

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR- ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département d'Electronique

Année 2018

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
DOCTORAT EN SCIENCES

Option

Automatique

Conception de Multi-modèles Non Linéaires  
Basée sur les RNA pour la Commande  
Prédictive de Procédés Industriels

par

MATOUG LAMIA

DIRECTEUR DE THESE :

Pr. Mohamed Tarek KHADIR

Université Badji-Mokhtar d'Annaba

DEVANT Le JURY

Président

Pr. Messaoud RAMDANI

Université Badji-Mokhtar d'Annaba

Examineurs

Pr. Abdelkrim MOUSSAOUI

Université de Guelma

Pr. Djalil BOUDJEHEM

Université de Guelma

*Je dédie ce travail à feu mon père,  
repose en paix si j'ai pu être la aujourd'hui c'est grâce à toi*

# Remerciements

En premier je tiens à exprimer el hamdoulillah car sans l'aide de dieu j'aurais pas été la aujourd'hui,

Je tiens particulièrement à remercier mon encadreur M. Khadir Mohamed Tarek, d'abord pour sa présence et son soutien, mais aussi pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté,

Je remercie monsieur le président du jury et les membres de jury d'avoir accepté d'honorer par leurs présences et leurs savoirs et d'avoir accepté d'examiner mon travail de recherche,

Je tiens aussi à m'excuser au près de mes enfants Youcef, Melissa et Cerine pour mon absence, et surtout pour le temps énorme que je ne leurs ai pas consacré.

Je remercie ma mère qui a été présente tout au long de la réalisation de ce projet,

Je remercie mon mari qui m'a beaucoup aidé durant toutes ces années,

Je remercie mes frères et soeurs, Sofia, Sabrina, Fares et Radoine,

Je remercie ma belle mère pour l'aide précieuse qu'elle m'a apporté, mes beaux frères Tayeb et Zohir et ma belle soeur Sara,

Un grand merci à tous mes professeurs, je ne leurs dirais jamais autant merci, ce travail je le dois à eux,

Et enfin je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, à la réalisation de mon projet.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Procédés d'épuration à boues activées (ASM1)</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	6
1.2 Fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées	7
1.2.1 Description physique de la station	7
1.2.2 Le bioréacteur	7
1.2.3 Le clarificateur	8
1.2.4 Le recyclage des boues	8
1.3 Modélisation des stations d'épuration à boues activées	8
1.4 Choix du modèle	9
1.5 Le modèle biologique ASM1	9
1.5.1 Phénomènes biologiques et variables d'état	9
1.5.2 Ecriture du modèle	14
1.5.3 Hypothèses du modèle	15
1.6 Réduction du modèle ASM1	18
1.7 Hypothèses de simplification	18
1.8 Ordre du modèle réduit	19
<b>2 Systèmes multi-modèles</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction	24
2.2 Obtention d'une structure multi-modèle	25
2.2.1 Différentes structures multi-modèles	26
2.2.2 Méthode générale de passage d'un système non linéaire en multi-modèle	29
2.3 Introduction au modèle flou de Takagi Sugeno (TS)	31
2.3.1 Représentation du modèle flou de Takagi Sugeno (TS)	31

2.3.2	Construction du modèle flou de Takagi Sugeno (TS) . . . . .	34
2.3.3	Forme Quasi-Linéaire à Paramètres Variables (Quasi-LPV) . . . . .	36
2.3.4	Limites de la méthodologie proposée . . . . .	37
2.3.5	Stabilité des multi-modèles Takagi Sugeno (TS) . . . . .	38
<b>3</b>	<b>La Commande Prédicative basée Modèle (MPC)</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	42
3.2	Principes généraux et fondements . . . . .	42
3.3	Commande Prédicative Généralisée basée sur les multi-modèles (TS-GPC) . . . . .	43
3.3.1	MIMO GPC Locale . . . . .	43
3.4	Commande Prédicative à Matrice Dynamique basée sur les multi-modèles (TS-DMC) . . . . .	47
3.4.1	MIMO DMC Locale . . . . .	47
3.5	Commande TS-MPC basée sur les multi-modèles (TS) . . . . .	51
3.6	Commande Adaptative basée sur les multi-modèles (TS-AMPC) . . . . .	52
3.7	La commande classique PID . . . . .	53
3.7.1	PID Digital . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Multi-modèles (TS) du ASM1 réduit et approximation des fonctions non linéaire en utilisant les RNA</b> . . . . .	<b>56</b>
4.1	Introduction . . . . .	57
4.2	Obtention d'un multi-modèle (TS) pour le modèle ASM1 réduit . . . . .	57
4.2.1	Résultats des simulations . . . . .	58
4.3	Approximation des fonctions non linéaire du multi-modèle (TS) en utilisant les Réseaux de Neurones Artificiels (RNA) . . . . .	60
4.3.1	Introduction aux modèles à base de Réseaux de Neurones Artificiels (RNA) . . . . .	60
4.3.2	Perceptron Multi-Couches (MLP) . . . . .	62
4.3.3	Apprentissage par rétro-propagation du gradient . . . . .	63
4.3.4	Algorithme de la rétro-propagation . . . . .	67
4.3.5	Construction du réseau MLP basée sur le multi-modèle (TS) du ASM1 réduit . . . . .	68
4.4	Perturbations et incertitudes . . . . .	72
4.5	Conclusion . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Commande prédictive du bioréacteur ASM1 réduit</b> . . . . .	<b>75</b>
5.1	Commande TS-DMC du bioréacteur ASM1 réduit . . . . .	76
5.1.1	Résultats et simulations de la commande TS-DMC du bioréacteur ASM1 réduit . . . . .	76

5.2	Commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 3 variables de prémisse . . . . .	81
5.2.1	Résultats et simulations de la commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 3 variables de prémisse . . . . .	81
5.3	Commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 4 variables de prémisse . . . . .	87
5.3.1	Obtention d'un multi-modèle (TS) pour le modèle ASM1 réduit à 4 variables de prémisse . . . . .	87
5.3.2	Résultats et simulations de la commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 4 variables de prémisse . . . . .	89
5.4	Conclusion . . . . .	99
	<b>Conclusion générale</b>	<b>101</b>
	<b>A Transformation du système</b>	<b>103</b>

# Table des figures

1.1	Procédé de traitement à boues activées en bassin unique . . . . .	8
1.2	Fractionnement de la DCO . . . . .	12
1.3	Fractionnement de la matière azotée . . . . .	12
1.4	Modèle ASM1 (Source : [Henze et al., 1987]) . . . . .	22
2.1	Architecture du multi-modèle couplé . . . . .	28
2.2	Architecture du multi-modèle découplé . . . . .	29
2.3	Architecture du multi-modèle à structure hiérarchique . . . . .	29
2.4	Structure d'un multi-modèle TS standard . . . . .	33
2.5	Secteur non linéaire global . . . . .	35
2.6	Secteur non linéaire local . . . . .	35
3.1	Intégration pondérée des contrôleurs locaux MPC basée sur le multi-modèle TS (TS-MPC) . . . . .	51
3.2	Switching entre Commande Adaptative AMPC basé sur le multi-modèle TS (TS-AMPC) . . . . .	52
3.3	Approche de commande de type PID . . . . .	53
3.4	Contrôleur PID . . . . .	53
4.1	Evolution des fonctions d'appartenance . . . . .	58
4.2	Entrées du système . . . . .	59
4.3	Sorties du système non linéaire du ASM1 réduit (b) et du multi-modèle (TS) (r-) . . . . .	60
4.4	Réseau MLP . . . . .	63
4.5	MLP justifiant le théorème de Cybenko . . . . .	63
4.6	Trois neurones de différentes couches dans un MLP à deux couches cachées . . . . .	64
4.7	Topologie RNA et signaux d'entrées utilisés dans l'apprentissage . . . . .	69
4.8	Entrées du réseau RNA . . . . .	70

4.9	Sorties d'apprentissage du modèle Neuro-TS, Non linéaire et le multi-modèle (TS) classique . . . . .	71
4.10	Sorties de validation du modèle Neuro-TS, Non linéaire et le multi-modèle (TS) classique	72
4.11	Evolution de l'erreur des sommes quadratiques SSE en fonction du nombre d'époques	73
5.1	Commande TS-ADMC en l'absence de perturbations . . . . .	77
5.2	Commande TS-ADMC en présence de perturbations . . . . .	78
5.3	Commande TS-DMC en l'absence de perturbations . . . . .	79
5.4	Commande TS-DMC en présence de perturbations . . . . .	80
5.5	Commande TS-GPC en l'absence de perturbations . . . . .	82
5.6	Commande TS-AGPC en l'absence de perturbations . . . . .	83
5.7	Commande TS-AGPC en présence de perturbations . . . . .	84
5.8	Commande TS-AGPC2 en présence de perturbations . . . . .	85
5.9	Commande TS-GPC en présence de perturbations . . . . .	86
5.10	Evolution des fonctions d'appartenance en présence de perturbations et d'incertitudes	90
5.11	Commande TS-GPC en l'absence de perturbations . . . . .	91
5.12	Commande TS-AGPC en l'absence de perturbations . . . . .	92
5.13	Commande TS-AGPC en présence de perturbations . . . . .	93
5.14	Commande TS-GPC en présence de perturbations . . . . .	94
5.15	Commande TS-AGPC2 en présence de perturbations utilisant plus d'un sous-modèle à la fois . . . . .	95
5.16	Commande PID en l'absence de perturbations . . . . .	96
5.17	Commande PID en présence de perturbations . . . . .	97
5.18	Comparaison entre stratégies de contrôle sans perturbations . . . . .	98
5.19	Comparaison entre stratégies de contrôle avec perturbations . . . . .	99

# Liste des tableaux

1.1	Variables d'état du modèle ASM1 . . . . .	11
1.2	Définition des paramètres utilisés dans le modèle ASM1 . . . . .	14
4.1	Domaines d'application des RNA . . . . .	61
4.2	Valeurs MSE globales par rapport à différentes topologies . . . . .	71
4.3	Valeurs MSE globales pour des perturbations sur le débit d'entrée ( $q_{in}$ ) . . . . .	73
4.4	Valeurs MSE globales pour des incertitudes sur le coefficient hétérotrophe de la mortalité de la biomasse ( $b_H$ ) . . . . .	74
5.1	Performance des commandes TS-GPC, TS-AGPC, TS-AGPC2 et PID . . . . .	99

# Abstract

Based on the original IAWQ (International Association on Water Quality) model, the reduced bioreactor Activated Sludge ASM1 Model (Activated Sludge Model N°1), which describes the biological degradation of an activated sludge reactor, is designed based on several simplifications. The simplifications considered are based mainly on the analysis of the components of the model, namely dissolved oxygen, organic matter, nitrogen and microorganisms.

The modeling of the nonlinear systems ASM1 uses complex expressions, based on knowledge of physical and chemical phenomena, hence the difficulty of their use for diagnostic or control purposes. To overcome this difficulty, the multi-model approach TS (Takagi Sugeno) is used, thus obtaining a set of linear models associated with a nonlinear function  $\mu$  obtained using a quasi-LPV (Quasi Linear Parameter Varying) approach.

The proposed method generalizes the sector nonlinearity approach to model our system, which will allow us to use the advantages of linear systems and exploit them for our non-linear system. The weight of the nonlinearity of the system or model will be expressed in the weighting functions  $\mu$ . Several multi-model (TS) form equivalent to the initial model can be obtained, due to the different Quasi-LPV form. Thus, some criteria are specified in particular the observability/controllability of the system, using linear matrix inequality (LMI), in order to choose the most appropriate multi-model (TS) for analysis or control purposes.

Nowadays, the requirement of more performance, better qualities as well as reduction of production costs on behalf of the industrials does not cease growing. The main challenge objective of the control of a production system is to ensure system outputs close to a desired value or to better follow a reference given by the temperature of a product, the valve flow, the current of an electrical machine, etc. Classical PID control (Proportional Integrate Derivative) is enough to answer requirements of the most regulated industrial systems, in spite of his simplicity of use and understanding. The control problem often, comes down in the majority to the regulation of a flow in a plate. However, functioning always closer to productions requirements, pure times delay and systems with oscillatory or non minimal phases are respectively not taken care of, or very badly compensated by

PID.

Model Predictive Control (MPC) then appeared and allowed to answer some of the challenges. Thanks to its predictive aspect, based on an embedded internal model which allows evaluating the future dynamic of the system, it allows taking into consideration pure time delay, oscillatory systems and non minimal systems, unstable systems, etc in the presence of input and output constraints and is easily extensible in the Multi-variable systems. The major disadvantage of predictive control, besides the necessity of an internal model, is its required computation time. This explains its broad use in the industry of mechanical and heat transfer systems, where the systems time response are slow enough.

Indeed, the broad range of predictive control algorithms and approaches brings a choice and an easiness of implementation. However, the development of an adequate internal model to be embedded into predictive algorithm remains the main and most challenging task.

The use of Artificial Neural Networks (RNA), specifically Multi-Layer Perceptrons (MLP), will be studied as an alternative to the  $\mu$  weighting function obtained by the TS multi-model for the bioreactor activated sludge model. The set of linear sub-models covering the input/output of the process will be considered in the development of the  $\mu$  function obtained by the RNA's, estimated using an MLP where training and validation of the latter are carried out using the data collected from the TS model and the results are compared with the original approach with and without parametric perturbations and uncertainties, and then the robustness of the Neuro-TS model with different values of disturbances and uncertainties are then studied.

The Adaptive Generalized Predictive Control (TS-AMPC) control based on the TS multi-model of the activated sludge bioreactor and its comparison with the Generalized Predictive Control using the TS-MPC global model have been studied.

The TS-AMPC approach is obtained by switching between the linear sub models of the TS formulation. This is done by selecting, per turn, a part of the weighting function  $\mu$ . The model associated with the latter will then serve as an internal model for the formulation of the TS-AMPC control law, while the complete TS model is used in the calculation of the TS-MPC control law. The use of the two most significant internal models has also been implemented and tested (TS-AMPC2). Finally, performances under input perturbations and parametric uncertainties as well as TS-AMPC controller control variable constraints are compared to a global TS-MPC controller and a reference PID in terms of error and response dynamics.

# Résumé

Sur la base du modèle original IAWQ, un modèle réduit est ici élaboré pour le procédé du bioréacteur à boues activées en bassin unique avec aération de surface (ASM1). Les simplifications considérées reposent principalement sur l'analyse des composantes du modèle, à savoir, l'oxygène dissous, la matière organique, l'azote et les micro-organismes.

La modélisation des systèmes non linéaires ASM1 utilise des expressions complexes basées sur la connaissance des phénomènes physiques et chimiques, d'où la difficulté de leurs exploitations à des fins de diagnostic ou de commande. Pour surmonter cette difficulté, l'approche multi-modèle (TS) est exploitée, obtenant ainsi, un ensemble de modèles linéaires associés à une fonction non linéaire  $\mu$  obtenue en utilisant une approche Quasi-Linéaire à Paramètres Variables (Quasi-LPV).

L'approche proposée généralise l'approche par secteur non linéaire afin de modéliser notre système, ce qui va nous permettre d'utiliser les atouts des systèmes linéaires et de les exploiter pour notre système non linéaire. Le poids de la non-linéarité du système ou du modèle va être exprimé dans les fonctions de pondération  $\mu$ . Plusieurs formes multi-modèles équivalentes au modèle initial peuvent être obtenues, en raison des différentes formes Quasi-LPV. Ainsi certains critères sont spécifiés notamment l'observabilité/contrôlabilité du système, en utilisant l'Inégalité Matricielle Linéaire (LMI), afin de choisir le multi-modèle le plus approprié à des fins d'analyse ou de contrôle.

Ces dernières années, l'exigence de plus de performances, de meilleures qualités ainsi qu'une réduction des coûts de production de la part des industriels ne cesse de croître. L'objectif principal de la commande d'un système de production est de maintenir les sorties proches d'une valeur désirée ou alors de poursuivre une référence, donnée par la température d'un produit, le débit d'une vanne, le courant d'une machine électrique, etc. Bien que la commande classique PID (Proportional Integrate Derivative) suffise à répondre aux exigences de la plupart des systèmes régulés en industrie, malgré sa simplicité d'utilisation et de compréhension, et qui se résume en majorité à la régulation d'un débit. Toutefois, le fonctionnement toujours plus proche des contraintes de production, les temps morts et les systèmes à phases non minimales ou oscillatoires ne sont respectivement pas pris en charge par le PID.

La commande prédictive MPC (Model Predictive Control) est alors apparue et a permis de régler une partie de ces problèmes. Grâce à son aspect prédictif, basée sur un modèle interne embarqué qui permet d'évaluer la dynamique future du système, elle permet de prendre en considération les temps morts, les systèmes oscillatoires et à phases non minimales, les systèmes instables, etc et est facilement extensible aux systèmes multi-variables. L'inconvénient majeur de la commande prédictive, en plus de la nécessité d'un modèle interne, est son temps de calcul conséquent, c'est la raison qui explique sa large utilisation dans l'industrie du génie de procédé où les systèmes contrôlés sont suffisamment lents.

En effet, la large gamme d'algorithmes et d'approches de commande prédictive procure un choix et une facilité d'implémentation. Néanmoins, le développement du modèle à embarquer dans l'algorithme prédictif reste ce qu'il y a de plus difficile et de plus délicat.

L'utilisation des Réseaux de Neurones Artificiels (RNA), plus précisément Multi-Layer Perceptrons (MLP) sera étudiée, comme alternative à la fonction de pondération  $\mu$  obtenue par le multi-modèle Takagi Sugeno (TS) pour le modèle du bioréacteur à boues activées réduit. L'ensemble des sous-modèles linéaires couvrant les entrées/sorties du processus sera considéré dans l'élaboration de la fonction  $\mu$  obtenue par les RNA, estimée à l'aide d'un MLP où l'apprentissage et la validation de ce dernier sont effectués à l'aide des données recueillies à partir du multi-modèle (TS) et les résultats sont comparés avec l'approche originale avec et sans perturbations et incertitudes paramétriques, par la suite la robustesse du modèle Neuro-TS, à différentes valeurs de perturbations et d'incertitudes, est étudiée.

La Commande Adaptative Prédictive basée Modèle (TS-AMPC) basée sur le multi-modèle (TS) du bioréacteur à boues activées réduit et la comparaison de ce dernier avec la commande MPC utilisant le multi-modèle (TS) globale (TS-MPC) ont été étudiées.

L'approche TS-AMPC est obtenue en basculant entre les sous-modèles linéaires de la formulation TS. Ceci est effectué en sélectionnant, par tour, une partie de la fonction de pondération  $\mu$ . Le modèle associé à cette dernière servira alors de modèle interne pour la formulation de la loi de contrôle TS-AMPC, alors que le multi-modèle (TS) complet est utilisé dans le calcul de la loi de contrôle TS-MPC. L'utilisation des deux sous-modèles internes les plus significatifs a également été mise en œuvre et testée (TS-AMPC2). Enfin, les performances, sous perturbations d'entrées et incertitudes paramétriques ainsi que des contraintes sur les variables de contrôle du contrôleur TS-AMPC, sont comparées à un contrôleur TS-MPC global et à un PID de référence en termes d'erreur et réponse dynamique.

# ملخص

استناد إلى النموذج الأصلي (IAWQ) ، تم تطوير نموذج مصغر للمفاعل الحيوي في حوض أحادي مع تهوية السطح (ASM<sup>1</sup>)، تستند التبسيطات التي تم النظر فيها بشكل رئيسي على تحليل مكونات النموذج، وهي الأوكسجين الذائب، والمواد العضوية، والنيتروجين والكانتات الدقيقة.

يستخدم نموذج الأنظمة غير الخطية ASM<sup>1</sup> تعابير معقدة تستند إلى معرفة الظواهر الفيزيائية والكيميائية ، وبالتالي صعوبة استعمالها لأغراض التشخيص أو التحكم. للتغلب على هذه الصعوبة ، يتم استغلال منهج متعدد النماذج (TS) ، وبالتالي الحصول على مجموعة من النماذج الخطية المرتبطة بوظيفة غير خطية  $\mu$  تم الحصول عليها باستخدام نهج شبه خطي باستعمالها بارامترات متغيرة. (Quasi-LPV)

يعمم النهج المقترح نهج القطاع غير الخطي من أجل تصميم نظامنا، والذي سيسمح لنا باستخدام مزايا الأنظمة الخطية واستغلالها لنظامنا غير الخطي. سيتم التعبير عن وزن عدم الخطية للنظام أو النموذج في وظائف الترجيح  $\mu$ . يمكن الحصول على العديد من النماذج متعددة النماذج المعادلة للنموذج الأولي ، وذلك بسبب أشكال Quasi-LPV المختلفة . وبالتالي يتم تحديد بعض المعايير بما في ذلك إمكانية مراقبة / قابلية التحكم في النظام ، باستخدام مصفوفة اللامساواة الخطية (LMI)، من أجل اختيار أنسب نموذج متعدد لأغراض التحليل أو التحكم.

في السنوات الأخيرة ، لا تزال الحاجة إلى مزيد من الأداء والصفات الجيدة وانخفاض تكاليف الإنتاج من جانب الصناعة في النمو. الهدف الرئيسي للتحكم في نظام الإنتاج هو الحفاظ على النواتج قريبة من القيمة المطلوبة أو الاستمرار في تتبع الإشارة المعطاة مثلا درجة حرارة المنتج ، تدفق الصمام ، تيار آلة كهربائية ، إلخ. على الرغم من أن التحكم النسبي التكاملي التقليدي (PID) يكفي لتلبية متطلبات معظم الأنظمة الخاضعة للتنظيم الصناعي ، على الرغم من بساطة استخدامه وفهمه ، وغالبا ما يكون تنظيم معدل التدفق. ومع ذلك، فإن التشغيل المتقارب لقيود الإنتاج ووقت التباطؤ وأنظمة الطور غير التذبذبية أو التذبذبية لا تؤخذ بعين الاعتبار من قبل PID ،

ثم ظهرت السيطرة التنبؤية (MPC نموذج التحكم التنبؤي) وساعدت في حل بعض من هذه المشاكل. وبفضل جانبها التنبؤي ، بناءً على نموذج داخلي مدمج يجعل من الممكن تقييم ديناميكيات النظام المستقبلية ، فإنه يجعل من الممكن الأخذ بعين الاعتبار الأوقات الميتة ، وأنظمة الطور التذبذبي وغير الأدنى ، والأنظمة غير المستقرة ، وما إلى ذلك وهي قابلة للتوسيع إلى أنظمة متعددة المتغيرات. العيب الرئيسي للسيطرة التنبؤية ، بالإضافة إلى الحاجة إلى نموذج داخلي ، هو وقت الحوسبة اللاحقة ، وهذا هو السبب الذي يفسر استخدامه على نطاق واسع في صناعة هندسة الأنظمة الخاضعة للرقابة البطيئة بما فيه الكفاية.

في الواقع ، توفر مجموعة واسعة من الخوارزميات ومناهج الرقابة التنبؤية الاختيار وسهولة التنفيذ .ومع ذلك ، فإن تطوير النموذج المراد تضمينه في الخوارزمية التنبؤية يظل أكثر صعوبة وأكثر دقة.

سيتم دراسة استخدام الشبكات العصبية الاصطناعية (RNA) ، وتحديدًا متعدد الطبقات (MLP)، كبديل عن وظيفة الترجيح  $\mu$  التي تم الحصول عليها من النموذج المتعدد (TS) Takagi-Sugeno لنموذج المفاعل الحيوي المصغر. سيتم النظر في مجموعة النماذج الفرعية الخطية التي تغطي مدخلات / مخرجات النظام عند تطوير الوظيفة الترجيحية  $\mu$  ، التي تم الحصول عليها من قبل RNA ، والتي يتم تقديرها باستخدام MLP ، حيث تتم عملية التعلم والتحقق من صحة هذا الأخير باستخدام البيانات التي تم جمعها من نموذج متعدد (TS) وتتم مقارنة النتائج مع النهج الأصلي ، مع وبدون الاضطرابات البارامترية والشكوك ومدى قوة نموذج Neuro-TS عند مختلف قيم الاضطرابات.

تم استخدام نظام التحكم التكييفي التنبؤي المبني على النموذج (TS-AMPC) على أساس النموذج متعدد النماذج (TS) للمفاعل الحيوي المصغر والمقارنة بين الأخير مع نظام التحكم التنبؤي MPC باستخدام النموذج المتعدد (TS-MPC).

يتم الحصول على منهج TS-AMPC بالتحول بين النماذج الفرعية الخطية لنموذج متعدد (TS) يتم ذلك عن طريق اختيار جزء من وظيفة الترجيح  $\mu$ . وسيعمل النموذج المرتبط بهذا الأخير كنموذج داخلي لصياغة قانون المراقبة TS-AMPC ، في حين يستخدم النموذج المتعدد الكامل (TS) في حساب قانون مراقبة TS-MPC. كما تم تطبيق واختبار استخدام اثنين من النماذج الفرعية الداخلية الأكثر أهمية (TS-AMPC<sup>2</sup>) وأخيرًا ، تتم مقارنة الأداءات ، في ظل اضطرابات الإدخال والشكوك المعيارية وكذلك القيود على متغيرات التحكم في وحدة تحكم TS-AMPC ، مع وحدة تحكم TS-MPC و PID مرجعي من حيث الخطأ والاستجابة الديناميكية.

# keywords

ASM1, TS, Neuro-TS, MPC, GPC, DMC, Quasi-LPV, RNA, MLP, TS-MPC, TS-AMPC, TS-AMPC2, TS-PID

# Abréviations

IAWQ	: Association internationale des eaux usées (International Association on Water Quality)
WWTP	: Station de traitement des eaux usées (Waste Water Treatment Plant)
TS	: Takagi Sugeno
ASM1	: Activated Sludge Model N°1
ASM2	: Activated Sludge Model N°2
ASM2d	: Activated Sludge Model N°2d
ASM3	: Activated Sludge Model N°3
MFC	: Modèle Flou Continu
MFD	: Modèle Flou Discret
DCO	: Demande Chimique en Oxygène (Chemical Oxygen Demand)
MPC	: Commande Prédicative basée Modèle (Model Predictive Control)
PFC	: Commande Prédicative Fonctionnelle (Predictive Functional Control)
GPC	: Commande Prédicative Généralisée (Generalized Predictive Control)
DMC	: Commande prédictive à Matrice Dynamique (Dynamic Matrix Control)
FSR	: Réponse Indicielle Finie (Finite Step Response)
LMI	: Inégalité Matricielle Linéaire (Linear Matrix Inequality)
BMI	: Inégalité Matricielle Bilinéaire (Bilinear Matrix Inequality)
Quasi-LPV	: Quasi-Linéaire à Paramètres Variables (Quasi Linear Parameter Varying)
LTI	: Linéaire à Temps Invariant
MIMO	: Multi-entrée multi-sortie (Multiple Input Multiple Output)
RNA	: Réseau de Neurone Artificiel (Artificial Neural Network)
MSE	: Erreur quadratique moyenne (Mean Square Error)
SSE	: Somme des erreurs quadratiques (Sum of Squared Errors)
MLP	: Perceptron multi-couches (Multi Layer perceptron)
RBF	: Réseaux de Fonctions à Base Radiale (Radial Base Function Networks)

# Introduction générale

Les régulateurs PID sont utilisés dans 95% des applications industrielles. Ils ont, quand ils s'appliquent, une efficacité remarquable et des rapports prix/performance avec lesquels il est difficile de rivaliser. Ils sont, pour ces raisons, commercialisés sur une échelle industrielle mondiale et sont un outil de base classique de l'industrie de production [**Khadir, 2002**].

L'acceptation industrielle du PID vient du fait qu'une fois le matériel installé (capteur, actionneur, etc.), il suffit, sans étude préalable, de fixer quelques valeurs de paramètres, sans grande réflexion ou difficulté particulière, et qu'un essai expérimental suffit, la situation est tout autre avec la commande prédictive. Toutefois, le régulateur PID reste incapable de couvrir tous les besoins de performance dans le cas des processus industriels, généralement non linéaires, instables, non stationnaires, à grand retard pur, multi-variables, mais aussi lorsque les performances exigées par l'utilisateur sont très tendues : forte atténuation des perturbations, erreur de traînage nulle en poursuite, réponse en temps minimal, ceci amène à fonctionner sur des contraintes qui affectent soit les variables d'action, soit des variables internes du processus.

La commande prédictive est née d'un besoin réel de précision et de robustesse dans le monde industriel, où nous avons vu apparaître des techniques de commande avancée plus performantes que les commandes classiques PID avec des contraintes toujours plus élevées. L'autre composante, en plus de ce besoin de performance qui a favorisé l'éclosion de la commande avancée, se situe sur le plan méthodologique avec l'apparition des méthodes de modélisation et de simulation, qui a considérablement facilité l'introduction de ces méthodes de commande à base de modèle.

La rupture entre l'automatique classique et la commande avancée basée modèle et plus précisément la commande prédictive est dans le fait que le régulateur prédictif va être construit sur la base d'un modèle qu'il va utiliser sur le site en temps réel avec une prévision des performances sur un horizon fuyant.

Depuis ses premières applications industrielles, la Commande Prédictive basée Modèle (MPC) ([**Froisy, 1994**], [**Qin et Badgwell, 1996**], [**Qin et Badgwell, 2000**]), s'est élargie à une grande variété de domaines d'application, à savoir les applications chimiques, la transformation

des aliments, de l'automobile et des applications aérospatiales de son premier nid pétrochimique [Qin et Badgwell, 2003].

Le concept de contrôle avancé peut se référer aux travaux de Kalman, dans le début des années 1960 ([Kalman, 1960a], [Kalman, 1960b]), qui plus tard, a été synthétisé comme un problème d'optimisation (contrôleur Linear Quadratic Gaussian (LQG)). L'approche LQG est rapidement devenue un outil pour résoudre des problèmes de contrôle dans une large gamme de domaines d'application. Cependant, n'a pas eu un grand impact sur le développement des technologies de contrôle industriel, à cause de l'existence de contraintes, des non-linéarités des processus et des incertitudes du modèle, etc. ([Richalet et al, 1976], [Garcia et al, 1989]).

La première application MPC a été présentée par Richalet (Modèle Prédicatif de Contrôle Heuristic (MPHC)) ([Richalet et al, 1976], [Richalet et al, 1978]). La solution software a été nommée IDCOM (IDentification et COMmande), et représente la première génération de la technologie MPC.

Cutler et Ramaker ont présenté un algorithme de contrôle multivariable sans contrainte (Commande à Matrice Dynamique (DMC)) ([Cutler et Ramaker, 1979]). Une application modifiée de DMC, incluant les non-linéarités et les contraintes a été présentée dans ([Prett et Gillette, 1980]).

QDMC a été développé en 1983, exprimant l'algorithme DMC comme un Programme Quadratique (QP) qui prend en considération les contraintes sur les entrées et les sorties. ([Cutler, 1983], [Garcia et Morshedi, 1986]).

Les applications industrielles des technologies MPC, notamment pour les systèmes complexes, a suscité l'émergence d'une nouvelle génération de technologie MPC, ID COM-M, HIECON, SMAC, SMOC représentant la troisième génération.

La Commande Prédicative Généralisée (GPC) est l'une des applications les plus populaires de MPC ([Clarke et al, 1987], [Jianjun et al]) ainsi que la Commande Prédicative Fonctionnel (PFC) ([Richalet, 1993]) qui ont été principalement conçues pour les modèles internes de faible complexité appliqués en pétrochimie.

Plus tard, la technologie Aspen développe la quatrième génération MPC, DMC-plus et RMPCT.

Depuis, MPC a imposé son efficacité dans le contrôle avancé dans le monde industriel, comptant des milliers d'applications. Dans la plupart des cas, un modèle linéaire du processus est suffisant pour assurer un bon contrôle car la robustesse de la commande prédictive MPC est capable de surmonter les erreurs entre le processus réel et le modèle. Toutefois, lorsque les non-linéarités sont sévères, la Commande Prédicative Non-linéaire (NMPC) est largement reconnue comme l'une des techniques de contrôle les plus puissantes([Escano, 2009]).

La commande prédictive est certainement la commande avancée la plus utilisée dans l'industrie, le principal atout de la commande prédictive est sa capacité à prendre en compte dans son expression

même les contraintes fonctionnelles et les contraintes d'exploitation du système considéré.

Les systèmes de traitement des eaux usées sont, de nos jours, un problème de contrôle complexe, nécessitant un contrôle avancé pour l'amélioration de la qualité d'eau ainsi que la réduction des coûts, en particulier MPC ([Caraman et al, 2007]).

Les traitements des eaux usées sont généralement effectués biologiquement en utilisant des réacteurs à boues activées. Le modèle ASM1 du bioréacteur est capable de modéliser les processus biologiques incluant l'élimination du carbone, la nitrification et la dénitrification. ([Henze et al, 1987]).

Généralement, la modélisation des systèmes ASM1 utilise des expressions complexes basées sur la connaissance des phénomènes physiques et chimiques. Pour surmonter cette difficulté, l'approche multi-modèle TS est exploitée, obtenant ainsi, un ensemble de modèles linéaires associés à une fonction non linéaire  $\mu$  obtenue en utilisant une approche Quasi-LPV ([Huang et Jadbabaie, 1999]).

Le poids de la non-linéarité du système ou du modèle est par conséquent exprimé dans la fonction de pondération  $\mu$ , et la partie linéaire est exprimée par les  $r$  sous modèles linéaires.

Malgré les avantages résultant de l'utilisation de la méthode précédente, le choix des variables de prémisses adéquates, le nombre suffisant de sous modèles, etc., reste un défi afin d'assurer l'observabilité et la contrôlabilité du système ([Nagy et al, 2010], [Nagy, 2010], [Matoug et Khadir, 2014], [Matoug et Khadir, 2015]).

Notre travail consiste à utiliser la théorie de la commande MIMO MPC pour le contrôle d'un réacteur à boues activées réduit en utilisant comme modèle interne, un multi-modèle TS, donnant un contrôleur MPC multi-modèle (TS-MPC). Et comme alternative aux TS-MPC globale, une Commande Adaptative Prédictive basée Modèle(TS-AMPC) est également étudiée, et est basée sur le même multi-modèle TS en utilisant un seul sous modèle linéaire à la fois, par la commutation entre les sous modèles (TS-AMPC).

Notre thèse est organisée comme suit : Chapitre 1 donne une description complète du processus à boues activées et présente le modèle mathématique du processus et les simplifications apportées.

Chapitre 2 introduit l'approche multi-modèle, qui nous verrons, décrit le comportement non linéaire d'un système par l'interpolation d'un ensemble de modèles locaux (linéaires ou affines) caractérisant le fonctionnement du système dans différentes zones de fonctionnement.

L'obtention d'un multi-modèle, utilise trois approches différentes, par identification ([Gasso et al, 1999] et [Gasso, 2000]), par linéarisation autour de différents points de fonctionnement [Johansen et Foss, 1992] ou par transformation polytopique convexe. Dans le chapitre 2 l'illustration de la troisième approche en considérant un système statique non linéaire, pour lequel nous cherchons à déterminer une représentation multi-modèle permettant de décrire le comportement de ce système, est présentée.

La procédure de transformation d'un système non-linéaire en une forme multi-modèle est décrite par une représentation d'état Quasi-LPV. Nous verrons quel seront les avantages et les inconvénients majeurs de cette méthode.

Nous verrons en particulier le multi-modèle de Takagi sugeno (TS), qui propose un modèle flou du système constitué d'un ensemble de règles « si prémisse alors conséquence », tel que la conséquence d'une règle est un modèle affine. Le modèle global s'obtient par l'agrégation des modèles locaux.

Dans le chapitre 3, nous introduisons les principes généraux et fondements des algorithmes de commande prédictive. L'algorithme GPC MIMO initial est décrit et est appliqué en utilisant comme modèle de prédiction interne les sous-modèles obtenus par la formulation TS pour notre système ASM1 réduit. Une configuration parallèle de commande est mise en œuvre pour le contrôle prédictif multi-modèle, par l'intégration pondérée de tous les contrôleurs locaux (TS-GPC).

Comme alternative aux TS-GPC globale, une Commande Adaptative Prédictive basée Modèle (TS-AGPC) est également étudiée, et est basée sur le même multi-modèle TS en utilisant un seul sous modèle linéaire à la fois, par la commutation entre les sous modèles (TS-AGPC).

