

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
OF ANNABA
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DE ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

Par

Bilal BOULFOUL

Intitulé :

**Existence et Unicité des Solutions de Certains
Types d'Equations Différentielles à Retards
Dépendant de l'Etat**

Option

Equations Différentielles

Année 2012

DIRECTEUR DE THESE : M. KOUCHE M. C. U.B.M. ANNABA

Devant le Jury

PRESIDENT : **F. REBBANI** Prof. U.B.M ANNABA

EXAMINATEUR : **H. SAKER** M. C. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : **N. BOUSSETILA** M. C. Université de GUELMA

Remerciements

Avant tout, il apparaît opportun de rendre grâce à DIEU de m'avoir donné le courage et la volonté de mener ce travail à bien.

Je dois beaucoup à mon directeur de mémoire Dr. Mahiédine KOUCHE Maître de conférence à l'Université de ANNABA qui a su me faire profiter de sa science. Il m'a offert son temps et sa patience. Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été d'une aide précieuse pour moi. J'ai beaucoup appris à son contact et ce fut un grand plaisir de travailler avec lui. Je voudrai lui adresser mes vives remerciements et de lui témoigner ma sincère reconnaissance.

Je remercie chaleureusement M^{me} Fouzia REBBANI Professeur à l'Université de ANNABA qui a accepté de présider le jury et d'y avoir consacré une partie de son temps.

Je tiens aussi à remercier M^r Hacene SAKER Maître de conférence à l'Université de ANNABA et M^r Najib BOUSSETILA Maître de conférence à l'Université de GUELMA qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

J'exprime aussi mes remerciements à tous mes enseignants qui ont grandement contribué à forger mes capacités d'apprentissage et de recherche.

Enfin je tiens à remercier mes parents; Sans leurs sacrifices je ne serais pas devenu ce que je suis aujourd'hui.

Résumé

Le but de ce projet de mémoire est d'exposer la théorie générale des équations différentielles à retard. Dans la première partie du mémoire on présente la théorie des équations différentielles à retard constant ou indépendant de l'état. L'idée consiste à donner une formulation fonctionnelle du problème de valeurs initiales dans l'espace des fonctions continues puis d'utiliser le Théorème du point fixe de Schauder pour obtenir la solution comme un point fixe d'un opérateur intégral.

Dans la deuxième partie on s'intéresse aux équations différentielles à retard dépendant de l'état. On montrera que pour que le problème fonctionnelle soit bien posé il est nécessaire de formuler le problème de Cauchy associé sur une sous variété de l'espace C^1 . En utilisant le Théorème de l'application contractante on montrera que le problème possède une solution locale. L'unicité de la solution est également prouvé.

Dans la dernière partie du mémoire on applique les résultats sur les équations différentielles à retard dépendant de l'état obtenus au chapitres 3 pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution du célèbre modèle de Aiello et al. [2]. La positivité de la solution est également prouvé.

Mots Clés: Equations différentielles à retard dépendant de l'état, Théorème de Schauder, Dynamique de populations, sous variété, principe de comparaison.

Abstract

The purpose of this work is to give the general theory of delay differential equations. In the first part we are interested to differential equations with constant delay. The idea is to give a formulation of the associated Cauchy problem in the space of continuous functions. The solution of the related problem is obtained as a fixed point of some functional operator. By using Schauder fixed point Theorem we prove the existence of a local solution.

In the second part we are interested to delay differential equations with state dependant delay. We prove that for the problem to be well posed it is necessary to formulate the associated Cauchy problem in some sub-manifold of the space of continuously differentiable functions C^1 . By using Banach fixed point Theorem we prove the existence of a local solution.

In the last part we apply the results obtained in the third chapter to prove existence and unicity of a solution to the model proposed by Aiello et al. [2] which arises from ecology. Some results about the positivity of the solution are also obtained.

Keywords: Delay differential equations, state dependent delay, Schauder fixed point Theorem, sub-manifold, comparison principle.

Introduction

La modélisation mathématique des phénomènes issus de la dynamique de population conduit à des modèles qui sont discrets ou continus. Les modèles discrets sont représentés par des équations matricielles ou des équations aux différences. Quant aux modèles continus, ils sont représentés par des équations différentielles, où l'on suppose que l'évolution du système au cours du temps se fait d'une manière continue. Ces modèles sont en général donnés par des équations différentielles à retard, des équations aux dérivées partielles, ou des équations intégrales. Dans le cas des équations différentielles à retard, le passé exerce une influence sur l'état présent du modèle c'est ce qu'on appelle la réponse de rétro-action. Mathématiquement cette réponse de rétro-action s'exprime sous la forme d'un retard discret, continu, distribué ou même fonctionnel. Un exemple nous est fourni par les problèmes provenant du traitement de signal en électronique, les problèmes de réseaux de neurones en informatique théorique ou les problèmes de dynamique de populations en biologie et en écologie. D'une manière générale il est prouvé que pour décrire de façon satisfaisante les phénomènes compliqués de la nature il est nécessaire de tenir compte de ce retard ce qui nous amène dans la plupart des cas à considérer des équations différentielles à retard (cf. [16-17]).

Désignons $C = C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[- \tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n muni de la norme de la convergence uniforme, U un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Une équation différentielle à retard est une équation différentielle de la forme:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t), \quad t > 0, \quad (0.1)$$

ou $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in (-\tau, 0)$. τ est appelé le retard de l'équation. On associe à l'équation (0.1) la donnée initiale suivante:

$$x(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad (0.2)$$

ou $\phi \in C$. La formulation (0.1)-(0.2) ramène le problème à retard à celui d'un problème de Cauchy dans l'espace C des fonctions continues. On peut montrer que si f est continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable alors le problème (0.1)-(0.2) admet une solution locale unique pour tout $\phi \in C$ (cf. [7-8]).

Certains chercheurs (cf. [6]) ont montré que dans certains cas le retard τ du modèle n'est pas constant mais est fonction par exemple de la solution x , c'est ce qu'on appelle un retard dépendant de l'état. Un exemple célèbre (cf. [2]) nous provient de l'écologie dans lequel les auteurs ont considéré une équation différentielle où le retard, qui représente le temps de maturation de la population, n'est pas constant mais est fonction de la population totale. D'une manière générale une équation différentielle à retard dépendant de l'état s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t - r(x_t))), \quad t > 0, \quad (0.3)$$

où $g : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $r : U \subseteq C \rightarrow [-h, 0]$ une fonction définie sur un ouvert U de $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ à valeur dans $[-h, 0]$, avec $h > 0$.

La difficulté principale à laquelle on est confrontée lorsque l'on étudie les équations différentielles à retard dépendant de l'état du type (0.3) est que les résultats classiques sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles à retard indépendant de l'état ne peuvent pas s'appliquer. En effet, on impose généralement à g d'être continument différentiable en x pour que g soit localement lischitzienne. Or ceci entraînera que la donnée initiale ϕ elle-même est continument différentiable. On est donc amené à changer l'espace des phases $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Ceci nous amène à reformuler le problème de valeur initiale (0.3) dans le nouvel espace $C^1 = C^1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|\phi\|_{-h,0}^1 = \|\phi\|_C + \left\| \dot{\phi} \right\|_C.$$

En particulier la continuité en $t = 0$ entraîne

$$\dot{\phi}(0) = g(\phi),$$

relation qui n'est pas satisfaite par tous les éléments ϕ de U . La relation précédente nous force donc à chercher la solution non pas dans un ouvert U de C^1 mais dans l'ensemble

$$X = \{ \phi \in U : \dot{\phi}(0) = g(\phi) \}. \quad (0.4)$$

La relation (0.4) résume toute la difficulté à laquelle on est confronté lorsque l'on cherche à donner une formulation fonctionnelle au problème à retard (0.3). En effet l'ensemble X défini par (0.4) n'est pas un ouvert de C^1 mais sous certaines conditions sur g cet ensemble est une sous variété de C^1 .

Le but de ce projet de mémoire est de développer le cadre fonctionnel qui permet de donner une formulation adéquate à l'équation à retard dépendant de l'état (0.3). L'approche suivie est celle décrite par H. O. Walther dans [19-20].

Ce projet de mémoire est divisé en quatre chapitres différents.

Dans le premier chapitre on expose les principaux résultats sur les théorèmes du point fixe, les variétés différentielles qu'on utilisera tout au long du mémoire.

Le second chapitre est consacré aux équations différentielles à retard constant ou indépendant de l'état. On montre que le problème de valeurs initiales devient un problème de Cauchy dans l'espace des fonctions continues muni de la norme de la convergence uniforme. En donnant au problème une formulation intégrale on ramène ainsi l'existence de la solution à celle d'un point fixe d'un certain opérateur fonctionnel. Le Théorème de Schauder permet alors, sous certaines conditions sur la fonction f de montrer l'existence de ce point fixe.

Le troisième chapitre est consacré aux équations à retard dépendant de l'état. Pour lever la difficulté inhérente au cas du retard dépendant de l'état on est amené à formuler le problème de Cauchy associé au problème de valeurs initiales dans une sous variété de l'espace C^1 . En donnant une formulation intégrale au problème de Cauchy sur la sous variété X on ramène ainsi l'existence de cette solution à celle d'un point fixe d'un opérateur intégral. Une application judicieuse du Théorème de l'application contractante nous donne la solution recherchée.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du célèbre modèle proposé par Aiello et al. [2]. En appliquant les résultats développés dans le chapitre 3 on montre que le modèle admet une solution locale unique. La positivité des solutions est également prouvée sous certaines hypothèses sur les paramètres du modèle.

Chapitre 1

Rappel de Notions de Base

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques notions essentielles qu'on utilisera tout au long de ce mémoire.

1.1 Quelques Théorèmes du Point Fixe

Définition 1.1 (Difféomorphismes de classe C^k). Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et f une application de U dans F . On dira que f est un difféomorphisme de U sur un ouvert V de F , si f est une bijection de U dans V , différentiable sur U et si l'application inverse de f , $f^{-1} : V \rightarrow U$ est différentiable sur V (considérée comme application de V dans E).

Une application $f : U \subset E \rightarrow V \subset F$ est un difféomorphisme *de classe* C^k , $1 \leq k \leq \infty$, lorsque f est une bijection de U sur V de classe C^k ainsi que son inverse.

Définition 1.2. Soit U une partie d'un espace de Banach X et $T : U \rightarrow X$. L'application T est dite contractante dans U s'il existe λ , $0 \leq \lambda < 1$, tel que

$$|Tx - Ty| \leq \lambda |x - y| \quad \forall x, y \in U.$$

Si V est aussi une partie d'un espace de Banach Y et $T : U \times V \rightarrow X$, alors T est dite contraction uniforme s'il existe λ , $0 \leq \lambda < 1$, tel que

$$|T(x, v) - T(y, v)| \leq \lambda |x - y| \quad \forall x, y \in U, v \in V.$$

On aura besoin du Lemme de Gronwall suivant.

Lemme 1.1 . Soient u , α deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles et β une fonction intégrable sur $[a, b]$ et positive. supposons que,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

alors

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \alpha(s) \left[\exp \int_s^t \beta(\tau) d\tau \right] ds, \quad a \leq t \leq b.$$

De plus, si α est non décroissante, alors

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp \left(\int_a^t \beta(s) ds \right), \quad a \leq t \leq b.$$

Théorème 1.1 (Théorème de point fixe de Schauder) ([7], Lemme 2.4, page 40). Soient U une partie fermée, bornée et convexe d'un espace de Banach E , et $T : U \rightarrow U$ un opérateur compact. Alors T admet un point fixe dans U .

Théorème 1.2 (Théorème des fonctions implicites). Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \rightarrow G$ une application de classe C^1 sur U .

Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$.

On suppose que la différentielle partielle, $f'_y(a, b)$, de f par rapport à la seconde variable y au point (a, b) est un isomorphisme de F sur G .

Alors il existe un voisinage ouvert V de (a, b) dans $E \times F$, $V \subset U$, un voisinage ouvert W de a dans E et une application ϕ de classe C^1 de W dans F , tels que

$$(x, y) \in V \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in W \quad \text{et} \quad y = \phi(x).$$

Théorème 1.3 (Théorème du point fixe de Banach, version paramétrée) ([4], Proposition 1.1, page 497). Soient E et F deux espaces de Banach sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , U_0, U deux parties ouvertes de E et V une partie ouverte de F , telle que

$$\overline{U}_0 \subset U.$$

Soit f une application de classe C^k , où $k \geq 0$, vérifiant

$$f(\overline{U}_0 \times V) \subset \overline{U}_0.$$

On suppose que il existe un constante $q \in [0, 1)$ tel que pour tout (ψ, y) et (χ, y) dans $\overline{U}_0 \times V$, on a

$$\|f(\psi, y) - f(\chi, y)\| \leq q \|\psi - \chi\|.$$

Alors l'application $g : V \rightarrow E$, définie par

$$g(y) = x \in \bar{U}_0 \quad \text{et} \quad f(x, y) = x,$$

est de classe C^k .

1.2 Notions de Variétés Différentielles

1.2.1 Sous-variétés Différentielles dans un Espace de Banach

Définition 1.3. On dit qu'une partie V de l'espace de Banach E est une sous-variété de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, si pour tout point x de V on peut trouver un difféomorphisme ϕ de classe C^r d'un voisinage ouvert U de x dans E sur un ouvert d'un espace de Banach $H \times K$ telle que $\phi(U \cap V) = \phi(U) \cap (H \times \{0\})$.

Une autre définition est possible qui décrit un tel ensemble par une équation locale.

Définition 1.4. Soit V une partie de l'espace de Banach E et soit F un autre espace de Banach. On dit que $g : U \subset E \rightarrow F$, où U est un ouvert de E contenant x , est une équation locale de V en x , de classe C^r , si

1. $V \cap U = \{y \in U : g(y) = 0\}$,
2. g est de classe C^r et $Dg(x)$ est surjective,
3. $\text{Ker}(Dg(x))$ possède un supplémentaire fermé dans E .

La proposition suivante caractérise la notion de sous-variété à l'aide de la notion d'équation locale.

Proposition 1.1. ([11]). *On dit qu'une partie V de E est une sous-variété de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, si pour tout point x de V on peut trouver une équation locale $g : E \rightarrow F$ de V en x de classe C^r .*

Définition 1.5. Soit V une sous-variété de E . On appelle espace tangent à $x \in V$ l'espace $T_x V$ des vecteurs vitesse au point x . Autrement dit,

$v \in T_x V$ s'il existe $\gamma :]-1, 1[\rightarrow V$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$, où

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}.$$

Proposition 1.2. ([11]). *Soient V une sous-variété de E , $x \in V$ et g une équation locale de V en x . Alors $T_x V = \text{Ker}(Dg(x))$.*

Corollaire 1.1. *L'espace tangent $T_x V$ est un sous-espace vectoriel fermé de E .*

Corollaire 1.2. *Soient U un ouvert de E , $g : U \subset E \rightarrow F$ de classe C^r et $V = g^{-1}(0)$. Si, pour tout $x \in V$, $Dg(x)$ est surjective et si $\text{Ker}(Dg(x))$ possède un supplémentaire fermé alors V est une sous-variété de classe C^r et $T_x V = \text{Ker}(Dg(x))$.*

1.2.2 Variétés différentielles

Définition 1.6. Soit M un espace topologique séparé. Une carte sur M est un homéomorphisme ϕ d'un ouvert U de M sur un ouvert Ω d'un espace de Banach réel Y . On le note (U, ϕ) .

Définition 1.7. Deux cartes $\phi : U \rightarrow \Omega_1$ et $\psi : V \rightarrow \Omega_1$ sur M sont C^k -compatibles si et seulement si

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

est un difféomorphisme de classe C^k .

Définition 1.8. Un atlas de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, est une famille de cartes $A = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ telles que

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$,
2. Quelles que soient les cartes (U_i, ϕ_i) et (U_j, ϕ_j) telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'application

$$\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j), \quad \forall (i, j) \in I,$$

est un difféomorphisme de classe C^k .

