il a été constaté que lorsque les bétons utilisés ayant une résistance à la traction de 3.40 MPa , le voile

présente une partie importante linéaire. Cette prolongation de la partie linéaire est due à la contribution conjointe du béton et des barres de renforcement.

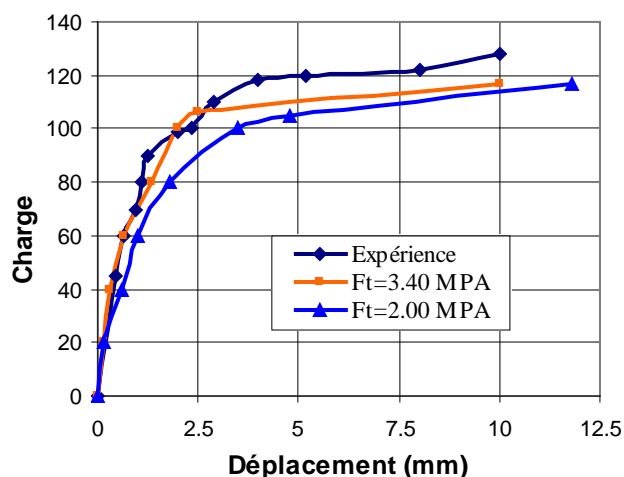


Figure 5.19- Effet de résistance limite de traction.

De même, lorsqu'une résistance à la traction $f_t = 2.0$ MPa, les bétons se fissurent tôt et par conséquent ils conduisent à des déplacements très importants (figure 5.19). En ajoutant, que ce cas sous-estime la charge ultime d'une part et provoque aussi un déplacement assez important. On peut dire que le phénomène de fissuration est primordial dans ce type de structure. Pour le retarder, il est nécessaire de sur ferrailer les voiles en béton armé.

5.5 La réponse locale des voiles en béton armé

En général, la réponse locale semble aussi nécessaire pour connaître la localisation des endommagements mécaniques. Récemment avec le développement connu dans le domaine de la représentation graphique, cette technique a facilité la lecture de la répartition des sollicitations internes au sein des solides. Dans cette étude, nous avons utilisé TECPlot (version 10) permettant la répartition des contraintes principales qui sont le facteur principal de contrôle de l'apparition de fissures. Une fissure est considérée en un point de résolution si et seulement si cette contrainte dépasse sa similaire de critère de rupture considéré. Dans ce cas et pour des raisons simplificatrices, le critère de Rankine appelé aussi critère de la résistance maximale est considéré.

Cet outil numérique conduit à connaître la répartition des contraintes principales d'une part et la contrainte tangentielle d'autre part. Cette dernière est aussi responsable sur un mode de rupture pouvant produire par un effet de cisaillement et qui peut être envisagé dans les

structures en béton armé. Comme nous avons signalé ci-dessus que cette technique graphique, est largement utilisé actuellement surtout dans le domaine de la biomécanique. Il est clair que le phénomène de fissuration joue un rôle primitif de détection des modes de rupture dans les différents organes osseux.

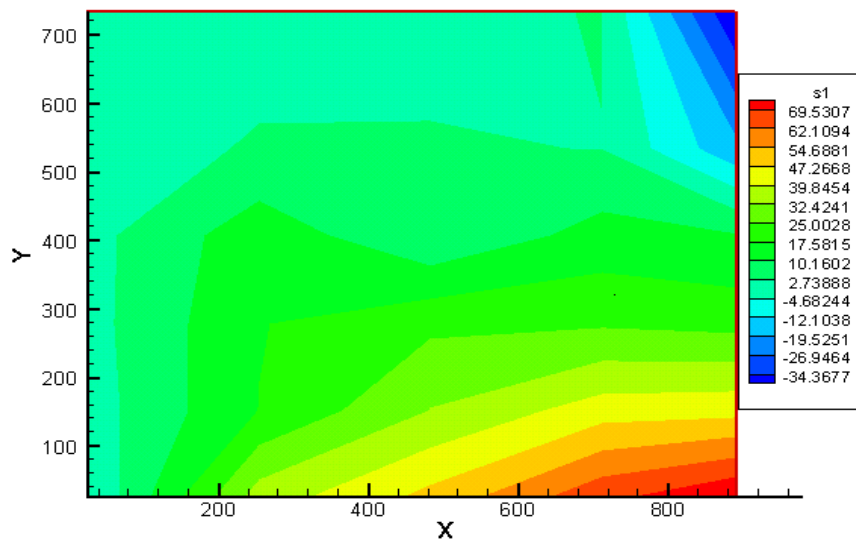
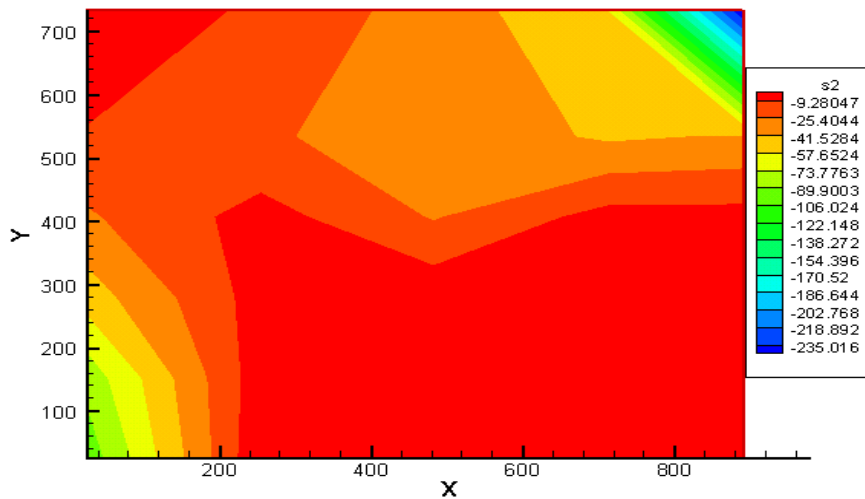
Dans ce sens, nous n'avons spécifié l'analyse locale ; le traitement graphique, que pour les voiles V1 et V4 par ce que, en général, les réponses des voiles sous l'effet d'une sollicitation monotone sont presque identiques comme nous l'avons obtenus dans le cas des réponses globales.

5.5.1 Analyse locale du voile V1

La figure (5.20) montre la distribution de contrainte principale σ_{11} dans le voile V1. Dans ce cas, les voiles ont été traités comme des poutres profondes. Cette répartition indiquée (figure 5.20) se regroupe en deux parties distinctes. Il s'agit d'une partie comprimée et d'une autre tendue.

Parmi les performance de la validation du programme développé, les résultats obtenus par cette simulation fait foi. Une partie tendue localisée dans la région inférieure et à mi-portée du voile considéré et une partie à forte localisation en compression au voisinage du point d'application de la charge extérieure comme le montre la figure (5.20).

Une répartition de valeur médiane se diffuse dans la partie centrale du voile. La propagation des contraintes de traction et de compression se propage respectivement vers l'intérieur du voile. Il a été constaté que le phénomène de traction dans ce voile se propage avec une dominance aux niveaux des fibres inférieures. Tandis que la propagation de la contrainte de compression se dirige vers les fibres moyennes du voile (figure 5.20).