Nous verrons également l'algorithme DMC MIMO initial [Cutler, 1983] et l'application à chaque sous-modèle TS. Nous verrons pourquoi une commande globale n'est pas adéquate dans le cas de la commande TS-DMC globale. Nous allons aussi étudier la commande Adaptative DMC utilisant la commutation entre les sous-modèles TS (TS-ADMC).

Nous verrons dans le chapitre 4 la modélisation du ASM1 réduit par les multi-modèles de TS, le choix des fonctions de pondérations, le nombre des sous modèles et la comparaison avec le modèle globale non linéaire du ASM1 réduit.

Une alternative pour la conception de la fonction de pondération  $\mu$  utilisant les Réseaux de Neurones Artificiels (RNA), plus précisément Perceptron Multi-couches (MLP) pour le multi-modèle TS, est proposée. Ceci est possible en utilisant les données, recueillies à partir de l'ensemble des sorties des sous-modèles utilisées comme entrées du prédicteur non linéaire RNA. Les résultats sont comparés à l'approche originale avec et sans perturbations sur les entrées ainsi que dans le cas d'incertitudes paramétriques.

L'application des commandes prédictives utilisées, à savoir TS-GPC, TS-AGPC, TS-DMC et TS-ADMC sera considérée dans le chapitre 5, en absence et en présence d'incertitudes et de perturbations, et comparée à chaque fois à un contrôleur classique PID en termes d'erreur et de réponse dynamique.

Une approche utilisant la combinaison des deux modèles dominants lors de la commutation est également mise en œuvre.

Le dernier chapitre sera consacré aux conclusions générales et perspectives.

# Chapitre 1

## Procédés d'épuration à boues activées (ASM1)

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées</b>	<b>7</b>
1.2.1	Description physique de la station	7
1.2.2	Le bioréacteur	7
1.2.3	Le clarificateur	8
1.2.4	Le recyclage des boues	8
<b>1.3</b>	<b>Modélisation des stations d'épuration à boues activées</b>	<b>8</b>
<b>1.4</b>	<b>Choix du modèle</b>	<b>9</b>
<b>1.5</b>	<b>Le modèle biologique ASM1</b>	<b>9</b>
1.5.1	Phénomènes biologiques et variables d'état	9
1.5.2	Ecriture du modèle	14
1.5.3	Hypothèses du modèle	15
<b>1.6</b>	<b>Réduction du modèle ASM1</b>	<b>18</b>
<b>1.7</b>	<b>Hypothèses de simplification</b>	<b>18</b>
<b>1.8</b>	<b>Ordre du modèle réduit</b>	<b>19</b>

---

« *Celui qui trouve sans chercher est celui qui a longtemps cherché sans trouver* ». **Gaston Bachelard.**

## 1.1 Introduction

Avec le développement de l'homme, l'industrialisation et l'urbanisation ont donné naissance à l'un des problèmes les plus graves de nos jours : les eaux usées, ces eaux polluées qui sillonnent nos villes à travers des égouts souterrains et finissent dans nos lacs et rivières ont fini par inquiéter les états et gouvernements des pays développés, qui par la suite ont appliqué des conditions draconiennes sur les industriels et ont mis des dispositifs afin de pallier ce problème.

Le rejet de ces eaux polluées riches en azote, essentiellement présent sous forme d'urée, d'azote ammoniacal et de protéine, dans le milieu naturel sous forme ammoniacale peut être toxique pour les poissons. Dans l'eau potable, la forme ammoniacale favorise le développement de goûts ou de couleurs, et les formes oxydées (nitrates et nitrites) peuvent présenter un danger pour la santé des nourrissons et des femmes enceintes. Pour ces raisons, la présence d'azote dans les eaux potables et usées a été réglementée par le droit communautaire dès la fin des années 70. L'azote contenu dans les eaux usées urbaines est essentiellement traité par voie biologique. Les boues activées est l'un des procédés capables de réaliser ce traitement.

En 1982, l'association internationale sur la recherche et le contrôle de la pollution de l'eau (**IAW-PRC**), a créé un groupe de travail pour la conception et la mise en œuvre de modèle mathématique des processus à boues activées. Dès lors, modéliser des stations est devenu une discipline pendant environ 15 années. Les divers modèles développés à cette époque ont cependant été peu utilisés, par manque de confiance et par la complexité de leurs présentations sous forme écrite.

Le but premier de ce groupe de travail était de passer en revue les modèles existants et d'atteindre un consensus autour du plus simple à l'exploitation. Des prévisions réalistes dans le fonctionnement des systèmes simples à boues activées devaient être définies. Ainsi le groupe de travail devait créer une base commune qui pourrait être employée pour le développement de futurs modèles. Ce modèle devait présenter un minimum de complexité. Le résultat a été le modèle à boues activées N°1, aujourd'hui connu sous différents noms : IAWPRC modèle, Activated Sludge Model ASM1, modèle IAWQ N°1, etc.

Le modèle fut présenté lors d'une conférence à Kollokollo, Danemark, en 1985. Il a été édité en 1987 sous sa forme finale dans le rapport Scientific and Technical Report N°1 de l'IAWPRC.

Plusieurs autres modèles ont ensuite été développés. Ainsi, en 1995, le modèle N°2 incluant l'élimination de l'azote combinée à l'élimination biologique du phosphore (ASM2) a été édité. Cependant, ce processus était peu clair et a été mal pris en compte. Pour cette raison, le modèle ASM2, devenu

obsolète, a été remplacé en 1999 par le modèle ASM2d incluant la dénitrification combinée.

En 1998, le groupe de travail a décidé de développer un nouveau processus l'ASM3, afin de créer un outil à l'usage des prochaines générations de modèle. L'ASM3 est basé sur des développements récents dans la compréhension des processus à boues activées. Nous y trouvons les possibilités de suivre le stockage interne de composés, qui ont un rôle important dans le métabolisme des organismes [Jeppsson, 1996].

## 1.2 Fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées

### 1.2.1 Description physique de la station

Le procédé de traitement est dit « à boues activées » car l'ensemble des conditions favorables à une activité maximale des bactéries est mis en œuvre :

- Un apport en oxygène suffisant.
- Un apport en nutriment si l'effluent ne contient pas tous les composés nécessaires au développement des bactéries.
- Une agitation permanente afin de favoriser le contact entre bactéries et pollution.
- Une concentration élevée en bactéries pour augmenter l'efficacité du traitement.

Le traitement des matières organiques et de l'azote s'effectue au sein d'un bioréacteur unique aéré par intermittence. En présence d'oxygène, des bactéries autotrophes oxydent l'azote ammoniacal en nitrites puis en nitrates (nitrification) que des bactéries hétérotrophes réduisent ensuite en azote gazeux en l'absence d'oxygène (dénitrification). La dégradation de la charge carbonée produit de la biomasse qu'il est nécessaire d'évacuer régulièrement des systèmes de traitement, dans un clarificateur et recycler en grande partie vers le bioréacteur, alors que seule une faible quantité de boues est extraite du système [Olsson et al, 1999], (voir Fig. 1.1).

### 1.2.2 Le bioréacteur

Pour éliminer la matière azotée, le réacteur biologique peut être séparé en deux zones distinctes aérobie et anoxique (Fig. 1.1). Dans la majorité des cas, la zone anoxique est placée en amont de la zone aérobie, juste à l'entrée de l'effluent dans le réacteur, pour que les bactéries aient suffisamment de matières organiques biodégradables pour effectuer la réaction de dénitrification. Le recyclage de

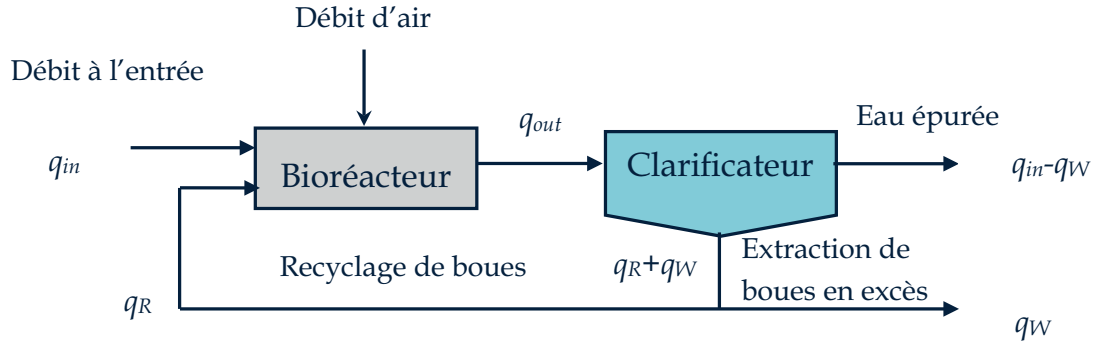


Fig. 1.1 – Procédé de traitement à boues activées en bassin unique

la zone aérobie vers la zone anoxique permet l'élimination des polluants azotés oxydés.

### 1.2.3 Le clarificateur

En sortie de réacteur, nous obtenons une liqueur mixte composée de boues floculées et d'eau épurée prête à être rejeté en milieu naturel. Elles sont séparées au sein du clarificateur qui a une fonction de séparation de phase et une fonction d'épaississement afin de ramener la boue la plus concentrée dans le réacteur biologique. Du fait de l'absence d'oxygène, le temps de passage des boues doit être le plus faible possible pour éviter qu'elles ne se trouvent en phase anaérobie. Ceci aurait pour conséquence l'apparition d'odeurs ainsi qu'une détérioration de la qualité de la boue perturbant ainsi le traitement biologique.

### 1.2.4 Le recyclage des boues

La croissance de la biomasse au sein du bioréacteur n'est pas suffisante pour compenser la perte engendrée par le débit de sortie de la liqueur mixte. Pour conserver une concentration en biomasse constante dans le réacteur, une partie des boues du clarificateur est recyclée vers le réacteur. Des purges ont également lieu afin d'extraire la quantité de boues en excès dans le procédé.

## 1.3 Modélisation des stations d'épuration à boues activées

Les stations d'épuration à boues activées sont divisées en deux parties. La première est le réacteur (bassin d'aération) au sein duquel la pollution incidente est dégradée par des micro-organismes biologiques (biomasse). La deuxième partie est le clarificateur (décanteur) dont la fonction est de décanter les effluents traités de la biomasse et des autres composés particuliers, (Fig. 1.1). Dans cette partie de notre travail, nous allons nous intéresser à la modélisation du procédé de traitement

à boues activées en bassin unique avec aération de surface (c.à.d en présence d'oxygène qui inhibe la phase anoxique donc on se retrouve uniquement en phase aérobie).

## 1.4 Choix du modèle

Dans notre station d'épuration à boues activées, nous allons essentiellement nous préoccuper du modèle ASM1, ce modèle a été utilisé de nombreuses fois et semble avoir fait ses preuves. Il est devenu une référence pour le traitement du carbone et de l'azote. De plus, au cours des années, les versions de l'ASM1 se sont succédé permettant à l'utilisateur d'attribuer plus de confiance à ce modèle.

## 1.5 Le modèle biologique ASM1

Le modèle ASM1 [Henze et al, 1987] constitue un modèle général capable de représenter de façon précise le comportement du procédé lors du traitement d'un effluent chargé en matières azotées et carbonées.

### 1.5.1 Phénomènes biologiques et variables d'état

#### Variables d'état :

Les substances carbonées dans le modèle ASM1 peuvent être divisées en trois groupes (voir Fig. 1.2), la DCO biodégradable, la DCO non biodégradable (matières inertes) et la biomasse.

↔ La DCO biodégradable est constituée à la fois par la concentration en substrat rapidement biodégradable ( $S_S$ ) (molécules pouvant être facilement absorbées par les micro-organismes) et en substrat lentement biodégradable ( $X_S$ ).

↔ La DCO non biodégradable est constituée par les matières organiques inertes ( $S_I$ ) et particulières ( $X_I$ ), on considère que l'activité biologique du processus n'est pas affectée par ces deux concentrations.

↔ En outre, la biomasse active est composée de la biomasse hétérotrophe ( $X_{BH}$ ) et de la biomasse autotrophe ( $X_{BA}$ ). La biomasse hétérotrophe est responsable de la dégradation des matières organiques et de la transformation du nitrate en azote gazeux. Elle augmente en présence de substrat facilement biodégradable et d'une source d'oxygène (en phase aérobie) ou de nitrate (en phase anoxique). Sa croissance est modélisée par une relation de Monod. La biomasse autotrophe est responsable de l'étape de nitrification et se développe uniquement en conditions d'aérobie. Son évolution est aussi décrite par une relation de Monod.

La matière azotée dans les eaux usées est divisée selon la figure (Fig. 1.3) d'une partie constituée de l'azote sous forme ammoniacal ( $S_{NH}$ ) et une partie correspondant à l'azote organique et aux concentrations associées à la biomasse active. La matière organique est divisée en fractions biodégradables (substrat rapidement biodégradable  $S_{ND}$  et substrat lentement biodégradable  $X_{ND}$ ) ou non biodégradable (solubles  $S_{NI}$  et particulaires  $X_{NI}$ ). La biomasse active intervient dans le modèle dans le sens où le décès de la biomasse produit de l'azote organique biodégradable particulaire. Enfin, l'azote nitrite et le nitrate sont combinés en une variable ( $S_{NO}$ ), pour simplifier le modèle.

### Phénomènes biologiques :

Fondamentalement, quatre processus sont considérés :

- la croissance de la biomasse au travers de la réaction d'oxydation de la matière carbonée et des réactions de nitrification et de dénitrification ;
- la décomposition (mort) de la biomasse ;
- l'ammonification de l'azote organique ;
- l'hydrolyse de la matière organique en suspension (azotée ou carbonée).

L'hydrolyse représentant un ensemble de réactions complexes, une unique expression globale a été proposée afin de simplifier sa modélisation. Cette modélisation suppose que seule la partie rapidement biodégradable de la matière organique biodégradable peut être utilisée par la biomasse. L'expression de l'hydrolyse permet donc d'introduire une dynamique lente pour l'utilisation de la partie lentement biodégradable.

Ces phénomènes biologiques font appel à différents types de composés représentés par treize variables d'états.

Les constituants insolubles (ou particulaires) portent le symbole  $X$ , les constituants solubles portent le symbole  $S$ , nous pouvons classer ces variables d'état en cinq groupes :

1. **Les substrats** : le substrat rapidement biodégradable  $S_S$  et le substrat lentement biodégradable  $X_S$ .
2. **Les biomasses** : la biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , responsable de l'oxydation des matières organiques et de la dénitrification, et la biomasse autotrophe  $X_{BA}$ , responsable de la nitrification. Une troisième variable d'état, notée  $X_P$ , représente les produits issus de la mort de la biomasse.
3. **Les composés azotés** : l'azote organique biodégradable particulaire  $X_{ND}$ , l'azote organique biodégradable soluble  $S_{ND}$ , l'azote ammoniacal  $S_{NH}$  et les formes oxydées (nitrates et nitrites)

$S_{NO}$  ;

4. **L'oxygène dissous**  $S_O$  ;

5. **Les états biologiquement inertes** : les composés organiques inertes solubles  $S_I$  et particulières  $X_I$ , l'alcalinité  $S_{alk}$ .

Deux modifications seront considérées :

(i) La variable d'état décrivant l'alcalinité n'est pas incluse, et (ii) les produits issus de la décomposition (mort) de la biomasse est incluse avec les composés organiques inertes particulières donnée par la variable ( $X_I$ ). Notre modèle se résume à 11 variables d'état (Tableau 1.1)

Tableau 1.1 – Variables d'état du modèle ASM1

N	Composé	Symbole	Unité
1	Matière organique soluble inerte	$S_I$	$g_{DCO}.m^{-3}$
2	Substrat facilement biodégradable	$S_S$	$g_{DCO}.m^{-3}$
3	Matière organique particulaire inerte	$X_I$	$g_{DCO}.m^{-3}$
4	Substrat lentement biodégradable	$X_S$	$g_{DCO}.m^{-3}$
5	Biomasse active hétérotrophe	$X_{BH}$	$g_{DCO}.m^{-3}$
6	Biomasse active autotrophe	$X_{BA}$	$g_{DCO}.m^{-3}$
7	Azote sous forme de nitrate et de nitrite	$S_{NO}$	$g_N.m^{-3}$
8	Azote sous forme d'ammoniaque	$S_{NH}$	$g_N.m^{-3}$
9	Azote organique soluble biodégradable	$S_{ND}$	$g_N.m^{-3}$
10	Azote organique particulaire biodégradable	$X_{ND}$	$g_N.m^{-3}$
11	Oxygène dissous	$S_O$	$g_O.m^{-3}$

Les variables d'état du modèle ASM1 sont liées par 8 processus de dégradation. Ces interactions sont rapidement décrites ci-après :

◇ **Croissance aérobie des micro-organismes hétérotrophes** : une fraction du substrat facilement biodégradable est utilisée pour la croissance de la biomasse hétérotrophe, et l'équilibre est oxydé en énergie donnant lieu à une demande en oxygène associée. La croissance est modélisée en utilisant la cinétique de Monod. L'ammoniac est utilisé comme source d'azote pour la synthèse et

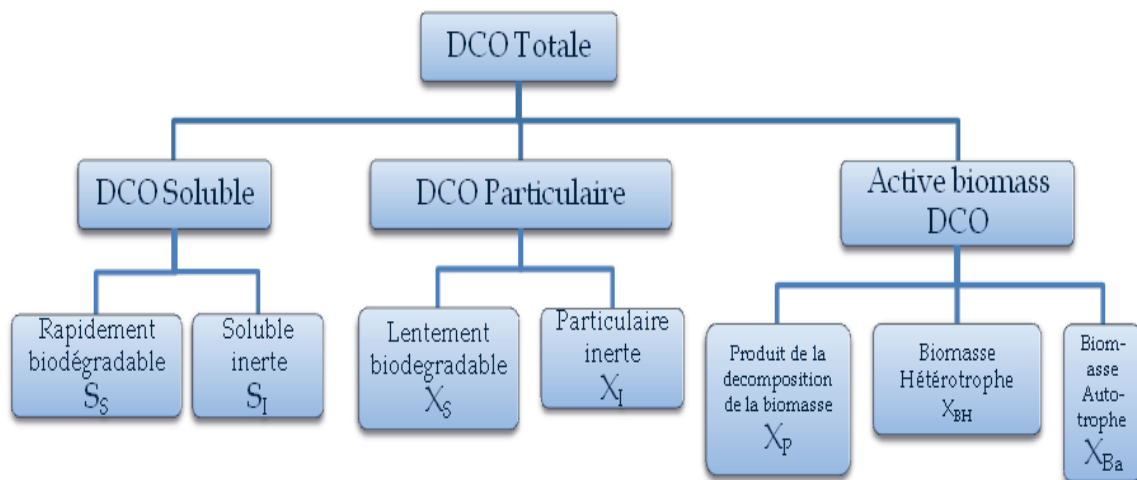


Fig. 1.2 – Fractionnement de la DCO

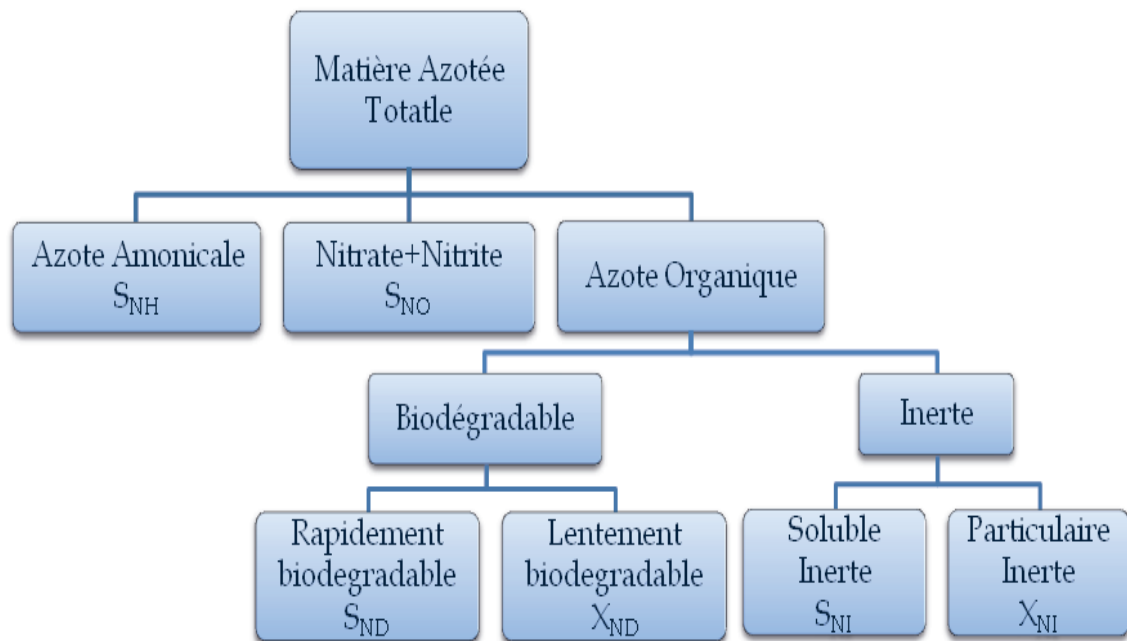


Fig. 1.3 – Fractionnement de la matière azotée

incorporé dans la masse cellulaire. Les concentrations de  $S_S$  et  $S_O$  peuvent limiter la vitesse pour le processus de croissance. Ce processus est généralement le principal contributeur à la production de nouvelle biomasse et l'élimination de la  $DCO$ . Il est également associé à un changement d'alcalinité.

◊ **Croissance anoxie des micro-organismes hétérotrophes** : en l'absence d'oxygène des micro-organismes sont capables d'utiliser le nitrate comme accepteur terminal d'électrons avec  $S_S$  comme substrat. Le processus conduira à une production de biomasse hétérotrophe et de l'azote gazeux par réduction des nitrates (dénitrification) avec un changement d'alcalinité associé. Les mêmes cinétiques Monod que celles utilisées pour la croissance aérobie sont appliquées, sauf que le taux d'expression cinétique est multiplié par un facteur de  $\eta_g < 1$ . Ce taux réduit pourrait être causé par un taux de croissance maximal inférieur dans des conditions anoxiques parce que seule une fraction de la biomasse hétérotrophe est capable de fonctionner avec du nitrate comme accepteur d'électrons. L'ammoniaque est utilisé comme source d'azote pour la synthèse de la cellule, ce qui modifie à son tour l'alcalinité.

◊ **Croissance aérobie des micro-organismes autotrophes** : l'oxydation de l'ammoniaque en nitrate (nitrification) donne lieu à la production de biomasse autotrophe (en faible quantité cependant en raison du faible taux de conversion) et à la consommation d'oxygène dissous. Comme pour la croissance des hétérotrophes, de l'ammoniaque est utilisé au cours de la synthèse bactérienne pour fournir l'azote nécessaire, et est incorporé dans la masse cellulaire. Le procédé influe considérablement sur l'alcalinité. Une fois de plus le taux de croissance est modélisé en utilisant la cinétique de Monod.

◊ **Mortalité des micro-organismes hétérotrophes et autotrophes** : la mortalité des organismes hétérotrophes et autotrophes se produit de façon continue, indépendamment des conditions d'aération du milieu (condition d'aérobiose, d'anoxie ou d'anaérobiose). Les cellules mortes sont transformées en  $DCO$  particulaire non biodégradable et en substrat lentement biodégradable. De façon similaire, la fraction d'azote organique contenue dans la masse cellulaire est restituée au milieu suite au décès de la biomasse et vient s'ajouter à la quantité déjà présente d'azote organique particulaire.

◊ **Ammonification de l'azote organique soluble** : l'oxydation de l'azote organique soluble en azote ammoniacal avec un changement d'alcalinité.

◊ **Hydrolyse de la matière organique** : le substrat lentement biodégradable correspondant aux substances polluantes est décomposé par un mécanisme extracellulaire, produisant le substrat facilement biodégradable utile à la croissance des organismes.

◊ **Hydrolyse de l'azote organique** : le taux de décomposition de l'azote organique particulaire est proportionnel au taux de décomposition de l'azote organique soluble, dans le rapport des quantités

de biomasse susceptibles de dégrader ces composés.

Les paramètres utilisés dans ce modèle sont définis dans le Tableau 1.2.

Tableau 1.2 – Définition des paramètres utilisés dans le modèle ASM1

Notation	Signification	Valeur
$Y_A$	Taux de conversion substrat/biomasse autotrophe	0.24[-]
$Y_H$	Taux de conversion substrat/biomasse hétérotrophe	0.67[-]
$f_P$	Fraction de DCO inerte générée par la biomasse morte	0.08[-]
$i_{XB}$	Fraction d'azote dans la biomasse hétérotrophe	0.08[-]
$\mu_H$	Taux de croissance maximal de la biomasse hétérotrophe	4[J <sup>-1</sup> ]
$\mu_A$	Taux de croissance maximal de la biomasse autotrophe	0.5[J <sup>-1</sup> ]
$b_H$	Coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe	0.3[J <sup>-1</sup> ]
$b_A$	Coefficient de mortalité de la biomasse autotrophe	0.05[J <sup>-1</sup> ]
<b>Coefficient de demi-saturation :</b>		
$K_S$	en substrat rapidement biodégradable	10[gm <sup>-3</sup> ]
$K_{OH}$	de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe	0.2[gm <sup>-3</sup> ]
$K_{NO}$	du nitrate pour la biomasse hétérotrophe	0.5[gm <sup>-3</sup> ]
$K_{NH}$	pour l'hydrolyse du substrat lentement biodégradable	1[gm <sup>-3</sup> ]
<b>Facteur de correction :</b>		
$K_{OA}$	pour $\mu_H$ sous condition anoxie	0.4[gm <sup>-3</sup> ]
$K_X$	pour l'hydrolyse sous condition anoxie	0.1[gm <sup>-3</sup> ]
$\eta_g$	pour $\mu_H$ sous condition anoxie	0.8[-]
$\eta_h$	pour l'hydrolyse sous condition anoxie	0.8[-]
$K_h$	Taux maximal pour l'hydrolyse	3[-]
$K_a$	Taux d'ammonification	0.05[-]

### 1.5.2 Ecriture du modèle

Les équations du modèle sont présentées sous forme d'une matrice (voir Fig. 1.4). La première ligne de cette matrice contient les variables d'état du modèle. La première colonne indique le nom des cinétiques biologiques  $\rho_i$  dont l'expression est donnée dans la dernière colonne. Dans chaque case  $(i, j)$ , le taux de conversion  $Y_{i,j}$  apparaît. La vitesse globale d'une variable d'état est donc décrite par la colonne associée qui indique l'ensemble des réactions intervenant sur cette variable d'état  $r_j$ . Bien

qu'ils soient de nature différente, les phénomènes biologiques présents au sein des phases anoxiques et aérobies sont simulés sous un unique modèle. Ceci est possible grâce à l'utilisation de fonctions de commutation.

◊ les cinétiques ayant lieu uniquement en phase anoxique comporteront le terme  $\frac{K_{OH}}{S_O + K_{OH}}$  inhibant la réaction en phase aérobie.

◊ les cinétiques ayant lieu uniquement en phase aérobie comporteront le terme  $\frac{S_O}{S_O + K_{OH}}$  ou le terme  $\frac{S_O}{S_O + K_{OA}}$  inhibant la réaction en phase anoxique.

### 1.5.3 Hypothèses du modèle

Un certain nombre de simplifications et d'hypothèses doivent être fait dans le but de modéliser le système ASM1 [Henze et al, 1987] et sont résumées ci après

- Un parfait mélange dans le réacteur.
- Une parfaite séparation des phases liquide et solide dans le clarificateur.
- La somme de tous les débits d'écoulement dans le clarificateur est égale au débit du colon influent.
- Le système opère à température constante.
- Le pH est constant, pour ne pas affecter le taux de croissance.
- Les facteurs de correction en dénitrification,  $\eta_g$  et  $\eta_h$ , fixés et constants, sont spécifiques de l'eau usée traitée.
- La biomasse hétérotrophe est supposée homogène.

Le comportement dynamique de la concentration de la biomasse hétérotrophe est touché par trois procédés différents : la croissance aérobie, la croissance anoxique et la décomposition (mort), et est donné par

$$r_H = \left[ \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \eta_g \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} - b_H \right] X_{BH} \quad (1.1)$$

L'état de la concentration de la biomasse autotrophe est plus simple puisque les autotrophes ne se développent pas dans un environnement anoxique. En conséquence,

$$r_A = \left[ \hat{\mu}_A \left( \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \right) - b_A \right] X_{BA} \quad (1.2)$$

La concentration de substrat facilement biodégradable est réduite par la croissance des bactéries hétérotrophes (dans les deux conditions aérobies et anoxiques) et est augmentée par l'hydrolyse du substrat lentement biodégradable, son équation différentielle est donnée par

$$r_{S_S} = \left[ -\frac{\hat{\mu}_H}{Y_H} \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \eta_g \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} \right. \\ \left. k_h \frac{X_S/X_{BH}}{K_X + (X_S/X_{BH})} \left\{ \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \eta_h \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} \right] X_{BH} \quad (1.3)$$

La concentration de substrat lentement biodégradable est augmentée par le recyclage des bactéries mortes, selon l'hypothèse, la mort de régénération et diminuée par le processus d'hydrolyse en fonction de

$$r_{X_S} = (1 - f_P)(b_H X_{BH} + b_A X_{BA}) - \\ k_h \frac{X_S/X_{BH}}{K_X + (X_S/X_{BH})} \left[ \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \eta_h \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right] X_{BH} \quad (1.4)$$

La concentration de particules d'azote organique est augmentée par la décomposition de la biomasse et diminuée par le processus d'hydrolyse. L'équation différentielle est la suivante

$$r_{X_{ND}} = (i_{XB} - f_P i_{XP})(b_H X_{BH} + b_A X_{BA}) - \\ k_h \frac{X_{ND}/X_{BH}}{K_X + (X_S/X_{BH})} \left[ \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \eta_h \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right] X_{BH} \quad (1.5)$$

La concentration d'azote organique soluble est affectée par l'ammonification et l'hydrolyse, selon

$$r_{S_{ND}} = \left[ -k_a S_{ND} + k_h \frac{X_{ND}/X_{BH}}{K_X + (X_S/X_{BH})} \left\{ \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \eta_h \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} \right] X_{BH} \quad (1.6)$$

La concentration d'ammoniac est affectée par la croissance de tous les micro-organismes. La concentration est également diminuée par le processus de nitrification et augmentée à la suite de l'ammonification de l'azote organique soluble. Cela conduit à une équation différentielle complexe formulée comme suit

$$r_{NH} = \left[ -i_{XB} \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) + \eta_g \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} k_a S_{ND} \right] X_{BH}$$

$$-\hat{\mu}_A \left( i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right) \left( \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \right) X_{BA} \quad (1.7)$$

La concentration de nitrate est seulement affectée par deux processus, elle est augmentée par la nitrification et diminuée par la dénitrification. L'équation dynamique qui la décrit est formulée ci-dessous.

$$r_{ND} = -\hat{\mu}_H \eta_g \left( \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \right) \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{BH} + \frac{\hat{\mu}_A}{Y_A} \left( \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \right) X_{BA} \quad (1.8)$$

Enfin, la concentration d'oxygène dans les eaux usées est réduite par la croissance de l'aérobie des biomasses hétérotrophes et autotrophes, selon

$$r_O = -\hat{\mu}_H \left( \frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} - \hat{\mu}_A \left( \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \right) \left( \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \right) X_{BH} \quad (1.9)$$

Les équations différentielles du système peuvent être énoncées comme suit

✓ Pour les composants solubles ( $S_I$ ;  $S_S$ ;  $S_{NO}$ ;  $S_{NH}$ ;  $S_{ND}$ ) :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{q_{in}(x_i^{in} - x_i)}{V} + r_i(x) \quad (1.10)$$

✓ Pour les composants particuliers ( $X_I$ ;  $X_S$ ;  $X_{BH}$ ;  $X_{BA}$ ;  $X_{ND}$ ) :

$$\frac{dx_i}{dt} = \left[ \frac{q_{in}(x_i^{in} - x_i) + q \frac{R q^{in} - q^W}{q^R + q^W}}{V} \right] + r_i(x) \quad (1.11)$$

✓ Pour les concentrations en oxygène dissous ( $S_O$ ) :

$$\frac{dS_O}{dt} = \frac{q_{in}(S_O^{in} - S_O)}{V} + r_O + K q_a (S_O^{max} - S_O) \quad (1.12)$$

## 1.6 Réduction du modèle ASM1

Le modèle ASM1 a été bien accueilli par la communauté scientifique et largement utilisé mais le plus souvent de manière indirecte. En effet, sa complexité (grand nombre de variables d'état et de paramètres, non-linéarité) ne permet pas de l'exploiter facilement à des fins de commande, d'observation des états non mesurés ou de supervision.

Plusieurs hypothèses de simplification peuvent être appliquées pour la réduction du modèle ASM1. Dans ce qui suit, un modèle réduit pour le procédé à boues activées en bassin unique avec aération de surface est développé sur la base d'un certain nombre de simplifications que nous allons voir plus en détail dans la section suivante.

## 1.7 Hypothèses de simplification

Les hypothèses pour simplifier le modèle IAWQ du point de vue physique et biologique reposent principalement sur une analyse de la façon dont les composants suivants sont traités dans le modèle :

- ↔ L'oxygène dissous.
- ↔ La matière organique.
- ↔ L'azote.
- ↔ Les micro-organismes.

■ Pour le modèle réduit, des mesures de la concentration de l'oxygène dissous ne seront pas prises en compte, bien que le capteur d'oxygène dissous est généralement considéré comme l'instrument le plus fiable en ligne pour le procédé à boues activées. C'est parce que la concentration en oxygène est considérée en temps que variable d'état.

■ La description de la matière organique représente la seconde différence considérable des modèles réduits par rapport au modèle IAWQ. Dans le modèle IAWQ quatre fractions de matières organiques sont considérées

- Matière organique soluble inerte ( $S_I$ );
- Substrat facilement biodégradable ( $S_S$ );
- Matière organique particulaire inerte ( $X_I$ );
- Substrat lentement biodégradable ( $X_S$ ).

Les deux fractions inertes ( $S_I$  et  $X_I$ ) ne sont pas importantes d'un point de vue biologique et ne seront pas prises en compte dans notre modèle réduit.

D'autre part, les deux fractions biodégradables sont de la plus haute importance pour écrire les réactions biologiques.  $S_S$  est considéré comme étant directement disponible pour les micro-organismes,  $X_S$  doit d'abord être enzymatiquement décomposé en  $S_S$  (le mécanisme de l'hydrolyse) avant d'être utilisé.

■ La troisième grande différence entre le modèle réduit et celui de IAWQ concerne les composants de l'azote. Dans le modèle IAWQ quatre fractions d'azote sont considérées qui sont :

- ↔ Azote sous forme de nitrate et de nitrite ( $S_{NO}$ );
- ↔ Azote ammoniacal ( $S_{NH}$ );
- ↔ Azote organique soluble biodégradable ( $S_{ND}$ );
- ↔ Azote organique particulaire biodégradable ( $X_{ND}$ ).

Les deux fractions d'azote organique ( $S_{ND}$ ,  $X_{ND}$ ) sont décrites principalement par l'hydrolyse et l'ammonification (voir tableau des cinétiques Fig. 1.4). En outre, comme le mécanisme de l'hydrolyse a été exclu pour décrire la transformation de la matière organique, il ne doit donc pas être utilisé pour décrire la transformation de l'azote.

Afin de réduire la complexité de la structure du modèle et le nombre de paramètres, les deux seules fractions d'azote incluses dans le modèle réduit sont l'azote sous forme de nitrate et de nitrite ( $S_{NO}$ ) et l'azote sous forme d'ammoniaque ( $S_{NH}$ ).