Remarque 1.1. Un atlas de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, est une famille de cartes $A = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ deux à deux C^k -compatibles tel que $(U_i)_{i \in I}$ soit un recouvrement ouvert de M .

Définition 1.9. Deux atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ sur M sont C^k -équivalents si et seulement si

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad \psi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap V_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap V_j),$$

est un difféomorphisme de classe C^k .

Chapitre 2

Equations Différentielles à Retard Constant

Dans ce chapitre on expose la théorie générale des équations différentielles à retard constant ou indépendant de l'état.

2.1 Généralité

Dans ce premier paragraphe on s'intéresse à l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle à retard indépendant de l'état. On commencera d'abord par donner quelques définitions générales.

Définition 2.1. Soit $h \geq 0$ un nombre réel donné, on désignera par $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[-h, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|\phi\|_{-h,0} = \sup_{\theta \in [-h,0]} |\phi(\theta)|, \quad \forall \phi \in C, \quad (2.1)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .

Définition 2.2. Soient $\sigma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $x \in C([\sigma - h, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$. Pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$, on définit $x_t \in C$ par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

Remarque 2.1. Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t - h, t]$, translatée sur $[-h, 0]$.

Définition 2.3 Soient D un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. On appelle la relation

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (2.2)$$

une équation différentielle à retard sur D , où le symbole “ $\dot{}$ ” représente la dérivation à droite. On notera par $\text{EDR}(f)$ l'équation différentielle à retard (2.2) définie par f .

Définition 2.4. Soit x une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n .

1. On dit que x est solution de l'équation (2.2) s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ tels que $x \in C([\sigma - h, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ et x vérifie l'équation (2.2) pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha)$.

2. Pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\phi \in C$ donnés, x est dite solution du problème aux valeurs initiales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi, \end{cases} \quad (2.3)$$

s'il existe $\alpha > 0$ tel que x soit solution de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha)$ et $x_\sigma = \phi$.

3. On désignera par $x(\sigma, \phi, f)$ la solution du problème (2.3) sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha)$.

Remarque 2.2. Lorsque $h = 0$, l'équation (2.2) se réduit à une équation différentielle ordinaire.

Le lemme suivant réduit l'étude de l'existence et de l'unicité du problème (2.3) à celle d'une équation intégrale.

Lemme 2.1 Soient $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ et $f : D \subset \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors, $x(\sigma, \phi, f)$ est une solution du problème (2.3) en (σ, ϕ) si et seulement si $x(\sigma, \phi, f)$ est une solution de l'équation intégrale

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, & t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi. \end{cases} \quad (2.4)$$

Preuve. Condition nécessaire: Soit $x(\sigma, \phi, f)$ une solution du problème (2.3), alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi, \end{cases}$$

Par intégration, on obtient

$$\int_{\sigma}^t \dot{x}(s) ds = x(t) - x(\sigma) = \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq \sigma.$$

Comme $x(\sigma) = x(\sigma + 0) = x_{\sigma}(0) = \phi(0)$ on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds, & t \geq \sigma, \\ x_{\sigma} = \phi. \end{cases}$$

Condition suffisante: Soit $x(\sigma, \phi, f)$ une solution de l'équation intégrale (2.4). Alors,

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, x_s) ds.$$

Comme $f(t, x_t)$ est continue en t , en appliquant le théorème de la moyenne, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, x_s) ds = f(t, x_t),$$

d'où le résultat. ■

2.2 Existence et Unicité

Notre objectif dans ce paragraphe est d'établir des conditions nécessaires pour l'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.3). L'idée est d'utiliser le Lemme 2.1 pour ramener l'existence de la solution à celle d'un point fixe d'un opérateur integral.

2.2.1 Existence

Commençons d'abord par donner un certains nombres de lemmes que nous utiliserons ultérieurement.

Lemme 2.2. Si $x \in C([\sigma - h, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$, alors x_t est une fonction continue en t , pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$.

Preuve. Comme x est continue sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha]$, alors elle est uniformément continue c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $(t, s) \in [\sigma - h, \sigma + \alpha] \times [\sigma - h, \sigma + \alpha]$,

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(s)| < \epsilon. \quad (2.5)$$

Soient $(u, v) \in [\sigma, \sigma + \alpha] \times [\sigma, \sigma + \alpha]$, $|u - v| < \delta$, on a

$$(u + \theta, v + \theta) \in [\sigma - h, \sigma + \alpha] \times [\sigma - h, \sigma + \alpha] \quad (2.6)$$

pour tout $\theta \in [-h, 0]$. D'après (2.5) et (2.6) pour tout $(u, v) \in [\sigma, \sigma + \alpha] \times [\sigma, \sigma + \alpha]$,

$$|u + \theta - v + \theta| = |u - v| < \delta \Rightarrow |x(u + \theta) - x(v + \theta)| < \epsilon, \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

Et par suite

$$|u - v| < \delta \Rightarrow |x_u(\theta) - x_v(\theta)| < \epsilon, \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

■

Le lemme suivant réduit l'étude de l'existence et de l'unicité à celle d'une équation intégrale avec condition initiale nulle.

Lemme 2.3. Soient $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ et $\tilde{\phi} \in C([\sigma - h, +\infty), \mathbb{R}^n)$ la fonction définie par:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(\theta) = \phi(\theta), & -h \leq \theta < 0, \\ \tilde{\phi}(t + \sigma) = \phi(0), & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Si x est une solution du problème (2.3) en (σ, ϕ) alors $y(t) = x(t + \sigma) - \tilde{\phi}(t + \sigma)$, $t \geq -h$, est solution du problème suivant:

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, & t \geq 0, \\ y_0 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Preuve. En effet, on a $y(t) = x(t + \sigma) - \tilde{\phi}(t + \sigma)$, pour $t \in [-h, +\infty)$, d'après (2.7) on obtient

$$\begin{aligned} y_0(\theta) &= y(0 + \theta) \\ &= x(\theta + \sigma) - \tilde{\phi}(\theta + \sigma) \\ &= x_\sigma(\theta) - \tilde{\phi}_\sigma(\theta) \\ &= \phi(\theta) - \phi(\theta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in [-h, 0]$. D'ou, $y_0 = 0$.

Montrons maintenant que y satisfait la seconde équation de (2.8). D'après l'hypothèse on a

$$\int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds = \int_0^t f(\sigma + s, x_{\sigma+s}) ds,$$

pour tout $t \geq 0$, et comme

$$\int_0^t f(\sigma + s, x_{\sigma+s}) ds = \int_0^{t+\sigma} f(s + \sigma, x_{s+\sigma}) ds - \int_t^{t+\sigma} f(s + \sigma, x_{s+\sigma}) ds.$$

Alors, d'après le lemme 2.1 on a

$$\int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds = \int_0^{t+\sigma} \dot{x}(s + \sigma) ds - \int_t^{t+\sigma} \dot{x}(s + \sigma) ds,$$

et par suite

$$\int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds = x(t + \sigma) - x_\sigma(0), \quad t \geq 0.$$

D'autre part comme $x(t + \sigma) = y(t) + \tilde{\phi}(t + \sigma) = y(t) + \phi(0)$, alors

$$\int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds = y(t) + \phi(0) - \phi(0), \quad t \geq 0.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 2.3. Inversement, si y est une solution du probleme (2.8), alors on obtient la solution x du probleme (2.3) par la transformation précédente (i.e. $y(t) = x(t + \sigma) - \tilde{\phi}(t + \sigma)$, $t \geq -h$). Par conséquent l'existence et l'unicité du probleme (2.3) est équivalente à celle du probleme (2.8).

Définition 2.5. Soient V une partie de $\mathbb{R} \times C$, et $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues et bornées. Si $f \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$ on notera par $\|f\| = \sup_{(t, \phi) \in V} |f(t, \phi)|$ la norme de f dans $C^0(V, \mathbb{R}^n)$. $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ munie de cette norme est un espace de Banach.

Définition 2.6. Pour tout α, β on définit les ensembles suivants:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= [0, \alpha], \\ B_\beta &= \{\psi \in C : \|\psi\|_{-h, 0} \leq \beta\}, \\ \hat{A}(\alpha, \beta) &= \{y \in C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n) : y_0 = 0, y_t \in B_\beta, \forall t \in I_\alpha\}. \end{aligned}$$

Lemme 2.4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times C$, $W \subseteq \Omega$ un ensemble compact et $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Alors ils existent un voisinage $V \subseteq \Omega$ de W tel que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, un voisinage $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 et des constantes positives M, α et β tels que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$ et

$$|f(\sigma, \phi)| < M, \quad \forall (\sigma, \phi) \in V, \quad \forall f \in U.$$

De plus on a pour tout $(\sigma^0, \phi^0) \in W$,

$$(\sigma^0 + t, \tilde{\phi}_{t+\sigma^0}^0 + y_t) \in V, \quad \forall t \in I_\alpha, \quad y \in \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Preuve. Soient $(\sigma, \phi) \in W$ et α, γ, ϵ des constantes positives. Considérons l'ensemble

$$V_{(\alpha, \gamma)}^\epsilon(\sigma, \phi) = (\sigma - \epsilon, \sigma + \alpha + \epsilon) \times \{\psi \in C : \|\psi - \phi\|_{-h, 0} < \gamma + \epsilon\}.$$

$V_{(\alpha, \gamma)}^\epsilon(\sigma, \phi)$ est un voisinage de $(\sigma, \phi) \in W$ dans l'ouvert Ω .

Etant donnée que f^0 est continue sur Ω et à fortiori sur le compact W alors il existe $M > 0$ tel que

$$|f^0(\sigma, \phi)| < M - \epsilon, \quad \forall (\sigma, \phi) \in W.$$

D'autre part la continuité de f^0 en $(\sigma, \phi) \in W$ entraîne l'existence d'un voisinage $V_{(\alpha, \gamma)}^\epsilon(\sigma, \phi)$ de (σ, ϕ) tel que

$$|f^0(t, \psi)| < M - \epsilon, \quad \forall (t, \psi) \in V_{(\alpha, \gamma)}^\epsilon(\sigma, \phi).$$

La famille d'ouverts $\{V_{(\alpha, \gamma)}^\epsilon(\sigma, \phi)\}_{(\sigma, \phi) \in W}$ forment donc un recouvrement de W , comme W est compact il existe un sous-recouvrement fini de W qu'on notera $(\sigma^1, \phi^1), \dots, (\sigma^m, \phi^m)$ tel que

$$W \subset \bigcup_{i=1}^m V_{(\alpha^i, \gamma^i)}^\epsilon(\sigma^i, \phi^i).$$

Posons $\bar{\alpha} = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha^i$, $\bar{\gamma} = \max_{1 \leq i \leq m} \gamma^i$. Alors pour tout $(t, \psi) \in W$ on a

$$\|\psi - \phi^i\|_{-h, 0} < \bar{\gamma} + \epsilon \quad \text{et} \quad t \in (-\epsilon, \bar{\alpha} + \epsilon).$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient

$$\|\psi - \phi^i\|_{-h, 0} \leq \bar{\gamma} + \epsilon \quad \text{et} \quad t \in [0, \bar{\alpha}].$$

Il est alors clair que l'ensemble

$$V = \bigcup_{i=1}^m ([\sigma^i, \sigma^i + \bar{\alpha}] \times \{\psi \in C : \|\psi - \phi^i\|_{-h,0} \leq \bar{\gamma}\}),$$

est un voisinage de W , et

$$|f^0(\sigma, \phi)| < M, \quad \forall (\sigma, \phi) \in V.$$

Finalement, on obtient $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$. Montrons maintenant l'existence d'un voisinage $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 tel que:

$$|f(\sigma, \phi)| < M, \quad \forall (\sigma, \phi) \in V \quad \forall f \in U.$$

Il reste à montrer que:

$$(\sigma^0 + t, \tilde{\phi}_{\sigma^0+t}^0 + y_t) \in V, \quad \forall t \in I_\alpha \quad \forall y \in \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Soient $\epsilon > 0$ et choisissons α, β tel que

$$0 < \beta < \bar{\gamma} + \epsilon, \quad \alpha < \bar{\alpha},$$

et

$$\left\| \tilde{\phi}_{\sigma^0+t}^0 - \phi^0 \right\|_{-h,0} < \bar{\gamma} - \beta + \epsilon, \quad \forall (\sigma^0, \phi^0) \in W, \quad t \in I_\alpha.$$

Alors pour chaque $y \in \hat{A}(\alpha, \beta)$ et $t \in I_\alpha$ on a

$$\left\| y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t}^0 - \phi^0 \right\|_{-h,0} \leq \|y_t\|_{-h,0} + \left\| \tilde{\phi}_{\sigma^0+t}^0 - \phi^0 \right\|_{-h,0} < \bar{\gamma} + \epsilon.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient

$$\left\| y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t}^0 - \phi^0 \right\|_{-h,0} \leq \bar{\gamma}, \quad \forall t \in I_\alpha, \quad \forall y \in \hat{A}(\alpha, \beta),$$

c'est à dire

$$(\sigma^0 + t, y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t}^0) \in V, \quad \forall t \in I_\alpha, \quad \forall y \in \hat{A}(\alpha, \beta).$$

D'où, le résultat. ■

Lemme 2.5. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ un ouvert, $W \subseteq \Omega$ un ensemble compact, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, U un voisinage de f^0 , V un voisinage de W et M, α, β des constantes positives. Considérons l'opérateur,

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

où

$$\begin{aligned} T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= 0, \quad \forall t \in [-h, 0], \\ T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \quad \forall t \in I_\alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Alors, il existe un compact K de $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ tel que l'application

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow K,$$

est continue. De plus si $M\alpha \leq \beta$ alors

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Preuve. Montrons d'abord que

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \phi, f, y)(\tau)| \leq M |t - \tau|, \quad \forall t, \tau \in I_\alpha, \quad (2.10)$$

et

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t)| \leq M\alpha, \quad \forall t \in I_\alpha. \quad (2.11)$$

Pour tout $t, \tau \in I_\alpha$ tel que $\tau > t$, la relation 2.9 nous donne

$$\begin{aligned} |T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \phi, f, y)(\tau)| &= \left| \int_t^\tau f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds \right| \\ &\leq \int_t^\tau |f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)| ds. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.4 on a

$$(\sigma^0 + t, \tilde{\phi}_{t+\sigma^0}^0 + y_t) \in V, \quad \forall t \in I_\alpha, \quad y \in \hat{A}(\alpha, \beta),$$

et

$$|f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)| < M, \quad \forall f \in U.$$

Donc

$$\int_t^\tau |f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)| ds \leq M(\tau - t),$$

Finalement on obtient

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \phi, f, y)(\tau)| \leq M |\tau - t|, \quad \forall t, \tau \in I_\alpha,$$

qui n'est autre que la relation (2.10). De nouveau, d'après le Lemme 2.4 on obtient

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t)| = \left| \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds \right| \leq M \int_0^t ds \leq M\alpha,$$

d'où la relation (2.11).

Considérons maintenant l'ensemble

$$K = \{g \in C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n) : |g(t) - g(\tau)| \leq M |t - \tau|, |g(t)| \leq M\alpha, g_0 = 0\}.$$

Montrons que K est compact dans $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$. Il est clair que K est un ensemble borné et fermé dans $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$, de plus la relation

$$\forall g \in K, \quad |g(t) - g(\tau)| \leq M |t - \tau|, \quad \forall t, \tau \in I_\alpha,$$

entraîne que K est uniformément équicontinue. D'après le Théorème d'Ascoli K est relativement compact dans $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$. Comme K est fermé il est donc compact.