Figure 5.20- Répartition de la contrainte principale σ_{11} - Voile V1.Figure 5.21- Répartition de la contrainte principale σ_{22} - Voile V1.

La figure (5.21) montre de sa part la répartition de la contrainte principale σ_{22} . L'analyse de cette figure montre que la répartition des contraintes s'effectue uniformément suivant la diagonale du voile. Il est remarquable qu'il y a une forte localisation de contraintes au pic qui correspond au point d'application de la charge extérieure. Mais il est aussi constaté qu'une partie très importante située au noyau du voile est soumise à une contrainte faible suivant la direction de la deuxième contrainte principale.

De la même façon, la figure (5.22) montre la distribution de la contrainte tangentielle calculée dans le repère du voile (repère absolu ou de référence). On peut constater que les contraintes tangentielles se répartissent ici de façon anti-symétrique. Des contraintes tangentielles négatives au pic du point d'application de la charge extérieure qui s'opposent à des contraintes tangentielles positives au niveau de la liaison (l'appui du voile).

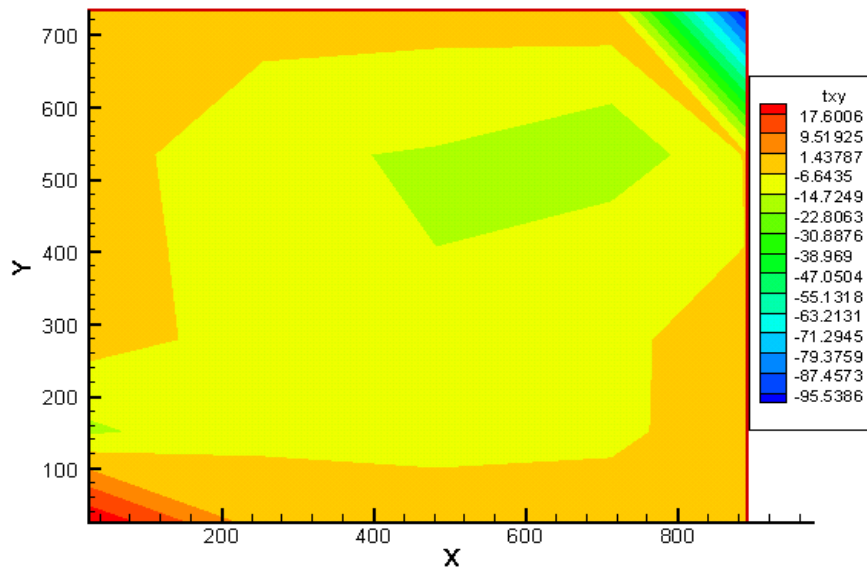


Figure 5.22- Répartition de la contrainte tangentielle σ_{12} - Voile V1.

5.5.2 Analyse locale du voile V4

Les caractéristiques mécaniques et géométriques du voile V4 influent de façon considérable sur l'état de contraintes dans le voile V4. Les contraintes principales σ_{11} cette fois sont un peu importantes vis-à-vis de celles du voile V1. Mais, les manières de répartition sont presque identiques. On peut constater des tractions dans la partie inférieure avec une répartition vers l'appui du voile et des compressions au voisinage du point d'application de la charge avec un diffus vers les fibres moyennes (figure 5.23).

Presque de la même manière, la contrainte principale σ_{22} se répartie au sein du voile V4 identique à la distribution déjà envisagé dans le cas du voile V1. Les contraintes principales σ_{22} se répartissent suivant la diagonale du voile avec une décroissance en valeur algébrique de la contrainte principale à partir du point d'application de la charge extérieure vers l'appui du voile.

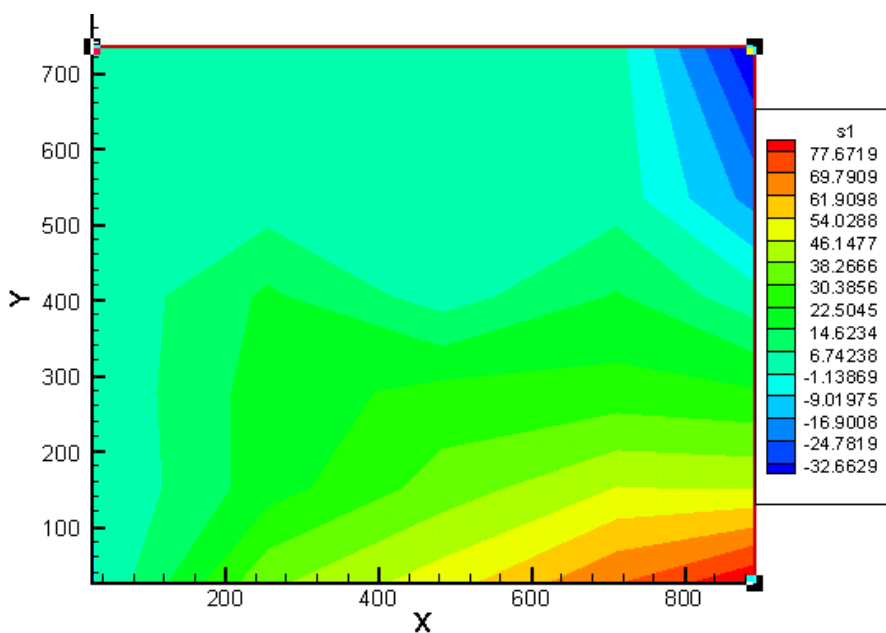


Figure 5.23- Répartition de la contrainte principale σ_{11} - Voile V4.

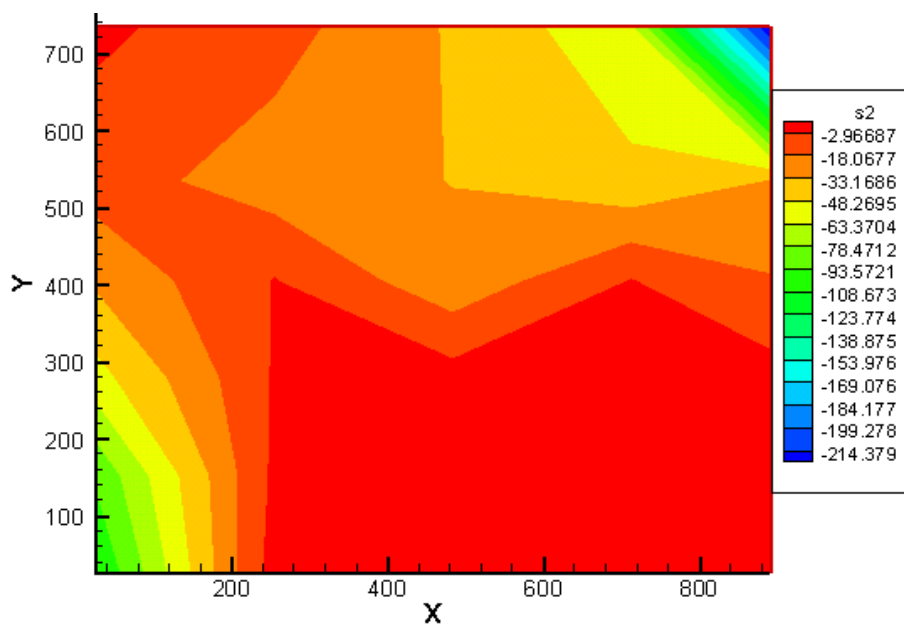


Figure 5.24- Répartition de la contrainte principale σ_{22} - Voile V4.