■ Les deux types de micro-organismes décrits dans le modèle IAWQ sont la biomasse active hétérotrophe ( $X_{BH}$ ) et autotrophe ( $X_{BA}$ ). La croissance des micro-organismes autotrophes se fait en faible quantité ici elle ne sera pas prise en compte

## 1.8 Ordre du modèle réduit

Les simplifications discutées dans le paragraphe précédent peuvent être résumé dans ce qui suit

- La variable décrivant l'alcalinité n'est pas incluse,
- Les produits de la décomposition de la biomasse (morts) ( $X_P$ ) sont inclus avec les composés organiques inertes et particulières et seront donnés par la variable ( $X_I$ ),
- La concentration en oxygène est considérée comme variable d'état,
- La matière organique soluble et particulaire inerte ( $S_I$ ) et ( $X_I$ ) sera négligée dans notre modèle réduit,
- Inhibition du mécanisme d'hydrolyse et d'ammonification, et élimination des deux fractions d'azote organique, (soluble  $S_{ND}$  et particulaire  $X_{ND}$ ),

- La croissance de la biomasse active autotrophe ( $X_{BA}$ ) ne sera pas prise en compte,
- L'azote sous forme de nitrate et de nitrite ( $S_{NO}$ ) est une petite quantité et sera donc éliminé.

Les simplifications considérées ont réduit le nombre de variables d'état à quatre en phase aérobie (cinq en phase anoxique) par rapport aux 13 variables d'état du modèle original IAWQ.

Pour des conditions anoxiques le modèle simplifié ci-dessous est proposé :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_H = \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \eta_g \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{BH} - b_H X_{BH} \\ r_{S_S} = -\frac{\hat{\mu}_H}{Y_H} \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \eta_g \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{BH} - (1 - f_P) b_H X_{BH} \\ r_{NH} = -i_{XB} \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \eta_g \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{BH} \\ r_{ND} = -\hat{\mu}_H \eta_g \left( \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \right) \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{BH} \\ r_O = 0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Pour des conditions aérobies le modèle simplifié ci-dessous est proposé :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_H = \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} - b_H X_{BH} \\ r_{S_S} = -\frac{\hat{\mu}_H}{Y_H} \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \eta_g \left( \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left( \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{BH} - (1 - f_P) b_H X_{BH} \\ r_{NH} = -i_{XB} \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} \\ r_O = -\hat{\mu}_H \left( \frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Une dernière réduction serait de supposer que l'azote sous forme d'ammoniaque ( $S_{NH}$ ) est mesurable en ligne et, par conséquent, son mécanisme de formation n'est pas considéré comme crucial pour les fins de contrôle (qui est notre cas car nous tenons par la suite à utiliser le modèle obtenu comme modèle interne pour une commande prédictive).

Après élimination de toutes les composantes azotées dans notre modèle on se trouve dans le cas d'une pollution carbonée et uniquement en phase d'aérobie.

$$\left\{ \begin{array}{l} r_H = \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} - b_H X_{BH} \\ r_{S_S} = -\frac{\hat{\mu}_H}{Y_H} \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} + (1 - f_P) b_H X_{BH} \\ r_O = -\hat{\mu}_H \left( \frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Notre procédé de traitement des eaux en bassin unique à boues activées en phase aérobie consiste à mélanger les eaux usées avec un mélange riche en bactéries afin de dégrader la matière organique. Le modèle ASM1 réduit sera alors considéré comme un processus d'élimination de substrat organique

et sera réduit à trois variables d'état. La représentation mathématique finale sera donnée par le système d'équations différentielles suivant (Eq. 1.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_{BH}}{dt} = \frac{q_{in}(X_{BH}^{in} - X_{BH}) + q_R \frac{q_{in} - q_W}{q_R + q_W} X_{BH}}{V} + r_H \\ \frac{dS_S}{dt} = \frac{q_{in}(S_S^{in} - S_S)}{V} + r_S \\ \frac{dS_O}{dt} = \frac{q_{in}(S_O^{in} - S_O)}{V} + r_O + Kq_a (S_O^{max} - S_O) \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Nous supposons que la concentration d'oxygène dissous à l'entrée du réacteur  $S_O^{in}$  est nulle.

Donc

$$\frac{dS_O}{dt} = -\frac{q_{in}}{V} S_O + r_O + Kq_a (S_O^{max} - S_O)$$

On remplace les expressions des cinétiques dans notre système d'équations différentielles nous obtenons enfin

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_{BH} = \frac{q_{in}}{V} (X_{BH}^{in} - X_{BH}) + \frac{q_R}{V} \frac{q_{in} - q_W}{q_R + q_W} X_{BH} \\ \quad + \hat{\mu}_H \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} - b_H X_{BH}, \\ \dot{S}_S = \frac{q_{in}}{V} (S_S^{in} - S_S) - \frac{\hat{\mu}_H}{Y_H} \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} \\ \quad + (1 - f_P) b_H X_{BH}, \\ \dot{S}_O = -\frac{q_{in}}{V} S_O + Kq_a (S_O^{max} - S_O) \\ \quad - \hat{\mu}_H \left( \frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left( \frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left( \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_{BH} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Le volume du bioréacteur est supposé constant. On peut alors écrire (Fig 1.1) :

$$q_{out}(t) = q_{in}(t) + q_R(t)$$

En général,  $q_R(t)$  et  $q_W(t)$ , respectivement le débit recyclé et le débit rejeté, représentent des fractions du débit d'entrée  $q_{in}(t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_R = f_R q_{in}, 1 \leq f_R \leq 2, \\ q_W = f_W q_{in}, 0 \leq f_W \leq 1 \end{array} \right.$$

Les expressions des cinétiques  $\rho_j, j = 1 \dots 8$ , des processus de dégradation figurent dans le tableau des cinétiques (voir Fig. 1.4)

Concentrations $j$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Cinétique de la réaction	
i	Réaction $\rho_i$	$S_I$	$S_S$	$X_I$	$X_S$	$X_{BH}$	$X_{BA}$	$X_P$	$S_O$	$S_{NO}$	$S_{NH}$	$S_{ND}$	$X_{ND}$	$S_{NH}$	$S_{NH}$	
1	Croissance aérobie des hétérotrophes		$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-\frac{1-Y_H}{Y_H}$		$-i_{XB}$			$-\frac{i_{XB}}{14}$	$\mu_H \cdot \frac{S_S}{K_S + S_S} \cdot \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \cdot X_{BH}$	
2	Croissance hétérotrophe anoxique		$-\frac{1}{Y_H}$			1				$-\frac{1-Y_H}{2.86Y_H}$	$-i_{XB}$			$-\frac{1-Y_H}{14 \times 2.86Y_H}$	$\mu_H \cdot \frac{S_S}{K_S + S_S} \cdot \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \cdot \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \cdot \eta_f \cdot X_{BH}$	
3	Croissance autotrophe aérobie						1		$-\frac{4.57-Y_A}{Y_A}$	$\frac{1}{Y_A}$	$-\frac{1}{Y_A}$			$-\frac{i_{XB}}{14}$	$\hat{\mu}_A \cdot \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \cdot \frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \cdot X_{BA}$	
4	Mortalité des bactéries hétérotrophe							$f_P$					$i_{XB} - f_P^{i_{XP}}$		$b_H \cdot X_{BH}$	
5	Mortalité des bactéries autotrophe							$f_P$					$i_{XB} - f_P^{i_{XP}}$		$b_A \cdot X_{BA}$	
6	Ammonification										1	-1		$\frac{1}{14}$	$k_a \cdot S_{ND} \cdot X_{BH}$	
7	Hydrolyse du carbone organique		1		-1										$k_h \cdot \frac{X_S/X_{BH}}{K_X + X_S/X_{BH}} \cdot \left[ \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right]$ $+ \eta_h \cdot \left[ \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right] \cdot \left[ \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right] \cdot X_{BH}$	
8	Hydrolyse de l'azote organique											1	-1		$\rho_7 (X_{ND}/X_S)$	

Fig. 1.4 – Modèle ASM1 (Source : [Henze et al., 1987])

# Chapitre 2

## Systemes multi-modèles

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>24</b>
<b>2.2</b>	<b>Obtention d'une structure multi-modèle</b>	<b>25</b>
2.2.1	Différentes structures multi-modèles	26
2.2.2	Méthode générale de passage d'un système non linéaire en multi-modèle	29
<b>2.3</b>	<b>Introduction au modèle flou de Takagi Sugeno (TS)</b>	<b>31</b>
2.3.1	Représentation du modèle flou de Takagi Sugeno (TS)	31
2.3.2	Construction du modèle flou de Takagi Sugeno (TS)	34
2.3.3	Forme Quasi-Linéaire à Paramètres Variables (Quasi-LPV)	36
2.3.4	Limites de la méthodologie proposée	37
2.3.5	Stabilité des multi-modèles Takagi Sugeno (TS)	38

---

« *Inventer, c'est penser à côté* » **Albert Einstein**

## 2.1 Introduction

La modélisation représente l'indispensable étape préliminaire à la conduite de processus industriels. Cette étape fondamentale est nécessaire que ce soit pour l'élaboration d'une loi de commande ou pour le développement d'une procédure de diagnostic. La modélisation d'un processus vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter d'une manière rigoureuse le comportement de ce processus dans un domaine de fonctionnement donné.

En fonction des connaissances à priori sur le processus à étudier, on peut envisager différents types de modèles en vue de représenter son comportement. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la modélisation par l'approche multi-modèle.

L'approche multi-modèle a connu un intérêt certain depuis la publication des travaux de **[Johansen et Foss, 1992]**. L'idée de l'approche multi-modèle est d'appréhender le comportement non linéaire d'un système par un ensemble de modèles locaux (linéaires ou affines) caractérisant le fonctionnement du système dans différentes zones de fonctionnement.

La motivation de cette approche découle du fait qu'il est souvent difficile de concevoir un modèle qui tient compte de toute la complexité du système étudié. Au départ, certains auteurs ont essayé de représenter des systèmes non linéaires avec des modèles linéaires par morceaux construits à partir d'un ensemble de décisions. Il en résulte une approximation discontinue du système due aux commutations entre les différents modèles linéaires. Malheureusement, ces discontinuités peuvent être indésirables dans la majorité des applications industrielles. Pour remédier à ce problème, il est préférable d'assurer un passage progressif d'un modèle à un autre. On substitue aux fonctions de commutation à front raide des fonctions à pente douce, ce qui crée un chevauchement entre les zones de validité des modèles. Dans ce cas, les fonctions de commutation deviennent des fonctions à dérivées continues dont la pente détermine la vitesse de passage d'un modèle à un autre.

En 1985, Takagi et Sugeno ont proposé un modèle flou d'un système constitué d'un ensemble de règles « si prémisse alors conséquence », telles que la conséquence d'une règle est un modèle affine. Le modèle global s'obtient par l'agrégation des modèles locaux.

Quelques années après, **[Jacobs et al, 1991]** ont présenté l'approche multi-experts qui est la combinaison de différents experts par l'entremise de fonctions d'activation, tel qu'un expert est un modèle décrivant le comportement local d'un système. L'ensemble de toutes ces techniques conduit à un modèle global d'un système qui est une combinaison de modèles localement valables.

L'identification d'une structure multi-modèle concerne la recherche d'une structure optimale et l'estimation des paramètres. Dans ce chapitre, on s'intéressera au choix de la structure du multi-

modèle et à l'optimisation paramétrique qui consiste à estimer les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux. Les raisons qui nous ont conduit à choisir comme méthode de modélisation l'approche multi-modèle sont multiples ; la structure multi-modèle permet de simplifier et d'étudier aisément :

- ↗ la stabilité d'un système non linéaire, grâce à l'outil numérique LMI qui permet de trouver des solutions aux équations de Lyapunov.
- ↗ la synthèse des correcteurs (constitué par exemple d'un retour d'état pour chaque modèle local) et la synthèse des multi-observateurs.

## 2.2 Obtention d'une structure multi-modèle

Les multi-modèles représentent les systèmes non linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI valide autour d'un point de fonctionnement. Selon l'information dont on dispose, trois méthodes distinctes peuvent être utilisées pour l'obtention d'un multi-modèle. Si l'on ne dispose que des mesures des entrées et sorties du système, on procède par identification ([Gasso et al, 1999] et [Gasso, 2000]) en cherchant ou en imposant la structure du multi-modèle. Si, en revanche, on dispose d'un modèle non linéaire explicite que l'on souhaite simplifier ou rendre plus manipulable on pourra procéder par linéarisation autour de différents points de fonctionnement (dans ce cas, il s'agit de modèles locaux affines dû à la présence de la constante provenant de la linéarisation) [Johansen et Foss, 1992] ou par transformation polytopique convexe. Illustrons la dernière approche en considérant un système statique non linéaire (Eq. 2.1), pour lequel nous cherchons à déterminer une représentation multi-modèle permettant de décrire le comportement de ce système.

$$y(t) = F(x(t)) \tag{2.1}$$

où  $x(t)$  est le vecteur d'état du système,  $y(t)$  est le vecteur de sortie et  $F$  est la fonction non linéaire qui relie l'état à la sortie.

La représentation dynamique des systèmes non-linéaires peut être donnée par un modèle d'état, représentant une relation entre les variables d'état et les variables d'entrée ou de commande. Ce modèle est constitué par le système d'équations différentielles suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y = g(x(t), u(t)), \end{cases} \tag{2.2}$$

Où les non linéarités sont exprimées par les fonctions  $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$  et  $g(x, u) \in \mathbb{R}^n$ .

Supposons qu'on dispose d'un ensemble de  $r$  modèles locaux  $f_i(x(t))$  descriptifs du comportement du système dans différentes zones de fonctionnement. Ces modèles peuvent être construits par exemple à partir de connaissances physiques sur le fonctionnement du système dans ces zones. La validité locale de chaque modèle  $f_i$  est indiquée par une fonction de validité  $\omega_i(x(t))$  pour  $i \in 1, \dots, r$ . Le modèle global s'obtient de la manière suivante :

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(x(t)) f_i(x(t))}{\sum_{j=1}^r \omega_j(x(t))} \quad (2.3)$$

posons :

$$\mu_i(x(t)) = \frac{\omega_i(x(t))}{\sum_{j=1}^r \omega_j(x(t))} \quad (2.4)$$

En combinant les équations Eq. 2.3 et Eq. 2.4, on obtient l'expression générale d'une structure multi-modèle [**Johansen et Foss, 1993**] :

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) f_i(x(t)) \quad (2.5)$$

La fonction d'activation  $\mu_i(x(t))$  détermine le degré d'activation du  $i^{eme}$  modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global (multi-modèle). Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions sont généralement de forme triangulaire, sigmoïdale ou Gaussienne, et doivent satisfaire les propriétés suivantes (convexité) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) = 1, \\ 0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

### 2.2.1 Différentes structures multi-modèles

On peut énumérer différentes formes de multi-modèles selon que l'on fait la segmentation sur l'entrée ou sur la sortie (c.à.d sur les variables d'état mesurables) et aussi selon la nature du couplage entre les modèles locaux associés aux zones de fonctionnement. Cependant, on peut noter trois structures de multi-modèles :

1. structure couplée.
2. structure découplée.
3. structure hiérarchisée.

### Structure couplée

La représentation multi-modèle est obtenue par interpolation de  $r$  modèles locaux linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t)), \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $\mu_i(\xi(t))$ ,  $i \in 1, \dots, r$  sont les fonctions d'activation et  $\xi(t)$  est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande  $u(t)$ . Cette structure est la plus utilisée en analyse bien qu'en synthèse des multi-modèles.

### Structure découplée

Une autre forme de multi-modèle, proposée par [Filev, 1991], résulte de l'agrégation de modèles locaux décrits d'une façon découplée. La différence entre cette structure et celle présentée au paragraphe précédent réside dans le fait que chaque modèle local est indépendant de tous les autres (Eq. 2.8) :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u(t), \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans cette structure, la notion d'état local, correspondant à un domaine de fonctionnement, apparaît plus clairement. Le multi-modèle (modèle global) est ainsi donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) & i \in 1, \dots, r \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(C_i x_i(t) + D_i u(t)), \end{cases} \quad (2.9)$$

Rappelons que les variables locales  $x_i(t)$  n'ont pas forcément un sens physique. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  ainsi que les fonctions d'activation  $\mu_i(\xi(t))$  sont calculées de la même façon que précédemment (structure couplée). Cette structure peut être vue comme la connexion parallèle de  $r$  modèles affines pondérés par leurs poids respectifs.

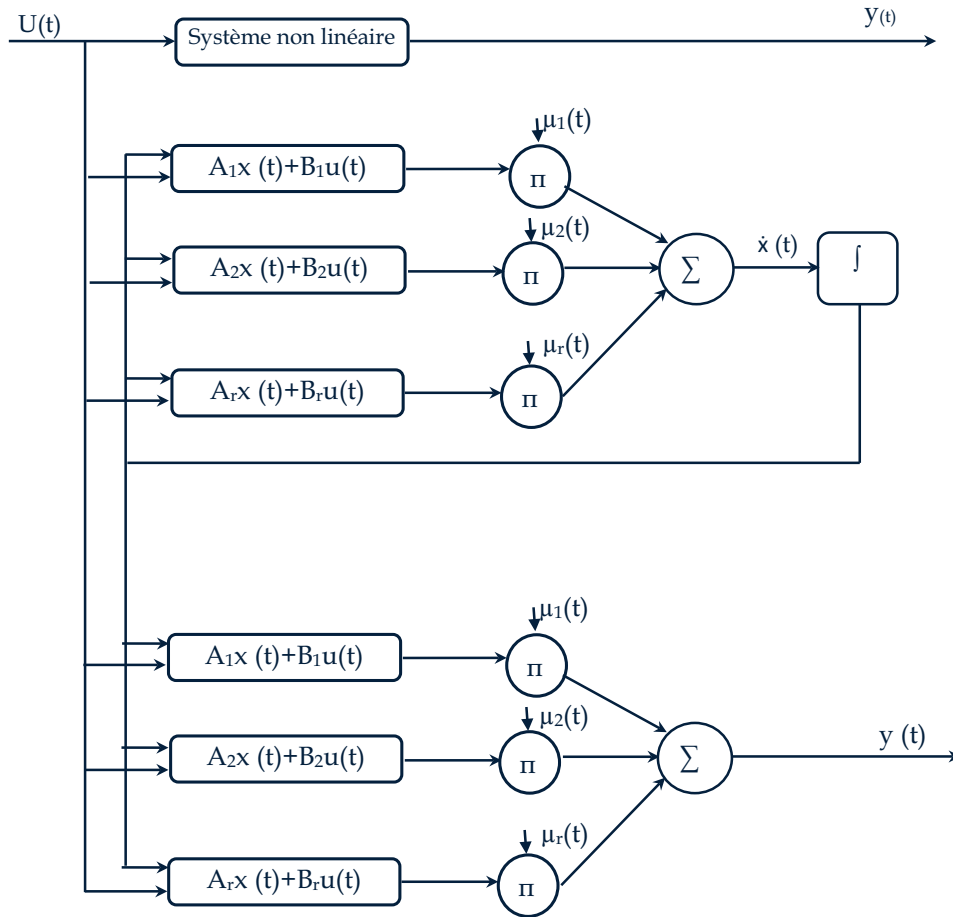


Fig. 2.1 – Architecture du multi-modèle couplé

### Structure hiérarchisée

Bien que l'approche multi-modèle ait connu un grand succès dans beaucoup de domaines (commande, diagnostic, etc.), son application est limitée aux systèmes ayant peu de variables (dimension réduite). Le nombre de modèles locaux augmente d'une façon exponentielle avec l'augmentation du nombre de variables. Par exemple, un multi-modèle à sortie unique, avec  $n$  variables et  $m$  fonctions d'activation définies pour chaque variable est composé de  $m^n$  modèles locaux. Les chercheurs ont étudié ce problème en utilisant différentes approches ([Friedman et Stuetzle, 1981], [Breiman et al, 1984] et [Huber, 1985]).

Pour surmonter ce problème, [Raju et al, 1991] ont proposé un multi-modèle à structure hiérarchique afin de réduire le nombre de modèles locaux. La figure (Fig. 2.3) montre un exemple typique d'un multi-modèle hiérarchique qui comporte  $n$  entrées et  $n - 1$  sorties; dans cette structure, les modèles locaux ont deux entrées chacun, le modèle global est alors composé de  $n$  modèles locaux; pour plus de détails, voir [Wang, 1998], [Wei et Wang, 2000] et [Joo et Leeb, 2002].

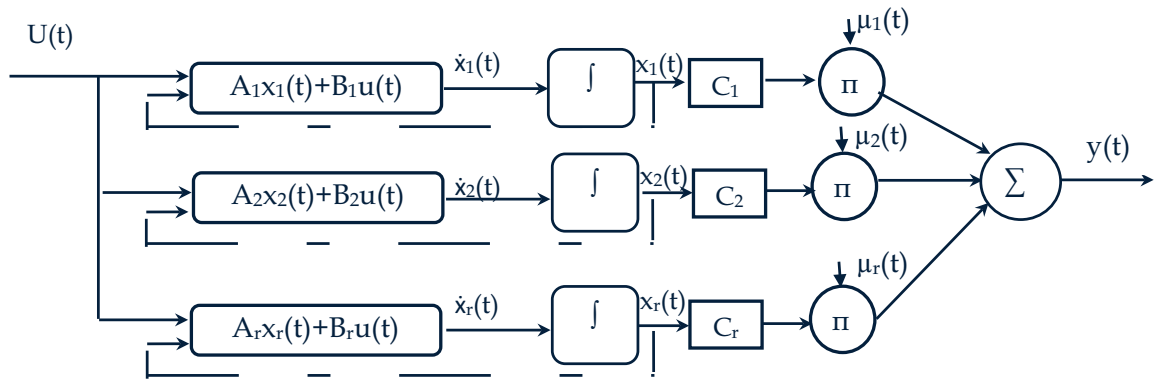


Fig. 2.2 – Architecture du multi-modèle découplé

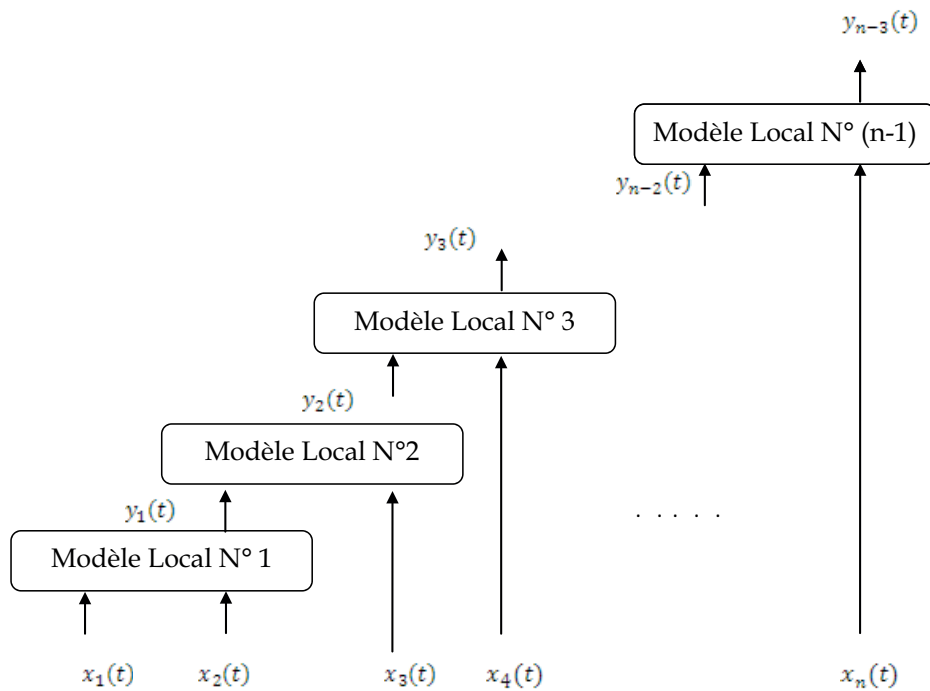


Fig. 2.3 – Architecture du multi-modèle à structure hiérarchique

## 2.2.2 Méthode générale de passage d'un système non linéaire en multi-modèle

La complexité des systèmes dynamiques non-linéaires apparaît dans de nombreux domaines scientifiques et en ingénierie notamment pour les objectifs d'identification, de commande et d'analyse de stabilité. De nombreuses techniques de simplification ont été développées au cours de ces dernières

années, en vue de réduire la complexité.

Le multi-modèle [Murray-Smith et Johansen, 1997] constitue une alternative intéressante et un outil largement utilisé actuellement pour la modélisation des systèmes non-linéaires. Le but est de réécrire le système non-linéaire, en utilisant un changement de variable sans perdre d'information. L'intérêt de réaliser une décomposition du système en utilisant ce type de modèle est que des propriétés importantes comme la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité ayant été largement étudiées dans le cadre des systèmes LTI, peuvent être utilisées, sur les multi-modèles car les sous-systèmes qui les constituent sont de type linéaire [Akhenak et al, 2004], [Chadli, 2002] et [Tanaka et Wang, 2001].

Dans la suite, on va présenter une procédure systématique de transformation d'un système non-linéaire en le réécrivant sous une forme multi-modèle. Cette méthode évite les inconvénients majeurs des autres méthodes :

- la transformation est réalisée sans perte d'information,
- le choix de différents points de fonctionnement n'est plus nécessaire,
- le choix des variables de prémisses est réalisé d'une façon systématique.

En partant d'une forme générale du système non-linéaire, une représentation d'état Quasi-LPV est réalisée. En général, un nombre important de formes Quasi-LPV peut être associé au système non-linéaire initial; chaque forme est associée à un ensemble particulier de variables de prémisses. Choisir la forme Quasi-LPV est équivalent à choisir l'ensemble des variables de prémisses.

Cette représentation Quasi-LPV constitue une forme polytopique, car les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à coefficients constants calculées à partir des sommets du polytope, ces derniers sont obtenus en utilisant la Transformation Polytopique Convexe (TPC). Chaque sommet du polytope définit un sous-modèle linéaire, la non-linéarité du système global étant rejetée dans les fonctions de pondération des sous-modèles [Wang et al, 1996].

En conséquence, la forme multi-modèle obtenue par cette méthode n'est pas unique, elle dépend du choix des variables de prémisses et du choix des grandeurs qui définissent la transformation polytopique convexe. La plupart des travaux réalisés pour les systèmes Quasi-LPV concernant l'analyse de stabilité ou la synthèse des contrôleurs/observateurs sont basés seulement sur les matrices qui définissent les sommets.

En conséquence, même si les différentes formes Quasi-LPV associées au système non linéaire sont formellement équivalentes, les résultats obtenus dépendent fortement du choix de la réalisation. Le choix de l'ensemble des variables de prémisses est important, car il influe sur le nombre des sous-

modèles et sur la structure du modèle global. Ce degré de liberté sera utilisé pour faciliter les études de contrôlabilité, d'observabilité et d'analyse de stabilité. Il est donc possible de choisir parmi les différentes structures multi-modèles celle qui assure, par exemple, l'existence d'un multi-observateur basé sur la structure multi-modèle.

En général, les conditions d'existence d'un observateur pour le multi-modèle sont des conditions suffisantes de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro. Ces conditions peuvent être exprimées dans le formalisme LMI et sont issues d'une analyse de stabilité de type Lyapunov [Ichalal et al, 2009c]; elles sont essentielles dans la définition et l'élaboration des critères de choix du multi-modèle. La méthode proposée généralise la méthode par secteur non linéaire, utilisée quand on fait référence aux modèles de type TS [Ohtake et al, 2001] et [Tanaka et Wang, 2001]. La contribution de cette méthode est de donner une procédure systématique pour choisir la forme Quasi-LPV, et par conséquent l'ensemble des variables de prémisse, la plus adaptée, tenant compte de l'objectif de l'étude (analyse de stabilité et performance, synthèse d'un contrôleur/observateur).

## 2.3 Introduction au modèle flou de Takagi Sugeno (TS)

Les modèles TS représentent une formulation mathématique très intéressante des systèmes non linéaires. Ces derniers peuvent donc être facilement représentés indépendamment de leur complexité avec une structure simple basée sur une combinaison non linéaire d'un ensemble de modèles linéaires [Murray-Smith et Johansen, 1997], [Li et al, 2004] et [Smets et al, 2006]. Cette structure simple avec des propriétés intéressantes, les rendent facilement exploitable d'un point de vue mathématique, leurs permettant d'être utilisés comme modèle interne dans les algorithmes MPC linéaires tels que CPG, DMC et PFC.

### 2.3.1 Représentation du modèle flou de Takagi Sugeno (TS)

Les modèles flous de TS sont représentés par des règles floues de type

« **Si** prémisse - **Alors** conséquence »

[Takagi et Sugeno, 1985]. Les parties prémisses sont les propositions ou le choix des fonctions de pondération  $\mu$  autour de laquelle un modèle local est valide et où les conséquences correspondent aux sous-modèles locaux invariants dans le temps. La  $i^{eme}$  règle floue du multi-modèle TS continu (MFC) s'écrit alors de la forme :

$$R^i : \text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i(z_1(t)) \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i(z_p(t)),$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y_i(t) = C_i x(t) + D_i u(t), \quad i=1,2,\dots,r. \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $R^i$  représente la  $i^{\text{eme}}$  règle floue, pour  $j = 1, \dots, r$ ,  $F_j^i(z_j(t))$ , pour  $j = 1, \dots, r$ , sont les sous ensembles flous,  $r$  le nombre de règles floues,  $z_j(t)$  les variables de prémisses qui dépendent des entrées et/ou des états du système,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur de commande.  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ ,  $D_i \in \mathfrak{R}^{q \times m}$  sont les matrices qui décrivent la dynamique du système.

Notons qu'une discrétisation de tels modèles est possible par une représentation d'état en temps discret (MFD). Le modèle est alors décrit par les équations de récurrence suivantes :

Si  $z_1(k)$  est  $F_1^i(z_1(k))$  Et  $\dots$  et  $z_p(k)$  est  $F_p^i(z_p(k))$ ,

$$\text{Alors } \begin{cases} x_i(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k), \\ y_i(k) = C_i x(k) + D_i u(k), \quad i=1,2,\dots,r. \end{cases} \quad (2.11)$$

Chaque règle est attribué un poids noté  $\omega_i(z(t))$  qui dépend du degré d'appartenance des variables de prémisses  $z_j(t)$  dans les sous-ensembles flous  $F_j^i(z_j(t))$  et le connecteur « et » reliant les variables de prémisses locales sélectionnées de telle sorte que :

$$\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t)), \quad i=1,2,\dots,r. \quad (2.12)$$

$F_j^i(z_j(t))$  représente la valeur de la fonction d'appartenance  $z_j(t)$  pour l'ensemble flou  $F_j^i$ . Nous avons alors les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) > 0, \\ \omega_i(z(t)) \geq 0, \quad i=1,2,\dots,r. \end{cases} \quad (2.13)$$

Notons :

$$\mu_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} \quad (2.14)$$

où  $\mu_i(z(t))$  représente donc la fonction d'activation de la  $i^{\text{me}}$  règle du modèle flou. Pour  $i = 1, 2, \dots, r$ , ces fonctions vérifient la propriété d'une somme convexe, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1, \\ \mu_i(z(t)) \geq 0, \quad i=1,2,\dots,r. \end{cases} \quad (2.15)$$

Enfin, la defuzzification du modèle flou fournit la représentation d'état d'un modèle non linéaire par l'interconnexion des modèles LTI par des fonctions d'activation non linéaires (Eq. 2.16).

Le multi-modèle (TS) est alors, une combinaison convexe de  $r$  sous-modèles (MFC)

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (2.16)$$

Notons que de la même façon, pour un modèle flou discrétisé (MFD) nous avons :

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(k))(C_i x(k) + D_i u(k)) \end{cases} \quad (2.17)$$

La figure (Fig. 2.4) illustre le schéma détaillé d'un multi-modèle TS standard. Notons que les modèles flous de type TS permettent de diminuer la complexité d'un problème non linéaire en le décomposant en un ensemble de problèmes linéaires locaux. La somme globale de ces derniers correspond au modèle non linéaire initial du ASM1 réduit.

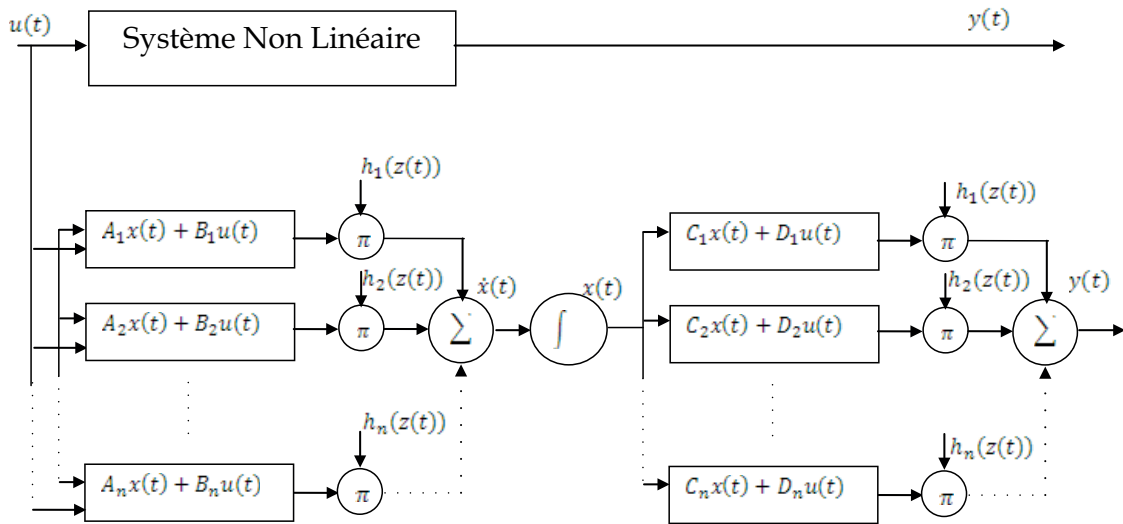


Fig. 2.4 – Structure d'un multi-modèle TS standard

### 2.3.2 Construction du modèle flou de Takagi Sugeno (TS)

Dans la littérature, il existe trois approches permettant le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un multi-modèle TS. Ces approches visent à représenter les systèmes non linéaires complexes sur un large domaine de fonctionnement. Ces différentes approches sont :

✓ L'approche par identification [Gasso et al, 1999] et [Gasso, 2000] : les mesures acquises sur les entrées et les sorties du système permettent l'identification des paramètres des modèles locaux autour des différents points de fonctionnement préalablement définis. Dans ce cas, le problème d'identification du modèle non linéaire se réduit à l'identification des modèles locaux (sous-modèles) LTI. Notons que, cette méthode est souvent utilisée dans le cas des systèmes dotés d'une dynamique difficile à décrire à l'aide d'un modèle analytique.

✓ L'approche par linéarisation [Ma, 1998] et [Tanaka et Wang, 2001] : le principe de cette méthode consiste à linéariser le système non linéaire autour d'un ensemble fini de points de fonctionnement judicieusement choisis, conduisant à un nombre défini de modèles LTI. L'obtention d'une représentation TS dans ce cas, est réalisée par l'interconnexion de ces modèles LTI à l'aide des fonctions d'appartenance non linéaires judicieusement choisies (gaussiennes, triangulaires, trapézoïdales, etc).

✓ L'approche par secteur non linéaire : cette méthode a été initiée par Kawamoto [Kawamo et al, 1992] et étendue par ([Tanaka et Wang, 2001], [Morère, 2001] et [Wang et al, 1996]). Le principe de celle-ci est basé sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires d'un système dynamique. Autrement dit, cette méthode consiste à trouver un secteur tel que  $a_1x \leq f(x(t), u(t)) \leq a_2x$  avec  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  représente un système non linéaire. Cette méthode garantit la construction d'un multi-modèle TS représentant exactement un modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état.

Dans notre thèse, nous nous intéressons à la troisième méthode, puisqu'elle présente des avantages du point de vue précision et connaissance des fonctions d'appartenance assurant l'interconnexion des modèles locaux LTI. En effet, l'approche par secteur non linéaire par rapport à l'approche par linéarisation permet, d'une part, de minimiser l'erreur lors du passage du modèle analytique non linéaire au multi-modèle TS, d'autre part d'optimiser le nombre de modèles locaux. Il convient de souligner qu'il peut s'avérer difficile de trouver un secteur global pour un système non linéaire quelconque. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer un secteur non linéaire local. Les figures (Fig. 2.5 et Fig. 2.6) représentent respectivement les secteurs non linéaires, global et local [Bouarar, 2009].