Etant donné que $\text{Im } T \subseteq K$ l'opérateur T définie par (2.9) prend ses valeurs dans K . Montrons maintenant que l'application

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow K,$$

est continue. Soit $\{(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n)\}_{n \geq 1}$ une suite de $W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta)$ telle que $(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n) \rightarrow (\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0)$ dans $W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta)$. Puisque K est compact alors il existe une sous-suite qu'on notera simplement $\{T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k) \rightarrow \lambda \in K$. Or puisque $(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n) \rightarrow (\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0)$ et f^k, f^0 sont continues alors

$$f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}_{\sigma^k+s}^k + y_s^k) \rightarrow f^0(\sigma^0 + s, \tilde{\phi}_{\sigma^0+s}^0 + y_s^0), \quad \forall s \in I_\alpha,$$

et comme f^k, f^0 sont continues et $\left| f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}_{\sigma^k+s}^k + y_s^k) \right| \leq M$, le Théorème de la convergence dominée entraîne que

$$\lambda(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}_{\sigma^k+s}^k + y_s^k) ds = \int_0^t f^0(\sigma^0 + s, \tilde{\phi}_{\sigma^0+s}^0 + y_s^0) ds.$$

D'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)(t) = T(\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0)(t), \quad \forall t \in [-h, 0],$$

l'opérateur T est donc continue.

Montrons maintenant que si $M\alpha \leq \beta$ alors

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Il suffit pour cela de montrer que $K \subseteq \hat{A}(\alpha, \beta)$. Soit $g \in K$. On a pour chaque $t \in I_\alpha$ et $\theta \in [-h, 0]$

$$|g_t(\theta)| = |g(t + \theta)| \leq M\alpha \leq \beta,$$

d'où

$$g_t \in B_\beta, \quad \forall t \in I_\alpha.$$

De plus, par définition de K on a

$$g_0 = 0.$$

D'où $K \subseteq \hat{A}(\alpha, \beta)$. ■

Le théorème suivant assure l'existence locale d'une solution de l'équation différentielle à retard (2.2).

Théorème 2.1 (Existence). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

(i) *Pour tout $(\sigma, \phi) \in \Omega$ le problème (2.3) admet au moins une solution en (σ, ϕ) .*

(ii) *Plus généralement, si $W \subseteq \Omega$ est un compact, alors il existe un voisinage $V \subseteq \Omega$ de W tel que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, et il existe un voisinage $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $(\sigma, \phi) \in W$ et $f \in U$ il existe au moins une solution $x(\sigma, \phi, f)$ du problème (2.3) en (σ, ϕ) sur l'intervalle $[\sigma - h, \sigma + \alpha]$.*

Preuve. L'idée consiste à utiliser le Lemme 2.5 et de montrer que le problème (2.9) admet une solution en utilisant le Théorème du point fixe de Schauder. La preuve est divisée en deux étapes.

Étape 1: Posons $W = \{(\sigma, \phi)\}$. Montrons que l'opérateur

$$T(\sigma, \phi, f^0, \cdot) : \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

définie par

$$\begin{aligned} T(\sigma, \phi, f^0, y)(t) &= 0, \quad \forall t \in [-h, 0], \\ T(\sigma, \phi, f^0, y)(t) &= \int_0^t f^0(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \quad \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

est compact. D'après le Lemme 2.5, il existe un compact K de $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ tel que l'opérateur

$$T(\sigma, \phi, f^0, \cdot) : \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow K,$$

est continu. L'opérateur T est donc compact. Si on choisit $\alpha > 0$ tel que $M\alpha \leq \beta$ alors, d'après le Lemme 2.5 on a

$$T(\sigma, \phi, f^0, \cdot) : \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow \hat{A}(\alpha, \beta).$$

De plus, d'après la définition, il est clair que $\hat{A}(\alpha, \beta)$ est un ensemble fermé, borné et convexe dans $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, d'après le Théorème du point fixe de Schauder il existe $v \in C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ tel que

$$v = T(\sigma, \phi, f^0, v),$$

c'est à dire que

$$\begin{aligned} v(t) &= 0, \quad \forall t \in [-h, 0], \\ v(t) &= \int_0^t f^0(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + v_s) ds, \quad \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

D'après la Remarque 2.3 la solution v du problème intégral précédent n'est autre que la solution du problème (2.3).

Étapes 2: Soit $W \subseteq \Omega$ un ensemble compact et $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Alors d'après le Lemme 2.4 il existe un voisinage $V \subseteq \Omega$ de W telle que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, et il existe un voisinage $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 et des constantes positives α, β et M tel que $|f(\sigma, \phi)| < M$ pour tout $(\sigma, \phi) \in V$ et $f \in U$. Considérons l'opérateur

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

où

$$\begin{aligned} T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= 0, \quad \forall t \in [-h, 0], \\ T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \quad \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.5 T est continue et il existe un ensemble compact K de $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ tel que

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow K.$$

T est donc un opérateur compact. De plus si on choisit $\alpha > 0$ tel que $M\alpha \leq \beta$ alors d'après le Lemme 2.5 on a

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Comme $\hat{A}(\alpha, \beta)$ est un ensemble convexe borné et fermé et T compact. Alors d'après le Théorème du point fixe de Schauder, pour tout $(\sigma, \phi) \in W$ et $f \in U$ l'opérateur T admet un point fixe $y = y(\sigma, \phi, f)$ tel que

$$y(t) = 0, \quad \forall t \in [-h, 0],$$

$$y(t) = \int_0^t f^0(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \quad \forall t \in I_\alpha.$$

D'après la Remarque 2.3 la solution ainsi obtenue est donc une solution du problème (2.3) en (σ, ϕ) sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha]$. ■

2.2.2 Unicité

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes pour avoir l'unicité de la solution.

Définition 2.7. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que $f = f(t, \phi)$ est lipschitzienne en ϕ dans les compacts de Ω si pour tout compact K dans Ω , il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)| \leq L \|\phi_1 - \phi_2\|_{-h, 0}$$

à chaque fois que (t, ϕ_1) et (t, ϕ_2) sont dans K .

Théorème 2.2 (Unicité). Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que $f(t, \phi)$ soit lipschitzienne en ϕ sur tout compact de Ω . Si $(\sigma, \phi) \in \Omega$, alors le problème (2.3) admet une solution unique en (σ, ϕ) .

Preuve. Soient x et y deux solutions de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha]$ telles que $x_\sigma = y_\sigma = \phi$, c'est-à-dire que

$$x(\sigma + \theta) - y(\sigma + \theta) = 0, \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

On veut montrer que $x(t) = y(t)$, pour tout $t \in (\sigma, \sigma + \alpha]$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x(t) \neq y(t)$, pour certain point $t \in (\sigma, \sigma + \alpha]$. Alors,

$$s = \inf\{u \in [\sigma, \sigma + \alpha] : x(u) \neq y(u)\},$$

satisfait

$$\sigma \leq s < t \leq \sigma + \alpha,$$

et

$$x(s) = y(s).$$

Soit L le constant lipschitzienne de $f(t, \phi)$ dans tout ensemble compact de Ω contenant les trajectoires $\{(t, x_t)\}, \{(t, y_t)\}$, $t \in I_\alpha$. Comme x, y sont uniformément continues sur $[\sigma - h, t]$ il existe $\eta \in (0, \frac{1}{L})$ avec $s + \eta \leq t$ tel que (u, x_u) et (u, y_u) appartiennent à un ensemble compact pour tout $u \in [s, s + \eta]$.

Pour chaque u , on aura

$$\begin{aligned} |x(u) - y(u)| &= \left| \int_s^u (f(w, x_w) - f(w, y_w)) dw \right| \\ &\leq \int_s^{s+\eta} |f(w, x_w) - f(w, y_w)| dw \\ &\leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} \|x_w - y_w\|_{-h, 0} \\ &\leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} \max_{\theta \in [-h, 0]} |x(w + \theta) - y(w + \theta)|. \end{aligned}$$

Comme $x(s) = y(s)$, alors

$$|x(u) - y(u)| \leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} |x(w) - y(w)|.$$

De plus étant donné que $L\eta < 1$ alors

$$\max_{w \in [s, s+\eta]} |x(w) - y(w)| = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse $s = \inf\{u \in [\sigma, \sigma + \alpha] : x(u) \neq y(u)\}$. Par conséquent $x(t) = y(t)$, pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$. ■

2.3 Dépendance Continue des Solutions par Rapport aux Données Initiales

Le théorème suivant assure la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales.

Théorème 2.3 (Dépendance continue). *Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ un ouvert, $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et x^0 une solution de l'EDR(f^0) en (σ^0, ϕ^0) qu'on suppose qu'elle existe et est unique sur $[\sigma^0 - h, b]$. Considérons l'ensemble compact définie par: $W^0 = \{(t, x_t^0) : t \in [\sigma^0, b]\}$ et soit $V^0 \subseteq \Omega$ un voisinage de W^0 tel que $f^0 \in C^0(V^0, \mathbb{R}^n)$. Si $\{(\sigma^k, \phi^k, f^k)\}_{k \geq 1}$, est une suite telle que $\sigma^k \rightarrow \sigma^0$, $\phi^k \rightarrow \phi^0$ et $\|f^k - f^0\|_{V^0} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, alors il existe k^0 tel que la solution $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ de l'EDR(f^k) en (σ^k, ϕ^k) pour $k \geq k^0$ existe et est définie sur l'intervalle $[\sigma^k - h, b]$ et $x^k \rightarrow x^0$ uniformément sur $[\sigma^0 - h, b]$.*

Remarque 2.4. Comme les solutions x^k ne sont pas toutes nécessairement définies sur $[\sigma^0 - h, b]$, alors par: $x^k \rightarrow x^0$ uniformément sur $[\sigma^0 - h, b]$, on veut dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $k_1(\epsilon)$ tel que pour tout $k \geq k_1(\epsilon)$, x^k est définie sur $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$ et $x^k \rightarrow x^0$ uniformément sur $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$.

Preuve. Soit $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Posons $W = W^0 \cup \{(\sigma^k, \phi^k) : k \geq k^0\}$. On a $\sigma^k \rightarrow \sigma^0, \phi^k \rightarrow \phi^0$, alors $\{(\sigma^k, \phi^k) : k \geq k^0\}$ est compact, d'où W est compact. Comme $(\sigma^0, \phi^0) \in W^0 \subset \Omega$ et $\sigma^k \rightarrow \sigma^0, \phi^k \rightarrow \phi^0$, pour k^0 suffisamment grand choisissons α, β tel que V^1 soit un voisinage de $\{(\sigma^k, \phi^k) : k \geq k^0\}$ et $V^1 \subset V^0$. Il existe alors un voisinage $V = V^1 \cup V^0 \subset V^0 \subset \Omega$ de W telle que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$. D'après le Théorème 2.1, comme $W \subseteq \Omega$ compact, pour $k \geq k^0$ il existe un voisinage $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $(\sigma^k, \phi^k) \in W$ et $f \in U$ il existe une solution $x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ du problème (2.3) en (σ^k, ϕ^k) définie sur l'intervalle $[\sigma^k - h, \sigma^k + \alpha]$, où α est indépendante de k . Considérons l'opérateur

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

tel que

$$\begin{aligned} T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)(t) &= 0, \quad \forall t \in [-h, 0], \\ y^k(t) &= T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)(t) = \int_0^t f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}_{\sigma^k+s}^k + y_s^k) ds, \quad \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Alors, d'après le Lemme 2.5, il existe un compact K de $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ tel que

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \rightarrow K,$$

est continue. On a $y^k(t) = x^k(\sigma^k + t) - \tilde{\phi}^k(\sigma^k + t) \in K$ qui est compact, alors la suite $\{y^k\}_{k \geq k^0}$ contient une sous suite $\{y^n\}_{n \geq k^0}$ qui converge uniformément vers un y dans $[-h, \alpha]$. D'après le Lemme 2.5 T est continue, d'où

$$y^n = T(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n) \rightarrow T(\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0) = y^0,$$

où, $y^0(t) = x^0(\sigma^0 + t) - \tilde{\phi}^0(\sigma^0 + t)$. La suite $\{y^k\}_k$ converge uniformément vers y^0 sur $[-h, \alpha]$. Par conséquent x^k converge uniformément vers x^0 sur $[\sigma^0 - h, \sigma^0 + \alpha]$. Si $x^k \rightarrow x^0$ uniformément sur $[\sigma^0 - h, b]$, montrons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k_1(\epsilon)$ telle que x^k est définie sur $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$ pour $k \geq k_1(\epsilon)$ et $x^k \rightarrow x^0$ uniformément sur $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$. On a x^k est définie sur $[\sigma^k - h, b]$ et converge uniformément vers x^0 sur $[\sigma^0 - h, b]$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $k_0(\epsilon)$ tel que

$$\forall k \geq k_0(\epsilon) \Rightarrow |x^k - x^0| \leq \epsilon. \quad (2.12)$$

D'autre part $\sigma^k \rightarrow \sigma^0$ sur \mathbb{R} entraîne pour tout $\epsilon > 0$ il existe $k'_0(\epsilon)$ tel que

$$\forall k \geq k'_0(\epsilon) \Rightarrow |\sigma^k - \sigma^0| \leq \epsilon,$$

donc

$$\sigma^k \leq \sigma^0 + \epsilon,$$

il en résulte que

$$[\sigma^0 - h + \epsilon, b] \subseteq [\sigma^k - h, b] \quad \text{et} \quad [\sigma^0 - h + \epsilon, b] \subseteq [\sigma^0 - h, b]. \quad (2.13)$$

Pour tout $\epsilon > 0$, choisissons $k_1(\epsilon) = \max(k_0(\epsilon), k'_0(\epsilon))$, dans ce cas (2.12) et (2.13) sont satisfaites pour $k \geq k_1(\epsilon)$. Par conséquent pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k_1(\epsilon)$ telle que x^k est définie sur $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$ pour $k \geq k_1(\epsilon)$ et $x^k \rightarrow x^0$ uniformément sur $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$. ■

2.4 Prolongement de la Solution

Dans le paragraphe 2 on a montré que sous certaines conditions sur f l'EDR(f) admet une solution locale. Dans ce paragraphe on établit des conditions suffisantes pour avoir une solution maximale.

Définition 2.8. On suppose que la fonction f dans l'équation (2.2) est continue et soit x une solution de cette équation définie sur l'intervalle $[\sigma - h, a)$, $a > \sigma$. On dit que \hat{x} est un prolongement de x s'il existe $b > a$ tel que \hat{x} soit définie sur $[\sigma - h, b)$, coïncide avec x sur $[\sigma - h, a)$ et vérifie l'équation (2.2) sur $[\sigma, b)$.

Définition 2.9. On dira que x est une solution maximale sur $[\sigma - h, a)$, $a > 0$ si x n'admet pas de prolongement sur cet intervalle. On dira dans ce cas que $[\sigma - h, a)$ est l'intervalle d'existence maximal de la solution x .

Le théorème suivant nous donne une caractérisation importante de la solution maximale.

