وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

Université Badji Mokhtar Annaba

Badji Mokhtar University Annaba

جامعة باجي مختار
عنابة

Année 2014

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE IMPULSIVE DANS UN ESPACE DE BANACH

Option
Mathématiques Appliquées

Présentée par

BOUZAROURA Asma

DIRECTEUR DE THÈSE :	MAZOUZI Saïd	PROF.	UNIV. B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	REBBANI Faouzia	PROF.	UNIV. B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	CHORFI Lahcène	PROF.	UNIV. B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	ATMANIA Rahima	MC(A)	UNIV. B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	NOUAR Ahmed	MC(A)	UNIV. DE SKIKDA
EXAMINATEUR :	HAOUAM Kamel	MC(A)	UNIV. DE TEBESSA

Dédicaces

A mon chèr père *Bouzaroura Saci*

A ma chère mère *Atamnia Saïda*

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour vous.

Vous avez su m'inculquer le sens de la responsabilité et la confiance en soi, vos conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite.

Je vous dois ce que je suis aujourd'hui, ce que je serai demain et je ferai toujours mon mieux pour rester votre fierté.

Que dieu tout le puissant vous accorde santé, bonheur et vous protège de tout mal.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse ***M. MAZOUZI Saïd*** pour son aide, son soutien, ses conseils ainsi que la confiance qu'il m'a fait en acceptant de m'encadrer.

Je tiens également à remercier ***Mme. REBBANI Faouzia*** qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que ***M. CHORFI Lahcène***, ***Mme. ATMANIA Rahima***, ***M. NOUAR Ahmed*** et ***M. HAOUAM Kamel*** pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie mon fiancé ***BOUZITOUNA Abdallah*** pour son soutien, sa grande disponibilité et aussi pour toutes les idées et les discussions fructueuses qui ont été pour moi une source de motivation.

Mes sincères remerciements vont à mon amie intime ***BOUYAYA Amina*** qui m'a accompagnée et soutenue moralement tout au long de mon parcours.

Je remercie également mon frère ***Abdallah***, mes deux soeurs ***Safia*** et ***Arij*** pour leurs soutien et contribution à la réalisation de ce travail.

Enfin, Je ne saurais oublier l'apport de mes parents pour l'accomplissement de ce travail, je tiens à leur rendre hommage à travers cette thèse.

Etude d'une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de Banach

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme une application ingénieuse du calcul fractionnaire.
En effet, ces équations concourent dans la modélisation de certains phénomènes physiques présentant des termes mémoire dans leurs structures.

Par ailleurs, les équations impulsives constituent un autre domaine de recherche très intéressant. On rencontre de telles équations lors de la modélisation des phénomènes évolutifs qui subissent des changements rapides en nombre fini (ou infini) d'instants.

Au cours de ces dernières années l'étude des équations différentielles fractionnaires impulsives a fait l'objet de divers travaux de recherche.

Le but de cette thèse est de contribuer au développement de cette théorie émergente, et ce en étudiant une classe d'équations différentielles d'ordres fractionnaires multiples soumises à des conditions impulsives dans des espaces de Banach. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe.

Tout d'abord, nous proposons une correction et certaines améliorations du concept de solution existant. Ensuite, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de certaines équations différentielles impulsives d'ordres fractionnaires multiples soumises à des conditions non locales dans un espace de Banach ainsi que la dépendance des solutions par rapport aux données initiales. Finalement, nous traitons les questions d'existence et d'unicité de la solution d'une nouvelle classe équations différentielles impulsives d'ordres fractionnaires multiples soumises à des conditions aux limites de type intégral fractionnaire. Nous concluons les résultats obtenus par des exemples illustratifs.

Mots clés :
Calcul fractionnaire, conditions impulsives, théorèmes de point fixe, conditions non locales, problème à valeur initiale, problème aux limites.

MSC (2010) : 26A33, 34A08, 34A12, 34A37, 34B37.

Study of fractional impulsive differential equation in a Banach space

Abstract

Fractional differential equations are considered as an ingenious application of fractional calculus. Indeed, the real importance of these equations lies in there nonlocal character that gives rise to long memory effect present in some phenomena.

Moreover, several investigations have paid a great attention to the study of impulsive differential equations. Indeed, they are used to describe dynamics of many evolutionary processes subject to abrupt changes in finite (or infinite) instants.

