

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

**BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA**



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

Option

Probabilités, Statistiques et Optimisation

Titre

**Étude Probabiliste et Statistiques
des Modèles Autorégressifs
à Coefficients Aléatoires**

Par

BOUCHEMELLA Abdelhalim

DIRECTEUR DE MEMOIRE : Dr. Abdelouahab BIBI Prof. U.M. Constantine

Devant le jury

PRÉSIDENT: Dr. H. BOUTABIA Prof. U.B.M. ANNABA

**EXAMINATEURS: Dr. F.Z. BENMOSTEFA M.C. U.B.M. ANNABA
Dr. M.R. REMITA M.C. U.B.M. ANNABA**

Année : 2008

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	v
Introduction	vii
1 Outils	1
1.1 Définitions et Notations	1
2 Etude probabiliste du modèle	3
2.1 Conditions de stationnarité	4
2.1.1 Exemple	8
2.2 L'existence de la solution stationnaire	9
2.3 Conditions de stabilité	12
2.3.1 Stationnarité stricte	13
3 Inférence statistique du modèle RCAR(1)	15
3.1 Identification des moments	17
3.2 Comportement asymptotique	21
4 Inférence statistique du modèle RCAR(p)	27
4.1 Identification des moments	30
4.2 Comportement asymptotique	32
5 Etude statistique du modèle RCAR(p)	35
5.1 Estimation par LS	35
5.1.1 Procédure d'estimation	36

5.1.2	Comportement asymptotique	38
5.2	Estimation par GLS	44
5.2.1	Comportement asymptotique	48
5.3	Estimation par ML	54
5.3.1	Procédure de l'estimation	54
5.3.2	Comportement asymptotique	56
5.3.3	Généralisation.	65
5.3.4	Conclusion	66
5.4	Estimation par GMM	67
5.4.1	Cas particulier (LS)	69
5.4.2	Matrice de poids optimale	70
5.4.3	Distribution asymptotique des GMM	73
6	Bibliographie	79

Résumé

On peut envisager plusieurs variantes des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (RCAR). La plupart de ces variantes sont construites selon la structure des coefficients.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'une classe de ces modèles de séries temporelles dont les coefficients varient par groupes d'individus. Cette classe de modèles est générée par l'équation aux différences stochastiques

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega)$$

Dans l'équation précédente, le processus $Y_t(\omega)$ représente l'observation dans le groupe d'individus ω à l'instant t , les coefficients $(A_k(\omega))_{1 \leq k \leq p}$ sont des variables aléatoires discrètes (ou absolument continues ou encore mélangeantes) et $(\varepsilon_t(\omega))$ est un bruit blanc.

L'objectif du travail donc est de faire l'inférence statistiques dans cette classe de modèles, en étudiant les propriétés probabilistes. En particulier les conditions N.S d'existence de solutions stationnaires. En basant sur une étude de **Robinson** [14] sur un modèle $AR(1)$ à coefficient aléatoire, nous obtiendrons une généralisation des résultats obtenus pour le modèle $AR(p)$. Nous terminerons ce travail, par une synthèse sur les techniques d'estimation dans cette classe.

Remerciements

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances au Docteur Abdelouahab BIBI, de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'adresse mes vifs remerciements au Professeur Hassane BOUTABIA, pour le grand honneur qu'il me fait en présidant le jury d'examination.

J'exprime également mes chaleureux remerciements au Docteur M.R. REMITA et au Docteur F.Z. BENMOUSTEFA, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Introduction

Une série temporelle est considérée habituellement comme une réalisation d'un processus stochastique. La méthodologie de l'analyse des séries temporelles est dirigée vers des situations dans lesquelles une telle réalisation seulement est disponible. Cependant, on a plusieurs séries lesquelles peuvent être assumées raisonnablement pour être des échantillons indépendants du même processus stochastique, et ceci est vrai pour des séries résiduelles des régressions dont les tendances varient avec le temps et les effets varient par individu.

Exemples de données qui peuvent engendrer de tels résidu sont : séries de salaires ou dépenses de nombre de familles avec classification socio-économique semblable, les résultats d'expériences biologiques répétées périodiquement portés en dehors des organismes semblables.

La modélisation de telles données croisées d'une série temporelle ne peut pas être simple, cependant, les autocorrélations de l'échantillon peuvent être supposés pour exposer le comportement qui est semblable, mais pas identique. Par conséquent il est possible que les paramètres soient des variables aléatoires, avec une certaine distribution afin que la série de chaque individu soit produite après un échantillonnage d'une telle distribution.

Les données de panel, ou données croisées, possèdent les deux dimensions précédentes et rapportent les valeurs des variables considérées relevées pour un ensemble, ou panel, d'individus sur une suite de périodes.

En remarquant : dans la marketing ou dans la statistique, le mot panel désigne généralement un échantillon fixe de consommateurs interrogés à différentes périodes, dans l'économétrie, le terme de données de panel est simplement synonyme de données croisées ayant généralement une dimension temporelle.

On utilise une notation naturelle à deux indices : $y_t(\omega)$ désigne l'observation de la variable $Y_t(\omega)$ pour le groupe d'individu ω à la période t .

Si on fixe l'individu observé, on obtient une série temporelle, ou une coupe longitudinale, le concernant, tandis que si l'on fixe la période examinée, on obtient une coupe transversale, ou

instantanée, pour l'ensemble des individus.

Lorsque les données ne supportent pas l'hypothèse de coefficients qui sont les mêmes, cependant la spécification des relations parmi les variables paraît adéquate ou ce n'est pas faisable d'inclure des variables supplémentaires, alors il paraîtrait raisonnable d'injecter des variations dans les paramètres à travers des groupes d'individus et ou avec le temps.

Organisation du mémoire :

Le premier chapitre est consacré aux quelques définitions et théorèmes préliminaires notamment le théorème centrale limite que nous voyons nécessaires pour les chapitres qui suivent.

On s'intéresse dans **Le second chapitre** à l'étude probabiliste du modèle autorégressif d'ordre p à coefficients aléatoires tels que nous traitons les conditions nécessaires et suffisantes de la stationnarité, l'existence et l'unicité des solutions stationnaires et les conditions de stabilité en se basant sur l'étude de J. Anděl. [1] F. Nicholls and Barry G. Quinn [12] qui ont travaillé sur les modèles autorégressifs où les coefficients aléatoires varient avec le temps.

Le troisième chapitre est consacré à l'inférence statistique d'un modèle autorégressif d'ordre 1 à coefficient aléatoire en décortiquant l'article de P. M. Robinson [14]

Le quatrième chapitre est consacré à l'inférence statistique d'un modèle autorégressif d'ordre p à coefficients aléatoires en se basant sur les résultats déjà obtenus.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude statistique, en faisant une synthèse sur les techniques d'estimation dans cette classe de modèles telles que, la méthode des moindres carrés ordinaires, la méthode des moindres carrés généralisés, la méthode du maximum de vraisemblance, et la méthode des moments généralisés en étudiant le comportement asymptotique de ces estimateurs.

Chapitre 1

Outils

Nous rappelons dans ce chapitre quelques outils qui sont utilisés durant ce mémoire.

1.1 Définitions et Notations

Définition 1.1.1 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de dimension respectivement $n \times p$ et $m \times q$, la matrice de dimension $mn \times pq$ définie par

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{np}B \end{bmatrix}$$

est appelé produit de Kronecker des matrices A et B .

Définition 1.1.2 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times n$, on définit la norme matricielle par l'une des normes usuelles

- * $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- * $\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(AA^t)}$, où $\varrho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.
- * $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Définition 1.1.3 L'opérateur Vec génère un vecteur colonne d'une matrice A en empilant les vecteurs colonnes de la matrice $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ au-dessous l'un à l'autre

$$Vec(A) = [a'_1, a'_2, \dots, a'_n]'$$

Définition 1.1.4 Soit A une matrice symétrique de dimension $n \times n$, alors l'opérateur $Vech[A]$ définit un vecteur de dimension $[n(n+1)/2] \times 1$ qui est obtenu de A en empilant de gauche à droite ses parties des colonnes de A sur et au-dessous du diagonal principal, l'une sur l'autre dans l'ordre.

Théorème 1.1.1 Soient A, B, C et D quatre matrices appropriées

- (i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
- (ii) $(A \otimes B)^j = A^j \otimes B^j$.
- (iii) $Vech[ABC] = (C' \otimes A) Vech[A]$.
- (iv) $Tr[AB] = (Vech[B'])' Vech[A] = (Vech[B])' Vech[A']$.

Théorème 1.1.2 Soit A une matrice symétrique de dimension $n \times n$, alors il existe deux matrices constantes K_n et H_n de dimension $[n(n+1)/2] \times n^2$ telle que

$$Vech[A] = H_n Vech[A] \quad \text{et} \quad Vech[A] = K_n' Vech[A] \quad \text{où} \quad H_n K_n' = I_{n(n+1)/2}$$

Théorème 1.1.3 Soit V une matrice de dimension $n \times n$ vérifiant l'équation suivante

$$V = MVN' + G$$

où M, N et G sont des matrices données de dimension $n \times n$. Si la matrice $[I_{n^2} - N \otimes M]$ est inversible alors il existe une solution unique V telle que

$$Vech[V] = [I_{n^2} - N \otimes M]^{-1} Vech[G]$$

Définition 1.1.5 Le processus autorégressif $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit stationnaire au second ordre si

- (i) $E\{Y_t\} = \mu, t \geq 0$
- (ii) $E\{Y_t^2\} < \infty$
- (iii) $E\{(Y_i - \mu)(Y_j - \mu)\}$ ne dépend que de $|i - j|$ pour tout i, j .

Définition 1.1.6 Le processus autorégressif $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit strictement stationnaire si les distributions disjointes des $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$ et $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_k+h})$ sont les mêmes pour tout entier k et pour tout t_1, \dots, t_k et $h \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.1.4 (Billingsley) Soit $\{\xi_t\}$ une suite de variables aléatoires \mathcal{F}_t -mesurable où \mathcal{F}_t est une σ -Algèbre engendrée par la suite $\{X_t, X_{t-1}, \dots\}$ de variables aléatoires strictement stationnaire et ergodique. On suppose que $E\{\xi_t/\mathcal{F}_{t-1}\} = 0$ et $E\{\xi_t^2\} = c^2$. Alors $(c^2 N)^{-1/2} \sum_{t=1}^N \xi_t$ converge en distribution vers une variable aléatoire qui suit une distribution normale standard.

Chapitre 2

Etude probabiliste du modèle

On s'intéresse dans ce chapitre à étudier les conditions de stationnarité, et de stabilité ainsi que les conditions d'existence et d'unicité des solutions stationnaires.

Nous considérons le modèle $RCAR(p)$ suivant

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega). \quad (2.1)$$

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p [A_k + \alpha_k(\omega)] Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (2.2)$$

On suppose dans ce paragraphe que :

- (i) $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ_ω^2 ,
- (ii) Les A_k , pour $k = 1, \dots, p$ sont constantes,
- (iii) $\alpha(\omega) = [\alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \dots, \alpha_p(\omega)]$, $\{\alpha(\omega), \omega = 1, \dots, N\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $E\{\alpha(\omega)\} = 0$, $E\{\alpha(\omega) \otimes \alpha(\omega)\} = C$ et les suite $\{\varepsilon_t(\omega)\}$, $\{\alpha(\omega)\}$ sont indépendantes,
- (iv) Il existe un vecteur constant Z de dimension $p \times 1$ tel que $Z'Y_t(\omega)$ est déterminé exactement comme une fonction linéaire de $\{Y_{t-1}(\omega), \dots, Y_{t-p}(\omega)\}$.

La relation (2.2) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\underline{Y}_t(\omega) = [A + D(\omega)] \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \underline{\varepsilon}_t(\omega) \quad (2.3)$$

tels que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\omega) & \cdots & \alpha_p(\omega) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_t(\omega) = (Y_t(\omega), Y_{t-1}(\omega), \dots, Y_{t-p+1}(\omega))', \quad \underline{\varepsilon}_t(\omega) = (\varepsilon_t(\omega), 0, \dots, 0)'$$

$$E \{ \underline{\varepsilon}_t(\omega) \underline{\varepsilon}_t'(\omega) \} = J \otimes E \{ \varepsilon_t(\omega) \varepsilon_t(\omega) \} = J \otimes \sigma_\omega^2 = \Omega_\omega, \quad \tilde{C} = E \{ D(\omega) \otimes D(\omega) \}$$

2.1 Conditions de stationnarité

Théorème 2.1.1 *Le processus $\{Y_t(\omega), t = 1 - T, \dots, 0, 1, \dots\}$ généré par (2.1) est stationnaire si et seulement si $\mu_1 = \mu_0$ et $V_{1,1} = V_{0,0}$, où $\mu_i = E \{ \underline{Y}_i(\omega) \}$ et $V_{i,j} = E \{ \underline{Y}_i(\omega) \underline{Y}_j'(\omega) \}$.*

Preuve. Il est clair que la condition nécessaire devient directement de la constricton de $\underline{Y}_t(\omega)$. Pour démontrer la condition suffisante, on suppose que $\underline{Y}_0(\omega)$ est indépendant de $\{\varepsilon_t(\omega), t = 1, 2, \dots\}$ et $\{\alpha_k(\omega), k = 1, \dots, p\}$, ainsi que $\mu_t = \mu$ pour $t = 0, 1, \dots, h$ et $V_{t,t-s} = V_{t-u,t-s-u} = W_s$, $t = s + 1, \dots, h$, $u = 1, \dots, t - s$ et $s = 0, \dots, h$. Dans le cas $h = 1$, ces conditions réduisent à $\mu_1 = \mu_0 = \mu$ et $V_{1,1} = V_{0,0} = W_0$. En utilisant (2.3) on obtient

$$\begin{aligned} \mu_{h+1} &= E \{ \underline{Y}_{h+1}(\omega) \} = E \{ [A + D(\omega)] \underline{Y}_h(\omega) + \underline{\varepsilon}_{h+1}(\omega) \} \\ &= AE \{ \underline{Y}_h(\omega) \} = AE \{ \underline{Y}_{h-1}(\omega) \} = \mu_h \end{aligned}$$

Sachant que $D(\omega)$ et $\underline{\varepsilon}_{h+1}(\omega)$ sont indépendants de $\{\underline{\varepsilon}_1(\omega), \dots, \underline{\varepsilon}_h(\omega)\}$ et $\underline{Y}_0(\omega)$. Pour $1 \leq s \leq h$,

$$\begin{aligned} V_{h+1,h+1-s} &= E \{ \underline{Y}_{h+1}(\omega) \underline{Y}_{h+1-s}'(\omega) \} \\ &= E \{ ([A + D(\omega)] \underline{Y}_h(\omega) + \underline{\varepsilon}_{h+1}(\omega)) \underline{Y}_{h+1-s}'(\omega) \} \\ &= AE \{ \underline{Y}_h(\omega) \underline{Y}_{h+1-s}'(\omega) \} = AE \{ \underline{Y}_{h-1}(\omega) \underline{Y}_{h-s}'(\omega) \} \\ &= E \{ \underline{Y}_h(\omega) \underline{Y}_{h-s}'(\omega) \} = V_{h,h-s} \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} V_{h+1,h+1} &= E \{ \underline{Y}_{h+1}(\omega) \underline{Y}_{h+1}'(\omega) \} \\ &= E \left\{ ([A + D(\omega)] \underline{Y}_h(\omega) + \underline{\varepsilon}_{h+1}(\omega)) ([A + D(\omega)] \underline{Y}_h(\omega) + \underline{\varepsilon}_{h+1}(\omega))' \right\} \end{aligned}$$

par conséquent on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Vec}[V_{h+1,h+1}] &= \text{Vec}E \{ [A + D(\omega)] \underline{Y}_h(\omega) \underline{Y}'_h(\omega) [A + D(\omega)]' + \underline{\varepsilon}_{h+1}(\omega) \underline{\varepsilon}'_{h+1}(\omega) \} \\
&= E \{ [A + D(\omega)] \otimes [A + D(\omega)] \text{Vec}[\underline{Y}_h(\omega) \underline{Y}'_h(\omega)] + \text{Vec}[\underline{\varepsilon}_{h+1}(\omega) \underline{\varepsilon}'_{h+1}(\omega)] \} \\
&= E \{ A \otimes A + D(\omega) \otimes D(\omega) \} E \{ \text{Vec}[\underline{Y}_h(\omega) \underline{Y}'_h(\omega)] \} + \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2] \\
&= [A \otimes A + \tilde{C}] \text{Vec}[V_{h,h}] + \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2] \\
&= [A \otimes A + \tilde{C}] \text{Vec}[V_{h-1,h-1}] + \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2] \\
&= \text{Vec}[V_{h,h}]
\end{aligned}$$

■

On note que $\mathcal{F}_t(\omega)$, est une σ -Algèbre engendrée par les suites des variables aléatoires $\{\alpha_k(\omega)\}_{k=1}^p$ $\{\varepsilon_{t-1}(\omega), \varepsilon_{t-2}(\omega), \dots\}$ pour chaque $\omega \in \{1, \dots, N\}$.

Corollaire 2.1.1 *Le processus $\{Y_t(\omega)\}$ généré par (2.1) est stationnaire si et seulement si*

$$\text{Var}\{Y_1(\omega), \dots, Y_p(\omega)\} = \text{Var}\{Y_2(\omega), \dots, Y_{p+1}(\omega)\} \quad (2.4)$$

Théorème 2.1.2 *Si la condition suivante est vérifiée*

$$z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p \neq 0 \text{ pour } |z| \geq 1 \quad (2.5)$$

alors il existe une solution unique de l'équation

$$B_\omega^+ = AB_\omega^+ A' + \Omega_\omega \quad (2.6)$$

et cette solution est une matrice définie positive et explicitement donnée par

$$B_\omega^+ = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \Omega_\omega A'^k \quad (2.7)$$

Preuve. Sachant que : $z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p$ est le polynôme caractéristique de la matrice A , alors si la condition (2.5) est vérifiée, ceci implique que les valeurs propres de la matrice A se trouvent à l'intérieur du cercle unité. En introduisant l'opérateur Vec on obtient

$$\text{Vec}[B_\omega^+] = A^{\otimes 2} \text{Vec}[B_\omega^+] + \text{Vec}[\Omega_\omega] \quad (2.8)$$

où la matrice $A^{\otimes 2}$ est de dimension $p^2 \times p^2$. Sachant que les valeurs propres de $A^{\otimes 2}$ sont de la forme $\lambda_i \lambda_j$ où λ_i et λ_j sont celles de la matrice A , et $|\lambda_i| < 1$ pour tout i , il résulte que les valeurs propres

de $A^{\otimes 2}$ sont à l'intérieur du cercle unité, alors $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}]$ est inversible, par conséquent l'équation (2.8) admet une solution donnée par

$$Vec [B_\omega^+] = [I_{p^2} - A^{\otimes 2}]^{-1} Vec [\Omega_\omega]$$

En développant la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}]^{-1}$ en séries on obtient

$$\begin{aligned} Vec [B_\omega^+] &= [I_{p^2} - A^{\otimes 2}]^{-1} vec [\Omega_\omega] \\ &= [I_p^{\otimes 2} + A^{\otimes 2} + A^{\otimes 4} + \dots] vec [\Omega_\omega] \\ &= I_p^{\otimes 2} Vec [\Omega_\omega] + A^{\otimes 2} Vec [\Omega_\omega] + \dots \\ &= Vec [I_p \Omega_\omega I_p] + Vec [A \Omega_\omega A'] + Vec [A^2 \Omega_\omega A'^2] + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Vec [A^k \Omega_\omega A'^k] = Vec \left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k \Omega_\omega A'^k \right] \end{aligned}$$

d'où : $B_\omega^+ = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \Omega_\omega A'^k$. ■

Théorème 2.1.3 *La condition $Var \{Y_1(\omega), \dots, Y_p(\omega)\} = Var \{Y_2(\omega), \dots, Y_{p+1}(\omega)\}$ est vérifiée si et seulement si la matrice $B_\omega = Var \{Y_1(\omega), \dots, Y_p(\omega)\}$ est une solution de l'équation*

$$B_\omega = AB_\omega A' + [\sigma_\omega^2 + Tr(\Delta_\omega^* B_\omega)] J \quad (2.9)$$

où $\Delta_\omega^* = Var [A_p(\omega), \dots, A_1(\omega)]$.

Preuve. On note que

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} A_1(\omega) & A_2(\omega) & \dots & A_p(\omega) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d'après (2.1) on a

$$\begin{pmatrix} Y_{p+1}(\omega) \\ \vdots \\ Y_2(\omega) \end{pmatrix} = A(\omega) \begin{pmatrix} Y_p(\omega) \\ \vdots \\ Y_1(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{p+1}(\omega) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

On pose : $A(\omega) = (A_{ij}(\omega))$, $Y(\omega) = (Y_1(\omega), \dots, Y_p(\omega))'$, $Z_i = \sum_{h=1}^p A_{ih}(\omega) Y_h(\omega)$, et $Z = (Z_1, \dots, Z_p)'$,

on va calculer

$$Cov [Z_i, Z_j] = \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^p Cov [A_{ih}(\omega) Y_h(\omega), A_{jk}(\omega) Y_k(\omega)]$$

Sachant que $(A_{ij}(\omega))$ et $(Y_k(\omega))$, $k = 1, \dots, p$ sont indépendants et $E\{Y_t(\omega)\} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
& Cov [A_{ih}(\omega) Y_h(\omega), A_{jk}(\omega) Y_k(\omega)] \\
&= E\{A_{ih}(\omega) Y_h(\omega) A_{jk}(\omega) Y_k(\omega)\} - E\{A_{ih}(\omega) Y_h(\omega)\} E\{A_{jk}(\omega) Y_k(\omega)\} \\
&= E\{A_{ih}(\omega) A_{jk}(\omega)\} E\{Y_h(\omega) Y_k(\omega)\} - E\{A_{ih}(\omega)\} E\{Y_h(\omega)\} E\{A_{jk}(\omega)\} E\{Y_k(\omega)\} \\
&= [Cov [A_{ih}(\omega), A_{jk}(\omega)] + E\{A_{ih}(\omega)\} E\{A_{jk}(\omega)\}] Cov [Y_h(\omega), Y_k(\omega)] \\
&= Cov [A_{ih}(\omega), A_{jk}(\omega)] Cov [Y_h(\omega), Y_k(\omega)] + E\{A_{ih}(\omega)\} Cov [Y_h(\omega), Y_k(\omega)] E\{A_{jk}(\omega)\}
\end{aligned}$$

On note : $H_{ij} = (Cov [A_{ih}(\omega), A_{jk}(\omega)])_{h,k=1}^p$, $B_{hk} = Cov [Y_h(\omega), Y_k(\omega)]$.

Comme $B_\omega = (B_{hk})_{h,k=1}^p$, on obtient

$$\begin{aligned}
Cov [Z_i, Z_j] &= \sum_h \sum_k Cov [A_{ih}(\omega), A_{jk}(\omega)] B_{hk} + \sum_h \sum_k E\{A_{ih}(\omega)\} B_{hk} E\{A_{jk}(\omega)\} \\
&= Tr (H_{ij} B_\omega) + \sum_{h=1} \sum_{k=1} E\{A_{ih}(\omega)\} B_{hk} E\{A_{jk}(\omega)\}
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$H_{ij} = \begin{cases} \Delta_\omega^* & \text{pour } i = j = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $E\{A(\omega)\} = A$, par conséquent

$$Var [Z] = Tr (\Delta_\omega^* B_\omega) J + AB_\omega A$$

Ainsi on a

$$Var [0, \dots, 0, \varepsilon_{p+1}(\omega)] = \sigma_\omega^2 J$$

on pose $S = \left(Y_2(\omega), \dots, Y_p(\omega), \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_k(\omega) \right)'$, alors

$$Var (S, [0, \dots, 0, \varepsilon_{p+1}(\omega)]') = 0$$

En calculant la matrice de covariance des deux membres de la relation (2.10) on obtient

$$B_\omega = Var \{Y_2(\omega), \dots, Y_{p+1}(\omega)\} = AB_\omega A' + [\sigma_\omega^2 + Tr (\Delta_\omega^* B_\omega)] J. \blacksquare$$

Théorème 2.1.4 *On suppose que*

$$z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p \neq 0 \text{ pour } |z| \geq 1 \quad (2.11)$$

si la condition suivante est vérifiée

$$1 - \text{Tr}(\Delta_\omega^* B_\omega^+) > 0 \quad (2.12)$$

alors l'équation (2.9) admet une solution unique, définie positive donnée par

$$B_\omega = \sigma_\omega^2 [1 - \text{Tr}(\Delta_\omega^* B_\omega^+)]^{-1} B_\omega^+ \quad (2.13)$$

Preuve. Les racines de l'équation $z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p \neq 0$ sont celles du polynôme caractéristique de la matrice A , si (2.11) est vérifiée, alors (2.7) est la solution unique de l'équation (2.6).