Théorème 2.4 (Prolongement). *Soient Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Si x est une solution maximale de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, b)$, alors pour tout compact W dans Ω , il existe t_W tel que $(t, x_t) \notin W$ pour tout $t_W \leq t < b$.*

Preuve. Supposons $b < \infty$ et considérons d'abord le cas $h = 0$. Comme W est compact d'après l'étape 2 du Théorème 2.1 il existe $\alpha > 0$ tel que l'équation (2.2) admet une solution en tout point $(c, y) \in W$ sur $[c, c + \alpha]$. Supposons maintenant le contraire c'est à dire qu'il existe une suite $(t_k, x_{t_k}) \in W$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $(b, y) \in W$ telle que $t_k \rightarrow b^-$, $x_{t_k} \rightarrow y$ quand $k \rightarrow \infty$. D'après le Théorème 2.1 il existe un voisinage $V \subseteq \Omega$ de (b, y) tel que f est bornée dans V . La solution x est alors uniformément continue sur $[\sigma, b)$ et $x(t) \rightarrow y$ quand $t \rightarrow b^-$. La solution $x(t)$ admet dans ce cas un prolongement sur un certain intervalle $[\sigma, b + \alpha)$ ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Considérons maintenant le cas $h > 0$ et supposons qu'il existe une suite des nombres réels $t_k \rightarrow b^-$ quand $k \rightarrow \infty$ et une fonction $\psi \in C$ telles que

$$(t_k, x_{t_k}) \in W, \quad (b, \psi) \in W, \quad (t_k, x_{t_k}) \rightarrow (b, \psi), \quad (2.14)$$

quand $k \rightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\theta \in [-h, -\epsilon]} |x_{t_k}(\theta) - \psi(\theta)| \right) = 0. \quad (2.15)$$

Puisque $x_{t_k}(\theta) = x(t_k + \theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0]$ et $t_k \rightarrow b^-$ quand $k \rightarrow \infty$, alors comme x est continue, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{t_k}(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k + \theta) = x(b + \theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0)$. Par conséquent, d'après (2.15) on obtient $x(b + \theta) = \psi(\theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0)$. Donc $(t_k, x_{t_k}) \rightarrow (b, x_b)$ quand $k \rightarrow \infty$. (2.14) entraîne que $(t_k, x_{t_k}) \rightarrow (b, x_b) \in W$. D'après le Théorème 2.1 il existe $\alpha' > 0$ tel que l'équation (2.2) admet une solution en (b, x_b) sur $(b, b + \alpha')$. Ce qui contredit l'hypothèse. ■

Corollaire 2.1. *Supposons que Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Soient x une solution maximale de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, b)$ et W l'adhérence de l'ensemble $\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}$ dans $\mathbb{R} \times C$. Si W est compact alors il existe une suite $\{t_k\}$ de nombres réels, $t_k \rightarrow b^-$ quand $k \rightarrow \infty$ telle que (t_k, x_{t_k}) tend vers $\partial\Omega$ quand $k \rightarrow \infty$. Si $h > 0$, alors il existe $\psi \in C$ tel que $(b, \psi) \in \partial\Omega$ et $(t, x_t) \rightarrow (b, \psi)$ quand $t \rightarrow b^-$.*

Preuve. Si W est compact d'après le Théorème 2.4, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(t_k, x_{t_k}) \in \Omega$, $(t_k, x_{t_k}) \notin W$ pour tout $t_{k_0} \leq t_k < b$ et $t_k \rightarrow b^-$ quand $k \rightarrow \infty$, et donc la limite de (t_k, x_{t_k}) tend vers $\partial\Omega$ quand $k \rightarrow \infty$. D'où, la première partie du corollaire. Si $h > 0$, supposons qu'il existe une suite des nombres réels $t_k \rightarrow b^-$ quand $k \rightarrow \infty$ et une fonction $\psi \in C$ telles que

$$(t_k, x_{t_k}) \in W, \quad (b, \psi) \in W, \quad (t_k, x_{t_k}) \rightarrow (b, \psi), \quad (2.16)$$

quand $k \rightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\theta \in [-h, -\epsilon]} |x_{t_k}(\theta) - \psi(\theta)| \right) = 0. \quad (2.17)$$

Puisque $x_{t_k}(\theta) = x(t_k + \theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0]$ et $t_k \rightarrow b^-$ quand $k \rightarrow \infty$, et comme x est continue, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{t_k}(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k + \theta) = x(b + \theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0)$. Par conséquent, d'après (2.17) on obtient

$x(b + \theta) = \psi(\theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0)$. Donc $(t_k, x_{t_k}) \rightarrow (b, x_b)$ quand $k \rightarrow \infty$. D'après (2.16) on déduit que $(t_k, x_{t_k}) \rightarrow (b, x_b) \in W$. Le Théorème 2.1 entraîne l'existence d'un $\alpha' > 0$ tel que l'équation (2.2) admet une solution en (b, x_b) sur $(b, b + \alpha')$. Ce qui contredit l'hypothèse. x est donc une solution maximale de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, b)$. D'où $(t_k, x_{t_k}) \rightarrow (b, x_b) \in \Omega \setminus W$. Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times C$, on obtient $(b, x_b) \in \partial\Omega$ et $(t, x_t) \rightarrow (b, x_b)$ quand $t \rightarrow b^-$. ■

Théorème 2.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times C$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction complètement continue; c'est à dire que f est continue et envoie tout ensemble fermé borné de Ω dans un ensemble borné de \mathbb{R}^n , et x est une solution maximale de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, b)$. Alors, pour chaque ensemble fermé borné U dans Ω , il existe t_U tel que $(t, x_t) \notin U$ pour $t_U \leq t < b$.*

Preuve. Dans le cas $h = 0$, U est fermé borné dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, donc U est compact dans Ω . Le résultat découle du Théorème 2.4.

Considérons maintenant le cas $h > 0$. Supposons le contraire, dans ce cas il existe une suite réelle $(t_k)_k$, $t_k \rightarrow b^-$ quant $k \rightarrow \infty$ elle que $(t_k, x_{t_k}) \in U$ pour tout k . Comme $h > 0$, il en résulte que l'ensemble $\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}$ est borné. Par conséquent, puisque $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est complètement continue, il existe une constante M telle que $|f(\tau, \phi)| \leq M$ pour tout $(\tau, \phi) \in \overline{\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}}$. L'équation intégrale (2.4) donne

$$|x(t + \tau) - x(t)| = \left| \int_t^{t+\tau} f(s, x_s) ds \right| \leq M\tau,$$

pour tout $t, t + \tau < b$. Par suite, x est uniformément continue sur $[\sigma - h, b)$. D'après le Théorème d'Ascoli l'ensemble $\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}$ est compact dans Ω . Ce qui contredit le Théorème 2.4. ■

Chapitre 3

Equations Différentielles à Retard Dépendant de l'Etat

3.1 Position du Problème

Beaucoup de modèles intervenants en dynamique des populations dans lesquels on tient compte de l'effet de la réponse de rétro-action font appel à un retard non pas constant mais fonctionnel. Dans beaucoup de cas on est amené à considérer des équations à retard fonctionnelle du type:

$$\dot{x}(t) = g(x(t - r(x_t))), \quad (3.1)$$

où $g : O \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $r : U \subseteq C \rightarrow [-h, 0]$ le retard fonctionnelle défini sur un ouvert U de $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ à valeur dans $[-h, 0]$, où $h > 0$.

En utilisant les notations du chapitre 2 sur les équations différentielles à retard indépendant de l'état, l'équation (3.1) peut être ré-écrire sous la forme suivante:

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \quad t > 0, \quad (3.2)$$

à laquelle on associe la donnée initiale

$$x_0 = \phi \in C,$$

où,

$$f = g \circ ev \circ (id \times (-r)), \quad (3.3)$$

et ev est l'application d'évaluation définie par

$$ev : C \times [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(\psi, s) \rightarrow ev(\psi, s) = \psi(s).$$

La difficulté principale à laquelle on est confrontée quand on étudie les équations différentielles à retard dépendant de l'état du type (3.2) est que les

résultats classiques sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles à retard indépendant de l'état ne peuvent pas s'appliquer. En effet, le Théorème 2.2 du chapitre 2 impose que f soit localement lipschitzienne sur U . Si on suppose donc que g et r sont localement lipschitziennes, la relation (3.3) imposera que l'application d'évaluation ev est également localement lipschitzienne. Voyons maintenant ce que implique une telle hypothèse. En effet, on a alors dans un voisinage de $C \times [-h, 0]$

$$|ev(\phi, s) - ev(\psi, t)| \leq L(\|\phi - \psi\|_{-h,0} + |s - t|),$$

ce qui donne, puisque $ev(\phi, s) = \phi(s)$,

$$|\phi(s) - \psi(t)| \leq L(\|\phi - \psi\|_{-h,0} + |s - t|).$$

Si $\phi = \psi$, on obtient

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq L|s - t|.$$

Il en résulte que ϕ est localement lipschitzienne. On est donc amené à changer l'espace des phases $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Une idée pour contourner cette difficulté sera alors d'imposer que g et r soient de classe C^1 . Dans ce cas pour obtenir que f soit également de classe C^1 il faudrait, d'après la relation (3.3) que l'application d'évaluation ev soit également de classe C^1 . Or si ev est de classe C^1 alors

$$D_2 ev(\phi, s)1 = \dot{\phi}(s),$$

où $D_2 ev(\phi, s)$ est la dérivée partielle de ev par rapport à s . On obtient alors que ϕ est de classe C^1 . On est donc amené à reformuler le problème de valeur initiale (3.2) dans le nouvel espace $C^1 = C^1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Munissons C^1 de la norme

$$\|\phi\|_{-h,0}^1 = \|\phi\|_{-h,0} + \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0}.$$

C^1 muni de cette norme est un espace de Banach. Dans ce cas l'application ev est continument différentiable. Si on suppose donc que g et r sont continument différentiables alors l'application $f = g \circ ev \circ (id \times (-r))$ sera également continument différentiable de U dans \mathbb{R}^n .

Considérons l'équation (3.2), avec $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continument différentiable où $U \subset C^1$ est un ouvert. Une solution x de l'équation (3.2) est donc une application $x : [-h, t_e) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < t_e \leq +\infty$ continument différentiable et telle que la courbe $[0, t_e) \ni t \mapsto x_t \in C^1$ soit elle même continument différentiable. En particulier la continuité en $t = 0$ entraîne

$$\dot{\phi}(0) = f(\phi),$$

relation qui n'est pas satisfaite par tous les éléments ϕ de U . La relation précédente nous force donc à chercher la solution non pas dans un ouvert U de C^1 mais dans l'ensemble

$$X = X_f = \{ \phi \in U : \dot{\phi}(0) = f(\phi) \}. \quad (3.4)$$

Définissons l'application linéaire et continue $p : C^1 \ni \phi \mapsto \dot{\phi}(0) \in \mathbb{R}^n$. Il est clair que $X = (p - f)^{-1}(0)$. On est donc amené à formuler le problème (3.2) comme suite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t), & t > 0, \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases} \quad (3.5)$$

Pour avoir un semiflot sur X avec des propriétés de différentiabilité il faut imposer des hypothèses supplémentaires sur f . Dans la suite du chapitre on supposera que:

- (H1)** $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continûment différentiable sur l'ouvert $U \subset C^1$.
- (H2)** Chaque dérivée $Df(\phi)$, $\phi \in U$, admet un prolongement linéaire continu $D_e f(\phi) : C \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- (H3)** Pour tout $\phi \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ et $L \geq 0$ tels que pour tout $\varphi, \psi \in V$, $|f(\varphi) - f(\psi)| \leq L \|\varphi - \psi\|_{-h,0}$.

Proposition 3.1. *Si (H1), (H2) sont vérifiées et $X \neq \emptyset$ alors X définie par (3.4) est une sous-variété de codimension n dans U et dans C^1 .*

Preuve. On a $X = (p - f)^{-1}(0)$. Il suffit d'établir que chaque dérivée

$$(p - Df)(\phi) : C^1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi \in X,$$

est surjective, dans ce cas le noyau fermé est de codimension n dans C^1 .

Soit $\phi \in X$. Montrons que $(p - Df(\phi))(C^1) \subset \mathbb{R}^n$ contient une base de \mathbb{R}^n . Soit b_1, b_2, \dots, b_n une base de \mathbb{R}^n . On a $\det(b_1, b_2, \dots, b_n) \neq 0$ si et seulement si (b_1, b_2, \dots, b_n) sont linéairement indépendants et comme \det est une application continue, alors il existe un voisinage $(b_k + V)_{k=1}^n$ de $(b_k)_{k=1}^n$, et choisissons V un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ assez petit tels que les n composants du vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n (b_k + V)$ forment une base de \mathbb{R}^n .

D'après l'hypothèse (H2) et puisque $D_{ef}(\phi)$ est continue en $0 \in C$, il existe un voisinage W de $0 \in C$ tel que

$$D_{ef}(\phi)(W) \subset V. \quad (3.6)$$

Soit $\epsilon > 0$ assez petit, définissons l'ensemble $W = \{\chi \in C : \|\chi\| < \epsilon\}$ et posons

$$b_1 = \left(\frac{\epsilon}{2h}, 0, \dots, 0\right), b_2 = \left(0, \frac{\epsilon}{2h}, 0, \dots, 0\right), \dots, b_n = \left(0, \dots, 0, \frac{\epsilon}{2h}\right),$$

qui est une base de \mathbb{R}^n telle que $|b_k| = \frac{\epsilon}{2h}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Définissons maintenant les fonctions

$$\chi_1(\theta) = \left(\frac{\epsilon}{2h}\theta, 0, \dots, 0\right), \chi_2(\theta) = \left(0, \frac{\epsilon}{2h}\theta, 0, \dots, 0\right), \dots, \chi_n(\theta) = \left(0, \dots, 0, \frac{\epsilon}{2h}\theta\right).$$

On a $\|\chi_k\| = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \frac{\epsilon}{2h} |\theta| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, c'est à dire que $\chi_k \in W$ et $p(\chi_k) = \dot{\chi}_k(0) = b_k$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. D'après la relation (3.6) et puisque $\chi_k \in W$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$D_{ef}(\phi)(\chi_k) \in V.$$

Etant donné que $D_{ef}(\phi)$ est linéaire et $(-\chi_k) \in W$ il vient,

$$-D_{ef}(\phi)(\chi_k) = D_{ef}(\phi)(-\chi_k) \in V.$$

Par suite,

$$(p - D_{ef}(\phi))(\chi_k) = p(\chi_k) - D_{ef}(\phi)(\chi_k) = b_k - D_{ef}(\phi)(\chi_k) \in b_k + V,$$

pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Finalement on obtient que

$$((p - D_{ef}(\phi))(\chi_1), (p - D_{ef}(\phi))(\chi_2), \dots, (p - D_{ef}(\phi))(\chi_n)) \in \Pi_{k=1}^n (b_k + V),$$

est une base de \mathbb{R}^n . D'où le résultat. ■

3.2 Existence et Unicité

3.2.1 Existence de la Solution

Dans tout le reste de ce chapitre on supposera que f satisfait les hypothèses (H1)-(H2)-(H3). Commençons d'abord par donner une formulation intégrale adéquate au problème (3.5).

Lemme 3.1. Soient $T > 0$ et $\phi \in X$. Alors, $x \in C^1([-h, T], \mathbb{R}^n) = C^1([-h, T])$ est une solution du problème (3.5) si et seulement si $x_s \in U$ pour tout $s \in [0, T]$ et x est une solution du problème intégral

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s) ds, & t \in [0, T], \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases} \quad (3.7)$$

Preuve. Condition nécessaire: Soit $x \in C^1([-h, T])$ une solution du problème (3.5), alors $x_t \in U$ pour tout $t \in [0, T]$ et

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t), & t \in [0, T], \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases}$$

Par intégration, on obtient

$$\int_0^t \dot{x}(s) ds = x(t) - x(0) = \int_0^t f(x_s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Comme $x(0) = \phi(0)$ on a

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s) ds, & t \in [0, T], \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases}$$

Condition suffisante: Soit $x \in C^1([-h, T])$ une solution de l'équation intégrale (3.7). Alors,

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x_s) ds.$$

Comme $f(x_t)$ est continue en t , en appliquant le théorème de la moyenne, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x_s) ds = f(x_t).$$

D'où le résultat. ■

Pour $T > 0$, on désignera par $C_0^1([-h, T], \mathbb{R}^n) = C_0^1([-h, T])$ le sous-espace fermé des applications $y \in C^1$, qui sont nulles sur $[-h, 0]$. Posons

$$x = y + \hat{\phi},$$

telle que

$$\begin{cases} \hat{\phi}(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0), \\ \hat{\phi}(t) = \phi(0) + t\dot{\phi}(0), & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (3.8)$$

Le lemme suivant réduit l'étude de l'existence locale de la solution du problème intégral (3.7) à celle d'une équation intégrale avec condition initiale nulle.