In the last few years, much interest has been focused to impulsive fractional differential equation.
The object of this thesis is to contribute in the development of this theory where we study a class of impulsive fractional differential equation of multi-orders in Banach spaces. The derived results are based on some fixed point theorems.

First, we intend to improve and correct the concept of a solution established earlier. Next, we are concerned with existence, uniqueness and stability of the solution of some impulsive fractional differential equations in a Banach space subjected to a nonlocal condition. Finally, we present some new existence and uniqueness results for impulsive fractional differential equation with multi-orders subjected to fractional integral boundary conditions. Illustrative examples are given.

Key Words
Fractional calculus, impulsive conditions, fixed point theorem, nonlocal conditions, initial value problem, multi-point boundary value problem.

MSC (2010) :26A33, 34A08, 34A12, 34A37, 34B37.

دراسة معادلة تفاضلية كسرية نبضية في فضاء بناخ

ملخص

تعد المعادلات التفاضلية الكسرية إحدى التطبيقات المهمة للحساب الكسري، وذلك لكونها تساهم في نمذجة بعض الظواهر الفيزيائية تتميز بنيتها بخاصية الذاكرة.

من جانب اخر تعتبر المعادلات التفاضلية النبضية إحدى مجالات البحث المهمة. إذ أن هذا النوع من المعادلات هو الطريقة الأكثر واقعية لنمذجة الظواهر التي تتعرض لعدد منته (أو غير منته) من التغيرات قصيرة المدى.

خلال السنوات الأخيرة شكلت المعادلات التفاضلية الكسرية النبضية موضوع لأبحاث مختلفة.

الهدف من هذه الأطروحة هو المساهمة في تطوير هذا المجال و ذلك من خلال دراسة بعض المعادلات التفاضلية النبضية ذات رتب كسرية متعددة وذلك في فضاءات بناخ باستعمال تقنيات النقطة الصامدة.

أولا، سنقترح تصحيحا للمفهوم الحل الموجود لهذا النوع من المعادلات بالإضافة إلي إجراء بعض التعديلات عليه. كما سندرس وجود و وحدانية حلول بعض المعادلات التفاضلية النبضية ذات رتب كسرية متعددة

و الخاضعة لشروط غير محلية وذلك في فضاء بناخ، إضافة إلى إثبات ارتباط الحل بالمعطيات الابتدائية.

أخيرا، سنعالج مسألة وجود و وحدانية حل معادلة تفاضلية نبضية ذات رتب كسرية متعددة خاضعة لشروط حدية تكاملية كسرية، كما سنقدم أمثلة توضيحية لإثبات صحة النتائج المحصل عليها.

الكلمـــات المفتاحيــة:

الحساب الكسري، الشروط النبضية، شروط غير محلية، نظريات النقطة الصامدة ، قيم أولية، شروط حدية متعددة النقط.

Table des matières

Introduction

Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers (réels ou complexes).

Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du $17^{ème}$ siècle, partant de quelques spéculations de G. W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée le 30/09/1695, sur la signification de $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \dfrac{1}{2}$. Depuis, de nombreux mathématiciens ont contribué au développement de cette théorie, nous citons entre autres P. S. Laplace, J. B. J. Fourier, N.H. Abel, J. Liouville, A. K. Grunwald, A. V. Letnikov, O. Heaviside, H. Weyl et M. Riesz etc.

Cependant, le calcul fractionnaire a été longuement considéré comme une simple théorie mathématique sans aucune explication réelle ou pratique. En effet, l'intérêt de ce concept dans les sciences fondamentales et en ingénierie ne s'est manifesté qu'à la seconde moitié du $20^{ème}$ siècle. Dès lors, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordres fractionnaires et leur intérêt dans différentes disciplines telles que la mécanique, l'électricité, la biologie, la chimie, l'automatique etc.

Les dérivées fractionnaires possèdent un caractère non-local ce qui fait d'eux un outil puissant pour la description des effets héréditaires et mnémoniques de diverses substances, ainsi que pour la modélisation de certains processus dynamiques.