Notons que l'approche par secteur non linéaire permet d'associer une infinité de modèles TS pour un système non linéaire suivant le découpage des non-linéarités réalisé. Une approche systématique

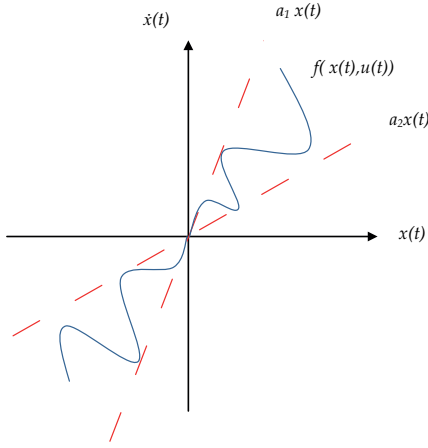


Fig. 2.5 – Secteur non linéaire global

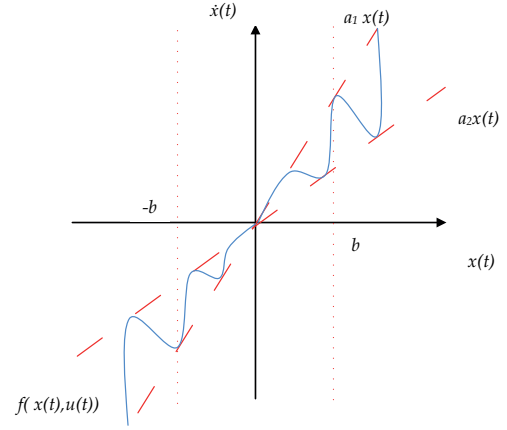


Fig. 2.6 – Secteur non linéaire local

de découpage en secteurs non linéaires repose sur le lemme suivant [Morère, 2001] :

**Lemme 2.1 : Transformation convexe polytopique (TPC)**[Tanaka et Wang, 2001]

soit  $z_j(x(t), u(t))$  une fonction continue bornée sur le domaine  $D \subset \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$  à valeurs dans  $\mathfrak{R}$ , avec  $x(t) \in \mathfrak{R}^n, u(t) \in \mathfrak{R}^m$ .

Ensuite, il existe deux fonctions

$$(k = 1, 2)$$

$$F_{j,k} : D \mapsto [0, 1]$$

$$(x(t), u(t)) \mapsto F_{j,k}(x(t), u(t))$$

avec

$$F_{j,1}(x(t), u(t)) + F_{j,2}(x(t), u(t)) = 1$$

tel que

$$z_j(x(t), u(t)) = F_{j,1}(x(t), u(t))z_{j,1} + F_{j,2}(x(t), u(t))z_{j,2}$$

Pour tous  $z_{j,1} \geq \max_{x,u \in D} \{z_j(x, u)\}$  et  $z_{j,2} \leq \min_{x,u \in D} \{z_j(x, u)\}$ . Les fonctions  $F_{j,1}$  et  $F_{j,2}$  sont définies par :

$$F_{j,1}(x(t), u(t)) = \frac{z_j(x(t), u(t)) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}}$$

$$F_{j,2}(x(t), u(t)) = \frac{z_{j,1} - z_j(x(t), u(t))}{z_{j,1} - z_{j,2}}$$

où,  $z_{j,1} = \max_{x,u} \{z_j(x, u)\}, z_{j,2} = \min_{x,u} \{z_j(x, u)\}$

### 2.3.3 Forme Quasi-Linéaire à Paramètres Variables (Quasi-LPV)

La première étape consiste à transformer le modèle non linéaire sous forme d'état initial (Eq. 2.2) en un modèle Quasi-Linéaire à Paramètres Variables dit Quasi-LPV. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, u)x + B(x, u)u, \\ y = C(x, u)x + D(x, u)u, \end{cases} \quad (2.18)$$

La forme Quasi-LPV est légèrement différente de la forme classique Linéaire à Paramètres Variables (LPV). En effet, dans la forme classique LPV, l'état du système  $x$  et la sortie du système  $y$  varient en fonction du temps.

Alors que dans la forme Quasi-LPV, les matrices du système  $(A(x, u), B(x, u), C(x, u), D(x, u))$  sont à paramètres variables et dépendent des variables d'état  $x$  et d'entrée  $u$ , comme présenté dans [Huang et Jadbabaie, 1999].

En général, la représentation Quasi-LPV (Eq. 2.17) pour un système non-linéaire de la forme (Eq. 2.2) n'est pas unique. À chaque représentation Quasi-LPV correspond un ensemble particulier de variables de prémisses et choisir une représentation Quasi-LPV est équivalent à choisir un ensemble de variables de prémisses. Le choix de l'ensemble des variables de prémisses est important, car il influe sur le nombre de sous-modèles et sur la structure du modèle global. Ce degré de liberté sera utilisé pour faciliter les études de contrôlabilité, d'observabilité, d'analyse de stabilité ([Huang et Jadbabaie, 1999], [Nagy, 2010]).

Pour assurer l'observabilité/contrôlabilité du système global, représenté sous une forme multi-modèle, et par conséquent pour assurer l'existence d'une solution aux LMI associées aux multi-modèles en utilisant la méthode de Lyapunov, l'observabilité/contrôlabilité de chaque sous-modèle est nécessaire [Guerra et al, 2009].

Ainsi, les formes Quasi-LPV qui produisent des sous-modèles ne possédant pas ces propriétés ne sont pas à retenir. Il faut remarquer que ceci ne constitue pas une condition suffisante pour assurer l'observabilité/contrôlabilité du multi-modèle [Murphey et Burdick, 2002].

Comme signalé précédemment, les conditions de stabilité des observateurs sont données en termes de LMI. Différentes techniques ont été proposées pour réduire le nombre des conditions LMI, ce qui réduit le volume de calcul [Tanaka et al, 2007] et peut faciliter l'existence d'une solution [Bergsten et al., 2001]. Comme le nombre des LMI à satisfaire est linéaire [Tanaka et Wang, 2001], un multi-modèle composé d'un nombre minimal de sous-modèles doit être choisi. Ce nombre est lié au nombre de variables de prémisses, il sera donc préféré une forme Quasi-LPV qui associe un ensemble minimal de variables de prémisses. De plus, la complexité des conditions LMI augmente avec

le nombre de variables d'état impliquées dans les variables de prémisse. En conséquence, pour assurer l'existence d'une solution, un multi-modèle avec des variables de prémisse dépendant d'un nombre minimal de variables d'état est préférable [Bergsten et Palm, 2000]. Pour augmenter la probabilité d'existence d'une solution, le nombre de variables d'état intervenant dans ces variables de prémisse doit être le plus petit possible [Bergsten et al., 2001]. Tenant compte des remarques précédentes, les règles suivantes, issues d'une recherche de structure la plus simple possible, peuvent guider le choix :

- Éliminer toutes les formes Quasi-LPV qui sont caractérisées par des matrices  $B$  ayant des colonnes nulles et des matrices  $C$  ayant des lignes nulles, car ces matrices ne respectent pas les conditions de rang d'observabilité/de contrôlabilité. A contrario, retenir toutes les formes Quasi-LPV ayant des matrices qui satisfont les conditions :

$$\text{rang}(O_i) = \text{rang} \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2.19)$$

- Identifier les décompositions contenant des variables de prémisse communes aux différentes équations de l'état et/ou de sortie, dans (Eq. 2.17), de façon à réduire ainsi le nombre de variables de prémisse.
- Parmi les décompositions Quasi-LPV pour lesquelles les variables de prémisse  $z_j(\rho(x, u)) (j = 1, \dots, p)$  dépendent du même nombre de variables d'état, choisir la décomposition Quasi-LPV qui contient le nombre minimal de variables de prémisse.
- Parmi les décompositions Quasi-LPV qui ont le même nombre de variables de prémisse  $z_j(\rho(x, u)) (j = 1, \dots, p)$ , choisir la décomposition Quasi-LPV pour laquelle les variables de prémisse  $z_j(\rho(x, u))$  dépendent du nombre minimal de variables d'état.

### 2.3.4 Limites de la méthodologie proposée

Cette méthode de passage d'un système non linéaire vers un multi-modèle a des limites dues aux différentes hypothèses de travail utilisées. Cette limitation est discutée plus en détail [Nagy, 2010].

- Méconnaissance des bornes des variables de prémisse : la transformation polytopique convexe, présentée avec le lemme 2.1, assure les propriétés de convexité des fonctions de pondération de la structure multi-modèle, mais soulève la question de l'existence et du calcul des bornes supérieures et inférieures des non-linéarités. Néanmoins, la connaissance précise de ces bornes

n'est pas toujours possible, car souvent les non-linéarités, dont dépendent les variables de prémisses sont fonction de variables inconnues à priori, comme les variables d'état, qui ne sont pas directement mesurées. Le calcul des maxima et des minima de ces non-linéarités n'est donc pas directement réalisable.

- Non respect de la propriété de localité des sous-modèles : un autre inconvénient de la méthode proposée pour obtenir la forme multi-modèle concerne l'interprétation physique du multi-modèle. Cet inconvénient est que chaque sous-modèle perd son sens local (comme dans le cas d'un multi-modèle obtenu par linéarisation autour des points de fonctionnement).

### 2.3.5 Stabilité des multi-modèles Takagi Sugeno (TS)

La structure particulière des multi-modèles TS, combinant un ensemble de modèles linéaires interconnectés par une fonction non linéaire a permis l'extension de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires. En effet, l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires représentés par le multi-modèle TS (Eq. 2.17) va se résumer à l'étude de stabilité des systèmes linéaires qui est généralement basé sur la théorie de Lyapunov [Lyapunov, 1907]. Le principe de cette dernière est inspiré d'une réalité physique. En effet, si l'énergie d'un système est continûment dissipée, au final le système va atteindre un point d'équilibre. Dans la suite, sans perte de généralité, on suppose que le point d'équilibre est l'origine. L'étude de la stabilité d'un modèle TS autonome ( $u(t) = 0$ ) (Eq. 2.17) permet d'établir si sa dynamique est intrinsèquement stable lorsqu'il n'est soumis à aucune excitation externe. Les résultats de nombreux travaux sur la stabilité des modèles TS sont donnés sous forme LMI [Boyd, 1994]. La stabilité des multi-modèles TS décrits en temps continu est donnée par le **Théorème 2.1** :

**Théorème 2.1 [Tanaka et Sugeno, 1992]** : Le multi-modèle TS continu autonome ( $u(t) = 0$ ) (Eq. 2.16) (respectivement (Eq. 2.17) dans le cas discret) est quadratiquement stable s'il existe une matrice  $P \in R^{n \times n}$  symétrique et définie positive, telle que les LMI suivantes sont vérifiées pour  $i = 1, \dots, r$  :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (\text{cas continu})$$

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (\text{cas discret})$$

**Preuve** : (cas continu) En considérant la fonction candidate quadratique de Lyapunov  $V(x(t))$  où  $P = P^T$ . L'utilisation de la propriété de somme convexe des fonctions de Lyapunov permet l'obtention de  $r$  conditions, à résoudre simultanément, formulées en termes de LMI's :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \quad (2.20)$$

Le multi-modèle TS autonome ( $u(t) = 0$ ) (Eq. 2.16) est stable si :

$$V(x(t)) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0 \quad (2.21)$$

C'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i^T P + PA_i) \right) x(t) < 0 \quad (2.22)$$

Pour que cette dernière condition soit vérifiée, il suffit que les conditions suffisantes du **Théorème 2.1** soit vérifiées.

**NB :** Il est à noter que la stabilité des sous modèles linéaires ne garantit pas la stabilité de l'interpolation des sous-modèles.

Les conditions de stabilité pour le **Théorème 2.1** sont assez conservatrices car il est difficile de trouver une matrice commune  $P$  satisfaisant simultanément les  $r$  LMI's.

[**Tanaka et al, 1998**] ont montré que si le nombre  $r$  de sous-modèles est important, il est difficile de trouver une matrice commune  $P$  satisfaisant simultanément les  $r$  LMI's. Les travaux qui ont suivi ont porté sur le relâchement des conditions de stabilité proposées dans le **Théorème 2.1** et ont proposé de chercher des matrices  $P_i$  au lieu d'une seule matrice commune  $P$  [**Tanaka et al, 2003**] et [**Chadli, 2002**]. Plusieurs approches ont été étudiées et on peut en particulier citer l'utilisation de fonctions de Lyapunov polyquadratiques de la forme :

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) P_i x(t) \quad (2.23)$$

Une fonction de Lyapunov non quadratique a été introduite dans [**Boyd, 1994**], basée sur une fonction continue par morceaux. Elle est définie par :

$$V(x(t)) = \max \{V_1(x(t)), V_2(x(t)), \dots, V_r(x(t))\} \quad (2.24)$$

où

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), \quad P_i = P_i^T > 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.25)$$

Les conditions de stabilité issues de ce type de fonctions de Lyapunov sont données par :

**Théorème 2.2 [Johansen, 1998]** : Le système (Eq. 2.17) est stable, s'il existe des matrices  $P_j = P_j^T > 0$  et des scalaires  $\tau_{ijk} > 0$  tels que :

$$\begin{cases} A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^r \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0 \text{ (cas continu)} \\ P_j > 0 \\ \tau_{ijk} > 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Ce dernier type de fonction fournit des conditions de stabilité exprimées en terme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (**BMI**) qui sont en général plus difficiles à résoudre que les LMI.

**NB** : Dans le cas où le système est instable, il s'avère nécessaire de synthétiser une loi de commande floue stabilisante pour pouvoir ramener le système vers le point d'équilibre. Plusieurs lois de commande floues ont été proposées dans la littérature. Les plus répandues se basent sur des lois de commande de type Compensation Parallèle Distribuée (PDC) [Wang et al, 1996], [Tanaka et al, 1998]. La stabilisation par retour d'état ou par retour de sortie à également été abordée dans ([Guerra et al, 2006], [Chadli, 2002], [Tanaka et Wang, 2001], [Yoneyama, 2008], [Tanaka et al, 2003]).

Noter que dans les problèmes de stabilisation, le fait d'avoir des variables de décision non mesurables impose l'utilisation d'un observateur afin d'estimer l'état. Le problème devient alors un problème de stabilité d'un système incertain où les incertitudes sont dues à la non mesurabilité des variables de décision. Dans la majorité des travaux traités, l'entrée  $u(t)$  est remplacée par la loi de commande utilisée. L'entrée n'apparaît donc pas dans les équations, de ce fait des conditions sur  $u(t)$  ne sont pas nécessaires.

# Chapitre 3

## La Commande Prédicative basée Modèle (MPC)

### Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>3.2 Principes généraux et fondements</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>3.3 Commande Prédicative Généralisée basée sur les multi-modèles (TS-GPC)</b> . . . . .	<b>43</b>
3.3.1 MIMO GPC Locale . . . . .	43
<b>3.4 Commande Prédicative à Matrice Dynamique basée sur les multi-modèles (TS-DMC)</b> . . . . .	<b>47</b>
3.4.1 MIMO DMC Locale . . . . .	47
<b>3.5 Commande TS-MPC basée sur les multi-modèles (TS)</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>3.6 Commande Adaptative basée sur les multi-modèles (TS-AMPC)</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>3.7 La commande classique PID</b> . . . . .	<b>53</b>
3.7.1 PID Digital . . . . .	54

---

« *La pensée fait la grandeur de l'homme* » **Blaise Pascal**

## 3.1 Introduction

Les dernière décades ont vu une évolution considérable en terme de développement des systèmes de commande prédictive, ceci est dû aux résultats excellents qui ont été atteints pour la commande des processus complexes. Avec plus de 2000 applications industrielles dans le monde, les algorithmes MPC sont les plus largement implémentés dans le monde [Thomas et al, 2003].

La commande MPC, également appelée commande à horizon glissant ou fuyant, en référence à la manière dont la fenêtre de temps considérée pour les calculs est décalée à chaque itération, est une technique de commande basée sur la notion de prédiction du comportement de la dynamique des systèmes [Khadir, 2002].

La commande MPC adopte une philosophie différente de celle employée dans les systèmes de commande classique, et qui se résume en l'utilisation d'un modèle interne (ou embarqué dans le système de commande) sous différentes formes mathématiques (matrice de transfert, représentation d'état, réponse indicielle finie, modèle boîte noire, réseaux de neurones, etc). Ce modèle joue un rôle déterminant car c'est la partie du contrôleur qui représente l'image du système commandé, le modèle doit donc faire l'objet d'une attention particulière lors de la conception d'un système de commande. Généralement, la nomenclature des contrôleurs prédictifs est issue du nom de l'approche ou l'algorithme utilisé dans l'élaboration de la loi de commande. Il y a trois principaux points qui ont fait que les algorithmes de commande prédictive soient les plus utilisés et les plus intéressants dans le monde industriel :

- Conception facile et simple pour les systèmes multi-variables.
- Les modifications ou approximations en cas de systèmes à phase non minimale, ne sont plus nécessaires.
- Prise en charge directe des contraintes sur les entrées/sorties, utilisant la technique de programmation quadratique.

## 3.2 Principes généraux et fondements

Tous les algorithmes de commande prédictive optimisent, à l'aide d'une fonction coût et en temps réel, le calcul et la génération des valeurs de la loi de commande, en se basant sur les mesures fournies par le feedback (mesures processus) et les sorties du modèle interne. Le scénario adopté dans les algorithmes de commande prédictive se résume en trois étapes comme suit :

1. Utilisation explicite du modèle interne pour prédire les sorties futures sur un horizon de prédiction défini.

2. Calcul de la loi de commande sur un autre horizon temporel, dit horizon de commande, en optimisant une fonction coût formulée à partir des variables du système. Certains algorithmes minimisent l'écart entre le comportement futur du système et une trajectoire de référence définie au préalable, tel est le cas de l'algorithme PFC.
3. La stratégie d'horizon fuyant est employée dans cette étape, c'est-à-dire qu'à chaque instant  $t = kT_s$  (où  $T_s$  est la période d'échantillonnage du processus) l'horizon de prédiction est décalé d'un pas vers le futur, ce qui implique que seule la première valeur du vecteur de la loi de commande est appliquée pour commander le processus. Toute cette séquence de calcul est répétée à chaque instant discret.

Il existe différentes approches et algorithmes de commande prédictive, à savoir :

- ✓ Commande prédictive fonctionnelle PFC (Predictive Functional Control).
- ✓ Commande prédictive généralisée GPC (Generalized Predictive Control).
- ✓ Commande Prédictive à matrice dynamique DMC (Dynamic Matrix Control).

### 3.3 Commande Prédictive Généralisée basée sur les multi-modèles (TS-GPC)

La formulation TS-GPC peut être obtenue sur la base de l'algorithme original GPC ([Clarke et al, 1987], [Jianjun et al]) utilisant comme modèle de prédiction interne la formulation TS obtenue pour notre système ASM1 réduit. Dans ce qui suit, l'algorithme GPC MIMO initial est décrit et appliqué à chaque sous-modèle en première étape.

Des modifications de la loi de contrôle globale sont nécessaires pour utiliser le modèle complet TS (une agrégation non linéaire des  $r$  sous modèles) et sont présentées comme deuxième étape dans la section 3.5.

#### 3.3.1 MIMO GPC Locale

Dans cette section, les étapes de formulation de la commande prédictive généralisée dans le cas multivariable sont décrites, en utilisant une représentation dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) = C_i x(k) + D_i u(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ .  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  sont des matrices de dimensions

respectives  $(n \times n)$ ,  $(n \times s)$ ,  $(r \times n)$ , et  $(s \times r)$ . La loi de commande GPC MIMO est calculée de façon à minimiser la fonction coût exprimée par :

$$J(N_1, N_2, N_c, \lambda) = \sum_{j=N_1}^{N_2} (y(k+j) - w(k+j))^T (y(k+j) - w(k+j)) + \sum_{j=1}^{N_c} \lambda (\Delta u(k+j-1))^T \Delta u(k+j-1) \quad (3.2)$$

où  $y$  est le vecteur des sorties prédites de dimension  $r$ ,  $w$  est le vecteur des signaux de référence de dimension  $s$ , et  $\Delta u$  est le vecteur des incréments de commande, de dimension  $s$ . La section suivante développe les détails de formulation de la loi de commande optimale minimisant la fonction coût (Eq. 3.2).

### Sorties prédites

Considérons le système MIMO défini par (Eq. 3.1). Le calcul des grandeurs de sorties futures  $y(k+j)$  ( $j = N_1 \dots N_2$ ) se fait en se basant sur les informations disponibles à partir de l'instant  $k$  en adoptant une approche récursive, ce qui donne :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i \Delta u(k) \\ x(k+2) &= A_i x(k+1) + B_i \Delta u(k+1) \\ &= A_i^2 x(k) + A_i B_i \Delta u(k) + A_i B_i \Delta u(k+1) \\ &\vdots \\ x(k+j) &= A_i^j x(k) + \sum_{p=0}^{j-1} A_i^{j-p-1} B_i \Delta u(k+p) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donc le vecteur des sorties à l'instant  $k+j$  est :

$$y_i(k+j) = C A_i^j x(k) + \sum_{p=0}^{j-1} C A_i^{j-p-1} B_i \Delta u(k+p) \quad (3.4)$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$y_i(k+j) = [C A_i^{j-1} B_i \quad C A_i^{j-2} B_i \dots C A_i B_i \quad C B_i]$$

$$\begin{pmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+j-2) \\ \Delta u(k+j-1) \end{pmatrix} + CA_i^j x(k) \quad (3.5)$$

où

$$y = \begin{bmatrix} y_1(k+N_1) \\ \vdots \\ y_r(k+N_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_1(k+N_2) \\ \vdots \\ y_r(k+N_2) \end{bmatrix}_{(N_2-N_1+1)r \times 1} \quad (3.6)$$

et

$$\Delta u_i = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \vdots \\ \Delta u_s(k) \\ \Delta u_1(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u_s(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta u_1(k+Nu-1) \\ \vdots \\ \Delta u_s(k+Nu-1) \end{bmatrix}_{(N_c s \times 1)} \quad (3.7)$$

Une représentation plus compacte de la sortie prédite est donnée par :

$$y_i = G_i \Delta u + f_i \quad (3.8)$$

Les matrices  $G$  et  $f$  sont les mêmes que celles calculées avec la technique utilisant les équations diophantiennes, nous avons donc :

$$G_i = \begin{bmatrix} CA_i^{N_1-1}B_i & CA_i^{N_1-2}B_i & CA_i^{N_1-3}B_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ CA_i^{N_2-1}B_i & CA_i^{N_2-2}B_i & CA_i^{N_2-3}B_i & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N_c s \times 1)} \quad (3.9)$$

$$f = \begin{bmatrix} CA^{N_1} \\ \vdots \\ CA^{N_2} \end{bmatrix} x(k) \quad (3.10)$$

### Formulation de la loi de commande GPC MIMO

La fonction coût (Eq. 3.2) peut être écrite dans une forme plus compacte, en substituant la sortie prédite par son expression :

$$\begin{aligned} J(N_1, N_2, N_c, \lambda) &= (y - w)^T (y - w) + \lambda \Delta u^T \lambda \Delta u \\ &= (G \Delta u + w - w)^T (G \Delta u + w - w)^T \\ &\quad + \lambda \Delta u^T \lambda \Delta u \end{aligned} \quad (3.11)$$

En simplifiant l'équation ci-dessus, on aura :

$$J = \frac{1}{2} \Delta u^T H \Delta u + 2[(f - w)^T G] + f_0 \quad (3.12)$$

où  $H = 2[G^T G + \lambda I]$ ,  $f_0 = (y - w)^T (y - w)$

La solution optimale est obtenue telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Delta u} &= 0 \\ \Delta u &= -2H^{-1}G^T(f - w) \\ &= [G^T G + \lambda I]^{-1}G^T(w - f) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Enfin, les valeurs actuelles du signal de commande appliquées au processus, sont les  $s$  premiers éléments du vecteur solution obtenu.

Généralement, la plus part des systèmes d'équations différentielles sont donnés par  $u$  et non pas  $\Delta u$  (le cas de notre système). La loi de contrôle MIMO GPC développée dans (Eq. 3.13) est basée sur le système ayant une entrée  $\Delta u$ . Le modèle doit être transformé en conséquence afin d'utiliser l'équation de contrôle GPC pour calculer la sortie (voir Annexe A).

La variable de contrôle  $u$  est alors calculée comme suit :  $u(k+1) = u(k) + \Delta u(k+1)$ , les limites des contraintes sur  $u$  sont appliquées à chaque temps d'échantillonnage .

### 3.4 Commande Prédictive à Matrice Dynamique basée sur les multi-modèles (TS-DMC)

La formulation TS-DMC peut être obtenue sur la base de l'algorithme original DMC [Cutler et Ramaker, 1979], utilisant comme modèle de prédiction interne la formulation TS obtenue pour notre système ASM1 réduit. Comme pour le cas de la loi de commande GPC MIMO, l'algorithme DMC MIMO initial est décrit et appliqué à chaque sous-modèle en première étape et la loi de contrôle globale utilisant le modèle complet TS sera présentée comme deuxième étape dans la section 3.5.

#### 3.4.1 MIMO DMC Locale

Dans cette section, les étapes de formulation de la loi de commande DMC sont présentées pour le cas des systèmes MIMO, La dynamique du système sera représentée en utilisant les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) = C_i x(k) + D_i u(k) \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $x$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  sont des matrices de dimensions  $(n \times n)$ ,  $(n \times s)$ ,  $(r \times n)$ , et  $(s \times r)$  respectivement.

DMC a été développé par Cutler et Ramaker en 1980 pour la compagnie pétrolière Shell ([Cutler et Ramaker, 1979]). Le premier algorithme était développé pour la commande de processus à modèles internes linéaires, formulé à partir d'une réponse indicielle tronquée de type FSR

(Finite Step Response) d'une longueur de  $M$  échantillons. La formulation d'une loi de commande pour un processus multivariable ayant  $s$  entrées et  $r$  sorties est exprimée de la manière suivante :

$$y(k+1) = y_0 + \sum_{i=1}^M a_i \Delta u(k-i+1) + d(k+1) \quad (3.15)$$

où  $y(k)$  est le vecteur contenant les  $s$  sorties,  $a_i$  est une matrice de dimension  $(s \times r)$  contenant les coefficients de la réponse indicielle finie à l'instant  $i$  et  $M$  est le l'horizon temporel (en nombre d'échantillons) choisi de telle sorte que les sorties du système atteignent le régime permanent.  $\Delta u(k)$  est le vecteur contenant les valeurs des variables manipulées,  $y_0$  est le vecteur des valeurs initiales des sorties du processus,  $d(k)$  est le vecteur des perturbations et d'autres effets non modélisables. Partant de l'instant actuel  $k$ , la prédiction des sorties  $y$  sur l'horizon de prédiction temporel  $N_h$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} y_j(k+l|k) = & y_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^s \sum_{i=1}^l a_{ij}^n \Delta u_n(k+l-i|k)}_{\text{commandes futures}} + \\ & \underbrace{\sum_{n=1}^s \sum_{i=l+1}^M a_{ij}^n \Delta u_n(k+l-i|k)}_{\text{commandes passées}} + \underbrace{d_j(k+l|k)}_{\text{perturbations prédites}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ou bien, pour simplifier :

$$y_j^*(k+l|k) = y_0 + \sum_{n=1}^s \sum_{i=l+1}^M a_{ij}^n \Delta u_n(k+l-i|k)$$

Terme qui contient les effets des commandes passées.

Donc :

$$\begin{aligned} y_j(k+l|k) = & y_0 + \sum_{n=1}^s \sum_{i=1}^l a_{ij}^n \Delta u_n(k+l-i|k) + y_j^*(k+l|k) \\ & + d_j(k+l|k) \end{aligned}$$

Les sorties  $y(k+l)$ , Eq. 3.16, peuvent être représentées sous la forme matricielle suivante, telle que  $l = \overline{1, N_h}$ , et la dimension du vecteur des variables manipulées  $\Delta u$  est  $r \times N_c$ .

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_h|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}^*(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}^*(k+N_h|k) \end{bmatrix} + \underline{A} \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d(k+1|k) \\ \vdots \\ d(k+N_h|k) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Avec  $\underline{A}$  est la matrice dynamique multivariable :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

où chaque élément  $A_{ij}$  est lui même une matrice, telle que :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_2 & \ddots & \vdots \\ a_{N_c} & a_{N_c-1} & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_M & a_{M-1} & \cdots & a_{M-N_c+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_M & a_M & a_M & a_M \end{pmatrix}$$

Notons toutefois que seules les  $N_c$  premières valeurs sont calculées pour chaque sortie.

### Calcul de la loi de commande DMC MIMO

A partir de Eq. 3.15, pour  $(k > k-1|k)$ , et de Eq. 3.16, on obtient :

$$y(k) = y^*(k) - d(k) \quad (3.18)$$

$d(k)$  peut être alors estimé en utilisant les valeurs mesurées de  $y_m(k)$  et le résultat des variables de commande passées. En l'absence d'informations complémentaires sur les valeurs futures de  $d(k)$ , la perturbation prédite est assumée égale à la perturbation présente  $d(k)$ .

$$d(k+l\backslash k) = d(k\backslash k) = y_m(k) - y^*(k\backslash k) \quad l = \overline{1, N_h} \quad (3.19)$$

Les valeurs des sorties prédites futures, sont formulées sous forme vectorielle, à partir de Eq. 3.17 comme suit :

$$\widehat{Y} = \underline{A}\Delta u + \widehat{Y}^* \quad (3.20)$$

Avec

$$\widehat{Y} = \begin{bmatrix} \widehat{y}(k+1\backslash k) \\ \vdots \\ \widehat{y}(k+N_h\backslash k) \end{bmatrix} = e(k+1) \quad (3.21)$$

où  $N_c$  est l'horizon de commande.

Le but de toute commande prédictive est de trouver la séquence des  $N_c$  variables de commande futures  $\Delta u$ , qui minimise la somme des erreurs quadratiques entre  $y(k+l\backslash k)$  et la consigne  $y_w$ . Ceci est exprimé par la fonction coût :

$$J = \sum_{j=1}^{N_h} (\widehat{y}^*(k+j\backslash k) - y_w(k+j))^2 \quad (3.22)$$

Si on pose :

$$\begin{bmatrix} y_w(k+1) - \widehat{y}^*(k+1\backslash k) - d(k\backslash k) \\ \vdots \\ y_w(k+N_h) - \widehat{y}^*(k+N_h\backslash k) - d(k\backslash k) \end{bmatrix} = e(k+1) \quad (3.23)$$

où,  $e(k+1)$  est un vecteur de dimension  $N_h$ , donnant les déviations par rapport à la consigne, et en remplaçant Eq. 3.20 dans Eq. 3.22 on obtient :

$$J = \underline{A}^T \underline{A} \Delta u^2 + e(k+1)^2 + 2\underline{A}e(k+1)\Delta u \quad (3.24)$$

La minimisation de  $J$  par rapport à  $\Delta u$  donne :

$$\frac{\partial J}{\Delta u} = 2\underline{A}^T \underline{A} \Delta u + 2\underline{A} e(k+1) \quad (3.25)$$

La solution optimale est donnée par :

$$\frac{\partial J}{\Delta u} = 0 \quad (3.26)$$

D'où la solution analytique finale :

$$\Delta u = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T e(k+1) \quad (3.27)$$

DMC utilise que la première valeur de la séquence  $\Delta u$  calculée., c.à.d.,  $\Delta u(k)$ .

### 3.5 Commande TS-MPC basée sur les multi-modèles (TS)

Dans cette section, une configuration parallèle de commande (montrée dans Fig. 3.1) est utilisée pour mettre en œuvre le contrôleur prédictif multi-modèle (TS-MPC). Dans la section (3.3.1/3.4.1), le contrôleur local stable (contrôleur  $i$ ) est conçu pour chaque modèle  $(A_i, B_i)$ , puis le contrôleur global peut être mis en œuvre par l'intégration pondérée de tous les contrôleurs locaux. Autrement dit, pour chaque vecteur de régression  $x(k)$ , la loi de contrôle global est donné par :

$$\Delta u(k) = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i \Delta u_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (3.28)$$

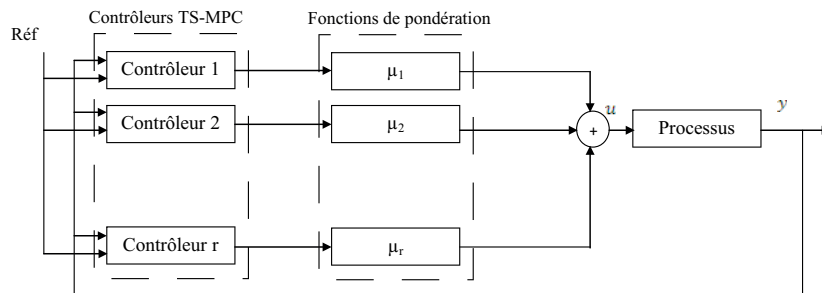


Fig. 3.1 – Intégration pondérée des contrôleurs locaux MPC basée sur le multi-modèle TS (TS-MPC)

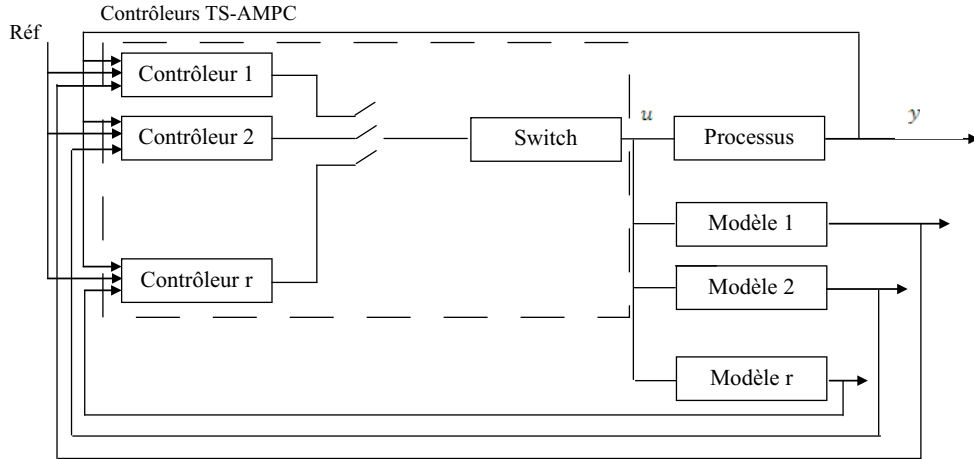


Fig. 3.2 – Switching entre Commande Adaptative AMPC basé sur le multi-modèle TS (TS-AMPC)

### 3.6 Commande Adaptative basée sur les multi-modèles (TS-AMPC)

La commande prédictive adaptative basée sur le multi-modèle TS (TS-AMPC) est le résultat d'une commutation d'adaptation des modèles TS locaux. Par conséquent, un modèle local  $i^{th}$  unique est utilisé pour décrire le système global et l'état de la loi de commande résultante.

Fig. 3.2. montre le schéma de commutation utilisé dans l'approche TS-AMPC, sur la base de la plus grande valeur des fonctions de pondération  $\mu_i$ . A l'instant,  $k$ , les fonctions de pondération  $\mu_i$  associées aux  $r$  sous-modèles sont calculées et la plus grande valeur de  $\mu_i$  est trouvée. Concluant que  $\mu_i$  à l'instant,  $k$ , est le poids du modèle sélectionné  $i$  et, par conséquent, utiliser celui-ci pour prédire la sortie de processus et calculer la valeur optimale de l'incrément de commande  $\Delta u(k)$ .

En utilisant un seul sous-modèle à la fois, pour le calcul de la loi de commande, nous allons induire une perte d'information, comme le modèle global est la somme de tous les sous-modèles, où chaque sous-modèle, représente mieux le système global dans un domaine d'état entrée/sortie spécifique. Néanmoins, le reste des modèles, représentent des informations supplémentaires nécessaires pour mieux aborder le comportement du modèle global non linéaire et seront perdues pendant le processus de commutation.