Lemme 3.2. *Posons $x = y + \hat{\phi}$. Alors $x \in C^1([-h, T])$ est une solution du problème intégral (3.7) associé à (3.5) si et seulement si $y \in C_0^1([-h, T])$ est une solution du problème intégral*

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(\phi)) ds, & t \in [0, T], \\ y_0 = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

Preuve. Condition nécessaire: Soit $x \in C^1([-h, T])$ une solution du problème (3.7) tel que $x = y + \hat{\phi}$. On a alors l'équation suivante en y

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) - \hat{\phi}(t) = \int_0^t f(x_s) ds - t\dot{\phi}(0) \\ &= \int_0^t f(y_s + \hat{\phi}_s) ds - t\dot{\phi}(0) \\ &= \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - \dot{\phi}(0)) ds \\ &= \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(\phi)) ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$. De plus $y(t) = x(t) - \phi(t) = \phi(t) - \phi(t) = 0$ pour tout $t \in [-h, 0]$, d'où $y_0 = 0$. $y|_{[0, T]}$ est de classe C^1 telle que

$$\dot{y}(t) = f(y_t + \hat{\phi}_t) - \dot{\phi}(0), \quad \forall t \in (0, T],$$

avec

$$\dot{y}(0) = f(y_0 + \hat{\phi}_0) - \dot{\phi}(0) = f(\phi) - \dot{\phi}(0) = 0.$$

Par conséquent $y \in C_0^1([-h, T]) \subset C^1([-h, T])$.

Condition suffisante: Soit $y \in C_0^1([-h, T])$ une solution du problème intégral (3.9) avec $x = y + \hat{\phi}$, d'où pour tout $t \in [0, T]$

$$y(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(\phi)) ds = \int_0^t f(x_s) ds - t\dot{\phi}(0),$$

d'après (3.8) on obtient

$$x(t) = y(t) + \hat{\phi}(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s) ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$. D'après le Théorème de la moyenne on déduit que $x \in C^1([-h, T])$. ■

Remarque 3.1. D'après les lemmes 3.1 et 3.2, l'existence de la solution du problème (3.5) est équivalente à celle du problème intégral (3.9).

Lemme 3.3. Soit l'application linéaire continue

$$E_T : C^1([-h, 0]) \rightarrow C^1([-h, T]),$$

définie par

$$\begin{cases} E_T\phi(t) = \phi(t) & \text{pour } t \in [-h, 0), \\ E_T\phi(t) = \phi(0) + t\dot{\phi}(0) & \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Alors pour tout $\phi \in C^1([-h, 0])$,

$$\|E_T\phi\|_{-h, T}^1 \leq (1 + T) \|\phi\|_{-h, 0}^1.$$

Preuve. Soit $\phi \in C^1([-h, 0])$, on a

$$\begin{aligned} E_T\phi : [-h, T] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto E_T\phi(t). \end{aligned}$$

Etant donné que

$$E_T\phi = \hat{\phi}|_{[-h, T]}, \quad \forall \phi \in C^1,$$

on a

$$\|E_T\phi\|_{-h,T}^1 = \max_{t \in [-h,T]} |\hat{\phi}(t)| + \max_{t \in [-h,T]} \left| \dot{\hat{\phi}}(t) \right|. \quad (3.10)$$

D'après (3.8) on a

$$\left| \hat{\phi}(t) \right| = |\phi(t)| \leq \|\phi\|_{-h,0}, \quad \forall t \in [-h, 0),$$

$$\left| \hat{\phi}(t) \right| = \left| \phi(0) + t\dot{\phi}(0) \right| \leq \|\phi\|_{-h,0} + T \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0}, \quad \forall t \in [0, T],$$

ce qui donne, pour tout $t \in [-h, T]$

$$\left| \hat{\phi}(t) \right| \leq \|\phi\|_{-h,0} + T \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0}. \quad (3.11)$$

De plus

$$\left| \dot{\hat{\phi}}(t) \right| \leq \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0}, \quad \forall t \in [-h, T]. \quad (3.12)$$

Les relations (3.10), (3.11) et (3.12) entraînent que

$$\begin{aligned} \|E_T\phi\|_{-h,T}^1 &\leq \|\phi\|_{-h,0} + \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0} + T \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0} \\ &\leq \left(\|\phi\|_{-h,0} + \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0} \right) + T \left(\|\phi\|_{-h,0} + \left\| \dot{\phi} \right\|_{-h,0} \right) \\ &= (1 + T) \|\phi\|_{-h,0}^1. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

L'hypothèse (H3) entraîne le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soit $\psi \in X$, il existent $r(\psi) > 0$ et $L \geq 0$ tels que*

$$V_\psi = \psi + (C^1([-h, 0]))_{r(\psi)},$$

est une partie de U et

$$|f(\phi) - f(\chi)| \leq L \|\phi - \chi\|_{-h,0}, \quad \forall \phi, \chi \in V_\psi, \quad (3.13)$$

où $(C^1([-h, 0]))_{r(\psi)}$ est la boule ouverte dans $C^1([-h, 0])$, centrée en 0 et de rayon $r(\psi)$.

Proposition 3.2 Soit $\psi \in X$, pour tout $\epsilon > 0$, il existent $T = T(\epsilon) \in (0, \frac{1}{2L+1}]$ et $r = r(\epsilon) \in (0, r(\psi)]$ tels que pour tout $\phi \in \psi + (C^1([-h, 0]))_r$ et pour tout $t \in [0, T]$,

$$\hat{\phi}_t \in \psi_t + (C^1([-h, 0]))_\epsilon,$$

où $r(\psi)$ est donné par le Lemme 3.4.

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$, comme $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}$ sont uniformément continues sur $[-h, 1]$, alors il existe $T = T(\epsilon) \in (0, \frac{1}{2L+1}]$ tel que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\left\| \hat{\psi}_t - \hat{\psi}_0 \right\|_{-h,0}^1 \leq \min \left\{ r(\psi), \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

En particulier, puisque $\hat{\psi}_0 = \psi$ on a

$$\left\| \hat{\psi}_t - \psi \right\|_{-h,0}^1 \leq \min \left\{ r(\psi), \frac{\epsilon}{2} \right\}. \quad (3.14)$$

Donc,

$$\hat{\psi}_t \in V_\psi \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.15)$$

Pour $\phi \in V_\psi$ et $t \in [0, T]$ on

$$\left\| \hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t \right\|_{-h,0}^1 \leq \left\| \hat{\phi} - \hat{\psi} \right\|_{-h,T}^1 = \|E_T \phi - E_T \psi\|_{-h,T}^1,$$

d'où puisque E_T est linéaire

$$\left\| \hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t \right\|_{-h,0}^1 \leq \|E_T(\phi - \psi)\|_{-h,T}^1.$$

D'après le Lemme 3.3, on obtient

$$\left\| \hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t \right\|_{-h,0}^1 \leq (1 + T) \|\phi - \psi\|_{-h,0}^1. \quad (3.16)$$

Les relations (3.14) et (3.16) entraînent que

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\phi}_t - \psi \right\|_{-h,0}^1 &\leq \left\| \hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t \right\|_{-h,0}^1 + \left\| \hat{\psi}_t - \psi \right\|_{-h,0}^1 \\ &\leq (1 + T) \|\phi - \psi\|_{-h,0}^1 + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir $r = r(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2(1+T)}$. Dans ce cas on a pour tout $\phi \in \psi + (C^1([-h, 0]))_r$ et tout pour $t \in [0, T]$,

$$\left\| \hat{\phi}_t - \psi \right\|_{-h,0}^1 \leq \epsilon.$$

■

Le corollaire suivant ramène l'existence de la solution du problème (3.9) dans une boule de $C_0^1([-h, T])$.

Corollaire 3.1. *Soient $\psi \in X$ et posons*

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{r(\psi)}{2}, \quad T \in (0, T(\epsilon)], \quad r \in (0, r(\epsilon)], \\ \phi \in X_{\psi,r} &= X \cap (\psi + (C^1([-h, 0]))_r) \quad \text{et} \quad y \in (C_0^1([-h, T]))_\epsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Alors,

$$y_t + \hat{\phi}_t \in V_\psi = \psi + (C^1([-h, 0]))_{r(\psi)}, \quad \forall t \in [0, T],$$

où $r(\psi)$, $T(\epsilon)$ et $r(\epsilon)$ sont donnés par le Lemme 3.4 et la Proposition 3.2 respectivement.

Preuve. Soit l'application linéaire continue

$$j_T : C^1([-h, T]) \rightarrow C([0, T], C^1([-h, 0])),$$

définie par $j_T(y)(t) = y_t$. On a puisque $y \in (C_0^1([-h, T]))_\epsilon$

$$j_T(y) : [0, T] \ni t \mapsto y_t \in C^1([-h, 0]),$$

$$\|y_t\|_{-h,0}^1 \leq \|y\|_{-h,T}^1 < \epsilon. \quad (3.18)$$

De plus d'après la Proposition 3.2

$$j_T(E_T(\phi)) : [0, T] \ni t \mapsto \hat{\phi}_t \in C^1([-h, 0]),$$

$$\hat{\phi}_t \in \psi + (C^1([-h, 0]))_\epsilon. \quad (3.19)$$

Les relations (3.18) et (3.19) entraînent que

$$\left\| y_t + \hat{\phi}_t - \psi \right\|_{-h,0}^1 \leq \|y_t\|_{-h,0}^1 + \left\| \hat{\phi}_t - \psi \right\|_{-h,0}^1 < 2\epsilon,$$

mais d'après (3.17) on a $2\epsilon = r(\psi)$ d'où

$$y_t + \hat{\phi}_t \in V_\psi, \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.20)$$

■

Corollaire 3.2. Soient $(\phi, y) \in X_{\psi, r} \times (C_0^1([-h, T]))_\epsilon$ et définissons l'application

$$\begin{cases} R_{T_r}(\phi, y)(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - \dot{\phi}(0)) ds, & s \in [0, T], \\ R_{T_r}(\phi, y)(t) = 0, & t \in [-h, 0), \end{cases} \quad (3.21)$$

alors $R_{T_r}(\phi, y) \in C_0^1([-h, T])$, autrement dit

$$R_{T_r} : X_{\psi, r} \times (C_0^1([-h, T]))_\epsilon \rightarrow C_0^1([-h, T]).$$

où ϵ , T et r sont donnés par le Corollaire 3.1.

Preuve. Notons $R_{T_r}(\phi, y) = z$. La restriction $z|_{[0, T]}$ est de classe C^1 avec

$$\dot{z}(t) = f(y_t + \hat{\phi}_t) - \dot{\phi}(0), \quad (0, T], \quad (3.22)$$

et d'après le théorème de la moyenne, la dérivée en $t = 0$ est

$$f(y_0 + \hat{\phi}_0) - \dot{\phi}(0) = f(0 + \phi) - \dot{\phi}(0) = 0,$$

d'où

$$\dot{z}(0) = 0.$$

Ceci entraîne que

$$R_{T_r}(\phi, y) = z \in C_0^1([-h, T]),$$

et

$$R_{T_r} : X_{\psi, r} \times (C_0^1([-h, T]))_\epsilon \rightarrow C_0^1([-h, T]).$$

■

Le Théorème suivant ramène la solution du problème (3.9) à celui d'un point fixe de l'application R_{T_r} .

Théorème 3.1. La solution sur $[0, T]$ du problème intégral (3.9) est le point fixe de l'application R_{T_r} , où T est celui du Corollaire 3.1.

Avant de démontrer le Théorème 3.1 nous aurons besoin de certains résultats préliminaires. Montrons d'abord que R_{T_r} est une application contractante par rapport à la deuxième variable.

Proposition 3.3. Soit $\psi \in X$, pour tout $\phi \in X_{\psi,r}$, $y, w \in (C_0^1([-h, T]))_\epsilon$ on a

$$\|R_{T_r}(\phi, y) - R_{T_r}(\phi, w)\|_{-h, T}^1 \leq \frac{2L}{2L+1} \|y - w\|_{-h, T}^1,$$

où ϵ, T et r sont donnés par le Corollaire 3.1 et L est la constante lipschitzienne de f .

Preuve. Posons $z = R_{T_r}(\phi, y)$ et $v = R_{T_r}(\phi, w)$. On a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|z - v\|_{-h, T}^1 = \max_{t \in [-h, T]} |z(t) - v(t)| + \max_{t \in [-h, T]} |\dot{z}(t) - \dot{v}(t)|. \quad (3.23)$$

En utilisant (3.21) on arrive à

$$\begin{aligned} |z(t) - v(t)| &= \left| \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(w_s + \hat{\phi}_s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(w_s + \hat{\phi}_s)| ds \\ &\leq T \max_{s \in [0, T]} |f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(w_s + \hat{\phi}_s)|. \end{aligned}$$

De plus, d'après (3.13)

$$|z(t) - v(t)| \leq TL \max_{s \in [0, T]} \|y_s - w_s\|_{-h, 0}^1.$$

D'autre part, il est clair que

$$\max_{s \in [0, T]} \|y_s - w_s\|_{-h, 0}^1 \leq \|y - w\|_{-h, T}^1,$$

ce qui entraîne

$$|z(t) - v(t)| \leq TL \|y - w\|_{-h, T}^1. \quad (3.24)$$

D'après (3.13), (3.22) on obtient,

$$|\dot{z}(t) - \dot{v}(t)| = |f(y_t + \hat{\phi}_t) - f(w_t + \hat{\phi}_t)| \leq L \|y_t - w_t\|_{-h, 0},$$

et puisque $\dot{y}(u) = \dot{w}(u) = 0$ pour tout $u \in [-h, 0]$,

$$\|y_t - w_t\|_{-h, 0} = \max_{\theta \in [-h, 0]} \left| \int_0^{t+\theta} (\dot{y}(s) - \dot{w}(s)) ds \right|$$

$$\leq \int_0^T |\dot{y}(s) - \dot{w}(s)| ds \leq T \max_{u \in [0, T]} |\dot{y}(u) - \dot{w}(u)| \leq T \|y - w\|_{-h, T}^1.$$

D'où

$$|\dot{z}(t) - \dot{v}(t)| \leq TL \|y - w\|_{-h, T}^1. \quad (3.25)$$

En combinant (3.23), (3.24) et (3.25) on obtient,

$$\|z - v\|_{-h, T}^1 \leq 2TL \|y - w\|_{-h, T}^1.$$

Comme $T \leq \frac{1}{2L+1}$, on obtient le résultat désiré. ■

Proposition 3.4. *Soient $\psi \in X$ et $\delta > 0$, il existent $T = T(\delta) \in (0, T(\epsilon)]$ et $r = r(\delta) \in (0, r(\epsilon)]$ tels que*

$$\forall \phi \in X_{\psi, r}, \|R_{T_r}(\phi, 0)\|_{-h, T}^1 \leq \delta, \quad (3.26)$$

où $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$.

Preuve. Soit $\epsilon(\delta) \in (0, \min\{r(\psi), \frac{\delta}{3L}\})$. La Proposition 3.2 permet de choisir $T_1 = T(\epsilon(\delta))$ et $r_1 = r(\epsilon(\delta))$ de sorte que

$$\hat{\phi}_t \in \psi + (C^1([-h, 0]))_{\epsilon(\delta)} \subset \psi + (C^1([-h, 0]))_{r(\psi)} = V_\psi,$$

pour tout $\phi \in \psi + (C^1([-h, 0]))_{r_1}$ et $t \in [0, T_1]$.

