وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère *de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY

جامعة باجي مختار

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

-عنابة-

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2023/2024

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

Étude De L'existence Et De L'unicité Des Solutions De Quelques Équations Différentielles Fractionnaires

Spécialité

Mathématiques appliquées

Par

MOUY Mounya

DIRECTEUR DE THÈSE :	Yamina LASKRI	**Prof.**	**ENSTI - Annaba**
CO-DIRECTEUR DE THÈSE :	Hamid BOULARES	**Prof.**	**U - Guelma**

Devant le jury

PRESIDENT:	Assia CHADLI	**Prof.**	**U.B.M - Annaba**
EXAMINATEUR :	Halim ZAGHDOUDI	**Prof.**	**U.B.M - Annaba**
EXAMINATEUR :	Kheireddine BELAKROUM	**M.C.A.**	**U.F.M -Constantine 1**
EXAMINATEUR:	Abdelghani LAKHDARI	**M.C.A.**	**ENSTI - Annaba**

ملخـص

في هذا العمل ، إستعملنا مبدأ المتوسط لدراسة معادلة كابوثو هادامارد البانتوجراف العشوائية الكسرية (م ك ه ب ع ك) مدفوعة بالحركة البراونية:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}\mathcal{X}(\varsigma) = b(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma)) + \sigma_1(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma))\dfrac{d\mathcal{B}(\varsigma)}{d\varsigma} \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0, \end{cases}$$

بحيث $\eta \in \left(0, \dfrac{T-1}{T}\right)$،

$\mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}$ هو المشتق الكسري كابوثو هادامار (م ك ك ه) $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$\mathcal{B}(\varsigma)$ هي حركة براونية قياسية.

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود ووحدانية الحل لجملة هذه المعادلات

الكلمات المفتاحية : مبدأ المتوسط، المشتق الكسري لكابوثو هادامار، معادلة البانثوجراف، نهج خاسمينسكي.

Résumé

Dans ce travail, nous utilisons le principe de la moyenne pour résoudre un système d'équations du pantographes différentielles fractionnaires stochastiques de Caputo-Hadamard dirigé par un mouvement Brownien :
Le systéme est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}\mathcal{X}(\varsigma) = b(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma)) + \sigma_1(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma))\dfrac{d\mathcal{B}(\varsigma)}{d\varsigma} \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0, \end{cases}$$

où $\eta \in \left(0, \frac{T-1}{T}\right)$,
$\mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard (DFCH), $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, ,
$\mathcal{B}(\varsigma)$ est un mouvement brownien standard.
Le but de cette thèse est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de ce système.

Mots clés : Le principe de moyenne, Dérivé fractionnaire de Caputo-Hadamard, Équations pantographes, Approche de Khasminskii.

Abstract

In this work, we use the averaging principle to solve a system of Caputo-Hadamard stochastic fractional differential pantograph equations (FSDPEs) driven by a Brownian motion :
The system is as follows :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}\mathcal{X}(\varsigma) = b(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma)) + \sigma_1(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma))\dfrac{d\mathcal{B}(\varsigma)}{d\varsigma} \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0, \end{cases}$$

where $\eta \in \left(0, \frac{T-1}{T}\right)$,
$\mathfrak{D}_{\varsigma}^{\alpha}$ is the Caputo-Hadamard fractional derivative (CHFD), $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$,
$\mathfrak{B}(\varsigma)$ is a standard Brownian motion The goal of this thesis is the study of the existence and uniqueness of this system.

Key words : Averaging principle ; Caputo-Hadamard fractional derivative ; Pantograph equations ; Khasminskii approach.

A mes chers parents, Mon mari, Mes enfants et toute ma famille

Remerciement

Avant d'aborder la partie purement mathématique de mon mémoire, je tiens tout d'abord à remercier me
Profe
Boulare
pour leurs encouragement
bien ce travail dans de bonne
J'adre
suit :
Profe
Profe
Docteur Belakroum Kheireddine Membre
Docteur Lakhdari Abdelghani Membre
qui ont acce
Sans oublier me
soutien morale ainsi que leurs souhait

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

1 Problématique

La problématique abordée dans cette thèse consiste à utiliser le principe de la moyenne pour étudier L'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations du pantographe différentielles stochastiques fractionnaires du caputo-hadamard.

1.1 Historique sur le calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le domaine de l'analyse mathématique qui traite de l'étude et de l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le terme "fractionnaire" est une erreur de dénomination, mais il a été conservé en suivant l'usage prédominant. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien mais néanmoins nouveau. C'est un sujet ancien, car à partir de certaines spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), il a été étendu jusqu'à aujourd'hui. En fait, l'idée de généraliser la notion de dérivée à un ordre non entier, en particulier à l'ordre $1/2$, est contenue dans la correspondance de Leibniz avec Bernoulli, L'Hôpital et Wallis. Euler a franchi la première étape en observant que le résultat de l'évaluation de la dérivée de la fonction puissance a un sens pour un ordre non entier grâce à sa fonction Gamma.

Dans [11], les principaux résultats d'A.V. Letnikov sur le calcul fractionnaire sont présentés, y compris ses thèses et une longue discussion entre A.V. Letnikov et N.Ya. Sonine sur les fondements du calcul fractionnaire. Le développement moderne des idées de Letnikov est exposé, et leurs applications à la dynamique souterraine et à la dynamique des populations sont présentées.

Cependant, cela peut également être considéré comme un sujet nouveau, car il n'a été traité que lors de conférences spécialisées et dans des traités au cours des 30 dernières années. Le mérite en revient à B. Ross d'avoir organisé la première Conférence sur le Calcul Fractionnaire et ses Applications à l'Université de New Haven en juin 1974. Le premier monographie est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui, après une collaboration commune débutée en 1968, ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974.

Ces dernières années, un intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par les applications qu'il trouve dans différents domaines de la science, notamment l'analyse numérique, l'économie et la finance, l'ingénierie, la physique, la biologie, etc.

Pour l'économie et la finance, nous citons la collection d'articles sur le thème de la différenciation fractionnaire et des processus à mémoire longue, éditée par Baillie et King (1996), qui est parue en tant que numéro spécial dans le Journal of Econometrics. Pour l'ingénierie et la physique, nous mentionnons le livre édité par Carpinteri et Mainardi, intitulé Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, qui contient des notes de cours d'un cours CISM consacré à certaines applications de techniques connexes en mécanique, et le livre édité par Hilfer (2000), intitulé Applications of Fractional Calculus in Physics, qui offre une introduction au calcul fractionnaire pour les physiciens, et rassemble des articles de revue rédigés par certains des principaux experts. Dans ces livres, nous recommandons les enquêtes introductives sur le calcul fractionnaire de Gorenflo et Mainardi et de Butzer et Westphal, respectivement.

En plus de quelques livres contenant les actes de conférences internationales et d'ateliers sur des sujets connexes, nous mentionnons des revues régulières consacrées au calcul fractionnaire, à savoir le Journal of Fractional Calculus (Descartes Press, Tokyo), lancé en 1992, avec le Professeur Nishimoto comme rédacteur en chef, et le Fractional Calculus and Applied Analysis à partir de 1998, avec le Professeur Kiryakova comme rédacteur en chef (Diogenes Press, Sofia). Pour plus d'informations sur cette revue, veuillez visiter le site web www.diogenes.bg/fcaa. De plus, des sites web consacrés au calcul fractionnaire sont également apparus, dont nous attirons l'attention sur www.fracalmo.org, dont le nom provient de Fractional CaLculus Modelling, et les liens web connexes.

1.2 L'equation pantographe [43]

L'équation du pantographe représente est une équations différentielles à retard, suscitant un vif intérêt en raison de ses nombreuses applications. Récemment, des questions fondamentales ont émergé concernant l'existence et l'unicité des solutions pour différentes classes d'équations de pantographes fractionnaires.

Définissons d'abord le pantographe comme un dispositif composée de cinq liaisons reliées par

des articulations à broches, formant des paires tournantes. Cette structure est agencée de manière à créer des parallélogrammes, permettant ainsi à un point de reproduire des mouvements identiques à ceux d'un deuxième point. Le pantographe offre la possibilité de reproduire de manière agrandie ou réduite, aussi précisément que possible, la trajectoire décrite par un point donné. L'équation du pantographe se positionne comme l'une des équations différentielles à retard les plus significatives, jouant un rôle prépondérant dans divers domaines des mathématiques pures et appliquées, notamment les systèmes dynamiques, le contrôle, les probabilités, la théorie des nombres, la mécanique quantique et l'électrodynamique.
Notamment, Taylor et Ockendon ont formulé ce type d'équation pour décrire la réception du courant électrique d'une locomotive électrique par le pantographe. La Figure 1 présente le modèle du pantographe.

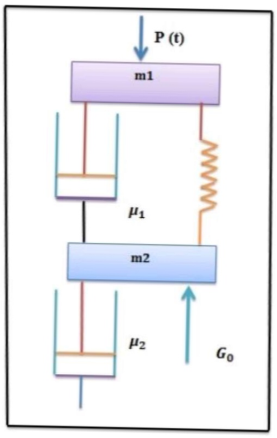

FIGURE 1 – modèle du pantographe

L'analyse fonctionnelle probabiliste est un domaine de recherche mathématique important en raison de ses applications aux modèles probabilistes dans les problèmes appliqués. La théorie des opérateurs aléatoires est nécessaire à l'étude des différentes classes d'équations aléatoires. En effet, dans de nombreux cas, des modèles mathématiques ou des équations utilisées pour d'écrire des phénomènes dans les domaines de biologique, physique, l'ingénierie et les sciences des systèmes contiennent certains paramètres ou coefficients qui ont une interprétation spécifique, mais dont les valeurs sont inconnues. Il est donc plus réaliste de considérer ces équations qui sont beaucoup moins difficiles à manipuler mathématiquement que les équations déterministes [14].

1.2 L'approche de Khasminskii

L'approche Khasminskii est une méthode utilisée dans l'étude des processus stochastiques, notamment dans le contexte des équations différentielles stochastiques (EDS) et du principe de moyenne. Nommée d'après le mathématicien Rafail Khasminskii, cette approche joue un rôle déterminant dans l'analyse du comportement des systèmes influencés par le bruit aléatoire sur de longues périodes.

Les éléments fondamentaux de l'approche de Khasminskii

Le principe de moyenne :ce principe est utilisé pour simplifier l'analyse des systèmes stochastiques multi-échelles. Lorsqu'un système comporte des composants qui évoluent sur différentes échelles de temps, le principe de moyenne contribue à réduire la complexité en faisant la moyenne des composants qui varient rapidement, permettant ainsi une description simplifiée de la dynamique lente.

Les équations différentielles stochastiques (EDS) :la méthode de Khasminskii est fréquemment appliquée aux EDS, qui décrivent l'évolution de systèmes sous l'influence de perturbations aléatoires. Ces équations sont de la forme :

$$dX_t = f\left(X_t\right)dt + g\left(X_t\right)dW_t$$

ou X_t est l'état du système au temps t, f représente la partie déterministe, g représente la partie diffusion et W_t est un processus Wiener ou mouvement brownien.

Méthodes de perturbation :L'approche de Khasminskii implique souvent des méthodes de perturbation, où la solution du EDS est exprimée sous la forme d'une expansion d'un petit paramètre. Cela aide à comprendre l'impact de petites perturbations aléatoires sur le système.

Loi des grands nombres et théorème central limite pour les EDS :l'approche utilise des outils probabilistes tels que la loi des grands nombres et le théorème central limite pour dériver le comportement limite des processus stochastiques sur de longues périodes.

Techniques d'homogénéisation :ces techniques sont utilisées pour étudier le comportement limite de systèmes à coefficients oscillant rapidement. La méthode de Khasminskii implique souvent une homogénéisation pour dériver des équations efficaces qui se rapprochent du comportement du système complexe d'origine.

Applications de l'approche Khasminskii Finance mathématique : dans la modélisation des marchés financiers où les prix des actifs suivent des processus stochastiques.
Physique et ingénierie : pour les systèmes soumis à des fluctuations aléatoires, telles que le mouvement des particules dans des milieux aléatoires.
Biologie : Dans la modélisation des populations et des écosystèmes où les taux de natalité et de mortalité sont influencés par des facteurs environnementaux aléatoires.
Théorie du contrôle : Dans l'analyse de systèmes stochastiques contrôlés.

1.4 Historique sur le calcul stochastique

[1] Le calcul stochastique se consiste à étudier des phénomènes aléatoires temporels, constituant ainsi une extension de la théorie des probabilités. Il convient de ne pas confondre cette discipline avec la technique des calculateurs stochastiques. Le terme "stochastique" est synonyme d'aléatoire, faisant référence au hasard et s'opposant par définition au déterminisme. Les équations différentielles stochastiques ont trouvé une large application dans divers domaines tels que les sciences, la géométrie, la biologie, et presque toutes les sciences appliquées. La littérature actuelle propose de nombreux articles traitant l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques, comme référencés dans [40] et [59]. Par ailleurs, l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques abstraites d'ordre fractionnaire avec retard, pilotées par des mouvements browniens, ont été

examinées dans l'étude [16].

1.2.2 Organisation du manuscrit

La thèse présentée est composé d'une introduction, quatre chapitres (dont deux sont dédiés aux rappels d'outils fonctionnels essentiels pour la compréhension des résultats obtenus), et enfin, une conclusion suivie de perspectives futures. Dans le premier chapitre, qui se divise en deux parties distinctes, nous abordons initialement des rappels en analyse de Fourier et en analyse fractionnaire. Ces notions serviront de fondement pour les résultats ultérieurs. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux définitions élémentaires et aux notions fondamentales liées au calcul fractionnaire. Nous examinons, par exemple, les définitions courantes de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire, telles que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, de Caputo, Hadamard, ainsi que celle au sens de Caputo-Hadamard.

Le deuxième chapitre introduit des concepts liés aux probabilités et aux processus stochastiques, notamment le processus gaussien. Nous présentons les termes et notions essentiels pour définir le mouvement Brownien, les processus d'Itô et les intégrales stochastiques.

Dans le troisième chapitre, la problématique de cette thèse à été motivé par des travaux récent du ZHang, qui est intéressé à l'étude de l'existence et l'unicité de la solutions d'un problème fractionnaire stochastique.

En ce qui concerne le quatrième chapitre, il constitue l'objectif principal de la thèse, contenant des résultats originaux sur l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions d'un système d'équations du pantographe différentielles fractionnaires stochastiques de Caputo-Hadamard dirigé par un mouvement Brownien suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}\mathcal{X}(\varsigma) = b(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma)) + \sigma_1(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma))\dfrac{d\mathcal{B}(\varsigma)}{d\varsigma} \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

où $\eta \in \left(0, \frac{T-1}{T}\right)$, $\mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard (DFCH), $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, pour chaque $\varsigma \geq 1$, $b : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma_1 : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont des fonctions continues mesurables (FC), $\mathcal{B}(\varsigma)$ est le mouvement brownien standard m-dimensionnel sur

$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ qui est l'espace de probabilité. La valeur initiale $\mathcal{X}_0$ est une variable aléatoire de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_0$-mesurable, vérifiant $E|\mathcal{X}_0|^2 < \infty$. A la lumière de quelques suggestions, les solutions des FSDPE peuvent être approchées par des solutions de systèmes stochastiques. Nous élargissons l'approche classique de Khasminskii des équations stochastiques fractionnaires de Caputo-Hadamard pour analyser les solutions du système avant et après l'application du principe de la moyenne. Qui nous fournit un exemple appliqué expliquant les résultats souhaités.

Remarque : Les conclusions de ce chapitre ont été publiés dans le journal "fractalfract" à partir de décembre 2022.

CHAPITRE 1

NOTIONS SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE

Nous présentons dans ce chapitre, les outils fonctionnels de base ainsi que des éléments de la théorie du calcul fractionnaire nécessaires pour l'élaboration de ce travail. [34] et [55].

1.1 Préliminaires

1.1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Les démonstrations de divers théorèmes d'existence et d'unicité, sont basées sur les théorèmes classiques affirmant l'existence ou l'unicité de points fixes de certains opérateurs.
Tout d'abord on présente le théorème du point fixe de Schauder qui fourni uniquement l'existence d'un point fixe.