Contrairement à l'approche de commande TS-MPC qui utilise une combinaison des  $r$  sous incréments de commande où chaque sous-modèle sera calculé par l'incrément de commande approprié. La commande TS-AMPC utilise à chaque instant  $k$  de l'incrément de commande  $i$ , un sous modèle unique sélectionné afin de calculer la loi de commande associée.

### 3.7 La commande classique PID

Comptant des milliers d'applications avec succès, une structure simple et facile à l'implémentation et un réglage relativement facile, le PID reste l'approche de contrôle la plus utilisée au monde, couvrant 60% des procédés industriels. Bien sûr comme toute autre commande, il présente des inconvénients qu'on citera plus tard.

Le PID est une approche de commande de type « boucle de retour arrière » (feedback) et se place dans le mécanisme de commande comme le montre la Fig. 3.3.

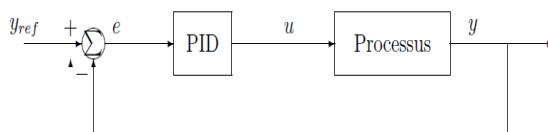


Fig. 3.3 – Approche de commande de type PID

La forme mathématique et la représentation idéale du contrôleur PID sont données par l'équation suivante :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i} s + T_d s \right) \quad (3.29)$$

où  $K_p$  le gain proportionnel,  $T_i$  et  $T_d$  sont respectivement les constantes de temps intégrale et dérivative (voir Fig. 3.4).

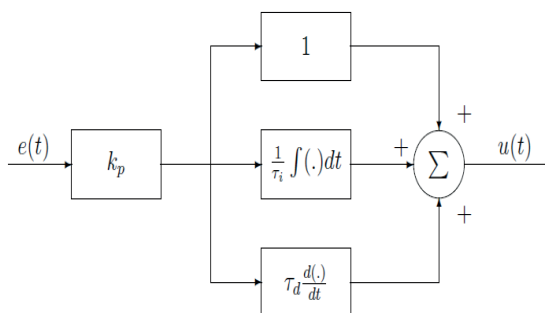


Fig. 3.4 – Contrôleur PID

## Raisonnement physique

### **Action proportionnelle (P) :**

- Donne une action corrective proportionnelle à l'erreur.
- $Kp$  est déterminé selon les critères de stabilité.

### **Action intégrale (I) :**

- Change la sortie du correcteur pour les erreurs non nulles.
- Garantie une erreur égale à zéro en régime permanent.
- Introduit une phase négative.

### **Action dérivative (D) :**

- Donne une sortie du correcteur relative à la variation de l'erreur de sortie.
- « prédit » les grands changements de l'erreur.
- Introduit une phase positive.
- Sensible au bruit.

Les variations de la commande classique sont donc les contrôleurs : P, PI, PD et PID.

### 3.7.1 PID Digital

$$\frac{de}{dt}\Big|_{t=kT} \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{T} \quad (3.30)$$

Avec :

$$\int_0^{t=kT} e(t)dt \approx \sum_{i=1}^k e(i)T \quad (3.31)$$

En remplaçant dans la fonction de transfert du PID analogique, l'équation donnée par Eq. 3.29, on obtient la variable de commande  $u(k)$  suivante :

$$u(k) = k_0 \left( e(k) + \frac{1}{\tau_i} \sum_{i=1}^k e(i)T + \tau_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T} \right) \quad (3.32)$$

En spécifiant les gains proportionnels, intégraux et dérivatifs suivants :

$$k_p = k_0, \quad k_i = \frac{k_0 T}{\tau_i}, \quad k_d = \frac{k_0 \tau_d}{T} \quad (3.33)$$

$$e(k) = y_r(k) - y(k) \quad (3.34)$$

où  $y_r$  est la référence du contrôleur

$$S(k) = S(k-1) + e(k) \quad (3.35)$$

$$u(k) = k_p \left( e_r(k) + \frac{T}{T_i} S(k) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right) \quad (3.36)$$

ou alors :

$$u(k) = k_i S(k) + (K_p + K_d)e(k) - k_d e(k-1) \quad (3.37)$$

## Chapitre 4

# Multi-modèles (TS) du ASM1 réduit et approximation des fonctions non linéaire en utilisant les RNA

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>57</b>
<b>4.2</b>	<b>Obtention d'un multi-modèle (TS) pour le modèle ASM1 réduit</b>	<b>57</b>
4.2.1	Résultats des simulations	58
<b>4.3</b>	<b>Approximation des fonctions non linéaire du multi-modèle (TS) en utilisant les Réseaux de Neurones Artificiels (RNA)</b>	<b>60</b>
4.3.1	Introduction aux modèles à base de Réseaux de Neurones Artificiels (RNA)	60
4.3.2	Perceptron Multi-Couches (MLP)	62
4.3.3	Apprentissage par rétro-propagation du gradient	63
4.3.4	Algorithme de la rétro-propagation	67
4.3.5	Construction du réseau MLP basée sur le multi-modèle (TS) du ASM1 réduit	68
<b>4.4</b>	<b>Perturbations et incertitudes</b>	<b>72</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>73</b>

---

« *Le difficile n'est pas d'apprendre ce qu'on ne sait pas, c'est d'apprendre ce qu'on sait* » **Jacques Salomé**

## 4.1 Introduction

## 4.2 Obtention d'un multi-modèle (TS) pour le modèle ASM1 réduit

L'obtention du multi-modèle (TS) pour le modèle ASM1 réduit consiste à transformer le modèle non linéaire réduit donné par les équations d'état (Eq. 1.17) en un modèle Quasi-LPV de la forme (Eq. 2.16).

Si on considère le vecteur d'entrée suivant  $u = [X_{BH}^{in}, S_S^{in}, q_a]^T$  il est naturel de définir trois non-linéarités, les variables de prémisse qui assurent les critères de la forme Quasi-LPV, sont données dans ce qui suit

$$\begin{cases} z_1(S_S, S_O) = \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \\ z_2(q_{in}, V) = \frac{q_{in}}{V}, \\ z_3(q_a) = q_a \end{cases} \quad (4.1)$$

Le nombre des sous modèles est donné par  $2^r$  où  $r$  représente le nombre des variables de prémisse, donc  $r$  est égale à 3 et nous obtenons  $2^3 = 8$  sous modèles, représentés par les paires  $(A_i, B_i)(i = 1, \dots, 8)$ , suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &= A(z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,1}) & B_1 &= B(z_{2,1}) \\ A_2 &= A(z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,2}) & B_2 &= B(z_{2,1}) \\ A_3 &= A(z_{1,1}, z_{2,2}, z_{3,1}) & B_3 &= B(z_{2,2}) \\ A_4 &= A(z_{1,1}, z_{2,2}, z_{3,2}) & B_4 &= B(z_{2,2}) \\ A_5 &= A(z_{1,2}, z_{2,1}, z_{3,1}) & B_5 &= B(z_{2,1}) \\ A_6 &= A(z_{1,2}, z_{2,1}, z_{3,2}) & B_6 &= B(z_{2,1}) \\ A_7 &= A(z_{1,2}, z_{2,2}, z_{3,1}) & B_7 &= B(z_{2,2}) \\ A_8 &= A(z_{1,2}, z_{2,2}, z_{3,2}) & B_8 &= B(z_{2,2}) \end{aligned}$$

Enfin, le système non linéaire (Eq. 1.17) sera la somme de 8 sous modèles linéaires interpolés par des fonctions non linéaires donnés par l'équation (Eq. 2.14)

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t)) \{ A_i x(t) + B_i u(t) \}}{\sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t))}, \quad (4.2)$$

Avec  $x = [X_{BH}, S_S, S_O]^T$  est le vecteur des variables d'état et  $u = [X_{BH}^{in}, S_S^{in}, q_a]^T$  est le vecteur des entrées et où les fonctions  $\mu_i(z(t))$  (Fig. 4.1) sont données par la formule (Eq. 2.14) comme suit :

$$\mu_1(z(t)) = F_{1,1}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))$$

$$\mu_2(z(t)) = F_{1,1}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))$$

$$\mu_3(z(t)) = F_{1,1}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))$$

$$\mu_4(z(t)) = F_{1,1}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))$$

$$\mu_5(z(t)) = F_{1,2}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))$$

$$\mu_6(z(t)) = F_{1,2}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))$$

$$\mu_7(z(t)) = F_{1,2}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))$$

$$\mu_8(z(t)) = F_{1,2}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))$$

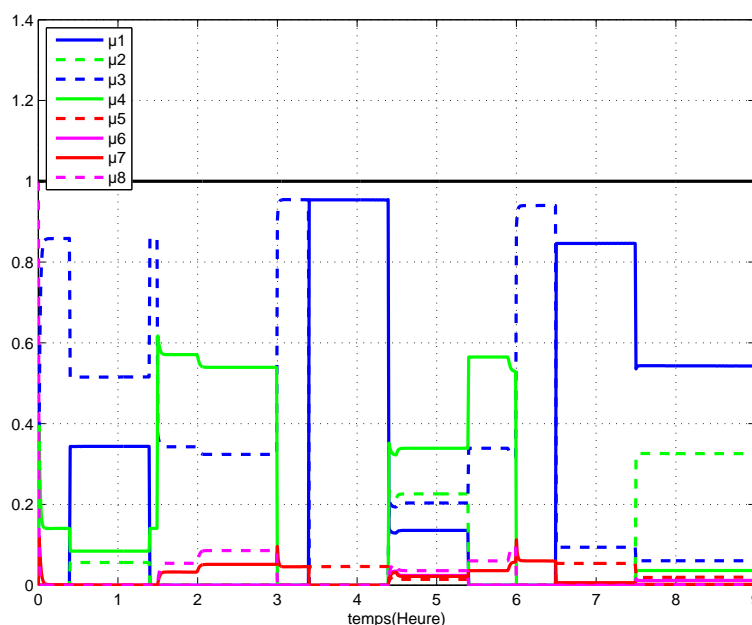


Fig. 4.1 – Evolution des fonctions d'appartenance

#### 4.2.1 Résultats des simulations

Fig. 4.3, montre l'évolution de la sortie du système donnée par les équations différentielles (Eq. 1.17) qui ont été obtenues en utilisant la formule (Eq. 2.17) à partir des entrées représentées sur

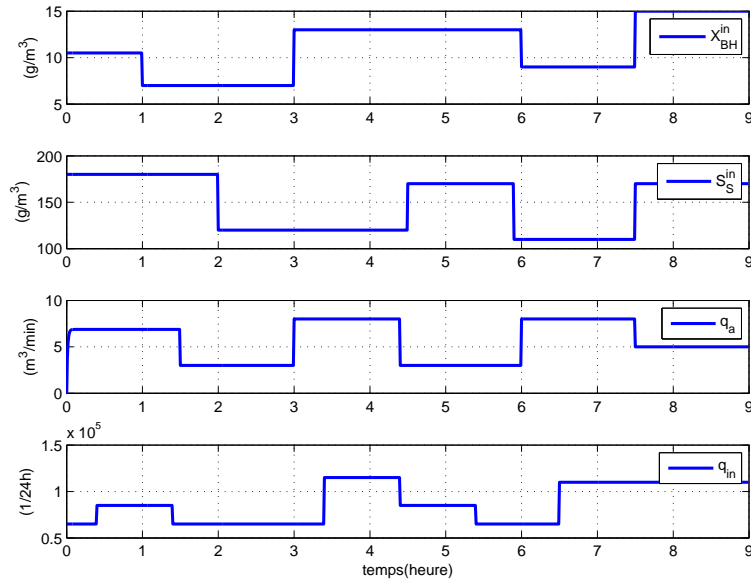


Fig. 4.2 – Entrées du système

la figure (Fig. 4.2). La validité du modèle peut facilement être conclue en raison des réponses des modèles et des processus.

Le débit d'air à l'entrée  $q_a$  influence directement la concentration en oxygène dissous  $S_O$ , une augmentation du débit d'air produit une augmentation de la concentration en oxygène et la diminution du débit d'air produit la diminution de la concentration en oxygène.

Le substrat en carbone soluble et la concentration de biomasse hétérotrophe (respectivement  $S_S$  et  $X_{BH}$ ) sont influencés par leurs concentrations d'entrée correspondantes ( $S_S^{in}$  et  $X_{BH}^{in}$ )

Le débit d'entrée  $q_{in}$  influence les trois concentrations  $X_{BH}$ ,  $S_S$  et  $S_O$ . Une augmentation du débit d'entrée  $q_{in}$  produit une augmentation de la concentration du substrat  $S_S$  et la concentration de la biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , ainsi qu'une diminution de la concentration en oxygène dissous  $S_O$ .

L'approche multi-modèle (TS) permet de modéliser avec précision le processus du réacteur à boues activées ASM1 réduit, donnant une construction de modèle basée sur une transformation non linéaire convexe polytopic appelée modèle « Quasi-LPV » donnant une MSE (Mean Square Error) égale à  $3.13 \times 10^{-7}$ . La formulation du multi-modèle (TS) peut être utilisée dans une stratégie de commande MPC en raison de la linéarité des sous systèmes.

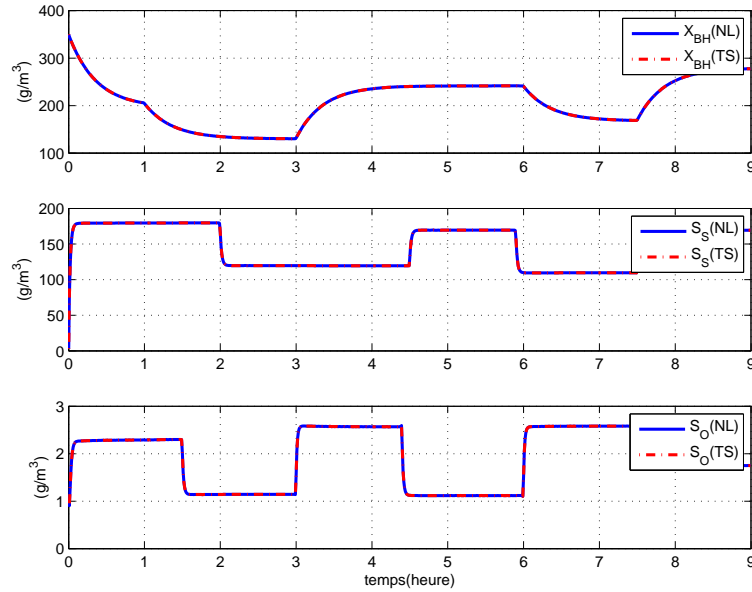


Fig. 4.3 – Sorties du système non linéaire du ASM1 réduit (b) et du multi-modèle (TS) (r-)

## 4.3 Approximation des fonctions non linéaire du multi-modèle (TS) en utilisant les Réseaux de Neurones Artificiels (RNA)

### 4.3.1 Introduction aux modèles à base de Réseaux de Neurones Artificiels (RNA)

Les réseaux de neurones sont utilisés pour résoudre des problèmes complexes et sont basés sur les travaux expérimentaux de fonctionnement du cerveau ([Hebb, 1949]) qui ont montré que les RNA peuvent réaliser des fonctions logiques et peuvent donner une explication à des phénomènes répondant à une logique de fonctionnement.

Initialement étudiés en vue de modéliser le comportement du cerveau humain, les modèles à base de réseaux de neurones sont une copie artificielle de ces modèles biologiques et sont aujourd'hui considérés comme des outils de calculs mathématiques sophistiqués utilisés dans des domaines très divers. Un modèle neuronal est constitué de plusieurs unités de calcul élémentaires (les neurones artificiels), fonctionnant en parallèle. Chaque neurone reçoit des informations (qui peuvent être les entrées du modèle ou les sorties d'autres neurones), les traite, et envoie le résultat du traitement vers d'autres neurones. Le (Les) neurone(s) de sortie permet(tent) de reproduire le comportement du système à modéliser. D'une manière plus générale, le modèle neuronal est un ensemble d'éléments qui réalise chacun un traitement simple voir simpliste mais l'ensemble donne des résultats dignes d'intérêt. Ces types de réseaux sont capables de représenter des systèmes très complexes et fortement

non linéaires.

Ils existent plusieurs types de RNA, les plus utilisés sont énumérés ci-dessous :

1. **Perceptron à une ou plusieurs couches (PMC ou MLP)** : il est le réseau le plus utilisé notamment pour la classification et l'approximation des fonctions et bénéficie d'un nombre important d'applications.
2. **Réseau à base de fonction radiale (RBF)** : introduit par ([Broomhead et Lowe, 1988]), il est basé sur un réseau à une seule couche et permet un apprentissage facile et est utilisé comme approximateur local de fonctions.
3. **Réseau de Hopfield** : [Rumelhart et al, 1986] ont développé des réseaux Hopfield destinés principalement au dispositif de mémoire, inspiré de [Hopfield, 1982], qui décrit une méthode basée sur le stockage d'informations, il est constitué d'un réseau à couche unique, avec un retour des sorties sur les entrées et existe sur ses deux versions continue et discrète.
4. **Les cartes de Kohonen où Self-organising Feature Maps (SOFM)** : modèle simplifié de la notion de caractéristiques liés à une région donnée du cerveau, et est basé sur un apprentissage par compétition. [Kohonen, 1989]

En fonction des domaines d'applications un choix du type du réseau RNA sera choisi, dans le tableau suivant une correspondance entre les types de réseau et les applications appropriées sera donnée.

Tableau 4.1 – Domaines d'application des RNA

Caractéristiques fonctionnelles	Type de RNA
Reconnaissance de formes	MLP, Hopfield, Kohonen, PNN
Mémoire associatives	Hopfield, MLP recurrents, Kohonen
Optimisation	Hopfield, ART, CNN
Approximation des fonctions	MLP, RBF
Modélisation et control	MLP, MLP recurrents, FLN
Traitement d'images	CNN, Hopfield
Classification et clustering	MLP, Kohonen, RBF, ART, PNN

Parmi ces types de réseaux, les MLP et les RBF sont probablement les plus appropriés pour l'approximation des fonctions (c'est-à-dire l'identification) ([Zurada, 1992], [Sjöberg, 1995]). Cepen-

dant, les RBF souffrent de la malédiction de la dimensionnalité, [Bellman, 1961]. La malédiction de la dimensionnalité pour les RNA peut être brièvement résumée dans ce qui suit : Si la dimension du vecteur régresseur est petite (plus précisément  $\leq 3$ ), les RBF seraient un choix de réseau approprié. Cependant, si la dimension du régresseur est grande, alors la structure du modèle sera inappropriée, car le réseau utilisera presque toutes ses ressources pour représenter une très petite partie de l'espace, comme 3 est le nombre maximum de dimensions couvertes par une fonction de base radiale. Pour éviter cela, les MLP sont choisis comme un outil pour cette application particulière (c'est-à-dire, la modélisation de la fonction non linéaire du multi-modèle TS) car le nombre d'entrées du réseau dépasse 3.

Malgré les nombreux avantages du RNA, notamment une tolérance aux incertitudes très élevée et une facilité d'application ne nécessitant pas une compréhension approfondie et un choix de réseaux divers, le choix néanmoins reste pas toujours facile et pas toujours justifié en plus de la nature non linéaire des RNA et du temps énorme et couteux de l'apprentissage.

### 4.3.2 Perceptron Multi-Couches (MLP)

Il a été prouvé par Cybenko [Cybenko, 1989] qu'une fonction continue quelconque peut être arbitrairement bien approximée par un réseau feed-forward à couche cachée unique, où chaque neurone dans la couche cachée a comme fonction d'activation une fonction non linéaire sigmoïdal (le perceptron), pour cela dans notre application on a utilisé un réseau feed-forward (newff : new feed forward) où chaque neurone dans la couche cachée a comme fonction d'activation logsig car on veut obtenir dans la sortie de réseau des valeurs comprise entre 0 et 1.

Ce type de réseau est constitué de trois couches successives de neurones artificiels (voir Fig. 4.4). La couche d'entrée pénètre les informations, ensuite, les couches cachées (intermédiaire) où les informations sont distribuées dans le réseau, enfin la couche de sortie qui nous fournit les résultats de traitement.

#### **Théorème de Cybenko : [Cybenko, 1989]**

Soit  $f(\cdot)$  une fonction continue, bornée et monotone. Soit  $I_p$  donnant l'hypercube  $[0, 1]^p$  de dimension  $p$ . L'espace de la fonction continue sur  $I_p$  est donnée par  $C(I_p)$ . Alors, si  $f \in C(I_p)$  et  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $M$  et un nombre de constantes réelles  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\omega_{ij}$ , tel que :

$$F(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^M \alpha_i f \left( \sum_{j=1}^p \omega_{ij} x_j - \beta_i \right) \quad (4.3)$$

Comme une approximation de la fonction  $f(\cdot)$ , où :

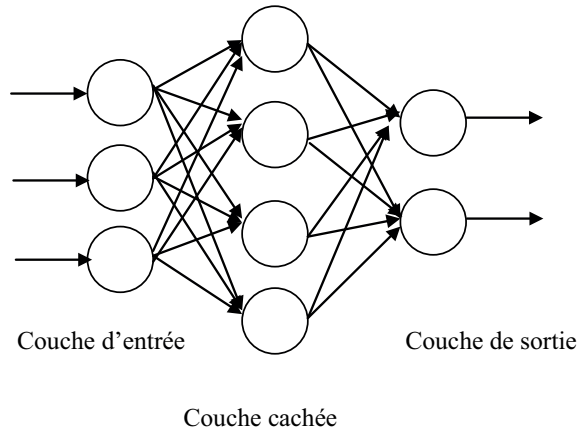


Fig. 4.4 – Réseau MLP

$$|F(x_1, \dots, x_p) - f(x_1, \dots, x_p)| < \epsilon \text{ pour tout } x_1, \dots, x_p.$$

La figure (Fig. 4.5) montre un réseau MLP feedforward à une seule sortie  $F$ , construit suivant le théorème de Cybenko conformément à l'équation (Eq. 4.3).

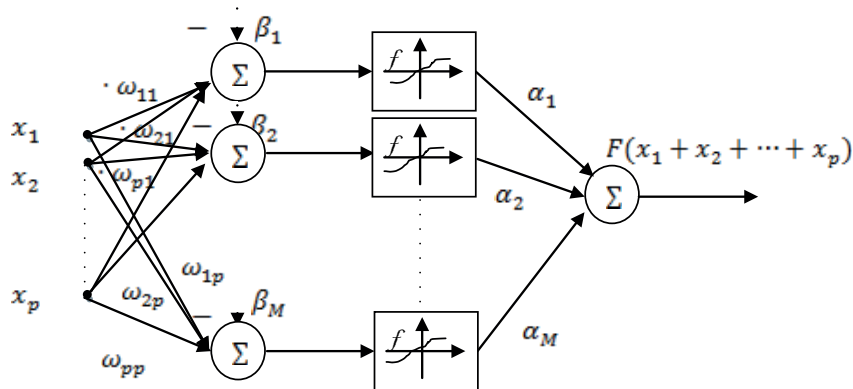


Fig. 4.5 – MLP justifiant le théorème de Cybenko

### 4.3.3 Apprentissage par rétro-propagation du gradient

Après la détermination d'une topologie appropriée le MLP doit subir une phase d'apprentissage dans le but de définir ses paramètres c.à.d, les poids et les biais de chaque neurone, le calcul du gradient peut être effectué de diverses manières ; il en est une, appelée rétro-propagation de l'erreur, qui est généralement plus économe que les autres méthodes en termes de nombre d'opérations arithmétiques à effectuer pour évaluer le gradient, dans notre application le réseau effectue l'apprentissage par rétro-propagation de l'erreur qui se fait en deux phases alternées. Dans une première phase, on

présente un exemple à l'entrée, et on propage les signaux de couche en couche jusqu'à la sortie, à travers les poids connectant les sorties des neurones d'une couche à ceux de la couche suivante. On peut alors mettre en évidence les erreurs apparaissant sur les neurones de sorties. Dans la seconde phase, on applique l'algorithme de mise à jour pour le calcul du gradient et le calcul des poids et des biais de chaque neurone dans la dernière couche de poids, puis on propage les erreurs de sortie à travers cette couche de poids sur l'avant-dernière couche, ce qui permet alors de réitérer l'algorithme en mettant à jour l'avant-dernière couche de poids, et ainsi de suite.

Le principe est de répartir sur toutes les couches, y compris les couches cachées, une partie de l'erreur de manière réursive, en partant de la couche de sortie et en remontant vers la couche d'entrée.

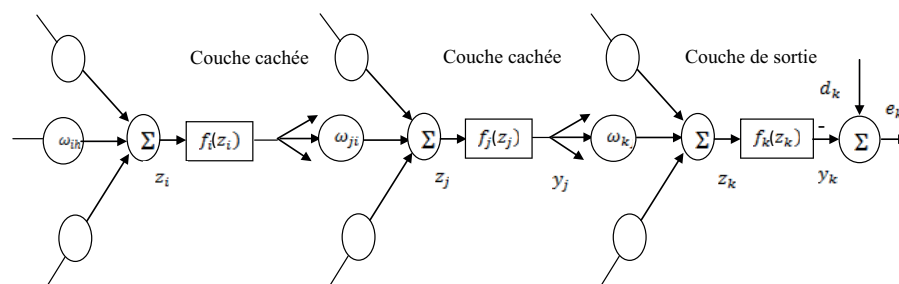


Fig. 4.6 – Trois neurones de différentes couches dans un MLP à deux couches cachées

Pour un réseau multicouches à  $m$  entrées et  $n$  sorties, composé de  $L$  couches (couches cachées et couche de sortie), la somme de la  $j^{eme}$  unité cachée est : ([Fabrice, 1996], [François, 1996])

$$S_j^L = \sum_{i=1}^n \omega_{ji}^L X_i + \theta_j^L \quad (4.4)$$

$L$  : indice de la couche cachée.

$\omega$  : poids de la connexion  $i^{eme}$  entrée.

$\theta_j^L$  : biais ou valeur de seuil interne du neurone.

$f$  : est la fonction d'activation du neurone  $j$  tel que

$$I_j = f^L(S_j^L) = f^L \left( \sum_{i=1}^n \omega_{ji}^L X_i + \theta_j^L \right) \quad (4.5)$$

Les équations de la couche de sortie sont :

$$S_K^R = \sum_{j=1}^n \omega_{Kj}^R I_j + \theta_K^R \quad (4.6)$$

$$R_K = f_K^R(S_K^R) \quad (4.7)$$

$K$  : numéro de neurone de la couche de sortie.

L'objectif de rétro-propagation est l'adaptation des paramètres  $\omega_{ij}$  de telle façon qu'on minimise la fonction de coût donnée par :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \sum_{K=1}^T E \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K=1}^T (\delta)^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Avec

$$\delta_K = Y_K - R_K \quad (4.9)$$

où

$Y_K$  : la sortie désirée,

$R_K$  : la sortie actuelle du réseau,

$T$  : longueur de l'ensemble d'apprentissage.

Après avoir calculé la sortie  $R_K$  et l'erreur  $E$  correspondante à l'ensemble des entrées à partir des équations (Eq. 4.7) et (Eq. 4.8), on procède à l'adaptation des poids par la méthode du gradient :

$$\omega_{ji}^L(n+1) = \omega_{ji}^L(n) + \Delta\omega_{jL}^L(n) \quad (4.10)$$

$$\Delta\omega_{ji}^L(n) = -\mu \frac{\partial E}{\partial \omega_{ji}^L(n)} \quad (4.11)$$

Avec  $n$  : numéro de l'itération  $\mu$  : pas d'apprentissage représentant la vitesse de convergence, sa valeur est généralement choisie expérimentalement, ( $0 < \mu < 1$ ).

**Si  $\mu$  est trop petit** la convergence est lente mais la direction de la descente est optimale.

**Si  $\mu$  est trop grand** la convergence est rapide mais la précision est médiocre.

L'application des poids du réseau est faite tout d'abord pour la couche de sortie puis pour les couches cachées on a :

**a) pour la couche de sortie**

L'erreur est donnée par

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^T (Y_K - R_K)^2 \quad (4.12)$$

La dérivée de l'erreur  $E_p$  par rapport au poids synaptique  $\omega_K^R$  nous donne :

$$\frac{\partial E_p}{\partial \omega_{ji}^L} = -(Y_K - R_K) \frac{\partial R_K^L}{\partial S_K^L} \frac{\partial S_K^L}{\partial \omega_{Kj}^L} \quad (4.13)$$

Le dernier facteur de (Eq. 4.13) est :

$$\frac{\partial S_K^R}{\partial \omega_{Kji}^R} = \frac{\partial}{\partial \omega_{Kj}^L} [\omega_{Kj}^R I_j + \theta_K^L] = I_j \quad (4.14)$$

En combinant (Eq. 4.12) et (Eq. 4.13), on a pour l'opposé du gradient :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial \omega_{Kj}^R} = (Y_K - R_K) f_K^R(S_K^R) I_j \quad (4.15)$$

L'amplitude de la variation du poids étant proportionnelle à l'opposé du gradient, les poids de couche de sortie sont renouvelés selon :

$$\omega_{Kj}^R(n+1) = \omega_{Kj}^R(n) + \Delta \omega_{Kj}^R(n) \quad (4.16)$$

$$\Delta \omega_{Kj}^R = \mu (Y_K - R_K) f_K^R(S_K^R) I_j \quad (4.17)$$

Pour une fonction d'activation type sigmoïde, l'équation d'adaptation (Eq. 4.16) des poids sous une forme indépendante de la fonction de sortie est donnée par (Eq. 4.18)

$$\omega_{Kj}^R(n+1) = \omega_{Kj}^R(n) + \mu \delta_K^R I_j \quad (4.18)$$

### b) pour les couches cachées

Nous devons répéter le même calcul que pour la couche de sortie. L'erreur totale doit être rapportée d'une façon ou d'une autre aux sorties de la couche cachée :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \sum_{K=1}^T (Y_K - R_K)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K=1}^T (Y_K - f_K^R(S_K^R))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K=1}^T \left( Y_K - f_K^R \left( \sum \omega_{Kj} I_j + \theta_K^R \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dans les équations (Eq. 4.4) et (Eq. 4.5), on constate que  $I_j$  dépend des poids de la couche cachée, nous pouvons exploiter ce fait pour calculer le gradient de  $E_p$  par rapport aux poids de la couche cachée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_p}{\partial \omega_{ji}^L} &= \frac{1}{2} \sum_K \frac{\partial}{\partial \omega_{ji}^K} (Y_K - R_K)^2 \\
&= - \sum_K (Y_K - R_K) \frac{\partial R_K}{\partial S_K^R} \frac{\partial S_K^R}{\partial I_j} \frac{\partial I_j}{\partial S_j^L} \frac{\partial S_j^L}{\partial \omega_{ji}^L}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Les poids des couches cachées sont adaptés proportionnellement à l'opposé de l'équation (Eq. 4.20).

$$\Delta \omega_{Kj}^R = \mu f_j^L (S_j^L) X_i \sum (Y_K - R_K) f_K^R (\delta_K^R) \omega_{Kj}^R \tag{4.21}$$

l'équation (Eq. 4.21) devient :

$$\begin{aligned}
\Delta \omega_{Kj}^R &= \mu f_j^L (S_j^L) X_i \sum \delta_K^R \omega_{Kj}^R \\
&= \mu \delta_j^L X_i
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Avec

$$\delta_j^L = f_j^L (S_j^L) \sum \delta_K^R \omega_{Kj}^R \tag{4.23}$$

On remarque que chaque adaptation des poids dans la couche cachée dépend de l'erreur totale de la couche de sortie ce qui conduit à la notion de rétro-propagation. L'équation d'adaptation des poids dans ce cas est :

$$\omega_{ji}^L(n+1) = \omega_{ji}^L(n) + \mu \delta_j^L X_i \tag{4.24}$$

#### 4.3.4 Algorithme de la rétro-propagation

L'algorithme de rétro-propagation, appliqué au réseau de neurones MLP, peut être résumée dans les étapes suivantes :

1. Etape 1 : Initialiser les poids  $\omega_{ij}$  et les seuils internes (biais) des neurones.
2. Etape 2 : Présenter le vecteur d'entrée et de sortie désirée.
3. Etape 3 : Calculer la somme des entrées des neurones de la couche cachée et de la couche de sortie puis trouver les sorties de neurones de la couche cachée et de la couche de sortie.
4. Etape4 : Calculer l'erreur pour les neurones de la couche de sortie de manière récursive.
5. Etape5 : Réinjecter l'erreur de sortie.
6. Etape6 : Ajuster les poids de la couche de sortie et les poids de la couche cachée.
7. Etape 7 : Calculer l'erreur.

8. Etape 8 : Si la condition sur l'erreur  $E - E_p < \epsilon$  est atteinte, aller à l'étape 9 sinon aller à l'étape 6 et refaire le calcul pour une autre époque.
9. Etape 9 : FIN.

#### 4.3.5 Construction du réseau MLP basée sur le multi-modèle (TS) du ASM1 réduit

Nous avons vu dans le chapitre 4 la modélisation du ASM1 réduit par le multi-modèle TS, qui se résume à une interpolation entre des sous-modèles linéaires locaux, où chaque modèle local est un système dynamique LTI valide autour d'un point de fonctionnement, par des fonctions de pondérations  $\mu_i$  qui détermine le degré d'appartenance du  $i^{eme}$  modèle local associé, par la méthode Quasi-LPV. Néanmoins, nous avons vu que le choix des variables de prémisses reste un des problèmes majeurs de cette méthode.

Une alternative pour la conception de la fonction de pondération  $\mu_i$  (approximation de la fonction  $\mu_i$ ) utilisant les Réseaux de Neurones Artificiels (RNA), plus précisément Perceptron Multi-couches (MLP) pour le multi-modèle TS, est proposée, dans lequel les neurones sont organisés en une ou plusieurs couches, ([Bishop, 1995], [Haykin, 1999], [Khadir et Ringwood, 2002]). Dans cette topologie, les sorties d'une couche sont les entrées de la suivante. Les couches situées entre les couches d'entrée et de sortie sont appelées couches cachées. La première couche cachée reçoit l'information provenant des entrées. L'information est traitée et transmise vers les couches suivantes jusqu'à la dernière. Les MLP sont connus comme étant des approximateurs universels et sont très utilisés dans des problèmes de régression non linéaire ([Bishop, 1995], [Haykin, 1999], [Khadir et Ringwood, 2002]).

Afin de construire un RNA basé sur le multi-modèle (TS) du ASM1 réduit ([Matoug et Khadir, 2014], [Matoug et Khadir, 2015]), nous devons choisir les variables des entrées et des sorties du processus à considérer comme entrées et sorties pour le RNA. Cette technique est considérée comme boîte noire où on a besoin de connaître les entrées et les sorties correspondantes, sans avoir besoin d'informations supplémentaires. Notre modèle non linéaire du ASM1 réduit va servir comme base de données pour la construction du modèle RNA, ceci est possible en utilisant les données, recueillies à partir de l'ensemble des sorties des sous-modèles utilisées comme entrées du prédicteur non linéaire RNA. Les résultats sont comparés à l'approche originale avec et sans perturbations sur les entrées ainsi que dans le cas d'incertitudes paramétriques. Les entrées du réseau seront les sorties des 8 sous-modèles linéaires du système ASM1 réduit obtenu par le multi-modèle (TS).

Le choix d'une topologie adéquate du réseau n'est pas une tâche simple, il n'y a pas de règles ou théorèmes pour trouver une topologie optimale pour un ensemble de données d'entrée/sortie. Cependant, une topologie appropriée peut être trouvée en exécutant un nombre important des entrées/sorties du réseau.