Pour tout nombre arbitraire u on a

$$uB_\omega^+ = AuB_\omega^+ A' + J$$

la matrice uB_ω^+ est l'une des solutions de l'équation (2.9) si et seulement si

$$u = \sigma_\omega^2 + \text{Tr}(\Delta_\omega^* uB_\omega^+)$$

Si (2.12) est vérifiée alors la matrice B_ω donnée par (2.13) est l'unique solution de l'équation (2.9) et cette matrice est définie positive. ■

Corollaire 2.1.2 *Les conditions (2.11) et (2.12) sont nécessaires et suffisantes pour que le processus $\{Y_t(\omega)\}$ soit stationnaire.*

2.1.1 Exemple

Nous considérons un modèle $AR(1)$ à coefficient aléatoire

$$Y_t(\omega) = A_1(\omega)Y_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega), \quad \omega = 1 \quad (2.14)$$

telles que $E\{A_1(\omega)\} = \beta$ et $\text{Var}[A_1(\omega)] = \Delta$.

On suppose que $|A_1(\omega)| < 1$ p.s, alors $\beta < 1$ alors la condition (2.11) est vérifiée.

Dans ce cas $A = (\beta)$ et l'équation (2.9) devient

$$B_\omega = \beta^2 A + \sigma^2 + \Delta B$$

et sa solution

$$B_\omega = [1 - (\beta^2 + \Delta)]^{-1} \sigma^2$$

sachant que

$$1 > E \{A_1^2(\omega)\} = \beta^2 + \Delta$$

alors la solution existe toujours et elle est positive, et en vertu du *Corollaire 2.1.2* le modèle est stationnaire sous la condition $|A_1(\omega)| < 1$ *p.s.*

2.2 L'existence de la solution stationnaire

Essayons maintenant de trouver sous quelles conditions l'équation (2.1) admet une solution stationnaire pour chaque $\omega \in \{1, \dots, N\}$. On a d'une part

$$\begin{aligned} \underline{Y}_t(\omega) &= A(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \underline{\varepsilon}_t(\omega) \\ &= A(\omega) [A(\omega) \underline{Y}_{t-2}(\omega) + \underline{\varepsilon}_{t-1}(\omega)] + \underline{\varepsilon}_t(\omega) \\ &= A^2(\omega) \underline{Y}_{t-2}(\omega) + A(\omega) \underline{\varepsilon}_{t-1}(\omega) + \underline{\varepsilon}_t(\omega) \\ &\vdots \\ &= A^j(\omega) \underline{Y}_{t-j}(\omega) + \sum_{k=0}^{j-1} A^k(\omega) \underline{\varepsilon}_{t-k}(\omega) \\ \underline{Y}_t(\omega) - A^j(\omega) \underline{Y}_{t-j}(\omega) &= \sum_{k=0}^{j-1} A^k(\omega) \underline{\varepsilon}_{t-k}(\omega) \end{aligned}$$

D'autre part on a : $E \{ \underline{\varepsilon}_{t-k}(\omega) \underline{\varepsilon}'_{t-h}(\omega) \} = 0$ si $k \neq h$

$$\begin{aligned} & \text{Vec} \left[E \left\{ \sum_{k=0}^j A^k(\omega) \underline{\varepsilon}_{t-k}(\omega) \left[\sum_{h=0}^j A^h(\omega) \underline{\varepsilon}_{t-h}(\omega) \right]' \right\} \right] \\ &= \text{Vec} \left[E \left\{ \sum_{k=0}^j A^k(\omega) \underline{\varepsilon}_{t-k}(\omega) \underline{\varepsilon}'_{t-k}(\omega) A^{k'}(\omega) \right\} \right] \\ &= \sum_{k=0}^j [A \otimes A + \tilde{C}]^k \text{Vec} [E \{ \underline{\varepsilon}_{t-k}(\omega) \underline{\varepsilon}'_{t-k}(\omega) \}] \\ &= \sum_{k=0}^j [A \otimes A + \tilde{C}]^k \text{Vec} [J \otimes \sigma_\omega^2] \end{aligned}$$

Lemme 2.2.1 Si $\sum_{k=0}^j [A \otimes A + \tilde{C}]^k \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2]$ converge lorsque $j \rightarrow \infty$ et H est une matrice définie positive telle que

$$\text{Vec}[H] = \sigma_\omega^2 + C \sum_{k=0}^{\infty} [A \otimes A + \tilde{C}]^k \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2] \quad (2.15)$$

alors les valeurs propres de A se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

Preuve. Soit la matrice W définie par

$$\text{Vec}[W] = \sum_{k=0}^{\infty} [A \otimes A + \tilde{C}]^k \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2]$$

Alors

$$\begin{aligned} [A \otimes A + \tilde{C}] \text{Vec}[W] &= \sum_{k=1}^{\infty} [A \otimes A + \tilde{C}]^k \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2] \\ &= \text{Vec}[W] - \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Vec}[W] &= [A \otimes A] \text{Vec}[W] + (\tilde{C} \text{Vec}[W] + \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2]) \\ &= [A \otimes A] \text{Vec}[W] + \text{Vec}[J \otimes H] \end{aligned}$$

comme $\tilde{C} \text{Vec}[W] = \text{Vec}[J \otimes (C \text{Vec}(W))]$, alors $W = AWA' + J \otimes H$

Soit λ une valeur propre de la matrice A et $z' \neq 0$ un vecteur propre à gauche associé à λ tel que $z = (z_1, \dots, z_p)'$, alors

$$\begin{aligned} z'W\bar{z} &= z'AWA'\bar{z} + z'[J \otimes H]\bar{z} \\ &= |\lambda|^2 z'W\bar{z} + z'_p H \bar{z}_p \end{aligned}$$

alors $(1 - |\lambda|^2) z'W\bar{z} = z'_p H \bar{z}_p$.

Sachant que $\sum_{k=1}^r [A \otimes A + \tilde{C}]^k \text{Vec}[J \otimes \sigma_\omega^2]$ est un Vec d'une matrice définie non négative, alors sa limite est aussi la matrice W qui est non négative, et $zW\bar{z} \geq 0$. Si $z'_p H \bar{z}_p > 0$ alors $z_p \neq 0$, par conséquent $|\lambda| < 1$.

Maintenant on suppose que $z_p = 0$, sachant que z' est une valeur propre à gauche de A alors

$$(z_1, \dots, z_p) \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda (z_1, \dots, z_p)$$

ceci est réduit au système d'équations suivantes

$$\begin{cases} z_1 A_1 = \lambda z_1 \\ z_i + z_p A_{p-1} = \lambda z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p-1 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$, la première équation implique que $z_1 = 0$, comme $z_p = 0$ et les équations restantes ont comme leur seule solution $z_2 = \dots = z_{p-1} = 0$, donc $z \neq 0$, par conséquent $|\lambda| < 1$. ■

Théorème 2.2.1 *Soit $\sigma_\omega^2 \neq 0$, afin qu'il existe une solution stationnaire unique $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable de l'équation (2.1) il est nécessaire et suffisant que les valeurs propres de la matrice $[A \otimes A + \tilde{C}]$ soient à l'intérieur du cercle unité.*

Preuve. On peut représenter la matrice $(A \otimes A + \tilde{C})$ sous la forme canonique de Jordan

$$(A \otimes A + \tilde{C}) = P \Lambda P^{-1}$$

où Λ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des valeurs propres de $(A \otimes A + \tilde{C})$. Il est nécessaire seulement de démontrer que les lignes de P^{-1} qui correspondent à un élément diagonal λ de Λ pour que $|\lambda| \geq 1$ ne peuvent pas être orthogonales à $Vec[J \otimes \sigma_\omega^2]$.

Soit z' l'un de ces lignes de P^{-1} lequel est un vecteur propre à gauche de $(A \otimes A + \tilde{C})$, en notant qu'il existe au moins un tel vecteur.

Si $z' Vec[J \otimes \sigma_\omega^2] = 0$ alors le premier élément de z est non nul, sachant que le seul élément non nul de $(J \otimes \sigma_\omega^2)$ est σ_ω^2 , ainsi que \tilde{C} a seulement une ligne non nulle (la première ligne) qui est C .

D'où : $z' (A \otimes A + \tilde{C}) = z' (A \otimes A)$, tandis que $z' (A \otimes A + \tilde{C}) = \lambda z'$ et donc λ est aussi une valeur propre de $(A \otimes A)$. En vertu du lemme précédent toutes les valeurs propres de A se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

Soit $P \Lambda P^{-1}$ la forme canonique de Jordan de la matrice A et $[\lambda_1, \dots, \lambda_p] = diag(\Lambda)$.

Si λ est une valeur propre de $(A \otimes A)$ alors $\det[\lambda I_{p^2} - A \otimes A] = 0$, mais

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_{p^2} - A \otimes A] &= \det[\lambda I_{p^2} - (P \Lambda P^{-1}) \otimes (P \Lambda P^{-1})] \\ &= \det[\lambda I_{p^2} - (P \otimes P)(\Lambda \otimes \Lambda)(P^{-1} \otimes P^{-1})] \\ &= \det[\lambda (P \otimes P)(P \otimes P)^{-1} - (P \otimes P)(\Lambda \otimes \Lambda)(P \otimes P)^{-1}] \\ &= \det[(P \otimes P)(\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda)(P \otimes P)^{-1}] \\ &= \det(P \otimes P) \det(\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda) \det[(P \otimes P)^{-1}] \\ &= \det[\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda] = \prod_{i,j=1}^p (\lambda - \lambda_i \lambda_j) \end{aligned}$$

Sachant que les éléments sous-diagonal de $(\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda)$ sont non nuls, alors $\lambda = \lambda_i \lambda_j$ pour certains i et j où λ_i, λ_j sont des valeurs propres de A et sachant que $|\lambda_i| < 1$, alors $|\lambda| = |\lambda_i| |\lambda_j| < 1$. ■

2.3 Conditions de stabilité

Lorsqu'on produit une série temporelle par l'équation (2.1), il est naturel d'initier les variables $Y_{1-p}(\omega), \dots, Y_{-1}(\omega), Y_0(\omega)$, et commencer la génération à $t = 1$. Une question évidente s'impose, est ce que ces valeurs initiales affectent le comportement à long terme du processus $\{Y_t(\omega)\}_{t \geq 1}$ et si le processus atteint son équilibre lorsque t devient grand.

Définition 2.3.1 *Le processus autorégressif $\{Y_t(\omega)\}_{t \geq 1}$ est dit stable si*

$E \{Y_t(\omega) / Y_{1-p}(\omega) = y_{1-p}, \dots, Y_0(\omega) = y_0\}$ et $E \{Y_t(\omega) Y_{t-s}(\omega) / Y_{1-p}(\omega) = y_{1-p}, \dots, Y_0(\omega) = y_0\}$, pour $s \geq 0$ convergent indépendamment des valeurs initiales $\{y_{1-p}(\omega), \dots, y_0(\omega)\}$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Théorème 2.3.1 *Le processus $\{Y_t(\omega)\}_{t \geq 1}$ vérifie l'équation (2.1) est stable si et seulement si $(A \otimes A + \tilde{C})^t S$ converge vers zéro pour chaque matrice symétrique S d'ordre p lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. Soit : $\underline{Y}_0(\omega) = (Y_{1-p}(\omega), \dots, Y_0(\omega))'$, alors d'après la relation (2.2) on a

$$E \left\{ \underline{Y}_t(\omega) / \underline{Y}_0(\omega) = \underline{y}_0(\omega) \right\} = AE \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) / \underline{Y}_0(\omega) = \underline{y}_0(\omega) \right\} = A^t \underline{y}_0(\omega)$$

ainsi que $E \left\{ \underline{Y}_t(\omega) / \underline{Y}_0(\omega) = \underline{y}_0(\omega) \right\}$, converge indépendamment de $\underline{y}_0(\omega)$ si et seulement si les valeurs propres de A sont de module inférieur à 1, dans ce cas, $A^t z$ converge pour tout vecteur z .

D'après la relation (2.3) on obtient pour $t > s > 0$,

$$\begin{aligned} V_{t,t-s} \left(\underline{y}_0(\omega) \right) &= E \left\{ \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-s}(\omega) / \underline{Y}_0(\omega) = \underline{y}_0(\omega) \right\} \\ &= E \left\{ \{ [A + D(\omega)] \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \} \underline{Y}'_{t-s}(\omega) / \underline{Y}_0(\omega) = \underline{y}_0(\omega) \right\} \\ &= AE \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-s}(\omega) / \underline{Y}_0(\omega) = \underline{y}_0(\omega) \right\} \\ &= AV_{t-1,t-s} \left(\underline{y}_0(\omega) \right) = \dots = A^s V_{t-s,t-s} \left(\underline{y}_0(\omega) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vec} \left[V_{t,t} \left(\underline{y}_0(\omega) \right) \right] &= \left(A \otimes A + \tilde{C} \right)^j \text{Vec} \left[V_{t-1,t-1} \left(\underline{y}_0(\omega) \right) \right] + \text{Vec} \left[J \otimes \sigma_\omega^2 \right] \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \left(A \otimes A + \tilde{C} \right)^j \text{Vec} \left[J \otimes \sigma_\omega^2 \right] + \left(A \otimes A + \tilde{C} \right)^t \text{Vec} \left[\underline{y}_0(\omega) \underline{y}'_0(\omega) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si $(A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec}[S]$ converge vers zéro pour toute matrice symétrique S , alors

$$(A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec} \left[\underline{y}_0(\omega) \underline{y}'_0(\omega) \right] \text{ et } (A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec} [J \otimes \sigma_\omega^2]$$

chacun des termes dans la relation (2.16) est un Vec d'une matrice définie non négative, donc $V_{t,t}(\underline{y}_0(\omega))$ converge si et seulement si

$$(A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec} \left[\underline{y}_0(\omega) \underline{y}'_0(\omega) \right] \text{ et } \sum_{j=0}^{t-1} (A \otimes A + \tilde{C})^j \text{Vec} [J \otimes \sigma_\omega^2] \text{ convergent}$$

Maintenant nous démontrons la condition suffisante :

Si $(A \otimes A + \tilde{C})^j \text{Vec}[S]$ converge vers zéro pour toute matrice symétrique S , alors

$$(A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec} \left[\underline{y}_0(\omega) \underline{y}'_0(\omega) \right] \text{ et } \sum_{j=0}^{t-1} (A \otimes A + \tilde{C})^j \text{Vec} [J \otimes \sigma_\omega^2]$$

convergent vers zéro, par conséquent $\sum_{j=0}^{t-1} (A \otimes A + \tilde{C})^j \text{Vec} [J \otimes \sigma_\omega^2]$ l'est aussi.

En vertu du *Lemme 2.1*, la matrice A est de valeurs propres de module inférieur à 1, alors

$$V_{t,t-s}(\underline{y}_0(\omega)) = A^s V_{t-s,t-s}(\underline{y}_0(\omega)) \text{ converge aussi.}$$

Pour voir que la condition est aussi nécessaire, on note que toute matrice réelle symétrique S d'ordre p peut s'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^p \lambda_j e_j e'_j$ où $\{(\lambda_j, e_j)\}$ l'ensemble des valeurs propres et les vecteurs propres associés à S . Sachant $(A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec} [\underline{y} \underline{y}']$ converge vers zéro pour tout $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$, donc nécessairement $\sum_{j=1}^p \lambda_j (A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec} [e_j e'_j] = (A \otimes A + \tilde{C})^t \text{Vec} [S]$ l'est aussi. ■

2.3.1 Stationnarité stricte

Dans les sections précédentes on n'a rien supposé sur $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ et $\{A(\omega)\}$ seulement que sont indépendantes, stationnaires du second d'ordre et qui sont mutuellement indépendants. Si $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ et $\{A(\omega)\}$ sont aussi deux suites de variables aléatoires identiquement distribuées dans quel cas elles sont aussi strictement stationnaires et ergodiques, il est possible d'inférer des propriétés plus fortes pour la solution $\mathcal{F}_t(\omega) - \text{mesurable}$, $\{y_t(\omega)\}$ de l'équation (2.2).

Théorème 2.3.2 *On suppose que les suites $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ et $\{A(\omega)\}$ vérifient les suppositions (i) et (iii) et qu'elles sont identiquement distribuées. S'il existe une unique solution $\{Y_t(\omega)\}$ stationnaire du second d'ordre et $\mathcal{F}_t(\omega)$ – mesurable de l'équation (2.1), alors cette solution est aussi strictement stationnaire et ergodique.*

Preuve. L'unique solution stationnaire du second d'ordre et $\mathcal{F}_t(\omega)$ – mesurable, $\{Y_t(\omega)\}$ de l'équation (2.2) donnée par

$$\underline{Y}_t(\omega) = \underline{\varepsilon}_t(\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} [A + D(\omega)]^j \underline{\varepsilon}_{t-j}(\omega)$$

est une limite en quadratique moyenne, par conséquent en probabilité d'une suite de variables aléatoires $\mathcal{F}_t(\omega)$ – mesurable. Comme la solution a la même forme fonctionnelle pour chaque t , $\{\underline{Y}_t(\omega)\}$ doit être strictement stationnaire, par conséquent l'est aussi $\{Y_t(\omega)\}$.

Sachant que $\{A(\omega), \varepsilon_t(\omega)\}$ est une suite *iid* alors elle est ergodique.

Ainsi que la σ -Algèbre $\mathcal{G}_t(\omega)$ engendrée par $\{Y_t(\omega), Y_{t-1}(\omega), \dots\}$ est incluse dans $\mathcal{F}_t(\omega)$, si $\{Y_t(\omega)\}$ est une suite $\mathcal{F}_t(\omega)$ – mesurable de variables aléatoires.

Soient \mathcal{G} et \mathcal{F} les petites σ -Algèbres contenant respectivement $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_t(\omega)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}_t(\omega)$, il résulte que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ et $\{Y_t(\omega)\}$ est ergodique. ■

Chapitre 3

Inférence statistique du modèle RCAR(1)

Considérons un modèle autoregessif à coefficient aléatoire d'ordre 1 noté $RCAR(1)$. Dans le modèle usuel le coefficient a une distribution dégénérée, i.e constante sur les réalisations. On s'intéresse alors à estimer les moments et établir les propriétés asymptotiques des estimateurs.

Soit le modèle $RCAR(1)$ suivant

$$Y_t(\omega) = A(\omega) Y_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (3.1)$$

On suppose que :

- (i) Les variables aléatoires non observées $A(\omega)$ et $\varepsilon_t(\omega)$ ont respectivement des fonctions de répartition F et F_t .
- (ii) $A(\omega)$ est indépendante de $A(\omega')$, $\varepsilon_t(\omega)$ et $\varepsilon_t(\omega')$ pour tout t et tout $\omega \neq \omega'$.
- (iii) Les variables aléatoires $\varepsilon_t(\omega)$ sont *iid*.
- (iv) $\varepsilon_t(\omega)$ et $\varepsilon_u(\omega')$ sont indépendantes pour tout t, u et tout $\omega \neq \omega'$.
- (v)

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon_t(\omega)\} &= 0 \\ E\{\varepsilon_t(\omega)\varepsilon_u(\omega)\} &= \begin{cases} \sigma_\omega^2 & \text{si } t = u \\ 0 & \text{si } t \neq u \end{cases} \\ E\{\varepsilon_t(\omega)\varepsilon_u(\omega)\varepsilon_v(\omega)\varepsilon_w(\omega)\} &= \begin{cases} 3\sigma_\omega^4 + \varkappa & \text{si } |\varkappa| < \infty, t = u = v = w \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sous les conditions (i) - (v) et en vertu du *Théorème 2.4.1*, il existe une solution unique $\{Y_t(\omega)\}$, $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable strictement stationnaire et ergodique. Alors la réalisation de $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ pour ω est

considéré comme un bruit blanc et la réalisation $\{Y_t(\omega)\}$ est un $RCAR(1)$.

La condition de stationnarité du modèle (3.1), implique que $F(-1 - \varepsilon) = 0$, et $F(1 + \varepsilon) = 1$, et cela signifie que $|A(\omega)| < 1$ *p.s*, et de (3.1) et (3.2) on obtient

$$\begin{aligned} E \{Y_t(\omega) / A(\omega)\} &= E \{A(\omega) Y_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) / A(\omega)\} \\ &= A(\omega) E \{Y_{t-1}(\omega) / A(\omega)\} + E \{\varepsilon_t(\omega) / A(\omega)\} \\ &= A(\omega) E \{Y_{t-1}(\omega) / A(\omega)\} \end{aligned}$$

$$[1 - A(\omega)] E \{Y_t(\omega) / A(\omega)\} = 0$$

Sachant que $|A(\omega)| < 1$ *p.s* alors $1 - A(\omega) \neq 0$ *p.s*, par conséquent

$$E \{Y_t(\omega) / A(\omega)\} = 0 \text{ p.s}$$

$$\begin{aligned} &E \{Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega) / A(\omega)\} \\ &= E \{[A(\omega) Y_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega)][A(\omega) Y_{t-u-1}(\omega) + \varepsilon_{t-u}(\omega)] / A(\omega)\} \\ &= A^2(\omega) E \{Y_{t-1}(\omega) Y_{t-u-1}(\omega) / A(\omega)\} + A(\omega) E \{Y_{t-1}(\omega) \varepsilon_{t-u}(\omega) / A(\omega)\} \\ &\vdots \\ &= A^2(\omega) E \{Y_{t-1}(\omega) Y_{t-u-1}(\omega) / A(\omega)\} + A^{|u|}(\omega) E \{Y_{t-u}(\omega) \varepsilon_{t-u}(\omega) / A(\omega)\} \\ &= A^2(\omega) E \{Y_{t-1}(\omega) Y_{t-u-1}(\omega) / A(\omega)\} + A^{|u|}(\omega) E \{\varepsilon_{t-u}(\omega) \varepsilon_{t-u}(\omega) / A(\omega)\} \\ &= A^2(\omega) E \{Y_{t-1}(\omega) Y_{t-u-1}(\omega) / A(\omega)\} + \sigma_\omega^2 A^{|u|}(\omega) \end{aligned}$$

Sachant que le processus est stationnaire alors

$$E \{Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega) / A(\omega)\} = E \{Y_{t-1}(\omega) Y_{t-u-1}(\omega) / A(\omega)\}$$

par conséquent

$$E \{Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega) / A(\omega)\} = \sigma_\omega^2 \frac{A^{|u|}(\omega)}{1 - A^2(\omega)} \text{ p.s} \quad (3.3)$$

$t, u \in I$. Alors d'après la relation (3.3) on obtient

$$A(\omega) = \frac{E \{Y_t(\omega) Y_{t-1}(\omega) / A(\omega)\}}{E \{Y_t^2(\omega) / A(\omega)\}}$$

On considère pour tout $\omega \in \{1, \dots, N\}$ l'estimateur donné par

$$\hat{A}_T(\omega) = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} Y_t(\omega) Y_{t-1}(\omega)}{\sum_{t=0}^T Y_t^2(\omega)}$$

Sous les conditions (i) – (v), on a pour tout $u \geq 0$

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(T^{-1} \sum_{t=0}^{T-u} Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega) - E \{ Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega) / A(\omega) \} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\hat{A}_T(\omega) - A(\omega) \right) = 0 \quad (3.5)$$

Maintenant, on suppose que A est dégénérée i.e. pour $|A| < 1$, $F(-A) = 0$, $F(A^+) = 1$. Alors, $Y_t(\omega)$ est un $AR(1)$ usuel et il est ergodique donc $\gamma(u) = E(Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega))$ par conséquent les relations (3.4) et (3.5) deviennent

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(T^{-1} \sum_{t=0}^{T-u} Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega) - \gamma(u) \right) = 0, \quad \forall u$$

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\hat{A}_T(\omega) - A \right) = 0$$

Maintenant on va montrer que les moments de $A(\omega)$ peuvent être identifiés en termes de $\gamma(u)$, ensuite on étudiera le comportement asymptotique des estimateurs des moments proposés lorsque $N \rightarrow \infty$ et T soit fixe, sous des conditions sur la distribution F .