De même, la figure (5.25) montre la répartition de la contrainte tangentielle σ_{xy} au sein du voile V4. Par une simple comparaison, le voile V4 présente une distribution de contrainte tangentielle faible au niveau de l'extrémité libre du voile vis à vis le voile V1. A partir de cette figure, on peut constater des contraintes tangentielles de signe positif qui se localisent au

niveau de l'appui du voile V4. Et des contraintes tangentielles négatives au voisinage du point d'application de la charge externe.

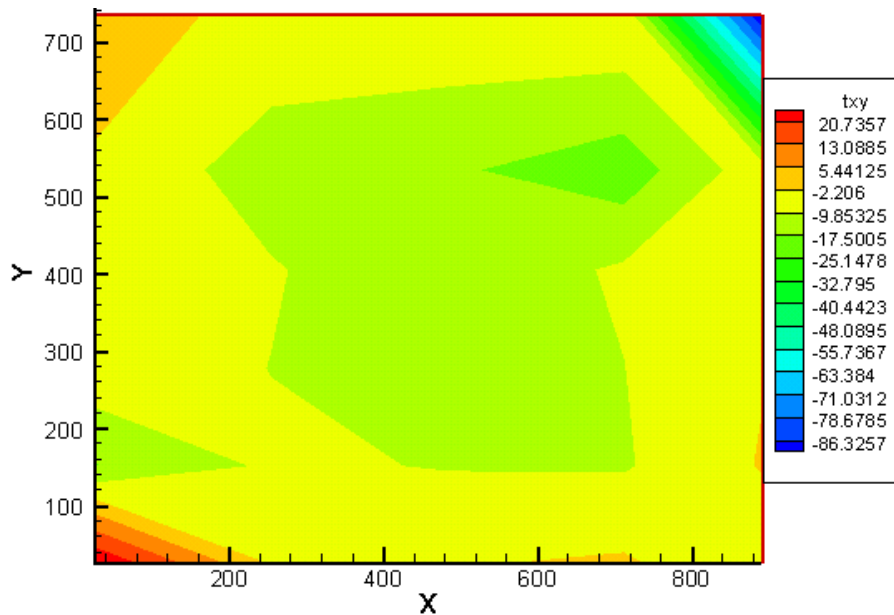


Figure 5.24- Répartition de la contrainte tangentielle σ_{xy} - Voile V4.

Enfin, ce logiciel graphique permet de prédire les zones à forte localisation de contraintes. Les figures précédentes montrent en général la distribution des contraintes principales dans le plan d'orthotropie et la contrainte tangentielle exprimée dans le repère absolu ou fixe.

5.6 Conclusions

Après l'établissement de ce travail, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

La capacité portante des murs en béton armé est évaluée avec satisfaction par la procédure présentée au chapitre 3.

Cette étude a permis de caractériser l'effet et la disposition de la quantité des aciers de renforcement utilisés.

Il est admis que la discrétisation n'a pas une influence considérable sur la réponse globale des voiles en béton armé. Mais, il nous semble de toute façon que les maillages fins donnent des résultats très satisfaisants vis à vis des maillages grossiers.

L'utilisation d'un béton de bonne caractéristique influe aussi sur la réponse structurale et contribue directement sur la charge limite que peuvent reprendre les voiles en béton armé.

Lors de la fissuration des bétons, des forces aux niveaux des parties fissurées naissent. Ce transfert est représenté par un facteur appelé "facteur de transfert de cisaillement". Plusieurs valeurs ont été confiées à ce facteur que la présente étude présente un effet minime de ce dernier sur la réponse globale des voiles en béton armé.

En ajoutant que l'étude permet à une analyse paramétrique dont laquelle plusieurs facteurs font l'objet de cette étude.

Le traitement graphique des résultats obtenus permet de prédire les zones de fortes localisations de contraintes. En plus, il conduit à aider pour spécifier le mode de rupture dans les poutres en béton armé.

Enfin, on peut juger que cette simulation conduit avec satisfaction à la réponse structurale des voiles en béton armé. Cette satisfaction est assurée par une comparaison directe entre les résultats établis par cette simulation et les données expérimentales dont dispose la bibliographie.

Chapitre 6

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans le cadre du programme de recherche porté sur la modélisation du comportement des structures en béton armé, le thème de recherche concernant le comportement des voiles en béton armé, est proposé. Ce mémoire présente une stratégie de modélisation de leur comportement sous un chargement monotone. Cette étude a conduit à une analyse de l'effet de quelques paramètres ayant une influence sur la réponse des voiles en béton armé.

Au long de ce travail, nous avons combiné la théorie de l'élasticité avec le phénomène de fissuration du béton. C'est dans ce sujet que le modèle de la fissuration répartie est utilisé pour des raisons simplificatrices au niveau de l'implantation numérique.

Cette approche a été implantée dans un programme numérique en vue de simuler la réponse des voiles en béton armés. En se basant sur l'étude comparative entre les résultats obtenus par la présente simulation et les données expérimentales dont la bibliographie dispose, les conclusions suivantes peuvent être énoncées :

- 1- la réponse des voiles en béton armé représentée par charge appliquée – déplacement maximum peut produire la réponse expérimentale.
- 2- Les prédictions de la localisation de fissures et la manière de répartition sont bien établies par cette approche. De même, le phénomène de fissuration du béton joue ici un rôle primordial d'endommagement des murs.
- 3- Cette approche a permis de localiser les endommagements envisagés, la fissuration du béton par traction et l'écrasement par compression. Le transfert de contraintes dû à la fissuration, conduit des fois à une plastification des barres d'acier.
- 4- A travers cette comparaison, on peut dire que la démarche présentée en chapitre 3 peut représenter de façon rigoureuse le comportement expérimental des murs en béton armé.
- 5- L'étude montre que la non linéarité de la réponse des voiles en béton armé est primordialement due à la fissuration des bétons ou à la plastification des barres d'acier.
- 6- D'autres conclusions peuvent être inspirées du chapitre 5, déjà illustrés dans l'analyse de la réponse des voiles V1, V2, V3 et V4.