Dans notre cas, on considère un réseau multicouche avec 8 entrées obtenues à partir des mesures prises par les 8 sous-modèles linéaires du système ASM1 réduit obtenu par le multi-modèle (TS), 3 neurones dans la couche de sortie et 2 couches cachées (voir Fig. 4.7). Les entrées du réseau RNA, pour l'apprentissage, sont choisies comme une séquence de données à partir des sorties des 8 sous-modèles,  $y_1 \cdots y_8$ , (voir Fig. 4.8). Les neurones dans les 2 couches cachées sont choisis de manière à être tangents Sigmoides, où le neurone de la couche de sortie est un neurone linéaire simple. La prédiction sera donnée par le RNA obtenu après la durée d'apprentissage appropriée Eq. (4.25) :

$$\hat{y}(:, k) = NN[y_1(:, k-1) \cdots y_8(:, k-1)] \quad (4.25)$$

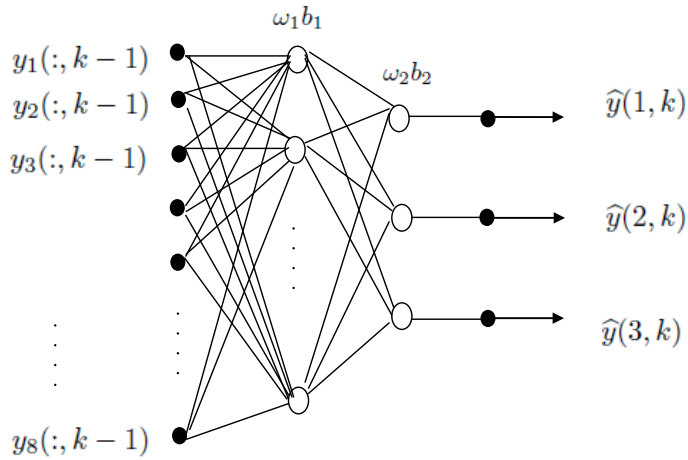


Fig. 4.7 – Topologie RNA et signaux d'entrés utilisés dans l'apprentissage

Plusieurs topologies ont été testées et ont conclu qu'un RNA avec une topologie [18–8–3] donne les meilleures performances de notre modèle de prédiction. Dans notre thèse, nous avons choisi une topologie assez grande pour permettre une bonne modélisation et une taille de réseau acceptable. Le réseau a été formé avec 900 échantillons pour 1000 époques, obtenus avec 9 heures de simulation avec

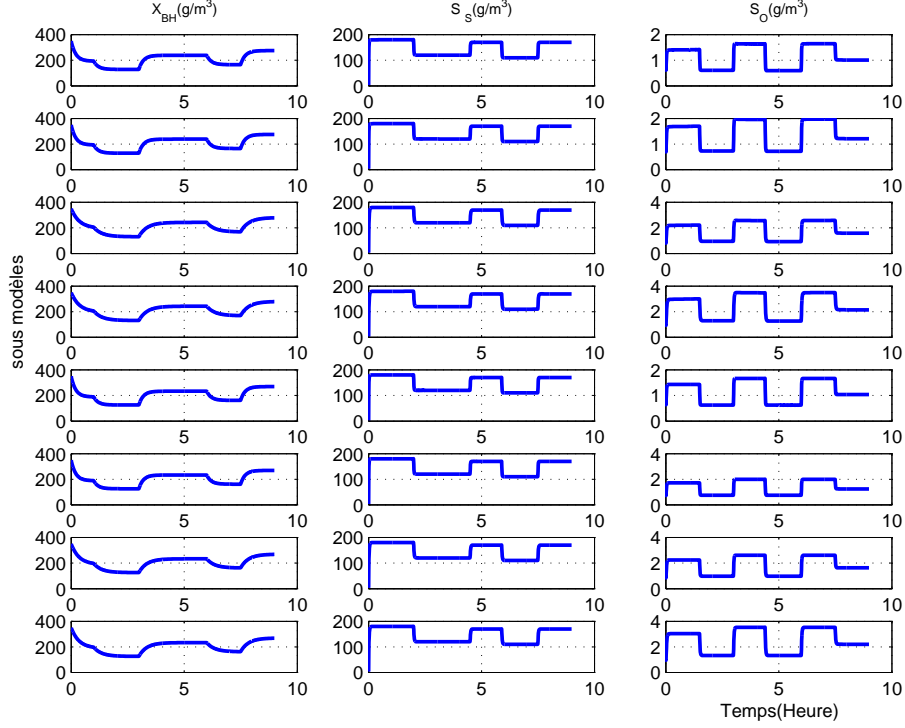


Fig. 4.8 – Entrées du réseau RNA

un temps d'échantillonnage de 36s. Les sorties des 8 sous-modèles utilisés comme données d'entrée pour le réseau MLP sont représentées dans la figure (voir Fig. 4.8).

Les résultats de l'apprentissage sont présentés dans Fig. 4.9 avec comparaison aux résultats du multi-modèle (TS) et un modèle de référence non linéaire du ASM1 réduit.

De la figure (Fig. 4.9), on peut voir clairement que le comportement du Neuro-TS et du TS est très proche (voir meilleur) en terme de MSE avec le modèle non linéaire complet (Eq. 1.17), avec une erreur de  $1.01 \times 10^{-7}$  et  $3.13 \times 10^{-7}$  respectivement.

Les modèles TS et Neuro-TS, respectivement donnent de bon résultats et arrivent à bien approximer le comportement du ASM1 réduit, avec un léger avantage au Neuro-TS. Quand est-il du comportement de ces modèles dans le cas de perturbations en entrées et surtout d'incertitudes paramétriques ?

En effet le modèle peut bien se comporter dans le cas idéal, mais ceci est rarement le cas pour un comportement réel, il est alors impératif de tester les modèles TS et Neuro-TS en présence de perturbations et d'incertitudes paramétriques.

Une incertitude sur le coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe  $b_H$  et des perturbations sur les bactéries hétérotrophes ( $X_{BH}^{in}$ ), substrat de carbone ( $S_S^{in}$ ) et sur les entrées du débit d'air ( $q_a$ ) seront ajoutées au modèle nominal dont les sorties linéaires ont été utilisées pour l'apprentissage.

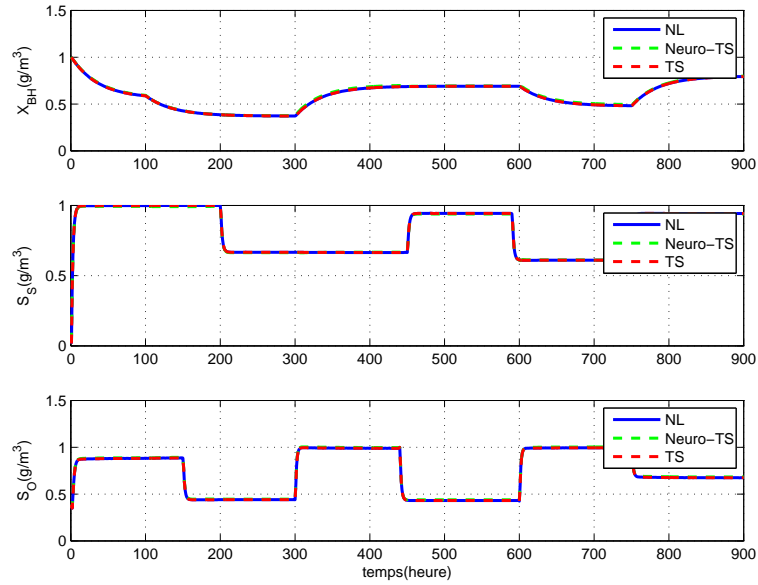


Fig. 4.9 – Sorties d’apprentissage du modèle Neuro-TS, Non linéaire et le multi-modèle (TS) classique

Les données obtenues du modèle incertain et perturbé sont ensuite utilisées pour la validation.

Pour éviter le sur-apprentissage, la somme des erreurs quadratiques (SSE) sur l’ensemble des données de validation est calculée et les paramètres du modèle Neuro-TS sont choisis lorsque le SSE est minimum. Le sur-apprentissage et ses effets sont expliqués en détail dans [Sjöberg, 1995].

Le comportement du modèle Neuro-TS lorsqu’il est soumis à l’incertitude et aux perturbations des entrées des sous-systèmes, est donné dans la figure Fig. 4.10, et évalué dans le Tableau 4.2.

Tableau 4.2 – Valeurs MSE globales par rapport à différentes topologies

MSE/Topologies	Neuro-TS					TS
	[8 8 3]	[18 8 3]	[15 10 3]	[6 5 3]	[12 6 3]	
Apprentissage	$1.33e^{-7}$	$1.01e^{-7}$	$1.06e^{-7}$	$1.57e^{-7}$	$1.07e^{-7}$	$3.13e^{-7}$
Validation	$2.30e^{-4}$	$1.91e^{-4}$	$2.10e^{-4}$	$2.35e^{-4}$	$3.01e^{-4}$	$6.31e^{-4}$
Epoque d’arrêt	310	250	380	230	100	/

Notons que, lors de la validation du modèle MLP avec les données obtenues en présence de perturbations d’entrée et d’incertitudes paramétriques, le modèle Neuro-TS est plus performant que le TS avec un MSE de  $1.91 \times 10^{-4}$  contre un MSE de  $6.31 \times 10^{-4}$ .

L’évolution de l’erreur des sommes quadratiques (SSE) par rapport au nombre d’époque est

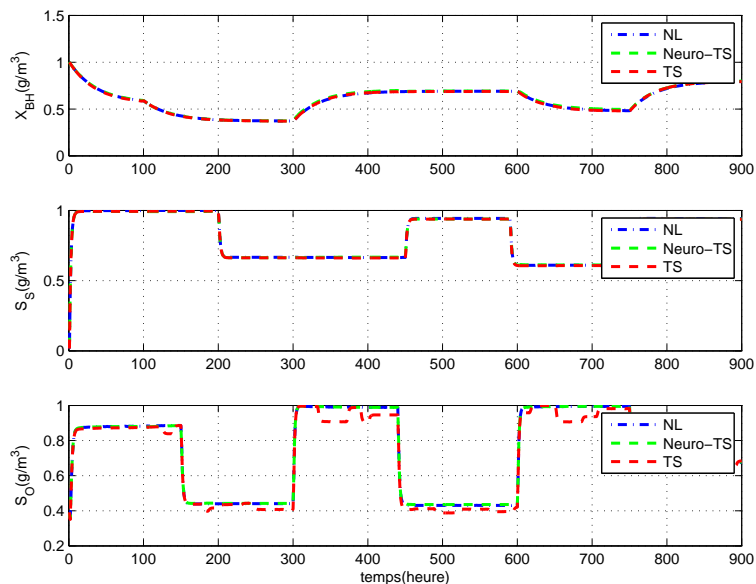


Fig. 4.10 – Sorties de validation du modèle Neuro-TS, Non linéaire et le multi-modèle (TS) classique

donnée dans la figure (Fig. 4.11). Nous pouvons voir que le SSE après 200 époques commence à augmenter (sur-apprentissage se produit), les paramètres du modèle sont ensuite choisis à ce moment dans le processus d'apprentissage.

Plusieurs simulations ont été effectuées pour les données de validation pour un certain nombre de topologies. Les topologies du réseau, les plus adaptées à notre problème, peuvent être données par les topologies indiquées dans le Tableau 4.2 qui montre les valeurs des erreurs quadratiques moyennes correspondantes (MSE) pour la validation et pour l'apprentissage ainsi que le nombre d'époques.

## 4.4 Perturbations et incertitudes

Plusieurs tests ont été appliqués pour différentes valeurs de perturbations sur le débit d'entrée ( $q_{in}$ ), ainsi que différentes valeurs d'incertitude sur le coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe ( $b_H$ ). Ces perturbations ont été ajoutées aux valeurs nominales et utilisées pour la validation des modèles construits.

Le réseau de neurone avec la topologie suivante  $[18 - 8 - 3]$  a été testé pour différentes valeurs de perturbations, précédemment décrites, et les résultats obtenus exprimés en MSE pour l'apprentissage et la validation, sont affichés dans (Tableau 4.3, Tableau 4.4) par rapport aux époques d'apprentissage.

On peut voir clairement que, le modèle Neuro-TS reste meilleur que le modèle TS lors de l'augmentation du taux d'erreur pour  $q_{in}$  et  $b_H$ , d'où l'intérêt de l'utilisation des RNA, qui vont en

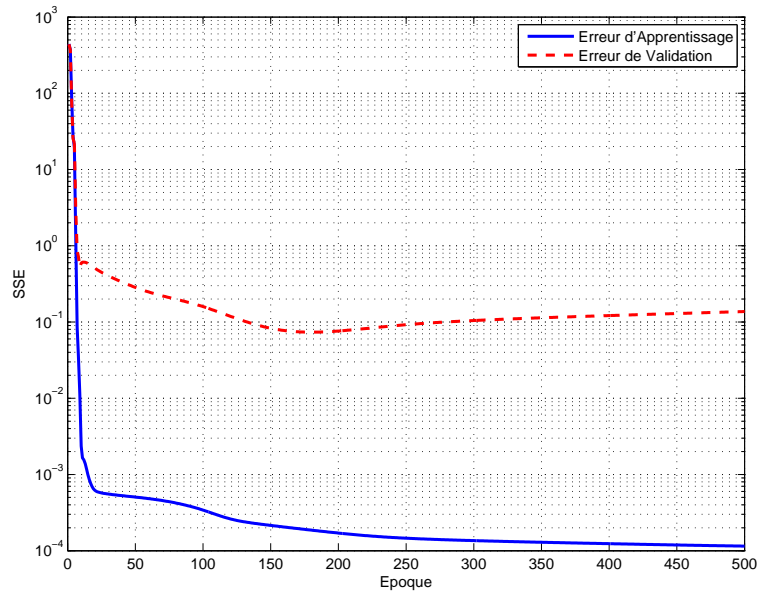


Fig. 4.11 – Evolution de l’erreur des sommes quadratiques SSE en fonction du nombre d’époques

Tableau 4.3 – Valeurs MSE globales pour des perturbations sur le débit d’entrée ( $q_{in}$ )

MSE/Taux d’erreur	5%	10%	15%	20%	25%	30%
Apprentissage	$2.65e^{-7}$					
Validation	$4.56e^{-6}$	$1.64e^{-5}$	$1.64e^{-5}$	$5.87e^{-5}$	$8.69e^{-5}$	$1.18e^{-4}$
TS avec perturbation	$5.88e^{-6}$	$2.03e^{-5}$	$2.03e^{-5}$	$7.18e^{-5}$	$1.06e^{-4}$	$1.44e^{-4}$

fonction de l’apprentissage établi, prendre en considération les perturbations dans la validation.

## 4.5 Conclusion

L’approche multi-modèle (TS) a permis de modéliser avec précision le processus de réacteur à boues activées ASM1 réduit, ce qui donne une construction de modèle basé sur une transformation non-linéaire convexe polytopic (section 2.3.3) « Quasi-LPV ». Plusieurs choix pour les formes Quasi-LPV sont possibles en fonction du choix des variables de prémisse, affectant le nombre de sous-modèles et la structure globale, l’observabilité et la contrôlabilité doivent être assurées, toutefois, nous avons pu noter la difficulté du choix des variables de prémisse pour assurer la stabilité, l’observabilité et la contrôlabilité du système notamment la faisabilité du systèmes et la stabilité des sous systèmes, ces derniers sont important car ils ont été utilisés comme base de données pour l’approximation de

Tableau 4.4 – Valeurs MSE globales pour des incertitudes sur le coefficient hétérotrophe de la mortalité de la biomasse ( $b_H$ )

MSE/Taux d'erreur	5%	10%	15%	20%	25%	30%
Apprentissage	$2.08e^{-7}$					
Validation	$3.95e^{-7}$	$9.99e^{-7}$	$1.74e^{-6}$	$2.88e^{-6}$	$4.34e^{-6}$	$6.13e^{-6}$
TS avec perturbation	$9.24e^{-7}$	$1.24e^{-6}$	$2.16e^{-6}$	$3.59e^{-6}$	$4.99e^{-6}$	$6.92e^{-6}$

la fonction  $\mu$  par les RNA.

La fonction de pondération, formant la partie non linéaire du multi-modèle (TS), est ensuite calculée en utilisant alternativement les réseaux RNA et plus précisément MLP. Le résultat principal obtenu, d'une part, donne des résultats qui semble être aussi bon que le Neuro-TS équivalent au multi-modèle (TS) en termes de performance mais plus coûteux en terme de temps de calcul en particulier pendant la phase d'apprentissage. Et d'autre part, en présence de perturbations et d'incertitudes, le modèle Neuro-TS surpasse les résultats du multi-modèle (TS) classique, d'où la puissance du RNA qui permet en fonction des connaissances recueillies pendant la phase d'apprentissage d'approximer la fonction  $\mu$  malgré la présence des perturbations d'entrées et d'incertitudes paramétriques ceci bien sur en choisissant les topologies adéquates avec un bon apprentissage et validation. Ensuite, le réseau de neurone avec la topologie [18 – 8 – 3] a été testé pour différentes valeurs de perturbations sur le débit d'entrée ( $q_{in}$ ), ainsi que différentes valeurs d'incertitude sur le coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe ( $b_H$ ), et les résultats obtenus exprimé en MSE pour l'apprentissage et la validation nous montrent la robustesse de l'approximation de la fonction  $\mu$  par le Neuro-TS par rapport à l'approximation de la fonction  $\mu$  par la méthode Quasi-LPV, qui elle une fois calculée, sera figée et une augmentation de la valeur de perturbation va induire une augmentation de la valeur d'erreur, contrairement au modèle Neuro-TS basé sur l'intelligence artificielle, qui va en fonction de l'apprentissage établi, prendre en considération la perturbation dans la validation.

# Chapitre 5

## Commande prédictive du bioréacteur ASM1 réduit

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Commande TS-DMC du bioréacteur ASM1 réduit</b>	<b>76</b>
5.1.1	Résultats et simulations de la commande TS-DMC du bioréacteur ASM1 réduit	76
<b>5.2</b>	<b>Commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 3 variables de prémisse</b>	<b>81</b>
5.2.1	Résultats et simulations de la commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 3 variables de prémisse	81
<b>5.3</b>	<b>Commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 4 variables de prémisse</b>	<b>87</b>
5.3.1	Obtention d'un multi-modèle (TS) pour le modèle ASM1 réduit à 4 variables de prémisse	87
5.3.2	Résultats et simulations de la commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 4 variables de prémisse	89
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>

---

« Dans la vie, rien n'est à craindre, tout est à comprendre » **Marie Curie**

## 5.1 Commande TS-DMC du bioréacteur ASM1 réduit

La formulation TS-DMC peut être obtenue en utilisant comme modèle de prédiction interne le multi-modèle TS obtenu pour notre système ASM1 réduit donné par l'équation (Eq. 4.2) avec  $x = [X_{BH}, S_S, S_O]^T$  est le vecteur des variables d'état et  $u = [X_{BH}^{in}, S_S^{in}, q_a]^T$  est le vecteur des variables d'entrée, le système présente trois non-linéarités et le choix des variables de prémisse qui assure les critères de la forme Quasi-LPV, est donné par l'équation (Eq. 4.1). Le multi-modèle TS du bioréacteur à boues activées ASM1 réduit sera la somme de 8 sous modèles linéaires interpolés par des fonctions non linéaires données par l'équation (Eq. 2.14).

Notez que, en raison de l'instabilité d'un certain nombre de sous-systèmes linéaires due à un fort couplage qui affectera la stratégie de commande, un correcteur  $K(s)$  est introduit avant le système en boucle ouverte. Ses paramètres sont déterminés en utilisant la technique de découplage dite du modèle inverse, avec

$$K(s) = \left(\frac{k}{s}\right) G^{-1}(s)$$

où  $G^{-1}$  (modèle inverse) va découpler le système dans les basses fréquences et  $\left(\frac{I}{s}\right)$  va éliminer l'erreur statique en régime permanent (hautes fréquences), l'indice  $k$  assurera au système une vitesse adéquate pour atteindre l'état stationnaire.

Dans ce qui suit, l'algorithme DMC MIMO initial est appliqué à chaque sous-modèle, puis une configuration parallèle de commande (montrée Fig. 3.1) est utilisée pour mettre en œuvre le contrôleur prédictif multi-modèle (TS-DMC).

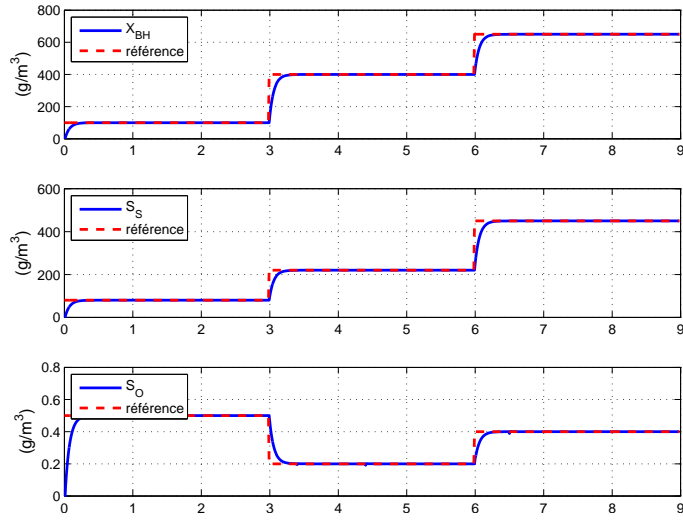
Le contrôleur TS-ADMC résultant d'une commutation d'adaptation des modèles TS locaux, (Fig. 3.2), sur la base de la plus grande valeur des fonctions de pondération  $\mu$ , sera également présenté.

### 5.1.1 Résultats et simulations de la commande TS-DMC du bioréacteur ASM1 réduit

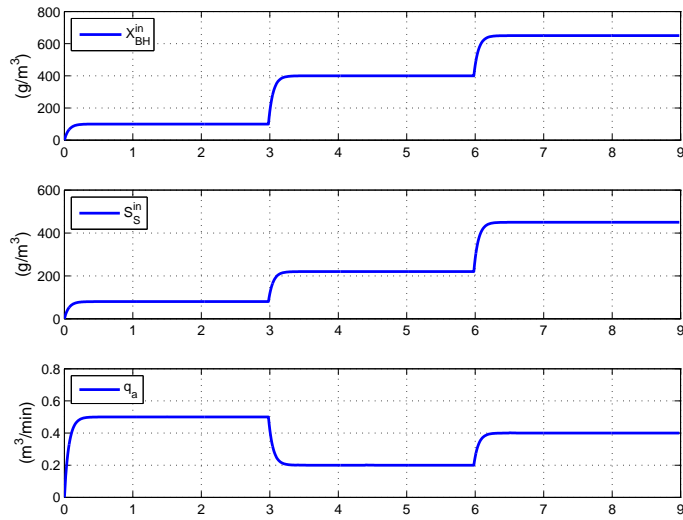
Une série de simulations a été appliquée au processus et au développement des contrôleurs avancés, sous les hypothèses et les paramètres suivants :

1. 9 heures de temps de simulation, ce qui correspond à 900 échantillons, obtenus avec un temps d'échantillonnage de 36s.
2. Un horizon temporel  $M$  choisi de telle sorte que les sorties du système atteignent le régime permanent  $M = 8$ .
3. Un horizon de contrôle  $N_c = 1$ .

4. Un horizon de prédiction  $N_h = M + N_c$ .
5. Des perturbations dans le débit d'air d'entrée  $q_a$  et les bactéries hétérotrophes et le substrat de carbone ( $X_{BH}^{in}$ ,  $S_S^{in}$  respectivement).
6. Incertitudes dans le taux de mortalité de la biomasse hétérotrophe  $b_H$ .



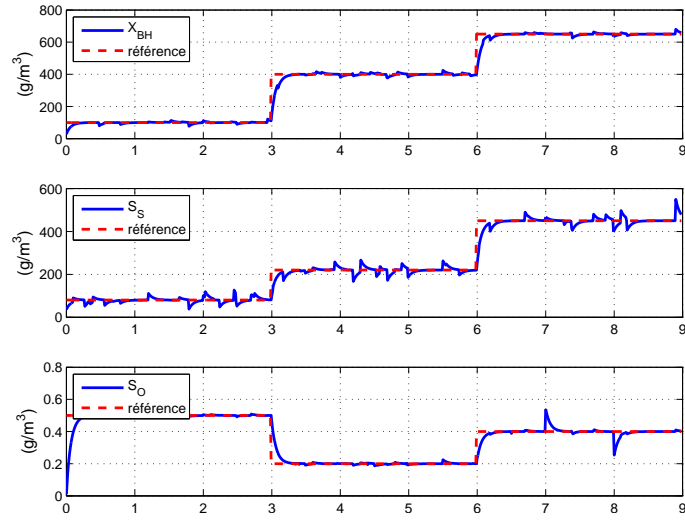
(a) Sorties TS-ADMC en l'absence de perturbations



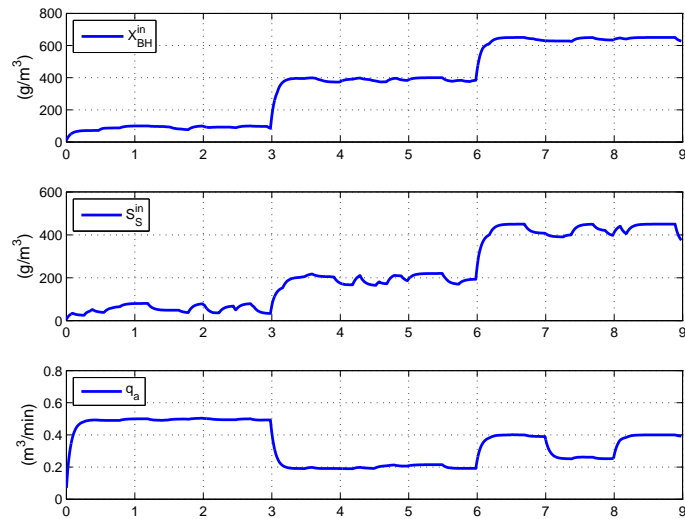
(b) Variables de contrôle TS-ADMC en l'absence de perturbations

Fig. 5.1 – Commande TS-ADMC en l'absence de perturbations

A partir de la figure (Fig. 5.1), on peut voir que la commande TS-ADMC, en l'absence de perturbations, donne d'excellents résultats. La commande TS-ADMC choisit à chaque fois en fonction du poids du sous modèle le plus dominant parmi les 8 sous modèles du système et calcule l'incrément de commande associé. Le problème de commande dans le cas adaptative se résume à une commande des systèmes linéaires de type Eq. 3.1 et la commande prédictive ADCMC n'aura aucun problème à suivre la référence.



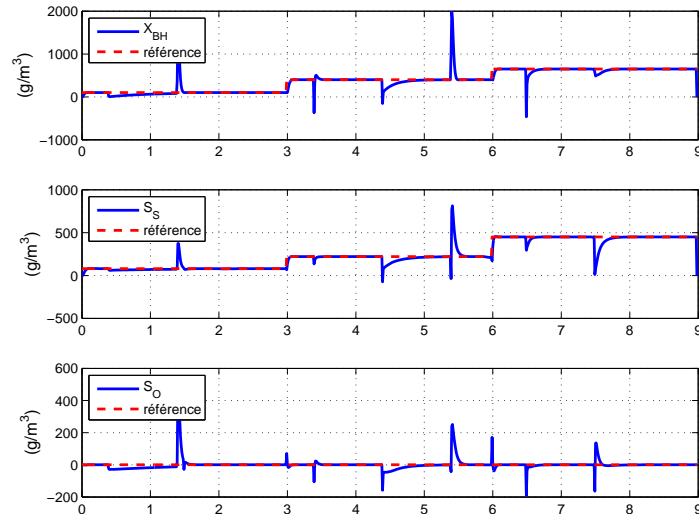
(a) Sorties TS-ADMC en présence de perturbations



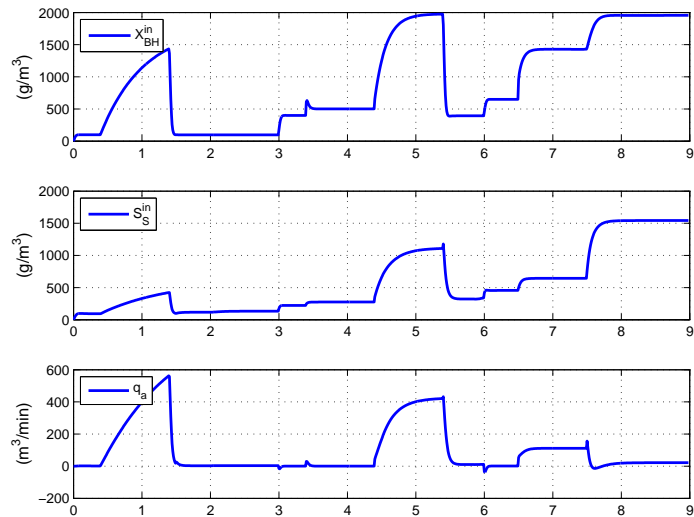
(b) Variables de contrôle TS-ADMC en présence de perturbations

Fig. 5.2 – Commande TS-ADMC en présence de perturbations

En présence de perturbations et d'incertitudes paramétriques la commande TS-ADMC (Fig. 5.2) arrive à suivre la référence et à rejeter les perturbations notamment pour les deux sorties à dynamique lente  $X_{BH}$ ,  $S_O$  mais pour la sortie à dynamique rapide la commande prédictive présente des fluctuations tout au long de la sortie commandée car cette dernière est à dynamique rapide et ne permet pas à la commande prédictive de se stabiliser.



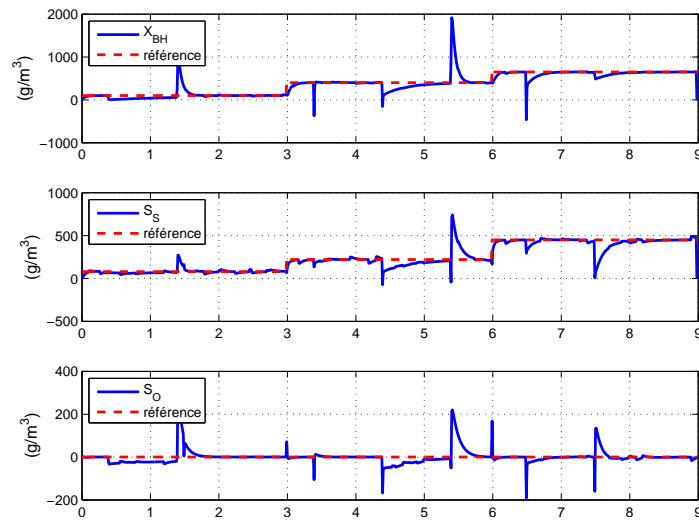
(a) Sorties TS-DMC en l'absence de perturbations



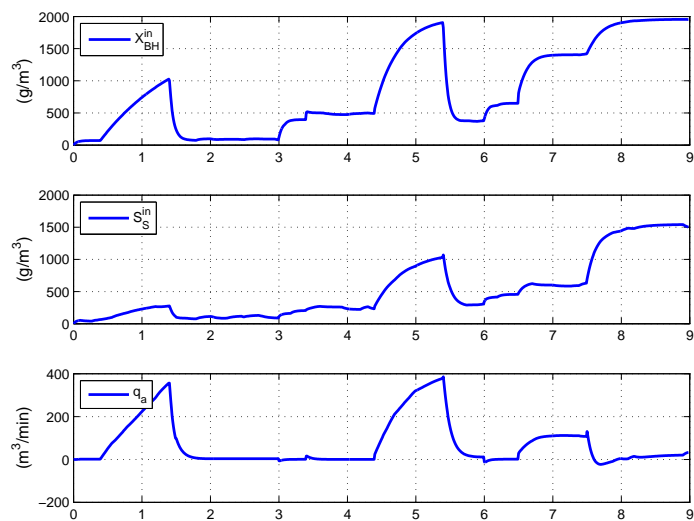
(b) Variables de contrôle TS-DMC en l'absence de perturbations

Fig. 5.3 – Commande TS-DMC en l'absence de perturbations

La commande TS-DMC utilisant la combinaison des 8 sous modèles est donnée dans la figure (Fig. 5.3). Nous pouvons voir que la commande TS-DMC globale qui est la somme des 8 incréments de commande des sous modèles linéaires du système interpolés par des fonctions non linéaires a du mal à suivre la référence notamment durant le changement des fonctions non linéaires.



(a) Sorties TS-DMC en présence de perturbations



(b) Variables de contrôle TS-DMC en présence de perturbations

Fig. 5.4 – Commande TS-DMC en présence de perturbations

Contrairement à la commande TS-ADMC (Fig. 5.1) qui choisit en fonction du poids du sous modèle le plus dominant parmi les 8 sous modèles du système, la commande TS-DMC globale

calcule la somme pondérée des 8 incréments de commande et vu que le calcul de la sortie prédite est formulé à partir d'une réponse indicielle de type FSR la transition durant le basculement des sous systèmes dominants va altérer à chaque fois la valeur de la sortie prédite, ce qui explique la transition à chaque changement des fonctions non linéaire  $\mu$  dans le suivi de la trajectoire mais la commande DMC avec son aspect prédictive va à chaque fois essayer de maintenir la sortie sur la trajectoire.

La commande TS-DMC globale en présence de perturbations et d'incertitudes (Fig. 5.4) donne pratiquement le même résultat sans perturbation (Fig. 5.3), ce qui explique que le résultat obtenu n'est pas nécessairement dû à la perturbation mais plutôt à l'aspect globale du modèle de prédiction utilisé.

L'approche de commande TS-ADMC, basé sur un modèle linéaire précis en fonction du poids de la fonction d'appartenance, est en mesure d'obtenir des performances de contrôle élevées notamment en présence de perturbations et d'incertitudes paramétriques précisément pour les variables de sortie à dynamique lente. Le contrôleur TS-DMC globale reste moins performant que le TS-ADMC.

## 5.2 Commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 3 variables de prémisses

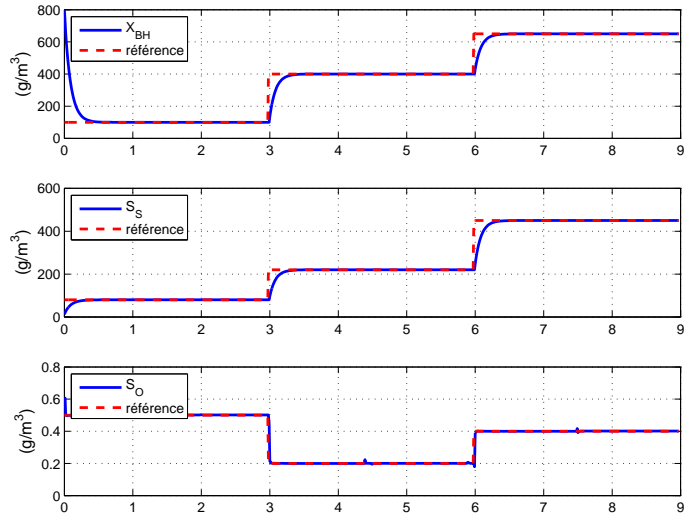
Dans un premier temps nous allons exploiter la formulation TS-GPC utilisant comme modèle de prédiction interne le multi-modèle TS (utilisé pour la commande TS-DMC) obtenu pour notre système ASM1 réduit donné par l'équation (Eq. 4.2) avec  $x = [X_{BH}, S_S, S_O]^T$  est le vecteur des variables d'état et  $u = [X_{BH}^{in}, S_S^{in}, q_a]^T$  est le vecteur des variables d'entrée.

### 5.2.1 Résultats et simulations de la commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 3 variables de prémisses

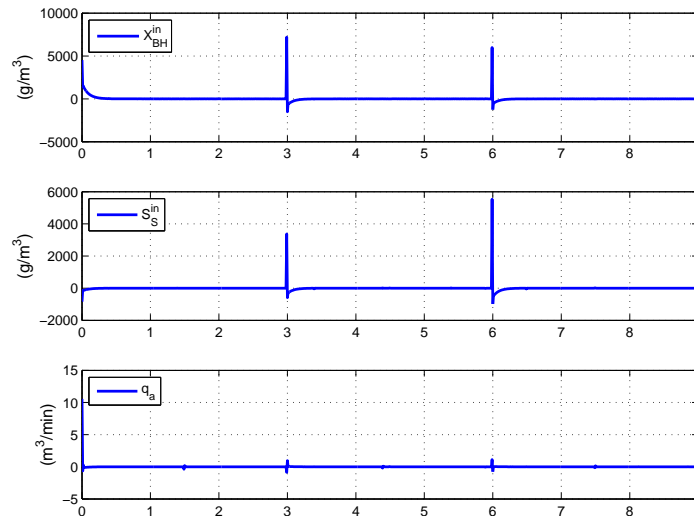
Une série de simulations a été appliquée au processus et au développement des contrôleurs avancés, sous les hypothèses et les paramètres suivants :

1. 9 heures de temps de simulation, ce qui correspond à 900 échantillons, obtenus avec un temps d'échantillonnage de 36s.
2. Un horizon de contrôle  $N_c = 1$ .
3. Un horizon de prédiction  $N_2 = 50$ , pour une efficacité maximale,  $N_2$  est égal au temps de réponse du système.