3.1 Identification des moments

Théorème 3.1.1 *Si*

$$\int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{1-x^2} < \infty \quad (3.6)$$

alors

$$\mu_u = \int_{-1}^1 x^u dF(x) = \frac{\gamma(u) - \gamma(u+2)}{\gamma(0) - \gamma(2)}, \quad u \geq 1 \quad (3.7)$$

Preuve. D'après la relation (3.3) on a

$$\gamma(u) = \sigma_\omega^2 \sum_{v=0}^{\infty} \mu_{u+2v}, \quad u \geq 0 \quad (3.8)$$

ces séries convergent car le membre à gauche de (3.6) est $\gamma(0)$, et $|\gamma(u)| < \gamma(0)$ par conséquent

$$\gamma(u) - \gamma(u+2) = \sigma_\omega^2 \mu_u, \quad u \geq 0$$

Sachant que $\mu_0 = 1$, on a $\gamma(0) - \gamma(2) = \sigma_\omega^2 > 0$, alors

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^2 \mu_u &= \gamma(u) - \gamma(u+2) \\ \mu_u &= \frac{\gamma(u) - \gamma(u+2)}{\sigma_\omega^2} \\ &= \frac{\gamma(u) - \gamma(u+2)}{\gamma(0) - \gamma(2)}, \quad u \geq 0. \end{aligned}$$

■

Définition 3.1.1 *La densité spectrale du processus RCAR(1) est donnée par*

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \gamma(u) \cos u\lambda, \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad (3.9)$$

Théorème 3.1.2 *Lorsque la densité spectrale $S(\lambda)$ existe alors*

$$S(\lambda) = \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) \mu_u, \quad \lambda = 0 \quad (3.10)$$

$$S(\lambda) = \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\sin(u+1)\lambda}{\sin \lambda} \mu_u, \quad \lambda \neq 0 \quad (3.11)$$

Preuve. D'après les relations (3.8) et (3.9) on a

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \gamma(u) \cos u\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\gamma(0) + 2 \sum_{u=1}^{\infty} \gamma(u) \cos u\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\sigma_\omega^2 \sum_{v=0}^{\infty} \mu_{2v} + 2 \sum_{u=1}^{\infty} \sigma_\omega^2 \sum_{v=0}^{\infty} \mu_{u+2v} \cos u\lambda \right) \end{aligned}$$

en substituant u par v et réciproquement on obtient

$$= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \left(\sum_{u=0}^{\infty} \mu_{2u} + 2 \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \mu_{2u+v} \cos v\lambda \right)$$

pour $\lambda = 0$ on a

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \left(\sum_{u=0}^{\infty} \mu_{2u} + 2 \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \mu_{2u+v} \right) \\
 &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} (\mu_0 + 2\mu_1 + 3\mu_2 + 4\mu_3 + 5\mu_4 + 6\mu_5 + \dots) \\
 &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} [(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \dots) + (\mu_0 + \mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + 4\mu_4 + \dots)] \\
 &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \left(\sum_{u=0}^{\infty} \mu_u + \sum_{u=0}^{\infty} u\mu_u \right) = \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) \mu_u
 \end{aligned}$$

pour $\lambda \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
 S(\lambda) &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \left(\sum_{u=0}^{\infty} \mu_{2u} + 2 \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \mu_{2u+v} \cos v\lambda \right) \\
 &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \left\{ 1 + \sum_{u=1}^{\infty} \mu_{2u} \left(1 + 2 \sum_{v=1}^u \cos 2v\lambda \right) + 2 \sum_{u=0}^{\infty} \mu_{2u+1} \sum_{v=0}^u \cos (2v+1)\lambda \right\}
 \end{aligned}$$

on peut montrer par calcul direct que

$$\begin{cases} 1 + 2 \sum_{v=1}^u \cos 2v\lambda = \frac{\sin (2u+1)\lambda}{\sin \lambda} \\ \sum_{v=0}^u \cos (2v+1)\lambda = \frac{\sin 2u\lambda}{\sin \lambda} \end{cases}$$

par conséquent on obtient

$$\begin{aligned}
 S(\lambda) &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \left\{ 1 + \sum_{u=1}^{\infty} \mu_{2u} \frac{\sin (2u+1)\lambda}{\sin \lambda} + \sum_{u=1}^{\infty} \mu_{2u+1} \frac{\sin 2u\lambda}{\sin \lambda} \right\} \\
 &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\sin (u+1)\lambda}{\sin \lambda} \mu_u.
 \end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.3 *Afin que $S(\lambda)$ existe et soit continue, il est nécessaire que*

$$\int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-x)^2} < \infty \tag{3.12}$$

alors que la condition suffisante soit

$$\int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-|x|)^2} < \infty \quad (3.13)$$

Preuve. (a) La condition nécessaire : si $\int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-x)^2} < \infty$, alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-x)^2} &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 dF(x) = \int_{-1}^1 \left(\sum_{u=0}^{\infty} x^u \right)^2 dF(x) \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) x^u dF(x) = \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) \mu_u < \infty \end{aligned}$$

donc $\frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) \mu_u = S(\lambda) < \infty$.

(b) La condition suffisante : notons que la continuité de $S(\lambda)$ est vérifiée si sa série de Fourier est absolument convergente, alors d'après les relations (3.10) et (3.11) on a

$$\begin{aligned} S(\lambda) &\leq \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \left(\sum_{u=0}^{\infty} |\mu_{2u}| + 2 \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |\mu_{2u+v}| \right) \\ &\leq \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) |\mu_{2u}| \\ &\leq \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) E |A(\omega)|^u \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-|x|)^2} &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \int_{-1}^1 [(1-|x|)^2]^{-1} dF(x) = \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \int_{-1}^1 [1 - (2|x| - |x|^2)]^{-1} dF(x) \\ &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \int_{-1}^1 [1 + 2|x| + 3|x|^2 + 4|x|^3 + 5|x|^4 + \dots] dF(x) \\ &= \frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) E |A(\omega)|^u < \infty \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\sigma_\omega^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-|x|)^2} < \infty$$

Par conséquent (3.13) est une condition suffisante. ■

Remarque 3.1.1 On suppose que la variable aléatoire $A(\omega)$ est non négative i.e. $A(\omega) \geq 0$ p.s, alors toutes les autocorrélations conditionnelles seront non négatives, en effet dans ce cas on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1 Lorsque $F(-0) = 0$ alors pour que $S(\lambda)$ existe et continue, il est nécessaire et suffisant que

$$\int_0^1 \frac{dF(x)}{(1-x)^2} < \infty \quad (3.14)$$

Preuve. Les deux relations (3.12) et (3.13) se réduisent à (3.14). ■

3.2 Comportement asymptotique

Nous considérons l'estimation de la distribution de $A(\omega)$, en donnant des observations $Y_t(\omega)$, $t = 0, \dots, T$ et $\omega = 1, \dots, N$ et en supposant l'indépendance par rapport à ω .

Nous estimons μ_k en estimant $\gamma(u)$ et en utilisant la relation (3.7). Une approche plus évidente estime $A(\omega)$ par $\hat{A}_T(\omega)$ pour chaque ω par la méthode des moindres carrés, alors $\hat{A}_T(\omega)$ serait traité comme un échantillon de F . Cette approche a plusieurs inconvénients tels que :

- * En particulier lorsque T n'est pas assez grand, alors on ne peut pas estimer $A(\omega)$ et notre approche paraît plus rapide et directe.
- * L'estimateur $\hat{A}_T(\omega)$ n'a pas en fait de distribution F .
- * Les propriétés asymptotiques des estimateurs de μ_u obtenues de $\hat{A}_T(\omega)$ sont accessibles.

Pour $0 \leq u \leq T$ on définit donc l'estimateur de $\gamma(u)$ par

$$\hat{\gamma}_N(u) = \frac{1}{(T-u+1)N} \sum_{t=1}^{T-u} \sum_{\omega=1}^N Y_t(\omega) Y_{t+u}(\omega)$$

lequel est un estimateur sans biais de $\gamma(u)$.

Théorème 3.2.1 La condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_N(u) = \gamma(u) \quad p.s \quad (3.15)$$

soit la condition (3.6).

Preuve. Considérons d'abord $\hat{\gamma}_N(0)$, en notant que $\sum_{t=0}^T Y_t^2(\omega)$, $\omega = 1, 2, \dots$ sont des variables aléatoires *i.i.d.* Alors pour que $\hat{\gamma}_N(0) \rightarrow \gamma(0)$ p.s, il est nécessaire que $E \left| \sum_{t=0}^T Y_t^2(\omega) \right| < \infty$, et ceci

est vrai si $E\{Y_t^2(\omega)\} < \infty$, $t = 0, \dots, T$, lequel est équivalent à (3.6).

Pour montrer la suffisance, on note que la relation (3.15) est vérifiée pour tout u , si

$$E \left| \sum_{t=0}^{T-u} Y_t(\omega) Y_{t+u}(\omega) \right| < \infty$$

lequel est vrai par l'inégalité de Schwarz, si $E\{Y_t^2(\omega)\} < \infty$, $t = 0, \dots, T$, et ceci est vrai si la condition (3.6) est vérifiée. ■

Maintenant, on définit les estimateurs de σ_ω^2 et μ_u respectivement par

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^2(\omega) &= \hat{\gamma}_N(0) - \hat{\gamma}_N(2), \\ \hat{\mu}_N(u) &= \frac{\hat{\gamma}_N(u) - \hat{\gamma}_N(u+2)}{\hat{\gamma}_N(0) - \hat{\gamma}_N(2)}, \quad u = 1, \dots, T-2. \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2 *Sous la condition (3.6)*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_N^2(\omega) = \sigma_\omega^2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mu}_N(u) = \mu_u \quad p.s., \quad u = 1, \dots, T-2$$

Preuve. D'après le *Theorème 3.1.1* et *Theorème 3.2.1* et la continuité de l'application entre μ_u et $\gamma(u)$ on en déduit le résultat. ■

Théorème 3.2.3 *La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sqrt{N} (\hat{\gamma}_N(0) - \gamma(0), \hat{\gamma}_N(1) - \gamma(1), \dots, \hat{\gamma}_N(T) - \gamma(T)) \quad (3.16)$$

converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution normale $(T+1)$ -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance Σ , ayant le $(p+1, q+1)$ ème élément

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{cov}(\hat{\gamma}_N(p), \hat{\gamma}_N(q)) &= \sigma_\omega^4 \sum_{j \geq p} \sum_{k \geq q} \mu_{2(2j+k)-p-q} + (T-p+1)^{-1} \sum_{u=p}^T \sum_{v=q}^T \\ &\times \left\{ \sigma^4 \sum_{j \geq \max(u-v, 0)} \sum_{k \geq \max(u-v+q-p, 0)} \mu_{2(j+k-u+v)+p-q} + \sigma_\omega^4 \sum_{j \geq \max(u-v-q, 0)} \sum_{k \geq \max(u-v-p, 0)} \mu_{2(j+k-u+v)+p-q} \right. \\ &\left. + \varkappa \sum_{j \geq \max(p, u-v, u-v+q, 0)} \mu_{4j-2(u-v)-p-q} \right\}, \quad p, q = 0, \dots, T-1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

est que

$$\int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-x^2)^2} < \infty \quad (3.18)$$

Preuve. La condition nécessaire : on note que

$$\sum_{t=0}^T Y_t^2(\omega), \quad \omega = 1, 2, \dots, N$$

sont des variables aléatoires *iid*.

Pour que $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_N(0) - \gamma(0))$ soit asymptotiquement normale, il est nécessaire et suffisant que :

$$E \left(\sum_{t=0}^T Y_t^2(\omega) \right)^2 < \infty.$$

D'après le théorème central limite pour les variables aléatoires *i.i.d* lequel est vrai si et seulement si $E\{Y_t^4(\omega)\} < \infty$, mais la dernière inégalité est équivalente à la condition (3.18).

La condition suffisante : maintenant, pour que $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_N(u) - \gamma(u))$ soit aussi asymptotiquement normale pour tout $u \geq 1$, il est nécessaire et suffisant que

$$E \left| \sum_{t=0}^{T-u} Y_t(\omega) Y_{t-u}(\omega) \right|^2 < \infty$$

lequel est vrai en vertu de la condition (3.18) et l'inégalité Schwarz.

Par conséquent, (3.18) est une condition N.S pour que toute combinaison de $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_N(u) - \gamma(u))$, $u \geq 0$, soit asymptotiquement normale qui est elle-même la condition N.S pour que (3.16), converge vers une distribution multidimensionnelle normale. ■

Théorème 3.2.4 *Si la condition (3.18) est vérifiée alors*

$$\sqrt{N}(\hat{\sigma}_N^2(\omega) - \sigma_\omega^2, \hat{\mu}_N(1) - \mu_1, \dots, \hat{\mu}_N(T-2) - \mu_{T-2}) \quad (3.19)$$

converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution normale $(T-1)$ -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance $\Phi\Sigma\Phi'$, telle que

$$\Phi = \sigma_\omega^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\mu_1 & 1 & \mu_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\mu_2 & 0 & \mu_2 & 0 & -1 & \dots & \dots & \vdots \\ -\mu_3 & 0 & \mu_3 & 1 & 0 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & -1 \\ & & & & & & & 0 \\ -\mu_{T-2} & 0 & \mu_{T-2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Si $\widehat{\Sigma}$ est la matrice dont le $(p+1, q+1)$ ème élément est

$$\begin{aligned} & N^{-1} \sum_{\omega=1}^N \left\{ (T-p+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-p} Y_t(\omega) Y_{t+p}(\omega) \right\} \times \left\{ (T-q+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-q} Y_t(\omega) Y_{t+q}(\omega) \right\} \\ & - \left\{ N^{-1} \sum_{\omega=1}^N (T-p+2)^{-1} \sum_{t=0}^{T-p} Y_t(\omega) Y_{t+p}(\omega) \right\} \times \left\{ N^{-1} \sum_{\omega=1}^N (T-q+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-q} Y_t(\omega) Y_{t+q}(\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$p, q = 0, 1, \dots, T-1$, et $\widehat{\Phi}$ est la matrice obtenue en substituant σ_ω^2, μ_u par $\widehat{\sigma}_N^2(\omega), \widehat{\mu}_N(u)$ dans Φ , $q = 0, 1, \dots, T-1$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{\Phi} \widehat{\Sigma} \widehat{\Phi}' = \Phi \Sigma \Phi', \text{ p.s.} \quad (3.21)$$

Preuve. D'après le Théorème 3.2.3 on a démontré que

$$\sqrt{N} (\widehat{\gamma}_N(0) - \gamma(0), \widehat{\gamma}_N(1) - \gamma(1), \dots, \widehat{\gamma}_N(T) - \gamma(T))$$

est asymptotiquement normal si et seulement si

$$\int_{-1}^1 \frac{dF(x)}{(1-x^2)^2} < \infty$$

et comme cette condition est vérifiée, il résulte que $\sqrt{N} (\widehat{\gamma}_N(0) - \gamma(0)), \sqrt{N} (\widehat{\gamma}_N(1) - \gamma(1)), \dots, \sqrt{N} (\widehat{\gamma}_N(T) - \gamma(T))$ sont asymptotiquement normaux.

D'une part on sait que $\widehat{\sigma}_N^2(\omega) = \widehat{\gamma}_N(0) - \widehat{\gamma}_N(2)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (\widehat{\sigma}_N^2(\omega) - \sigma_\omega^2) &= \sqrt{N} [\widehat{\gamma}_N(0) - \widehat{\gamma}_N(2) - (\gamma(0) - \gamma(2))] \\ &= \sqrt{N} [\widehat{\gamma}_N(0) - \gamma(0)] - \sqrt{N} [\widehat{\gamma}_N(2) - \gamma(2)] \end{aligned}$$

par conséquent $\sqrt{N} (\widehat{\sigma}_N^2(\omega) - \sigma_\omega^2)$ est asymptotiquement normal.

D'autre part on a $\widehat{\mu}_N(u) = \frac{\widehat{\gamma}_N(u) - \widehat{\gamma}_N(u+2)}{\widehat{\gamma}_N(0) - \widehat{\gamma}_N(2)}$, $u = 1, \dots, T-2$, alors

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (\widehat{\mu}_N(u) - \mu_u) &= \sqrt{N} \left(\frac{\widehat{\gamma}_N(u) - \widehat{\gamma}_N(u+2)}{\widehat{\gamma}_N(0) - \widehat{\gamma}_N(2)} - \frac{\gamma(u) - \gamma(u+2)}{\gamma(0) - \gamma(2)} \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\frac{\widehat{\gamma}_N(u) - \widehat{\gamma}_N(u+2)}{\widehat{\sigma}_N^2(\omega)} - \frac{\gamma(u) - \gamma(u+2)}{\sigma_\omega^2} \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\frac{\widehat{\gamma}_N(u)}{\widehat{\sigma}_N^2(\omega)} - \frac{\gamma(u)}{\sigma_\omega^2} \right) - \sqrt{N} \left(\frac{\widehat{\gamma}_N(u+2)}{\widehat{\sigma}_N^2(\omega)} - \frac{\gamma(u+2)}{\sigma_\omega^2} \right) \end{aligned}$$

par conséquent $\sqrt{N}(\hat{\mu}_N(u) - \mu_u)$ est asymptotiquement normal pour tout $u = 1, \dots, T - 2$, et ceci implique que la normalité asymptotique de (3.19).

En déduisant que Φ est la matrice aux dérivées partielles de vecteur colonne $(\sigma_\omega^2, \mu_1, \dots, \mu_{T-2})$ par rapport au vecteur ligne $(\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(T))$ tels que

$$\begin{cases} \sigma_\omega^2 = \gamma(0) - \gamma(2) \\ \mu_u = \frac{\gamma(u) - \gamma(u+2)}{\sigma_\omega^2} = \frac{\gamma(u) - \gamma(u+2)}{\gamma(0) - \gamma(2)}, u \geq 0 \end{cases}$$

En vertu du *Théorème 3.2.2*, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_N^2(\omega) = \sigma_\omega^2$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mu}_N(u) = \mu_u$ *p.s.*, $u = 1, \dots, T - 2$ par conséquent $\hat{\Phi}$ est un estimateur consistant de Φ i.e. $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Phi} = \Phi$ *p.s.*

D'autre part, d'après la loi forte des grands nombres, (3.20) converge *p.s.* vers (3.17) (i.e. la formule de Bartellet), donc $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Sigma} = \Sigma$ *p.s.* Alors $\hat{\Phi} \hat{\Sigma} \hat{\Phi}'$ est un estimateur consistant de $\Phi \Sigma \Phi'$. ■

Chapitre 4

Inférence statistique du modèle RCAR(p)

Ce chapitre est consacré à généraliser quelques résultats concernant l'inférence statistique d'un modèle $RCAR(p)$, en se basant sur l'étude de **Robinson** [14] pour le modèle $RCAR(1)$. Nous considérons le modèle $RCAR(p)$ suivant

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega). \quad (4.1)$$

On suppose que

- (i) Les indices $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ et $\omega \in \{1, 2, \dots, N\}$ désignent respectivement le temps et la population d'individus.
- (ii) Les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ se trouvent à l'intérieur du cercle unité.
- (iii) $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ est une suite de variables aléatoires *iid* telles que

$$E\{\varepsilon_t(\omega)\} = 0, \\ E\{\varepsilon_t(\omega)\varepsilon_u(\omega)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq u \\ \sigma_\omega^2 & \text{si } t = u \end{cases}$$

et $E\{\varepsilon_t(\omega)\varepsilon_u(\omega)\varepsilon_v(\omega)\varepsilon_k(\omega)\} = 3\sigma_\omega^4 + \varkappa$, $|\varkappa| < \infty$ si $t = u = v = k$

- (iv) $A_i(\omega)$, $1 \leq i \leq p$ sont des variables aléatoires *iid*.
- (v) $A_i(\omega)$, $1 \leq i \leq p$ sont mutuellement indépendantes de $\varepsilon_t(\omega)$ et $Y_t(\omega)$ pour tout t .
- (vi) $Y_t(\omega)$ est indépendante de $\varepsilon_s(\omega)$ pour tout $s > t$.

La relation (4.1) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} Y_t(\omega) \\ Y_{t-1}(\omega) \\ \vdots \\ Y_{t-p+1}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(\omega) & \cdots & A_p(\omega) \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1}(\omega) \\ Y_{t-2}(\omega) \\ \vdots \\ Y_{t-p}(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t(\omega) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ou encore

$$\underline{Y}_t(\omega) = A(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \underline{\varepsilon}_t(\omega) \quad (4.3)$$

Alors

$$E \{ \underline{Y}_t(\omega) / \mathcal{F}_t(\omega) \} = 0 \quad p.s \quad (4.4)$$

$$\Upsilon_\omega(u) = E \{ \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) / \mathcal{F}_t(\omega) \} \quad p.s \quad (4.5)$$

Pour $u = 0$ on a

$$\Upsilon_\omega(0) = A(\omega) \Upsilon_\omega(0) A'(\omega) + \Omega_\omega \quad p.s \quad (4.6)$$

D'après la supposition (ii), la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]$ est inversible, alors l'équation (4.6) admet la solution unique définie positive

$$Vec[\Upsilon_\omega(0)] = [I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^{-1} Vec[\Omega_\omega] \quad p.s \quad (4.7)$$

D'après : $\Upsilon_\omega(u) = A(\omega) \Upsilon_\omega(u-1)$, $u = 1, 2, \dots$, par récurrence on obtient

$$\Upsilon_\omega(u) = A^u(\omega) \Upsilon_\omega(0), \quad u = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

$$Vec[\Upsilon_\omega(u)] = (I_p \otimes A^u(\omega)) Vec[\Upsilon_\omega(0)]$$

$$Vec[\Upsilon_\omega(u)] = (I_p \otimes A^u(\omega)) [I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^{-1} Vec[\Omega_\omega], \quad p.s \quad (4.9)$$

Sachant que la matrice $\Gamma_\omega(0)$ est définie positive d'après (4.7), alors elle est inversible donc on peut identifier $A(\omega)$ par

$$A(\omega) = \Upsilon_\omega^{-1}(0) \Upsilon_\omega(1) \quad p.s \quad (4.10)$$

On considère l'estimateur $\hat{A}_T(\omega)$ donné par

$$\hat{A}_T(\omega) = \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \right] \quad p.s \quad (4.11)$$

Sous les suppositions (i) - (vi), on peut avoir pour $u \geq 0$

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left\| T^{-1} \sum_{t=1}^{T+u} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) - E \{ \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) / \mathcal{F}_t(\omega) \} \right\| \right) = 0 \text{ p.s} \quad (4.12)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \hat{A}_T(\omega) - A(\omega) &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\}^{-1} \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \right\} - A(\omega) \\ &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) - \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) A(\omega) \right\} \\ &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{\varepsilon}_t(\omega) \end{aligned}$$

En vertu du *Théorème 2.4.1*, $\{Y_t(\omega)\}$ est ergodique alors $\{\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)\}$ et $\{\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{\varepsilon}_t(\omega)\}$ le sont aussi.

Par conséquent $\Upsilon_\omega(0) = E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \}$ est finie par (ii), ainsi que

$$\begin{aligned} E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{\varepsilon}_t(\omega) \} &= E \{ E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{\varepsilon}_t(\omega) \} / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} \\ &= E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \} E \{ \underline{\varepsilon}_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = 0 \end{aligned}$$

sachant que $E \{ \underline{\varepsilon}_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = 0$ et $\underline{Y}_{t-1}(\omega)$ est une fonction $\mathcal{F}_{t-1}(\omega)$ -mesurable, alors

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)$$

converge *p.s* vers $\Upsilon_\omega(0)$ et $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{\varepsilon}_t(\omega)$ converge *p.s* vers 0, par conséquent $(\hat{A}_T(\omega) - A(\omega))$ converge *p.s* vers 0, alors

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left\| \hat{A}_T(\omega) - A(\omega) \right\| \right) = 0 \quad (4.13)$$

Sachant que le processus $\{Y_t(\omega)\}$ est ergodique, alors $\Upsilon_\omega(u) = E \{ \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) \}$, par conséquent les relations (4.12) et (4.13) deviennent

$$\begin{aligned} p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left\| T^{-1} \sum_{t=1}^{T+u} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) - \Upsilon_\omega(u) \right\| \right) &= 0, \quad \forall u \text{ p.s} \\ p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left\| \hat{A}_T(\omega) - A \right\| \right) &= 0 \text{ p.s} \end{aligned}$$

où A une telle matrice non aléatoire dont ses valeurs propres se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

4.1 Identification des moments

On s'intéresse ici aux moments de $A(\omega)$ qui peuvent être identifiés en termes de $\Upsilon_\omega(u)$. Les estimateurs des moments sont proposés pour être consistents lorsque $N \rightarrow \infty$ et T soit fixe, sous les conditions (i) – (vi).