L'inégalité $\epsilon(\delta) < \frac{\delta}{3L}$ permet de choisir $T = T(\delta) \in (0, T_1]$ et $r = r(\delta) \in (0, r_1]$ suffisamment petits tels que,

$$T \left(Lr(\psi) + |f(\psi)| + \left| \dot{\psi}(0) \right| + r \right) + L(1 + T)r + L\epsilon(\delta) + r < \delta. \quad (3.27)$$

Soient $\phi \in X_{\psi, r}$, $z = R_{T_r}(\phi, 0)$ et $t \in [0, T]$, on a d'une part

$$|z(t)| \leq \int_0^T |f(\hat{\phi}_s)| ds + T \left| \dot{\phi}(0) \right| \leq T \left(\sup_{\chi \in V_\psi} |f(\chi)| + \left| \dot{\phi}(0) \right| \right). \quad (3.28)$$

D'autre part puisque $\phi \in X_{\psi, r}$

$$\left| \dot{\phi}(0) \right| \leq \left| \dot{\phi}(0) - \dot{\psi}(0) \right| + \left| \dot{\psi}(0) \right| \leq \|\phi - \psi\|_{-h, 0}^1 + \left| \dot{\psi}(0) \right| \leq r + \left| \dot{\psi}(0) \right|. \quad (3.29)$$

De plus (3.13) entraine pour tout $\chi \in V_\psi$

$$\begin{aligned} |f(\chi)| &\leq |f(\chi) - f(\psi)| + |f(\psi)| \\ &\leq L \|\chi - \psi\|_{-h,0}^1 + |f(\psi)| \leq Lr(\psi) + |f(\psi)|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En combinant (3.28), (3.29) et (3.30) il vient,

$$|z(t)| \leq T \left(Lr(\psi) + |f(\psi)| + \left| \dot{\psi}(0) \right| + r \right). \quad (3.31)$$

D'un autre coté

$$\begin{aligned} |\dot{z}(t)| &= \left| f(\hat{\phi}_t) - \dot{\phi}(0) \right| \\ &\leq \left| f(\hat{\phi}_t) - f(\hat{\psi}_t) \right| + \left| f(\hat{\psi}_t) - f(\hat{\psi}_0) \right| + \left| f(\hat{\psi}_0) - \dot{\phi}(0) \right| \\ &= \left| f(\hat{\phi}_t) - f(\hat{\psi}_t) \right| + \left| f(\hat{\psi}_t) - f(\hat{\psi}_0) \right| + \left| \dot{\psi}(0) - \dot{\phi}(0) \right| \\ &\leq L \left\| \hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t \right\|_{-h,0}^1 + L \left\| \hat{\psi}_t - \hat{\psi}_0 \right\|_{-h,0}^1 + \|\psi - \phi\|_{-h,0}^1. \end{aligned}$$

En combinant la dernière inégalité avec (3.16) et puisque $\hat{\psi}_t \in \psi + (C^1([-h, 0]))_{\epsilon(\delta)}$ on arrive à

$$|\dot{z}(t)| \leq L(1+T) \|\phi - \psi\|_{-h,0}^1 + L\epsilon(\delta) + \|\psi - \phi\|_{-h,0}^1.$$

De plus comme $\phi \in X_{\psi,r}$ alors

$$|\dot{z}(t)| \leq L(1+T)r + L\epsilon(\delta) + r. \quad (3.32)$$

Finalement les inégalités (3.27), (3.31) et (3.32) entraînent

$$\|z\|_{-h,T}^1 \leq T \left(Lr(\psi) + |f(\psi)| + \left| \dot{\psi}(0) \right| + r \right) + L(1+T)r + L\epsilon(\delta) + r < \delta.$$

■

Les Propositions 3.3 et 3.4 entraînent le corollaire suivant.

Corollaire 3.3. *Pour tout $\epsilon > 0$, posons $\lambda = \frac{2L}{2L+1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2L}{2L+1} \right) \in (0, 1)$, $\delta = \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{2L}{2L+1} \right)$, $T = T(\delta)$ et $r = r(\delta)$. Alors l'application $R_{T,r}$ envoie l'ensemble $X_{\psi,r} \times \overline{(C_0^1([-h, T]))_{\lambda\epsilon}}$ de $X \times C_0^1([-h, T])$ dans une boule fermée $\overline{(C_0^1([-h, T]))_{\lambda\epsilon}}$ de $(C_0^1([-h, T]))_\epsilon$.*

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$, en utilisant la Proposition 3.4 pour $\delta = \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{2L}{2L+1}\right)$ et en appliquant la Proposition 3.3 sachant que $\phi \in X_{\psi,r} \subset X_{\psi,r(\psi)}$, $y \in \overline{(C_0^1([-h, T]))}_{\lambda\epsilon}$, $r \leq r(\epsilon)$ et $T \leq T(\epsilon)$, on a

$$\begin{aligned} \|R_{T_r}(\phi, y)\|_{-h, T}^1 &\leq \|R_{T_r}(\phi, y) - R_{T_r}(\phi, 0)\|_{-h, T}^1 + \|R_{T_r}(\phi, 0)\|_{-h, T}^1 \\ &\leq \frac{2L}{2L+1} \|y\|_{-h, T}^1 + \delta \\ &\leq \frac{2L}{2L+1} \lambda\epsilon + \delta \\ &\leq \frac{2L}{2L+1} \epsilon + \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{2L}{2L+1}\right). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\|R_{T_r}(\phi, y)\|_{-h, T}^1 \leq \lambda\epsilon.$$

■

Proposition 3.5. *L'application R_{T_r} est de classe C^1 .*

Preuve. Définissons d'abord les applications linéaires continues suivantes

$$\begin{aligned} E_T : \quad & C^1([-h, 0]) \rightarrow C^1([-h, T]), \\ E_T \phi(t) = \quad & \begin{cases} \phi(t), & t \in [-h, 0] \\ \phi(0) + t\dot{\phi}(0), & t \in [0, T]. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_T : C^1([-h, T]) &\rightarrow C([0, T], C^1([-h, 0])), \\ j_T(y)(t) &= y_t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_n : \mathbb{R}^n &\rightarrow C^1([0, T]), \\ j_n \xi(t) &= \xi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_T : C([0, T]) &\rightarrow C^1([0, T]), \\ I_T(y)(t) &= \int_0^t y(s) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^T : \quad & C^1([0, T]) \rightarrow C^1([-h, T]), \\ E^T z(t) = \quad & \begin{cases} z(t), & t \in [0, T], \\ z(0) + t\dot{z}(0), & t \in [-h, 0]. \end{cases} \end{aligned}$$

Considérons l'ensemble ouvert

$$U_T = \{\eta \in C([0, T], C^1([-h, 0])) : \eta(t) \in U \text{ pour tout } t \in [0, T]\},$$

et l'opérateur de classe C^1

$$f_T : U_T \ni \eta \mapsto f \circ \eta \in C([0, T]).$$

R_{T_r} est alors une composition des 9 applications linéaires et continues suivantes:

$$\begin{aligned} X \times C_0^1([-h, T]) \ni (\phi, y) &\mapsto (\phi, y) \in C^1([-h, 0]) \times C_0^1([-h, T]), \\ C^1([-h, 0]) \times C_0^1([-h, T]) \ni (\phi, y) &\mapsto (E_T \phi, y, p\phi) \in C^1([-h, T]) \times C_0^1([-h, T]) \times \mathbb{R}^n, \\ C^1([-h, T]) \times C^1([-h, T]) \times \mathbb{R}^n \ni (v, w, \xi) &\mapsto (v + w, \xi) \in C^1([-h, T]) \times \mathbb{R}^n, \\ j_T \times id : C^1([-h, T]) \times \mathbb{R}^n &\mapsto (C[0, T], C^1([-h, 0])) \times \mathbb{R}^n, \\ f_T \times id : (C[0, T], C^1([-h, 0])) \times \mathbb{R}^n &\mapsto C([0, T]) \times \mathbb{R}^n, \\ id \times j_n : C([0, T]) \times \mathbb{R}^n &\mapsto C([0, T]) \times C^1([0, T]), \\ C([0, T]) \times C^1([0, T]) \ni (a, b) &\mapsto a - b \in C([0, T]), \\ I_T : C([0, T]) &\mapsto C^1([0, T]), \\ E^T : C^1([0, T]) &\mapsto C^1([-h, T]), \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Preuve du Théorème 3.1. D'après la Proposition 3.3 le Corollaire 3.3 et la Proposition 3.5, l'application R_{T_r} est de classe C^1 et envoie la partie $X_{\psi, r} \times \overline{(C_0^1([-h, T]))_{\lambda\epsilon}}$ de $X \times C_0^1([-h, T])$ dans la boule fermée $\overline{(C_0^1([-h, T]))_{\lambda\epsilon}}$ où $\lambda = \frac{2L}{2L+1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2L}{2L+1}\right)$. De plus R_{T_r} est contractante par rapport à la deuxième variable. Le Théorème (1.3) du chapitre 1 entraîne alors que l'application

$$Y_{T_r} : X_{\psi, r} \rightarrow C_0^1([-h, T]),$$

définie par

$$Y_{T_r}(\phi) = y = y^{(\phi)} \in (C_0^1([-h, T]))_{\lambda\epsilon} \quad \text{et} \quad R_{T_r}(\phi, y) = y^{(\phi)},$$

est de classe C^1 . D'où pour tout $\phi \in X_{\psi,r}$ on a $y^\phi \in (C_0^1([-h, T]))_{\lambda\epsilon}$ est un point fixe de l'application R_{T_r} et satisfait

$$y(t) = R_{T_r}(\phi, y)(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - \dot{\phi}(0)) ds,$$

avec $y_0 = 0$. Pour tout $\phi \in X_{\psi,r}$, y^ϕ est une solution locale du problème intégral (3.9) ■

Le Théorème 3.1 entraîne le résultat d'existence suivant.

Proposition 3.6. $x^{(\phi)} = y^{(\phi)} + \hat{\phi} |_{[-h, T]}$ est une solution locale du problème (3.5).

Preuve. L'application

$$S_{T_r} : X_{\psi,r} \rightarrow C^1([-h, T]),$$

définie par

$$S_{T_r}(\phi) = x^{(\phi)} = y^{(\phi)} + \hat{\phi} |_{[-h, T]} = Y_{T_r}(\phi) + E_{T_r}\phi,$$

est de classe C^1 . Donc pour tout $\phi \in X_{\psi,r}$, $t \in [0, T]$ on a $x = x^{(\phi)} \in C^1([-h, T])$ et d'après le Corollaire 3.2 $x^{(\phi)}$ satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = y(t) + \hat{\phi}(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - \dot{\phi}(0)) ds + \hat{\phi}(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s) ds,$$

avec

$$x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [-h, 0].$$

C'est à dire que $x^{(\phi)}$ est une solution locale du problème intégral (3.7). Par conséquent, pour tout $\phi \in X_{\psi,r}$, $t \in [0, T]$, le Corollaire 3.1 entraîne alors que l'application $x = x^{(\phi)} \in C^1([-h, T])$ est une solution locale du problème (3.5). ■

3.2.2 Unicité de la Solution

Dans ce paragraphe on voudrai montrer l'unicité de la solution du problème (3.5).

Proposition 3.7. *Si $x : [-h, t_x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $y : [-h, t_y) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux solutions de l'équation (3.5) avec $x_0 = y_0$ et $t_x \leq t_y$. Alors $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in [-h, t_x)$.*

Preuve. Soit $x : [-h, t_x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $y : [-h, t_y) \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de l'équation (3.5) avec $x_0 = y_0$ et $t_x \leq t_y$, c'est-à-dire que

$$\forall \theta \in [-h, 0], \quad x(\theta) - y(\theta) = 0.$$

Il suffit de montrer que $x(t) = y(t)$, pour tout $t \in (0, t_x)$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x(t) \neq y(t)$, pour certain point $t \in (0, t_x)$. Alors,

$$s = \inf\{u \in [0, t_x) : x(u) \neq y(u)\},$$

satisfait

$$0 \leq s < t < t_x,$$

et

$$x(s) = y(s),$$

par conséquent

$$x_s = y_s. \tag{3.33}$$

D'après l'hypothèse (H3) il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x_s et $L \geq 0$ tel que,

$$|f(\varphi) - f(\chi)| \leq L \|\varphi - \chi\|_{-h,0} \quad \text{pour tout } \varphi, \chi \in V.$$

Comme x, \dot{x}, y, \dot{y} sont uniformément continues sur $[-h, t]$ il existe $\eta \in (0, \frac{1}{L})$ avec $s + \eta < t$ tel que x_u et y_u appartient à V pour tout $u \in [s, s + \eta) \subset [-h, t]$. On aura alors pour tout u

$$\begin{aligned} |x(u) - y(u)| &= \left| \int_s^u (f(x_w) - f(y_w)) dw \right| \leq \int_s^{s+\eta} |f(x_w) - f(y_w)| dw \\ &\leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} \|x_w - y_w\|_{-h,0} \\ &= L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} \max_{\theta \in [-h, 0]} |x(w + \theta) - y(w + \theta)|, \end{aligned}$$

(3.33) donne alors

$$|x(u) - y(u)| \leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} |x(w) - y(w)|.$$

Comme $L\eta < 1$ on obtient

$$\max_{w \in [s, s+\eta]} |x(w) - y(w)| = 0,$$

ceci contredit l'hypothèse $s = \inf\{u \in [0, t_x) : x(u) \neq y(u)\}$. ■

Chapitre 4

Etude d'un Modèle Structuré en Stade à Retard Dépendant de l'Etat

4.1 Introduction

Il existe dans la nature certaines espèces (animales ou végétales) qui passent au cours de leur évolution par différents stades spécialisés. Par exemple, il est bien connu que chez les populations mammifères chaque espèce passe par deux stades de développements distincts au cours de sa vie. Le premier stade est le stade immature, le second étant le stade mature. Pendant le stade immature cette population est protégée par leurs géniteurs qui leurs procurent nutriment et les protègent de la prédation d'autres espèces. Après un certain temps plus ou moins long, cette population immature devient mature et protège à son tour ses propres petits. Le développement de cette population est donc composé de deux stades : immature et mature. Le stade mature se distingue par la capacité de la population à se reproduire. Différents types de modèles décrivant la dynamique d'une telle population ont été proposés (voir Aiello et al. [1], Liu et al. [12]). Ces modèles sont décrits mathématiquement par un système de deux équations différentielles à retards appelés systèmes structurés en stades. Chaque équation décrit la dynamique d'une des deux populations mature ou immature. Le modèle le plus intéressant est celui décrit par Aiello & Freedman [1] dans le cas d'une seule espèce. Dans ce modèle Aiello et Freedman supposent que la population mature a une croissance de type logistique. Le temps de maturation, c'est-à-dire le temps au cours duquel un individu immature passe au stade mature est représenté un retard $\tau > 0$. Le modèle est décrit par le système à retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha e^{-\gamma\tau} x(t - \tau) - \beta x^2(t), \\ \dot{y}(t) = \alpha x(t) - \gamma y(t) - \alpha e^{-\gamma\tau} x(t - \tau), \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ représentent les densités des populations matures et immatures à l'instant t respectivement. Ce modèle est construit à partir des hypothèses suivantes :

- Seules les populations matures peuvent produire des populations immatures, un individu immature qui survit un temps de longueur τ passe au stade mature
 - La croissance de la population immature est proportionnelle à la densité de population mature avec un coefficient $\alpha > 0$
 - La mortalité de la population immature est proportionnelle à la densité de population immature avec un coefficient $\gamma > 0$
 - La population mature a une croissance de type logistique
- τ est appelé le temps de maturation de l'espèce. On associe au système (4.1) les données initiales suivantes :

$$x(t) = \phi(t), \quad y(t) = \psi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (4.2)$$

où ϕ et ψ sont des fonctions continues sur $[-\tau, 0]$.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à différentes variantes de ce modèle citons parmi eux Freedman et al. [5] qui ont construit un modèle dit à canibalisme, Liu et al. [13] qui ont considéré le cas de plusieurs populations matures qui entrent en compétitions entre elles, Liu et al. [14] qui ont proposé un modèle à retard distribué. On renvoie le lecteur pour plus de détails à l'article très complet de Liu et al. [12].