4. Incertitudes dans le taux de mortalité de la biomasse hétérotrophe  $b_H$ .



(a) Sortie TS-GPC en l'absence de perturbations

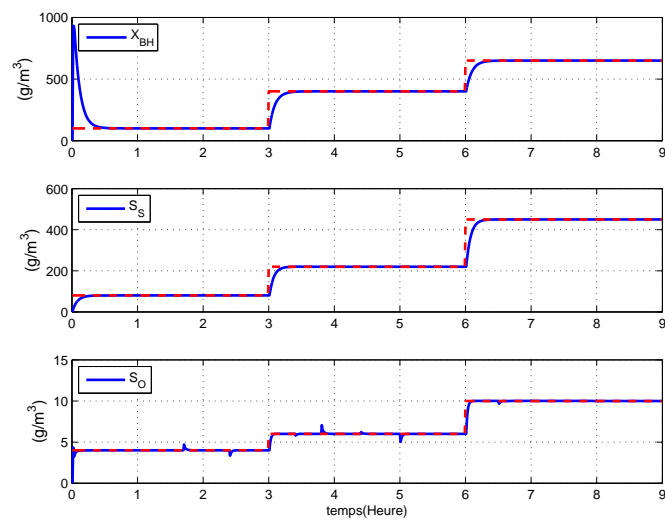


(b) Variable de contrôle TS-GPC en l'absence de perturbations

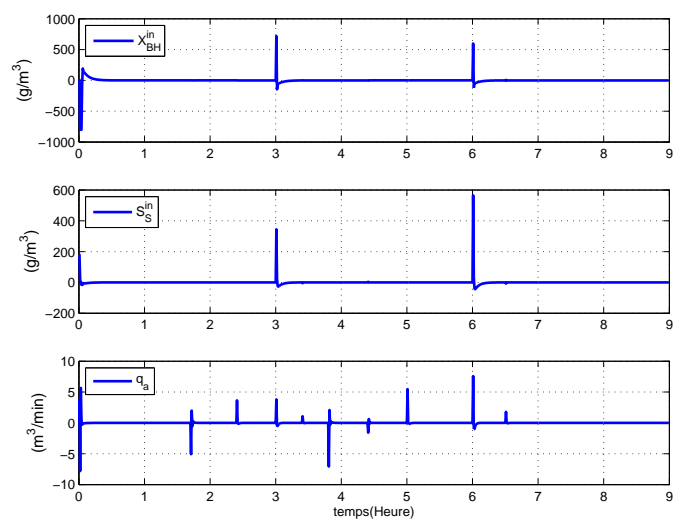
Fig. 5.5 – Commande TS-GPC en l'absence de perturbations

A partir de la figure (Fig. 5.5), on peut voir que la commande TS-GPC où le contrôleur utilise le multi-modèle TS avec la combinaison des sorties des 8 sous-modèles, en l'absence de perturbations, nous donne d'excellents résultats; Cependant on peut remarqué que pour les deux variables de sorties  $X_{BH}$  et  $S_S$  la commande est souple alors que dans le cas de la sortie  $S_O$  la commande est rapide et le temps pour atteindre la référence est très petit, et si on tient à améliorer ce problème la

commande des deux variables  $X_{BH}$  et  $S_S$  présente des fluctuations dans les basses fréquences, ceci est très naturel vu que la dynamique des trois variables est différente.



(a) Sortie TS-AGPC en l'absence de perturbations

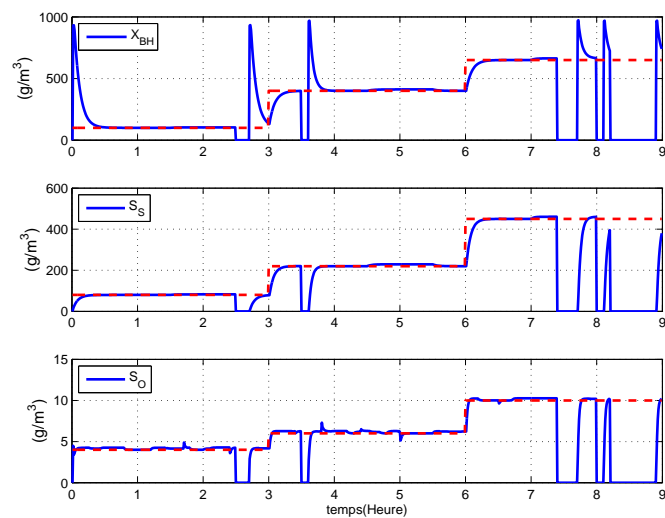


(b) Variable de contrôle TS-AGPC en l'absence de perturbations

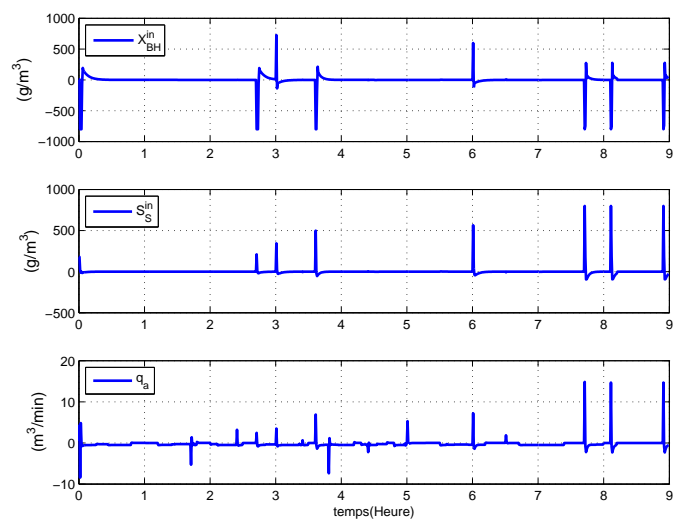
Fig. 5.6 – Commande TS-AGPC en l'absence de perturbations

A partir de la figure (Fig. 5.6), on peut voir que la commande TS-AGPC qui utilise un seul sous modèle à la fois, en l'absence de perturbations, donne d'excellents résultats notamment pour les deux variables  $X_{BH}$  et  $S_S$ ; Cependant on peut distinguer l'effet des changements soudains ( $S_o$ )

dans la sélection du sous-modèle (par exemple à l'instant 1h42, où nous passons du sous-modèle 3 au sous-modèle 4 et à l'instant 2h24, où nous passons du sous-modèle 4 au sous-modèle 3).



(a) Sortie TS-AGPC en présence de perturbations

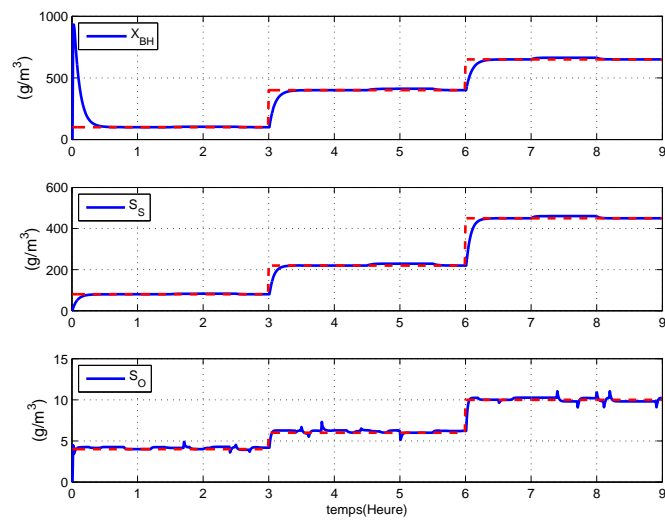


(b) Variable de contrôle TS-AGPC en présence de perturbations

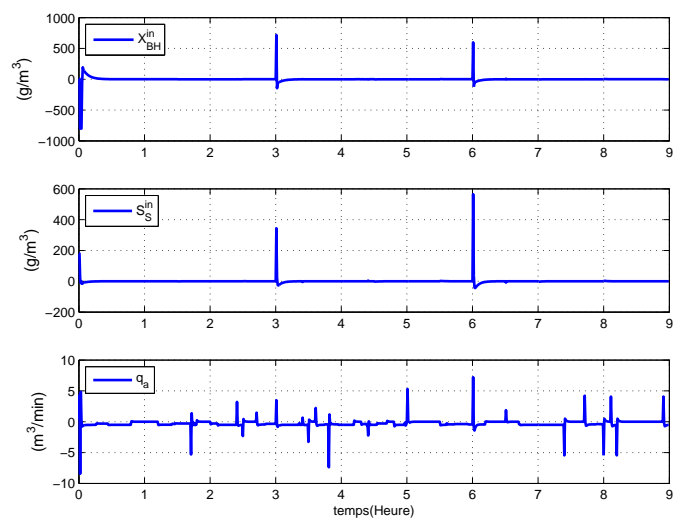
Fig. 5.7 – Commande TS-AGPC en présence de perturbations

En présence des perturbations et des contraintes, le TS-AGPC présente des défaillances à différents instants notamment durant le chevauchement des  $\mu_i$  (voir Fig. 5.7), en utilisant un seul modèle à la fois pour le calcul de la loi de contrôle basée sur les fonctions de pondération (maximum  $\mu_i$ ), la commande TS-AGPC sélectionne un seul sous-modèle à la fois, en négligeant la sortie du second

sous-modèle d'importance notamment dans le cas du changement dans la sélection dans les  $\mu_i$  quand la sélection tombe sur un modèle local dominant.



(a) Sortie TS-AGPC2 en présence de perturbations



(b) Variable de contrôle TS-AGPC2 en présence de perturbations

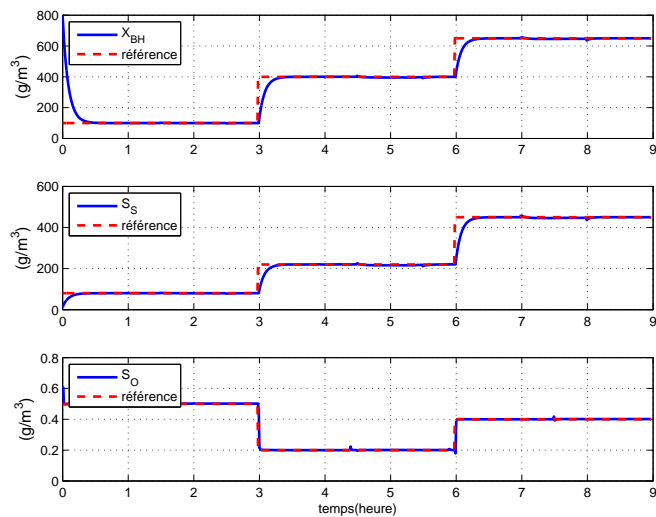
Fig. 5.8 – Commande TS-AGPC2 en présence de perturbations

Pour surmonter le problème de la commande TS-AGPC en présence des perturbations et des contraintes lors du chevauchement des  $\mu_i$ , une approche utilisant la combinaison des deux modèles (TS-AGPC2) qui se chevauchent lors de la commutation est également mise en œuvre où nous

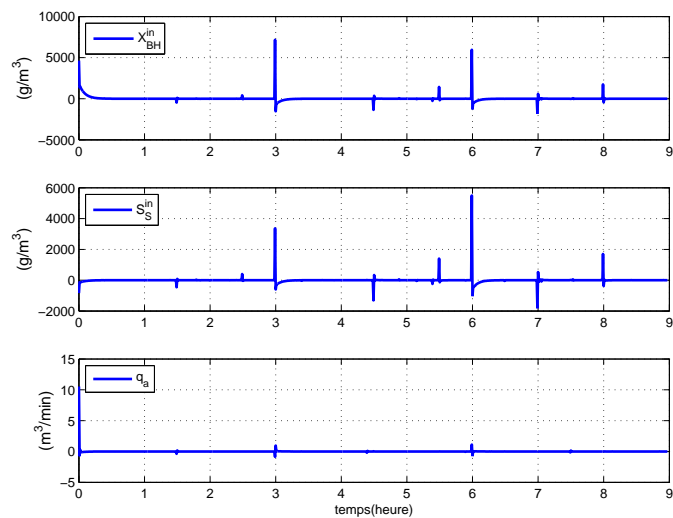
proposons d'utiliser les deux sous-modèles 1 et 2 lorsque  $\mu_1$  et  $\mu_2$  se chevauchent ainsi que les deux sous modèles 3 et 4 lorsque  $\mu_3$  et  $\mu_4$  se chevauchent (voir Fig. 5.8).

Le contrôleur peut être mis en œuvre par une intégration pondérée des deux contrôleurs locaux gagnants lors de la commutation et est donné par

$$\Delta u(k) = \frac{\sum_{i=1,3}^{2,4} \mu_i \Delta u_i}{\sum_{i=1,3}^{2,4} \mu_i} \quad (5.1)$$



(a) Sortie TS-GPC en présence de perturbations



(b) Variable de contrôle TS-GPC en présence de perturbations

Fig. 5.9 – Commande TS-GPC en présence de perturbations

Ce problème n'est pas distingué, même en présence de perturbations (voir Fig. 5.9) lorsque le modèle complet TS est utilisé comme modèle interne dans l'approche TS-GPC, puisque tous les sous-modèles sont utilisés dans le calcul de l'incrément de commande. Cela donne au TS-GPC le pouvoir de suivre la trajectoire de référence et de rejeter tout type de perturbations et le problème des pics dans le cas des changements dans la sélection dans les  $\mu_i$  n'existe pas.

### 5.3 Commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bio-réacteur ASM1 réduit à 4 variables de prémisse

Malgré que le passage du système non linéaire montré dans (Fig. 1.1) et représenté par le système d'équations différentielles (Eq. 1.17), vers le multi-modèle donné par l'équation (Eq. 4.2) est réalisé sans perte d'informations et que le choix des variables de prémisse est réalisé d'une façon systématique, il reste néanmoins crucial pour le choix du vecteur d'entrée. On cherche à construire un multi-modèle qui prend en considération les contraintes, les perturbations ainsi que les variables de contrôle réelles afin de l'utiliser comme modèle interne pour la commande prédictive TS-GPC.

#### 5.3.1 Obtention d'un multi-modèle (TS) pour le modèle ASM1 réduit à 4 variables de prémisse

En réalité, nous ne pouvons pas considérer les concentrations de la biomasse et du substrat organique ( $X_{BH}^{in}$ ,  $S_S^{in}$ ) comme variables de commande, ce sont des variables de perturbation. Il est préférable de s'attaquer de manière plus pratique au problème et de choisir les variables de commande appropriées.

Nous pouvons considérer comme variables de commande le débit d'entrée  $q_{in}$  (si nous pouvons agir dessus), le taux de recirculation  $q_R$  ou le taux d'élimination de l'excès de biomasse  $q_W$ .

Les capteurs dans les stations de traitement des eaux usées (WWTP) sont encore très chers, c'est pourquoi, nous ne pouvons pas contrôler toutes les variables d'état, la stratégie de contrôle a été modifiée uniquement pour contrôler la concentration de biomasse hétérotrophique  $X_{BH}$ , ceci est plus réaliste en utilisant le taux d'élimination de l'excès de biomasse  $q_W$ .

Notre processus à boues activées montré dans (Fig. 1.1) et représenté par le système d'équations différentielles (Eq. 1.17) contient quatre non-linéarités si on considère le vecteur d'entrée ( $u = [q_W, q_a, X_{BH}^{in}, S_S^{in}]^T$ ). Les variables de prémisse sélectionnées qui assurent les critères de sélection Quasi-LPV, cités auparavant sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(S_S, S_O) = \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \\ z_2(q_{in}, V) = \frac{q_{in}}{V}, \\ z_3(q_a) = q_a, \\ z_4(X_{BH}) = X_{BH} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Le nombre de sous-modèles est donné par  $2^p$  avec  $p$  le nombre de variables de prémisses, c'est-à-dire  $2^4 = 16$  sous-modèles, qui sont présentés par les paires  $(A_i, B_i)$  ( $i = 1, \dots, 16$ ), ci-dessous

$$\begin{aligned} A_1 &= A(z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,1}) & B_1 &= B(z_{2,1}, z_{4,1}) \\ A_2 &= A(z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,1}) & B_2 &= B(z_{2,1}, z_{4,2}) \\ A_3 &= A(z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,2}) & B_3 &= B(z_{2,1}, z_{4,1}) \\ A_4 &= A(z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,2}) & B_4 &= B(z_{2,1}, z_{4,2}) \\ A_5 &= A(z_{1,1}, z_{2,2}, z_{3,1}) & B_5 &= B(z_{2,2}, z_{4,1}) \\ A_6 &= A(z_{1,1}, z_{2,2}, z_{3,1}) & B_6 &= B(z_{2,2}, z_{4,2}) \\ A_7 &= A(z_{1,1}, z_{2,2}, z_{3,2}) & B_7 &= B(z_{2,2}, z_{4,1}) \\ A_8 &= A(z_{1,1}, z_{2,2}, z_{3,2}) & B_8 &= B(z_{2,2}, z_{4,2}) \\ A_9 &= A(z_{1,2}, z_{2,1}, z_{3,1}) & B_9 &= B(z_{2,1}, z_{4,1}) \\ A_{10} &= A(z_{1,2}, z_{2,1}, z_{3,1}) & B_{10} &= B(z_{2,1}, z_{4,2}) \\ A_{11} &= A(z_{1,2}, z_{2,1}, z_{3,2}) & B_{11} &= B(z_{2,1}, z_{4,1}) \\ A_{12} &= A(z_{1,2}, z_{2,1}, z_{3,2}) & B_{12} &= B(z_{2,1}, z_{4,2}) \\ A_{13} &= A(z_{1,2}, z_{2,2}, z_{3,1}) & B_{13} &= B(z_{2,2}, z_{4,1}) \\ A_{14} &= A(z_{1,2}, z_{2,2}, z_{3,1}) & B_{14} &= B(z_{2,2}, z_{4,2}) \\ A_{15} &= A(z_{1,2}, z_{2,2}, z_{3,2}) & B_{15} &= B(z_{2,2}, z_{4,1}) \\ A_{16} &= A(z_{1,2}, z_{2,2}, z_{3,2}) & B_{16} &= B(z_{2,2}, z_{4,2}) \end{aligned}$$

Enfin, le système non linéaire (Eq. 1.17) sera la somme de 16 sous-modèles linéaires interpolés par une fonction non linéaire, donnée comme résultat final dans (Eq. 5.3) :

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^{16} \mu_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{16} \mu_i(z(t))}, \quad (5.3)$$

Le vecteur d'état étant :  $x = [X_{BH}, S_S, S_O]^T$  et le vecteur d'entrée  $u = [q_W, q_a, X_{BH}^{in}, S_S^{in}]^T$ , respectivement le taux d'élimination de l'excès de biomasse (la variable de contrôle) l'entrée du débit

d'air, les bactéries hétérotrophes et les entrées du substrat de carbone comme perturbations d'entrée non contrôlable. La sortie commandée est alors limitée à la concentration de biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , et où  $\mu_i(z(t))$  (Fig. 5.10) sont données par la formule (Eq. 2.14) comme suit :

$$\begin{aligned}
\mu_1(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_2(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t)) \\
\mu_3(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_4(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t)) \\
\mu_5(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_6(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t)) \\
\mu_7(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_8(z(t)) &= F_{1,1}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t)) \\
\mu_9(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_{10}(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t)) \\
\mu_{11}(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_{12}(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,1}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t)) \\
\mu_{13}(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_{14}(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,1}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t)) \\
\mu_{15}(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,1}(z_4(t)) \\
\mu_{16}(z(t)) &= F_{1,2}(z_1(t))F_{2,2}(z_2(t))F_{3,2}(z_3(t))F_{4,2}(z_4(t))
\end{aligned}$$

### 5.3.2 Résultats et simulations de la commande TS-GPC basée sur le multi-modèle TS du bioréacteur ASM1 réduit à 4 variables de pré-misse

Une série de simulations a été appliquée au processus et au développement des contrôleurs avancés, sous les hypothèses et les paramètres suivants :

1. 9 heures de temps de simulation, ce qui correspond à 900 échantillons, obtenus avec un temps d'échantillonnage de 36s.
2. Pour une commande souple, l'horizon de commande  $N_c = 1$ , dans le cas où il n'existe pas de pole instable du système en boucle ouverte.

3. Un horizon de prédiction  $N_2 = 50$ , pour une efficacité maximale,  $N_2$  est égal au temps de réponse du système.
4. Des contraintes d'entrée sur le débit  $q_W$ .
5. Des perturbations dans le débit d'air d'entrée  $q_a$  et les bactéries hétérotrophes et le substrat de carbone  $X_{BH}^{in}$ ,  $S_S^{in}$ .
6. Incertitudes dans le taux de mortalité de la biomasse hétérotrophe  $b_H$ .

Fig. 5.10, représente les fonctions de pondération  $\mu_i(z(t))$  données par la formule (Eq. 2.14) lorsque les hypothèses citées ci-dessus sont appliquées.

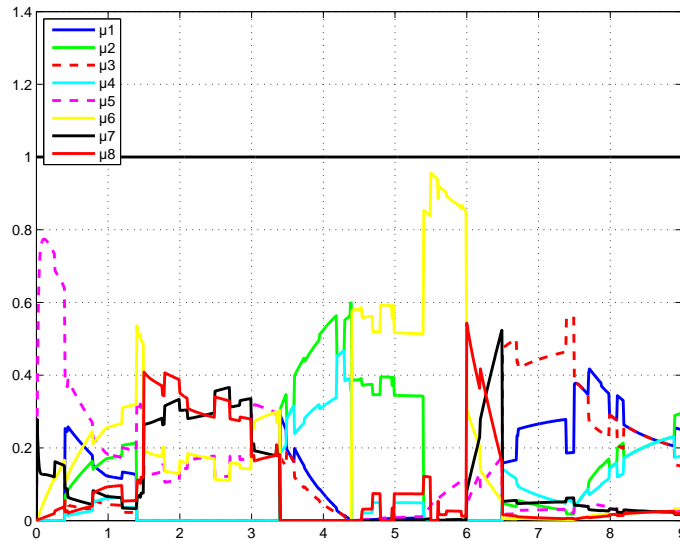
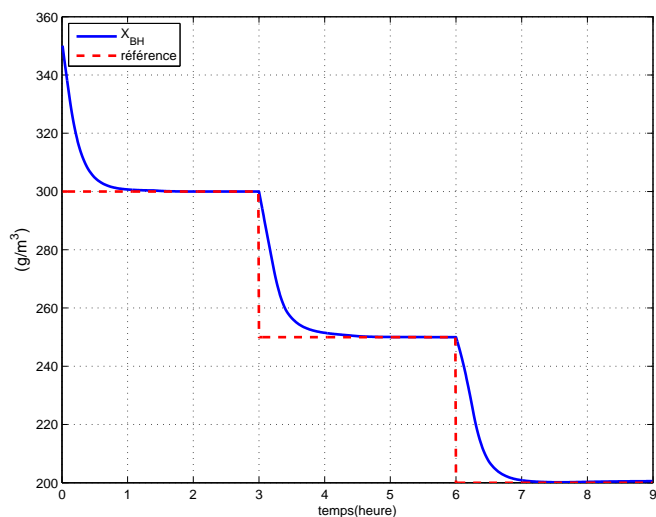


Fig. 5.10 – Evolution des fonctions d'appartenance en présence de perturbations et d'incertitudes

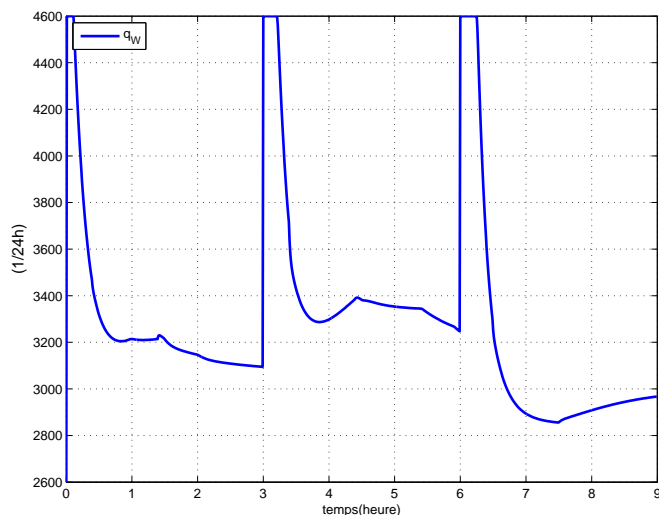
D'après la figure (Fig. 5.10), les perturbations des entrées et les incertitudes paramétriques, ont sérieusement compromis les fonctions de pondération  $\mu_i$  ainsi que les performances du modèle global. L'explication est donnée d'une part par le fait que les variables de prémisses sont dépendantes de  $q_{in}$ ,  $q_a$ , et  $S_S^{in}$ , donc fortement affectées par des perturbations dans le débit d'air  $q_a$  et le débit d'entrée  $q_{in}$  (voir Eq. 4.1).

D'autre part, les contraintes sur la concentration du substrat  $S_S^{in}$ , et la concentration de la biomasse hétérotrophe  $X_{BH}^{in}$ , influencent de manière significative les fonctions de pondération  $\mu_i$ .

À partir de la figure (Fig. 5.10) on peut clairement voir qu'aux instants 3h30mn et 4h12mn  $\mu_2$  et  $\mu_4$  se chevauchent. Les mêmes observations peuvent être constatées aux instants 7h30, 8h00 et 8h12 où  $\mu_1$  et  $\mu_3$  se chevauchent. Le chevauchement dans  $\mu_i$  conclut l'importance des sous modèles associés, par exemple, le modèle 2 et 4 à l'instant 3h30, et les sous-modèles 1 et 3 à l'instant 7h30. La valeur maximale des fonctions de pondération  $\mu_i$  sera associée à un sous-modèle à chaque instant,



(a) Sortie TS-GPC en l'absence de perturbations



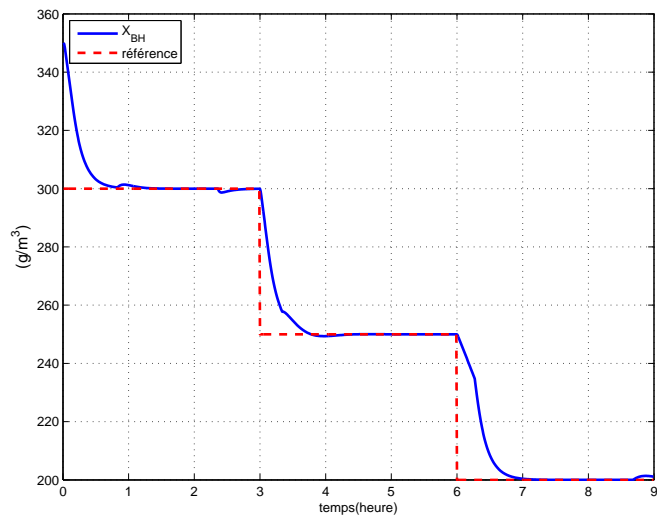
(b) Variable de contrôle TS-GPC en l'absence de perturbations

Fig. 5.11 – Commande TS-GPC en l'absence de perturbations

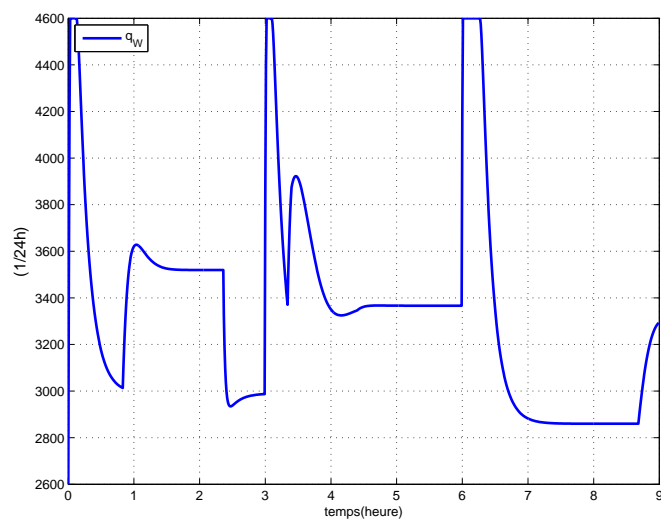
en négligeant la sortie du second sous-modèle, induisant ainsi une perte d'informations importantes et une erreur au modèle.

A partir de la figure (Fig. 5.12), on peut voir que la commande TS-AGPC, en l'absence de perturbations, donne d'excellents résultats ; Cependant l'effet des changements soudains dans la sélection du sous-modèle par exemple à l'instant 0h50, où nous passons du sous-modèle 5 au sous-modèle 6, peut néanmoins être remarqué. Ce phénomène est, logiquement, pas ressorti lors de l'utilisation

TS-GPC, où le contrôleur utilise le modèle TS avec la combinaison des sorties des 8 sous-modèles, (voir Fig. 5.11).



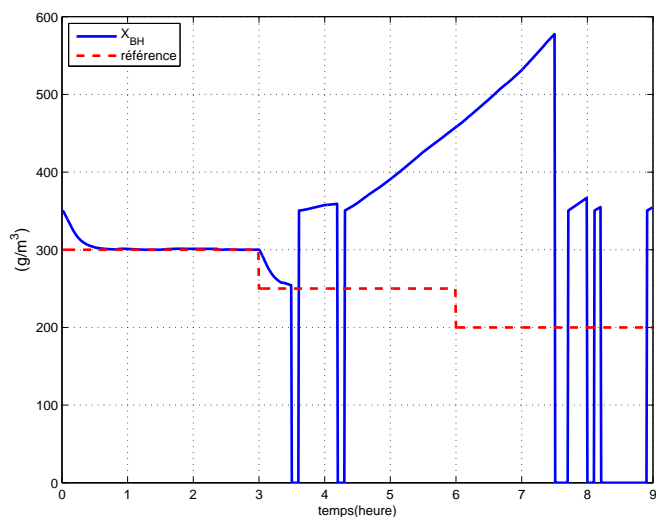
(a) Sortie TS-AGPC en l'absence de perturbations



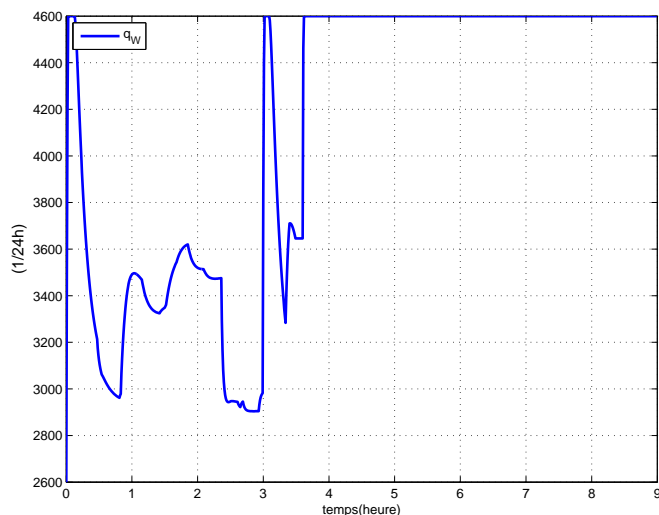
(b) Variable de contrôle TS-AGPC en l'absence de perturbations

Fig. 5.12 – Commande TS-AGPC en l'absence de perturbations

En présence des perturbations et des contraintes, le TS-AGPC présente des faiblesses à différents instants (voir Fig. 5.13), en utilisant un seul modèle à la fois pour le calcul de la loi de contrôle basée sur les fonctions de pondération maximum  $\mu_i$ , la commande TS-AGPC sélectionne un sous-



(a) Sortie TS-AGPC en présence de perturbations

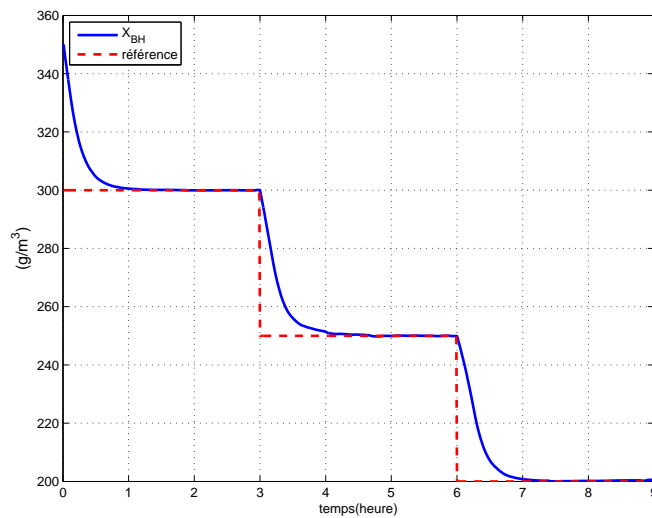


(b) Variable de contrôle TS-AGPC en présence de perturbations

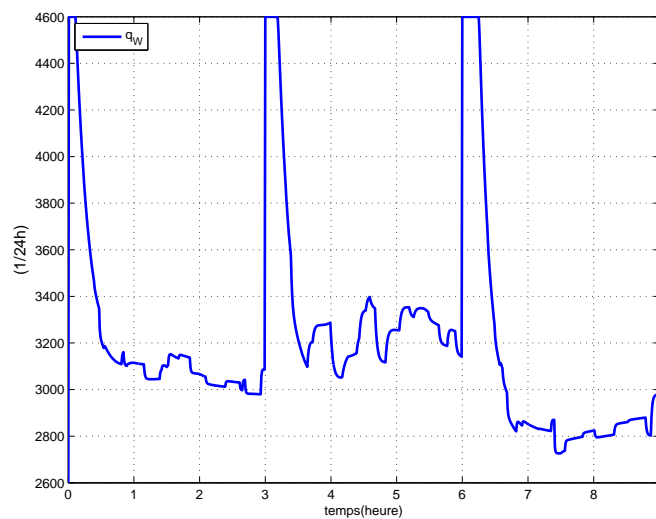
Fig. 5.13 – Commande TS-AGPC en présence de perturbations

modèle à la fois, en négligeant la sortie du second sous-modèle d'importance notamment dans le cas du chevauchement dans les  $\mu_i$ . Cela induira une perte d'informations précieuses et une erreur des modèles du processus, car le modèle global est la somme de tous les sous-modèles, où chaque sous-modèle représente mieux le système global dans un espace d'entrée/sortie spécifique. Le reste des sous-modèles, représentent des informations supplémentaires, nécessaires pour mieux approcher

le comportement du modèle non linéaire global. Ceux-ci seront perdus pendant le processus de commutation lors du chevauchement des  $\mu_i$ .



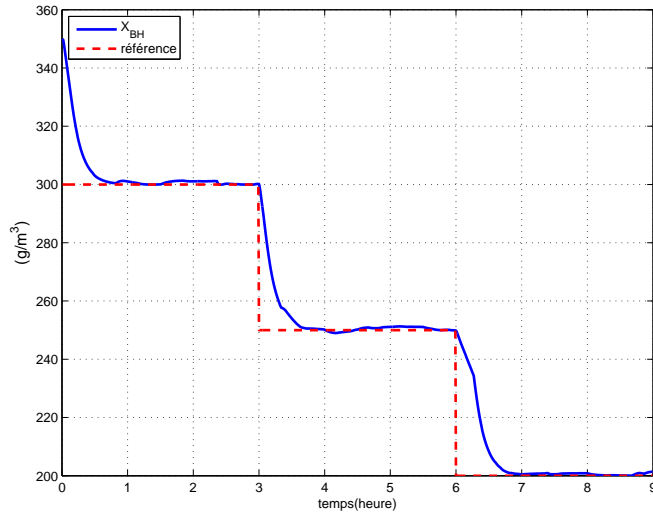
(a) Sortie TS-GPC en présence de perturbations



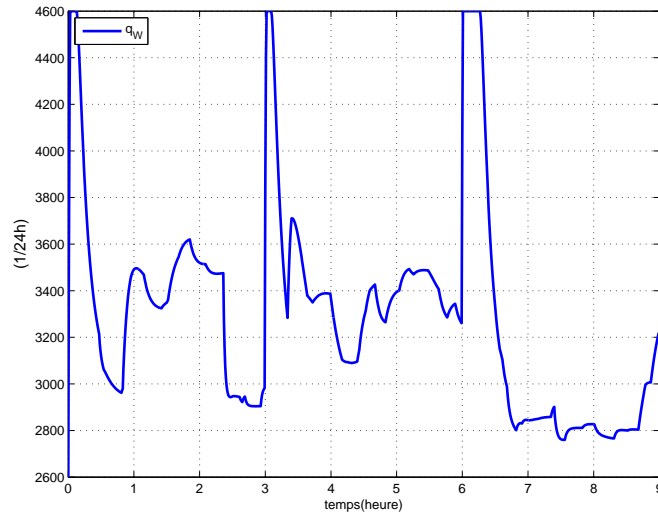
(b) Variable de contrôle TS-GPC en présence de perturbations

Fig. 5.14 – Commande TS-GPC en présence de perturbations

Ce problème n'est pas distingué, même en présence de perturbations (voir Fig. 5.14) lorsque le modèle complet TS est utilisé comme modèle interne dans l'approche TS-GPC, puisque tous les sous-modèles sont utilisés dans le calcul de l'incrément de commande. Cela donne au TS-GPC le pouvoir de suivre la trajectoire de référence et de rejeter tout type de perturbations.