Théorème 4.1.1 *Si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité, alors*

$$Vec[\Upsilon_\omega(0)] = \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} Vec[\Omega_\omega] \quad (4.14)$$

$$Vec[\Upsilon_\omega(u)] = \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v+u} Vec[\Omega_\omega] \quad (4.15)$$

$$\text{où : } \underline{\mu}_{2v} = E\{A^{\otimes 2v}(\omega)\} \text{ et } \underline{\mu}_{2v+u} = E\{A^v(\omega) \otimes A^{v+u}(\omega)\} \quad (4.16)$$

Preuve. Sachant que les valeurs propres non nulles de la matrice $A^{\otimes 2}(\omega)$ sont les mêmes valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ et qui se trouvent à l'intérieur du cercle unité i.e. $|\lambda_i \lambda_j| < 1$, la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]$ est non singulière, alors on a

$$\begin{aligned} Vec[\Upsilon_\omega(0)] &= Vec[E\{\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega)\}] = E\left\{[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^{-1} Vec[\Omega_\omega]\right\} \\ &= E\left\{\left[I_p^{\otimes 2} + [A^{\otimes 2}(\omega)] + [A^{\otimes 2}(\omega)]^2 + \dots\right] Vec[\Omega_\omega]\right\} \\ &= [E\{I_p^{\otimes 2}\} + E\{A^{\otimes 2}(\omega)\} + E\{A^{\otimes 4}(\omega)\} + E\{A^{\otimes 6}(\omega)\} \dots] Vec[\Omega_\omega] \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} Vec[\Omega_\omega]. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} Vec[\Upsilon_\omega(u)] &= E\left\{(I_p \otimes A^u(\omega)) \{I_p^{\otimes 2} + A^{\otimes 2}(\omega) + A^{\otimes 4}(\omega) + \dots\} Vec[\Omega_\omega]\right\} \\ &= E\left\{I_p \otimes A^u(\omega) + A(\omega) \otimes A^{1+u}(\omega) + A^2(\omega) \otimes A^{2+u}(\omega) + \dots\right\} Vec[\Omega_\omega] \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v+u} Vec[\Omega_\omega], \quad u \geq 1 \end{aligned}$$

■

Définition 4.1.1 *La densité spectrale du modèle (4.1) est donnée par*

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \Upsilon_\omega(u) e^{-i\lambda u}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

Théorème 4.1.2 Lorsque la densité spectrale $S(\lambda)$ existe alors

$$Vec[S(\lambda)] = \frac{1}{2\pi} \left[I_{p^2} + \sum_{u=1}^{\infty} (\underline{\mu}_u + \underline{\mu}'_u) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} Vec[\Omega_\omega], \text{ pour } \lambda = 0 \quad (4.18)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \Upsilon_\omega(u) e^{-i\lambda u} = \frac{1}{2\pi} \left[\Upsilon_\omega(0) + \sum_{u=1}^{\infty} \Upsilon_\omega(u) e^{-i\lambda u} + \sum_{u=1}^{\infty} \Upsilon'_\omega(u) e^{i\lambda u} \right] \\ Vec[S(\lambda)] &= \frac{1}{2\pi} \left[Vec[\Upsilon_\omega(0)] + \sum_{u=1}^{\infty} Vec[\Upsilon_\omega(u)] e^{-i\lambda u} + \sum_{u=1}^{\infty} Vec[\Upsilon'_\omega(u)] e^{i\lambda u} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} + \sum_{u=1}^{\infty} \underline{\mu}_u \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} e^{-i\lambda u} + \sum_{u=1}^{\infty} \underline{\mu}'_u \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} e^{i\lambda u} \right) Vec[\Omega_\omega] \end{aligned}$$

où $\underline{\mu}'_u = E\{A^u(\omega) \otimes I_p\}$. Pour $\lambda = 0$ on obtient :

$$Vec[S(0)] = \frac{1}{2\pi} \left[I_{p^2} + \sum_{u=1}^{\infty} (\underline{\mu}_u + \underline{\mu}'_u) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} Vec[\Omega_\omega].$$

■

Théorème 4.1.3 Afin que $S(\lambda)$ existe et continue, il est nécessaire que la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]$ soit inversible.

Preuve. Si la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^2$ est inversible alors ceci est équivalent que les valeurs propres de la matrice $A^{\otimes 2}(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité i.e. celles de la matrice $A(\omega)$ le sont aussi i.e. $|\lambda_i| < 1$, $1 \leq i \leq p$ par conséquent

$$\begin{aligned} (I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega))^{-1} &= I_p^{\otimes 2} + A^{\otimes 2}(\omega) + A^{\otimes 4}(\omega) + \dots \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} A^{\otimes 2v}(\omega) \end{aligned}$$

sachant que

$$E \left\{ [I_p^{\otimes 2} + I_p \otimes A^u(\omega) + A^u(\omega) \otimes I_p] (I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega))^{-1} Vec[\Omega_\omega] \right\} = Vec[S(\lambda)]$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \|Vec[S(\lambda)]\| &= \left\| \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \left\{ I_{p^2} + \sum_{u=1}^{\infty} (\underline{\mu}_u + \underline{\mu}'_u) \right\} \underline{\mu}_{2v} \right) Vec[\Omega_\omega] \right\| \\ &= \left\| E \left\{ [I_p^{\otimes 2} + I_p \otimes A^u(\omega) + A^u(\omega) \otimes I_p] (I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega))^{-1} Vec[\Omega_\omega] \right\} \right\| < \infty. \end{aligned}$$

■

4.2 Comportement asymptotique

Définition 4.2.1 Pour $0 \leq u \leq T$ on définit l'estimateur de $\Upsilon_\omega(u)$ par

$$\hat{\Upsilon}_N(u) = \frac{1}{(T-u+1)N} \sum_{t=1}^{T+u} \sum_{\omega=1}^N \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) \quad (4.19)$$

lequel est un estimateur sans biais de $\Upsilon_\omega(u)$.

Théorème 4.2.1 Afin que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(u) \right] = \text{Vec} [\Upsilon_\omega(u)] \quad p.s \quad (4.20)$$

il est nécessaire et suffisant que les valeurs propres de $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Preuve. Considérons d'abord $\text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right]$ en notant que

$$\sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega), \quad \omega = 1, 2, \dots$$

sont des variables aléatoires *i.i.d* pour $\omega = 1, \dots, N$. Alors pour que $\text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right] \rightarrow \text{Vec} [\Upsilon_\omega(0)]$ *p.s*, il est nécessaire que

$$\left\| \text{Vec} \left[E \left\{ \sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \right\} \right] \right\| < \infty$$

donc $\| \text{Vec} [E \{ \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \}] \| < \infty$, $t = 0, \dots, T$, lequel est équivalent que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Pour prouver la suffisance, on note que pour (4.20), il est suffisant que pour tout u :

$$\left\| \text{Vec} \left[E \left\{ \sum_{t=0}^{T-u} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) \right\} \right] \right\| < \infty$$

lequel est vrai par l'inégalité de Schwarz, si $\| \text{Vec} [E \{ \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \}] \| < \infty$, $t = 0, \dots, T$, et ceci est vérifié si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité. ■

Définition 4.2.2 On définit les estimateurs $\hat{\Omega}_N$ et $\hat{\underline{\mu}}_N(u)$ de Ω_ω et $\underline{\mu}_u = E \{ I_p \otimes A^u(\omega) \}$ respectivement par

$$\begin{aligned} \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(u) \right] &= \hat{\underline{\mu}}_N(u) \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right]^{-1} \\ \text{Vec} \left[\hat{\Omega}_N \right] &= \left[I_{p^2} - \hat{\underline{\mu}}_N(2) \right] \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right] \end{aligned}$$

Théorème 4.2.2 *Sous la condition que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ se trouvent à l'intérieur du cercle unité alors p.s.*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vec} \left[\widehat{\Omega}_N \right] = \text{Vec} [\Omega_\omega], \text{ et } \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vec} \left[\widehat{\underline{\mu}}_N(u) \right] = \text{Vec} \left[\underline{\mu}_u \right], \quad u = 1, \dots, T-2 \quad (4.21)$$

De plus pour que

$$\sqrt{N} \left(\text{Vec} \left[\widehat{\Upsilon}_N(0) - \Upsilon_\omega(0) \right]', \dots, \text{Vec} \left[\widehat{\Upsilon}_N(T) - \Upsilon_\omega(T) \right]' \right) \quad (4.22)$$

converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution normale $(T+1)p^2$ -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance en bloque Σ , dont la $(p+1, q+1)$ ème matrice est donnée par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{NCov} \left(\text{Vec} \left[\widehat{\Upsilon}_N(p) \right], \text{Vec} \left[\widehat{\Upsilon}_N(q) \right] \right)$$

il est nécessaire et suffisant que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Preuve. La condition nécessaire : on note que

$$\sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega), \quad \omega = 1, 2, \dots, N$$

sont des variables aléatoires *iid*.

Pour que $\sqrt{N} \left[\widehat{\Upsilon}_N(0) - \Upsilon_\omega(0) \right]$ soit asymptotiquement normale, il est nécessaire et suffisant que :

$$\left\| E \left\{ \sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \right\}^2 \right\| < \infty.$$

D'après le théorème central limite pour les variables aléatoires *i.i.d* lequel est vrai si et seulement si $\left\| E \{ \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \}^2 \right\| < \infty$ mais cette inégalité est équivalente que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité.

La condition suffisante : maintenant, pour que $\sqrt{N} \left[\widehat{\Upsilon}_N(u) - \Upsilon_\omega(u) \right]$ soit aussi asymptotiquement normale pour tout $u \geq 1$, il est nécessaire et suffisant que

$$\left\| E \left(\sum_{t=0}^{T-u} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}_{t-u}(\omega) \right)^2 \right\| < \infty$$

lequel est vrai en si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité en utilisant l'inégalité Schwarz.

Par conséquent si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité est une condition nécessaire et suffisante pour que toute combinaison de $\sqrt{N} \left[\hat{\Upsilon}_N(u) - \Upsilon_\omega(u) \right]$, $u \geq 0$, soit asymptotiquement normale. ■

Théorème 4.2.3 *Sous la condition que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité, alors*

$$\sqrt{N} \left(\text{Vec} \left[\hat{\Omega}_N - \Omega_\omega \right]', \text{Vec} \left[\hat{\underline{\mu}}_N(1) - \underline{\mu}_1 \right]', \dots, \text{Vec} \left[\hat{\underline{\mu}}_N(T-2) - \underline{\mu}_{T-2} \right]' \right) \quad (4.23)$$

converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution normale $(T-1)p^2$ -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance en bloque $\Phi \Sigma \Phi'$, où Φ est la matrice aux dérivées partielles de vecteur colonne $\left(\text{Vec} [\Omega_\omega]', \text{Vec} [\underline{\mu}_1]', \dots, \text{Vec} [\underline{\mu}_{T-2}]' \right)'$ par rapport au vecteur ligne $(\text{Vec} [\Upsilon_\omega(0)]', \text{Vec} [\Upsilon_\omega(1)]', \dots, \text{Vec} [\Upsilon_\omega(T)]')$.

Si $\hat{\Sigma}$ est la matrice en bloque avec $(p+1, q+1)$ ème élément :

$$\begin{aligned} & N^{-1} \sum_{\omega=1}^N \left\{ (T-p+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-p} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+p}(\omega) \right\} \times \left\{ (T-q+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-q} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+q}(\omega) \right\} \\ & - \left\{ N^{-1} \sum_{\omega=1}^N (T-p+2)^{-1} \sum_{t=0}^{T-p} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+p}(\omega) \right\} \times \left\{ N^{-1} \sum_{\omega=1}^N (T-q+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-q} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+q}(\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$p, q = 0, 1, \dots, T-1$, et $\hat{\Phi}$ est la matrice obtenue en substituant $\Omega_\omega, \underline{\mu}_u$ par $\hat{\Omega}_N, \hat{\underline{\mu}}_N(u)$ dans Φ , $u = 0, 1, \dots, T-2$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Phi} \hat{\Sigma} \hat{\Phi}' = \Phi \Sigma \Phi', \text{ p.s.} \quad (4.25)$$

Chapitre 5

Etude statistique du modèle RCAR(p)

Dans ce chapitre on va estimer les moments des coefficients par les méthodes usuelles d'estimation, en étudiant le comportement asymptotique de ces estimateurs.

5.1 Estimation par LS

Dans cette section on s'intéresse à trouver l'estimateur des moindres carrés ordinaires ou least squares (LS) du modèle. Nous considérons le modèle $RCAR(p)$ suivant

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega). \quad (5.1.1)$$

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p [A_k + \alpha_k(\omega)] Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (5.1.2)$$

Dans le chapitre 1, on a supposé que :

- (i) $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ_ω^2 ,
- (ii) Les A_k , pour $k = 1, \dots, p$ sont constantes.
- (iii) $\alpha(\omega) = [\alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \dots, \alpha_p(\omega)]$, $\{\alpha(\omega), \omega = 1, \dots, N\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $E\{\alpha(\omega)\} = 0$, $E\{\alpha(\omega) \otimes \alpha(\omega)\} = C$ et les suite $\{\varepsilon_t(\omega)\}$, $\{\alpha(\omega)\}$ sont indépendantes.
- (iv) Il existe un vecteur constant Z de dimension $p \times 1$ tel que $Z'Y_t(\omega)$ est déterminé exactement comme une fonction linéaire de $\{Y_{t-1}(\omega), \dots, Y_{t-p}(\omega)\}$.

Dans ce paragraphe on réserve ces suppositions en rajoutant

(v) Chacune des suite $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ et $\{\alpha(\omega)\}$ est *iid*.

(vi) Les coefficients A_k , $k = 1, \dots, p$ et C sont supposés de sorte qu'il existe une solution unique $\{Y_t(\omega)\}$ du scond d'ordre et $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable vérifiant l'équation (5.1.1).

(vii) $\varepsilon_t(\omega)$ ne peut pas prendre presque sûrement que deux valeurs seulement.

On note que : sous les supposition (v) et (vi), le *Théorème 2.4.1* montre que la solution $\{Y_t(\omega)\}$ est strictement stationnaire et ergodique, et l'unicité de cette solution est garantie par le *Théorème 2.2.1* et le *Lemme 2.2.1*.

Soient $\sigma_\omega^2 \neq 0$ et $\Sigma_\omega = E \{\alpha'(\omega) \alpha(\omega)\}$, il est clair que

$$Vec[\Sigma_\omega] = E \{\alpha'(\omega) \otimes \alpha'(\omega)\} = [E \{\alpha(\omega) \otimes \alpha(\omega)\}]' = C'$$

On a vu que la condition (vi) est vérifiée si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A se trouvent à l'intérieur du cercle unité, ou encore équivalent à $1 - \sum_{i=1}^p A_i z^i \neq 0$ pour tout $|z| \geq 1$, lequel est montré par *Andel (1971)* i.e. $C\Lambda < 1$, où Λ est la dernière colonne de $(I - A \otimes A)^{-1}$. Soit W une matrice d'ordre $p \times p$ tel que $\Lambda = Vec[W]$, alors la condition $C\Lambda < 1$ peut être remplacer par $Tr[\Sigma_\omega W]$ car

$$C\Lambda = (Vec[\Sigma_\omega])' Vec[W] = Tr[\Sigma_\omega W]$$

Le modèle (5.1.2) devient

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k Y_{t-k}(\omega) + \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \right) \quad (5.1.3)$$

où bien

$$Y_t(\omega) = \underline{A}' \underline{Y}_{t-1}(\omega) + u_t(\omega) \quad (5.1.4)$$

où : $\underline{A} = (A_1, \dots, A_p)'$ et $u_t(\omega) = \alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega)$.

5.1.1 Procédure d'estimation

L'application des *LS* à ce modèle revient à appliquer les *LS* sur chaque équation individuellement i.e $\omega = 1, \dots, N$. Sachant que la matrice Σ_ω est symétrique, alors on a besoin d'estimer seulement $\Xi_\omega = Vech[\Sigma_\omega]$.

D'abord on va estimer le coefficient $\underline{A} = (A_1, \dots, A_p)'$. On a

$$E \{u_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = E \{\alpha(\omega)\} \underline{Y}_{t-1}(\omega) + E \{\varepsilon_t(\omega)\} = 0$$

Sachant que $\alpha_k(\omega)$ et $\varepsilon_t(\omega)$ sont indépendantes de $\{\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_p(\omega), \varepsilon_{t-1}(\omega), \varepsilon_{t-2}(\omega), \dots\}$ alors

$$\begin{aligned}
E \{u_t^2(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} &= E \{\varepsilon_t^2(\omega)\} + 2E \{\varepsilon_t(\omega) \alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} \\
&\quad + E \{[\alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2 / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} \\
&= \sigma_\omega^2 + 2E \{\varepsilon_t(\omega)\} E \{\alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} \\
&\quad + E \{\underline{Y}'_{t-1}(\omega) \alpha'(\omega) \alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} \\
&= \sigma_\omega^2 + \underline{Y}'_{t-1}(\omega) E \{\alpha'(\omega) \alpha(\omega)\} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \\
&= \sigma_\omega^2 + \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \Sigma_\omega \underline{Y}_{t-1}(\omega)
\end{aligned}$$

Cela signifie que $u_t(\omega)$ est une différence de martingale conditionnellement hétéroscédastique.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
E \{u_t^2(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} &= \sigma_\omega^2 + [\underline{Y}'_{t-1}(\omega) \otimes \underline{Y}'_{t-1}(\omega)] \text{Vec}[\Sigma_\omega] \\
&= \sigma_\omega^2 + \{\text{Vec}[\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)]\}' K_p' \text{Vech}[\Sigma_\omega]
\end{aligned}$$

on pose : $\Xi_\omega = \text{Vech}[\Sigma_\omega]$ et $\underline{z}_t(\omega) = K_p \{\text{Vec}[\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)]\}$, on a

$$E \{u_t^2(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = \sigma_\omega^2 + \underline{z}'_t(\omega) \Xi_\omega = \sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega) \quad (5.1.5)$$

Si on se donne l'ensemble des observations $\{Y_{1-p}(\omega), \dots, Y_0(\omega)\}$ on obtient l'estimateur des moindres carrés $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$ de \underline{A} en minimisant $\sum_{t=1}^T u_t^2(\omega)$ par rapport à \underline{A} dans la relation (5.1.4), alors on a

$$\hat{\underline{A}}_T^{(LS)} = \left\{ \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) Y_t(\omega) \quad (5.1.6)$$

D'après la relation (5.1.4) on a : $\hat{u}_t(\omega) = Y_t(\omega) - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)'} \underline{Y}_{t-1}(\omega)$, $t = 1, \dots, T$.

Soit $\eta_t(\omega) = u_t^2(\omega) - \sigma_\omega^2 - \underline{z}'_t(\omega) \Xi_\omega$, alors les estimateurs $\hat{\Xi}_\omega$, $\hat{\sigma}_\omega^2$ de Ξ_ω et σ_ω^2 sont obtenus en minimisant $\sum_{t=1}^T \eta_t^2(\omega)$ par rapport Ξ_ω et σ_ω^2 , et on a

$$\hat{\Xi}_\omega = \left\{ \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{\underline{z}}] [\underline{z}_t(\omega) - \bar{\underline{z}}]' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2(\omega) [\underline{z}_t(\omega) - \bar{\underline{z}}] \quad (5.1.7)$$

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2(\omega) - \hat{\Xi}'_\omega \bar{\underline{z}} \quad (5.1.8)$$

où : $\bar{\underline{z}} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega)$.

5.1.2 Comportement asymptotique

Dans ce paragraphe on va établir que les estimateurs $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$, $\hat{\Xi}_\omega$ et $\hat{\sigma}_\omega^2$ définis par (5.1.6), (5.1.7), et (5.1.8) sont consistents, alors il est convenable d'abord d'obtenir les propriétés asymptotiques concernant l'estimateur $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$, ensuite celles des $\hat{\Xi}_\omega$ et $\hat{\sigma}_\omega^2$ car ces estimateurs sont obtenus en dérivant $\hat{u}_t(\omega)$.

Théorème 5.1.1 *Soit $\{Y_t(\omega)\}$ un processus RCAR(p) strictement stationnaire $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable vérifie l'équation (5.1.1) et soit $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$ donné par la relation (5.1.6) alors sous les conditions (i)–(vi), l'estimateur $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$ converge presque sûrement vers \underline{A} .*

De plus si $E\{Y_t^4(\omega)\} < \infty$ alors $T^{1/2}(\hat{\underline{A}}_T^{(LS)} - \underline{A})$ lorsque $T \rightarrow \infty$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$\sigma_\omega^2 \Upsilon_\omega^{-1}(0) + \Upsilon_\omega^{-1}(0) E\{\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)\} \Upsilon_\omega^{-1}(0) \quad (5.1.9)$$

où : $\Upsilon_\omega(0) = E\{\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)\}$.

Preuve. D'après relation (5.1.6) on a

$$\begin{aligned} \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} - \underline{A} &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\}^{-1} \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) Y_t(\omega) \right\} - \underline{A} \\ &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) Y_t(\omega) - \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \underline{A} \right\} \\ &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega) \end{aligned}$$

en vertu du Théorème 2.4.1 ce processus est strictement stationnaire et ergodique, par conséquent $\{\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega)\}$ et $\{\underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega)\}$ sont aussi strictement stationnaires et ergodiques. Alors $\Upsilon_\omega(0) = E\{\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega)\}$ est bornée par (vi), ainsi que

$$\begin{aligned} E\{\underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega)\} &= E\{E\{\underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega)\} / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} \\ &= E\{\underline{Y}_{t-1}(\omega)\} E\{u_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = 0 \end{aligned}$$

sachant que $E\{u_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = 0$ et $\underline{Y}_{t-1}(\omega)$ est une fonction $\mathcal{F}_{t-1}(\omega)$ -mesurable, alors

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)$$

converge *p.s* vers $\Upsilon_\omega(0)$ et $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega)$ converge *p.s* vers 0, par conséquent $(\hat{\underline{A}}_T^{(LS)} - \underline{A})$ converge *p.s* vers 0.

Maintenant si ϕ est un vecteur de p composantes, alors on a :

$$\begin{aligned} E \left\{ [\phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega)]^2 \right\} &= E \left\{ E \left\{ [\phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega)]^2 \right\} / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\} \\ &= E \left\{ [\phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2 E \left\{ u_t^2(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\} \right\} \\ &= E \left\{ [\phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2 [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)] \right\} \end{aligned}$$

d'après la relation (5.1.5) cette espérance existe si $E \{ Y_t^4(\omega) \} < \infty$, car les composantes de $[\phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2 [\Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)]$ sont en fonction de $Y_t^4(\omega)$ et $E \{ \phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = 0$, alors en vertu du *Théorème de Billingsley* : $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T [\phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega)] u_t(\omega)$ admet une distribution qui converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$E \left\{ [\phi' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2 [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)] \right\} = \phi' E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)] \right\} \phi$$

Pour tout $\phi \in \mathbb{R}^p$ montre que $E \{ Y_t^4(\omega) \} < \infty$, donc $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega)$ converge en distribution vers une distribution normale multidimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)] \right\}$$

par conséquent $T^{1/2} \left(\hat{\underline{A}}_T^{(LS)} - \underline{A} \right)$ converge en distribution vers une distribution normale de moyenne nulle et d'une matrice de covariance :

$$\begin{aligned} &\Upsilon_\omega^{-1}(0) E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)] \right\} \Upsilon_\omega^{-1}(0) \\ &= \sigma_\omega^2 \Upsilon_\omega^{-1}(0) \Upsilon_\omega(0) \Upsilon_\omega^{-1}(0) + \Upsilon_\omega^{-1}(0) E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega) \right\} \Upsilon_\omega^{-1}(0) \\ &= \sigma_\omega^2 \Upsilon_\omega^{-1}(0) + \Upsilon_\omega^{-1}(0) E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega) \right\} \Upsilon_\omega^{-1}(0). \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 5.1.1 *Sous les conditions (i) - (vii), il existe un vecteur ϕ de $p(p+1)/2$ composantes tel que*

$$\phi [z_t(\omega) - E \{ z_t(\omega) \}] = 0$$

presque partout pour tout t .