Certains chercheurs [6] ont constaté que pour certaines populations de mammifères (comme par exemple les baleines) le temps de maturation τ n'était pas constant mais dépend entre autres de la quantité de nourriture disponible. Ceci a été remarqué juste après la seconde guerre mondiale où ils ont constaté que pendant toute la durée de la guerre la pêche a été interrompue ce qui a entraîné une explosion de la population de baleines. Cette augmentation de la population de baleines a eu pour conséquence un rallongement du temps de maturation de ces mammifères. Etant donné que la quantité de nourriture disponible dans un environnement clos dépend à un instant donné de la population totale présente à cet instant, Aiello, Freedman et Wu [2] ont donc proposé un modèle dans lequel le temps de maturation $\tau(z)$ n'est plus constant mais fonction de la population totale $z(t) = x(t) + y(t)$.

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité du modèle proposé par Aiello et al. [2]. L'existence et l'unicité n'a pas été traité par les auteurs. En utilisant les outils sur les équations différentielles à retard dépendant de l'état développés dans le chapitre 3 on montre que le système admet une solution unique positive.

4.2 Le Modèle

Le modèle proposé par Aiello et al. [2] est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha e^{-\gamma\tau(z)}x(t - \tau(z(t))) - \beta x^2(t), \\ \dot{y}(t) = \alpha x(t) - \gamma y(t) - \alpha e^{-\gamma\tau(z(t))}x(t - \tau(z(t))), \end{cases} \quad (4.3)$$

avec les conditions initiales suivantes:

$$x(t) = \phi(t), \quad y(t) = \psi(t), \quad -\tau_M \leq t \leq 0, \quad (4.4)$$

où, $\cdot = \frac{d}{dt}$. Dans tout le reste de ce chapitre on fera les hypothèses suivantes:

(H'1) Les fonctions $\phi(t)$ et $\psi(t)$ sont continues et bornées sur $[-\tau_M, 0]$ avec,

$$z(t) = x(t) + y(t).$$

(H'2) Les coefficients α , β et γ sont non-négatifs et $\tau_m \leq \tau(z) \leq \tau_M$.

(H'3) La fonction $\tau(z)$ est telle que

$$\tau'(z) \geq 0, \quad 0 < \tau_m \leq \tau(z) \leq \tau_M, \quad (4.5)$$

avec

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \tau(z) = \tau_m \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tau(z) = \tau_M. \quad (4.6)$$

Pour éviter qu'un individu mature ne redevienne immature, on supposera que la fonction $\chi(t) = t - \tau(z(t))$ est strictement croissante en t , c'est à dire que

$$\frac{d}{dt}(t - \tau(z(t))) > 0,$$

où de manière équivalente

$$\frac{d\tau(z)}{dt} = \tau'(z)\dot{z}(t) < 1. \quad (4.7)$$

La dernière condition est équivalente à

$$\tau'(z)(\dot{x}(t) + \dot{y}(t)) < 1 \quad \text{ou} \quad \tau'(z)(\alpha x(t) - \gamma y(t) - \beta x^2(t)) < 1. \quad (4.8)$$

Dans le cas ou $\tau'(z) = 0$, le retard est constant. On suppose donc que $\tau'(z) > 0$. De plus comme les solutions x et y sont supposées positives on a

$$\tau'(z)(\alpha x(t) - \gamma y(t) - \beta x^2(t)) \leq \tau'(z)(\alpha x(t) - \beta x^2(t)).$$

La dernière condition est donc satisfaite si

$$\tau'(z)(\alpha x(t) - \beta x^2(t)) < 1. \quad (4.9)$$

(4.7) est donc satisfaite si (4.9) l'est. D'autre part, $(\alpha x(t) - \beta x^2(t))$ atteint son maximum $\frac{\alpha^2}{4\beta}$ quand $x = \frac{\alpha}{2\beta}$, d'où l'hypothèse suivante:

(H'4) On supposera que

$$\tau'(z) < \frac{4\beta}{\alpha^2}. \quad (4.10)$$

Maintenant, soit τ_u est définie telle que

$$\tau_u = \tau \left(\phi(0) + \int_{-\tau_u}^0 \alpha \phi(s) e^{\gamma s} ds \right).$$

Chaque τ_u existe mais n'est pas unique. Posons

$$\tau_s = \inf \left\{ \tau_u : \tau_u = \tau \left(\phi(0) + \int_{-\tau_u}^0 \alpha \phi(s) e^{\gamma s} ds \right) \right\}, \quad (4.11)$$

et définissons

$$\psi(0) = \int_{-\tau_s}^0 \alpha \phi(s) e^{\gamma s} ds. \quad (4.12)$$

Le changement de variable $r = s + \tau_s$ nous amène à l'hypothèse suivante:

$$\mathbf{(H'5)} \quad \psi(0) = \int_0^{\tau_s} \alpha \phi(s - \tau_s) e^{\gamma(s - \tau_s)} ds.$$

$\psi(0)$ représente la somme des individus immatures qui sont nait entre $-\tau_s$ et 0. Pour tout $-\tau_s \leq t \leq 0$ on a $x(t) = \phi(t)$ et $y(t) = \psi(t)$. Les relations (4.11) et (4.12) entraînent $\tau(z(0)) = \tau(\phi(0) + \psi(0)) = \tau_s$.

4.3 Éxistence et Unicité

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système (4.3)-(4.4). Notons par $C_{\tau_M,2} = C([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^2)$ l'espace de Banach des fonctions continue de $[- \tau_M, 0]$ dans \mathbb{R}^2 et par $C_{\tau_M,2}^1 = C^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^2)$ l'espace de Banach des fonctions continûment différentiable de $[- \tau_M, 0]$ dans \mathbb{R}^2 . Dans le but de donner une formulation fonctionnelle du système (4.3) définissons l'application suivante

$$f : C_{\tau_M,2}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \xi = (\xi_1, \xi_2) \mapsto f(\xi) = (f_1(\xi), f_2(\xi)),$$

où

$$\begin{cases} f_1(\xi) = \alpha e^{-\gamma\tau(\xi_1(0)+\xi_2(0))} \xi_1(-\tau(\xi_1(0) + \xi_2(0))) - \beta \xi_1^2(0), \\ f_2(\xi) = \alpha \xi_1(0) - \gamma \xi_2(0) - \alpha e^{-\gamma\tau(\xi_1(0)+\xi_2(0))} \xi_1(-\tau(\xi_1(0) + \xi_2(0))). \end{cases}$$

Le résultat suivant assure l'existence d'une solution locale du problème (4.3)-(4.4).

Proposition 4.1. *Sous les conditions (H'1)-(H'3) le système (4.3)-(4.4) admet une solution locale et unique.*

Preuve. L'idée est d'utiliser les résultats du chapitre 3 sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles à retard dépendant de l'état. Montrons pour cela que les hypothèses (H'1)-(H'3) du chapitre 3 sont vérifiées. Définissons les applications suivantes:

$$P_{1,2} : C_{\tau_M,2}^1 \rightarrow \mathbb{R} \\ \xi = (\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_{1,2}(0),$$

$$\Delta : C_{\tau_M,2}^1 \rightarrow C^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}) \times [- \tau_M, 0] \\ \xi = (\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, -\tau(P_1(\xi) + P_2(\xi))),$$

$$P : C^1([- \tau_M, 0], \mathbb{R}) \times [- \tau_M, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi_1, x) \mapsto \xi_1(x).$$

f_1 et f_2 s'écrivent alors sous la forme suivante:

$$f_1 = \alpha \exp \circ (-\gamma\tau \circ (P_1 + P_2)) . P \circ \Delta - \beta P_1^2 \\ f_2 = \alpha P_1 - \gamma P_2 - \alpha \exp \circ (-\gamma\tau \circ (P_1 + P_2)) . P \circ \Delta.$$

où l'opérateur "·" désigne la multiplication dans \mathbb{R} et $P_1^2(\xi) = \xi_1^2(0)$ pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in C_{\tau_M, 2}^1$. Comme P_1 et P_2 sont des applications linéaires continues à la fois sur $C_{\tau_M, 2}^1$ et $C_{\tau_M, 2}$, elles sont donc C^∞ . De plus puisque τ est continument différentiable sur \mathbb{R} , il en résulte que les applications $\alpha \exp \circ (-\gamma\tau \circ (P_1 + P_2))$, βP_1^2 , αP_1 , γP_2 sont continument différentiables sur $C_{\tau_M, 2}^1$ et $C_{\tau_M, 2}$ à la fois. Si on montre donc que l'application linéaire $D(P \circ \Delta)(\xi)$ admet un prolongement continue sur $C_{\tau_M, 2}$ pour tout $\xi \in C_{\tau_M, 2}^1$ alors l'application linéaire $Df(\xi)$ admettrait dans ce cas un prolongement continue sur $C_{\tau_M, 2}$. On a alors pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in C_{\tau_M, 2}^1$ et $h = (h_1, h_2) \in C_{\tau_M, 2}^1$

$$D(P \circ \Delta)(\xi)h = h_1(-\tau(P_1(\xi) + P_2(\xi))) - \xi_1'(-\tau(P_1(\xi) + P_2(\xi))) \times \tau'(P_1(\xi) + P_2(\xi))(P_1(h) + P_2(h)). \quad (4.13)$$

Il est clair à partir de la relation (4.13) que pour tout $\xi \in C_{\tau_M, 2}^1$ l'application linéaire $D(P \circ \Delta)(\xi)$ admet un prolongement continue à $C_{\tau_M, 2}$. L'hypothèse **(H'2)** est donc vérifiée. De plus il est clair que f est localement lipschitzienne sur $C_{\tau_M, 2}$, **(H'3)** est également satisfaite. ■

4.4 Positivité et Bornétude

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la positivité et de la bornétude des solutions du système (4.3)-(4.4).

Théorème 4.1 *Supposons que **(H'3)** et **(H'4)** sont satisfaites et que $y(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$. Alors $\chi(t) = t - \tau(z(t))$ est une fonction de t strictement croissante.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\dot{\chi}(t) > 0$. On a par hypothèse $0 \leq \tau'(z) < \frac{4\beta}{\alpha^2}$ et $y(t) \geq 0$ où $t \geq 0$. On a alors deux cas:

1^{ère} cas: Si $\tau'(z) = 0 \forall z$, alors, $\dot{\chi}(t) = 1 > 0$, d'où $\chi(t)$ est une fonction de t strictement croissante.

2^{ème} cas: Si $0 < \tau'(z) < \frac{4\beta}{\alpha^2}$ et $y(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$, le système (4.3)-(4.4) nous donne

$$\dot{\chi}(t) = 1 + \tau'(z)(-\alpha x(t) + \gamma y(t) + \beta x^2(t)),$$

et comme $y(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ on obtient

$$\dot{\chi}(t) \geq 1 + \tau'(z)(-\alpha x(t) + \beta x^2(t)) = 1 - \tau'(z)(\alpha x(t) - \beta x^2(t)).$$

D'autre part, $(\alpha x(t) - \beta x^2(t))$ atteint sa valeur maximale $\frac{\alpha^2}{4\beta}$ pour $x = \frac{\alpha}{2\beta}$. D'ou

$$\dot{\chi}(t) \geq 1 - \tau'(z)\frac{\alpha^2}{4\beta},$$

comme $\tau'(z) < \frac{4\beta}{\alpha^2}$, alors on a

$$\dot{\chi}(t) \geq 1 - \tau'(z)\frac{\alpha^2}{4\beta} > 1 - \frac{\alpha^2}{4\beta} \frac{\alpha^2}{4\beta} = 0,$$

donc

$$\dot{\chi}(t) = \frac{d}{dt}(t - \tau(z(t))) > 0.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 4.2. *Soit $\phi(t) > 0$ pour tout $-\tau_M \leq t \leq 0$. Alors, $x(t) > 0$ pour tout $t > 0$.*

Preuve. Soit $\eta = (\phi_1, \psi_1) \in C_{\tau_M, 2}$ telle que $\phi_1, \psi_1 \geq 0$ et $\phi_1(0) = \psi_1(0) = 0$, alors $f_1(\eta) = \alpha e^{-\gamma\tau_m} \phi_1(-\tau(\phi_1(0) + \psi_1(0))) \geq 0$, d'après le principe de comparaison pour les équations différentielles à retards (cf. [9]) on a $x(t) \geq 0$ pour $t > 0$. Montrons maintenant que $x(t) > 0$ pour $t > 0$. Par hypothèse $\phi(t) > 0$ pour $-\tau_M \leq t \leq 0$. Supposons que $x(t) = 0$ pour une certaine valeur de t . Soit $t^* = \inf\{t : t > 0, x(t) = 0\}$, alors il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{t : t > 0, x(t) = 0\}$ telle que

$$t_n \rightarrow t^* \text{ quant } n \rightarrow \infty \text{ et } x(t_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par continuité et par passage à la limite on obtient,

$$x(t^*) = 0. \tag{4.14}$$

De plus $t^* > 0$, sinon $t^* \in [-\tau_M, 0]$ et par hypothèse $x(t^*) = \phi(t^*) > 0$ ce qui est contredit l'hypothèse $\phi(t) > 0, \forall t \in [-\tau_M, 0]$. D'autre part on a

$$\dot{x}(t^*) = \alpha e^{-\gamma\tau(z(t^*))} x(t^* - \tau(z(t^*))),$$

comme $t^* - \tau(z(t^*)) < t^*$ on alors par définition de t^*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t^*) &= \alpha e^{-\gamma\tau(z(t^*))} x(t^* - \tau(z(t^*))) > 0, \quad \text{si } t^* > \tau(z(t^*)), \\ \dot{x}(t^*) &= \alpha e^{-\gamma\tau(z(t^*))} \phi(t^* - \tau(z(t^*))) > 0, \quad \text{si } t^* < \tau(z(t^*)),\end{aligned}$$

d'où $\dot{x}(t^*) > 0$ ce qui contredit le fait que $\dot{x}(t^*) \leq 0$. ■

Les deux théorèmes suivants prouvent que x est uniformément bornée.

Théorème 4.3. *Soit $\phi(t) > 0$ pour $-\tau_M \leq t \leq 0$. Alors il existe $\delta_m = \delta_m(\phi) > 0$ telle que $x(t) > \delta_m$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. Choisissons $\delta_m = \delta_m(\phi) > 0$ tel que

$$\delta_m = \frac{1}{2} \min\left\{ \inf_{\theta \in [-\tau_M, 0]} \phi(\theta), \alpha\beta^{-1}e^{-\gamma\tau_M} \right\}. \quad (4.15)$$

Supposons qu'il existe t_0 tel que $t_0 = \inf\{t : t \geq 0, x(t) = \delta_m\}$. Alors il existe $t_n \rightarrow t_0$ quand $n \rightarrow \infty$ tel que $x(t_n) = \delta_m, \forall n \in \mathbb{N}$. Par continuité on a

$$x(t_0) = \delta_m. \quad (4.16)$$

On a à partir de (4.15) $x(0) = \phi(0) \geq 2\delta_m > \delta_m$, donc par continuité $t_0 > 0$, sinon si $t_0 = 0$ alors $x(t_0) > \delta_m$ ce qui contredit (4.16). De plus puisque $t_0 - \tau(z(t_0)) < t_0$ alors,

$$x(t_0 - \tau(z(t_0))) > \delta_m. \quad (4.17)$$

Les inégalités (4.15)-(4.16) et (4.17) entraînent

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_0) &= \alpha e^{-\gamma\tau(z(t_0))} x(t_0 - \tau(z(t_0))) - \beta x^2(t_0) \\ &> \alpha e^{-\gamma\tau_M} \delta_m - \beta \delta_m^2 \\ &\geq \alpha e^{-\gamma\tau_M} \delta_m - \frac{1}{2} \alpha e^{-\gamma\tau_M} \delta_m \\ &= \frac{1}{2} \alpha e^{-\gamma\tau_M} \delta_m > 0,\end{aligned}$$

d'où la contradiction. Par conséquent il n'existe aucun point $t_0 > 0$ telle que $x(t_0) = \delta_m$. Donc $x(t) > \delta_m$ pour tout $t \geq 0$. ■

Théorème 4.4. *Supposons que $\phi(t) > 0$ pour tout $-\tau_M \leq t \leq 0$. Alors il existe $\Delta_m = \Delta_m(\phi) > 0$ telle que $x(t) \leq \Delta_m$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. Soit $\Delta_m = \Delta_m(\phi)$ tel que

$$\Delta_m = \max\left\{ \sup_{\theta \in [-\tau_M, 0]} \phi(\theta), \alpha\beta^{-1}e^{-\gamma\tau_m} \right\}. \quad (4.18)$$

Montrons que $x(t) \leq \Delta_m$ pour tout $t \geq 0$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\tilde{t} > 0$ tel que $x(\tilde{t}) = \Delta_m$, $\dot{x}(\tilde{t}) \geq 0$ et $x(t) \leq \Delta_m$ pour $t \leq \tilde{t}$. On a alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tilde{t}) &= \alpha e^{-\gamma\tau(z(\tilde{t}))} x(\tilde{t} - \tau(z(\tilde{t}))) - \beta x^2(\tilde{t}) \\ &\leq \Delta_m (\alpha\beta^{-1}e^{-\gamma\tau_m} - \beta\Delta_m) < 0, \end{aligned}$$

ceci contredit l'hypothèse $\dot{x}(\tilde{t}) \geq 0$. ■

Le théorème suivant montre que la solution y est bornée.