En perspective :

- 1- il semble qu'une analyse tridimensionnelle peut reproduire mieux le comportement des voiles en béton armé.
- 2- De même, d'autres phénomènes peuvent être étudiés tels que : l'effet de l'adhérence acier – béton schématiquement ce type de structure présente une grande partie d'interaction entre le béton et l'acier dûe à la densité de ce dernier.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Absi E.**, 1972 "La théorie des équivalences et son application à l'étude des ouvrages d'art" Annale de ITBTP n°295, Octobre.
- ACI 318-89**, "Building Code Requirements for reinforced concrete", ACI 318-89, Detroit, USA, Michigan, 1989.
- Adebar P., Collins M.P.**, "shear strength of members without transverse reinforcement", Canadian Journal of civil engineering, vol.23, pp 30-41, English, 1996.
- Ahmed S., Iron B.M., Zienkiewicz O.C.**, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finites elements, International Journal for numerical methods in engineering", vol.2, pp 419-451, English, U.S.A., 1970.
- Al-kubaisy M.A., Young AG.**, "Failure of concrete under sustained tension", Magazine of concrete research ,27,171-178, Leicester, England, English, 1975.
- ASCE – ACI Committee 445 on shear and torsion.** 1998 "Recent approaches to shear design of structural concrete" Journal of structural Engineering, vol.124, n°12, 1375 – 1417, December.
- Bathe K.J.**, "Finite element procedure in engineering analysis", Prentice-Hall, 735pp, MIT, U.S.A, English, 1982.
- Bathe K.J.**, 1996 "Finite element procedures in engineering analysis" Prentice Hall, Inc, New Jersey.
- Batoz J.L., Dhatt G.**, "modélisation des structures par éléments finis", Hermès, 3V, 1500pp, Paris, France, 1990.
- Batoz J.L. & Dhatt G.**, 1990, "Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2 poutres et plaques" Edition Hermès, paris.
- Bazant Z., Xiang Y., Adley M., Prat P.C., Akers S.A.**, "Micro plane model for concrete. II: Data delocalisation and verification", Journal of engineering Mechanics (ASCE), v 122 n°3, pp 255-262, U.S.A, English, 1996.
- Bazant Z., Xiang Y., Prat P.C.**, "Micro plane model for concrete. I: Stress-strain boundaries and finite strain", Journal of engineering Mechanics (ASCE), v 122 n°3, pp 255-262, U.S.A, English, 1996.
- Bazant Z.P., Tabbara M.R., Kazemi M.T. & Pijaudier – Cabot G.**, 1990, "Random particle model for fracture of aggregate or fibre composites" Journal of structural engineering, Mech., ASCE, 116, 1686 – 1705.
- Belarbi A. & Hsu T.T.C.**, 1995, "constitutive laws of softened concrete in biaxial tension compression" ACI Structural Journal, vol. 92 n° 5, pp 562 – 573.
- Belarbi A., HSU T.T.C.**, "constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete", ACI Structural Journal, v 91 n°4, pp 465, USA,

- English, 1994.
- Bouberguig A.**, "Calcul statique des coques nervurées et précontraintes", thèse de doctorat n°473, EPLF, 253 p, Lausanne, suisse 1983.
- Bouberguig A., Rossier S., Favre R., Charif H.**, "Calcul non linéaire du béton armé et précontraint", Revue française de génie civil, vol.1 n° 3, pp 503-568, Paris, France, 1997.
- Bousias S.N., Verzeletti G., Fardis M.N.& Guiterrez E.**, 1995, "Load – path effect in column biaxial bending and axial force". Journal of engineering Mechanics, ASCE, vol.121 n°5, pp 596 – 605.
- Braam C.R.**, " Control of crack width in deep reinforced concrete beam", thèse de doctorat - Delft university, Holland, English, 1990.
- Bresler B., Sordelis A.C.**, "Shear strength of reinforced concrete beams", Journal American of concrete institute, 60(1), pp.51 – 72.
doctorat - Delft university, Holland, English, 1990.
- Bruggeling A.**, "Structure concrete – Theory and its application", A.A. Balkema, 470 pp, Rotterdam, Netherlands, English, 1991.
- Brühwiler E.**, " Short course on an Engineering Application of Fracture Mechanics of Concrete Structures", Publication MCS, Lausanne, Suisse, English, 1998.
- CEB, RC**, " elements under cyclic loading", bulletin n° 230 CEB, Thomas Telford Publications, 190 pp, London, UK, English, 1996.
- CEB**, "Serviceability models : behaviour and modelling in serviceability limit states including repeated and sustained loads", CEB (comité euro- international du béton), bulletin n°235, Stuttgart, allemagne, English, 1997.
- CEB-FIP Model Code 1990**, CEB (comité euro- international du béton), Thomas Telford, 1993.
- CEB – FIP. 1978.** "Model code for concrete and structures". CEB – FIP International Recommendations, Third edition, Comité Euro – international du béton, Paris, 348 pp. **Charif H.**, "Réduction des déformations des structures en béton grâce à l'utilisation de bétons à hautes performances", thèse de doctorat n° 844, EPLF-IBAP, pp220, Lausanne, Suisse, 1990.
- Cervenka V.** 1970."Inelastic Finite element analysis of reinforced concrete panels under in – plane loads" A thesis submitted to the faculty of the graduate school of the university of Colorado in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy, Department of Civil Engineering, 1970.
- Clark L.A., Cranston W.B.**, "The influence of bar spacing on tension stiffening in reinforced concrete slabs , Advance in concrete slab technology, proceedings of the international conference on concrete slabs", ed. Ravindra K.Dhir, pp 118-128, Dundee, Ecosse, English, 1979.
- Collins M.P.**, "Procedures for calculating the shear response of reinforced concrete : a discussion", Journal of Structural Engineering, vol. 124 n° 112, pp 1485-1488, USA, English, 1998.
- Collins M.P.1978.** "Towards a rational theory for RC member in shear". Journal of Structural Engineering, ASCE, vol.104 n°4, pp.649 – 666.
- Collins M.P. & Mitchell D.** 1980. "Shear and torsion of prestressed and non prestressed concrete beams". PCI Journal, September - October, pp.32 – 100.

- Combesure D.** 1996. "Modélisation du comportement sous chargement sismique des structures de bâtiments comportant des murs de remplissage en maçonnerie". Thèse Ecole Centrale Paris, ELSA JRC.
- Combesure D.,** 1997. "Application du modèle à fibre à l'étude numérique de la 1^{ère} structure à murs porteurs CAMUS. Calcul dynamique non linéaire préliminaire aux essais". Rapport DMT/ 97 – 240, CEA Saclay
- Combesure D. Chaudat Th. & Moutafidou A.** 1999. "Seismic tests of icons U – shaped walls, Description of the experimental set up. Main results". Rapport DMT, SEMT/EMSI /RT/ 99 – 062, CEA Saclay
- Combesure D. Chaudat Th.** 2000. "ICONS European program seismic on R/C bearing Walls. CAMUS III specimen". Rapport DMT, SEMT/EMSI/RT/00 – 014/A, CEA Saclay.
- Corn S.** 1998. "Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre". Thèse de doctorat de l'UFR des sciences et techniques de l'université Franche - Comté.
- Cope R.G., Clark L.A.,** "concrete slabs – analysis and design, Elsevier applied science publishers", pp 502, London, UK, 1984.
- Cowper G.R.** 1966. "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory". Journal of applied.
- Crisfield M.A.** 1991. "Non linear finite element analysis of solids and structures". vol.1, John Wiley, Chichester.
- Dahlblom O.& Ottosen N.S.** 1991. "Smearred crack analysis using generalised fictitious crack model". Journal of engineering mechanics ASCE, vol.116, n°1.
- Davenne L.** 1990. "Modélisation de l'influence des armatures transversales sur le comportement non linéaire d'éléments de béton armé". Thèse Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- Davenne L.& Brenet Ch.** 1998. "Macro éléments de poutres en béton armé". Rapport interne LMT – Cachan, n°210, juin.
- Davenne L., Kotronis P.& Combesure D.** 1999. "Results of the tensile tests of the steel reinforcement used for the CAMUS III and IV structural walls". Rapport DMT, SEMI/RT/99 – 034/A, CEA Saclay.
- Davidovici V.& al.** 1985. "Génie Parasismique". Presse de l'école Nationale des ponts et chaussées.
- Debarnardi PG., Taliano M.,** experimental measurements of shear deformation in Fein forced concrete beams, FIB, Com 4 TG 1, Serviceability models, Czech Republic, English, 1999.
- Donea J., Magonette G, Negro P, Pégon P, Pinto A & Verzéletti G.** 1995. "Pseudo dynamic testing of large scale model of civil engineering structure at the ELSA reaction wall" 10 European conference on earthquake engineering, Dumas (edition), Balkema, Rotterdam, pp 2911 - 2916.
- Dubé J.F.** 1994. "Modélisation simplifiée et comportement visco – endommageable des structures en béton" Thèse de doctorat ENS Cachan.
- Dubé J.F.** 1997. "Modélisation multicouches des voiles en béton armé" Revue française de génie civil, vol. 1, n°2, juin, pp. 285 – 307.
- El Achachi** 1992. "Sur l'élaboration d'une méthode simplifiée d'analyse des