Preuve. Voir [12]. ■

Maintenant, pour étudier le comportement asymptotique des estimateurs $\hat{\Xi}_\omega$ et $\hat{\sigma}_\omega^2$ on a besoin de remplacer $\hat{u}_t(\omega)$ par $u_t(\omega)$ dans les relations (5.1.7) et (5.1.8) on obtient

$$\bar{\Xi}_\omega = \left\{ \sum_{t=1}^T [z_t(\omega) - \bar{z}] [z_t(\omega) - \bar{z}]' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T u_t^2(\omega) [z_t(\omega) - \bar{z}] \quad (5.1.10)$$

$$\bar{\sigma}_\omega^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t^2(\omega) - \hat{\Xi}'_\omega \bar{z} \quad (5.1.11)$$

Lemme 5.1.2 $(\hat{\Xi}_\omega - \Xi_\omega)$ et $(\hat{\sigma}_\omega^2 - \sigma_\omega^2)$ convergent presque sûrement vers zéro si :

$$E \{Y_t^4(\omega)\} < \infty$$

tandis que $T^{1/2}(\hat{\Xi}_\omega - \Xi_\omega)$ et $T^{1/2}(\hat{\sigma}_\omega^2 - \sigma_\omega^2)$ convergent en probabilité vers zéro.

Preuve. D'après les relations (5.1.7), (5.1.8), (5.1.10) et (5.1.11) on obtient

$$\hat{\Xi}_\omega - \Xi_\omega = \left\{ \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}]' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] [\hat{u}_t^2(\omega) - u_t^2(\omega)] \quad (5.1.12)$$

$$\hat{\sigma}_\omega^2 - \sigma_\omega^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T [\hat{u}_t^2(\omega) - u_t^2(\omega)] - [\hat{\Xi}_\omega - \Xi_\omega] \bar{z} \quad (5.1.13)$$

on a $\hat{u}_t^2(\omega) - u_t^2(\omega) = [\hat{u}_t(\omega) - u_t(\omega)] [\hat{u}_t(\omega) + u_t(\omega)]$, alors

$$\begin{aligned} \hat{u}_t^2(\omega) - u_t^2(\omega) &= \left\{ Y_t(\omega) - \hat{A}_T^{(LS)'} \underline{Y}_{t-1}(\omega) - Y_t(\omega) + \underline{A} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} \\ &\quad \times \left\{ Y_t(\omega) - \hat{A}_T^{(LS)'} \underline{Y}_{t-1}(\omega) + Y_t(\omega) - \underline{A} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

$$= \left\{ [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} \left\{ 2u_t(\omega) + [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$$

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] [\hat{u}_t^2(\omega) - u_t^2(\omega)]$$

$$= \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] \left\{ [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} \left\{ 2u_t(\omega) + [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$$

$$= 2T^{-1} \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] u_t(\omega) \left\{ [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} + T^{-1} \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] \left\{ [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 \quad (5.1.15)$$

D'une part on a :

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] u_t(\omega) \left\{ [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$$

$$= T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) u_t(\omega) \left\{ [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} - \bar{z} T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t(\omega) \left\{ [\underline{A} - \hat{A}_T^{(LS)'}] \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$$

Sachant que :

- $\left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right] \rightarrow 0$ p.s en vertu du *Théorème* 5.1.1,
- $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) u_t(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \rightarrow 0$ p.s d'après le *Théorème* ergodique si $E \{Y_t^4(\omega)\} < \infty$,
- $\{\underline{z}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) u_t(\omega)\}$ est ergodique et on a

$$E \{ \underline{z}_t(\omega) u_t(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = \underline{z}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) E \{ u_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = 0$$

alors $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) u_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$ converge p.s vers zéro.

De plus $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) u_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$ converge en probabilité vers zéro sous les mêmes conditions car :

- $\sqrt{T} \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]$ converge en distribution en vertu du *Théorème* 5.1.1,

Ainsi que $\bar{z} T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$ converge p.s vers zéro, car :

- $\bar{z} \rightarrow E \{ \underline{z}_t(\omega) \}$ p.s par le *Théorème* ergodique,
- $T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega)$ converge p.s vers zéro

De même manière on trouve que $\bar{z} T^{-1/2} \sum_{t=1}^T u_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}$ converge en probabilité vers zéro.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} & T^{-1} \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t(\omega) - \bar{z}] \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 - \bar{z} T^{-1} \sum_{t=1}^T \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 \end{aligned}$$

Sachant $\underline{Y}_{t-1}(\omega)$ et $\left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]$ sont des vecteurs de dimension $p \times 1$ alors en vertu du *Théorème* 1.1.1 (résultat (iv)) on obtient

$$\begin{aligned} & (Vec [\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)])' Vec \left[\left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right) \left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right)' \right] \\ &= Tr \left[\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right) \left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right)' \right] \\ &= Tr \left[\left(\left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right)' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right)^2 \right] = \left[\left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right)' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right]^2 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_{LS} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \left\{ \text{Vec} \left[\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right] \right\}' \text{Vec} \left[\left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_{LS} \right) \left(\underline{A} - \hat{\underline{A}}_{LS} \right)' \right] \right\} \end{aligned}$$

Si $E \{Y_t^4(\omega)\} < \infty$ alors en vertu du *Théorème* ergodique, $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \left(\text{Vec} \left[\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right] \right)'$ converge *p.s* vers

$$E \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \left\{ \text{Vec} \left[\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right] \right\}' \right\}$$

Sachant que $\left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right] \rightarrow 0$ *p.s* et $\sqrt{T} \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]$ converge en distribution vers zéro, alors $T^{1/4} \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]$ converge en probabilité vers zéro, donc

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 \text{ et } T^{-1} \sum_{t=1}^T \bar{z} \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2$$

convergent *p.s* vers zéro tandis que

$$T^{-1/2} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 \text{ et } T^{-1/2} \sum_{t=1}^T \bar{z} \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2$$

convergent en probabilité vers zéro.

On note que si $\xi(T)$ est un vecteur aléatoire qui converge en distribution, alors $T^{-1/2}\xi(T)$ converge en probabilité vers zéro, de plus si $\delta(T)$ est un autre vecteur aléatoire qui converge en probabilité vers zéro, alors $\delta(T)\xi'(T)$ converge en probabilité vers zéro.

En utilisant ce résultat on obtient que $\left(\hat{\Xi}_\omega - \bar{\Xi}_\omega \right) \rightarrow 0$ *p.s* et $\sqrt{T} \left(\hat{\Xi}_\omega - \bar{\Xi}_\omega \right) \xrightarrow{p} 0$ sachant que

$$\begin{aligned} & T^{-1} \sum_{t=1}^T \left[\underline{z}_t(\omega) - \bar{z} \right] \left[\underline{z}_t(\omega) - \bar{z} \right]' \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) - \bar{z} T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}'_t(\omega) - T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{z}_t(\omega) \bar{z} + \bar{z} \bar{z}' \end{aligned}$$

laquelle est convergente vers

$$E \{ \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \} - E \{ \underline{z}_t(\omega) E \left[\underline{z}'_t(\omega) \right] \} = E \left\{ \left(\underline{z}_t(\omega) - E \left[\underline{z}_t(\omega) \right] \right) \left(\underline{z}_t(\omega) - E \left[\underline{z}_t(\omega) \right] \right)' \right\}$$

Le fait que $E \{Y_t^4(\omega)\} < \infty$ et d'après le *Lemme* 5.1.1, cette matrice est définie positive. En utilisant les mêmes arguments, on trouve que

$$\begin{aligned} & T^{-1} \sum_{t=1}^T [\hat{u}_t^2(\omega) - u_t^2(\omega)] \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega) + T^{-1} \sum_{t=1}^T \left\{ \left[\underline{A} - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)} \right]' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\}^2 \end{aligned}$$

converge *p.s* vers zéro, tandis que $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T [\hat{u}_t^2(\omega) - u_t^2(\omega)]$ converge en probabilité vers zéro, même sans la supposition $E \{Y_t^4(\omega)\} < \infty$.

Alors de la relation (5.1.11), $(\hat{\sigma}_\omega^2 - \bar{\sigma}_\omega^2)$ converge *p.s* vers zéro, tandis que $\sqrt{T}(\hat{\sigma}_\omega^2 - \bar{\sigma}_\omega^2)$ converge en probabilité vers zéro car $\bar{z} \rightarrow E \{z_t(\omega)\}$. ■

Théorème 5.1.2 Soit $\{Y_t(\omega)\}$ un processus RCAR(p) strictement stationnaire $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable vérifiant l'équation (5.1.1), sous les conditions (i) – (vii), $\hat{K} = \left[\hat{\underline{A}}_T^{(LS)'} , \hat{\Xi}'_\omega , \hat{\sigma}_\omega^2 \right]'$ converge presque sûrement vers $K = \left[\underline{A}' , \Xi'_\omega , \sigma_\omega^2 \right]'$ si $E \{Y_t^4(\omega)\} < \infty$.

De plus si $E \{Y_t^8(\omega)\} < \infty$, alors $T^{1/2}(\hat{K} - K)$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance Ω donnée par

$$\Omega = (\Omega_{ij}) = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega'_{12} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega'_{13} & \Omega'_{23} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

où : $i, j = 1, 2, 3$, et Ω_{ij} est une matrice de dimension $p(i) \times p(j)$ avec $p(1) = p$, $p(2) = p(p+1)/2$, et $p(3) = 1$, tels que

$$\Omega_{11} = \sigma_\omega^2 \Upsilon_\omega^{-1}(0) + \Upsilon_\omega^{-1}(0) E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \Xi'_\omega z_t(\omega) \} \Upsilon_\omega^{-1}(0)$$

$$\Omega_{12} = \Upsilon_\omega^{-1}(0) E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) [z_t(\omega) - E \{z_t(\omega)\}]' u_t^3(\omega) \} R_\omega^{-1}$$

$$\Omega_{13} = \Upsilon_\omega^{-1}(0) E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) [I - [z_t(\omega) - E \{z_t(\omega)\}]]' R_\omega^{-1} E \{z_t(\omega)\} u_t^3(\omega) \}$$

$$\Omega_{22} = R_\omega^{-1} E \left\{ [z_t(\omega) - E \{z_t(\omega)\}] [z_t(\omega) - E \{z_t(\omega)\}]' \left[u_t^4(\omega) - [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega z_t(\omega)]^2 \right] \right\} R_\omega^{-1}$$

$$\Omega_{23} = R_\omega^{-1} E \left\{ [z_t(\omega) - E\{z_t(\omega)\}] \left[u_t^4(\omega) - [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega z_t(\omega)]^2 \right] \right\} - \Omega_{22} E\{z_t(\omega)\}$$

$$\Omega_{33} = E \left\{ \left[u_t^4(\omega) - [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega z_t(\omega)]^2 \right] \right\}$$

$$-2E \left\{ \left[u_t^4(\omega) - [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega z_t(\omega)]^2 \right] E\{z'_t(\omega)\} R_\omega^{-1} [z_t(\omega) - E\{z_t(\omega)\}] + E\{z'_t(\omega)\} \Omega_{22} E\{z_t(\omega)\} \right\}$$

Corollaire 5.1.1 *On obtient l'estimateur $\hat{\Omega}$ de la matrice de covariance Ω lorsque on remplace les moments théoriques par ceux empiriques dans les sous-matrices Ω_{ij} et en posant*

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(\omega) &= Y_t(\omega) - \hat{A}_T^{(LS)'} Y_{t-1}(\omega) \\ \hat{Y}_\omega(0) &= T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}(\omega) Y'_{t-1}(\omega) \\ \hat{\Xi}_\omega &= T^{-1} \sum_{t=1}^T [z_t(\omega) - \bar{z}] [z_t(\omega) - \bar{z}]' \end{aligned}$$

ce qui implique la consistance forte de cet estimateur.

Remarque 5.1.1 *L'application des LS ne donne pas le meilleur estimateur pour deux raisons :*

- (1) $\varepsilon_t(\omega)$ n'est pas homoscédastique : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_N^2$
- (2) $\sigma_{\omega\omega'} \neq 0$, $\omega \neq \omega'$ et $\omega, \omega' = 1, \dots, N$.

Alors dans ce cas on utilise la méthode des moments généralisés.

5.2 Estimation par GLS

Dans cette section on s'intéresse à appliquer la méthode des moindres carrés généralisés ou generalized least squares (GLS) sur notre modèle sous les suppositions de *Swamy* (1970).

Soit donc le modèle RCAR(P)

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (5.2.1)$$

Ce modèle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Y(\omega) = X(\omega) A(\omega) + \varepsilon(\omega) \quad (5.2.2)$$

$$\text{où } Y(\omega) = [Y_1(\omega), \dots, Y_T(\omega)]'; \quad X(\omega) = \begin{bmatrix} Y_0(\omega) & \cdots & Y_{1-p}(\omega) \\ Y_1(\omega) & \cdots & Y_{2-p}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{T-1}(\omega) & \cdots & Y_{T-p}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$A(\omega) = [A_1(\omega), \dots, A_p(\omega)]'; \quad \varepsilon(\omega) = [\varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_T(\omega)]' \text{ et } \omega = 1, \dots, N.$$

On pose

$$A(\omega) = \bar{A} + \alpha(\omega) \quad (5.2.3)$$

en supposant que

$$E\{\alpha(\omega)\} = 0, \quad E\{\alpha(\omega)\alpha'(\omega)\} = \Delta, \quad E\{\alpha(\omega)\alpha'(\omega')\} = 0 \text{ pour } \omega \neq \omega' \quad (5.2.4)$$

$$E\{\varepsilon(\omega)\} = 0, \quad E\{\varepsilon(\omega)\varepsilon'(\omega)\} = \sigma_\omega^2 I, \quad E\{\varepsilon(\omega)\varepsilon'(\omega')\} = 0 \text{ pour } \omega \neq \omega' \quad (5.2.5)$$

$$E\{\alpha_k(\omega)\varepsilon_t'(\omega')\} = 0, \quad \omega, \omega' = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, p \text{ et } t = 1, \dots, T$$

On combine (5.2.2) et (5.2.3) on obtient

$$Y(\omega) = X(\omega)\bar{A} + u(\omega) \quad (5.2.6)$$

où $u(\omega) = X(\omega)\alpha(\omega) + \varepsilon(\omega)$, $\omega = 1, \dots, N$. On regroupe les NT observations, en posant

$$Y = \begin{bmatrix} Y'(1), & \cdots, & Y'(N) \end{bmatrix}', \quad X = \begin{bmatrix} X'(1), & \cdots, & X'(N) \end{bmatrix}'$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha'(1), & \cdots, & \alpha'(N) \end{bmatrix}', \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon'(1), & \cdots, & \varepsilon'(N) \end{bmatrix}'$$

$$Q = \text{diag} \begin{bmatrix} X(1), & \cdots, & X(N) \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs Y , u , et ε sont de dimensions $NT \times 1$, \bar{A} , α sont de dimensions $Np \times 1$, et les matrices X et Q sont respectivement de dimensions $NT \times p$ et $NT \times Np$. Alors le modèle devient

$$Y = X\bar{A} + u \quad (5.2.7)$$

où $u = Q\alpha + \varepsilon$, donc on a

$$E[uu'] = \Omega = QDQ' + \Sigma$$

$$D = E[\alpha\alpha'] = \text{diag}[\Delta, \dots, \Delta] \quad (5.2.8)$$

$$\Sigma = E[\varepsilon\varepsilon'] = \text{diag}[\sigma_1^2 I, \dots, \sigma_N^2 I]$$

On peut aussi écrire Ω sous la forme

$$\Omega = \text{diag} [X(1) \Delta X'(1) + \sigma_1^2 I, \dots, X(N) \Delta X'(N) + \sigma_N^2 I] \quad (5.2.9)$$

L'estimateur de *GLS* de \bar{A} est donné par

$$\begin{aligned} \hat{A}_N^{(GLS)} &= (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y \\ &= \left[\sum_{\omega=1}^N X'(\omega) \{X(\omega) \Delta X'(\omega) + \sigma_\omega^2 I\}^{-1} X(\omega) \right]^{-1} \sum_{\omega=1}^N X'(\omega) \{X(\omega) \Delta X'(\omega) + \sigma_\omega^2 I\}^{-1} Y(\omega) \end{aligned}$$

La matrice de covariance de l'estimateur $\hat{A}_N^{(GLS)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Cov} [\hat{A}_N^{(GLS)}] &= (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \\ &= \left[\sum_{\omega=1}^N X'(\omega) \{X(\omega) \Delta X'(\omega) + \sigma_\omega^2 I\}^{-1} X(\omega) \right]^{-1} \\ &= \left[\sum_{\omega=1}^N \left\{ \Delta + \sigma_\omega^2 [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} \right\}^{-1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Dans le cas où les paramètres Δ et σ sont inconnus *Swamy* (1970) a donné leurs estimateurs qui sont sans biais et consistents :

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega)}{T - p} \quad (5.2.10)$$

$$\hat{\Delta}_N = \frac{S_A}{N - 1} - \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N \hat{\sigma}_\omega^2 (X'(\omega) X(\omega))^{-1} \quad (5.2.11)$$

où

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = Y(\omega) - X(\omega) \hat{A}_T^{(LS)}(\omega) \quad (5.2.12)$$

$$\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) = (X'(\omega) X(\omega))^{-1} X'(\omega) Y(\omega) \quad (5.2.13)$$

$$S_A = \sum_{\omega=1}^N \hat{A}_T^{(LS)}(\omega) \hat{A}_T^{(LS)}(\omega)' - \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N \hat{A}_T^{(LS)}(\omega) \sum_{\omega=1}^N \hat{A}_T^{(LS)}(\omega)' \quad (5.2.14)$$

Donc l'estimateur *GLS* sera estimé lorsque l'on remplace Δ et σ_ω^2 par $\hat{\Delta}_N$ et $\hat{\sigma}_\omega^2$ dans la relation (5.2.9), on aura

$$\begin{aligned} \hat{A}_N^{(EGLS)} &= (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Omega}^{-1} Y = \left[\sum_{\omega=1}^N X'(\omega) \left\{ X(\omega) \hat{\Delta}_N X'(\omega) + \hat{\sigma}_\omega^2 I \right\}^{-1} X(\omega) \right]^{-1} \\ &\quad \times \sum_{\omega=1}^N X'(\omega) \left\{ X(\omega) \hat{\Delta}_N X'(\omega) + \hat{\sigma}_\omega^2 I \right\}^{-1} Y(\omega) \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

par conséquent la matrice de covariance de l'estimateur $\widehat{A}_N^{(EGLS)}$ soit

$$\begin{aligned} Cov \left[\widehat{A}_N^{(EGLS)} \right] &= \left(X' \widehat{\Omega}^{-1} X \right)^{-1} \\ &= \left[\sum_{\omega=1}^N \left\{ \widehat{\Delta}_N + \widehat{\sigma}_\omega^2 [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} \right\}^{-1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Swamy (1970) à montré que $\widehat{A}_N^{(EGLS)}$ est un estimateur consistant lorsque $N \rightarrow \infty$ et $T \rightarrow \infty$, et asymptotiquement efficace lorsque $T \rightarrow \infty$. On note que l'estimateur (5.2.11) est la différence de deux matrices, ce qu'il peut être rendre certaines composantes du coefficient négatives, particulièrement lorsque les σ_ω^2 sont grandes par rapport à Δ , néanmoins un alternatif estimateur est suggéré pour résoudre ce problème :

$$\widehat{\Delta}_1 = \begin{cases} \widehat{\Delta}_N, & \text{si tous les éléments diagonaux sont positifs,} \\ \widehat{\Delta}_A, & \text{les éléments diagonaux négatifs remplacés par zéro.} \end{cases}$$

dans ce cas, Deilman (1992), a noté que la matrice de covariance Ω estimé n'est pas nécessairement définie positive, alors une autre modification a été suggérée par Carter & Yang (1986) ;

La plupart des auteurs ont démontré la normalité asymptotique d'estimateurs en supposant implicitement que $\widehat{\Omega}$ et u sont indépendants, en négligeant le fait qu'ils ne le sont pas. Une méthode alternative a été proposé par Anh (1988) pour résoudre ce problème en supposant que

$$\Omega_\omega = X(\omega) \Delta X'(\omega) + \sigma_\omega^2 I \quad (5.2.16)$$

On va suggérer l'estimateur $\Omega_N^{*(\omega)}$ comme suit :

$$\Omega_N^{*(\omega)} = \widehat{u}(\omega) \widehat{u}'(\omega) + \alpha_\omega I \quad (5.2.17)$$

où

$$\widehat{u}(\omega) = Y(\omega) - X(\omega) \widehat{A}_N^{(LS)} \quad (5.2.18)$$

$$\widehat{A}_N^{(LS)} = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N (X'(\omega) X(\omega))^{-1} X'(\omega) Y(\omega)$$

Alors : $\widehat{\Omega}_N^* = \left[\Omega_N^{*(1)}, \dots, \Omega_N^{*(N)} \right]$

$$\widehat{A}_N^{(EGLS)} = (X \Omega_N^{*-1} X)^{-1} X' \Omega_N^{*-1} Y \quad (5.2.19)$$

Le terme $\alpha_\omega I$ où α_ω peut être négatif, est ajouté en (5.2.17) pour rendre la matrice $\Omega_N^{*(\omega)}$ inversible.

5.2.1 Comportement asymptotique

Pour établir les propriétés asymptotiques des estimateurs on a besoin des conditions supplémentaires suivantes :

- (i) Les éléments de la matrice X sont uniformément bornés
- (ii) Les matrices $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} = M_\omega$, $\lim_{T \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty} \frac{X'X}{NT} = M$ sont bornées et définies positives.
- (iii) Les moments d'ordre 4 de $A(\omega)$ et $\varepsilon(\omega)$ sont finis pour $\omega = 1, \dots, N$.
- (iv) $\frac{N}{T} = o(1)$ lorsque $N \rightarrow \infty$ et $T \rightarrow \infty$.
- (v) La matrice Δ est non singulière.

On va montrer que $\Omega_N^{*(\omega)}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et consistant sous certaines conditions.

Proposition 5.2.1 *Lorsque le modèle est défini par (5.2.1) - (5.2.9), et vérifiant les conditions (i) et (ii), alors l'estimateur $\Omega_N^{*(\omega)}$ de Ω_ω est asymptotiquement sans biais lorsque $N \rightarrow \infty$ et $T \rightarrow \infty$.*

Preuve. Si on remplace $\Omega_N^{*(\omega)}$ et $\hat{\sigma}_\omega^2$ dans (5.2.17), alors l'estimateur $\hat{\Delta}_\omega^*$ de Δ est obtenu de l'équation suivante

$$\Omega_N^{*(\omega)} = X(\omega) \Delta_N^{*(\omega)} X'(\omega) + \hat{\sigma}_\omega^2 I \quad (5.2.20)$$

alors :

$$\begin{aligned} \Delta_N^{*(\omega)} &= [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} X'(\omega) \Omega_N^{*(\omega)} X(\omega) [X'(\omega) X^{-1}(\omega)] - \hat{\sigma}_\omega^2 [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} \\ &= \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \hat{A}_N^{(LS)} \right] \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \hat{A}_N^{(LS)} \right]' + \alpha_\omega [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} - \hat{\sigma}_\omega^2 [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

On a :

$$\begin{aligned} & \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \hat{A}_N^{(LS)} \right] \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \hat{A}_N^{(LS)} \right]' \\ &= \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} - \left(\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right) \right] \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} - \left(\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right) \right]' \\ &= \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right] \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right]' - \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right] \left[\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right]' \\ & \quad - \left[\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right] \left[\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right]' + \left[\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right] \left[\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right]' \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

La méthode des moindres carrés appliquée à (5.2.2) donne :

$$\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) = \bar{A} + [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} X'(\omega) u(\omega)$$

Par conséquent il résulte

$$E \left\{ \hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right\} = 0 \quad (5.2.23)$$

$$E \left\{ \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right) \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right)' \right\} = \Delta + \sigma_\omega^2 (X'(\omega) X(\omega))^{-1}$$

on obtient :

$$\left(\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right) \left(\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right)' = \frac{1}{N^2} \sum_{\omega=1}^N \sum_{\omega'=1}^N \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right) \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega') - \bar{A} \right)'$$

donc :

$$E \left\{ \left(\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right) \left(\hat{A}_N^{(LS)} - \bar{A} \right)' \right\} = \frac{1}{N^2} \sum_{\omega=1}^N \sum_{\omega'=1}^N (X'(\omega) X(\omega))^{-1} X'(\omega) E \{ (u(\omega) u'(\omega')) \}$$

$$\times [X(\omega') (X'(\omega') X(\omega'))^{-1}] = \frac{1}{N^2} \sum_{\omega=1}^N [\Delta + \sigma_\omega^2 (X'(\omega) X(\omega))^{-1}] \quad (5.2.24)$$

En utilisant (5.2.4) et (5.2.5). Ainsi que

$$E \left\{ \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right) \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right)' \right\} = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N E \left\{ \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right) \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \bar{A} \right)' \right\} \quad (5.2.25)$$

$$= \frac{1}{N} [\Delta + \sigma_\omega^2 (X'(\omega) X(\omega))^{-1}]$$

D'après (5.2.22) et (5.2.25) on obtient

$$E \left\{ \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \hat{A}_N^{(LS)} \right) \left(\hat{A}_T^{(LS)}(\omega) - \hat{A}_N^{(LS)} \right)' \right\} = \Delta + \sigma_\omega^2 (X'(\omega) X(\omega))^{-1} \quad (5.2.26)$$

$$- \frac{\Delta}{N} - \frac{2\sigma_\omega^2}{NT} \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} + \frac{1}{N^2 T} \sum_{\omega=1}^N \sigma_\omega^2 \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1}$$

Swamy (1970) a montré que $E \{ \hat{\sigma}_\omega^2 \} = \sigma_\omega^2$. Alors d'après (5.2.20) et (5.2.26), on obtient

$$E \left\{ \hat{\Delta}_\omega^* \right\} = \left(1 - \frac{1}{N} \right) \Delta - \frac{2\sigma_\omega^2}{NT} \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1}$$

$$+ \frac{1}{N^2 T} \sum_{\omega=1}^N \sigma_\omega^2 \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} + \frac{\sigma_\omega^2}{T} \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1}$$

En utilisant les conditions (i) et (ii) on a : $\lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} E \left\{ \Delta_N^{*(\omega)} \right\} = \Delta$.