La première conférence sur ce thème a été organisée en juin 1974 par B. Ross intitulée "*First Conference on Fractional Calculus and its Applications*" à l'université de New Haven . Pour la première monographie le mérite revient a K. B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre [63] consacré au calcul fractionnaire en 1974 après un travail de collaboration entamé en 1968. Cet ouvrage est le premier du genre qui rassemblé les divers résultats sur le calcul fractionnaire. Une synthèse théorique a été proposée dans le livre de K. S. Miller et B. Ross [56], où certains aspects algébriques des équations différentielles d'ordres fractionnaires sont substantiellement développés. Sur le plan mathématique il faut citer l'ouvrage russe de S. G. Samko *et al* [70] paru en 1987, ce livre regroupe un ensemble de résultats et d'applications des dérivées d'ordre fractionnaire.

De nos jours, plusieurs activités scientifiques comme l'organisation des colloques internationaux consacrés, entièrement ou partiellement, aux systèmes différentiels fractionnaires ainsi que la parution de nombreux articles et voire des revues spécialisées dans ce domaine ce qui confirme l'intérêt croissant des chercheurs dans ce domaine.

Systèmes impulsifs

De nombreux processus réels et phénomènes naturels en biologie, physique, économie et technologie, subissent des changements brusques au cours de leurs évolutions, ces changements sont souvent de très courtes durées et sont donc produits instantanément sous forme d'impulsions. A titre d'exemple nous citons l'effet du traitement chimiothérapique sur la dynamique des cellules cancéreuses ainsi que les effets des tremblements de terre sur la dynamique d'une population humaine, etc.

La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des modèles qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés. De tels modèles sont dits "impulsifs" ; ils sont évolutifs de processus continus régis par des équations différentielles combinées avec des équations aux différences représentant l'effet impulsif subi.

La théorie des équations différentielles impulsives initiée en 1960 par V. Milman et A. Myshkis et développée principalement par V. Lakshmikantham à partir de 1985, a suscité beaucoup d'intérêt au cours des dernières décennies. En particulier, il y a eu un développement appréciable dans la théorie des équations différentielles impulsives avec moments d'impulsions fixes.

Équations différentielles fractionnaires impulsives

Les équations différentielles fractionnaires impulsives constituent un domaine de recherche d'actualité fort intéressant. En effet, l'étude de ces équations connait une popularité croissante parmi les chercheurs, le nombre d'articles parus, traitant les questions d'existence, d'unicité ainsi que la dépendance des solutions de ce type d'équations, témoigne de la vitalité de la recherche dans ce domaine.

Cependant, l'intéressé à l'étude de ces équations se rend compte que de nombreux aspects de cette théorie ne sont pas encore entièrement exploités, et vu sa nouveauté ce domaine est très riche de questions ouvertes. Le concept de solution d'un problème différentiel fractionnaire impulsif est une de ces questions. En effet, nous rencontrons dans la littérature mathématique différentes formes de solutions attribuées au problème fractionnaire impulsif à valeur initiale relatif à la dérivée de Caputo suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), \ t \in [0, T] \ \ t \neq t_k \\ u(0) = u_0, \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

où dans certains ouvrages [37, 53, 78] la forme suivante est proposée

$$u(t) = \begin{cases} u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds, \text{ si } t \in [0, t_1) \\ u_0 + I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds, \text{ si } t \in (t_1, t_2) \\ u_0 + I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right) + I_2\left(u\left(t_2^-\right)\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds, \text{ si } t \in (t_2, t_3) \\ \vdots \\ u_0 + \sum_{i=1}^m I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds, \text{ si } t \in (t_m, T], \end{cases}$$

tandis que d'autres auteurs [15, 16, 17, 18, 19] utilisent le concept suivant

$$u(t) = \begin{cases} u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds, \text{ si } t \in [0, t_1] \\ \vdots \\ u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ + \sum_{i=1}^k I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right), \text{ si } t \in (t_k, t_{k+1}], \end{cases}$$

Cette diversité de concepts de solution met le lecteur dans l'embarras, ce qui peut influencer par la suite sur le sens des résultats obtenus.

Ainsi, nous allons à travers cette thèse proposer un ensemble de résultats contribuant au développement de cette thématique.

Nous commençons notre étude par la correction ainsi que l'amélioration du concept de solution proposé dans certains articles parus récemment.