Théorème 1.1. *Soit (U, d) un espace métrique complet, U une partie non vide dans E, convexe et fermée, et $T : U \longrightarrow U$ une application telle que $T(U)$ soit relativement compact. Alors T a un point fixe $u \in U : T(u) = u$.*

On introduit maintenant le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 1.2. *Soit* (U, d) *un espace métrique complet,* $0 \leq w < 1,$ *et* $T : U \longrightarrow U$ *une application contractante i-e :*

$$d(Tu, Tv) \leq wd(u, v) \quad \forall u, v \in U. \tag{1.1}$$

Alors, T *admet un point fixe* $u^* \in U$*. De plus,* u^* *est la limite de la suite convergente*

$$u_m(x) = T^m u_0(x), \quad m \in \mathbb{N}^*,$$

où u_0 *est arbitraire dans* U*.*

Inégalité(s) de Cauchy-Schwarz

Enoncé général

Théorème 1.3. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit* $(E, \langle . \mid . \rangle)$ *un espace préhilbertien réel. Soit* $\|.\|$ *la norme euclidienne associée à* $\langle . \mid . \rangle$*. Alors :*

$$\forall (x, y) \in |\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| . \|y\| .$$

Mémoriser cette solution devient plus facile en se situant dans l'ensemble pour retenir ce résultat consiste à se placer dans $E = \mathbb{R}^2$*. On a alors,* $\forall (x, y) \in E^2$*, en notant* (x, y) *l'angle entre les vecteurs* x *et* y *:*

$$\begin{aligned} |\langle x \mid y \rangle| &= |\|x\| . \|y\| . \cos((x, y))| \\ &= \|x\| . \|y\| . |\cos((x, y))| \\ &\leq \|x\| . \|y\| . \end{aligned}$$

Cas particuliers classiques

Théorème 1.4. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz). En se plaçant dans* $E = \mathbb{R}^n$ *(avec* $n \in \mathbb{N}$*)*

muni du produit scalaire usuel

$$(x,y)=\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}\right)\rightarrow |\langle x \mid y\rangle| = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{1.2}$$

Théorème 1.5. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale, version "intégrale sur un segment"). En se plaçant sur $E = C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) muni du produit scalaire*

$$(f,g)\rightarrow \langle f \mid g\rangle = \int_b^a f(t)g(t)dt. \tag{1.3}$$

on obtient :

$$\forall\left(f,g\right)\in\left(C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\right)\right)^2,\left|\int_b^a f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2dt}.\sqrt{\int_a^b g(t)^2dt}. \tag{1.4}$$

Théorème 1.6. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale, version "intégrale sur un intervalle quelconque"). En se plaçant sur l'espace $E = \left\{\mathcal{L}_2\left(I,\mathbb{R}\right)\cap C\left(I,\mathbb{R}\right)\right\}$ des fonctions* ***continues de carrés intégrables*** *sur I (avec I un intervalle réel quelconque) muni du produit scalaire $(f,g)\rightarrow\langle f\mid g\rangle = \int_I fg$, on obtient :*

$$\forall\left(f,g\right)\in\left(\mathcal{L}_2\left(I,\mathbb{R}\right)\right)^2,\left|\int_I fg\right| \leq \sqrt{\int_I f^2}.\sqrt{\int_I g^2}. \tag{1.5}$$

L'inégalité de Gronwall-Bellman

Le lemme de Gronwall-Bellman est exprimé dans sa forme standard comme suit :

Lemme 1.1. *(Gronwall-Bellman)*
Soit $f(t)\geq 0$, $h(t)\geq 0$ et $k(t)\geq 0$ des fonctions intégrables et définies sur l'intervalle $[a,b]$.
Si $f(t)$ satisfait :

$$f(t) \leq h(t) + \int_0^t k(t)f(t)dt, \quad \forall t \in [a, b].$$

alors on a :

$$f(t) \leq h(t) + \int_0^t h(s)k(s)\exp\left(\int_s^t k(\tau)d\tau\right)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

En particulier si $k(t)$ est constante et $h(t)$ est non décroissante, alors

$$f(t) \leq h(t)\exp(ct), \quad \forall t \in [a, b]$$

Lemme 1.2. *(Lemme de Gronwall, forme différentielle)*
Soit $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, dérivable sur (t_0, t_1). Soit $v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^+$ continue telle que

$$u^{'}(t) \preceq v(t)\, u(t), \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors

$$u(t) \preceq u(t_0)\exp\left(\int_{t0}^t v(s)\, ds\right).$$

Démonstration : voir [46]

1.1.2 Fonctions spéciales

On entend par "fonction spéciale" toute fonction qui n'est pas élémentaire (polynôme, fonction trigonométrique, exponentielle, etc) ayant une grande importance et plusieurs applications. Dans cette partie on en rappelle quelques unes qu'on aura besoin dans notre travail.

Fonction Gamma

L'une des notions fondamentales en calcul fractionnaire est la fonction Gamma, une généralisation de la fonction factorielle. Ci-dessous, nous exposons quelques résultats associés à cette fonction.

Définition 1.1. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \Re(z) > 0. \tag{1.6}$$

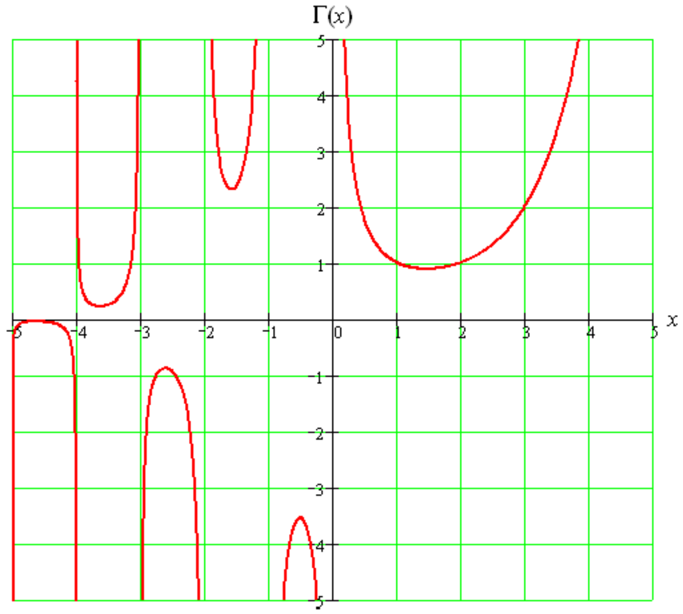

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction Gamma

Lemme 1.3. *L'intégrale* (1.6) *est convergente pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\Re(z) > 0$.

Théorème 1.7. *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

2. *On peut également représenter* $\Gamma(z)$ *par la limite*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)....(z+n)}, \qquad \Re(z) > 0.$$

La condition $\Re(z) > 0$ *peut être étendue à* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

3. *La fonction* $\Gamma(z)$ *est analytique dans* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{-}$.

Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'employer la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.2. *La fonction Bêta est définie par :*

$$\beta\left(z,w\right)=\int_{0}^{1}u^{z-1}\left(1-u\right)^{w-1}du,\ z>0,\ w>0.$$

Proposition 1.1. *Soit* $(z,w)\in\mathbb{R}_{+}^{2}$ *nous avons*

1)

$$\beta\left(z,w\right)=\beta\left(w,z\right).$$

2)

$$\beta\left(z,w\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{\Gamma\left(z+w\right)}.$$

Fonction de Mittag-Leffler

Les fonctions de Mittag-Leffler représentent une généralisation de la fonction exponentielle, jouant un rôle essentiel dans la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants, mais avec une particularité : elles impliquent des dérivées fractionnaires. Cette extension mathématique trouve des applications importantes dans divers domaines, notamment la physique, la biologie et la finance, offrant un cadre puissant pour modéliser des phénomènes complexes avec des dérivées d'ordre non entier.

Définition 1.3. *Pour* $z\in\mathbb{C}$, *la fonction de Mittag-Leffler* $E_{\alpha}(z)$ *est définie par :*

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad(\alpha>0).\tag{1.7}$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définit par $E_{\alpha,\beta}(z)$ par :

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.8}$$

Exemple 1.1. *Pour des valeurs spéciales de α, β on a :*
$E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z,$ $\qquad E_{1,2} = \dfrac{e^z - 1}{z},$
$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z),$ $\qquad E_{2,2}(z^2) = \dfrac{\sinh(z)}{z},$
$E_{1/2,1}(z) = e^{z^2} erfc(-z),$
où $erfc(z)$ est la fonction d'erreur complémentaire :

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Dans le théorème suivant on a regroupé quelques propriétés des fonctions de Mittag-Leffler, qui seront utiles pour notre analyse des équations différentielles fractionnaires.

Théorème 1.8. *La fonction Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*

1. *C'est une fonction entière.*

2. *Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag-Leffler généralisée vérifie :*

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha}) dt = \frac{1}{1-z}.$$

3. *La transformée de Laplace est :*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a t^{\alpha}) dt = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha} \mp a)^{k+1}}, \qquad \Re(s) > |a|^{1/\alpha}.$$

où $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k} E_{\alpha,\beta}(x)$. En particulier pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\frac{1}{2}(k-1)} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{k}(\pm a\sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{s} \mp a)^{k+1}}, \qquad \Re(s) > a^2.$$

4. *Dérivation de la fonction de Mittag-Leffler d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)) = t^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(\lambda t^\alpha).$$

5. *Intégration de la fonction de Mittag-Leffler*

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)t^{\beta-1}dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha).$$

Cette relation est un cas particulier de l'égalité

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^z (z-t)^{\mu-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)t^{\beta-1}dt = z^{\beta+\mu-1}E_{\alpha,\beta+\mu}(\lambda z^\alpha), \quad (\beta > 0, \mu > 0).$$

Corollaire 1.1. *Pour* $0 < \alpha < 1, t \in [0,T]; \lambda > 0,$ *on a :*

(1) $0 < E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) < \infty$ *et* $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}.$

(2) $t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)$ *est une fonction complètement monotone et :*

$$\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) < \infty; \quad \int_0^t s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda s^\alpha)ds < \infty.$$

1.2 Intégration et dérivation fractionnaires

Le domaine du calcul fractionnaire s'inscrit dans l'analyse mathématique, explorant la généralisation des concepts de dérivation et d'intégration à des ordres non entiers, qu'ils soient réels ou complexes. Cette discipline s'intègre dans le cadre plus vaste des opérateurs pseudo-différentiels. De plus, plusieurs approches ont été élaborées pour attribuer une signification à la fonction $f(x)$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans cette section, nous avons opté pour la présentation de trois de ces approches spécifiques, à savoir l'approche de Riemann-Liouville, de Hadamard et celle de Caputo, en se limitant au cas réel. Nous examinerons leurs caractéristiques distinctives et propriétés.

Intégrale fractionnaire

Définition 1.4. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on définit formellement l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α par l'expression suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a. \tag{1.9}$$

où Γ est la fonction Gamma(1.6) et $-\infty \leq a < x < \infty$,

Remarque 1.1. *Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*, I_a^\alpha$ coïncide avec l'intégrale répétée $n-$ fois de la forme*

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n-1} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

Lorsque $a = -\infty, I_a^\alpha$ est appelée intégrale fractionnaire au sens de Liouville, pour $a = 0$ elle est dite intégrale fractionnaire de Riemann.
Notons que la formule précédente reste valable lorsque $a < x < b < \infty$.

Théorème 1.9. *Si $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, avec $a > -\infty$, alors $I_a^\alpha f(x)$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et l'on a $I_a^\alpha \in \mathbb{L}^1[a,b]$.*

Nous allons maintenant voir quelques aspects de l'opérateur d'intégration fractionnaire de R-L.

Théorème 1.10. *Soient $\alpha, \beta > 0$, pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, on a :*

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x), \tag{1.10}$$

Un deuxième résultat concernant l'interversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire est donnée par :

Théorème 1.11. *Soit $\alpha > 0$, et soit $(f_k)_{k=1}^\infty$ une suite uniformément convergente de fonctions continues sur $[a,b]$. Alors, on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de R-L et le signe limite comme suit :*

$$\left(I_a^\alpha \lim_{k\to\infty} f_k \right)(x) = \left(\lim_{k\to\infty} I_a^\alpha f_k \right)(x). \tag{1.11}$$

En particulier, la suite $(I_a^\alpha f_k)_{k=1}^{\infty}$ *est uniformément convergente.*

Dérivation fractionnaire

Définition 1.5. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $n-1 \leq \alpha \leq n$; *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L) d'ordre* α *d'une fonction* f *est formellement définie par*

$$D_a^\alpha f(x) := D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a,$$

où $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$.
En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$D_a^0 f(x) = D I_a^1 f(x) = f(x),$$

$$D_a^m f(x) = D^{m+1} I_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} I_a^1 f(x).$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de R-L coïncide avec la dérivée usuelle pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction $f(x)$ en un point qui ne dépend que de l'allure de $f(x)$ au voisinage restreint de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de L-R d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a, x). On dit qu'elle est à caractère non local.
Le résultat suivant établi une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha f$.

Proposition 1.2. *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha]+1$. *Si* $f \in AC^n[a,b]$, *alors la dérivée fractionnaire* $D_a^\alpha f$ *existe presque partout sur* $[a,b]$, *en plus elle est donnée par :*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)(a)}}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{x-t}^{\alpha-n+1}.$$

Proposition 1.3. *Si* $0 < \alpha < 1$ *et* $f \in AC[a,b]$, *alors*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right].$$

-Une fonction possédant une dérivée fractionnaire de R-L n'est pas nécessairement continue.

Remarque 1.2. *Si* $f \in C_\gamma[a,b], 0 < \alpha < \gamma < 1;$ *alors* $I^\alpha_{a^+} f \in C_{\gamma-\alpha}[a,b]$ *et si* $f \in C^n_\gamma[a,b]$ *alors* $D^\alpha_{a^+} f(t)$ *existe pour* $t \in]a,b]$.

Définition 1.6. *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *telles que* $n = [\alpha] + 1$. *On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* α *de* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *par :*

$$^C D^\alpha_{a^+} f(t) = D^\alpha_{a^+} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right), p.p, t > a.$$

Remarque 1.3. *Pour* $0 < \alpha < 1, u \in C[0,T]$, *on a :* $^C D^\alpha_{0^+} u(t) = D^a_{0^+} \left(u(t) - u(0) \right),$

où $D^\alpha_{a^+}$ est la dérivée au sens Riemann-Liouville.

Définition 1.7. *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *telles que* $n = [\alpha] + 1$. *Si* $f \in AC^n[a,b]$, *alors la dérivée de Caputo* $^C D^\alpha_a f(t)$ *est continue sur* $[a,b]$ *et admet la représentation intégrale suivante :*

$$^C D^\alpha_{a^+} f(t) = I^{n-\alpha}_{a^+} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t \in [a,b],$$

pour $0 < \alpha < 1$, *on a :* $^C D^\alpha_{a^+} f(t) = I^{1-\alpha}_{a^+} D f(t)$.

Propriétés importantes

Lemme 1.4. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $f \in \mathbb{L}^1[0,T]$, *alors l'égalité*

$$D^\alpha_a I^\alpha_a f(t) = f(t) \tag{1.12}$$

est vraie pour presque tout $t \in [0,T]$.

Théorème 1.12. *Soient* $\alpha, \beta > 0$ *tels que* $n - 1 \leq \alpha < n, m - 1 \leq \beta < m \quad (n, m \in \mathbb{N}^*)$, *alors on a* *a) Si* $\alpha > \beta > 0,$ *alors pour* $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ *la relation*

$$D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t)$$

est vraie presque partout sur [a,b].

b) Si $\beta \geq \alpha > 0$ *et si la dérivée fractionnaire* $D_a^{\beta-\alpha} f$ *existe, alors on a*

$$D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)(t) = D_a^{\beta-\alpha} f(t).$$

c) S'il existe une fonction $\varphi \in \mathbb{L}^1[0,T]$ *telle que* $f = I_a^{\alpha}\varphi,$ *alors*

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(t) = f(t),$$

pour presque tout $t \in [0,T]$

d) Si $f \in \mathbb{L}^1[0,T]$ *et* $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n[0,T],$ *alors l'égalité*

$$I_a^{\alpha} D_0^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^{n-k}[I_0^{n-\alpha} f](0)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} t^{\alpha-k},$$

est vraie presque partout sur $[0,T]$*. En particulier pour* $0 < \alpha < 1$

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(t) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_a^{1-\alpha} f(0).$$

e) Pour $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}^*.$ *telles que* $n = [\alpha] + 1.$ *Si* $f \in C[0,T],$ *on a*

$$^{C}D_{0^+}^{\alpha} I_{0^+}^{\alpha} f(t) = f(t); t \in [0,T].$$

Si f *et* $^{C}D_{0^+}^{\alpha} f \in C[0,T],$ *on a*

$$I_0^{\alpha\,C} D_0^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{k!} t^k, \quad t \in [0,T].$$

En particulier, pour $0 < \alpha < 1$, *on a* $I_0^{\alpha C} D_0^\alpha f(t) = (f(t) - f(0^+))$.

-Si $f \in C^n[0,T]$ *alors* ${}^C D_0^\alpha f \in C[0,T]$.

Théorème 1.13. *Pour une suite de fonctions* $(f_i(t))_{i\in\mathbb{N}}$ *définies sur* $(a,b]$, *supposons que les conditions suivantes sont remplies pour* $\alpha > 0$:

(i) Les dérivées $D_{a^+}^\alpha f_i(t); i \geq 0; t \in (a,b]$ *existent.*

(ii) Les séries $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} D_a^\alpha f_i(t)$ *convergent uniformément sur* $[a+\varepsilon, b]; \varepsilon > 0$.

Alors la fonction définie par la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ *est* α *différentiable est satisfait*

$$D_a^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} D_a^\alpha f_i(t); t \in (a,b].$$

-Pour la dérivée au sens de Caputo, le théorème est vrai sur $[a,b]$.

Proposition 1.4. *pour* $\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, *on a*

(i) $D_a^\alpha (t-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-a)^\alpha) = \lambda (t-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-a)^\alpha)$.

(ii) ${}^C D_0^\alpha E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha)$.

Lemme 1.5. *Soient* $0 < \alpha < 1, f \in L^1[0,T]$ *et* $K(t)$ *admet une dérivée* $K'(t)$ *presque partout sur* $[0,T]$, *alors pour tout* $t \in [0,T]$,

$$D_{0+}^\alpha \int_0^t f(s) K(t-s) ds = \int_0^t f(t-s) D_{0+,s}^\alpha K(s) ds + f(t) \lim_{s \longrightarrow 0+} I_{0+,s}^{1-\alpha} K(s). \tag{1.13}$$

Maintenant, nous donnons Les transformées de Laplace des intégrales et des dérivées fractionnaires.

Proposition 1.5. *Soient* $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ *et* $f(t) \in L^1(0,b)$ *pour tout* $b > 0$.