Par conséquent, en vertu de (5.2.20) on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} E \left\{ \Omega_N^{*(\omega)} \right\} = \Omega_\omega, \quad \omega = 1, \dots, N. \quad (5.2.27)$$

Maintenant on voudrait demontrer que $\hat{\Omega}$ est un estimateur consistant de Ω , alors on définit :

$$\gamma = \hat{u}\hat{u}' + \alpha I - \left(QDQ' + \hat{\Sigma} \right) \quad (5.2.28)$$

où $\alpha I = \text{diag} [\alpha_1 I, \dots, \alpha_N I]$. Donc d'après la proposition ci-dessus et le fait que $\hat{\Sigma}$ est un estimateur sans biais on a : $E \{ \gamma \} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$.

Sachant que la relation (5.2.28) peut s'écrire comme :

$$\left[\hat{u}\hat{u}' + \alpha I - \hat{\Sigma} \right] Q [Q'Q]^{-1} = QD + \gamma Q [Q'Q]^{-1} \quad (5.2.29)$$

Alors l'estimateur des moindres carrés de D dans la régression (5.2.29) est donné par

$$\hat{D} = [Q'Q]^{-1} Q' \left[\hat{u}\hat{u}' + \alpha I - \hat{\Sigma} \right] Q [Q'Q]^{-1} \quad (5.2.30)$$

D'après cette proposition et le fait que $\hat{\Sigma}$ est un estimateur sans biais, alors on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} E \left\{ \hat{D} \right\} = D \quad (5.2.31)$$

■

Proposition 5.2.2 Lorsque le modèle est défini par (5.2.1) - (5.2.9), et vérifiant les conditions (i) - (iii), alors

$$E \left\{ \left(\hat{D} - D \right) \left(\hat{D} - D \right)' \right\} = o(T^{-1}) \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty \text{ et } T \rightarrow \infty. \quad (5.2.32)$$

Preuve. Voir [2]. ■

Théorème 5.2.1 Lorsque le modèle est défini par (5.2.1) - (5.2.9), et vérifiant les conditions (i) - (iv), alors l'estimateur $\Omega_N^{*(\omega)}$ de Ω_ω est consistant.

Preuve. D'après les relations (5.2.31), (5.2.32) et en vertu de l'inégalité de Chebychev on a :

$$p \lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \left\{ \hat{D} - D \right\} = 0.$$

En vertu de la relation (5.2.30) et la consistance de de l'estimateur $\hat{\Sigma}$, on a

$$p \lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \left(\frac{Q'Q}{T} \right)^{-1} \frac{Q'}{T} \left[\hat{\Omega} - \Omega \right] \frac{Q}{T} \left(\frac{Q'Q}{T} \right)^{-1} = 0 \quad (5.2.33)$$

par conséquent

$$p \lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \frac{Q'}{T} \left[\hat{\Omega} - \Omega \right] \frac{Q}{T} = 0 \quad (5.2.34)$$

comme a été défini dans (5.2.20) et (5.2.34), ceci est équivalent à :

$$p \lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \left[\Delta_N^{*(\omega)} - \Delta \right] \frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} + [\hat{\sigma}_\omega^2 - \sigma_\omega^2] \frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right) = 0, \quad (5.2.35)$$

$\omega = 1, \dots, N$

En utilisant également la relation (5.2.35), la consistance de $\hat{\sigma}_\omega^2$ et le fait que $\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T}$ et $\left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1}$ sont des matrices finies, alors : $p \lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \left(\Delta_N^{*(\omega)} - \Delta \right) = 0$ par conséquent : $p \lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \left(\Omega_N^{*(\omega)} - \Omega_\omega \right) = 0$. ■

Notons que l'équivalence asymptotique de l'estimateur $\hat{A}_N^{*(EGLS)}$ et l'estimateur des moindres carrés généralisés $\hat{A}_N^{(GLS)}$, donne la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{A}_N^{*(EGLS)}$ de celui de $\hat{A}_N^{(GLS)}$.

Théorème 5.2.2 Pour le modèle défini par (5.2.1) - (5.2.9) et sous les conditions (i) - (iv) on a

$$\sqrt{N} \left(\hat{A}_N^{*(EGLS)} - \hat{A}_N^{(GLS)} \right) = o_p(1) \quad (5.2.36)$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \hat{A}_N^{*(EGLS)} - \hat{A}_N^{(GLS)} &= \left([X' \Omega_N^{*-1} X]^{-1} - [X' \Omega^{-1} X]^{-1} \right) X' \Omega^{-1} u \\ &\quad + [X' \Omega_N^{*-1} X]^{-1} X' [\Omega_N^{*-1} - \Omega^{-1}] u \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

Par définition, pour $\omega = 1, \dots, N$, $\Omega_\omega = X'(\omega) \Delta X(\omega) + \sigma_\omega^2 I$. Swamy (1971) a montré que :

$$\begin{aligned} [X'(\omega) \Delta X(\omega) + \sigma_\omega^2 I]^{-1} &= \frac{M_\omega}{\sigma_\omega^2} + X(\omega) [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} \\ &\quad \left[\Delta + \sigma_\omega^2 [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} \right]^{-1} [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} X'(\omega) \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

où $M_\omega = I - X(\omega) [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} X'(\omega)$, alors :

$$X'(\omega) \Omega_N^{*(\omega)-1} X(\omega) = \Delta^{-1} \left[I + \sigma_\omega^2 \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} \frac{\Delta^{-1}}{T} \right]^{-1} \rightarrow \Delta^{-1} \quad (5.2.39)$$

lorsque $T \rightarrow \infty$, en utilisant les conditions (ii) et (v). Par conséquent

$$\frac{X' \Omega^{-1} X}{N} = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \rightarrow \Delta^{-1} \text{ lorsque } T \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty. \quad (5.2.40)$$

On a $Var \left[\frac{X' \Omega^{-1} u}{\sqrt{N}} \right] = \frac{X' \Omega^{-1} X}{N}$, donc en utilisant l'inégalité de Chebychev et la relation (5.2.39) on obtient $\frac{X' \Omega^{-1} u}{\sqrt{N}} = o_p(1)$.

D'après les relations (5.2.39) et (5.2.40) et le fait que l'estimateur $\hat{\Omega}$ est consistant (le théorème 1) on obtient que : $\left(\frac{X' \Omega_N^{*-1} X}{N} \right)^{-1} = o_p(1)$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{N} \left[(X' \Omega_N^{*-1} X)^{-1} - (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \right] X' \Omega^{-1} u \\ &= \left[\left(\frac{X' \Omega_N^{*-1} X}{N} \right)^{-1} - \left(\frac{X' \Omega^{-1} X}{N} \right)^{-1} \right] \frac{X' \Omega^{-1} u}{\sqrt{N}} \\ &= o_p(1) \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} X' (\Omega_N^{*-1} - \Omega^{-1}) u = o_p(1). \quad (5.2.41)$$

D'après la proposition 2 on a : $\sqrt{T} (\Omega_N^{*(\omega)} - \Omega_\omega) = o_p(1)$, par conséquent on peut écrire

$$\Omega_N^{*(\omega)} = \Omega_\omega + \frac{\delta_\omega}{\sqrt{T}} \quad (5.2.42)$$

ensuite on écrit

$$\frac{\delta_\omega}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} X(\omega) \alpha_\omega X'(\omega) \quad (5.2.43)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_\omega}{\sqrt{T}} &= \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} \frac{X'(\omega) \Omega_N^{*(\omega)} X(\omega)}{T^2} \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} \\ &- \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} \frac{X'(\omega) \Omega_\omega X(\omega)}{T^2} \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} = o_p(1) \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

On définit : $B(\alpha_\omega) = X'(\omega) (\Omega_N^{*(\omega)-1} - \Omega_\omega^{-1}) = X'(\omega) \left[\Omega_\omega + \frac{\delta_\omega}{\sqrt{T}} \right]^{-1} - X'(\omega) \Omega_\omega^{-1}$.

En utilisant la relation (5.2.43) et que

$$(C + UV)^{-1} = C^{-1} - C^{-1}U(I + VC^{-1}U)^{-1}VC^{-1}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
B(\alpha_\omega) - B(\gamma_\omega) &= X'(\omega) \left[\left(\frac{1}{\sqrt{T}} X(\omega) \alpha_\omega X'(\omega) + \Omega_\omega \right)^{-1} - \left(\frac{1}{\sqrt{T}} X(\omega) \gamma_\omega X'(\omega) + \Omega_\omega \right)^{-1} \right] \\
&= X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \left[\left(I + \frac{\gamma_\omega}{\sqrt{T}} X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \right)^{-1} \frac{\gamma_\omega}{\sqrt{T}} X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \left(I + \frac{\alpha_\omega}{\sqrt{T}} X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \right)^{-1} \frac{\alpha_\omega}{\sqrt{T}} X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} \right]
\end{aligned} \tag{5.2.45}$$

En vertu de (5.2.44) et (5.2.38) on peut écrire

$$B(\alpha_\omega) - B(\gamma_\omega) = X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \frac{1}{\sqrt{T}} (\gamma_\omega - \alpha_\omega) X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} + o_p(1)$$

ceci est obtenu en développant $\left(I + \frac{\gamma_\omega}{\sqrt{T}} X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \right)^{-1}$ et $\left(I + \frac{\alpha_\omega}{\sqrt{T}} X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \right)^{-1}$ en série de Taylor respectivement par rapport à $\frac{\gamma_\omega}{\sqrt{T}}$ et $\frac{\alpha_\omega}{\sqrt{T}}$.

Faisant usage de la relation (5.2.37) on obtient

$$\begin{aligned}
B(\alpha_\omega) - B(\gamma_\omega) &= X'(\omega) \Omega_\omega^{-1} X(\omega) \frac{1}{\sqrt{T}} (\gamma_\omega - \alpha_\omega) \left(\Delta + \sigma_\omega^2 [X'(\omega) X(\omega)]^{-1} \right)^{-1} \\
&\quad \times \left(\frac{X'(\omega) X(\omega)}{T} \right)^{-1} \frac{X'(\omega)}{T} + o_p(1)
\end{aligned} \tag{5.2.46}$$

Il est clair que, pour N, T soient suffisamment grands avec $\frac{N}{T} = o(1)$, il existe une constante $c < \infty$ telle que : $\|B(\alpha_\omega) - B(\gamma_\omega)\| \leq \frac{c}{\sqrt{N}} \|\gamma_\omega - \alpha_\omega\|$, en probabilité. ■

Remarque 5.2.1 • Si on s'intéresse seulement à une seule équation (la ω^{ieme}), on peut très bien appliquer la méthode OLS sur cette équation. L'estimateur OLS obtenu est le «meilleur» de la classe des estimateurs linéaires sans-biais. Toutefois, en appliquant le GLS, on obtient un meilleur estimateur, puisqu'on élargit la classe d'estimateurs (non plus seulement un estimateur de $Y_t(\omega)$ mais de Y). L'estimateur GLS est supérieur à celui des OLS parce qu'il tient compte de la corrélation existant entre les équations. Autrement dit l'estimateur GLS prend en compte l'information sur des variables explicatives incluent dans le système, mais ne faisant pas partie de l'équation considérée.

• Si $E\{u_t(\omega) u'_t(\omega')\} \neq 0$ alors l'estimateur GLS de $(A'(1), \dots, A'(N))$ est efficace que celui des LS de $A(\omega)$ appliqué sur chaque équation individuellement, bien que si $Y_t(\omega)$, pour $\omega = 1, \dots, N$

sont identiques i.e. $Y_t(1) = \dots = Y_t(N)$ ou $E\{u_t(\omega)u'_t(\omega)\} = \sigma_\omega^2$ et $E\{u_t(\omega)u'_t(\omega')\} = 0$ pour $\omega \neq \omega'$, alors l'estimateur des GLS de $(A'(1), \dots, A'(N))$ et celui des LS de $A(\omega)$ appliqué sur chaque équation individuellement sont les mêmes.

5.3 Estimation par ML

Dans cette section on s'intéresse à trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance ou maximum likelihood (ML) d'un processus RCAR(p) strictement stationnaire satisfaisant l'équation

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (5.3.1)$$

On pose : $A_k(\omega) = A_k + \alpha_k(\omega)$, alors le modèle (5.3.1) devient

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p [A_k + \alpha_k(\omega)] Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (5.3.2)$$

On suppose que les conditions (i) – (vii) énoncés dans la section 1 sont vérifiées, en rajoutant :

(viii) $E\{\varepsilon_t^4(\omega)\} < \infty$ et $E\{\alpha_k^4(\omega)\} < \infty$ pour $\omega = 1, \dots, N$,

(ix) Si $\sigma_\omega^2 = 0$ ou Σ_ω avait une valeur propre nulle on suppose que $\sigma_\omega^2 \geq \delta_1 > 0$ pendant que la plus petite valeur propre de Σ_ω est inférieurement bornée par δ_2 où δ_1 et δ_2 peuvent être pris aussi petits.

5.3.1 Procédure de l'estimation

On se donne l'ensemble d'observations $\{Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_T(\omega)\}$ où $\omega = 1, \dots, N$ du processus, on va dériver la fonction de vraisemblance conditionnellement à $\{Y_{1-p}(\omega), \dots, Y_0(\omega)\}$. Soit $f_s(Y_t(\omega), \dots, Y_{t-s+1}(\omega) / \Lambda_{t-s}(\omega))$, désigne la densité de $Y_t(\omega), \dots, Y_{t-s+1}(\omega)$ en donnant l'événement $\Lambda_{t-s}(\omega) \in \mathcal{F}_{t-s}(\omega)$ qui est une σ -Algèbre.

D'après l'équation (5.3.2) on a

$$E\{Y_t(\omega) / \underline{Y}_{t-1}(\omega)\} = E\left\{\sum_{k=1}^p [A_k + \alpha_k(\omega)] Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) / \underline{Y}_{t-1}(\omega)\right\} \quad (5.3.3)$$

$$= A' \underline{Y}_{t-1}(\omega) \quad (5.3.4)$$

$$\text{Var}\{Y_t(\omega) / \underline{Y}_{t-1}(\omega)\} = E\left\{[A(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega)]^2 / \underline{Y}_{t-1}(\omega)\right\} \quad (5.3.5)$$

$$= \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \Sigma_\omega \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \sigma_\omega^2 = \Xi'_\omega z_t(\omega) + \sigma_\omega^2$$

où : $\Xi_\omega = \text{Vech}[\Sigma_\omega]$ et $\underline{z}_t(\omega) = K_p \{ \text{Vec} [\underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)] \}$, alors

$$\begin{aligned} f_T(Y_1(\omega), \dots, Y_T(\omega) / Y_0(\omega), \dots, Y_{1-p}(\omega)) &= \prod_{t=1}^T f_1(Y_t(\omega) / Y_{t-1}(\omega), \dots, Y_{t-p}(\omega)) \\ &= (2\pi)^{-T/2} \prod_{t=1}^T \left\{ [\sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)]^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \times \frac{[Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2}{\Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega) + \sigma_\omega^2} \right] \right\} \\ &= L_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2) \end{aligned}$$

La quelle est la fonction de quasi vraisemblance conditionnelle à $\{Y_{1-p}(\omega), \dots, Y_0(\omega)\}$.

On convient de considérer, au lieu de la maximisation de $L_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2)$, la minimisation de la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2) &= -2/T \ln \{ L_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2) \} - \ln(2\pi) \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(\Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega) + \sigma_\omega^2) + T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2}{\Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega) + \sigma_\omega^2} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

La fonction $\tilde{\ell}_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2)$ n'est pas linéaire en σ_ω^2 et Ξ_ω .

On pose : $r = \Xi_\omega / \sigma_\omega^2$ donc $\bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\omega^2) = \tilde{\ell}_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2)$ alors on a

$$\bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\omega^2) = \ln(\sigma_\omega^2) + T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r' \underline{z}_t(\omega)) + \sigma_\omega^{-2} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \quad (5.3.7)$$

par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial A} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\omega^2) = -2\sigma_\omega^{-2} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega)] \underline{Y}_{t-1}(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\omega^2} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\omega^2) = \sigma_\omega^{-2} - \sigma_\omega^{-4} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)}$$

Maintenant $\frac{\partial}{\partial A} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\omega^2) = 0$ uniquement pour

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_t(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} A$$

alors l'estimateur de A est donné par

$$A_T(r) = \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_t(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \quad (5.3.8)$$

Ainsi on a : $\frac{\partial}{\partial (A', \sigma_\omega^2)'} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\omega^2) = 0$ uniquement lorsque

$$\sigma_T^2(r) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t(\omega) - A'_T(r) \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \quad (5.3.9)$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance \hat{A}_T , $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ peuvent être obtenus en calculant \hat{r}_T où \hat{r}_T minimise la fonction

$$\ell_T^*(r) = \ln(\sigma_T^2(r)) + T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r' \underline{z}_t(\omega)) \quad (5.3.10)$$

alors les estimateurs \hat{A}_T , $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ sont donnés par : $\hat{A}_T = A_T(\hat{r}_T)$, $\hat{\sigma}_T^2 = \sigma_T^2(\hat{r}_T)$ et $\hat{\Xi}_T = \hat{\sigma}_T^2 \hat{r}_T$. Par conséquent, on doit minimiser la fonction en A et r ,

$$\begin{aligned} \ell_T(A, r) &= \inf_{\sigma_\omega^2} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\omega^2) - 1 \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r' \underline{z}_t(\omega)) + \ln \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

La dernière équation résulte directement de (5.3.7).

Alors les estimateurs du maximum de vraisemblance \hat{A}_T , $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ sont définis par

$$\hat{\ell}_T(\hat{A}_T, \hat{r}_T) = \inf_{(A', r')' \in \Theta} \ell_T(A, r), \quad (5.3.12)$$

$$\hat{\sigma}_T^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t(\omega) - \hat{A}'_T(r) \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2}{1 + \hat{r}'_T \underline{z}_t(\omega)} \quad (5.3.13)$$

$$\hat{\Xi}_T = \hat{\sigma}_T^2 \hat{r}_T \quad (5.3.14)$$

5.3.2 Comportement asymptotique

Soit Θ l'ensemble dans lequel on minimise $\ell_T(A, r)$ et δ_4 , δ_5 sont deux nombres arbitrairement petits. Θ est l'ensemble de tous les vecteurs $[A', r']'$ avec A et r ont respectivement p et $p(p+1)/2$ composantes satisfont les conditions suivantes :

- 1) Les valeurs propres de la matrice \underline{A} sont de module inférieur ou égale $(1 - \delta_3)$,
- 2) Soit R une matrice carrée symétrique dont $r = \text{Vech}[R]$, alors R a des valeurs propres strictement positives qui sont toutes supérieures ou égales à δ_4 ,

3) $(Vec[R])'W \leq \delta_5$ où W est la dernière colonne de la matrice $[I - \underline{A} \otimes \underline{A}]^{-1}$.

Maintenant, on suppose que : $\theta_0 = (A'_0, r'_0)'$ est la vraie valeur de $\theta = (A', r)'$ et que $\{Y_t(\omega)\}$ est une solution strictement stationnaire $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable de (5.3.1) stisfaisant les conditions (i) – (ix) et pour que $A = A_0$, $\Xi_\omega = \Xi_0$, $\sigma_\omega^2 = \sigma_0^2$ et $r = r_0 = \Xi_0/\sigma_0^2$.

Pour montrer la consistance forte des estimateurs du maximum de vraisemblance on exigera que Θ est compact afin que plusieurs résultats de l'analyse réelle peuvent être utilisés. En particulier on aura besoin de savoir que toute fonction continue sur Θ atteint ses bornes dans Θ et l'équicontinuité et la convergence uniforme sont équivalentes dans Θ .

Lemme 5.3.1 Θ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^{p(p+3)/2}$ pour δ_3 , δ_4 et δ_5 choisis afin que $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$.

Théorème 5.3.1 Soit $\{Y_t(\omega)\}$ un processus RCAR(p) strictement stationnaire $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable, vérifie l'équation (5.3.1) tels que $A = A_0$, $\Xi_\omega = \Xi_0$ et $\sigma_\omega^2 = \sigma_0^2$, sous les conditions (i)-(vii) , (ix) et soit $\theta_0 = [A'_0, r'_0]$ où $r_0 = \Xi_0/\sigma_0^2$. Alors $\lim_{T \rightarrow \infty} \ell_T(\theta)$ existe presque sûrement pour tout $\theta \in \Theta$ et sa limite $\ell(\theta)$ est minimisée uniquement sur Θ à $(A', r) = \theta_0$ ce qui montre que $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$.

Preuve. Sachant que $0 \leq \ln(1 + r'z_t(\omega)) \leq r'z_t(\omega)$ et $E\{z_t(\omega)\}$ existe par (vi), alors en vertu du Théorème ergodique $T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r'z_t(\omega))$ converge p.s vers $E\{\ln(1 + r'z_t(\omega))\}$. Ainsi que

$$0 < T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A'Y_{t-1}(\omega))^2}{1 + r'z_t(\omega)} \leq T^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t(\omega) - A'Y_{t-1}(\omega))^2$$

et d'après le Théorème ergodique

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t(\omega) - A'Y_{t-1}(\omega))^2 \rightarrow E\left\{(Y_t(\omega) - A'Y_{t-1}(\omega))^2\right\} p.s$$

par conséquent

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A'Y_{t-1}(\omega))^2}{1 + r'z_t(\omega)} \rightarrow E\left\{\frac{(Y_t(\omega) - A'Y_{t-1}(\omega))^2}{1 + r'z_t(\omega)}\right\} p.s$$

sachant que $E\left\{\frac{\ln(1 + r'z_t(\omega))^2}{1 + r'z_t(\omega)}\right\} > 0$, alors $Y_t(\omega) = A'Y_{t-1}(\omega)$ p.s.

D'après (V.3.6), $\ell_T(A, r)$ converge p.s vers

$$\ell(A, r) = E\{\ln(1 + r'z_t(\omega))\} + \ln\left[E\left\{\frac{(Y_t(\omega) - A'Y_{t-1}(\omega))^2}{1 + r'z_t(\omega)}\right\}\right]$$

On a

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \\
&= E \left\{ \frac{(Y_t(\omega) - A'_0 \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2 + 2(Y_t(\omega) - A'_0 \underline{Y}_{t-1}(\omega))(A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1}(\omega) + ((A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \\
&= E \left\{ \frac{(\alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega))^2 + ((A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \\
&= E \left\{ \frac{E \left\{ (\alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega))^2 / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\}}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} + E \left\{ \frac{((A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \\
&\geq E \left\{ \frac{\sigma_0^2 + \Xi'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} + \sigma_0^2 E \left\{ \frac{1 + r'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\}
\end{aligned}$$

sachant que

$$E \left\{ (Y_t(\omega) - A'_0 \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2 / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\} = 0$$

$$E \left\{ \alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \right\} / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) = \sigma_0^2 + \Xi'_0 \underline{z}_t(\omega)$$

et $\Xi_0 = \sigma_0^2 r_0$. De plus on aura l'égalité si $(A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1}(\omega) = 0$ p.s lorsque $A = A_0$, par conséquent

$$\inf_A \ell(A, r) = \ell(A_0, r) = \ln(\sigma_0^2) + \ln \left(E \left\{ \frac{1 + r'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \right) + E \{1 + r' \underline{z}_t(\omega)\}$$

et $\ell(A, r) = \inf_A \ell(A, r)$ seulement si $A = A_0$.