Ensuite, nous nous intéresserons à l'étude des problèmes fractionnaires impulsifs à valeurs initiales relatifs à la dérivée de Caputo en établissant des résultats d'existence et d'unicité de la solution. Nous traiterons également la question de la dépendance de la solution par rapport aux données initiales. Les résultats obtenus généralisent les travaux de K. Balachandran *et al* [15, 16, 17].

Finalement, Nous établirons des résultats d'existence et d'unicité d'une nouvelle classe de problèmes aux limites impulsifs d'ordres fractionnaires multiples.

Organisation de la thèse

Cette thèse a pour objet l'étude d'une classe d'équations différentielles impulsives d'ordres fractionnaires multiples, elle est structurée comme suit :

☞ Dans le premier chapitre nous présentons les notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Ce Chapitre est scindé en trois sections. Dans la première nous rappellerons d'une manière succincte certains éléments de la théorie du calcul fractionnaire ainsi que ses applications dans certains domaines. Les systèmes impulsifs et une application concrète en médecine feront l'objet de la deuxième section. Enfin, la dernière section est consacrée aux différents théorèmes de points fixes utilisés dans ce travail.

☞ A l'égard du deuxième chapitre, il est réparti en quatre sections. Dans la première nous proposerons des corrections et certaines améliorations du concept existant de la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive. L'objet de la deuxième section est la présentation, par un exemple illustratif, de la notion d'un problème fractionnaire impulsif d'ordres multiples. La troisième section est consacrée à l'étude du problème fractionnaire impulsif quasi-linéaire d'ordres multiples suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) = A(t,u)u(t) + f(t, u(t), \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds, \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))ds), \\ t \in J_k,\ k = 0,...,m, \\ u(a) = u_0 \in E, \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1,\dots,m. \end{cases}$$

Tout d'abord, nous commençons par établir l'équivalence entre ce problème et une équation intégrale. Par la suite, en se basant sur le principe de contraction de Banach, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème. La validité de ce résultat sera illustré par un exemple adéquat. Dans la dernière section, nous abordons la question d'existence de la solution ainsi que sa dépendance par rapport à la donnée initiale du problème fractionnaire impulsif semi-linéaire soumis à une condition non-locale suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) = A(t)u(t) + f(t, u(t), \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds, \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))ds), \\ t \in J_k,\ k = 0, \ldots, m, \\ u(a) + g(u) = u_0 \in E \\ u\left(t_k^+\right) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

☞ On étudiera dans le troisième chapitre une nouvelle classe de problèmes aux limites impulsifs d'ordres fractionnaires multiples de la forme

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) = f(t, u(t), \int_{t_k}^t h(t,s,u(s))ds),\ t \in J_k,\ k = 0, ..., m, \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \\ u(0) + au(T) = \sum_{k=0}^m b_k \mathscr{I}^{\beta_k}_{t_k^+} u(\varepsilon_k). \end{cases}$$

Après avoir établi l'équivalence entre ce problème et une équation intégrale, appropriée des résultats d'existence et d'unicité de la solution sont obtenus moyennant le principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Schauder. Nous concluons le chapitre par des exemples illustratifs qui valident les résultats obtenus.

☞ Enfin, on rappellera dans la dernière section de cette thèse "Conclusion et perspectives" les différentes contributions apportées par cette thèse ainsi que les perspectives envisagées.

Notations

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels

$\mathbb{N}^* := \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs

$\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\mathbb{Z}_- := \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes

$\mathbb{L}^p[a,b]$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1,\infty[$ intégrables sur $[a,b]$

$\mathbb{L}^\infty[a,b]$: espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $[a,b]$

$\mathscr{C}([a,b],E)$: espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace de Banach E

$AC[a,b]$ ou $AC^1[a,b]$: espace des fonctions absolûment continues sur $[a,b]$

$AC^n[a,b]$, $(n \geq 2)$, espace des fonctions $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $u^{(n-1)} \in AC[a,b]$ et $u^{(k)} \in \mathscr{C}[a,b]$, $k = 1,\dots,n-1$

$\mathscr{PC}([a,b],E)$: espace des fonctions continues par morceaux à valeur dans un espace de Banach E

$\Gamma(.)$: fonction Gamma

$\mathbf{B}(.,.)$: fonction Bêta

$\mathscr{I}_a^\alpha u$: intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre > 0