- structures de génie civil par macro éléments" Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Eurocode 2**, "Calcul des structures en béton", ingénieurs et architectes suisses, prénorme européenne, Partie 1, SIA V 162.001, Zurich, Suisse, 1992.
- Eymard R.**, Allowing the creep of concrete in a finite elements structural calculation, 12^{ème} congrès de la FIP, la technique française du béton précontraint, AFPC, pp 155-165, Washington, USA, English, 1994.
- Farra B.**, "Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec les armatures sur la fissuration", thèse de doctorat n° 1359, EPLF-IBAP, pp171, Lausanne, Suisse, 1995.
- Favre R., Beeby A.W., Falkner H., Koprna M., Schiessl P.**, "cracking and deformations", CEB – Manuel, 250 pp, Lausanne, Suisse, English, 1985.
- Favre R., Burdet O., Charif H., Hassan M., Markey I.F.**, "Enseignement tirés d'essais de charges et d'observation à long terme pour l'évaluation des ponts en béton et le choix de la précontrainte", Rapport OFR, Lausanne, Suisse, 1995.
- Favre R., Charif H.**, "Déformations des structures en béton – Modèle de base et méthodes simplifiées du calcul selon les codes européens", Ingénieurs et architectes suisses, n° 25, Lausanne, Suisse, 1992.
- Favre R., Jaccoud J.P., Burdet O., Charif H.**, "Dimensionnement des structures en béton – Aptitude au service et éléments de structures", Presse Polytechnique et Universitaires Romandes, Traité de génie civil, vol.8, 586 pages, Lausanne, Suisse, 1997.
- Favre R., Jaccoud J.P., Koprna M., Radojicic A.**, "Dimensionnement des structures en béton – Aptitude au service et éléments de structures", Presse Polytechnique et Universitaires Romandes, Traité de génie civil, vol.8, 439 pages, Lausanne, Suisse, 1990.
- Favre R., Koprna M., Radojicic A.**, "Effets différés, fissuration et déformations des structures en béton", Edition Georgi, EPFL – CEBAP, 210 pp, St Saphorin, Suisse, 1980.
- Fialkow M.N.**, "Behaviour of reinforced concrete membrane with compatible stress and cracking", ACI Structural Journal, 87/5, pp 571 – 582, Detroit, USA, English, 1990.
- Fichant S.** 1996."Endommagement et anisotropie induite du béton de structures. Modélisation approchée"Thèse de doctorat ENS Cachan.
- Filipou F.C., Popov E.P. & Bertéro V.V.** 1983. "Effect of bond deterioration on hysteretic behaviour of reinforced concrete joints" EERC report 83/19, earthquake Engineering research Centre University of California, Berkeley.
- Filipou F.C.**, 1996. "Non linear static and dynamic analysis for evaluation of structures"3rd European conference on structural Dynamic Eurodyn 96, Florence, Italia , pp.395 – 402.
- Fléjou J.L.** 1993."Comportement dynamique des structures de génie civil avec liaison semi rigides" Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Fleury F.** 1996. "Modélisation des structures en béton armé sous séisme. Cas du nœud d'ossature" Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal, Clermont II.
- Frey F., Jirousek J.**, "Structures tridimensionnelles à parois minces", EPFL – ISS – Laboratoire de mécanique des structure et milieux continus (LSC), Lausanne,

- Switzerland, 1992.
- Friedman Z. & Komatka J.B.** 1993. "An improved two node Tomoshenko beam finite element" *Computers and structures*, vol. 47, n° 3, pp. 473 – 481.
- Ghavamian Sh.**, 1998. "Méthode simplifiée pour la simulation du comportement sismique des structures en béton armé. Traitement des effets de l'élançement et estimateur d'erreurs" Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- Ghavamian Sh. & Mazars J.** 1998. "Stratégie de calculs simplifiées pour l'analyse du comportement des structures en Béton armé : le code EFICOS" *Revue française de génie civil*, vol. 2, n° 1, janvier, 61 – 90.
- Granger L.**, la modélisation du comportement différé du béton – la modélisation du fluage, ENPC, Formation flash, "les éléments finis appliqués au calcul des ouvrages précontraints", Paris, France, 1996.
- Guedes J., Pégon P. & Pinto A.** 1994. "A Fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000", special publication Nr. 1.94.31.JRC, 1 – 21020 Ispra, Italy.
- Guitierrez E., Magonette G. & Verzeletti V.** 1993. "Experimental studies of loading rate effects on reinforced concrete columns" *Journal of engineering mechanics*, ASCE, vol. 119, n° 5, May, pp. 887 – 904.
- Hartl G.**, "Die Arbeitslinie Eingebetteter stöhle unter ernst und Kurzzeitbelastung, Beton and Stahlbetonbau", vol.78, heft 8, pp 221 – 224, Allemagne, Deutsch, 1983.
- Hassan M.**, "Critères découlant d'essais de charge pour l'évaluation du comportement des ponts en béton et pour le choix de la précontrainte", thèse de doctorat n°1296 – EPFL, Lausanne, Suisse, 1996.
- Held A.**, "Influence de la précontrainte sur le comportement en service des ponts en béton", Travail pratique de diplôme – EPFL, Lausanne, Suisse, 1998.
- Hillerborg A.**, "Analysis of a single crack, Fracture mechanics of concrete", edited by F.H. Wittmann, Elsevier science publisher B.V., pp 223 – 243, Amsterdam, Holland, 1983.
- Herman H.J., hansen H. & Roux S.** 1989. "Fracture of disordered elastic lattices in two dimensions" *Phys. Rev. B*, 39, 637 - 648.
- Hrennikof A.**, 1941. "Solution of problems of elasticity by the frame work method" *Journal of applied mechanics*, A169 – A175.
- HSU T.T.C.** 1996. "Towards a unified nomenclature for reinforce concrete theory " *Journal Structural Engineering*, vol. 122, n° 3, march, pp.275 – 283.
- HSU T.T.C.**, "Softened truss model theory for shear and torsion", *ACI Structural Journal*, 85/6, November – December, pp 624 – 635, Detroit, USA, English, 1988.
- HSU T.T.C.**, "Stress and crack angles in concrete membrane elements", *Journal and Structural Engineering*, vol.124 n°12, pp 1476 – 1484, USA, English, 1998.
- HSU T.T.C., Zhang L.X.**, "Tension stiffening in reinforced concrete membrane elements", *ACI Structural Journal*, vol.93 n°1, pp 108 – 115, USA, English, 1996.
- Hughes T.J.R., Taylor R.L. & Kanoknukulchai W.** 1977. "A Simple and efficient finite element for plate bending" *International Journal Numeric methods Engineering*, 11, 1529 – 1543