1. *Si* f *admet une transformée de Laplace, alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens R-L de* f *est donnée par*

$$\mathcal{L}(I_0^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L} f(s).$$

2. *Si $f \in AC^n[0,b]$, pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de R-L de f est*

$$\{\mathcal{L}(D_0^\alpha)\}(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} I_0^{n-\alpha} f(0^+),$$

sous la condition que f ait une transformée de Laplace.

3. *Soient $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in C^n[0,b]$. La transformée de Laplace de ${}^C D_0^\alpha f$ est donnée par*

$$\mathcal{L}\left({}^C D_0^\alpha f\right)(s) = s^\alpha \mathcal{L}f(s) + \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+).$$

1.2.1 Comparaison entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo

Lemme 1.6. *Soit $f(x)$ est une fonction telle que les deux opérateurs $\mathcal{D}^\alpha f(x)$ et ${}^c\mathcal{D}^\alpha f(x)$ existent avec $n-1 < \alpha < n$, $n \in N$, alors on a :*

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) \neq ({}^c\mathcal{D}^\alpha f(x)).$$

exemple La dérivée fractionnaire au sens dz Caputo de la fonction constante $f(x) = c$ est donnée par :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha f(x) = {}^c\mathcal{D}^\alpha c = 0.$$

$${}^c\mathcal{D}^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} c^{(n)} dt = 0$$

Et pour Riemann-Liouville :

$$\mathcal{D}^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)} (x)^{1-\alpha} \neq 0.$$

Proposition 1.6. *Soit $f(x)$ une fonction telle que $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n-$*

$1\}$, *alors la dérivée fractionnaire de Caputo coïncide avec celle de Riemann-liouville :*

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = ({}^{c}\mathcal{D}^{\alpha} f(x)).$$

Proposition 1.7. *Soit $f(x)$ une fonction telle que $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo sont commutative avec l'ordre m*

$$\mathcal{D}^{m}\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}^{\alpha+m} f(x) = \mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{D}^{m} f(x).$$

$${}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{D}^{m} f(x) = (\ {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha+m} f(x)) = \mathcal{D}^{\alpha}({}^{c}\mathcal{D}^{m} f(x)).$$

Théorème 1.14. *Si $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha < n$ et $f \in C([a, b])$, alors :*

$${}^{c}\mathcal{D}^{\alpha} I^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}^{\alpha} I^{\alpha} f(x) = f(x).$$

1.2.2 Relation entre l'opérateur de Rieman-liouville et de caputo

Théorème 1.15. *Soit $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $n - 1 < \alpha < n$, $n \in N$, alors la relation entre l'opérateur de Riemann liouville et de Caputo est données par la relation suivante :*

$${}^{c}\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(0).$$

Démonstration. La série de taylor de la fonction f au point $t = 0$ est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1}. \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}. \end{aligned}$$

avec

$$R_{n-1} = \int_0^x \frac{f^{(x)}(t)\,(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

D'ou en utilisant la linéarté de l'opérateur de Riemann-Liouville,on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^a f(x) &= \mathcal{D}^a \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^k(0) + R_{n-1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{D}^a \left(x^k \right)}{\Gamma(k+1)} f^k(0) + \mathcal{D}^a R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)\, x^{k-a}}{\Gamma(k-a+1)\,\Gamma(K+1)} f^k(0) + \mathcal{D}^a I^n f^n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-a}}{\Gamma(k-a+1)} f^k(0) + \left({}^c\mathcal{D}^\alpha f(x) \right).
\end{aligned}$$

Donc :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha f(x) = \mathcal{D}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^x(0)\,(x)^{k-a}}{\Gamma(k-a+1)}.$$

□

Théorème 1.16. *Soit $\alpha > 0, n = [a] + 1$. Si f possède $n-1$ dérivées et si $\mathcal{D}_a^a f$ eriste, alors la relation entre l'opérateur de Riemann-Liouviie est de Caputo est :*

$${}^c\mathcal{D}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right],$$

presque partout sur $[a, b]$.

Démonstration. Compte tenu de la définition on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a^a \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] &= \mathcal{D}^n I_a^{n-a} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right], \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-a-1}}{\Gamma(n-a)} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) dt.
\end{aligned}$$

L'intégration par parties donne :

$I_a^{n-a}\left[f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right]=-\frac{1}{\Gamma(n-a+1)}\left[\left(f(t)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right)(x-t)^{n-a}\right]_a^x+$
$\frac{1}{\Gamma(n-a+1)}\int\limits_a^x\ (x-t)^{n-a}\left(\mathcal{D}f(t)-\mathcal{D}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right)dt.$
Il s'ensuit :

$$I_a^{n-a}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right]=I_a^{n-a+1}\mathcal{D}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right].$$

En procèdant de la même façon n fois, on trouve :

$$\begin{aligned}I_a^{n-a}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right] &= I_a^{n-a+n}\mathcal{D}^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right].\\ &= I_a^nI_a^{n-a}\mathcal{D}^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right].\end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ est un polynôme d'ordre $n-1$, on obtient alors :

$$I_a^{n-a}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right]=I_a^nI_a^{n-n-a}\mathcal{D}^nf(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a^a\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right] &= \mathcal{D}^nI_a^nI_a^{n-a}\mathcal{D}^nf(x)\\ &= I_a^{n-a}\mathcal{D}^nf(x)\\ &= {}^c\mathcal{D}^af(x).\end{aligned}$$

□

1.2.3 Intégrale et dérivée de Hadamard

Intégrale fractionnaire de Hadamard

soit $[a,b]$ un intervalle fini ou infini telle que $(o<a<b<+\infty)$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Définition 1.8. [2]*Soit* $\alpha \succ 0$.*l'intégrale fractionnaire de hadamard à gauche (resp à droite* α *de* f *est définie par :*

$$\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt.$$

resp.

$$\left({}^{H}I_{b^-}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Si $a = 0$ *et* $b = \infty$, *on aura :*

$$\left(I_{0^+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt, (x \succ 0),$$

et

$$\left({}^{H}I_{0^-}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt, (x \succ 0).$$

Proposition 1.8. *Si* $\alpha \succ 0, \beta \succ 0$ *et* $(0 \prec b \prec +\infty)$, *on a :*

$$\begin{aligned}\left({}^{H}I_{a}^{\alpha^+}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}.\\ \left({}^{H}I_{b^-}^{\alpha}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta+\alpha-1}.\end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{f(t)}{t}dt,\\ {}^{H}I_{a^+}^{\alpha}\left(\log\left(\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \log\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{(\log\frac{x}{t})^{\beta-1}}{t}dt.\end{aligned}$$

Posons$\left(\log \frac{t}{a}\right) = s\left(\log \frac{x}{a}\right)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^1 \left(\log \frac{x}{a\left(\frac{x}{a}\right)^s}\right)^{a-1} \frac{1}{a}e^{-s\log\frac{x}{a}}\left(s\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1} a\log\frac{x}{a}e^{s\log\frac{x}{a}}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1} B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)+\beta}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.9. [2] *Soit* $\alpha \succ 0, \beta \succ 0$ *et*$1 \leq p \preceq \infty$.

Si $0 \prec a < b < +\infty$, *et* $f\epsilon L^P(a,b)$. *alors :*

$$\begin{aligned}
{}^H I_a^\alpha\, {}^H I_{a^+}^\beta f &= {}^H I_{a^+}^{\alpha+\beta} f. \\
{}^H I_{b^-}^\alpha\, {}^H I_{a^+}^\beta f &= {}^H I_{a^+}^{\alpha+\beta} f.
\end{aligned}$$

1.2.4 Dérivée fractionnaire de Hadamard

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\left(\delta = x\frac{d}{dx}\right)$ la $\delta-$dérivé, et

$$AC_\delta^m[a,b] = \left\{g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}g(x) \in AC[a,b]\right\}, \delta = x\frac{d}{dx}$$

Définition 1.9. *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha]+1$. *Les dérivées fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre* α *de* f *sont données par :*

$$\left({}^H\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f\right)(x) = \delta^n\left({}^H\mathcal{D}_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(x) = (x\frac{d}{dx})^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt, (x<a)$$

et

$$\left({}^H\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f\right)(x) = (-\delta)^n\left({}^H\mathcal{D}_{b^-}^{n-\alpha} f\right)(x) = (-x\frac{d}{dx})^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt, (x<b),$$

respectivement.

Proposition 1.10. *Si* $\alpha > 0$, *et* $\beta > 0$, *alors*
1- $({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\log\frac{x}{a}\right))^{\beta-1}(x) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a})^{\beta-\alpha-1}\right)$ $,\beta > \alpha.$
2-$({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\log\frac{x}{a}\right))^{\beta-1}(x) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a})^{\beta-\alpha-1}\right)$ $,\beta > \alpha.$
En particulier, pour $\beta = 1$, *on a :*
3-$({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}1)(x) = \dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(\log\frac{x}{a})^{-\alpha}.$
4-$({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}1)(x) = \dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(\log\frac{b}{x})^{-\alpha}.$

Lemme 1.7. *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *Si* $f \in AC^m_{\delta}[a,b]$, *alors :*

$$\begin{aligned}
({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\delta^k f)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(\log\frac{x}{a})^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^n f)(t)dt.\\
({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{((-1)^k\delta^k f)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(\log\frac{b}{x})^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b\left(\log\frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^n f)(t)dt.
\end{aligned}$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, *alors pour* $f \in AC[a,b]$

$$\begin{aligned}
({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f)(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(\log\frac{x}{a})^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{-\alpha}\frac{f'(t)}{t}dt.\\
({}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}f)(x) &= \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(\log\frac{b}{x})^{-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^x\left(\log\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}\frac{f'(t)}{t}dt.
\end{aligned}$$

Proposition 1.11. *Soient* $\alpha > 0$, *et* $\beta > 0$. *Si* $1 \leq P \leq \infty$, *alors, pour* $f \in L^p(a,b)$

$$\begin{aligned}
{}^H\mathcal{D}^{\beta}_{a^+}\ {}^HI^{\alpha}_{a^+}f &= I^{\alpha-\beta}_{a^+}f\\
{}^H\mathcal{D}^{\beta}_{b^-}\ {}^HI^{\alpha}_{b^-}f &= {}^HI^{\alpha-\beta}_{b\text{-}}f.
\end{aligned}$$

En particulier, si $\beta = m \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$\begin{aligned}
{}^H\mathcal{D}^{m}_{a^+}\ {}^HI^{\alpha}_{a^+}f &= {}^HI^{\alpha-m}_{a^+}f.\\
{}^H\mathcal{D}^{m}_{b^-}\ {}^HI^{\alpha}_{b^-}f &= {}^HI^{\alpha-m}_{b\text{-}}f.
\end{aligned}$$

Proposition 1.12. *Soient $\alpha > 0$, et $1 \leq P \leq \infty$, alors, pour $f \in L^p(a,b)$*

$$\begin{aligned} {}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\ {}^H I^{\alpha}_{a^+} f &= f. \\ {}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\ {}^H I^{\alpha}_{b^-} f &= f. \end{aligned}$$

1.2.5 la modification de type Caputo pour la dérivée fractionnaire d'Hadamard

[29] L'objectif principal de cette section est de définir la modification de type Caputo pour la dérivée fractionnaire d'Hadamard et les propriétés de ces dérivées.

Soit $\mathcal{R}(\alpha) \succeq 0$ et $n = \mathcal{R}(\alpha) + 1$.si $y(x) \in AC^n_\delta[a,b]$, où $0 \prec a \prec b \prec \infty$ et

$$AC^n_\delta[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1} g(x) \in AC[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\}$$

On définit la modification de type Caputo pour la dérivée fractionnaire d'Hadamard gauche et droite respectivement comme suit :

$${}^C_a\mathcal{D}^{\alpha} y(x) =_a \mathcal{D}^{\alpha}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k \right](x), \tag{A}$$

et

$${}^C\mathcal{D}^{\alpha}_b y(x) = \mathcal{D}^{\alpha}_b\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k y(b)}{k!}\left(\log\frac{b}{t}\right)^k \right](x). \tag{B}$$

En particulier, si $0 \prec \mathcal{R}(\alpha) \prec 1$, nous avons

$${}^C_a\mathcal{D}^{\alpha} y(x) =_a \mathcal{D}^{\alpha}\left[y(t) - y(a) \right](x),$$

et

$${}^C\mathcal{D}^{\alpha}_b y(x) = \mathcal{D}^{\alpha}_b\left[y(t) - y(b) \right](x).$$

Théorème 1.17. *Soit $\mathcal{R}(a) \succeq 0$ et $n = [\mathcal{R}(a)] + 1$. si $y(x) \in AC^n_\delta[a,b]$, où $0 \prec a \prec b \prec \infty$. alors ${}^C_a\mathcal{D}^{\alpha} y(x)$ et ${}^C\mathcal{D}^{\alpha}_b y(x)$ existent partout sur $[a,b]$ et*

(i) *si* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre* α *est définie comme suit* :

$$ {}_a^C\mathcal{D}^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n y(t) \frac{dt}{t} =_a \mathcal{J}^{n-\alpha} \delta^n y(x), \tag{C} $$

et

$$ {}^C\mathcal{D}_b^{\alpha} y(x) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n y(t) \frac{dt}{t} = (-1)^n \mathcal{J}_b^{n-\alpha} \delta^n y(x), \tag{D} $$

(ii) *si* $\alpha \in \mathbb{N}$, *on a*

$$ {}_a^C\mathcal{D}^{\alpha} y(x) = \delta^n y(x), \qquad {}^C\mathcal{D}_b^{\alpha} y(x) = (-1)^n \delta^n y(x). $$

En particulier,

$$ {}_a^C\mathcal{D}^{0} y(x) =^C \mathcal{D}_b^{0} y(x) = y(x). $$

Démonstration. Soit $\alpha \notin \mathbb{N}$.En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Hadamard à gauche et en appliquant la formule d'intégration par parties : $u = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k$ et $dv = \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \frac{dt}{t}$ dans(A), on obtient

$$ \begin{aligned} {}_a^C\mathcal{D}^{\alpha} y(x) &= \left(x \frac{d}{dx}\right)^n \Bigg\{ \left[-\frac{1}{n-\alpha} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha} \left(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k \right) \right]_a^x \\ &\quad + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha} \left[\delta y(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k \right] \frac{dt}{t} \Bigg\} \\ &= \left(x \frac{d}{dx}\right)^{n-1} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha} \left[\delta y(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k \right] \frac{dt}{t} \\ &= \ldots = x \frac{dx}{x} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \left(\delta^{n-1} y(t) - \delta^{n-1} y(a) \right) \frac{dt}{t}. \end{aligned} $$

En effectuant une fois de plus l'intégration par parties avec le même choix de dv, on obtient l'équation (C). l'équation (D), se démontre de la même manière. Maintenant, quand $\alpha = n$ nous avons

$$ {}_a^C\mathcal{D}^{n} y(x) =_a \mathcal{D}^n \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k \right](x). $$

C'est

$$\begin{aligned}
y\left(x\right) &= {}_{a}\mathcal{J}^{\,n}\, {}_{a}^{C}\mathcal{D}^{n} y\left(x\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{k} y\left(a\right)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{\left(n-\alpha\right)!} \int_{a}^{x} \left(\log \frac{x}{t}\right)_{a}^{n-1} {}_{a}^{C}\mathcal{D}^{n} y\left(t\right) \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{k} y\left(a\right)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.18. *Soient* $\mathcal{R}\left(\alpha\right) \succeq 0$ *et* $n = \left[\mathcal{R}\left(a\right)\right] + 1.$ *Si* $y(x) \in AC_{\delta}^{n}\left[a, b\right],$ *où* $0 \prec a \prec b \prec \infty.$

Alors ${}_{a}^{C}\mathcal{D}^{\alpha} y\left(x\right)$ *et* ${}^{C}\mathcal{D}_{b}^{\alpha} y\left(x\right)$ *sont continue sur*$[a, b]$ *et*

(i) *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}_0$*,* ${}_{a}^{C}\mathcal{D}^{a} y\left(x\right)$ *et* ${}_{b}^{C}\mathcal{D}^{a} y\left(x\right)$ *peuvent être représentées par (C) et (D) respectivement et*

$${}_{a}^{C}\mathcal{D}^{a} y\left(x\right) = 0, \qquad {}_{b}^{C}\mathcal{D}^{a} y\left(x\right) = 0$$

Démonstration. Voir [29] □

La dérivation, dans le cadre classique ou d'ordre entier, bénéficie de significations physiques et géométriques claires. Ces aspects facilitent son intégration naturelle dans la résolution de problèmes concrets dans divers domaines scientifiques. En revanche, la différentiation fractionnaire présente un défi en termes d'interprétation physique et géométrique. Ce manque d'interprétations claires a été un sujet de préoccupation majeur, soulevé lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire en 1974 aux États-Unis. À cette époque, la question a été classée parmi les problèmes ouverts, suscitant peu de réponses malgré les rencontres internationales subséquentes en 1984, 1989 et 1996.

Plus récemment, des efforts considérables ont été déployés pour résoudre cette problématique. Diverses approches ont été explorées dans l'espoir de fournir des interprétations plus claires et intuitives pour la différentiation fractionnaire.

1.3 Les équations différentielles fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$

Une équation différentielle fractionnaire (EDF) est une expression fonctionnelle impliquant une fonction inconnue u insi qu'un nombre fini de ses dérivées fractionnaires, éventuellement accompagnées de dérivées ordinaires. Notre attention se porte spécifiquement sur le cas qui se révélera pertinent, à savoir lorsque $0 < \alpha < 1$.