$\mathscr{D}_a^\alpha u$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$

${}^C\mathscr{D}_a^\alpha u$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$

CHAPITRE

1 Préliminaires

On introduit dans ce chapitre les éléments nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit, il comporte trois sections.
Dans la première section nous rappelons brièvement certaines définitions et propriétés liées à la théorie du calcul fractionnaire, et nous citons quelques applications de cette théorie dans certains domaines. La deuxième section est consacrée à la présentation de certains systèmes impulsifs. Finalement, on conclut le chapitre par une section réservée aux différents théorèmes de point fixe utilisés dans le présent travail.

1.1 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un concept très ancien en dépit du retard accusé dans son application.
C'est un ancien concept dont les premières prémices remontaient à 1695 où une première définition de la dérivée d'ordre 1/2 a été donnée par G. W. Leibniz. Par la suite plusieurs mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A. K. Grunwald (1867-1872), A. V. Letnikov

(1868-1872), H. Weyl (1917) et M. Riesz (1949) ont contribué à l'élaboration de la théorie du calcul fractionnaire. Pour plus de détails sur les aspects historiques de la théorie du calcul fractionnaire le lecteur intéressé est invité à consulter les ouvrages [56, 63].

Le calcul fractionnaire n'a été apprécié par les chercheurs que vers les années 50. Dès lors, de modestes applications ont commencé à voir le jour ; les recherches de Van Der Ziel [81] sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis les travaux de Davidson et Col [31] sur la relaxation diélectrique dans certains liquides ont pu modéliser certains phénomènes naturels en faisant appel aux dérivées fractionnaires. De nos jours l'application du calcul fractionnaire concerne des domaines très variés tels que la mécanique, l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, la mécatronique, la robotique, etc. [35, 52, 55, 64, 67, 73].

La présente section est consacrée à la présentation de certains éléments du calcul fractionnaire. Nous commençons par l'introduction des espaces fonctionnels adéquats ainsi que deux fonctions spéciales, ensuite nous rappelons les définitions et quelques propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo ; des exemples concrets pour clarifier certains résultats seront proposés, les notions fondamentales de la théorie du calcul fractionnaire peuvent être consultées dans les ouvrages [56, 63, 66, 70]. On conclut la section par quelques applications du calcul fractionnaire dans quelques domaines de la science et de l'ingénierie.

1.1.1 Espaces fonctionnels

Avant de présenter les définitions des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires, il convient d'introduire les espaces fonctionnels suivants :
Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. *Pour* $1 \leq p \leq \infty$ *on définit*

1. *L'espace* $\mathbb{L}^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, *des (classes de) fonctions* f *réelles ou complexes sur* Ω *telles*

que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

2. *L'espace $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$, $p = \infty$, des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout (p.p.) sur Ω muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{t \in \Omega} |f(t)| = \inf\{K \geq 0; |f(t)| \leq K, \ p.p. \ sur \, \Omega\}.$$

Définition 1.1.2. *Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, alors l'espace des fonctions absolûment continues, noté $AC^1(\Omega)$, est défini comme l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dérivable presque partout telle que $f' \in \mathbb{L}^1(\Omega)$.*
On a ainsi

$$f \in AC^1(\Omega) \Leftrightarrow f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) \, ds, \quad t \in \Omega.$$

Pour $n \geq 2$ nous notons par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, telles que $f^{(k)} \in \mathscr{C}(\Omega)$ $k = 1, \ldots, n-1$ et $f^{(n-1)} \in AC^1(\Omega)$.

Notation : *On notera $AC^1(\Omega)$ par $AC(\Omega)$*. L'espace $AC^n(\Omega)$ est caractérisé par le résultat suivant

Lemme 1.1.1. *Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, si et seulement si elle s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) \, ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad \forall t \in \Omega.$$

1.1.2 Fonctions spéciales

Dans ce paragraphe nous présentons deux fonctions spéciales qui sont très utilisées dans le calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Bêta.

Fonction Gamma

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la factorielle, cette fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.

Définition 1.1.3. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Re(z) > 0,$$

où $t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t}$.