D'après l'égalité de Jensen, si X est un tel vecteur aléatoire positif d'espérance 1, alors

$$E \{ \ln(X) \} \leq \ln(E \{ X \}) = 0 \tag{5.3.15}$$

et il y a une égalité si $X = 1$ p.s. Soit X tel que

$$X = \left(E \left\{ \frac{1 + r'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \right)^{-1} \frac{1 + r'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} = C^{-1} \frac{1 + r'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)}$$

en appliquant (5.3.15) on obtient

$$E \left\{ \ln \left(\frac{1 + r'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right) \right\} \geq - \ln \left(E \left\{ \frac{1 + r'_0 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\} \right)$$

et on a une égalité seulement si $1 + r'_0 z_t(\omega) = C(1 + r'_t z_t(\omega))$ *p.s* par conséquent $(r_0 - Cr)' z_t(\omega) = (C - 1)$ *p.s* et ceci est vrai uniquement pour $r_0 = Cr$, $C = 1$ et lorsque $r = r_0$.

Par conséquent $\ell(A, r)$ est uniquement minimisée pour $A = A_0$ et $r = r_0$. ■

Corollaire 5.3.1 $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2)$ existe *p.s* et minimisée uniquement à $A = A_0$, $\Xi_\omega = \Xi_0$ et $\sigma_\omega^2 = \sigma_0^2$.

Preuve. D'après le Théorème 5.3.1 et la définition de $\ell_T(A, r)$, on a vu que $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2)$ existe presque partout et uniquement minimisé à $A = A_0$ et

$$\sigma_\omega^2 = \sigma_0^{2*} = E \left\{ \frac{(Y_t(\omega) - A'_0 Y_{t-1}(\omega))^2}{1 + r'_0 z_t(\omega)} \right\} \quad \text{et} \quad \Xi = r_0 \sigma_0^{2*}$$

mais

$$\begin{aligned} \sigma_0^{2*} &= E \left\{ \frac{E \left\{ (Y_t(\omega) - A'_0 Y_{t-1}(\omega))^2 / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\}}{1 + r'_0 z_t(\omega)} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{\sigma_0^2 + \Xi'_0 z_t(\omega)}{1 + r'_0 z_t(\omega)} \right\} = \sigma_0^2 \end{aligned}$$

et donc $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(A, \Xi_\omega, \sigma_\omega^2)$ est uniquement minimisée à $A = A_0$, $\sigma_\omega^2 = \sigma_0^2$ et $\Xi = \Xi_0$. ■

Théorème 5.3.2 Soit $\ell_T(A, r)$ minimisée sur Θ à $A = \hat{A}_T$, $r = \hat{r}_T$ et soit $\hat{\theta}_T = (\hat{A}'_T, \hat{r}'_T)$. Alors $\hat{\theta}_T$ converge presque sûrement vers θ_0 ce qui montre que $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$.

Preuve. D'abord on va montrer que $\{\ell_T(A, r)\}$ converge uniformément *p.s* vers $\ell(A, r)$ dans Θ . Sachant que Θ est compact, on a besoin seulement de démontrer que $\{\ell_T(A, r)\}$ est *p.s* équicontinue. Soit $\theta = (A', r')$ pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\delta \geq 0$ qui dépendent de ε telle que

$$|\ell_T(\theta_1) - \ell_T(\theta_2)| < \varepsilon \quad \text{p.s} \quad \text{pour } N > N^* \text{ lorsque } \|\theta_1 - \theta_2\| < \delta.$$

Sachant que $\ell_T(\theta)$ est différentiable sur Θ et d'après le Théorème de la valeur moyenne on a pour tout θ_1 et $\theta_2 \in \Theta$,

$$\ell_T(\theta_1) - \ell_T(\theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)' \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta_{12}^*)$$

où $\theta_{12}^* = \lambda \theta_1 + (1 - \lambda) \theta_2$ pour $\lambda \in]0, 1[$.

Soit $\Theta^* = f(\Theta, \Theta, [0, 1])$ où $f : \mathbb{R}^{p(p+3)/2} \times \mathbb{R}^{p(p+3)/2} \rightarrow \mathbb{R}^{p(p+3)/2}$, cette fonction est continue et

définie par $f(\theta_1, \theta_2, \lambda) = \lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2$.

Alors Θ^* est compact car $\Theta \times \Theta \times [0, 1]$ l'est aussi, et comme

$$\left| (\theta_1 - \theta_2)' \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta_{12}^*) \right|^2 \leq \|\theta_1 - \theta_2\|^2 \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta_{12}^*) \right\|^2$$

il résulte que $\{\ell_T(A, r)\}$ est equicontinue si $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta^*} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta) \right\|^2 < \infty$ p.s.

Le vecteur $\frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta)$ est obtenu de

$$\frac{\partial}{\partial A} \ell_T(\theta) = -2 (\sigma_T^2(\theta))^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega)) \underline{Y}_{t-1}(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \quad (5.3.16)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r} \ell_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} - (\sigma_T^2(\theta))^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2 \underline{z}_t(\omega)}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \quad (5.3.17)$$

où

$$\sigma_T^2(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \quad (5.3.18)$$

Maintenant si $(A', r') \in \Theta^*$, soit R une matrice symétrique d'ordre $n \times n$ tel que $r = \text{Vech}[R]$, alors

$$R = \lambda \Omega_1 + (1 - \lambda) \Omega_2, \quad \lambda \in]0, 1[$$

où les valeurs propre de Ω_1 et Ω_2 sont inférieurement bornées par $\delta_5 > 0$. Alors le plus petites valeur propre de R est inférieurement bornée par δ_5 . Sachant que pour tout p -vecteur z on a

$$\frac{z' R z}{z' z} = \lambda \frac{z' \Omega_1 z}{z' z} + (1 - \lambda) \frac{z' \Omega_2 z}{z' z} \geq [\lambda + (1 - \lambda)] \delta_5 = \delta_5$$

Alors $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta^*} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta) \right\|^2 < \infty$ p.s. Par exemple,

$$\inf_{\theta \in \Theta^*} \sigma_T^2(\theta) \geq \inf_{\theta \in \Theta^*} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + k [\underline{z}'_t(\omega) \underline{z}_t(\omega)]^{1/2}}$$

où $K = \sup_{\theta \in \Theta^*} (r' r)^{1/2}$, laquelle existe car Θ^* est borné. Par conséquent

$$\inf_{\theta \in \Theta^*} \sigma_T^2(\theta) \geq T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + k [\underline{z}'_t(\omega) \underline{z}_t(\omega)]^{1/2}}$$

où

$$A_T^* = \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1}(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega)}{1 + k [\underline{z}'_t(\omega) \underline{z}_t(\omega)]^{1/2}} \right)^{-1} \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1}(\omega) Y_t(\omega)}{1 + k [\underline{z}'_t(\omega) \underline{z}_t(\omega)]^{1/2}} \right)$$

D'après le Théorème ergodique A_T^* converge *p.s* vers A_0 et on a

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A_T^* \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + k [\underline{z}'_t(\omega) \underline{z}_t(\omega)]^{1/2}} \rightarrow E \left\{ \frac{(Y_t(\omega) - A_0^* \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + k [\underline{z}'_t(\omega) \underline{z}_t(\omega)]^{1/2}} \right\} \quad p.s.$$

laquelle est strictement positive car $Y_t(\omega) - A_0^* \underline{Y}_{t-1}(\omega) \neq 0$ *p.s*, par conséquent $\liminf_{T \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta^*} \sigma_T^2(\theta) > 0$.

De même manière on peut démontrer que (5.3.16) et (5.3.17) sont bornés.

Soit $\hat{\theta}_T \rightarrow \theta_0$ *p.s*, sachant que $\{\ell_T(\theta)\}$ converge uniformément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N^* dépendant de ε telle que

$$|\ell_T(\hat{\theta}_T) - \ell(\hat{\theta}_T)| < \varepsilon/2$$

$$|\ell_T(\theta_0) - \ell(\theta_0)| < \varepsilon/2$$

p.s lorsque $N > N^*$, et comme $\ell_T(\hat{\theta}_T) \leq \ell_T(\theta_0)$ et $\ell(\hat{\theta}_T) \geq \ell(\theta_0)$, il résulte que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ell_T(\hat{\theta}_T) - \ell(\theta_0) = [\ell(\hat{\theta}_T) - \ell_T(\hat{\theta}_T)] + [\ell_T(\hat{\theta}_T) - \ell_T(\theta_0)] + [\ell_T(\theta_0) - \ell(\theta_0)] \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad p.s \text{ pour } N < N^* \end{aligned}$$

Par conséquent $\{\ell_T(\hat{\theta}_T)\}$ converge *p.s* vers $\ell(\theta_0)$ ■

Corollaire 5.3.2 $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ convergent presque sûrement vers Ξ_0 et σ_0^2 , respectivement.

Preuve. D'après le Théorème 5.3.2, \hat{A}_T et \hat{r}_T convergent *p.s* respectivement vers A_0 et r_0 .

D'autre part on a

$$\hat{\sigma}_T^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - \hat{A}'_T \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + \hat{r}'_T \underline{z}_t(\omega)}$$

on a vu dans la démonstration du Théorème 5.3.2 que la suite $\{\sigma_T^2(\theta)\}$ telle que

$$\sigma_T^2(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)}$$

converge *p.s* dans Θ vers

$$\sigma^2(\theta) = E \left\{ \frac{(Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega))^2}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \right\}$$

en utilisant la même procédure que la démonstration du théorème précédent on trouve que $\hat{\sigma}_T^2$ converge *p.s* vers $\sigma^2(\theta_0) = \sigma_0^2$.

Sachant que $\hat{\Xi}_T = \hat{r}_T \hat{\sigma}_T^2$ il résulte que $\hat{\Xi}_T$ converge *p.s* vers $r_0 \sigma_0^2 = \Xi_0$. ■

Lemme 5.3.2 La suite $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge uniformément presque sûrement sur un voisinage compact de θ_0 vers $\frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}$.

Preuve. Les dérivées du second ordre de la fonction $\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)$ sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial A \partial A'} &= 2T^{-1} \sum_{t=1}^T \lambda_\omega^{-1} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial A \partial \Xi'_\omega} &= 2T^{-1} \sum_{t=1}^T \lambda_\omega^{-2} u_t(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial A \partial \sigma_\omega^2} &= 2T^{-1} \sum_{t=1}^T \lambda_\omega^{-2} u_t(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \Xi_\omega \partial \Xi'_\omega} &= T^{-1} \sum_{t=1}^T 2\lambda_\omega^{-3} u_t^2(\omega) \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) - T^{-1} \sum_{t=1}^T \lambda_\omega^{-2} \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \Xi_\omega \partial \sigma_\omega^2} &= T^{-1} \sum_{t=1}^T 2\lambda_\omega^{-3} u_t^2(\omega) \underline{z}_t(\omega) - T^{-1} \sum_{t=1}^T \lambda_\omega^{-2} \underline{z}_t(\omega) \\
\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{(\partial \sigma_\omega^2)^2} &= T^{-1} \sum_{t=1}^T 2\lambda_\omega^{-3} u_t^2(\omega) - T^{-1} \sum_{t=1}^T \lambda_\omega^{-2}
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

où $\lambda_\omega = \sigma_\omega^2 + \Xi'_\omega \underline{z}_t(\omega)$, on note que

$$E \{u_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = E \{Y_t(\omega) - A' \underline{Y}_{t-1}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = (A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1}(\omega)$$

$$E \{u_t^2(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = \sigma_0^2 + \Xi'_0 \underline{z}_t(\omega) + [(A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2$$

Sachant que $E \{u_{0t}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega)\} = 0$, alors $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge *p.s* vers $\frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} = I$ tels que

$$\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial A \partial A'} = 2E \{ \lambda_\omega^{-1} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial A \partial \Xi'_\omega} = 2E \{ \lambda_\omega^{-2} u_t(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial A \partial \sigma_\omega^2} = 2E \{ \lambda_\omega^{-2} u_t(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) \}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \Xi_\omega \partial \Xi'_\omega} = 2E \{ \lambda_\omega^{-3} u_t^2(\omega) \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \} - E \{ \lambda_\omega^{-2} \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \Xi_\omega \partial \sigma_\omega^2} = 2E \{ \lambda_\omega^{-3} u_t^2(\omega) \underline{z}_t(\omega) \} - E \{ \lambda_\omega^{-2} \underline{z}_t(\omega) \}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{(\partial \sigma_\omega^2)^2} = 2E \{ \lambda_\omega^{-3} u_t^2(\omega) \} - E \{ \lambda_\omega^{-2} \}$$

De plus $\frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}$ est continue sur un voisinage compact $V(\theta_0)$ de θ_0 et uniformément bornée sur $V(\theta_0)$, alors $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge uniformément sur $V(\theta_0)$, et comme $\hat{\theta}_T$ converge *p.s* vers θ_0 ,

alors $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge *p.s* vers la matrice $\frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} = I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I'_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I'_{13} & I'_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$ telles que

$$I_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial A \partial A'} = 2E \{ \lambda_{0\omega}^{-1} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \}$$

$$I_{12} = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial A \partial \Xi'_\omega} = 2E \{ E \{ u_{0t}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \} = 0$$

$$I_{13} = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial A \partial \sigma_\omega^2} = 2E \{ E \{ u_{0t}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} \lambda_{0\omega}^{-2} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \} = 0$$

$$I_{22} = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \Xi_\omega \partial \Xi'_\omega} = E \{ \lambda_{0\omega}^{-2} \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \}$$

$$I_{23} = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \Xi_\omega \partial \sigma_\omega^2} = E \{ \lambda_{0\omega}^{-2} \underline{z}_t(\omega) \},$$

$$I_{33} = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{(\partial \sigma_\omega^2)^2} = E \{ \lambda_{0\omega}^{-2} \}$$

Où $E \{ u_{0t}^2(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = \lambda_{0\omega}$.

Soit J une matrice symétrique telle que

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J'_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J'_{13} & J'_{23} & J_{33} \end{bmatrix}$$

où J_{ij} est la matrice de dimension $p(i) \times p(j)$ et $p(1) = p$, $p(2) = p(p+1)/2$ et $p(3) = 1$, donc les J_{ij} sont donnés par

$$\begin{aligned} J_{11} &= 4E \left\{ E \left\{ u_{0t}^2(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\} \lambda_{0\omega}^{-2} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\} = 4E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \lambda_{0\omega}^{-1} \right\} \\ J_{12} &= 2E \left\{ E \left\{ u_{0t}(\omega) \eta_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\} \lambda_{0\omega}^{-3} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \right\} = 2E \left\{ u_{0t}^3(\omega) \lambda_{0\omega}^{-3} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \right\} \\ J_{13} &= 2E \left\{ E \left\{ u_{0t}(\omega) \eta_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\} \lambda_{0\omega}^{-3} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} = 2E \left\{ u_{0t}^3(\omega) \lambda_{0\omega}^{-3} \underline{Y}_{t-1}(\omega) \right\} \\ J_{22} &= E \left\{ \eta_t^2(\omega) \lambda_{0\omega}^{-4} \underline{z}_t(\omega) \underline{z}'_t(\omega) \right\} \\ J_{23} &= E \left\{ \eta_t^2(\omega) \lambda_{0\omega}^{-4} \underline{z}_t(\omega) \right\} \\ J_{33} &= E \left\{ \eta_t^2(\omega) \lambda_{0\omega}^{-2} \right\} \end{aligned}$$

où $\eta_t(\omega) = u_{0t}^2(\omega) - \lambda_{0\omega}$.

Pour l'existence du théorème central limite des estimateurs du maximum de vraisemblance on rajoute aux suppositions au-dessus que $\sigma_\omega^2 \neq 0$ et la matrice Σ_ω n'a pas des valeurs propres nulles, en posant $\hat{\theta}_T = (\hat{A}'_T, \hat{\Xi}'_T, \hat{\sigma}_T^2)$ et $\theta_0 = (A'_0, \Xi'_0, \sigma_0^2)$ par conséquent on a le théorème suivant ■

Théorème 5.3.3 *Soit $\{Y_t(\omega)\}$ un processus RCAR(p) strictement stationnaire $\mathcal{F}_t(\omega)$ -mesurable, alors sous les suppositions au-dessus, $T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ admet une distribution qui converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance $I^{-1}JI^{-1}$.*

Si $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ et $\{A(\omega)\}$ sont conjointement normales alors la matrice de covariance réduit à $2I^{-1}$.

Preuve. D'après le lemme au-dessus La suite $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge presque sûrement vers la ma-

trice $\frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}$ où $\tilde{\ell}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(\theta)$ et que cette matrice est bornée. On a vu aussi que $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge uniformément sur un voisinage compact de θ_0 .

Maintenant : $\frac{\partial \tilde{\ell}(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \tilde{\ell}_T(\theta_0)}{\partial \theta_i} + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\tilde{\theta}_{T,i})}{\partial \theta_i \partial \theta'} \right] (\hat{\theta}_T - \theta_0)$ où θ_i est la i -ème composante de θ et

$\tilde{\theta}_{T,i}$ est sur le segment entre θ_0 et $\hat{\theta}_T$. Sachant que $\hat{\theta}_T$ converge presque sûrement vers θ_0 , alors $\tilde{\theta}_{T,i}$ l'est aussi pour tout i et comme $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge uniformément, $\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\tilde{\theta}_{T,i})}{\partial \theta \partial \theta'}$ converge presque

sûrement vers une matrice définie positive I où $I = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'}$.

Il est évident que $\frac{\partial \tilde{\ell}_T(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta_i} = 0, i = 1, \dots, p(p+3)/2$, et comme $\hat{\theta}_T$ converge presque sûrement vers θ_0 dont il minimise la fonction $\tilde{\ell}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(\theta)$, qui est bornée continûment différentiable sur Θ .

Par conséquent $T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ aura la même distribution asymptotique que $-IT^{1/2} \frac{\partial \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \theta}$ alors $T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ a une limite de distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance $I^{-1}JI^{-1}$.

Soit : $\eta_t(\omega) = u_{0t}^2(\omega) - \lambda_{0\omega}$ et $\xi_t(a) = \lambda_{0\omega}^{-2} \{ 2u_{0t}(\omega) \lambda_{0\omega} a'_1 \underline{Y}_{t-1}(\omega) + [a_3 + a'_2 z_t(\omega)] \eta_t(\omega) \}$
où $a = [a'_1, a'_2, a_3]'$, a_1 et a_2 sont de dimension respectivement p et $p(p+1)/2$ et a_3 est un scalaire,
alors $T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_t(a) = -a' \frac{\partial \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \theta}$.

Maintenant : $E \{ u_{0t}(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = 0$, ainsi

$$E \{ \eta_t(\omega) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = E \left\{ [\varepsilon_t(\omega) + \alpha(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2 - [\sigma_0^2 + \Xi'_0 z_t(\omega)] / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \right\} = 0$$

donc $E \{ \xi_t(a) / \mathcal{F}_{t-1}(\omega) \} = 0$, mais $\xi_t(a)$ est ergodique et strictement stationnaire et comme $E \{ \xi_t^2(a) \} < \infty$ pour tout a , telle que :

$$\xi_t^2(a) = 4u_{0t}^2(\omega) \lambda_{0\omega}^{-2} [a'_1 \underline{Y}_{t-1}(\omega)]^2 + \lambda_{0\omega}^{-4} [a_3 + a'_2 z_t(\omega)]^2 \eta_t^2(\omega)$$

$$+ 4\lambda_{0\omega}^{-3} u_{0t}(\omega) a'_1 \underline{Y}_{t-1}(\omega) [a_3 + a'_2 z_t(\omega)] \eta_t(\omega)$$

Alors d'après le théorème de Billingsley, $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T \xi_t(a)$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de variance $E \{ \xi_t^2(a) \}$ et qui est exprimé dans la forme $a'Ja$ où J est symétrique et définie positive indépendamment de a .

Par conséquent $T^{1/2} \frac{\partial \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \theta}$ admet une distribution asymptotique normale de moyenne nulle et de matrice de covariance J . ■

5.3.3 Généralisation.

Le log du maximum de vraisemblance défini du modèle (5.3.1) sous les suppositions suivantes

$$\varepsilon_t(\omega) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\omega^2) \quad \text{et} \quad A(\omega) \sim \mathcal{N}(A, \Sigma) \quad (5.3.20)$$

peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A(\omega), \sigma_\omega^2, A, \Sigma) &= K - \frac{T}{2} \sum_{\omega=1}^N \ln(\sigma_\omega^2) - \frac{1}{2} \sum_{\omega=1}^N \frac{1}{\sigma_\omega^2} [\underline{Y}(\omega) - \underline{X}(\omega) A(\omega)]' \\ &\times [\underline{Y}(\omega) - \underline{X}(\omega) A(\omega)] - \frac{N}{2} \ln(|\Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{\omega=1}^N [A(\omega) - A] \Sigma^{-1} [A(\omega) - A] \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

où K est une constante. En pratique cette fonction sera difficile à maximiser directement

$$\tilde{A}(\omega) = \left(\frac{1}{\sigma_\omega^2} \underline{X}'(\omega) \underline{X}(\omega) \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_\omega^2} \underline{X}'(\omega) \underline{X}(\omega) A_{LS} + \Sigma^{-1} \tilde{A} \right) \quad (5.3.22)$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N \tilde{A}(\omega) \quad (5.3.23)$$

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{T + v(\omega) + 2} v(\omega) \lambda(\omega) + [\underline{Y}(\omega) - \underline{X}(\omega) A(\omega)]' [\underline{Y}(\omega) - \underline{X}(\omega) A(\omega)] \quad (5.3.24)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N - p - 2 + \delta} R + \sum_{\omega=1}^N [A(\omega) - A] \Sigma^{-1} [A(\omega) - A] \quad (5.3.25)$$

où p est le nombre de régresseurs et R , $v(\omega)$ et $\lambda(\omega)$ sont des paramètres qui correspondent à une distribution a priori.

5.3.4 Conclusion

Cas simple : $\Omega = \sigma_\omega^2 I_{NT}$

Dans ce cas, on peut faire les LS individuels équation par équation.

Cas général (1) : $\Omega \neq \sigma_\omega^2 I_{NT}$ connu

Dans ce cas, on applique les GLS purs.

Conséquences de l'application des LS dans le cas général :

- Estimateur centré
- Estimateur non efficient

Cas d'égalité entre LS et GLS :

- Covariances contemporaines nulles
- Variables explicatives identiques dans chaque équation
- Les régresseurs dans un bloc d'équations sont un sous-ensemble de ceux d'un autre bloc d'équation.

Cas général (2) : Ω inconnu

Dans ce cas, on peut estimer le modèle par la méthode de ML .

Cas d'égalité entre GLS et ML :

Si les termes d'erreurs suivent une distribution multivariée normale alors l'estimateur des GLS correspond à un estimateur de ML .

5.4 Estimation par GMM

On s'intéresse ici à appliquer la méthode des moments généralisés ou *generalized method of moments* (*GMM*), cette méthode a été présentée par **Hansen** (1982) comme une généralisation des techniques énoncées antérieurement dans lesquelles les estimateurs sont obtenus à partir de conditions d'orthogonalité provenant de la théorie économique. Auparavant, ce type de modèle était estimé à l'aide de la méthode des variables instrumentales, mais ce type d'estimateur ne peut être mis en place que sous l'hypothèse que les instruments sont orthogonaux à des termes des résidus non autocorrélés et homoscédastiques. La GMM telle que présentée par **Hansen** (1982) impose un minimum de conditions. L'estimateur est défini comme étant une séquence de vecteurs aléatoires qui est telle que la fonction de moments représentant les conditions d'orthogonalité est la plus proche possible de zéro.

Un des nombreux avantages des *GMM* est que c'est une méthode englobante permettant de trouver comme cas particuliers un grand nombre d'estimateurs usuels parmi lesquels :

- La méthode des moments classique.
- Les Moindres Carrés Ordinaires.
- Le Maximum de Vraisemblance.
- Les variables Instrumentales.

Soit donc le modèle *RCAR*(p)

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (5.4.1)$$

Dans cette section on retient les mêmes suppositions citées dans le paragraphe (5.1), alors le modèle devient

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k Y_{t-k}(\omega) + \sum_{k=1}^p \alpha_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega) \quad (5.4.2)$$

ou encore

$$Y_t(\omega) = A' \underline{Y}_{t-1}(\omega) + u_t(\omega) \quad (5.4.3)$$

Pour $m \geq 0$, soit $W_t(\omega) = (Y_t(\omega), \dots, Y_{t-m}(\omega))'$ un vecteur de dimension $(m+1) \times 1$ de variables observées à la date t et soit A un vecteur de dimension $p \times 1$ de paramètres et $h(W_t(\omega), A)$ est une fonction à valeur de $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^r , et A_0 soit la vraie valeur du vecteur A .