1.3.1 EDF avec dérivées aux sens de Riemann-Liouville

Si la dérivée est au sens de R-L, nous associons à l'équation différentielles une condition initiales de la forme $D_a^{\alpha-1}u(a^+) = c$, valeur donnée qui doit être comprise dans le sens

$$D_{a^+}^{\alpha-1}u(a^+) = \lim_{t \longrightarrow a^+} D_{a^+}^{\alpha-1}u(t) = I_{a^+}^{1-\alpha}u(a).$$

Nous pouvons utiliser une autre forme de condition initiale qui est $\lim\limits_{t \longrightarrow a^+}(t-a)^{1-\alpha}u(t) = u_0$ et le problème de Cauchy sera dit pondéré.

Théorème 1.19. *Soient $0 < \alpha < 1, \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $F :]a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $F(.,u) \in L^1(a,b)$, pour tout $u \in \Omega$ et est lipschitzienne pour la deuxième variable. Alors, la solution $u \in L^1(a,b)$ existe et vérifie p.p, le problème non linéaire de Cauchy d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D_{a_+}^{\alpha}u(t) = F(t,u(t)), \quad t > 0, \\ D_{a_+}^{\alpha-1}u(a^+) = c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.14}$$

si et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}F(t,u(t))ds. \tag{1.15}$$

Remarque 1.4. *Nous obtenons la solution en supposant que $u(t)$ est une solution de l'équation* *intégrale (1.14) que l'on écrit sous la forme*

$$u(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + I^{\alpha}_{a+}F(t,u(t)). \tag{1.16}$$

On applique l'opérateur D^{α}_{a+} aux deux membres de l'équation (1.16), on déduit immédiatement que $u(t)$ est solution du problème (1.14).

Remarque 1.5. *Cette existence peut avoir lieu aussi dans $C_\gamma[a,b], 0 < 1-\alpha \leq \gamma < 1$ pour $F(t,u) \in C_\gamma[a,b]$ dans le sens où $u \in C_\gamma[a,b]$ et $D^{\alpha}_{a_+}u \in C_\gamma[a,b]$.*

1.3.2 EDF avec dérivées aux sens de Caputo

Dans ce cas, nous avons des conditions initiales classiques $u(a^+) = c$, pour l'ordre $0 < \alpha < 1$. L'espace fonctionnel est $C[a,b]$ avec même hypothèse sur F. Alors, la fonction $u \in AC[a,b]$ est solution du problème non linéaire si et seulement si elle satisfait l'équation intégrale

$$u(t) = c + I^{\alpha}_{a+}F(t,u(t)), t \in [a,b]. \tag{1.17}$$

✎ Si la solution est dans $C[a,b]$, alors ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}u \in C[a,b]$.

Pour le cas linéaire où $F(t,u) = \lambda u(t) + f(t)$, pour $f \in C[a,b]$, la solution u est donnée dans $AC[a,b]$ par

$$u(t) = cE_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) + \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)f(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{1.18}$$

CHAPITRE 2

NOTION SUR LE CALCUL STOCHASTIQUE

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions du calcul stochastique que nous utiliserons dans ce mémoire. Nous commençons tout d'abord par rappeler certaines propriétés de la théorie des probabilités. Ensuite nous définissons les processus stochastiques. Comme illustration, nous définissons le mouvement brownien qui permet de définir l'intégrale stochastique, dite intégrale d'Itô pour l'étude des équations différentielles stochastiques.

2.1 Généralités

2.1.1 Tribu

Définition 2.1. *Une tribu ($\sigma-$algébra en Anglais) sur Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.*
Une tribu contient donc l'espace Ω.
Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu

C'est à dire :
i) $\varnothing \in \mathcal{G}$.

ii) $A \in \mathcal{G} \Rightarrow A^c \in \mathcal{G}$.

ii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

2.1.2 Probabilité

Définition 2.2. *[1] Une probabilite sur$(\Omega, \mathcal{G})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{G}$ dans $[0,1]$ telle que*

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) $\mathbb{P}(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{\infty}^{n=0} \mathbb{P}(A_n)$ pour des A_n appartenant a $\mathcal{G}$ deux à deux disjoints.

Définition 2.3. *[1] Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ où :*

- Ω est un ensemble.
- $\mathcal{G}$ est une tribu (ou $\sigma-$algébre) sur Ω.
- $\mathbb{P}$ est une (mesure de) probabilite sur $(\Omega, \mathcal{G})$.

2.2 Lois de probabilité

Définition 2.4. *On appelle variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ toute application X définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$telle que*

$$\forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \ , \ X^{-1}(B) \in \mathcal{G}$$

Où $\mathbb{B}(\mathbb{R})$: Tribu de boréliens de $\mathbb{R}$

Définition 2.5. *Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, on appelle loi de probabilité de v.a X, la probabilité P_x sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ définie par :*

$$\forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \, , \ P_x(B) = \mathbb{P}\left[\ X^{-1}(B)\right] = \mathbb{P}(x \in B)$$

Définition 2.6. *On définit la fonction de répartition de la variable X. C'est la fonction* *croissante $F_X(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \preceq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \preceq x\})$$

Définition 2.7. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

s'appelle densité de probabilité de la variable X

2.2.1 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 2.8. *L'espérance d'une variable aléatoire X est la quantité notée $E(X)$ et égale*
1-Cas continue :
Si X admet une densité f, on a

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$$

2-Cas discret : *l'espérance d'une variable aléatoire discrète X est donné par :*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_K)$$

Définition 2.9. *[1] Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable. On pose :*

$$\begin{aligned}
Var(X,Y) &= E((X - E(X))^2) \\
&= E(X^2) - E(X)^2 \geq 0 \\
Cov(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

Proposition 2.1. ***Propriétés de l'espérence***

a. L'espérance est linéaire par rapport à la variable, c'est 'a dire

$$E\left(aX+bY\right)=aE\left(X\right)+bE\left(Y\right)$$

a et b étant des réels.

b. L'espérance est croissante : si

$$X\leq Y \quad (p.s) \text{ on a } E\left(X\right)\leq E\left(Y\right)$$

c. Inégalité de Jensen : si Φ est une fonction convexe, telle que $\Phi\left(X\right)$ est intégrable, $E\left(\Phi(X)\right)\geq \Phi\left(E\left(X\right)\right)$

Proposition 2.2. *Les v.a. X et Y sont indépendantes si et seulement si*

$$P\left\{(X\leq x)\cap(Y\leq y)\right\}=P\left(X\leq x\right)P\left(Y\leq y\right), \quad \forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}$$

-Si X et Y sont indépendantes,

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

(La réciproque n'est pas vraie)

-Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.

2.2.2 Convergence d'une variable aléatoire

$X_n, n\in\mathbb{N}$, et X sont des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, éventuellement $\mathbb{R}^d$(munis des tribus boréliennes)

Définition 2.10.

Définition 2.11. ***(Convergence en probabilité)***. *Une suite $X_n, n\in\mathbb{N}$, de variables aléatoires* *réelles converge en probabilité vers une variable aléatoire X si pour tout $\epsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) = 0$$

Définition 2.12. ***(Convergence presque sûre)*** *Une suite de variables aléatoires X_n converge p.s. vers X si pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq m} |X_n - X| \geq \epsilon\right) = 0$$

Définition 2.13. ***(Convergence dans $\mathbf{L}^2$)*** *Une suite de variables aléatoires X_n converge vers X si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^2\right) = 0$$

Bilan de convergences

La comparaison entre les trois modes de convergence, convergence presque sûre, convergence dans $L^p(p > 0)$et convergence en probabilité, pour une suite $X_n, n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires (réelles) vers une variable aléatoire X, s'établit comme suit,

Convergence presque sûre et convergence dans L^p ne sont pas comparables. Le théorème de convergence dominée fournit toutefois une condition

pour qu'une suite convergeant presque sûrement converge aussi dans L^p.

La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité (la réciproque est fausse en général).

La convergence dans $L^p(p > 0)$ entraîne la convergence en probabilité (la réciproque est fausse en général).

2.3 Espérance conditionnelle

Notons $L^1_{\mathcal{F}}\left(\Omega, \mathbb{P}\right)$ l'ensembles des fonctions réelles $\mathcal{F}$-mesurables et intégrables par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Définition 2.14. *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire E$(X \mid \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-mesurable sur Ω telle que :*

$$\int_B X d\mathbb{P} = \int_B E(X \mid \mathcal{G}) \, d\mathbb{P}, \ \forall B \in \mathcal{G}.$$

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, presque sûrement on a :

1. *Linéarité* : Si $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$E(\lambda X + \mu Y \mid \mathcal{G}) = \lambda E(X \mid \mathcal{G}) + \mu E(Y \mid \mathcal{G}).$$

2. *Monotonie* : Si $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ alors :

$$X \geq Y \Rightarrow E(X \mid \mathcal{G}) \geq E(Y \mid \mathcal{G}),$$

en particulier

$$X \geq 0 \Rightarrow E(X \mid \mathcal{G}) \geq 0.$$

3. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors :

$$E(X \mid \mathcal{G}) = X.$$

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, Si Y est $\mathcal{G}-$mesurable alors :

$$E(XY \mid \mathcal{G}) = Y E(X \mid \mathcal{G}),$$

en particulier

$$E(E(X \mid \mathcal{G}) Y \mid \mathcal{G}) = E(X \mid \mathcal{G}) E(Y \mid \mathcal{G}).$$

5. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :

$$E(X \mid \mathcal{G}) = E(X).$$

6. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ alors :

$$E\left(E\left(X \mid \mathcal{G}_2\right) \mid \mathcal{G}_1\right) = E\left(X \mid \mathcal{G}_1\right).$$

7. *Inégalité de Jensen* :

Si $X \in L^1_{\mathcal{F}}\left(\Omega, \mathbb{P}\right)$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe t.q. $\varphi\left(X\right) \in L^1_{\mathcal{F}}\left(\Omega, \mathbb{P}\right)$ alors :

$$\varphi\left(E\left(X \mid \mathcal{G}\right)\right) \leq E\left(\varphi\left(X\right) \mid \mathcal{G}\right),$$

en particulier

$$\left|E\left(X \mid \mathcal{G}\right)\right| \leq E\left(\left|X\right| \mid \mathcal{G}\right).$$

8. *Lemme de Fatou conditionnel*

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires positives, alors :

$$E\left(\liminf_n X_n \mid \mathcal{G}\right) \leq \liminf_n \left[E\left(X_n \mid \mathcal{G}\right)\right].$$

9. *Inégalité de Hôlder conditionnelle*

Soit $p, q \in [1, +\infty[$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$\left|E\left[XY \mid \mathcal{G}\right]\right| \leq \left[E\left(\left|X\right|^p \mid \mathcal{G}\right)\right]^{1/P} \left[E\left(\left|Y\right|^q \mid \mathcal{G}\right)\right]^{1/q}.$$

10. *Théorème de convergence monotone conditionnelle*

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires croissantes positives, convergente vers X. Alors :

$$\left(E\left(X_n \mid \mathcal{G}\right)\right) \xrightarrow{p.s} E\left(X \mid \mathcal{G}\right).$$

11. *Théorème de convergence dominée*

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires convergente p.s. vers* X.

Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y *intégrable telle que* $|X_n| \leq Y$, *alors* X *est* *intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] = E\left[X \mid \mathcal{G}\right].$$

subsectionProcessus stochastique

Filtration

[1]

Définition 2.15. *On appelle filtration une suite* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de* $\sigma-$*algèbre définit sur* $(\Omega, B, \mathbb{P})$, *vérifiant*

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

Définition 2.16. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. On dit que une variable aléatoire réelle* X *est une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $\mathbb{R}$ *si :*

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \qquad \forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$$

Définition 2.17. *La tribu engendrée par une famille de variables aléatoires* $(X_t,\ t \in [0,T])$ *est la plus petite tribu contenant les ensembles* $X_t^{-1}(B)$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et* $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. *On la note* $\sigma(X_t, t \leq T)$

Définition 2.18. *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une filtration,*

On dit qu'une filtration est continue à droite si :

$$\mathcal{F}_t = \underset{\in>0}{\cap} \mathcal{F}_{t+\in} \ \ \forall t \geq 0$$

On dit qu'une filtration est continue à gauche si :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\underset{0\leq s\leq t}{\cap} \mathcal{F}_s) \ \ \forall t \geq 0$$

Cette même filtration est dite complète par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$ négligeables, c'est-à-dire de mesure nulle, pour $\mathbb{P}$.

Définition 2.19. *On appelle espace de probabilité filtré, et l'on note $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \succeq 0\}, \mathbb{P})$, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$muni de la filtration compatible $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.*

Processus stochastique

Définition 2.20. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T.*
En général $T = \mathbb{R}$ou $\mathbb{R}_+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.
Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).
Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:
-Pour$t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
-Pour $\omega \in \Omega$ fixé,$t \in T \rightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

Définition 2.21. *(Filtration naturelle) A un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est à dire la famille croissante de tribus engendrées par$\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$$

Définition 2.22. *Un processus stochastique $\{(X_t), t \geq 0\}$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

Définition 2.23. *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \rightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 2.24. *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même déflnition pour càglàd.*

Définition 2.25. *[1] On dit que le processus $X = (X)_{t\geq 0}$ est a accroissements indépendants si $\forall n \geq 1$,$\forall t_1 < t_2 <, ..., < t_n \in T$, $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.*

Définition 2.26. *[1] Un processus progressif $X_t, t \in T$ (par rapport à $\mathcal{F}$) est un processus tel que pour tout $t \in T$, l'application :*

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \rightarrow X_s(\omega)$$

est mesurable de $\mathbb{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ dans $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.

Définition 2.27. *[1] Soient $p \geq 1$ et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est bornée dans L^psi :*

$$\underset{t\geq 0}{sup} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \prec \infty$$

Définition 2.28. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, un espace probabilisable tel que $card(\Omega) < \infty$ et muni de la filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Un temps d'arrêt T est une application $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Théorème 2.1. *[1] Si $(X_t, t \geq 0)$ est un processus adapté et à trajectoires continues, et si T est un temps d'arrêt. Alors on a :*

$$\int_0^T \mathbb{E}\left|X_t\right| dt = \mathbb{E}\left(\int_0^T \left|X_t\right| dt\right)$$

De plus, si cette quantité est finie, alors on a :

$$\int_0^T \mathbb{E} X_t dt = \mathbb{E}\left(\int_0^T X_t dt\right)$$

2.3.1 Martingale

Cas discret

On se donne une filtration, c'est-'a-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_n$ croissante (telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$).

La tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 2.29. *Une suite de v.a.r.*$(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale si*

X_n *est intégrable,* $\forall n \in \mathbb{N}$

X_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable,* $\forall n \in \mathbb{N}$

$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Cas continue

On se donne une filtration, c'est-'a-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_t$ croissante (telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$)

Définition 2.30. *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in (0, \infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si*

- X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout* t*.*

-et

$$E\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) = X_s, \qquad \forall 0 \leq s \leq t.$$

$-$ X_t *sous martingale si :*

$$E\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) \geq X_s, \qquad \forall 0 \leq s \leq t.$$

$-$ X_t *sur martingale si :*

$$E\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) \leq X_s, \qquad \forall 0 \leq s \leq t.$$

2.3.2 Quelques inégalités

Théorème 2.2. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable. Alors

i) XY est intégrable.

ii)

$$\left(\mathbb{E}\left(|XY|\right)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

Théorème 2.3. *(Inégalité de Hôlder) est une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz Si $X \in L^q, Y \in L^p$, tel que $q > 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, alors :*

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^q\right]^{\frac{1}{q}}\mathbb{E}\left[|Y|^P\right]^{\frac{1}{P}}$$

Théorème 2.4. *(Inégalité de Doob) Soit (M_t) une martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0\ ps.$ alors :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s| \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|M_t|\right]}{\lambda}, \forall t > 0, \lambda > 0$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right], \forall t > 0$$

2.3.3 Mouvement brownien

Vecteur gaussien

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace de probabilité complet.

Définition 2.31. *Une variable aléatoire réelle Z est dite gaussienne centrée réduite si elle admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On note $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0.1)$

-Une variable aléatoire réelle X est dite gaussienne s'il existe (μ, σ) et $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0.1)$ tels que $X = \mu + \sigma Z$. La densité de X est alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu.\sigma^2)$. Quand $\sigma = 0$, on dit que Xest une variable gaussienne dégénérée.

Définition 2.32. *Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne.*
Si $X =^t (X_1, ..., X_d)$est un vecteur gaussien, on définit son vecteur moyenne $\mathbb{E}(X)$ par

$$\mathbb{E}(X) =^t (\mathbb{E}(X_1), ..., \mathbb{E}(X_d))$$

et sa matrice variance-covariance $Var(X)$ par

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \times^t (X - \mathbb{E}(X))$$

Notons que $Var(X)$ est symétrique et

$$\forall i, j = 1....d, \qquad Var(X)_{ij} = cov(X_i, X_j)$$

Si $(X_1, ..., X_n)$ est un n-échantillon de loin gaussienne, alors on a évidemment que $X =^t (X_1, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien dont la matrice de variance-covariance est proportionnelle à $\mathbb{I}_d$.

Le mouvement brownien

Le mouvement brownien, qui tient son nom de Richard Brown, botaniste écossais du 19 ème siècle, est considéré comme un phénomène naturel d'une part, et un objet mathématique d'autre part. Observant le mouvement irrégulier et incessant des particules de pollen en suspension dans l'eau, Richard Brown effectua des expériences avec des particules inorganiques

en suspension dans un liquide. Le phénomène qui paraissait à priori vital fut alors écarté de la biologie.
De ce fait des chercheurs comme Einstein, Wiener et Levy s'intéressèrent à ce phénomène d'un point de vue autre que le point de vue naturel en lui donnant une forme mathématique qui n'est en vérité qu'une idéalisation mathématique du mouvement réel.
On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus$\{(B_t), t \geq 0\}$ sur cet espace.