Théorème 1.1.1. *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$, *où* $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, *on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

2. *On peut également définir* $\Gamma(z)$ *à l'aide de la limite*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}, \quad Re(z) > 0,$$

la condition $Re(z) > 0$, *peut être étendue à* $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$.

3. *La fonction* $\Gamma(z)$ *est analytique dans* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$.

Fonction Bêta

Définition 1.1.4. *La fonction Bêta est donnée par*

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1} dt, \ \ Re(z) > 0, \ Re(\omega) > 0.$$

Remarque 1.1.1. *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit*

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \quad \forall z, \omega : \ Re(z) > 0, \ Re(\omega) > 0.$$

1.1.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$\mathscr{I}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\,ds;\ t > a \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.1.5. *L'intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $-\infty < a < b < +\infty$, est formellement définie par*

$$\mathscr{I}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds,\ a < t < b.$$

Exemple 1.1.1. *Soit $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$.*

On a

$$\mathscr{I}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^\beta\,ds.$$

En effectuant le changement de variable $s = a + \tau(t-a)$, $(0 \le \tau \le 1)$ et en utilisant la fonction Bêta il résulte que

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta} B\left(\alpha,\beta+1\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}(t-a)^{\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{I}_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

Propriétés :

Théorème 1.1.2. *[70]Si $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ avec a fini, alors $\mathscr{I}_a^\alpha f(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a $\mathscr{I}_a^\alpha \in \mathbb{L}^1[a,b]$.*

Proposition 1.1.1. *[47]L'opérateur d'intégration fractionnaire $\mathscr{I}_a^\alpha$ est borné dans $\mathbb{L}^p[a,b]$, $(1 \le p \le \infty)$ et on a*

$$\left\|\mathscr{I}_a^\alpha f\right\|_p \le K\left\|f\right\|_p,$$

pour toute $f \in \mathbb{L}^p[a,b]$.

On note que la propriété du semi-groupe reste aussi valable pour l'intégrale fractionnaire :

Théorème 1.1.3. *[70]Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ on a*

$$\mathscr{I}_a^\alpha \mathscr{I}_a^\beta f(t) = \mathscr{I}_a^{\alpha+\beta} f(t) = \mathscr{I}_a^\beta \mathscr{I}_a^\alpha f(t),$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

Le résultat suivant concerne la permutation de la limite avec l'opérateur d'intégration fractionnaire.

Théorème 1.1.4. *Soit $\alpha > 0$, et soit $(f_k)_{k=1}^\infty$ une suite uniformément convergente de fonctions continues sur $[a,b]$. Alors on a*

$$\mathscr{I}_a^\alpha\left(\lim_{k\to\infty} f_k(t)\right) = \left(\lim_{k\to\infty} \mathscr{I}_a^\alpha f_k\right)(t), \ \ \forall t \in [a,b].$$

En particulier, la suite $(\mathscr{I}_a^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.

1.1.4 Dérivée fractionnaire

Plusieurs approches ont été développées pour donner un sens à $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la présente sous-section on se limite à la présentation de deux approches de dérivation fractionnaire à savoir l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.1.6. *Pour $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha]+1$, la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est formellement définie par*

$$\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) := \mathscr{D}^n \mathscr{I}_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \quad a < t < b,$$

où $\mathscr{D}^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Remarque 1.1.2.

- *Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction $f(t)$ en un point qui ne dépend que des valeurs de $f(t)$ au voisinage de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de $f(t)$ dans l'intervalle (a,t). On dit qu'elle est à caractère non-local.*
- *Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée ordinaire.*

Exemple 1.1.2. *En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple si $\alpha > 0$ est non entier alors*

$$\mathscr{D}_a^{\alpha} K = \frac{K(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad a < t < b,$$

pour toute constante $K \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ avec $\beta > -1$ et $\alpha \geq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$, alors on a

$$\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) = \mathscr{D}^n \mathscr{I}^{n-\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \mathscr{D}^n (t-a)^{n-\alpha+\beta},$$

il s'ensuit que si $(\alpha-\beta) \in \{1,2,\dots,n\}$, alors

$$\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) = \mathscr{D}^n (t-a)^{\alpha-i} = 0, \quad i \in \{1,2,\dots,n\},$$

et si $(\alpha-\beta) \notin \{1,2,\dots,n\}$ on trouve

$$\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \quad a < t < b.$$

Remarque 1.1.3. *Suivant le choix de la borne inférieure a, on obtient une infinité de valeurs possibles de la dérivée de Riemann-Liouville en un point donné.*

Propriétés :

Nous allons présenter maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.
Le premier résultat donne une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous avons

Lemme 1.1.2. *[47]Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire $\mathscr{D}_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a,b]$; en plus, elle est donnée par*

$$\mathscr{D}_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}},$$

Remarque 1.1.4. *Une fonction possédant une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville n'est pas nécessairement continue.*

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire comme c'est le cas de la dérivation usuelle.