- Hughes T.J.R. & Tezduyar T.E.** 1981. "Finite element based upon mindlin plate theory with particular reference to the four bilinear isoperimetric element" *Journal Applied mechanics*, 48, pp. 587 – 596.
- Ibrahimbegovic A. & Wilson E.L.** 1991. "Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields" *International journal Numeric methods engineering*, 31, 1393 – 1414.
- Ibrahimbegovic A. & Frey F.** 1992. "Finite elements analysis of linear and non linear deformation of elastic initially curved beams" LSC internal Report 92/02, January, Depart. of civil engineering, Swiss Federal Institute of technology, LSC DGC, EPFL, Lausanne.
- Ile N. & Reynard J.M.** 2000. "Non linear analysis of reinforced concrete shear wall under earthquake loading" *Journal of earthquake Engineering*, vol.4, n° 2, 183, - 213.
- Jain O.P., Trikha D.N., Agarwal S.,** "A finite elements solution of post cracking behaviour of RC slabs, *Advances in concrete slab technology, proceedings of the international conference on concrete slab*", ed. Ravindra K. Dhir, pp 129 – 139, Dundee, Ecosse, English, 1979.
- Jirassek M.,** " Numerical modelling of deformation and failure of materials", Czech technical university, Prague, Tchèque, English, 1998.
- Kachanov L.M.** 1958. "Time of rupture process under creep conditions" *Izv. Akad. Nauk. S.S.R., Old, Nauk., N° 8*, pp. 26 – 31.
- Karihaloo B.,** "Fracture mechanics & structural concrete, *Concrete design and construction*", Longman scientific & technical, Sydney, Australia, 1995.
- Kaufman W. Marti P.,** " Structural concrete : cracked model", *Journal of structural engineering*, vol 124 n°12, pp 1467 – 1475, USA, English, 1998.
- Khalfallah S.** "Bond modelling of flexural reinforced concrete structure" article submitted for publication in the *European Journal of numerical mechanics*, 2007.
- Koprna M.,** "Effets différés, fluage, Retrait et Relaxation", EPFL – IBAP, pp 65, Lausanne, Suisse, English, 1986.
- Kotsovos M.D., Pavlovic M.N.,** " Structural concrete, finite element analysis for limit – state design", Thomas Telford publications, 550 pp, London, UK, English, 1995.
- Kotronis P., Davenne L. & Mazars J.** 1999. "modélisation du comportement dynamique de murs de très faible élancement. Programme SAFE" Rapport interne 223 LMT – Cachan, mars.
- Kotronis P., Mazars J., Chauvel D., Dalbera J. & Pegon P.** 1999 b. "Modèle de béton armé équivalent pour l'analyse du comportement des voiles de très faible élancement . programme SAFE" V^{ème} Colloque National Génie Parasismique et réponse dynamique des ouvrages AFPS99, Vol. II, pp. 661 – 668.
- Kotronis P.** 2000. "une nouvelle stratégie de modélisation des voiles faiblement élancés soumis à une sollicitation dynamique". Proc. forum des associations du génie civil et urbain, AFGC – AUGC - IREX, concours jeunes chercheurs, Lyon – INSA, Juin, pp. 551 – 558.
- Kotronis P., Mazars J. & Davenne L.** 2000 "Simplified modelling strategy for reinforced concrete structures submitted to severe dynamic shear Continuous

damage and fracture", editor Benabdellah Ah, Elsevier, The data science library, pp. 329 – 339.

- Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H.**, Behaviour of concrete under biaxial stresses
Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, vol.66 n°8, pp 656 – 666, Detroit, USA, Michigan, English,1969.
- Laborderie C.L.** 1991."Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable. Modélisation et application à l'analyse des structures en béton" Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Lago A. & Combescure D.** 1998."Numerical analysis of CAMUS III using a fibre model. Non linear push over and dynamic analysis". Rapports DMT SEMT/EMSI/RT/98 – 054 A, CEA Saclay.
- Lambert P. & Thurlimann B.** 1971."Ultimate strength and design of reinforced concrete beam in torsion and bending" IABSE, n° 31 – 1,107, 131.
- Lemaître J.& Chaboche J.L.** 1985."Mécanique des matériaux solides" Editions DUNOD.
- Lemaître J.**1992 "A course on damage mechanics" Springer Verlag Eds.
- Laurencet P.**, "Ouvertures des fissures résiduelles à long terme suite aux actions variables dans les structures en béton", Thèse de doctorat, Lausanne, Suisse, 1999.
- Laurencet P., Rotilio J.D., Jaccoud J.P., Favre R.**, "Influence des actions variables sur l'état permanent des pont en béton précontraint",Rapport OFROU, 171 pp, Berne, 1999.
- Manegotto M. & Pinto P.M.** 1973."Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frame including changes in geometry and bending" IABSE Symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well – defined repeated loads, Final Report, Lisbon.
- Marti P.**, "How to treat shear in structural concrete", ACI Structural Journal, vol.96, pp. 408 – 414, USA, English, 1999.
- Marti P., Alvarez M., Kaufmann W. , Sigrist V.**, "Tension chord model for structural concrete", Structural Engineering International, vol.8 n°4, pp 287 – 298, USA, English, 1998.
- Martin - Pérez B.& Pantazopoulou S.J.** 1998."Mechanics of concrete participation in cyclic shear resistance of RC"Journal of structural engineering, Vol. 124, n° 6, June, pp. 633 – 641.
- Markey I.F.**, "Enseignements tirés d'observations des déformations des ponts en béton et d'analyses non linéaires", Thèse de doctorat – EPFL, Lausanne, Suisse, 1994.
- Massonet C.E. & Cescoto S.** 1980."Mécanique des matériaux"Edition science et lettres, Liège.
- Mau S.T. & Hsu T.T.C.** 1986."Shear design and analysis of low rise structural walls" ACI Structural Journal March - April, pp. 306 – 315.
- Mazars J.** 1984."Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure" thèse de doctorat d'état, Université Paris 6.
- Mazars J., Berthaud Y. & Ramtani S.**1990."The unilateral behaviour of damage