Définition 2.33. *(Mouvement brownien standard) Le processus* $\{(B_t), t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien (standard) si*
a) $P(B_0 = 0) = 1$*(le mouvement Brownien est issu de l'origine).*
b) $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t - s)$*.*
c) $\forall n, \quad \forall t_i, \ 0 \leq t_0 \leq t_1.... \leq t_n,$ *les variables* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ *sont indépendantes. La propriété b) est la stationnarité des accroissements du mouvement Brownien, la propriété c) traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants*

Définition 2.34. *(Mouvement brownien par rapport à une filtration) Le processus* $\{(B_t), t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien par rapport à une filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *est un processus continu* $\mathcal{F}-$*adapté, à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *: si*
a) $P(B_0 = 0) = 1$*(le mouvement Brownien est issu de l'origine).*
b) $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t - s)$*.*
c) $\forall n, \quad \forall t_i, \ 0 \leq t_0 \leq t_1.... \leq t_n,$ *les variables* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ *sont indépendantes de* $\mathcal{F}_s$ *.*

Remarque 2.1. *[1] Un mouvement brownien standard est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.*

Remarque 2.2. *[1] De cette définition, il suit que pour* $t \geq s \geq 0$,

$$B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0; t - s)$$

c'est à dire :

$$\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0 \quad et \quad \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s$$

Proposition 2.3. *[1] Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors :*

a) ***Symetrie*** *:*

Le processus $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

b) ***Changement d'echelle (scaling)*** *:*

Soit $\lambda > 0$. Le processus $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t\geq 0}$ avec $B_t^\lambda = (\frac{1}{\lambda})B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement brownien.

c) ***Propriété de Markov simple*** *:*

Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s := \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$ alors $B^{(s)} = (B_t^s)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}$.

2.3.4 Variation totale et quadratique

[45]

Définition 2.35. *La variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X_t défini sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ est définie par :*

$$V_T^p(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p$$

Si $V_T^p(\Pi)$ a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre, convergence L^p) lorsque

$$\pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i\leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre p de X_t sur $[0, T]$. En particulier,

. si $p = 1$, la limite s'appelle la variation totale de X_t sur $[0, T]$

. si $p = 2$, la limite s'appelle la variation quadratique de X_t sur $[0, T]$ et est notée $< X >_T$.

Variation bornée

Définition 2.36. *Un processus X_t est un processus à variation bornée sur $[0,T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire que*

$$\sup_{\pi_n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|<\infty \ \textit{p.s}$$

Remarque 2.3. *Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement, alors elle vaut :*

$$V_T^p=\sup_{\pi\in p}\sum_{i=1}^{n}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|<\infty \ \textit{p.s}$$

où p est l'ensemble des subdivisions possibles de $[0,T]$

Cas du mouvement Brownien

Soit $(B_t)_{t\in p}$, un mouvement Brownien standard, pour $t>0$ nous définissons

$$\langle B\rangle_t^{(n)}=\sum_{i=1}^{2^n}\left\{B\left(\frac{it}{2^n}\right)-B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right\}^2$$

Définition 2.37. *Pour tout $t>0$,*

$$\lim_{n\to\infty}\langle B\rangle_t^{(n)}=t \quad \textit{ps}$$

Nous définissons la variation quadratique du mouvement Brownien standard $\langle B\rangle_t$ comme étant donnée par cette limite et on pos $\langle B\rangle_0=0$

2.4 Calcul d'Itô

2.4.1 Intégrale stochastique

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modèle pour de phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été géré par la non différentiabilité du MB. Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport au MB, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens.

$$\int_0^t W_s dB_s$$

quand $\{W_s, \quad s \geq 0\}$ est un processus stochastique .

Définition 2.38. *On dit que $\{W_t, \quad t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $(\mathcal{F}_t^B)-$adapté, càglàg, et si*

$$E\left[\int_0^t W_s^2 ds\right] < +\infty$$

pour tout $t > 0$

Cas des processus étagés

Définition 2.39. *On appelle processus élémentaire (étagé) $H = (H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus de la forme :*

$$H_t = \phi_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T, \phi_0$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$–mesurable bornée et, pour $i = 1, ..., p, \phi_i$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$–mesurable et bornée. Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à W comme étant le processus continu $\{I(H)_t\}_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}),$$

soit encore, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$,

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

On note $\int_0^t H_s dW_s$ *pour* $I(H)_t$. *On obtient alors directement à l'aide de cette définition le résultat suivant :*

Proposition 2.4. *Si* H *est un processus élémentaire, alors* $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\le t\le T}$ *est une* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}-$ *martingale continue telle que*

$$\forall t \in [0,T], \qquad E\left[\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right].$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus vaste de processus H. *Pour la première extension, on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel* $\mathcal{M}^2$ *suivant :*

$$\mathcal{M}^2 = \left\{(H_t)_{0\le t\le T}, \quad \text{progressivement mesurable,} \quad E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty\right\}.$$

On désigne par H^2 *l'espace vectoriel des martingales bornées dans* L^2 *; le sous-espace de* H^2 *formé par les martingales qui sont continues est noté* H_c^2. *On munit* H^2 *de la norme définie par* $\|M\|_{H^2} = E\left[|M_T|^2\right]^{1/2}$ *qui en fait un espace de Hilbert. L'inégalité de Doob montre que cette norme est équivalente à la norme* $E[\sup_t |M_t|^2]^{1/2}$ *; par suite,* H_c^2 *est un sous-espace fermé.* $\mathbb{H}^2$ *et* $\mathbb{H}_c^2$ *désignent les sous-espaces de* H^2 *et* H_c^2 *constitués des martingales nulles en* 0 *; ces deux sous-espaces sont fermés. On obtient alors le résultat suivant :*

Théorème 2.5. *Il existe une unique application linéaire* J *de* $\mathcal{M}^2$ *dans* $\mathbb{H}_c^2$ *telle que :*

1. si H est un processus élémentaire, alors $I(H)$ et $J(H)$ sont indistinguables ;
2. pour tout t, $E\left[J(H)_t^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]$.

L'unicité signifie que si J et $J^{'}$ sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes alors $J(H)$ et $J^{'}(H)$ sont indistinguables. On note toujours $\int_0^t H_s dW_s$ pour $J(H)_t$.

Remarque 2.4. *Notons* M^2 *l'ensemble des classes d'équivalence de* $\mathcal{M}^2$. M^2 *est un espace de Hilbert. L'intégrale stochastique est alors une isométrie de* M^2 *dans* $\mathbb{H}_c^2$. *On obtient les propriétés suivantes :*

Proposition 2.5. *Soit $H \in \mathcal{M}^2$. On a*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right],$$

et si τ est un temps d'arrêt,

$$\int_0^\tau H_s dW_s = \int_0^T \mathbf{1}_{s\leq\tau} H_s dW_s, \quad P-p.s.$$

La dernière extension de l'intégrale stochastique dont nous aurons besoin consiste à relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur H. On introduit pour cela

$$\mathcal{M}^2_{loc} = \left\{(H_t)_{0\leq t\leq T}, \quad \text{progressivement mesurable,} \quad \int_0^T H_s^2 ds < \infty \ P-\text{p.s.}\right\}.$$

et on a le résultat suivant :

Proposition 2.6. *Il existe une unique application linéaire $J^{'}$ de $\mathcal{M}^2_{loc}$ dans l'ensemble des martingales locales continues telle que :*

1. si H est un processus élémentaire alors $J^{'}(H)$ et $I(H)$ sont indistinguables ;
2. si $(H_n)_n$ est une suite de processus de $\mathcal{M}^2_{loc}$ telle que $\int_0^T H_s^{n2} ds$ tend vers 0 en probabilité alors $\sup_{0\leq t\leq T}\left|J^{'}(H^n)_t\right|$ tend vers 0 en probabilité. On note encore $\int_0^t H_s dW_s$ pour $J^{'}(H)_t$.

Remarque 2.5. *Attention, lorsque $H \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est seulement une martingale locale et pas nécessairement une martingale.*

Proposition 2.7. *Pour $H \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $\langle\int_0^\cdot H_s dW_s\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$.*

2.4.2 Processus d'Itô

Nous introduisons à présent une classe de processus qui sera très utile dans la suite.

Définition 2.40. *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$P-\text{p.s.} \qquad \forall 0\leq t\leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

ou X_0 est $\mathcal{F}_0$–mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, P–p.s. :

$$\int_0^T |K_s|\, ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T |H_s|^2\, ds < \infty.$$

On peut montrer que si un processus d'Itô est une martingale locale continue alors $K_t = 0$ $m \otimes P$–p.p. On en déduit alors que la décomposition d'un processus d'Itô est unique au sens où si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s.$$

alors $X_0 = X_0^{'} P$–p.s. et $H_t^{'} = H_t, K_t = K_t^{'} m \otimes P$–p.p. Si X et Y sont deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \quad \text{et} \quad Y_t = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s.$$

on pose $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H_s^{'} ds$ et $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$. On a alors la

Proposition 2.8. ***Formule d'intégration par parties***. *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t .$$

Théorème 2.6. ***Formule d'Itô***. *Soient $(t, x) \longmapsto f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus de Itô. On a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, X_s) ds + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}^{"}(s, X_s) d \langle X, X \rangle_s .$$

Nous finissons ce paragraphe en étendant la formule précédente au cas d'un mouvement brownien d–dimensionnel et d'un processus d'Itô n–dimensionnel. Les hypothèses sur les coefficients sont celles de la définition.

Théorème 2.7. *Soit X un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: pour $i = 1, ..., n$,*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,k} dW_s^k.$$

Si f est deux fois différentiable en x et une fois en t on a :

$$f(t,X_t)=f(0,X_0)+\int_0^t \partial_s f(s,X_s)ds+\sum_{i=1}^n\int_0^t \partial_{x_i}\ f(s,X_s)dX_s^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\int_0^t \partial^2_{x_i,x_j}\ f(s,X_s)d\left\langle X^i,X^j\right\rangle_s,$$

avec $dX_s^i=K_s^i ds+\sum_{k=1}^d H_s^{i,k}dW_s^k$ et $d\left\langle X^i,X^j\right\rangle_s=\sum_{k=1}^d H_s^{i,k}H_s^{j,k}ds$. Le résultat est plus simple à retenir sous forme vectorielle. Pour cela, on note X le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées X^i, K le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées K^i et W le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de coordonnée W^j. On introduit alors la matrice de taille $n\times d, H=(H^{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le d}$. Avec ces notations, on a :

$$X_t=X_0+\int_0^t K_s ds+\int_0^t H_s dW_s,$$

où $H_s dW_s$ est un produit matrice-vecteur colonne. La formule d'Itô s'écrit sous la forme, notant $x.y$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et H^* la transposée de H

$$f(t,X_t)=f(0,X_0)+\int_0^t \partial_s\ f(s,X_s)ds+\int_0^t \bigtriangledown f(s,X_s).dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t trace(D^2 f(s,X_s)H_sH_s^*)ds,$$

2.5 Équations différentielles stochastiques

Rappelons qu'il y a plusieurs phénomènes dans différentes domaines (sciences, mécanique, physique,...) modélisés mathématiquement par des équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=a(t,\xi(t))+v(t), \tag{1.1}$$

où $v(t)$ est l'effet de perturbation. Le cas ou l'effet de perturbation est irrégulier, i.e., les phénomènes sont soumis à des excitations stochastiques
$v(t)=b(t,\xi(t))\dfrac{dw(t)}{dt}$, où $(w(t),t\in[0,T])$ est un mouvement brownien. Alors (1.1) devient

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=a(t,\xi(t))+b(t,\xi(t))\frac{dw(t)}{dt},\qquad t\in[0,T], \tag{1.2}$$

l'équation différentielle ordinaire perturbée par une perturbation aléatoire

$$b\left(t,\xi\left(t\right)\right)\frac{dw\left(t\right)}{dt}, \tag{2.1}$$

où $\frac{dw\left(t\right)}{dt}$ est la dérivée formelle par rapport au temps du mouvement brownien puisque $\frac{dw\left(t\right)}{dt}$ n'a pas de sens.

L'équation (1.2) est écrite :

$$d\xi\left(t\right)=a\left(t,\xi\left(t\right)\right)dt+b\left(t,\xi\left(t\right)\right)dw\left(t\right), \qquad t\in\left[0,T\right], \tag{2.2}$$

où $b\left(t,\xi\left(t\right)\right)=\left(b_{ij}\left(t,\xi\left(t\right)\right)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$, et $a\left(t,\xi\left(t\right)\right)=\left(a_{1}\left(t,\xi\left(t\right)\right),...,a_{n}\left(t,\xi\left(t\right)\right)\right)$ sont appelés la matrice de diffusion et le drift respectivement. Cette dernière est formelle, i.e., n'a pas de sens. Cependant la définition de l'intégrale d'Itô nous permet alors de définir ce type d'équation comprise dans le sens

$$\xi\left(t\right)=\xi\left(0\right)+\int_{0}^{t}a\left(s,\xi\left(s\right)\right)ds+\int_{0}^{t}b\left(s,\xi\left(s\right)\right)dw\left(s\right), \quad t\in\left[0,T\right], \tag{1.3}$$

où $a:\left[0,T\right]\times\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}^{n}$ et $b:\left[0,T\right]\times\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{k}$ sont mesurables avec, $a\in L_{w}^{1}\left[0,T\right]$, $b\in L_{w}^{2}\left[0,T\right]$.

L'équation (1.3) est dite équation différentielle stochastique.

2.5.1 Solution forte et solution faible

On considère l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} d\xi\left(t\right)=a\left(t,\xi\left(t\right)\right)dt+b\left(t,\xi\left(t\right)\right)dw\left(t\right), \quad t\in\left[0,T\right], \\ \xi\left(0\right)=\xi_{0}, \end{cases} \tag{1.4}$$

telle que :

1) $\mathbb{P}\left[\xi\left(0\right)=\xi_{0}\right]=1.$

2) $\mathbb{P}\left[\int_{0}^{t}\left(\left|a\left(s,\xi\left(s\right)\right)\right|+\left|b\left(s,\xi\left(s\right)\right)\right|^{2}\right)ds<\infty\right]=1.$

3) $\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s))\, dt + \int_0^t b(s, \xi(s))\, dw(s)$, $\mathbb{P} - p.s.$, i.e, l'équation (1.8) a lieu, P-$p.s$ pour tout $t \in [0, T]$.

α) **Solution forte**

Définition 2.41. *On dit que l'équation différentielle stochastique* (1.4) *admet une solution forte, si pour tout espace probabilisé filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, *et pour tout mouvement brownien* $(w(t))_{t\geq 0}$, *il existe un processus continu* $\xi = (\xi(t))_{t\geq 0}$ *tel que les propriétés 1), 2) et 3) soient vérifiées.*

β) **Solution faible**

Définition 2.42. *On dit que l'équation différentielles stochastique* (1.4) *admet une solution faible (ou en loi), si on peut trouver un espace probabilisé filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, *un mouvement brownien* $(w(t))_{t\geq 0}$, *et un processus continu* $\xi = (\xi(t))_{t\geq 0}$ *tels que les propriétés 1), 2) et 3) soient vérifiées. Donc une solution faible est une collection d'objets :*

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, (w(t))_{t\geq 0}, (\xi(t))_{t\geq 0}\right).$$

CHAPITRE 3

L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ D'UN PROBLÈME FRACTIONNAIRE STOCHASTIQUE DE ZHANG

3.1 Introduction

Dans des applications pratiques, ce qui est particulièrement intéressant, c'est la nature des solutions aux équations aux dérivées stochastiques fractionnaires (FSDEs) dans l'espace euclidien de dimension n. $\mathbb{R}^n$ $[1, 2]$. En général, les systèmes adoptent la forme

$$\begin{cases} D_t^\alpha X(t) = b(t, X(t)) + \sigma_1(t, X(t))\frac{dB(t)}{dt} \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où D_t^α est la dérivée fractionnaire de Caputo, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, pour chaque $t \geq 0, b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma_1 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont des fonctions mesurables continues, $B(t)$ est m-dimensionnel mouvement brownien standard sur l'espace probabiliste complet$\{\Omega, F, P\}$. La condition initiale X_0 est une variable aléatoire de $\mathbb{R}^n$, $F\ _0$-mesurable, satisfaisant $E\,|X_0|^2 \prec \infty$. En raison de la non-localité, les solutions aux équations aux dérivées stochastiques fractionnaires (FSDEs) n'ont pas été faciles à obtenir, sans parler de la recherche des propriétés. Cependant, les méthodes asymptotiques ont été largement utilisées et continuent de jouer un rôle crucial dans le développement du calcul fractionnaire $[3,4]$. Le principe de moyennisation constitue son support théorique.

Dans le processus de développement des principes de moyenne, il est important de citer le travail indispensable de Khasminiskii $[5]$, qui a été publié en 1968. Il a affirmé que, dans des conditions appropriées, le mouvement lent des systèmes à deux échelles temporelles convergeait, lorsque $\epsilon \to 0^+$, vers la solution des équations moyennées. En d'autres termes, les principes de moyenne permettent d'étudier les équations complexes en termes de l'équation moyennée associée, offrant ainsi un moyen pratique et facile pour la recherche des propriétés.

Cet chapitre vise à étendre l'argument classique de Khasminskii aux équations différentielles stochastiques avec une dérivée fractionnaire de Caputo. À cette fin, par une déduction mathématique rigoureuse, nous montrons que les solutions faibles des deux systèmes avant et après la moyennisation sont équivalentes au sens de la moyenne quadratique, ce qui prouve clairement et strictement le principe de moyennisation fractionnaire obtenu. Cela implique qu'une manière simple et efficace de résoudre de manière approximative les FSDEs (1) est présentée ici.