(a) Sortie TS-AGPC2 en présence de perturbations



(b) Variable de contrôle TS-AGPC2 en présence de perturbations

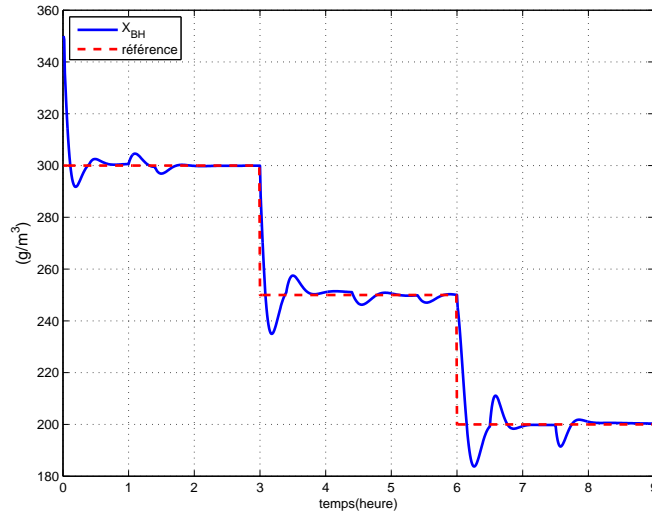
Fig. 5.15 – Commande TS-AGPC2 en présence de perturbations utilisant plus d'un sous-modèle à la fois

Pour surmonter le problème de la commande TS-AGPC en présence des perturbations et des contraintes lors du chevauchement des  $\mu_i$ , une approche utilisant la combinaison des deux modèles (TS-AGPC2) qui se chevauchent lors de la commutation est également mise en œuvre où nous proposons d'utiliser plus d'un sous-modèle à la fois (voir Fig. 5.15), en choisissant les deux sous-

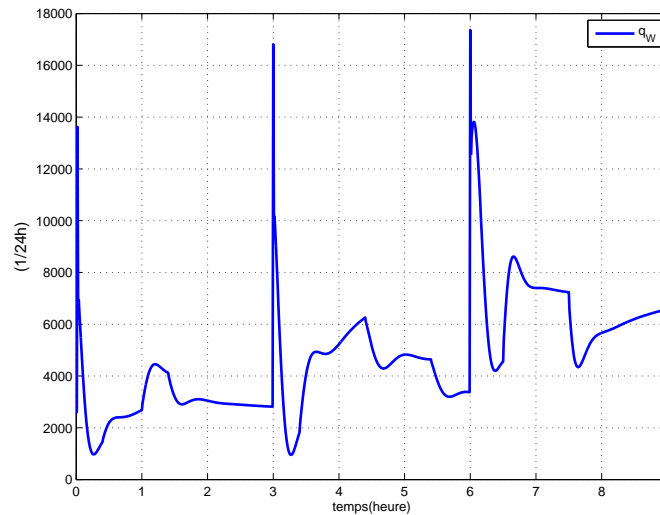
modèles 1 et 3 lorsque  $\mu_1$  et  $\mu_3$  se chevauchent ainsi que les deux sous modèles 2 et 4 lorsque  $\mu_2$  et  $\mu_4$  se chevauchement (voir Fig. 5.15).

Le contrôleur peut être mis en œuvre par une intégration pondérée des deux contrôleurs locaux gagnants lors de la commutation et est donné par

$$\Delta u(k) = \frac{\sum_{i=1,2}^{3,4} \mu_i \Delta u_i}{\sum_{i=1,2}^{3,4} \mu_i} \quad (5.4)$$



(a) Sortie PID en l'absence de perturbations

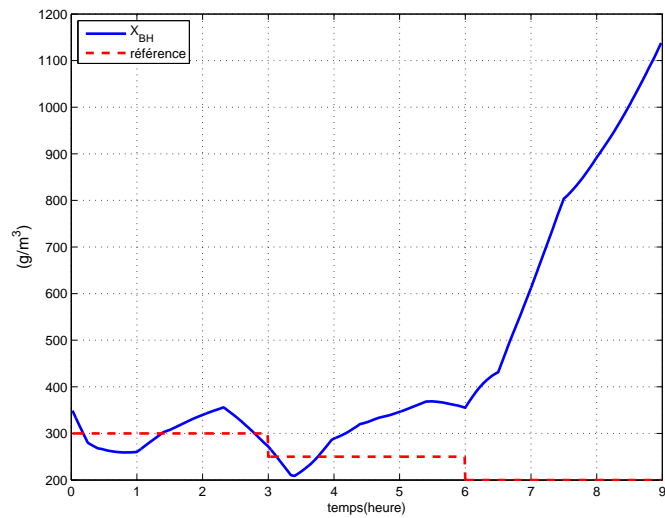


(b) Variable de contrôle PID en l'absence de perturbations

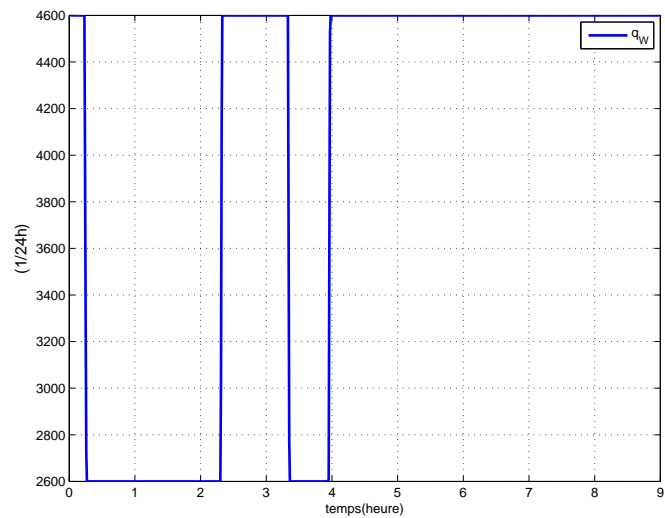
Fig. 5.16 – Commande PID en l'absence de perturbations

Pour montrer la robustesse des stratégies de commande avancées MPC sur le contrôle classique, représenté par un PID, (réglé avec  $K_p = 4.6$ ,  $K_i = 2$  et  $K_d = 0.9$ ) après plusieurs tests effectués.

On peut voir clairement que le PID, peu importe le réglage optimal des paramètres, ne peut égarer les performances du MPC en l'absence de perturbations (Fig. 5.16) alors qu'en présence de perturbations et des contraintes, il ne parvient pas à fournir un suivi acceptable de la référence (Fig. 5.17).



(a) Sortie PID en présence de perturbations



(b) Variable de contrôle PID en présence de perturbations

Fig. 5.17 – Commande PID en présence de perturbations

Au contraire, les stratégies MPC réussissent à fournir un contrôle précis sans perturbations (Fig. 5.11, Fig. 5.12) pour les deux stratégies TS-GPC et TS-AGPC. Cependant, en présence de contraintes et de perturbations, TS-AGPC subit des pertes de performances lors de la commutation des sous-modèles (Fig. 5.13) tandis que TS-GPC conserve pratiquement le même niveau de performance, même en présence de contraintes et de perturbations (Fig. 5.14).

Les figures (Fig. 5.18, Fig. 5.19) illustrent les performances des différents contrôleurs et les résultats obtenus sont affichés dans le Tableau 5.1. Cependant, les performances PID présentées (Fig. 5.18) sont celles sans contraintes, comme on le voit, la performance du PID diminue considérablement.

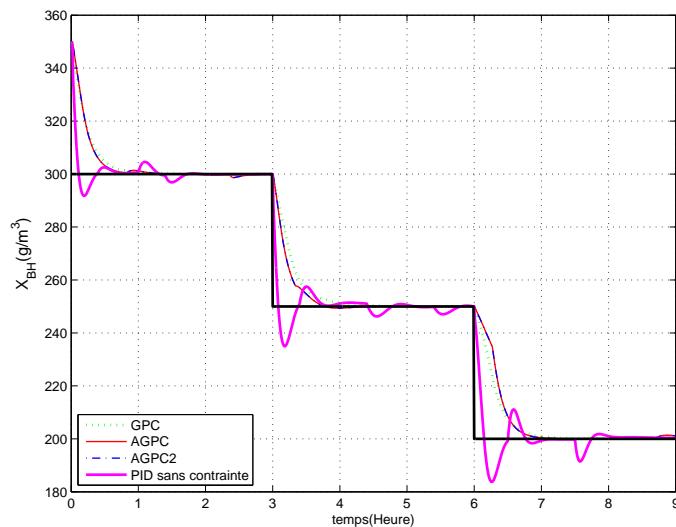


Fig. 5.18 – Comparaison entre stratégies de contrôle sans perturbations

En effet, d'une part, le résultat des erreurs de sortie donné dans le Tableau 5.1, montre que les erreurs de poursuite du TS-GPC sont sensiblement inférieures aux erreurs de poursuite obtenues avec le TS-AGPC. D'autre part, les contraintes d'entrée sont scrupuleusement respectées par le TS-GPC, tandis que dans cas du contrôleur TS-AGPC en présence de perturbations, les contraintes sont clairement violées.

En utilisant une combinaison des deux sous-modèles dominants dans le processus de commutation de l'approche TS-AGPC2, on améliore les performances du TS-AGPC, mais toute fois le TS-GPC reste meilleur en présence de perturbations.

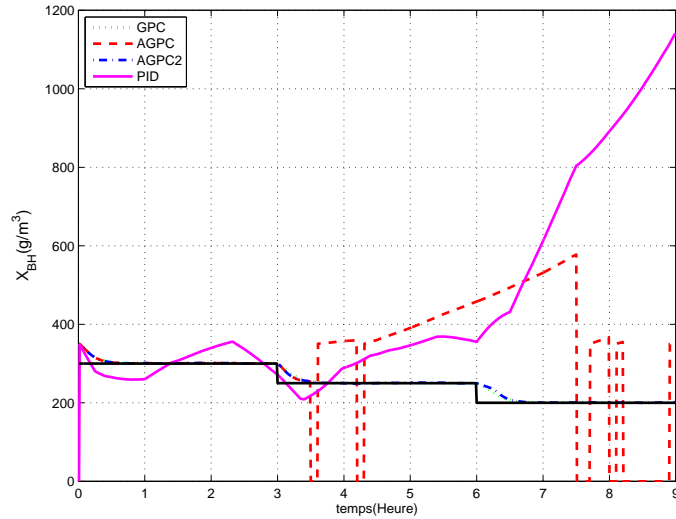


Fig. 5.19 – Comparaison entre stratégies de contrôle avec perturbations

Tableau 5.1 – Performance des commandes TS-GPC, TS-AGPC, TS-AGPC2 et PID

TS-GPC	TS-AGPC	TS-AGPC2	PID
MSE / avec perturbations et incertitudes			
13.63	84.73	14.63	230.26
MSE / sans perturbations et incertitudes			
3.29	3.76	3.76	15.88

## 5.4 Conclusion

L'approche multi-modèle TS a permis de modéliser avec précision le processus de réacteur à boues activées ASM1 réduit, ceci aussi bien dans le cas du système à trois non-linéarités (trois variables de prémisses) que dans le cas du système à quatre non-linéarités (quatre variables de prémisses) qui prend en considération les contraintes, les perturbations ainsi que les variables de contrôle réelles, donnant une structure capable d'être utilisée dans une stratégie MPC basée modèle. MPC en général et GPC et DMC en particulier, basée sur un modèle linéaire précis est bien en mesure d'obtenir des performances de contrôle élevées en cas de changement de consigne, de perturbations et des contraintes. Le contrôleur TS-GPC conçu dans notre cas, est bien capable de surpasser le TS-AGPC et le PID de référence, en particulier lors de la prise en compte des contraintes d'entrée. Cependant, les performances du TS-AGPC ou TS-AGPC2 peuvent être préférées aux TS-GPC,

si de graves perturbations ne sont pas considérées en raison de la simple formulation de la loi de commande. Toutefois, l'approche utilisant la combinaison des deux sous-modèles (TS-AGPC2) qui se chevauchent lors de la commutation en présence de perturbations et d'incertitudes a permis un excellent résultat.

# Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse traite de la modélisation et de la commande en se basant sur l'approche multi-modèle TS. Le fonctionnement des stations à boues activées en bassin unique avec aération de surface (ASM1), a été discuté ainsi que les phénomènes biologiques intervenant dans le procédé, ce qui nous a aidé à dénombrer les 13 variables qui le constitue afin d'élaborer le modèle mathématique général du procédé, et où nous avons pu voir la précision avec laquelle le modèle global pouvait représenter le comportement du processus incluant l'élimination du carbone, la nitrification et la dénitrification. Par la suite, le modèle réduit basé sur la dégradation de la matière organique par un mélange riche en bactéries a été développé sur la base d'un certain nombre de simplifications.

Nous avons vu la difficulté des systèmes ASM1 qui utilisent des expressions complexes, avec des entrées/sorties fortement couplées, pour surmonter cette difficulté, nous avons eu recours à la technique des multi-modèles (TS) où nous avons apprécié la facilité d'exploitation, mais aussi les avantages et les inconvénients de ces techniques de modélisation, qui se résumait à un choix des variables de prémisses basé sur la méthode Quasi-LPV, plusieurs choix pour les formes Quasi-LPV sont possibles en fonction du choix des variables de prémisses, affectant le nombre de sous-modèles, la structure globale, l'observabilité et la contrôlabilité du système. Cependant le processus étudié a été facilement modélisé avec 3 et 4 variables de prémisses (donnant respectivement 8 et 16 sous systèmes linéaires). Nous avons toutefois pu constater que le choix des variables de prémisses, malgré le respect de l'observabilité et la commandabilité du système, pouvait donner des sous modèles instables.

Notre travail porte sur deux contributions distinctes : la première est la modélisation TS et l'utilisation des RNA, plus précisément MLP, pour la conception de la fonction de pondération  $\mu$ , exprimant la partie non linéaire du multi-modèle (TS) pour le modèle du bioréacteur à boues activées (ASM1) réduit. Notre modèle non linéaire du ASM1 réduit a servi comme base de données pour la construction du modèle RNA (Neuro-TS), les sorties des 8 sous-modèles linéaires du système ASM1 réduit obtenus par le multi-modèle (TS) sont considérées comme entrées du réseau.

Le résultat principal obtenu, d'une part, donne des résultats qui semblent être aussi bon que le

Neuro-TS équivalent au multi-modèle (TS) en terme de performance mais plus coûteux en terme de temps de calcul, en particulier pendant la phase d'apprentissage. Et d'autre part, en présence de perturbations et d'incertitudes, le modèle Neuro-TS surpasse les résultats du multi-modèle (TS) classique. La puissance de généralisation du RNA permet ces résultats lorsque les bonnes topologies choisies avec un bon apprentissage et validation.

La deuxième contribution a porté sur l'aspect commande, le multi-modèle (TS) global du bioréacteur à boues activées réduit présente une structure simple capable d'être utilisé dans une stratégie MPC en général et GPC et DMC en particulier. La commande prédictive (TS-MPC) qui utilise le multi-modèle (TS) complet dans le calcul de la loi de contrôle a été étudiée.

Par la suite, l'approche TS-AMPC est obtenue en basculant entre les sous-modèles linéaires de la formulation TS. Ceci est effectué en sélectionnant, par tour, une partie de la fonction de pondération  $\mu$ . Le modèle associé à cette dernière a servi de modèle interne pour la formulation de la loi de contrôle TS-AMPC. La comparaison de ce dernier avec l'utilisation des deux sous-modèles internes les plus significatifs a également été mise en œuvre et testée (TS-AMPC2). Enfin, les performances, sous perturbations d'entrées et incertitudes paramétriques ainsi que des contraintes sur les variables de commande du contrôleur TS-AMPC, sont comparées à un contrôleur TS-MPC global et à un PID de référence en termes d'erreur et réponse dynamique.

Le contrôleur TS-GPC conçu dans notre cas, basé sur un modèle linéaire précis est bien en mesure d'obtenir des performances de contrôle élevées en cas de changement de consigne, de perturbations et des contraintes et est capable de surpasser le TS-AGPC et le PID de référence, en particulier lors de la prise en compte des contraintes d'entrées. Cependant, les performances du TS-AGPC ou TS-AGPC2 peuvent être préférées aux TS-GPC, si de graves perturbations ne sont pas considérées en raison de la simple formulation de la loi de commande.

Les résultats proposés dans cette thèse ouvrent un certain nombre de perspectives :

- L'utilisation du modèle Neuro-TS comme modèle interne pour une stratégie de commande prédictive MPC.
- Application des commandes robustes à savoir  $H_\infty$ , LQR, LQG, etc.
- Etude de l'impact réel des perturbations et des incertitudes paramétriques sur le multi-modèle TS et le Neuro-TS.
- Tester la commande MPC pour le modèle global.

## Annexe A

# Transformation du système

Généralement, la plus part des systèmes d'équations différentielles sont donnés par  $u$  et non pas  $\Delta u$ . Cependant, la loi de contrôle MIMO GPC développée dans (Eq. 3.13) est basée sur le système ayant une entrée  $\Delta u$ . Dans ce qui suit, nous fournissons la transformation des équations du système avec une entrée  $u$  vers un système avec une entrée  $\Delta u$ . Considérons un système MIMO LTI avec  $p$  entrées et  $q$  sorties :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où l'entrée du système est  $u$  et la sortie est  $y$ . Si  $H(z)$  désigne la fonction de transfert de  $u(k)$  à  $y(k)$ . Alors,

$$Y(z) = H(z)U(z) \quad (\text{A.2})$$

où  $H(z)$  est donnée par

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] \quad (\text{A.3})$$

Maintenant, supposant  $T(z)$  la fonction de transfert de l'entrée  $\Delta u(k)$  vers l'entrée  $u(k)$ ,

$$U(z) = T(z)\Delta U(z) \quad (\text{A.4})$$

où,  $T(z)$  est une matrice de transfert de dimension  $p \times p$  et est de la forme :

$$T(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-z^{-1}} \end{bmatrix}_{p \times p} \quad (\text{A.5})$$

supposant  $T(z)$  est donnée par

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} A_\Delta & B_\Delta \\ \hline C_\Delta & D_\Delta \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I_{p \times p} & I_{p \times p} \\ \hline I_{p \times p} & I_{p \times p} \end{array} \right] \quad (\text{A.6})$$

Et l'état

$$x_\Delta(k) = u(k-1) \quad (\text{A.7})$$

Maintenant, Supposant  $H_\Delta(z(t))$  indique le système avec l'entrée  $\Delta u(k)$ , la sortie  $y(k)$  et l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k) \\ y(k) = Cx(k) + D\Delta u(k) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Alors,

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)T(z)\Delta U(z) \\ &= H_\Delta(z)\Delta U(z) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

où  $H_\Delta(z)$  est donnée par

$$H_\Delta = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} \hat{A} & \hat{B}C_\Delta & \hat{B}D_\Delta \\ 0 & A_\Delta & B_\Delta \\ \hline \hat{C} & \hat{D}C_\Delta & \hat{D}D_\Delta \end{array} \right] \quad (\text{A.10})$$

Et le nouveau état est

$$x(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ x_\Delta(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

# Bibliographie

- [Akhenak et al, 2004] Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J. et Maquin, D. Estimation of state and unknown inputs of a non linear system represented by a multiple model, *11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing*, MMM, Nancy, France, 2004.
- [Bego et al, 2000] Bego, O., Peric, N. et Petrovic, N., Decoupling multivariable gpc with reference observation, *Electrotechnical Conference, MELECON*, 819-822, 2000
- [Bellman, 1961] Bellman, R., Adaptive control processes : a guided tour, *Princeton University Press*, London, 1961.
- [Bergsten et Palm, 2000] Bergsten, P., Palm, R. et Driankov, D., Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems, In *9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Antonio, Texas, USA, 2000.
- [Bergsten et al., 2001] Bergsten, P., Palm, R. et Driankov, D., Fuzzy observers, In *10th IEEE International Fuzzy Systems Conference*, 700–703, Melbourne, Australia, 2001.
- [Bishop, 1995] Bishop, C.M., Neural Networks for Pattern Recognition, *Clarendon Press*, Oxford, 1995.
- [Bouarar, 2009] Bouarar, T., Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés, *PhD thesis*, Université de Reims Champagne Ardenne, Reims, France, 2009.
- [Broomhead et Lowe, 1988] Broomhead, D.S. et Lowe, D., Multivariable functional interpolation and adaptive networks, *Complex Systems*, Vol. 2, 321–355, 1988.
- [Boyd, 1994] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., et Balakrishnan, V., Linear Matrix Inequalities in system and control theory, *Studies in Applied and Numerical Mathematics*, Philadelphia, 1994.
- [Breiman et al, 1984] Breiman, L., Friedman, J., Olshen, J. et Ston, C., Classification and Regression Trees. *Wadsworth*, Belmont, CA, 1984.

- [Caraman et al, 2007] Caraman, S., Sbarciog, M. et Barbu, M., Predictive Control of a Wastewater Treatment Process. *International Journal of Computers, Communications and Control*, Vol. 2, 132–142, 2007.
- [Chadli, 2002] Chadli, M., Stabilité et commande des Systèmes décrits par des Multi modèles, *PhD thesis*, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2002.
- [Clarke et al, 1987] Clarke, D.W., Mohtadi, C. et Tuffs, P.S., Generalised predictive control-part I. The basic algorithm. *Automatica*, Vol. 23(2), 137–148, 1987.
- [Cutler et Ramaker, 1979] Cutler, C.R. et Ramaker. B.L., Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm. AICHE national meeting, Houston, TX, (1979).
- [Cutler, 1983] Cutler, C.R., Dynamic matrix control : an optimal multivariable control algorithm with constraints. *Ph.D. thesis*, University of Houston TX, 1983.
- [Cybenko, 1989] Cybenko, G., Aproximation by superposition of a sigmoidal function, *Mathematics of Control Signals and Systems*, Vol. 2, 303–314, 1989.
- [Escano, 2009] Escaño, J.M., Bordons, C., Vilas, C., Garcia, M.R. et Alonso, A.A., Neurofuzzy model based predictive control for thermal batch processes. *Journal of Process Control*, Vol. 19, 1566–1575, 2009.
- [Fabrice, 1996] Fabrice, R., Second Differentials in Arbitrary Feed-Forward Neural Networks. *ICNN*, 1996.
- [Filev, 1991] Filev, D., modelling of complexes systems *International Journal of Approximate Res*, Vol. 5, 281–290, 1991.
- [François, 1996] François, B. et Michel, V., Les réseaux de neurones artificiels. *Presses Universitaires de France*, Paris, 1996.
- [Friedman et Stuetzle, 1981] Friedman, J. et Stuetzle, W., Projection pursuit regression. *J. Amer. Statist. As- soc.*, Vol. 76, 817–823, 1981.
- [Froisy, 1994] Froisy, J.B., Model predictive control : Past, present and future. *ISA Transactions*, Vol. 33, 235–243, 1994.
- [Garcia et Morshedi, 1986] Garcia, C.E. et Morshedi, A.M., Quadratic Programming Solution of Dynamic Matrix Control (QDMC). *Chemical Engineering Communications*, Vol. 46, 073–087, 1986.
- [Garcia et al, 1989] Garcia, C.E., Prett, D.M., Morari, M. et Papon, J., Model predictive control : Theory and practice a survey. *Automatica*, Vol. 25(3), 335–348, 1989.

- [Gasso et al, 1999] Gasso, K., Mourot, G., Boukhriss, A. et Ragot, J., Optimisation de la structure d'un modèle de Takagi-Sugeno. *Actes des rencontres francophones (LFA)*, Valenciennes, France, 1999.
- [Gasso, 2000] Gasso, K., Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèles. *Thèse de doctorat*, INPL, 2000.
- [Ginhoux, 2003] Ginhoux, R., Compensation des mouvements physiologiques en chirurgie robotisée par commande prédictive. *Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg*, 2003
- [Guerra et al, 2006] Guerra, T.M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., et Tirmant, H., Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 157(9), 12481259, 2006.
- [Guerra et al, 2009] Guerra, T.M., Kruszewski, A. et Bernal, M., Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi-Sugeno models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 17(3), 724–731, 2009.
- [Haykin, 1999] Haykin, S., Neural Networks : A Comprehensive, *Foundation*, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc, 1999.
- [Henze et al, 1987] Henze, M., Grady Jr, C.P.L., Gujer W., Marais, G.R. et Matsuo, T., Activated sludge model no. 1, *Scientific and Technical Report No. 1, IAWPRC*, London, Vol. 33, 1987.
- [Hebb, 1949] Hebb, D.O., The organisation of behavior, A neuropsychological theory, *John Wiley and son*, New York, 1949.
- [Hopefield, 1982] Hopefield, J.T., Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 79, 2554–2558, USA, 1982.
- [Huang et Jadbabaie, 1999] Huang Y. et Jadbabaie A., Nonlinear Hinf Control : An enhanced Quasi-LPV Approach, *Proc. of the IFAC World Congress*, 85–90, (1999).
- [Huber, 1985] Huber, P., Projection pursuit (with discussion). *Ann. Statist.*, Vol. 13, 435–475, 1985.
- [Ichalal et al, 2009c] Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J. et Maquin, D., State estimation of nonlinear systems using multiple model approach. *In American Control Conference*, St. Louis, Missouri, USA, 2009c.
- [Jacobs et al, 1991] Jacobs, R.A., Jordan, M.I., Nowlan, J.S. et Hinton, G.E., Adaptive of local experts. *Neural Computation*, Vol. 6, 181–214, 1991.
- [Jeppsson, 1996] Jeppsson, U., Modelling aspects of wastewater treatment processes, *Thèse de doctorat*, Dept. of Industrial Electrical Eng. and Automation, 1996.

- [Jianjun et al] Jianjun, S., Soloway, D. et Kelkar, A., Gpc-based stable reconfigurable control.
- [Johansen et Foss, 1992] Johansen, T.A. et Foss, A.B., Non linear local model representation for adaptive systems. *IEEE International Conference on Intelligent control and instrumentation*, Vol. 2, 677–682, 1992.
- [Johansen et Foss, 1993] Johansen, T.A. et Foss, A.B., Constructing NARMAX using ARMAX. *International Journal of Control*, Vol. 58(5), 1125–1153, 1993.
- [Johansen, 1998] Johansson, M., Piecewise linear control systems. *Thèse de doctorat*, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1998.
- [Joo et Leeb, 2002] Joo, M.G. et Leeb, J.S., Universal approximation by hierarchical fuzzy system with constraints on the fuzzy rule. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 130, 175–188, 2002.
- [Kalman, 1960a] Kalman, R.E., Contributions to the theory of optimal control. *Automatica*, Vol. 5, 102–119, 1960a.
- [Kalman, 1960b] Kalman, R.E., A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol. 87, 35–45, 1960b.
- [Kawamo et al, 1992] Kawamoto, S., Tada, K., Ishigame, A. et Taniguchi, T., An approach to stability analysis of second order fuzzy systems, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1427–1434, 1992.
- [Khadir, 2002] Khadir, M.T., Modelling and Predictive Control of a Milk Pasteurisation Plant *PhD Thesis*, Dept. of Electronic Engineering, National University of Ireland, 2002.
- [Khadir et Ringwood, 2002] Khadir M.T. et Ringwood J., Neural Network Modelling and Predictive Control of a Milk Pasteurisation Plant, *Thèse de doctorat*, National University of Ireland, 2002.
- [Khadir, 2004] Khadir, M.T., The simplest model predictive controller for non-minimum phase behavior and oscillatory systems. *Controllo 04, Proceedings of the 8th Portuguese Control Conference*, 250–255, 2004.
- [Kohonen, 1989] Kohonen, T., Self-organisation and associative memory. *Springer Verlag*, 1989.
- [Layerle, 2008] Layerle, K.N., Langlois, N. et Chafouk, H., Synthèse des contrôleurs prédictifs à base d'état pour la commande des systèmes mimo discret à non minimum de phase, *IJ-STA*, Vol. 2, N°1, July 2008.
- [Lyapunov, 1907] Lyapunov, A., Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, Vol. 9, 203474. (traduction en français du mémoire Russe), 1907.
- [Li et al, 2004] Li, N., Li, S.Y. et Xi, Y.G., Multi-model predictive control based on the Takagi Sugeno fuzzy models-a case study. *Information Science*, 165, 247–263, 2004.

- [LYDOIRE, 2004] LYDOIRE, F., Génération de Trajectoires pour la Locomotion Artificielle et Commande à Horizon Fuyant avec l'Arithmétique d'Intervalles . *Ecole Doctorale : Information, Structures et Systèmes Montpellier : Université Montpellier II*, 2004.
- [Ma, 1998] Ma, X.J., Sun, Z.Q. et He, Y.Y., Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer, *Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6(1), 41–50, 1998.
- [Matoug and Khadir,(2012)] Matoug, L. and Khadir, M. T. (2012) Modèle floue Takagi sugeno d'une station d'épuration à boues activées, *International Conference on Embedded Systems in Telecommunications And instrumentation (ICESTI'12)*.
- [Matoug et Khadir, 2014] Matoug, L. et Khadir, M.T., Multi-Model Predictive Control Strategies for an Activated Sludge Model, *IEEE Conference Publications, CoDIT'14*, 504–509, 2014.
- [Matoug et Khadir, 2015] Matoug, L. et Khadir, M.T., Dynamic Model Prediction Control for an Activated Sludge Model based on a T-S Multi-Model, *IEEE Conference Publications, CEIT'15*, 1–6, 2015.
- [Morère, 2001] Morère, Y., Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno, *Thèse de doctorat*, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.
- [Murphey et Burdick, 2002] Murphey, T.D. et Burdick, J.W., Nonsmooth controllability theory and an example, *4st IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 1, 370–376, Las Vegas, Nevada, USA, 2002.
- [Murray-Smith et Johansen, 1997] Murray-Smith, R. et Johansen, T., Multiple model approaches to modeling and control. *Taylor and Francis*, London, 1997.
- [Nagy et al, 2010] Nagy, A.M., Mourot, G., Marx, B., Schutz, G. et Ragot, J. Systematic Multi-modelling Methodology Applied to an Activated Sludge Reactor Model. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 49(6), 2790–2799, 2010.
- [Nagy, 2010] Nagy, A.M., Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration, *Thèse de doctorat*, INPL, Nancy, 2010.
- [Ohtake et al, 2001] Ohtake, H., Tanaka, K. et Wang, H.O., Fuzzy modelling via sector nonlinearity concept. *In Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, Vancouver, Canada, 2001.
- [Olsson et al, 1999] Olsson G. , et Newell Matsuo, B., Wastewater Treatment Systems., *Modelling, Diagnosis and Control. IWA Publishing*, 1999.
- [Pradin et Fossard, 2004] Pradin, B. et Fossard, A., Système Multivariable, *Technical Report*, INSA de toulouse, 2004.

- [Prett et Gillette, 1980] Prett, D.M., Gillette, R.D. Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit. *In Proceedings of the joint automatic control conference*, 1980.
- [Qin et Badgwell, 1996] Qin, S.J. et Badgwell, T.A. An overview of industrial model predictive control technology. *In Chemical process control-CPC V*, 1996.
- [Qin et Badgwell, 2000] Qin, S.J. et Badgwell, T.A. An overview of industrial model predictive control technology. An overview of nonlinear model predictive control applications. *In J. C. Kantor, C. E. Garcia, B. Carnahan (Eds.), Nonlinear model predictive control. Basel*, Birkhauser, 2000.
- [Qin et Badgwell, 2003] Qin, S.J. et Badgwell, T.A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, Vol. 11, 733–764, 2003.
- [Raju et al, 1991] Raju, G.V.S. , Zhou, J. et Kisner, R.A., Hierarchical fuzzy control. *International Journal of Control*, Vol. 54, 1201–1216, 1991.
- [Raul et al, 1976] Raul, A., Testud, J.L., Richalet, J. et Papon, J. Algorithmic control of industrial processes . *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameters Estimation. Control Engineering Practice*, 1119–1167, 1976.
- [Richalet et al, 1976] Richalet, J., Rault, A., Testud, J.L. et Papon, J. Algorithmic control of industrial processes. *In Proceedings of the 4th IFAC symposium on identification and system parameter estimation*, Vol. 87, 1119–1167, 1976.
- [Richalet et al, 1978] Richalet, J., Rault, A., Testud, J.L. et Papon, J. Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes. *Automatica*, Vol. 14, 413–428, 1978.
- [Richalet, 1993] Richalet J. Pratique de la commande predictive, 349, hermes ed, *Traite des Nouvelles Technologies , Serie Automatique*, 1993.
- [Rossiter et Richalet, 2001] Rossiter, J.A. et Richalet, J. Predictive functional control of unstable processes. *Sheffield University, Dept. of Automatic Control and Systems Engineering*, 2001.
- [Rumelhart et al, 1986] Richalet, J., Rault, A., Testud, J.L. et Papon, J. A general framework for parallel distributed processing. *Parallel Distributed Processing*, Vol. 1(2), 45–76, 1986.
- [Sjöberg, 1995] Sjöberg, J., Nonlinear system identification with neural networks, *Ph.D. Thesis*, No 831, Division of Automatic Control, Department of Electrical Engineering, Linkping University, Sweden, 1995.
- [Smets et al, 2006] Smets, I., Verdickt, L. et Van Impe, J., A linear ASM1 based multi- model for activated sludge systems. *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems*, Vol. 12, 489–503, 2006.

- [Takagi et Sugeno, 1985] Takagi, T. et Sugeno, M., Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control, *IEEE Trans.Syst, Man Cybernet*, Vol. 15, 166–172, 1985.
- [Tanaka et Wang, 2001] Tanaka, K. et Wang, H.O., Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach, *John Wiley and Son Inc*, 2001.
- [Tanaka et al, 2003] Tanaka, K., Hori, T., et Wang, H., A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11(4), 582-589, 2003.
- [Tanaka et al, 2007] Tanaka, K., Ohtake, H., et Wang, H.O., A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 15, 333–341, 2007.
- [Tanaka et Sugeno, 1992] Tanaka, K. et Sugeno, M., Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 45(2), 135–156, 1992.
- [Tanaka et al, 1998] Tanaka, K. et Ikeda, T., et Wang, H. Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6(2), 250–265, 1998.
- [Thomas et al, 2003] Thomas, A., Badgwell, S. et Qin, J., A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice*, Vol. 11, 764–733, 2003.
- [Wang et al, 1996] Wang, H.O., Tanaka, K. et Griffin, M., An approach to fuzzy control of nonlinear systems, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 4, 14–23, 1996.
- [Wang, 1998] Wang, L.X., Universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 93, 223–230, 1998.
- [Wei et Wang, 2000] Wei, C. et Wang, L.X., Universal A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Information Sciences*, Vol. 123, 241–248, 2000.
- [Yoneyama, 2008] Yoneyama, J.,  $H_\infty$  output feedback control for fuzzy systems with immeasurable premise variables : Discrete-time case. *Applied Soft Computing*, Vol. 8(2), 949-958, 2008.
- [Zurada, 1992] Zurada, J.M., Artificial neural systems. *West Publishing Company*, 1992.