- concrete" Engineering fracture mechanics, Vol. 35, n° 4/5, pp. 629 – 635.
- Mazars J., Ragueneau F., La Borderie Ch.**1998."Material dissipation and boundary condition in seismic behaviour of reinforced concrete structures" Proc Eurocode 98, Computational modelling of concrete structures edit. R de Borst et al. Balkema Rotterdam, pp. 579 – 592.
- Mazars J., Kotronis P. & Ghavamian Sh.** 1999 a. "Stratégie de modélisation de type poutre pour une large variété de problème sismiques" V^{ème} Colloque National Génie Parasismique et réponse dynamique des ouvrages AFPS99, Vol. II, pp. 661 – 668.
- Mazars J., Kotronis P. & Cremer C.** 2000 "Analyses of seismic behaviour of structural walls with various reinforcement and boundary conditions" 12th world conference on earthquake engineering,(CD reference number 2370).
- Mazars J., Kotronis P., & Davenne L.** 2001."A new modelling strategy for the behaviour of shear walls under dynamic loading" Earthquake engineering and structural dynamics (accepted for publication).
- McCormick CW.**1963."Plane stress analysis" Journal of the Structural Division, Vol. 89, n° ST4, pp. 37 – 54.
- McHenry D.** 1943. "A lattice analogy for the solution of stress problems" Journal of the institution of civil engineers, n°2, 1943 - 1944, Papers n°5350, December, 59 - 82.
- Merrabet O., Djerroud M., Heinfling G. & Reynouard G.M.**1995."Intégration d'un modèle élastoplastique fissurable pour le béton dans le code Aster" Contract study EDF/DER, intermediate report n° 1/943/001, National institute for applied sciences, Lyon, France, pp. 49.
- Merabet W., Khalfallah S.** 2007 – 1. "Tension stiffening model for RC beams based on fracture energy concept" article soumis dans Australian Journal of Structural Engineering
- Merabet W., Khalfallah S.** 2007 – 2. "Shear behaviour of RC beam using tension stiffening model of concrete" séminaire national de genie civil, université d'Annaba,20 – 21 novembre 2007.
- Mestat Ph., Prat M. & al.** 1995."La modélisation des ouvrages". Hermès Publication, Paris.
- Mestat Ph., Prat M. & al.**1997."Calcul des ouvrages généraux de construction" Hermès Publication, Paris.
- Mestat Ph., Prat M. & al.**1999."Ouvrage en interaction" Hermès Publication, Paris.
- Milford R.V., Schnobrich W.C.,** "Numerical model for cracked reinforced concrete", Proceedings of the International Conference on Computer Aided – Analysis and Design of Concrete Structure, part.1, pp 71 – 84, Split, Yugoslavia, English, 1984.
- Mitchell D., Collins M.P.,** "Diagonal compression field theory – a rational model for structural concrete in pure torsion", ACI Journal, vol. 71 n°8, pp 396 – 408, USA, English, 1974.
- Millard A. & al.**1991."Comportement cyclique et dynamique des structures en béton armé" GRECO Géo – matériaux, Rapport scientifique, Reynouard J.M.(ed.), pp. 413 – 452.
- Mo Y.L. & Rothert H.**1997."Effect of softening models on behaviour of reinforce

- concrete framed shear walls" *ACI Structural Journal*, vol.94 n° 6, November – December.
- Mörsch E.** 1909. "Concrete - Steel construction» McGraw – Hill, New York.
- Muttoni A., Schwartz J., Thurlimann B.**, "Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern", Birkhäuser, 145 pp, Basel, Berne, Suisse, Deutsch, 1997.
- Newmark N.M.** 1959. "A Method of computation for structural dynamic", A.S.C.E. Journal of engineering Mechanics Division, Vol.85, pp. 67 – 94.
- OECD.** 1996. "Seismic shear walls ISP NUPEC'S seismic ultimate dynamic response test, comparison report" OCDE/GD (96) 188.
- Oesterle R.G, Fiorato A.E.& Corley W.G.** 1980. "Reinforcement details for earthquake – resistant structural walls" *Concrete International*.
- Ottosen N.S.** 1979. "Constitutive model for short time loading of concrete" *Journal of engineering mechanics ASCE*, vol.105, pp. 127 – 141.
- Ouchenane M.** "Modélisation de l'adhérence des tirants en béton armé" thèse de magister université de Jijel, 2007.
- Owen D.R.J.& Hinton E.** 1980. "Finite Element in plasticity: Theory and practice" Pine ridge Press Ltd, Swansea, England.
- Ozbolt J. Bazant Z.**, "Numerical smeared fracture analysis: Non local micro crack interaction approach", *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 39, pp 635 – 661, USA, English , 1996.
- Panagiotakos T.B.& Fardis M.N.** 1994. "Proposed non linear strut models for infill panels" Note for the PREC8 Network.
- Pang X.B.D. & Hsu T.T.C.** 1996. "Fixed – angle softened truss model for reinforced concrete" *Structural Journal American Concrete Institute* 1996, 93 (2), pp. 197 – 207.
- Pauley T. & Priestley M.J.N.** 1992. "Seism design of reinforced concrete and masonry building" J. Wiley & son, New York.
- Pegon P.** 1994. "A Timoshenko simple beam element in CASTEM 2000", Special publication Nr 1.94.04, JRC, 1 – 21020 ISPRA, Italy.
- Pegon P., Magonette G., Molina F.G., Verzeletti G., Dyngeland T., Negro P., Tirelli D.& Tognoli P.** 1998 a. "Programme SAFE" Rapport du Test 5, JRC.
- Pegon P., Magonette G., Molina F.G., Verzeletti G., Dyngeland T., Negro P., Tirelli D.& Tognoli P.** 1998 b. "Programme SAFE" Rapport du Test 12, JRC.
- Pegon P., Plumier C., Pinto A., Molina F.G., Gonzalez P., Tognoli P.& Hubert O.** 2000. "U – Shaped – wall Description of the experimental set – up" JRC ISPRA.
- Penelis G.G. & Kappos A.J.** 1997. "Earthquake resistant concrete structures" London : Spon (Chapman & Hall).
- Peter J.** 1964. "Zur Bewehrung von Scheiben und schalen für Hauptspannungen schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung" Doktor Ingenieur Dissertation, T.H. Stuttgart.
- Prat M., Clément J.L., Paschetta W., Ulm F.J.**, "Application des éléments finis au calcul des ouvrages précontraints", 13^{ème} congrès de la FIP, la technique française du béton, AFPC, pp 163 – 169, Amsterdam, Pays – Bas, 1998.
- Prat M.**, Apport de la méthode des éléments finis, ENPC, Formation Flash, "les