3.2 Préliminaires

Afin d'étudier les propriétés qualitatives de la solution de l'équation .(1), nous imposons certaines conditions sur les fonctions de coefficient, ce qui nous permettra de la résoudre. (H_1) pour chaque $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,T]$, il existe deux constants positive C_1 et C_2 tel que

$$|b(t,x)|^2 \vee |\sigma_1(t,x)|^2 \le C_1^2 \left(1+|x|^2\right) \tag{3.2}$$
$$|b\,(t,x) - b\,(t,y)| \vee |\sigma_1\,(t,x) - \sigma_1\,(t,y)| \le C_2\,|x-y|$$

où $|.|$ est la norme de $\mathbb{R}^n$, $x_1 \vee x_2 = \max\{x_{1,}x_2\}$.

D'après les travaux importants de Zone $[6]$, Zhang et Agarwal $[7]$, nous savons que sous la condition (H_1),FSDEs(1) a une solution unique

$$X(t) = X_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(s, X(s))\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma_1(s, X(s))\, dB(s) \tag{3.3}$$

où $X(t)$ is $F(t)$-adapté et $\mathsf{E}\Big(\int_0^T |X(t)|^2\, dt\Big) \prec \infty$.

3.3 Le principe de moyenne

Dans cette section, en combinant les résultats d'existence et d'unicité dans la deuxième partie, nous examinons le principe de moyenne pour les équations stochastiques aux dérivées fractionnaires de Caputo. Considérons la forme standard de l'équation..(1) :

$$X_\epsilon(t) = X_0 + \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(s, X_\epsilon(s))\, ds + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma_1(s, X_\epsilon(s))\, dB(s)$$

où la valeur initiale X_0, les coefficients b et σ_1 ont les mêmes conditions que dans l'équation (1), notons en outre par ϵ_0 un nombre fixe, $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ est un petit paramètre positif.

Avant de conclure avec le principe de moyenne, nous donnons quelques coefficients mesurables., $\bar{b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \bar{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, satisfaisant (H_1) et les inégalités supplémentaires :

(H_1) Pour toute $T_1 \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n$, Il existe deux fonctions bornées positives. $\alpha_i(T_1), i = 1, 2$tel que

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \left| b(s,x) - \bar{b}(x) \right| ds \leq \alpha_1(T_1)(1 + |x|),$$
$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \left| \sigma_1(s,x) - \bar{\sigma_1}(x) \right|^2 ds \leq \alpha_2(T_1)(1 + |x|^2)$$

où $\lim\limits_{T_1 \to \infty} \alpha_i(T_1) = 0$

Avec les préparations adéquates mentionnées ci-dessus, nous montrerons que la solution initiale

$X_\epsilon(t)$ converge, comme ϵ tend vers zéro, à la solution $Z\epsilon(t)$ du système moyen

$$Z\epsilon(t) = X_0 + \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \overline{b}(Z\epsilon(s))ds + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \overline{\sigma}(Z\epsilon(s))dB(s) \quad (3.4)$$

Voici le résultat principal de cet chapitre

Théorème 3.1. *supposons* $(H_1) - (H_2)$ *sont satisfaites. Pour un nombre arbitrairement petit donné* $\delta_1 \succ 0$ *il existe* $L \succ 0, \epsilon_1 \in (0, \epsilon_0]$ *et* $\beta \in (0,1)$ *tel que pour tous* $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$,

$$E\left(\sup_{t\epsilon\left[0, L\epsilon^{-\beta}\right]} \left| X_\epsilon(t) - Z_\epsilon(t) \right|^2 \right) \le \delta_1.$$

Démonstration. Pour toute $t \in [0, u] \subset [0, T]$,
$X_e(t) - Z_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[b(s, X_\epsilon(s)) - \overline{b}(Z_\epsilon(s)) \right] ds +$
$\frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\sigma_1(s, X_\epsilon(s)) - \overline{\sigma}_1(Z_\epsilon(s)) \right] dB(S)$.
Utiliser l'inégalité élémentaire

$$|x_1 + x_2|^2 \le 2(|x_1|^2 + |x_2|^2),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sup_{0 \preceq t \preceq u} |X_\epsilon(t) - Z_\epsilon(t)|^2 \right) &\le \frac{2\epsilon^2}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0 \le t \le u} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[b(s, X_\epsilon(s)) - \overline{b}(Z_\epsilon(s)) \right] ds \right|^2 \\
&+ \frac{2\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0 \le t \le u} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\sigma_1(s, X_\epsilon(s)) - \overline{\sigma}_1(Z_\epsilon(s)) \right] dB(s) \right|^2 \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Rappeler les inégalités (5),on a

$$
\begin{aligned}
I_1 \le & \frac{4\epsilon^2}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0\le t\le u} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[b\left(s, X_\epsilon(s)\right) - b\left(Z_\epsilon(s)\right)\right] ds \right|^2 + \\
& \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0\le t\le u} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[b\left(s, X_\epsilon(s)\right) - \overline{b}\left(Z_\epsilon(s)\right)\right] ds \right|^2 \\
& = I_{11} + I_{12}
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition (H_1), on obtient

$$
I_{11} \le K_{11}\epsilon^2 u \int_0^u (u-s)^{2\alpha-2} E(\sup_{0\le s_1\le s} |X_\epsilon(s_1) - Z_\epsilon(s_1)|^2) ds, \tag{3.5}
$$

ou $K_{11} = \dfrac{4C_2^2}{\Gamma(\alpha)^2}$.Par la définition de l'intégration supérieure de la variable,

$$
I_{12} \le \frac{4\epsilon^2}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0\le t\le u} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d\left[\int_0^s b\left(\tau, Z_\epsilon(\tau)\right) - \overline{b}\left(Z_\epsilon(\tau)\right) d\tau \right] \right|^2
$$

à partir de l'intégration par partie,

$$
I_{12} \le \frac{4\epsilon^2(\alpha-1)^2}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0\le t\le u} \left| \int_0^t (\int_0^t b\left(\tau, Z_\epsilon(\tau)\right) - \overline{b}\left(Z_\epsilon(\tau)\right) d\tau)(t-s)^{\alpha-2} ds \right|^2,
$$

puis avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (H_2) ,on obtient

$$
I_{12} \le \frac{4\epsilon^2(\alpha-1)^2 u^{2\alpha-3}}{(2\alpha-3)\Gamma(\alpha)^2} E \int_0^U \left| \int_0^S b\left(\tau, Z_\epsilon(\tau)\right) - \overline{b}\left(Z_\epsilon(\tau)\right) d\tau \right|^2 ds \le K_{12}\epsilon^2 u^{2\alpha},
$$

dans lequel $K_{12} = \dfrac{8(\alpha-1)^2}{3(2\alpha-3)\Gamma(\alpha)} \sup\limits_{0\le t\le u} \alpha_1(t)^2 \left[1 + E(\sup\limits_{0\le\tau\le u} |Z_\epsilon(\tau)|^2) \right]$

Pour le deuxième terme, de la même manière,

$$\begin{aligned}I_2 &\le \frac{4\epsilon^2}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0\le t\le u} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\sigma_1(s, X_\epsilon(s)) - \bar{\sigma}(Z_\epsilon(\tau))\, d\tau\right] \right|^2 \\ &+ \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{0\le t\le u} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\sigma_1(s, Z_\epsilon(s)) - \bar{\sigma}_1(Z_\epsilon(s))\right] dB(s) \right|^2 \\ &= I_{21} + I_{22}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité martingale de Doob, et la formule d'Itô et la condition (H_1),

$$\begin{aligned}I_{21} &\le \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \int_0^u (u-s)^{2\alpha-2} \left|\sigma_1(s, X_\epsilon(s)) - \sigma_1(s, Z_\epsilon(s))\right|^2 ds \\ &\le K_{21}\epsilon \int_0^u (u-s)^{2\alpha-2} E\left(\sup_{0\le s1\le s} |X_\epsilon(s_1) - Z_\epsilon(s_1)|^2\right) ds,\end{aligned}$$

où $K_{21} = \dfrac{4C_2^2}{\Gamma(\alpha)^2}$. En utilisant L'inégalité martingale de Doob et encore la formule d'Itô,

$$I_{22} \le \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \int_0^u (u-s)^{2\alpha-2} \left|\sigma_1(s, X_\epsilon(s)) - \sigma_1(s, Z_\epsilon(s))\right|^2 ds.$$

Intégration par parties,produits

$$\begin{aligned}I_{22} &\le \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \int_0^u (u-s)^{2\alpha-2} d\left[\int_0^s |\sigma_1(\tau, Z_\epsilon(\tau)) - \bar{\sigma}_1(Z_\epsilon(\tau))|^2 d\tau\right] \\ &\le \frac{4\epsilon(2\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)^2} E \int_0^u \left(\int_0^s |\sigma_1(\tau, Z_\epsilon(\tau)) - \bar{\sigma}_1(Z_\epsilon(\tau))|^2 d\tau\right) (u-s)^{2\alpha-2} ds,\end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse(H_2) ,on peut conclure

$$I_{22} \le \frac{4\epsilon(2\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)^2} E \int_0^u \left(\sup_{0\le ss_1\le s} \alpha_2(s_1)\left[1 + E\left(\sup_{0\le\tau\le s} |Z_\epsilon(\tau)|^2\right)\right]\right) s(u-s)^{2\alpha-3} ds, \le K_{22}\epsilon u^{2\alpha-1},$$

où $K_{22} = \frac{4}{(2\alpha-1)\Gamma(\alpha)^2} \sup\limits_{0\leq t\leq u} \alpha_2(t) \left[1 + E\left(\sup\limits_{0\leq\tau\leq u} |Z_\epsilon(\tau)|^2\right)\right]$.
Maintenant, branchez les équations $(3.10) - (3.19)$ dans (3.8),pour toute $u \in [0, T]$on a

$$\begin{aligned}
&E\left(\sup_{0\leq t\leq u} |X_\epsilon(t)|^2\right)\\
&\leq K_{12}\epsilon^2 u^{2\alpha} + K_{22}\epsilon u^{2\alpha-1} +\\
&\left(K_{11}\epsilon^2 u + K_{21}\epsilon\right) \int_0^u (u-s)^{(2\alpha-1)} E\left(\sup_{0\leq s1\leq s} |X_\epsilon(s_1) - Z_\epsilon(s_1)|^2 ds,\right)
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Gronwall-Bellman on obtient

$$\begin{aligned}
&E\left(\sup_{0\leq t\leq u} |X_\epsilon(t) - Z_\epsilon(t)|^2\right)\\
&\leq \left(K_{12}\epsilon^2 u^{2\alpha} + K_{22}\epsilon u^{2\alpha-1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((k_{11}\epsilon^2 u^{1+\alpha} + K_{21}\epsilon u^\alpha)\Gamma(\alpha)\right)^k}{\Gamma(K\alpha+1)}
\end{aligned}$$

Cela implique que nous pouvons sélectionner$\beta \in (0,1)$ et $L \succ 0$, tel que pour chaque$t \in \left[0, L\epsilon^{-\beta}\right] \subseteq |0, T|$ ayant

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq L\epsilon^{-\beta}} |X_\epsilon(t) - Z_\epsilon(t)|^2\right) \leq C\epsilon^{1-\beta},$$

où

$$\begin{aligned}
C = &\left(K_{12}L^{2\alpha}\epsilon^{1+\beta-2\alpha\beta} + K_{22}L^{2\alpha-1}\epsilon^{2\beta(1-\alpha)}\right)\\
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left(K_{11}L^{1+\alpha}\epsilon^{2-\beta-\alpha\beta} + K_{21}L^\alpha\epsilon^{1-\alpha\beta}\right)\Gamma(\alpha)\right)^k}{\Gamma(K\alpha+1)}
\end{aligned}$$

est une constante. Par conséquent, pour tout nombre donné δ_1,il existe $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$ tel que pour chaque $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ et $t \in \left[0, L\epsilon^{-\beta}\right]$

$$\mathbf{E}(\sup_{0\leq t\leq L\epsilon^{-\beta}} \left|X_\epsilon\left(t\right) - Z_\epsilon\left(t\right)\right|^2) \leq \delta_1.$$

La preuve est terminée. $\square$

CHAPITRE 4

SUR LE PRINCIPE DE MOYENNE POUR L'ÉQUATION PANTOGRAPHE STOCHASTIQUE FRACTIONNAIRE DE CAPUTO-HADAMARD

Dans ce chapitre on utilise le principe de la moyenne pour un système d'équations du pantographe différentielles fractionnaires stochastiques de Caputo-Hadamard dirige par un mouvement Brownien.

4.1 Introduction

La nature des solutions pour le système d'équation du pantographe différentielles fractionnaires stochastiques (FSDPE) dans l'espace euclidien n-dimensionnelle $\mathbb{R}^n$ $[1,2]$est particulièrement intéressant dans les applications pratiques. En général, les systèmes prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}\mathcal{X}(\varsigma) = b(\varsigma,\mathcal{X}(\varsigma),\mathcal{X}(1+\eta\varsigma)) + \sigma_1(\varsigma,\mathcal{X}(\varsigma),\mathcal{X}(1+\eta\varsigma))\dfrac{d\mathcal{B}(\varsigma)}{d\varsigma} \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\eta \in \left(0, \frac{T-1}{T}\right)$, $\mathcal{D}_{\varsigma}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard (DFCH), $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, pour chaque $\varsigma \geq 1$, $b : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma_1 : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont des fonctions

continues mesurables (FC), $\mathcal{B}(\varsigma)$ est un mouvement brownien standard m-dimensionnel sur $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ espace de probabilité. La valeur initiale $\mathcal{X}_0$ est une variable aléatoire de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_0$-mesurable, satisfaisant $E|\mathcal{X}_0|^2 < \infty$.
Les solutions de (FSDPE) non linéaires sont presque impossibles à résoudre même très difficile à résoudre. Pour cette raison, nous avons utilisé des méthodes symétriques et des techniques appliquées à des larges domaines. [13] [5]
Dans [33], Khasminiskii s'intéresse à l'étude de la convergence de ces systèmes sur l'échelle de temps quand $\varepsilon \to 0$, en résolvant par arguments intermédiaires. Il a conclu que le principe de moyenne permettait de réduire certains termes de ces équations et de les simplifier. Ainsi, nous obtenons un moyen facile de résoudre ces équations. Comme on sait de telles équations ont été appliquées à de nombreux algorithmes numériques à différents modèles, y compris les (FSDPE) voir [48] [41] . L'équation du pantographe généralisée a une variété d'applications. Seules des applications en théorie des nombres sont mentionnées [39], en électrodynamique [20] et dans l'absorption d'énergie par le pantographe d'un système électronique locomotive [24] 47. Nous nous appuyons sur ce travail, qui vise à étoffer l'argument classique de Khasminskii en équations différentielles fractionnaires aléatoires avec (DFCH). Pour nôtre objectif, avec l'aide d'une déduction mathématique rigoureuse, qui illustre ici avec justesse le principe de la moyenne fractionnaire qui a été atteint. Ceci signifie qu'un moyen simple et efficace a été donné pour résoudre les (FSDPE) [12] avec précision. Nous avons complété nôtre travail par un résultat principal. Pour expliquer cela, nous donnons un exemple illustratif spécifique.

4.2 Résultats Préliminaires et Hypothèse

Dans la présente section,nous introduisons quelques techniques de base, lemmes et théorèmes qui seront utilisés dans les démonstrations des résultats de ce chapitre

Lemme 4.1. *[51], [34] Soit* $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. *L'égalité* $\left(\mathfrak{I}_1^{\alpha} \mathfrak{D}_1^{\alpha} x\right)(\varsigma) = 0$ *est vrai si et seulement si*

$$x(\varsigma) = \sum_{k=1}^{n} c_k (\log \varsigma)^{\alpha - k} \text{ pour chaque } \varsigma \in [1, \infty),$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$ *sont des constantes arbitraires.*

Lemme 4.2. *[51], [34] Soit* $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ *et* $x \in C^{n-1}[1, \infty)$. *Alors*

$$\mathfrak{I}_1^{\alpha}[\mathfrak{D}_1^{\alpha} x(\varsigma)] = x(\varsigma) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\left(\delta^k x\right)(1)}{\Gamma(k+1)} (\log \varsigma)^k .$$

Lemme 4.3. *[51], [34] Pour tous* $\mu > 0$ *et* $\nu > -1$,

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_1^{\varsigma} \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\mu-1} (\log s)^{\nu} \frac{ds}{s} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} (\log \varsigma)^{\mu+\nu} .$$

Lemme 4.4. *[51], [34] Soit* $x(\varsigma) = (\log \varsigma)^{\mu}$, *où* $\mu \geq 0$ *et* $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$\mathfrak{D}_1^{\alpha} x(\varsigma) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \mu \in \{0, 1, ..., m-1\}, \\ \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} (\log \varsigma)^{\mu-\nu} & \textit{si } \mu \in \mathbb{N},\ \mu \geq m \textit{ ou } \mu \notin \mathbb{N},\ \mu > m-1. \end{cases}$$

Ici, nous posons des conditions sur les fonctions de coefficients, pour étudier le qualitatif propriétés de résolution de l'équation (4.1), qui nous aideront à la résoudre.

$(\Lambda 1)$pour chaque $x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$ et $\varsigma \in [1, T]$, il existe trois constantes C_1, C_2 et C_3 sont positifs, pour que

$$|b(\varsigma, x, y)|^2 \vee |\sigma_1(\varsigma, x, y)|^2 \leq C_1^2 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)$$
$$|b(\varsigma, x, y) - b(\varsigma, w, z)| \vee |\sigma_1(\varsigma, x, y) - \sigma_1(\varsigma, w, z)| \leq C_2 |x - w| + C_3 |y - z|$$

où $|.|$ est la norme de $\mathbb{R}^n$, $x_1 \vee x_2 = \max\{x_{1,} x_2\}$.