Théorème 4.5. *Supposons que **(H'5)** est vérifiée et soit $\phi(t) > 0$ pour $-\tau_M \leq t \leq 0$. Alors il existe $\Delta_i = \Delta_i(\phi) = y(0) + \alpha\gamma^{-1}\Delta_m > 0$ telle que $y(t) < \Delta_i$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. D'après l'hypothèse **(H'5)** $y(0) = \int_{-\tau_s}^0 \alpha\phi(s)e^{\gamma s} ds$, par conséquent Δ_i dépend seulement de $\phi(t)$. Le système (4.3) donne

$$\dot{y}(t) = \alpha x(t) - \gamma y(t) - \alpha e^{-\gamma\tau(z(t))} x(t - \tau(z(t))).$$

En multipliant cette expression par $e^{\gamma t}$ et en intégrant par partie sur $[0, t]$ pour $t > 0$, on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\gamma t} y(0) + \alpha e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} x(s) ds \\ &\quad - \alpha e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} e^{-\gamma\tau(z(s))} x(s - \tau(z(s))) ds. \end{aligned} \quad (4.19)$$

D'après le Théorème 4.2 on a $x(t - \tau(z(t))) > 0$ pour tout t , d'un autre coté on a d'après le Théorème 4.4 $x(t) \leq \Delta_m$ pour tout $t \geq 0$ d'ou

$$\begin{aligned} y(t) &< e^{-\gamma t} y(0) + \alpha e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} x(s) ds \\ &\leq e^{-\gamma t} y(0) + \alpha e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} \Delta_m ds, \end{aligned} \quad (4.20)$$

de plus puisque

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma t}y(0) + \alpha e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} \Delta_m ds &= e^{-\gamma t}y(0) + \alpha e^{-\gamma t} \gamma^{-1} \Delta_m (e^{\gamma t} - 1) \\
&= e^{-\gamma t}y(0) + \alpha \gamma^{-1} \Delta_m (1 - e^{-\gamma t}) \\
&< y(0) + \alpha \gamma^{-1} \Delta_m,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

on obtient finalement à partir de (4.20) et (4.21)

$$y(t) < y(0) + \alpha \gamma^{-1} \Delta_m.$$

■

Les deux théorèmes suivants assurent la positivité de y .

Théorème 4.6. *Supposons que (4.10) est satisfaite et que $\tau'(z) > 0$ est suffisamment petit de sorte que l'inégalité*

$$\delta_m \int_{t-\tau_m}^t e^{\gamma s} ds > \Delta_m \int_{-\tau_s}^{t-\tau_m} \frac{\alpha^2 \tau'(z)}{4\alpha - \alpha^2 \tau'(z)} e^{\gamma s} ds, \tag{4.22}$$

soit vérifiée pour tout t . Alors

$$y(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Preuve Raisonnons par l'absurde et supposons que $y(t) = 0$ pour certaine valeur de t . Définissons

$$\hat{t} = \inf\{t > 0 : y(t) = 0\}.$$

On a par continuité

$$y(\hat{t}) = 0, \tag{4.23}$$

d'où $\hat{t} > 0$ car sinon $y(\hat{t}) = y(0) = \int_{-\tau_s}^0 \alpha \phi(s) e^{\gamma s} ds > 0$, ce qui contredit (4.23). La relation (4.19) entraîne

$$\begin{aligned}
y(\hat{t}) &= e^{-\gamma \hat{t}} y(0) + \alpha e^{-\gamma \hat{t}} \int_0^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds \\
&\quad - \alpha e^{-\gamma \hat{t}} \int_0^{\hat{t}} e^{\gamma s} e^{-\gamma \tau(z(s))} x(s - \tau(z(s))) ds,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

comme $y(\hat{t}) = 0$ et $y(0) = \int_{-\tau_s}^0 \alpha \phi(s) e^{\gamma s} ds$, (4.24) est équivalente à

$$\int_{-\tau_s}^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds = \int_0^{\hat{t}} e^{\gamma(s-\tau(z(s)))} x(s - \tau(z(s))) ds. \quad (4.25)$$

En substituant $r = s - \tau(z(s))$ dans le terme à droite de (4.25) et en remplaçant r par s on obtient,

$$\int_{-\tau_s}^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds = \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau(z(\hat{t}))} \frac{e^{\gamma s} x(s)}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} ds. \quad (4.26)$$

D'après le Théorème 4.1, nous avons que $\chi(t)$ est une fonction strictement croissante de plus $1 - \tau'(z)\dot{z}(s) > 0$ pour tout $-\tau_s \leq t \leq \hat{t} - \tau(z(\hat{t})) \leq \hat{t} - \tau_m$. Comme $x(t) > 0$, on obtient l'inégalité

$$\int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau(z(\hat{t}))} \frac{e^{\gamma s} x(s)}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} ds \leq \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{e^{\gamma s} x(s)}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} ds. \quad (4.27)$$

De (4.26) et (4.27) on déduit que

$$\int_{-\tau_s}^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds \leq \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{e^{\gamma s} x(s)}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} ds, \quad (4.28)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \int_{\hat{t}-\tau_m}^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds &\leq \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \left(\frac{1}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} - 1 \right) e^{\gamma s} x(s) ds \\ &= \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\tau'(z)\dot{z}(s)}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} e^{\gamma s} x(s) ds. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Or d'après le Théorème 4.3, $x(t) \geq \delta_m$ pour tout $\hat{t} - \tau_m \leq t \leq \hat{t}$ d'ou

$$\int_{\hat{t}-\tau_m}^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds \geq \delta_m \int_{\hat{t}-\tau_m}^{\hat{t}} e^{\gamma s} ds. \quad (4.30)$$

Comme $x(t) \leq \Delta_m$ pour tout $-\tau_s \leq t \leq \hat{t} - \tau_m$ on a alors

$$\int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\tau'(z)\dot{z}(s)}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} e^{\gamma s} x(s) ds \leq \Delta_m \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\tau'(z)\dot{z}(s)}{1 - \tau'(z)\dot{z}(s)} e^{\gamma s} ds. \quad (4.31)$$

De plus puisque $\dot{z}(t)$ est majorée par $\frac{\alpha^2}{4\beta}$ on arrive alors à

$$\Delta_m \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\tau'(z)\dot{z}(s)}{1-\tau'(z)\dot{z}(s)} e^{\gamma s} ds \leq \Delta_m \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\alpha^2 \tau'(z)}{4\beta - \alpha^2 \tau'(z)} e^{\gamma s} ds \quad (4.32)$$

Les inégalités (4.31)-(4.32) entraînent

$$\int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\tau'(z)\dot{z}(s)}{1-\tau'(z)\dot{z}(s)} e^{\gamma s} x(s) ds \leq \Delta_m \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\alpha^2 \tau'(z)}{4\beta - \alpha^2 \tau'(z)} e^{\gamma s} ds. \quad (4.33)$$

Finalement en combinant les inégalités (4.29), (4.30) et (4.33) il vient

$$\delta_m \int_{\hat{t}-\tau_m}^{\hat{t}} e^{\gamma s} ds \leq \Delta_m \int_{-\tau_s}^{\hat{t}-\tau_m} \frac{\alpha^2 \tau'(z)}{4\alpha - \alpha^2 \tau'(z)} e^{\gamma s} ds.$$

Ce qui contredit l'hypothèse du théorème. ■

Théorème 4.7. *Supposons que $e^{-\gamma\tau_m} \leq \frac{\delta_m}{\Delta_m}$. Alors $y(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. Définissons \hat{t} par

$$\hat{t} = \inf\{t > 0 : y(t) = 0\}.$$

D'après (4.25) on a

$$\int_{-\tau_s}^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds = \int_0^{\hat{t}} e^{\gamma(s-\tau(z(s)))} x(s-\tau(z(s))) ds. \quad (4.34)$$

D'après le Théorème 4.3

$$\delta_m \gamma^{-1} (e^{\gamma \hat{t}} - e^{-\gamma \tau_s}) \leq \int_{-\tau_s}^{\hat{t}} e^{\gamma s} x(s) ds. \quad (4.35)$$

De plus puisque $x(t) \leq \Delta_m$ pour $t \geq 0$, en intégrant le terme à gauche de (4.34) on trouve

$$\int_0^{\hat{t}} e^{\gamma(s-\tau(z(s)))} x(s-\tau(z(s))) ds \leq \Delta_m \int_0^{\hat{t}} e^{\gamma(s-\tau(z(s)))} ds,$$

et comme $\tau(z(t)) \geq \tau_m$ on aura

$$\int_0^{\hat{t}} e^{\gamma(s-\tau(z(s)))} ds \leq \int_0^{\hat{t}} e^{\gamma(s-\tau_m)} ds = \gamma^{-1} e^{-\gamma\tau_m} (e^{\gamma\hat{t}} - 1).$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\hat{t}} e^{\gamma(s-\tau(z(s)))} x(s - \tau(z(s))) ds \leq \Delta_m \gamma^{-1} e^{-\gamma\tau_m} (e^{\gamma\hat{t}} - 1). \quad (4.36)$$

En combinant les inégalités (4.34)-(4.36) il vient

$$\delta_m \gamma^{-1} (e^{\gamma\hat{t}} - e^{-\gamma\tau_s}) \leq \Delta_m \gamma^{-1} e^{-\gamma\tau_m} (e^{\gamma\hat{t}} - 1). \quad (4.37)$$

Posons

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \delta_m \gamma^{-1} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma\tau_s}), \\ h_2(t) &= \Delta_m \gamma^{-1} e^{-\gamma\tau_m} (e^{\gamma t} - 1), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h_1(t) &= \delta_m e^{\gamma t} \\ \frac{d}{dt} h_2(t) &= \Delta_m e^{-\gamma\tau_m} e^{\gamma t}. \end{aligned}$$

Si $e^{-\gamma\tau_m} \leq \frac{\delta_m}{\Delta_m}$ alors,

$$\Delta_m e^{-\gamma\tau_m} e^{\gamma t} \leq \delta_m e^{\gamma t},$$

d'où pour tout $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} h_2(t) \leq \frac{d}{dt} h_1(t).$$

De plus on a

$$0 = h_2(0) < \delta_m \gamma^{-1} (1 - e^{-\gamma\tau_s}) = h_1(0). \quad (4.38)$$

Etant donné que $e^{-\gamma\tau_m} \leq \frac{\delta_m}{\Delta_m}$ on a

$$\begin{aligned} \Delta_m \gamma^{-1} e^{-\gamma\tau_m} (e^{\gamma t} - 1) &\leq \gamma^{-1} \delta_m (e^{\gamma t} - 1) \\ &< \delta_m \gamma^{-1} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma\tau_s}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

d'où d'après les inégalités (4.38)-(4.39) et le principe de comparaison

$$h_2(t) < h_1(t), \quad \forall t > 0. \quad (4.40)$$

D'autre part, d'après (4.37) on a

$$h_2(\hat{t}) \geq h_1(\hat{t}),$$

ce qui contredit (4.40). Par conséquent, si $e^{-\gamma\tau_m} \leq \frac{\delta_m}{\Delta_m}$ il n'existe aucun $\hat{t} > 0$ tel que $y(\hat{t}) = 0$. ■

Bibliographie

- [1] W. G. Aiello and H. I. Freedman, *A time delay model of single species growth with stage structure*, Math. Biosc. 101 (1990) 139-153.
- [2] W. G. Aiello, H. I. Freedman, and J. Wu, *Analysis of a model representing state-structured population growth with state-dependent time delay*, SIAM J. Appl. Math. 52, (1992) 855-869.
- [3] K. Cooke and W. Huang, *On the problem of linearisation for state-dependent delay differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 1417-1426.
- [4] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther, *"Delay Equation: Functional-, Complex, and Nonlinear Analysis"*, Springer-Verlag, New York, Series: Appl. Math. Sci., 110, 1995.
- [5] H. I. Freedman, J. W. So and J. Wu, *A model for the growth of a population exhibiting stage structure : cannibalism and cooperation*, J. Comput. Appl. Math. 52 (1994), 177-198.
- [6] R. Gambell, *Birds and mammals-Antarctic whales*, in Antarctica, W.N Bonner and D.W.H Walton, eds, Pergamon Press, New-York, 1985, pp 223-241.
- [7] J. K. Hale, *"Theory of Functional Differential Equations"*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [8] J. K. Hale and S. Verduyn Lunel, *"Introduction to Functional Differential Equations"*, Springer, New York, 1993.
- [9] M. Kouche, N.-e. Tatar, and S. Liu, *Permanence and existence of a positive periodic solution to a periodic stage-structured system with infinite delay*, Appl. Math. Comput 202 (2008) 620-638.
- [10] Y. Kuang, *"Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics"*, Mathematics in Science and Engineering, 191, 1993.
- [11] S. Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Wiley, New York (1962).

- [12] S. Liu, L. Chen and R. Agarwal, *Recent progress on stage-structured population dynamics*, Math. Compt. & Modelling, Vol 36 (2002), 1319-1360.
- [13] S. Liu, L. Chen and Z. Liu, *Extinction and permanence in nonautonomous competitive system with stage structure*, J. Math. Anal. Appl. 274 (2002), 667-684.
- [14] S. Liu, M. Kouche, and N.-e. Tatar, *Permanence extinction and global asymptotic stability in the stage structured system with distributed delays*, J. Math. Anal. Appl. 301 (2005) 187-207.
- [15] M. Louihi, M. L. Hbid, and O. Arino, *Semigroup properties and the Grandall-Liggett approximation for a class of differential equations with state-dependent delays*, J. Diff. Eqs 181 (2002) 1-30.
- [16] J. D. Murray, "*Mathematical biology*", Springer-Verlag, (1989).
- [17] H. L. Smith, "*An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*", Springer, 2011.
- [18] H. L. Smith, *Monotone semiflows generated by functional differential equations*, J. Diff. Eqs. 66 (1987) 420-442.
- [19] H.-O. Walther, *Smoothness properties of semiflows for differential equations with state-dependent delay*, Russian, in *Proceedings of the International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2002*, vol. 1, pp. 40-55, Moscow State Aviation Institute (MAI), Moscow 2003. English version: *Journal of the Mathematical Sciences* 124 (2004), 5193-5207.
- [20] H.-O. Walther, *The solution manifold and C^1 -smoothness for differential equations with state-dependent delay*, J. Diff. Eqs 195 (2003) 46-65