- éléments finis appliqués au calcul des ouvrages précontraints", Paris, France, 1996.
- Prat M., Bisch P., Mestat P., Millard A., Pijaudier – Cabot G.**, "Calcul généraux des ouvrages de construction", Hermès, 767 pp, Paris, France, 1997.
- Przemieniecki J.S.**, 1968."Theory of matrix structural analysis" McGraw - Hill, New York.
- Ragueneau F.**1999."Fonctionnement dynamique des structures en béton. influence des comportements hystérétiques locaux" Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- Ramtani S.**1990."Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral"Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Reinhardt H.W., Cornelissen H.A.W.**, "Zeitstandzugversuche an beton", Baustoffe 85, pp 162 – 167, Delft, Pays – Bas, Deutsch, 1985.
- Rhides S.B. & Collins M.F.**, 1989. "Influence of axial tension on the shear capacity of reinforce concrete members" ACI Structural Journal, vol.86 n°5, pp 570 – 580.
- Ritter W.**1899."Die Bauweise Hennebique"Schweizerische Bauzeitung, 33(7), 59 – 61.
- Rossier S., Burdet O. , Favre R.**, "Concrete tie model for the flexural behaviour of RC and PC sections", 2nd International PhD Symposium in civil engineering, Budapest, Hungry, 1998.
- Rotilio J.D.**, "Contribution des actions variables aux déformations à long terme des ponts en béton", thèse de doctorat EPFL, pp 1870, Lausanne, Suisse, 1998.
- Saouma V.E.**, "Introduction to continuum mechanics and elements of elasticity / solid mechanics", EPFL département des matériaux, laboratoire des matériaux de construction, Lau, Suisse, English, 1998.
- Sarrasin A.**, "Béton armé, contribution à l'étude de la création de possibilités de travail", questions techniques, F. Rouge, & Cie S.A., librairie de l'université de Lausanne, n°10, 57 p., Lausanne, Suisse, 1945.
- Shkoukani H.& Walraven J.C.**, "Sustained tensile strength of concrete", IABSE colloquium, pp 725 – 729, Stuttgart, Allemagne, 1991.
- SIA**, "Action sur les structures porteuses : SIA 160", Norme Suisse, 505 160, Switzerland, 1989.
- SIA**, "Ouvrage en béton : SIA162", Société des ingénieurs et des architectes – norme, vol. 162, Zurich, Suisse, 1993.
- Sippel T.M.**, "Zum trag und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Betriebsbelastung Institut für Werkstoffe im Bauwesen", Mitteilungen, Universität Stuttgart, Germany, Deutsch, 1996.
- Stempniewski L. & EIBL J.**, Finite Elemente im Stahlbeton, Betonkalender, Ernest and Sohn, 82/1, pp 249 – 312, Berlin, Allemagne, deutsch, 1993.
- Stolarsky H. & Belytchko** 1982."Membrane locking and reduced integration for curved element" Journal applied mechanics, 49, pp. 172 – 176.
- Stolarsky H. & Belytchko** 1983."Shear and Membrane locking in curved element" Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 41.
- Talbot A.N.** 1909."Test of reinforced beam: resistance to web stress of 1907 and 1908 " Bull. 29, University of Illinois, Engineering of Experiment Station,

Urbana, III

- Taylor R.L.** 1996. "FEAP. A Finite element analysis program, version 5.01 manual" University of California, Berkeley.
- Terrien M.** 1980. "Emission acoustique et comportement mécanique post critique d'un béton sollicité en traction" Bulletin Liais. Du L.C.P.C., vol.105, réf. 23983.
- Tessler A. & Dong S.B.** 1981. "on a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements" Computers and structures, 14, pp. 335 – 344.
- Timoshenko S. & Woinowsky – Krieger S.**, "Theory of plates and shells", 2nd edition McGraw – Hill international editions, pp 580, Singapore, English, 1985.
- Tirelli D. & Tognoli P.** 1998 a. "Programme SAFE" Rapport du Test 5, JRC.
- Tirelli D. & Tognoli P.** 1998 b. "Programme SAFE" Rapport du Test 12, JRC.
- Trevino J.**, "méthode directe de calcul de l'état de déformation et de contrainte à long terme d'une structure composée", Thèse de doctorat n° 728 EPFL – IBAP, Lausanne, Suisse, 1988.
- Ulm F.J.**, la modélisation de la précontrainte – l'introduction de la précontrainte dans les éléments finis, ENPC, Formation Flash, "Les éléments finis appliqués aux calculs des ouvrages en béton précontraint", Paris, France, 1996.
- Ulm F.J.** 1996. "un modèle d'endommagement plastique : application aux béton de structure" Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Série Ouvrage d'Art OA19.
- Van Der Veen C.**, "Cryogenic bond stress – slip relation ship", Thèse de doctorat, Delft university, pp 111, Delft, Pays – Bas, English, 1990.
- Vecchio F.J. & Collins M.P.**, "the modified compression field – theory for reinforced concrete elements subjected to shear", ACI Journal, vol. 83, pp 219 – 231, USA, English, 1986.
- Vecchio F.J. & Collin M.P.** 1993. "Compression response of cracked reinforced concrete" Journal Structures Engineering, ASCE, 119 (12), pp.3590 – 3610.
- Vecchio F.J. & Shim W.** 2004. "Experimental and analytical re-examination of classical 'concrete beam tests" Journal of Structural Engineering, ASCE, 130(3), pp. 460 – 469.
- Vervuurt A.** 1997. "Interface fracture in concrete" PhD thesis, Delft University of technology.
- Vismann U.**, «Zuverlässigkeitstheoretische Verifikation von Bemessungskriterien im Stahlbetonbau", Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau Technische Universität München, vol. 4/95, pp. 241, München, Germany, Deutsch, 1995.
- Wagner H.** 1929. "Eben blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech" (Metal beam with very thin webs). Zeitschrift für Flugtechnik und Motorloftschiffahrt, 20 (8 – 12), Berlin.
- Walraven J.C.**, "Aggregate interlock under dynamic loading", Darmstadt, Concrete, 2, pp 143 – 156, Germany, English, 1987.
- Walraven J.C.**, "Aggregate interlock: a theoretical and experimental analysis", Delft university of technology, faculty of civil engineering, 197 p., Delft, Holland, English, 1980.
- Walraven J.C., Freney J., Pruijssers A.**, "Influence of concrete strength and load

history on the shear friction capacity of concrete member", PCI Journal, pp 66 – 83, English, 1987.

Walther R., Miehlsbradt M., "Dimensionnement des structures en béton – Bases et technologie", Presse polytechnique et universitaires de Romandes, Traité de génie civil, vol. 7, 388 pages, Lausanne, Suisse, 1990

Withey M.O. 1908."Test of plain and reinforced concrete series of 1097" Bulletin University of Wis., Engineering Series, 4(2), pp. 1 – 66.

Wu Z., Yoshikawa H. & Tanabet T., "Tension stiffness model for cracked reinforced concrete", Journal of Structural Engineering , vol.117 n°3, pp 715 – 732, USA, English, 1991.

Yettram AL.& Husain H.M. 1966."Plane – Frame work methods for plates in extension". Journal of Engineering Mechanics Division, vol.92, n° EM1, pp. 157 – 168.

Zararis P.D., "Aggregate interlock and steel shear forces in the analysis of RC membrane elements", ACI Structural Journal , vol.94 n°2, pp 159 – 170, USA, English, 1997.

Zhang L.X. & Hsu T.T.C., "Behaviour and analysis of 100 Mpa concrete membranes elements", Journal of Structural Engineering , vol.124 n°1, pp 24 – 34, USA, English, 1998.

Zienkiewicz O.C. & Taylor R.L., "The finite element method", McGraw – Hill international editions / fourth edition, 2 vol., 1454 p, London, UK, English, 1989.

Zienkiewicz O.C, Valliappan S. & King I.P. 1969."Elasto – plastic solutions of engineering problems. Initial stress finite element approach". International Journal for numerical methods in engineering, vol.1, pp. 75 – 100.