En coordination avec la recherche pivot de Zone [59], Zhang et Agarwal [58], comme nous le reconnaissons par la proposition $(\Lambda 1)$, FSDPEs (4.1) a une solution unique

$$\mathcal{X}(\varsigma) = \mathcal{X}_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\varsigma} \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} b\left(s, \mathcal{X}(s), \mathcal{X}(1+\eta s)\right) \frac{ds}{s}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\varsigma} \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} \sigma_1\left(s, \mathcal{X}(s), \mathcal{X}(1+\eta s)\right) \frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}, \tag{4.2}$$

$\mathcal{X}(\varsigma)$ est $\mathfrak{F}(\varsigma)$-adapté et $E\left(\int_1^T |\mathcal{X}(\varsigma)|^2 d\varsigma\right) < \infty$.

4.3 Le principe de moyenne

Dans cette partie, nous avons étudié le principe de la moyenne pour les EPDFS, en combinant le résultats de l'existence et de l'unicité. Considérons la forme standard de l'équation (4.1) :

$$\mathcal{X}_\epsilon(\varsigma) = \mathcal{X}_0 + \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\varsigma} \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} b\left(s, \mathcal{X}_\epsilon(s), \mathcal{X}_\epsilon(1+\eta s)\right) \frac{ds}{s}$$
$$+ \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\varsigma} \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} \sigma_1\left(s, \mathcal{X}_\epsilon(s), \mathcal{X}_\epsilon(1+\eta s)\right) \frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}, \tag{4.3}$$

Où $\mathcal{X}_0$ la valeur initiale, les coefficients b et σ_1 il a les mêmes suggestions que l'équation (4.1), on note aussi par ϵ_0 un nombre fixe, $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ est un petit paramètre positif. Avant de continuer avec le principe de la moyenne, nous imposons quelques coefficients mesurables, $\overline{b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \overline{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, satisfaisant $(\Lambda 1)$ et les inégalités supplémentaires :

$(\Lambda 2)$ Pour toute $T_1 \in [1, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,il existe deux fonctions bornées positives $\Psi_i(T_1), i = 1, 2$ tel que

$$\frac{1}{\log T_1} \int_1^{T_1} \left| b(s,x,y) - \overline{b}(x,y) \right| \frac{ds}{s} \leq \Psi_1(T_1)(1 + |x| + |y|),$$
$$\frac{1}{\log T_1} \int_1^{T_1} \left| \sigma_1(s,x,y) - \overline{\sigma}_1(x,y) \right|^2 \frac{ds}{s} \leq \Psi_2(T_1)(1 + |x|^2 + |y|^2),$$

Où $\lim\limits_{T_1 \to \infty} \Psi_i(T_1) = 0$.

Avec une aide suffisante ci-dessus, nous expliquerons que la solution exacte $\mathcal{X}_\epsilon(\varsigma)$ converges, comme $\epsilon \to 0$, tend vers $Z_\epsilon(\varsigma)$ du système moyenné

$$Z_\epsilon(\varsigma) = \mathcal{X}_0 + \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\varsigma (\log \frac{\varsigma}{s})^{\alpha-1} \overline{b}(Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)) \frac{ds}{s} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\varsigma (\log \frac{\varsigma}{s})^{\alpha-1} \overline{\sigma}_1(Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)) \frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}. \tag{4.4}$$

Nous venons maintenant présenter le résultat principal de cette recherche.

Théorème 4.1. *Suggère que* $(\Lambda 1) - (\Lambda 2)$*sont satisfait. pour* $\delta_1 > 0$ *ils existes* $L > 1, \epsilon_1 \in (0, \epsilon_0]$ *et on a* $\beta \in (0,1)$ *pour chaque* $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$,

$$\mathsf{E}\left(\sup_{\varsigma \epsilon \left[1, L^{\epsilon - \beta}\right]} \left|\mathcal{X}_\epsilon(\varsigma) - Z_\epsilon(\varsigma)\right|^2 \right) \leq \delta_1. \tag{4.5}$$

Démonstration. Pour toute $\varsigma \in [1, u] \subset [1, T]$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_\epsilon(\varsigma) - Z_\epsilon(\varsigma) \\ &= \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\varsigma \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} \left[b\left(s, \mathcal{X}_\epsilon(s), \mathcal{X}_\epsilon(1+\eta s)\right) - \overline{b}\left(Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)\right)\right] \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\varsigma \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} \left[\sigma_1\left(s, \mathcal{X}_\epsilon(s), \mathcal{X}_\epsilon(1+\eta s)\right) - \overline{\sigma}_1\left(Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)\right)\right] \frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire

$$|x_1 + x_2|^2 \leq 2(|x_1|^2 + |x_2|^2), \tag{4.7}$$

On a

$$
\begin{aligned}
& E\left(\sup_{1\leq\varsigma\leq u}\left|\mathcal{X}_{\epsilon}(\varsigma)-Z_{\epsilon}(\varsigma)\right|^{2}\right) \\
& \leq \frac{2\epsilon^{2}}{\Gamma(\alpha)^{2}} E \sup_{1\leq\varsigma\leq u}\left|\int_{1}^{\varsigma}\left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1}\left[b\left(s,\mathcal{X}_{\epsilon}(s),\mathcal{X}_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\right.\right. \\
& \left.\left. -\ \bar{b}\left(Z_{\epsilon}(s),Z_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\frac{ds}{s}\right]\right|^{2} \\
& +\frac{2\epsilon}{\Gamma(\alpha)^{2}} E \sup_{1\leq\varsigma\leq u}\left|\int_{1}^{\varsigma}\left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1}\left[\sigma_{1}\left(s,\mathcal{X}_{\epsilon}(s),\mathcal{X}_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\right.\right. \\
& \left.\left. -\ \overline{\sigma}_{1}\left(Z_{\epsilon}(s),Z_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}\right]\right|^{2} \\
& = I_{1}+I_{2}.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Rappelons les inégalités (4.7), on a

$$
\begin{aligned}
I_{1} \leq\ & \frac{4\epsilon^{2}}{\Gamma(\alpha)^{2}} E \sup_{1\leq\varsigma\leq u}\left|\int_{1}^{\varsigma}\left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1}\left[b\left(s,\mathcal{X}_{\epsilon}(s),\mathcal{X}_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\right.\right. \\
& \left.\left. -\ b\left(Z_{\epsilon}(s),Z_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\right]\frac{ds}{s}\right|^{2} \\
& +\frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^{2}} E \sup_{1\leq\varsigma\leq u}\left|\int_{1}^{\varsigma}\left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1}\left[b\left(s,Z_{\epsilon}(s),Z_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\right.\right. \\
& \left.\left. -\ \bar{b}\left(Z_{\epsilon}(s),Z_{\epsilon}(1+\eta s)\right)\right]\frac{ds}{s}\right|^{2} \\
& = I_{11}+I_{12}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

En utilisant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition $(\Lambda 1)$, on a

$$
I_{11} \leq K_{11}\epsilon^{2}\log u\int_{1}^{u}(\log\frac{u}{s})^{2\alpha-2} E\left(\sup_{1\leq s_{1}\leq s}\left|\mathcal{X}_{\epsilon}(s_{1})-Z_{\epsilon}(s_{1})\right|^{2}\frac{ds}{s}\right), \tag{4.10}
$$

où $K_{11} = \dfrac{8\left(C_2^2 + C_3^2\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)^2}$.Par la définition de l'intégration de la limite supérieure de la variable,

$$\begin{aligned} I_{12} \leq \frac{4\epsilon^2}{\Gamma\left(\alpha\right)^2} E \sup_{1 \leq \varsigma \leq u} \bigg| \int_1^{\varsigma} \left(\log \frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha - 1} d\left[\int_1^s b\left(\tau, Z_\epsilon\left(\tau\right), Z_\epsilon\left(1 + \eta\tau\right)\right)\right. \\ \left. - \ \bar{b}\left(Z_\epsilon(\tau), Z_\epsilon\left(1 + \eta\tau\right)\right) \frac{d\tau}{\tau}\right] \bigg|^2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

En utilisant l'intégration par partie,

$$\begin{aligned} I_{12} \leq \frac{4\epsilon^2(\alpha-1)^2}{\Gamma\left(\alpha\right)^2} E \sup_{1 \leq \varsigma \leq u} \bigg| \int_1^{\varsigma} \left(\int_1^s b\left(\tau, Z_\epsilon\left(\tau\right), Z_\epsilon\left(1 + \eta\tau\right)\right)\right. \\ \left. - \ \bar{b}\left(Z_\epsilon(\tau), Z_\epsilon\left(1 + \eta\tau\right)\right) \frac{d\tau}{\tau}\right) (\log \frac{\varsigma}{s})^{\alpha - 2} \frac{ds}{s} \bigg|^2, \end{aligned} \tag{4.12}$$

puis avec l'hypothèse $(\Lambda 2)$ et Inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} I_{12} &\leq \frac{4\epsilon^2\left(\alpha - 1\right)^2\left(\log u\right)^{2\alpha - 3}}{\left(2\alpha - 3\right)\Gamma\left(\alpha\right)^2} \\ &\times E \int_1^u \left| \int_1^s b\left(\tau, Z_\epsilon\left(\tau\right), Z_\epsilon\left(1 + \eta\tau\right)\right) - \bar{b}\left(Z_\epsilon\left(\tau\right), Z_\epsilon\left(1 + \eta\tau\right)\right) \frac{d\tau}{\tau} \right|^2 \frac{ds}{s} \\ &\leq K_{12}\epsilon^2\left(\log u\right)^{2\alpha}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

dans lequel

$$\begin{aligned} K_{12} = \frac{4(\alpha-1)^2}{(2\alpha-3)\Gamma(\alpha)^2} \sup_{1 \leq \varsigma \leq u} \Psi_1(\varsigma)^2 \left[1 + E\left(\sup_{1 \leq \tau \leq u} \left|Z_\epsilon\left(\tau\right)\right|^2\right)\right. \\ \left. + \ E\left(\sup_{1 \leq \tau \leq u} \left|Z_\epsilon\left(1 + \eta\tau\right)\right|^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Avec la même technique on obtient le second terme,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{4\epsilon^2}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{1\leq\varsigma\leq u} \left| \int_1^{\varsigma} \left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} \left[\sigma_1\left(s, \mathcal{X}_\epsilon(s), \mathcal{X}_\epsilon(1+\eta s)\right)\right.\right. \\
&- \left.\left.\sigma_1\left(s, Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)\right)\right] \frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}\right|^2 \\
&+ \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \sup_{1\leq\varsigma\leq u} \left| \int_1^{\varsigma} \left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} \left[\sigma_1\left(s, Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)\right)\right.\right. \\
&- \left.\left.\overline{\sigma}_1\left(Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)\right)\right] \frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}\right|^2 \\
&= I_{21} + I_{22}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

En appliquant, l'inégalité de Doob martingale, et la formule d'Itô et la condition $(\Lambda 1)$,

$$\begin{aligned}
I_{21} &\leq \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \int_1^u \left(\log\frac{u}{s}\right)^{2\alpha-2} \left|\sigma_1\left(s, \mathcal{X}_\epsilon(s), \mathcal{X}_\epsilon(1+\eta s)\right)\right. \\
&\quad - \left.\sigma_1\left(s, Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)\right)\right|^2 \frac{ds}{s} \\
&\leq K_{21}\epsilon \int_1^u \left(\log\frac{u}{s}\right)^{2a-2} E\left(\sup_{1\leq s_1\leq s} \left|\mathcal{X}_\epsilon(s_1) - Z_\epsilon(s_1)\right|^2\right) \frac{ds}{s},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Où $K_{21} = \dfrac{8\left(C_2^2 + C_3^2\right)}{\Gamma(\alpha)^2}$. En appliquant, l'inégalité de Doob martingale et la formule d'Itô de nouveau,

$$\begin{aligned}
I_{22} &\leq \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E \int_1^u \left(\log\frac{u}{s}\right)^{2\alpha-2} \left|\sigma_1\left(s, \mathcal{X}_\epsilon(s), \mathcal{X}_\epsilon(1+\eta s)\right)\right. \\
&\quad - \left.\overline{\sigma}_1\left(Z_\epsilon(s), Z_\epsilon(1+\eta s)\right)\right|^2 \frac{ds}{s}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

L'intégration par parties, nous donne

$$\begin{aligned} I_{22} &\leq \frac{4\epsilon}{\Gamma(\alpha)^2} E\int_1^u \left(\log\frac{u}{s}\right)^{2\alpha-2} d\left[\int_1^s |\sigma_1(\tau, Z_\epsilon(\tau), Z_\epsilon(1+\eta\tau)) \right. \\ &\left. - \overline{\sigma}_1(Z_\epsilon(\tau), Z_\epsilon(1+\eta\tau))|^2 \frac{d\tau}{\tau}\right] \\ &\leq \frac{4\epsilon(2\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)^2} E\int_1^u \left(\int_1^s |\sigma_1(\tau, Z_\epsilon(\tau), Z_\epsilon(1+\eta\tau)) \right. \\ &\left. - \overline{\sigma}_1(Z_\epsilon(\tau), Z_\epsilon(1+\eta\tau))|^2 \frac{d\tau}{\tau}\right) \left(\log\frac{u}{s}\right)^{2\alpha-3} \frac{ds}{s}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

grâce à l'hypothèse $(\Lambda 2)$, on peut conclure

$$\begin{aligned} I_{22} &\leq \frac{4\epsilon(2\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)^2} E\int_1^u \left(\sup_{1\leq s_1\leq s} \Psi_2(s_1)\left[1 + E\left(\sup_{1\leq\tau\leq s}|Z_\epsilon(\tau)|^2\right)\right.\right. \\ &\left.\left. + E\left(\sup_{1\leq\tau\leq s}|Z_\epsilon(1+\eta\tau)|^2\right)\right]\right)(\log s)\left(\log\frac{u}{s}\right)^{2\alpha-3}\frac{ds}{s} \\ &\leq K_{22}\epsilon(\log u)^{2\alpha-1}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

Où

$$\begin{aligned} K_{22} = \frac{3(2\alpha-2)}{\alpha(2\alpha-1)\Gamma(\alpha)^2} \sup_{1\leq\varsigma\leq u}\Psi_2(\varsigma)\left[1 + E\left(\sup_{1\leq\varsigma\leq u}|Z_\epsilon(\tau)|^2\right)\right. \\ \left. + E\left(\sup_{1\leq\varsigma\leq u}|Z_\epsilon(1+\eta\tau)|^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Maintenant, brancher les équations (4.10)-(4.19) dans (4.8), pour toute $u \in [1, T]$,nous trouvons

$$\begin{aligned} &E\left(\sup_{1\leq\varsigma\leq u}|\mathcal{X}_\epsilon(\varsigma)|^2\right) \\ &\leq K_{12}\epsilon^2 u^{2\alpha} + K_{22}\epsilon u^{2\alpha-1} \\ &+ \left(K_{11}\epsilon^2 u + K_{21}\epsilon\right)\int_1^u \left(\log\frac{u}{s}\right)^{(2\alpha-1)-1} E\left(\sup_{1\leq s_1\leq s}|\mathcal{X}_\epsilon(s_1) - Z_\epsilon(s_1)|^2\right)\frac{ds}{s}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

Selon l'inégalité de Gronwall-Bellman [46],nous trouvons

$$\begin{aligned}
&E\left(\sup_{1\leq\varsigma\leq u}\left|\mathcal{X}_{\epsilon}(\varsigma)-Z_{\epsilon}(\varsigma)\right|^{2}\right)\\
&\leq\left(K_{12}\epsilon^{2}(\log u)^{2\alpha}+K_{22}\epsilon(\log u)^{2\alpha-1}\right)\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left(K_{11}\epsilon^{2}(\log u)^{2\alpha}+K_{21}\epsilon(\log u)^{2\alpha-1}\right)\Gamma(2\alpha-1)\right)^{k}}{\Gamma(k(2\alpha-1)+1)}.
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Cela implique que l'on peut sélectionner$\beta\in(0,1)$ et $L>1,$ telle que pour chaque $\varsigma\in\left[1,L^{\epsilon^{-\beta}}\right]\subseteq[1,T]$ ayant

$$E\left(\sup_{1\leq\varsigma\leq L^{\epsilon^{-\beta}}}\left|\mathcal{X}_{\epsilon}(\varsigma)-Z_{\epsilon}(\varsigma)\right|^{2}\right)\leq C\epsilon^{1-\beta},\tag{4.23}$$

Où

$$\begin{aligned}
C=&\left(K_{12}(\log L)^{2\alpha}\epsilon^{1+\beta-2\alpha\beta}+K_{22}(\log L)^{2\alpha-1}\epsilon^{2\beta(1-\alpha)}\right)\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left(K_{11}(\log L)^{2\alpha}\epsilon^{2(1-\alpha\beta)}+K_{21}(\log L)^{2\alpha-1}\epsilon^{1+\beta(1-2\alpha)}\right)\Gamma(2\alpha-1)\right)^{k}}{\Gamma(k(2\alpha-1)+1)},
\end{aligned}\tag{4.24}$$

est une constante. Ainsi, pour tout nombre donné $\delta_{1,}$il existe $\epsilon_1\in(0,\epsilon_0]$ telle que pour chaque $\epsilon\in(0,\epsilon_1]$ et $\varsigma\in\left[1,L^{\epsilon^{-\beta}}\right]$ ayant

$$E\left(\sup_{1\leq\varsigma\leq L^{\epsilon^{-\beta}}}\left|\mathcal{X}_{\epsilon}(\varsigma)-Z_{\epsilon}(\varsigma)\right|^{2}\right)\leq\delta_{1}.\tag{4.25}$$

fini la preuve. $\square$

4.4 Exemple

Nous présentons l'équation (FSDP) suivante

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_1^{\alpha}\mathcal{X}_{\epsilon}(\varsigma) = 3\epsilon\left(\mathcal{X}_{\epsilon}\left(\varsigma\right) + \mathcal{X}_{\epsilon}\left(1+\eta\varsigma\right)\right)\log^2(\varsigma) + \sqrt{\epsilon}\dfrac{d\mathfrak{B}(\varsigma)}{d\varsigma}, \\ \mathcal{X}(1) = 0, \end{cases} \tag{4.26}$$