Définition 5.4.1 On appelle conditions d'orthogonalité les r conditions définies par le système

$$E[h(W_t(\omega), A_0)] = 0_{r \times 1} \quad (5.4.4)$$

Soit $Y_T = (W_1'(\omega), \dots, W_T'(\omega))$ un vecteur de dimension $T(m+1) \times 1$ contenant toutes les observations des $(m+1)$ variables du système et soit

$$g(Y_T, A) = \frac{1}{T} \sum_{t=m+1}^T h(W_t(\omega), A) \quad (5.4.5)$$

où $g(Y_T, A)$ est un vecteur de dimension $r \times 1$ des moments empiriques correspondants.

Remarque 5.4.1 *L'idée de base des GMM consiste à déterminer une valeur de A telle que les r moments empiriques $g(Y_T, A)$ soient aussi proches que possible de zéro i.e. $g(Y_T, A) \simeq 0$ pour $A = \hat{A}_T$.*

Définition 5.4.2 *L'estimateur GMM, \hat{A}_T du vecteur A minimise une fonction critère*

$$\hat{A}_T = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} Q(Y_T, A) \quad (5.4.6)$$

telle que : $Q(Y_T, A) = g'(Y_T, A) \Omega_T g(Y_T, A)$

où $\{\Omega_T\}_{T=1}^{\infty}$ désigne une suite de matrices de poids symétriques définies positives.

De façon générale on distingue deux cas suivant la valeur de p et r :

Définition 5.4.3 *Lorsqu'il existe autant de conditions d'orthogonalité que de paramètres ($p = r$) on dit que le système est juste identifié et l'estimateur GMM se ramène au vecteur \hat{A}_T de dimension $p \times 1$ qui permet de résoudre le système à p équations*

$$g(Y_T, \hat{A}_T) = 0 \quad (5.4.7)$$

Remarque 5.4.2 *Dans ce cas, il s'agit de résoudre un système éventuellement non linéaire à p équations et p inconnues. Le choix de la matrice de poids Ω_T est totalement neutre, ce qui explique qu'elle ne soit pas spécifiée.*

Définition 5.4.4 *Lorsqu'il existe plus conditions d'orthogonalité que de paramètres ($r > p$) alors le système est dit sur-identifié, l'estimateur GMM dépend du choix de la matrice de poids Ω_T .*

5.4.1 Cas particulier (LS)

Considérons le modèle

$$Y_t(\omega) = \underline{Y}'_{t-1}(\omega) A + u_t(\omega)$$

où $\underline{Y}_{t-1}(\omega)$ est un vecteur de dimension $p \times 1$ de variables explicatives.

L'hypothèse centrale qui justifie l'emploi des *LS* est la propriété d'orthogonalité des résidus théoriques par rapport aux variables explicatives :

$$E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega) \} = 0_{p \times 1}$$

Pour la vraie valeur A_0 du vecteur A on a

$$E \{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) [Y_t(\omega) - \underline{Y}'_{t-1}(\omega) A_0] \} = 0$$

ce qui représente un système de p conditions d'orthogonalité.

Posons dans nos notations $W_t(\omega) = (Y_t(\omega), \underline{Y}'_{t-1}(\omega))'$ alors on a

$$\begin{cases} h(W_t(\omega), A) = \underline{Y}_{t-1}(\omega) [Y_t(\omega) - \underline{Y}'_{t-1}(\omega) A] \\ \text{et} \\ E \{ h(W_t(\omega), A_0) \} = 0 \end{cases}$$

Le système est donc juste identifié i.e. $r = p$, alors l'estimateur *GMM* se ramène à déterminer \hat{A}_T tel que : $g(Y_T, \hat{A}_T) = 0$, où $g(Y_T, A)$ désigne le vecteur des moments empiriques correspondant aux p conditions d'orthogonalité

$$g(Y_T, A) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), A) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) [Y_t(\omega) - \underline{Y}'_{t-1}(\omega) A]$$

Alors on résout le système suivant

$$g(Y_T, \hat{A}_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) [Y_t(\omega) - \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \hat{A}_T] = 0$$

Par conséquent on obtient

$$\hat{A}_T = \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) Y_t(\omega) \right] = \hat{A}_T^{(LS)}$$

On retrouve ainsi l'estimateur des moindres carrés ordinaires $\hat{A}_T^{(LS)}$.

5.4.2 Matrice de poids optimale

Dans ce paragraphe on essaye de trouver une matrice de poids Ω_T afin d'obtenir un estimateur convergent et efficace du vecteur A .

On suppose que le processus $\{h(W_t(\omega), A_0)\}_{t=1}^{\infty}$ est stationnaire dont la matrice d'autocovariance d'ordre v est définie par

$$\Gamma_{\omega}(v) = E \{h(W_t(\omega), A_0) h'(W_{t-v}(\omega), A_0)\} \quad (5.4.8)$$

Définition 5.4.5 La matrice de variance covariance de long terme du processus $\{h(W_t(\omega), A_0)\}_{t=1}^{\infty}$ est définie par :

$$S_{r \times r} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \Gamma_{\omega}(v) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} E \{h(W_t(\omega), A_0) h'(W_{t-v}(\omega), A_0)\} \quad (5.4.9)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme plus générale

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{v=-\infty}^{\infty} h(W_t(\omega), A_0) h'(W_{t-v}(\omega), A_0) \quad (5.4.10)$$

Naturellement si le processus $h(W_t(\omega), A_0)$ est non autocorrélé dans le temps, cette matrice se ramène à la matrice de variance covariance . En effet, si $h(W_t(\omega), A_0)$ et $h(W_s(\omega), A_0)$ sont indépendants dès lors que $s \neq t$, alors $S = \Gamma_{\omega}(0)$. Cette matrice désigne en outre la matrice covariance asymptotique de la moyenne empirique des $h(W_t(\omega), A_0)$:

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} TE \{g(Y_T, A) g'(Y_T, A)\} \quad (5.4.11)$$

Définition 5.4.6 La valeur optimale de la matrice de poids Ω_T dans la fonction critère $Q(Y_T, A)$ est donnée par l'inverse de la matrice de variance covariance asymptotique S^{-1} , par conséquent $\Omega_T^* = S^{-1}$.

La plus petite variance asymptotique pour l'estimateur GMM \hat{A}_T est obtenue lorsque \hat{A}_T est définie par la résolution du programme :

$$\hat{A}_T = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} g'(Y_T, A) S^{-1} g(Y_T, A) \quad (5.4.12)$$

Lorsque les éléments du vecteur $h(W_t(\omega), A_0)$ sont non corrélés et non autocorrélés, alors

$$S = \Gamma_{\omega}(0) = E \{h(W_t(\omega), A_0) h'(W_t(\omega), A_0)\} \quad (5.4.13)$$

dans ce cas la matrice S peut être estimée par

$$S_T^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), A_0) h'(W_t(\omega), A_0) \quad (5.4.14)$$

Mais puisque le calcul de cette quantité requiert la connaissance de A_0 , on construit l'estimateur \hat{S}_T défini de la façon suivante.

Définition 5.4.7 *En l'absence de dépendances temporelles des vecteurs $\{h(W_t(\omega), A_0)\}_{t=1}^\infty$, la matrice de variance covariance asymptotique S peut être estimée par la quantité \hat{S}_T :*

$$\hat{S}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}_T) h'(W_t(\omega), \hat{A}_T) \quad (5.4.15)$$

où \hat{A}_T désigne l'estimateur GMM du vecteur A et $\hat{S}_T \xrightarrow{P} S$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

On aboutit dès lors à une procédure itérative, puisque pour déterminer \hat{A}_T , il faut connaître $\hat{\Omega}_T = \hat{S}_T^{-1}$ et que pour déterminer \hat{S}_T il faut connaître \hat{A}_T . C'est pourquoi on distingue trois types de méthodes GMM :

Méthode de GMM en deux étapes

C'est la méthode proposée initialement par **Hansen** (1982). Dans ce cas, on commence par construire un estimateur convergent mais non efficace du vecteur de paramètres A . Différentes options peuvent être choisies ici. La plus simple consiste à accorder le même poids aux différentes conditions d'orthogonalité, c'est à dire à considérer une matrice de poids identité i.e. $\Omega_T = I_T$.

On construit alors un premier estimateur convergent non efficace, noté $\hat{A}_{(1)}$:

$$\hat{A}_{(1)} = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} g'(Y_T, A) g(Y_T, A) \quad (5.4.16)$$

Ensuite à partir de cet estimateur de A , on construit un estimateur $\hat{\Omega}_1$ de la matrice de poids optimale $\hat{\Omega}_T^* = S^{-1}$, avec :

$$\hat{\Omega}_1 = S_1^{-1} = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}_{(1)}) h'(W_t(\omega), \hat{A}_{(1)}) \right]^{-1} \quad (5.4.17)$$

La deuxième étape consiste à utiliser cet estimateur de la matrice de poids optimale pour dériver un estimateur \hat{A} convergent et efficace des paramètres A :

$$\hat{A} = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} g'(Y_T, A) S_1^{-1} g(Y_T, A) \quad (5.4.18)$$

\hat{A} est alors appelé, estimateur GMM en deux étapes.

Méthode de GMM itératif

Cette méthode est proposée par **Ferson** et **Foerster** (1994) et repose sur l'algorithme suivant : de la même façon que précédemment, on construit dans une première étape un premier estimateur $\hat{A}_{(1)}$ à partir d'une valeur d'amorce de la matrice de poids. Par exemple, on peut partir d'une matrice identité $\Omega_0 = I_r$, attribuant ainsi le même poids à toutes les conditions d'orthogonalité. On construit alors un premier estimateur *GMM* tel que :

$$\hat{A}_{(1)} = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}g'}(Y_T, A) \Omega_0 g(Y_T, A) \quad (5.4.19)$$

A partir de cet estimateur, on déduit une estimation de la matrice de covariance asymptotique

$$\hat{\Omega}_1 = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}_{(1)}) h'(W_t(\omega), \hat{A}_{(1)}) \right]^{-1} \quad (5.4.20)$$

En réintroduisant cette estimation de la matrice de poids optimale dans la fonction critère *GMM*, on construit un nouvel estimateur, noté $\hat{A}_{(2)}$ tel que :

$$\hat{A}_{(2)} = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}g'}(Y_T, A) \hat{\Omega}_1 g(Y_T, A) \quad (5.4.21)$$

et ainsi de suite. Etant donné que tous les estimateurs $\hat{A}_{(j)}$ ont exactement la même distribution asymptotique, ce processus s'arrête dès lors que : $\hat{A}_{(j)} \simeq \hat{A}_{(j-1)}$.

La valeur $\hat{A}_{(j)}$ est alors estimateur *GMM* itératif.

Méthode de continuous-updating GMM

Dans cette approche on va chercher de façon à optimiser la fonction critère en tenant compte de la forme générale qui lie l'estimateur de la matrice de poids optimale à la valeur des coefficients. C'est la même démarche que dans le cas itératif : la différence étant que dans le cas précédent on optimise le critère pour obtenir $\hat{A}_{(j)}$, puis on construit $\hat{\Omega}_{j+1}$ pour obtenir ensuite $\hat{A}_{(j+1)}$. Alors que dans le cas continu, on optimise le critère à chaque étape en tenant compte de la forme de $\hat{\Omega}_j$ qui dépend de $\hat{A}_{(j)}$

$$\hat{A} = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}g'}(Y_T, A) \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), A) h'(W_t(\omega), A) \right]^{-1} g(Y_T, A) \quad (5.4.22)$$

Cette procédure reste itérative car on doit utiliser un algorithme d'optimisation numérique partant d'une condition initiale $\hat{A}_{(0)}$, d'une règle de passage entre $\hat{A}_{(j)}$ et $\hat{A}_{(j-1)}$ d'un critère d'arrêt va déterminer une solution numérique à ce programme.

Estimateurs de la matrice de poids en présence de corrélations

Lorsque les séquences $\{h(W_t(\omega), A_0)\}_{t=1}^{\infty}$ présentent des autocorrélations, la matrice de variance covariance de long terme n'est plus égale à la matrice de variance covariance. S'il existe $\Gamma_{\omega}(v) \neq 0$ pour $j \neq 0$, alors

$$S_{r \times r} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \Gamma_{\omega}(v) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} E \{h(W_t(\omega), A_0) h'(W_{t-v}(\omega), A_0)\} \neq \Gamma_{\omega}(0) \quad (5.4.23)$$

Dès lors les formules précédentes permettant d'estimer S ne sont plus valables.

Considérons l'estimateur $\hat{\Gamma}_{\omega}(v)$ de la matrice d'autocovariance d'ordre v , $\Gamma_{\omega}(v)$

$$\hat{\Gamma}_{\omega}(v) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}) h'(W_{t-v}(\omega), \hat{A}) \quad (5.4.24)$$

Sachant que : $\Gamma_{\omega}(-v) = \Gamma'_{\omega}(v)$, un estimateur de la matrice S pourrait être donné par la quantité

$$\hat{S} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \hat{\Gamma}_{\omega}(v) = \hat{\Gamma}_{\omega}(0) + \sum_{v=1}^{\infty} [\hat{\Gamma}_{\omega}(v) + \hat{\Gamma}'_{\omega}(v)] \quad (5.4.25)$$

Naturellement, il n'est pas possible de construire un tel estimateur puisqu'il fait intervenir des matrices $\hat{\Gamma}_{\omega}(v)$ à des ordres supérieurs à ce que l'on peut estimer à partir d'un échantillon de T observations. De plus rien ne garantit qu'une matrice construite uniquement à partir d'une somme tronquée soit définie positive comme doit l'être toute matrice de variance covariance. On a donc recourt à des méthodes d'estimation non paramétriques de matrice de variance covariance de long terme.

5.4.3 Distribution asymptotique des GMM

Nous ne considérons ici que le cas des estimateurs de type GMM en deux étapes, en commençant par présenter la distribution asymptotique générale des GMM, puis nous étudierons quelques illustrations dans des cas particuliers.

Soit \hat{A}_T l'estimateur GMM obtenu en minimisant le critère

$$\hat{A}_T = \underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} g'(Y_T, A) \hat{S}_T^{-1} g(Y_T, A) \quad (5.4.26)$$

où \hat{S}_T est considérée comme fixe par rapport à A et \hat{S}_T est un estimateur convergent de S i.e.

$$\hat{S}_T \xrightarrow{P} S, \text{ lorsque } T \rightarrow \infty$$

La minimisation de critère est obtenue en annulant la dérivée du critère par rapport au vecteur A .

Définition 5.4.8 L'estimateur GMM est donc obtenu par la résolution du système d'équations non linéaires suivant :

$$\underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} \left(\frac{\partial g(Y_T, A)}{\partial A'} \Big|_{\hat{A}} \right)' \hat{S}_T^{-1} g(Y_T, \hat{A}) = 0 \quad (5.4.27)$$

Remarque 5.4.3 Sous certaines restrictions (stationnarité des variables $W_t(\omega)$, continuité de la fonction $h(W_t(\omega), A_0)$ et restrictions sur les autres moments), on a

$$\sqrt{T}g(Y_T, A_0) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, S), \text{ lorsque } T \rightarrow \infty$$

où

$$S = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \Gamma_{\omega}(v) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} E \{h(W_t(\omega), A_0) h'(W_{t-v}(\omega), A_0)\}$$

telle que

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} TE \{g(Y_T, A_0) g'(Y_T, A_0)\}$$

Théorème 5.4.1 On suppose que la fonction $g(Y_T, A_0)$ est différentiable en A pour tout Y_T et soit \hat{A}_T l'estimateur GMM satisfaisant le système

$$\underset{A \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} \left(\frac{\partial g(Y_T, A)}{\partial A'} \Big|_{\hat{A}} \right)' \hat{S}_T^{-1} g(Y_T, \hat{A}) = 0$$

pour $r \geq p$. Soit $\{\hat{S}_T\}_{T=1}^{\infty}$ une suite de matrices définies positives telles que $\hat{S}_T \xrightarrow{P} S$, où S est définie positive. Si

(i) $\hat{A}_T \xrightarrow{P} A_0$

(ii) $\sqrt{T}g(Y_T, A_0) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, S)$

(iii) pour toute suite $\{\hat{A}_T\}_{T=1}^{\infty}$ telle que $\hat{A}_T \xrightarrow{P} A_0$, on ait

$$p \lim \left(\frac{\partial g(Y_T, A)}{\partial A'} \Big|_{\hat{A}_T} \right)' = p \lim \left(\frac{\partial g(Y_T, A)}{\partial A'} \Big|_{A_0} \right)' = D_{p \times r}$$

où les colonnes de D sont linéairement indépendantes, alors

$$\sqrt{T}(\hat{A}_T - A_0) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, V), \text{ avec } V = [DS^{-1}D']^{-1} \quad (5.4.28)$$

Remarque 5.4.4 Sous les hypothèses précédentes on admet que

$$\sqrt{T}(\hat{A}_T - A_0) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \hat{V}_T) \quad (5.4.29)$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\hat{A}_T \cong \mathcal{N} \left(A_0, \frac{\hat{V}_T}{T} \right) \quad (5.4.30)$$

où l'estimateur $\hat{V}_T = [\hat{D}\hat{S}^{-1}\hat{D}']^{-1}$ de la matrice de variance covariance asymptotique est construit à partir de :

$$\hat{D} = \left(\frac{\partial g(Y_T, A)}{\partial A'} \Big|_{A=\hat{A}_T} \right)'$$

et concernant \hat{S} on distingue de cas suivants :

En l'absence de corrélation des séries $h(W_t(\omega), \hat{A}_T)$

$$\hat{S}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=v+1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}_T) h'(W_t(\omega), \hat{A}_T)$$

En présence de corrélation :

$$\hat{S} = \hat{\Gamma}_\omega(0) + \sum_{v=1}^q \left(1 - \frac{v}{q+1} \right) [\hat{\Gamma}_\omega(v) + \hat{\Gamma}'_\omega(v)]$$

$$\hat{\Gamma}_\omega(v) = \frac{1}{T} \sum_{t=v+1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}) h'(W_{t-v}(\omega), \hat{A})$$

Illustration dans le cas des LS

Raprenons le modèle $RCAR(p)$

$$Y_t(\omega) = \underline{Y}'_{t-1}(\omega) A + u_t(\omega)$$

Le système étant juste identifié ($r = p$), l'estimateur GMM se ramène à déterminer \hat{A}_T tel que

$$g(Y_T, \hat{A}_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) [Y_t(\omega) - \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \hat{A}_T]$$

Ce qui nous amène à retrouver l'estimateur LS

$$\hat{A}_T = \hat{A}_T^{(LS)} = \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) Y_t(\omega) \right]$$

Quelle est maintenant l'expression de la matrice de variance covariance de l'estimateur \hat{A}_T . En différentiant $h(W_t(\omega), A)$, il vient

$$\begin{aligned}\hat{D}' &= \left. \frac{\partial g(Y_T, A)}{\partial A'} \right|_{A=\hat{A}_T} = \frac{1}{T} \left(\left. \frac{\partial \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) [Y_t(\omega) - \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \hat{A}_T]}{\partial A'} \right|_{A=\hat{A}_T} \right) \\ &= -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)\end{aligned}$$

Parallèlement, la matrice de variance covariance asymptotique des résidus $h(W_t(\omega), A)$ s'écrit :

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), A_0) h'(W_{t-v}(\omega), A_0)$$

Ici on a donc :

$$\begin{aligned}S &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{t=1}^T E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) u_t(\omega) [\underline{Y}_{t-v}(\omega) u_{t-v}(\omega)]' \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{t=1}^T E \left\{ u_t(\omega) u_{t-v}(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-v}(\omega) \right\}\end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que les résidus sont non autocorrélés, alors :

$$E \left\{ u_t(\omega) u_{t-v}(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-v}(\omega) \right\} = \begin{cases} \sigma_\omega^2 E \left\{ \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right\} & \text{si } v = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent un estimateur S est donné par

$$\hat{S}_T = \hat{\sigma}_\omega^2 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega)$$

où $\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2(\omega)$ et $\hat{u}_t(\omega) = Y_t(\omega) - \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \hat{A}_T$. On retrouve ainsi la formule dans laquelle on donnait la forme générale de l'estimateur \hat{S}_T en l'absence de dépendance à savoir :

$$\begin{aligned}\hat{S}_T &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(W_t(\omega), \hat{A}_T) h'(W_t(\omega), \hat{A}_T) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\underline{Y}_{t-1}(\omega) \hat{u}_t(\omega) (\underline{Y}'_{t-1}(\omega) \hat{u}_t(\omega))] \\ &= \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2(\omega) \right] \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]\end{aligned}$$

Déterminons finalement la matrice de variance covariance de l'estimateur *GMM* :

$$\sqrt{T} \left(\hat{A}_T - A_0 \right) \xrightarrow{L} \mathcal{N} \left(0, \hat{V}_T \right)$$

avec $\hat{V}_T = \hat{D} \hat{S}^{-1} \hat{D}'$. Dés lors, il vient :

$$\begin{aligned} \hat{V}_T &= \left\{ \left(-\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right)' \left[\hat{\sigma}_\omega^2 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]^{-1} \left(-\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right) \right\}^{-1} \\ &= T \hat{\sigma}_\omega^2 \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent la matrice de variance covariance de l'estimateur *GMM* s'écrit sous la forme :

$$\hat{A}_T \cong \mathcal{N} \left(A_0, \frac{\hat{V}_T}{T} \right)$$

où $\frac{\hat{V}_T}{T} = \hat{\sigma}_\omega^2 \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]^{-1}$. On retrouve ici la formule de la matrice de variance covariance des *MCO* (la seule différence étant la définition de l'estimateur de la variance des résidus.

Chapitre 6

Bibliographie

Bibliographie

- [1] J. Anděl. On Autoregressive Models With Random Parameters. Asymptotic Statistics (2). Edited by Peter Mandel and Marie Hušková North-Holland (1984).
- [2] V. V. Anh and T. Chelliah. Estimated Generalized Least Squares for Random Coefficient Regression Models. Scand J Statist, Vol 25 : p31-46, (2000).
- [3] C. F. Baum and M. F. Schaffer. Instrumental Variables and GMM Estimation and Testing. Boston college Economics Working paper 545, 02 November (2002).
- [4] N. Beck and J. N. Katz. Random Coefficient Models For Time Series Cross Section Data. Social Science Working Paper. September (2004).
- [5] N. Chelliah. A New Covariance Estimator in Random Coefficient Regression Model. The Indian Journal of Statistics, Vol. 60, Series A, Pt. 3, pp. 433-436 (1997).
- [6] C. Hsiao and M; Hashem Persaran.. Random Coefficient Panel Data Models. IZA DP N° 1236. August (2004).
- [7] C. Hsiao. Analysis of Panel Data. Economic society monographs. N°. 34, 2nd Edition, New York : Cambridge University Press, (2003).
- [8] C. Hsiao. Some Estimation Methods for a Random Coefficient Model. Econometrica, Vol. 43, N° 2, pp. 305-326 (1975)
- [9] James D. Hamilton. Time-series analysis. Princeton University Press, Princeton New Jersey, (1994).
- [10] Lon-Mu Liu. Random coefficient first-order autoregressive models. J. of Econometrics, Vol. 13, 305-325, (1980).
- [11] Markku Rahiala. Random Coefficient Autoregressive Models for Panel Data. University of Oulu, Department of Mathematical Sciences, Finland.
- [12] F. Nicholls and Barry G. Quinn. Random Coefficient Autoregressive Models : An Introduction. Springer- Verlag New York Inc, (1982).

- [13] A. Pagan. Some identification and estimation results for regression models with stochastically varying. *J. of Econometrics*, Vol. 13, 341-363, (1980).
- [14] P. M. Robinson. Statistical Inference for a Random Coefficient Autoregressive Model. *Scand. J. Statist* 5 Vol. 5, p163-168, (1978).
- [15] P. A. V. B. Swamy. *Statistical Inference in a Random Coefficient Regression Models*. Springer, New York, (1971).
- [16] P. A. V. B. Swamy. Efficient Inference in a Random Coefficient Regression Models. *Econometrica*, Vol. 38. N°. 2, 311-323, (1970).
- [17] Vesna M. Čojbašić. A Random Coefficient Autoregressive model (RCAR(1) Model). *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 13, pages 45-50, (2004).
- [18] K. D. West. Efficient GMM estimation of weak AR processes. *Economics Letters* 75, pages 415-418, (2002).