Où $\eta \in \left(0, \frac{\pi-1}{\pi}\right), \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Les coefficients $b(\varsigma, \mathcal{X}_{\epsilon}, Y_{\epsilon}) = 3\left(\mathcal{X}_{\epsilon} + Y_{\epsilon}\right)\log^2(\varsigma)$ et $\sigma_1(\varsigma, \mathcal{X}_{\epsilon}, Y_{\epsilon}) = 1$ vérifient la conditions $(\Lambda 1)$, il existe donc une solution unique pour (FSDPE) (4.26). Définissons

$$\bar{b}(\mathcal{X}_{\epsilon}, Y_{\epsilon}) = \frac{1}{\log \pi}\int_1^{\pi} b(\varsigma, \mathcal{X}_{\epsilon}, Y_{\epsilon})\frac{d\varsigma}{\varsigma} = (\mathcal{X}_{\epsilon} + Y_{\epsilon})\log^2(\pi),\ \ \overline{\sigma}_1(\mathcal{X}_{\epsilon}, Y_{\epsilon}) = 1,$$

en voit facilement $(\Lambda 2)$ satisfaite, donc la forme standard de la solution de (4.26) est

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\epsilon}\left(\varsigma\right) &= \mathcal{X}_0 + \frac{\epsilon}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_1^{\varsigma}\left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1} 3\left(\mathcal{X}_{\epsilon} + Y_{\epsilon}\right)\log^2(\varsigma)\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_1^{\varsigma}\left(\log\frac{\varsigma}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{d\mathfrak{B}\left(s\right)}{s}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

On applique le principe de khasminskii pour montré que la solution exacte $\mathcal{X}_{\epsilon}(\varsigma)$ converge, quant $\epsilon \to 0$, vers $Z_{\epsilon}(\varsigma)$ donné par

$$\begin{aligned} Z_{\epsilon}(\varsigma) &= \mathcal{X}_0 + \frac{\epsilon}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_1^{\varsigma}(\log\frac{\varsigma}{s})^{\alpha-1}\left(\mathcal{X}_{\epsilon} + Y_{\epsilon}\right)\log^2(\pi)\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_1^{\varsigma}(\log\frac{\varsigma}{s})^{\alpha-1}\frac{d\mathfrak{B}(s)}{s}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Selon le théorème (4), quand $\epsilon \to 0$, la solution $\mathcal{X}_{\epsilon}\left(\varsigma\right)$ et $Z_{\epsilon}(\varsigma)$ sont équivalents.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

De nombreux chercheurs ont étudié le principe de Khasminskii pour des équations différentielles stochastiques fractionnaires de caputo approchées par des solutions à systèmes stochastiques. La nouvelle idée de notre travail est de s'intéresser à un type spéciale de systèmes d'équations du pantographe fractionnaires stochastiques de Caputo-Hadamard diriger par le mouvement brownien. Dans ce travail nous avons obtenu des résultats originaux sur l'étude de l'existence et l'unicité de certains systèmes d'équations du pantographes fractionnaires stochastiques. Nous avons aussi démontrer que les solutions des (FSDPE) peuvent être approximées par des solutions de systèmes stochastiques au sens de la moyenne quadratique.
Aussi, nous avons étendu l'approche classique de Khasminskii pour (FSDPE) au sens de Caputo-Hadamard. Enfin, nous proposons deux pistes de recherche pour notre étude dans le futur, en envisageant l'application de nouvelles approches, notamment :
1- En appliquant cette nouvelle notion dans les deux problèmes, nous introduisons la notion de multi-ordre fractionnaire, également connue sous le terme de multi-termes

$$D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \ldots\ldots D^{\alpha_n}.$$

2- En appliquant cette nouvelle notion dans les deux problèmes, nous introduisons la notion de variable-ordre fractionnaire, également connue sous le terme de variable ordre

$$D^{\alpha(t)}, t \in [a, T] \, .$$

Bibliographie

[1] *Sur l'existence et la stabilité de solution d'équl-Borai, Mahmoud M and El-Nadi, Khairia El-Said and Fouad, Hoda A.* PhD thesis, 2010.

[2] Ilham ABI AYAD. *INTRODUCTION AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES.* PhD thesis.

[3] Ravi P Agarwal, Yong Zhou, and Yunyun He. Existence of fractional neutral functional differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(3) :1095–1100, 2010.

[4] Abdelouaheb Ardjouni, Hamid Boulares, and Yamina Laskri. Stability in higher-order nonlinear fractional differential equations. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 22(1) :37–47, 2018.

[5] Boundedness A.Wu, Z.Zeng. *Mittag-Leffler stability and asymptotic ω-periodicity of fractional-order fuzzy networks.* Elsevier Science, 2016.

[6] Hamid Boulares, Manar A Alqudah, and Thabet Abdeljawad. Existence of solutions for a semipositone fractional boundary value pantograph problem. *AIMS Math*, 7 :19510–19519, 2022.

[7] Hamid Boulares, Abdelouaheb Ardjouni, and Yamina Laskri. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional nabla difference systems with initial conditions. *Fract. Differ. Calc*, 7(2) :247–263, 2017.

[8] Hamid Boulares, Abbes Benchaabane, Nuttapol Pakkaranang, Ramsha Shafqat, and Bancha Panyanak. Qualitative properties of positive solutions of a kind for fractional pantograph problems using technique fixed point theory. *Fractal and Fractional*, 6(10) :593, 2022.

[9] Régis Bourbonnais and Virginie Terraza. Chapitre 5. processus aléatoires non stationnaires. *Eco Sup*, 5 :147–200, 2022.

[10] Loïc Bourdin. *Contributions au calcul des variations et au principe du maximum de Pontryagin en calculs time scale et fractionnaire*. PhD thesis, Pau, 2013.

[11] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[12] Lincong Chen, Fang Hu, and Weiqiu Zhu. Stochastic dynamics and fractional optimal control of quasi integrable hamiltonian systems with fractional derivative damping. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16(1) :189–225, 2013.

[13] Wen Chen, HongGuang Sun, XC Li, et al. *Fractional derivative modeling of mechanics and engineering problems.* science press, beiging,(In Chines), 2010.

[14] Erhan Cinlar. Introduction to stochastic processes prentice-hall. *Englewood Cliffs, New Jersey (420p)*, 1975.

[15] Pradip Debnath, HM Srivastava, Poom Kumam, and Bipan Hazarika. Fixed point theory and fractional calculus : Recent advances and applications, 2022.

[16] François Dubois, Ana Cristina Galucio, and Nelly Point. Introduction à la dérivation fractionnaire - théorie et applications. *Mathématiques*, 2010.

[17] UNIVERSITAIRES DE LA REGION EST. Offre de formation de troisieme cycle en vue de l'obtention du doctorat au titre de l'annee universitaire.

[18] F.Dubois, A.Galucio, and N.Point. *Introduction à la dérivation fractionnaire :Theorie et applications*. Conservatoire National des Arts et Metiers, Mathematiques, Paris France, 29 mars2010.

[19] Ervin Feldheim. *Etude de la stabilité des lois de probabilité*. PhD thesis, Imprimerie et librairie de la ville, 1937.

[20] Leslie Fox, David F Mayers, John R Ockendon, and Alan B Tayler. On a functional differential equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 8(3) :271–307, 1971.

[21] M Fréchet. Nouvelles expressions de la "distance" de deux variables aléatoires et de la "distance" de deux fonctions measurables. In *Annales de la société polonaise de mathématiques*, volume 9, pages 45–48, 1931.

[22] G.B.Follard. *Fourier analysis and its applications*. Wadsworth and Brooks, 1992.

[23] Valérie Girardin and Nikolaos Limnios. Probabilités. *Vuibert Paris, FR*, 2001.

[24] JK Hale. Theory of functional differential equations, 1977.

[25] Ahmed Hallaci, Hamid Boulares, and Abdelouaheb Ardjouni. Existence and uniqueness for delay fractional differential equations with mixed fractional derivatives. *Open J. Math. Anal*, 4 :26–31, 2020.

[26] Ahmed Hallaci, Hamid Boulares, Abdelouaheb Ardjouni, and Abderrazak Chaoui. On the study of fractional differential equations in a weighted sobolev space. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 9 :333–343, 2019.

[27] Sofiane Hammouche. *Identification d'un modèle fractionnaire à l'aide des réseaux de neurones.* PhD thesis, Université Mouloud Mammeri, 2012.

[28] Arieh Iserles. On the generalized pantograph functional-differential equation. *European Journal of Applied Mathematics*, 4(1) :1–38, 1993.

[29] Fahd Jarad, Thabet Abdeljawad, and Dumitru Baleanu. Caputo-type modification of the hadamard fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2012(1) :1–8, 2012.

[30] RS Johnson. An introduction to sturm-liouville theory. *University of Newcastle, Newcastle*, 2006.

[31] Ioannis Karatzas, Ioannis Karatzas, Steven Shreve, and Steven E Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 1991.

[32] Tosio Kato. Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation y(x)= ay (x)+ by (x). In *Delay and functional differential equations and their applications*, pages 197–217. Elsevier, 1972.

[33] RZ Khasminskij. On the principle of averaging the itov's stochastic differential equations. *Kybernetika*, 4(3) :260–279, 1968.

[34] A Anatolii Aleksandrovich Kilbas, Hari Mohan Srivastava, and Juan J Trujillo. *Theory And Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204. Elsevier Science Limited, 2006.

[35] G. Koepfler. *Equations aux dérivées partielles*. Université Paris Descartes, 2011.

[36] Damien Lamberton. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. 1997.

[37] Paul Lévy. L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 67 :1–41, 1939.

[38] Qi Luo, Xuerong Mao, and Yi Shen. Generalised theory on asymptotic stability and boundedness of stochastic functional differential equations. *Automatica*, 47(9) :2075–2081, 2011.

[39] Kurt Mahler. On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2) :115–123, 1940.

[40] Xuerong Mao. *Stochastic differential equations and applications*. Elsevier, 2007.

[41] RC Mittal and Sapna Pandit. A numerical algorithm to capture spin patterns of fractional bloch nuclear magnetic resonance flow models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 14(8), 2019.

[42] Abdelkader Moumen, Ramsha Shafqat, Ammar Alsinai, Hamid Boulares, Murat Cancan, and Mdi Begum Jeelani. Analysis of fractional stochastic evolution equations by using hilfer derivative of finite approximate controllability. *AIMS Math*, 8 :16094–16114, 2023.

[43] Abdelkader Moumen, Ramsha Shafqat, Zakia Hammouch, Azmat Ullah Khan Niazi, and Mdi Begum Jeelani. Stability results for fractional integral pantograph differential equations involving two caputo operators. *AIMS Mathematics*, 8(3) :6009–6025, 2022.

[44] Mounia Mouy, Hamid Boulares, Saleh Alshammari, Mohammad Alshammari, Yamina Laskri, and Wael W. Mohammed. On averaging principle for caputo–hadamard fractional stochastic differential pantograph equation. *Fractal and Fractional*, 7(1), 2023.

[45] Cheikh Bécaye Ndongo. *Processus aléatoires et applications en finance*. PhD thesis, Université du Québec à Trois-Rivières, 2012.

[46] Ibrahima N'Doye. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I ; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca, 2011.

[47] John Richard Ockendon and Alan B Tayler. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 322(1551) :447–468, 1971.

[48] Sapna Pandit and RC Mittal. A numerical algorithm based on scale-3 haar wavelets for fractional advection dispersion equation. *Engineering Computations*, 2020.

[49] Huyên Pham. *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, volume 61. Springer, 2007.

[50] Igor Podlubny. *Fractional differential equations : An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Academic press, 1998.

[51] Igore Podlubny. Fractional differential equations. *Mathematics in science and engineering*, 198 :41–119, 1999.

[52] Hervé Reinhard. *Equations aux dérivées partielles*. Dunod, 1987.

[53] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293. Springer Science & Business Media, 2013.

[54] Stefan G Samko, Anatoly A Kilbas, Oleg I Marichev, et al. Fractional integrals and derivatives. *Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon*, 1993, 1993.

[55] Hanifa Seddiki. *Calcul fractionnaire*. PhD thesis, Université Badji-Mokhtar Annaba, 2009.

[56] Wenjing Xu, Wei Xu, and Shuo Zhang. The averaging principle for stochastic differential equations with caputo fractional derivative. *Applied Mathematics Letters*, 93 :79–84, 2019.

[57] Haiping Ye, Jianming Gao, and Yongsheng Ding. A generalized gronwall inequality and its application to a fractional differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328(2) :1075–1081, 2007.

[58] Xianmin Zhang, Praveen Agarwal, Zuohua Liu, Hui Peng, Fang You, and Yajun Zhu. Existence and uniqueness of solutions for stochastic differential equations of fractional-order q¿ $1q > 1$ with finite delays. *Advances in Difference Equations*, 2017(1) :1–18, 2017.

[59] Guang-an Zou and Bo Wang. On the study of stochastic fractional-order differential equation systems. *arXiv preprint arXiv :1611.07618*, 2016.

fractal and fractional

MDPI

Article

On Averaging Principle for Caputo–Hadamard Fractional Stochastic Differential Pantograph Equation

Mounia Mouy [1], Hamid Boulares [2], Saleh Alshammari [3], Mohammad Alshammari [3], Yamina Laskri [4] and Wael W. Mohammed [3,5,*]

1 Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University Badji Mokhtar Annaba, P.O. Box 12, Annaba 23000, Algeria
2 Laboratory of Analysis and Control of Differential Equations "ACED", Faculty MISM, Department of Mathematics, University of Guelma, Guelma 24000, Algeria
3 Department of Mathematics, Collage of Science, University of Ha'il, Ha'il 2440, Saudi Arabia
4 Higher School of Industrial Technologies, Annaba 23000, Algeria
5 Department of Mathematics, Faculty of Science, Mansoura University, Mansoura 35516, Egypt
* Correspondence: wael.mohammed@mans.edu.eg

Abstract: In this paper, we studied an averaging principle for Caputo–Hadamard fractional stochastic differential pantograph equation (FSDPEs) driven by Brownian motion. In light of some suggestions, the solutions to FSDPEs can be approximated by solutions to averaged stochastic systems in the sense of mean square. We expand the classical Khasminskii approach to Caputo–Hadamard fractional stochastic equations by analyzing systems solutions before and after applying averaging principle. We provided an applied example that explains the desired results to us.

Keywords: averaging principle; Caputo–Hadamard fractional derivative; pantograph equations; Khasminskii approach

MSC: 34K20; 34K30; 34K40

check for updates

Citation: Mouy, M.; Boulares, H.; Alshammari, S.; Alshammari, M.; Laskri, Y.; Mohammed, W.W. On Averaging Principle for Caputo–Hadamard Fractional Stochastic Differential Pantograph Equation. *Fractal Fract.* **2023**, *7*, 31. https://doi.org/10.3390/fractalfract7010031

Academic Editor: Carlo Cattani

Received: 8 December 2022
Revised: 23 December 2022
Accepted: 26 December 2022
Published: 28 December 2022

1. Introduction

The nature of solutions for fractional stochastic differential pantograph equations (FSDPEs) in Euclidean space n-dimensional $\mathbb{R}^n$ [1,2], is particularly interesting in practical applications. In general, the systems take the form

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_\varsigma^\alpha \mathcal{X}(\varsigma) = b(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma)) + \sigma_1(\varsigma, \mathcal{X}(\varsigma), \mathcal{X}(1+\eta\varsigma))\dfrac{d\mathfrak{B}(\varsigma)}{d\varsigma} \\ \mathcal{X}(1) = \mathcal{X}_0, \end{cases} \tag{1}$$

where $\eta \in \left(0, \frac{T-1}{T}\right)$, $\mathfrak{D}_\varsigma^\alpha$ is the Caputo–Hadamard fractional derivative (CHFD), $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, for each $\varsigma \geq 1$, $b : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and $\sigma_1 : [1,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ are measurable continuous functions (CF), $\mathfrak{B}(\varsigma)$ is a m-dimensional standard Brownian motion on $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ probability space. The initial value $\mathcal{X}_0$ is an $\mathfrak{F}_0$-measurable $\mathbb{R}^n$-value random variable, satisfying $E|\mathcal{X}_0|^2 < \infty$.

Solutions of non-linear FSDPEs are almost impossible to solve and very difficult. For this reason we used symmetrical methods and techniques in the widest field. It plays very important in modernity of partial calculus [3,4].

In [5], Khasminiskii was interested in studying the convergence of idle systems on the drag time scale $\varepsilon \to 0$, in resolving intermediate arguments. He concluded that averaging principle lay in the study of equations lost in terms of the relevant average. So, we have an easy way to solve these equations, as it is known that such equations have been applied to many numerical algorithms to different models, including FSDEs see [6,7].

Fractal Fract. **2023**, *7*, 31. https://doi.org/10.3390/fractalfract7010031 https://www.mdpi.com/journal/fractalfract