Théorème 1.1.5. *[70] Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent. Alors pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathscr{D}_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe, et l'on a*

$$\mathscr{D}_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \mathscr{D}_a^\alpha f(t) + \mu \mathscr{D}_a^\alpha g(t).$$

Lois de composition :

Le lemme suivant affirme que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

Lemme 1.1.3. *[47] Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, alors l'égalité*

$$\mathscr{D}_a^\alpha \mathscr{I}_a^\alpha f(t) = f(t),$$

est vraie pour presque tout $t \in [a,b]$.

Nous regroupons dans le théorème suivant quelques relations de composition entre les opérateurs d'intégration et de différentiation fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.1.6. *[47] Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$ $(n, m \in \mathbb{N}^*)$, alors on a*

1. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour tout $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ la relation*

$$\mathscr{D}_a^{\beta}\left(\mathscr{I}_a^{\alpha} f\right)(t) = \mathscr{I}_a^{\alpha-\beta} f(t),$$

   est vraie presque partout sur $[a,b]$.

2. *Si $\beta \geq \alpha > 0$, et si la dérivée fractionnaire $\mathscr{D}_a^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a*

$$\mathscr{D}_a^{\beta}\left(\mathscr{I}_a^{\alpha} f\right)(t) = \mathscr{D}_a^{\beta-\alpha} f(t).$$

3. *Si $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ et $\mathscr{I}_a^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b]$, alors l'égalité*

$$\mathscr{I}_a^{\alpha}\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathscr{D}^{n-k}\left[\mathscr{I}_a^{n-\alpha} f\right](a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k},$$

   est vraie presque partout sur $[a,b]$. En particulier, pour $0 < \alpha < 1$

$$\mathscr{I}_a^{\alpha}\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) = f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{I}_a^{1-\alpha} f(a), \quad p.p.\ t \in [a,b]$$

4. *Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $\mathscr{D}_a^{\alpha} f$ et $\mathscr{D}_a^{k+\alpha} f$ existent, alors*

$$\mathscr{D}^{k}\left(\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t)\right) = \mathscr{D}_a^{k+\alpha} f(t), \ \textit{pour tout}\ t \in [a,b].$$

5. *Pour $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, si $\mathscr{I}_a^{m-\beta} f \in AC^m[a,b]$ et $\alpha+\beta < n$, alors on a*

$$\mathscr{D}_a^{\alpha}\left(\mathscr{D}_a^{\beta} f(t)\right) = \left(\mathscr{D}_a^{\alpha+\beta} f\right)(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathscr{D}^{m-k}\left[\mathscr{I}_a^{m-\beta} f\right](a)}{\Gamma(1-\alpha-k)}(t-a)^{-k-\alpha}, \ \textit{pour tout}\ t \in [a,b].$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Beaucoup de problèmes concrets utilisent les dérivées fractionnaires assujetties à des conditions initiales plus au moins naturelles. Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant des valeurs limites de dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$. Malgré la possibilité de résoudre mathématiquement avec de telles conditions initiales, leurs solutions ne sont pas encore bien comprises, puisque il n'y a pas d'interprétation physique adéquate de tel type de conditions initiales.

En 1967 M. Caputo [28] proposa un concept modifié de la dérivation fractionnaire, qui prévoit la formulation des conditions initiales sous forme qui fait apparaitre seulement les valeurs limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t = a$ comme $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ...

La définition formelle de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par

Définition 1.1.7. *La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est donnée par*

$$^{C}\mathscr{D}_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \quad a < t < b,$$

avec

$$n = [\alpha] + 1 \quad si \quad \alpha \notin \mathbb{N}; \quad n = \alpha \quad pour \quad \alpha \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.5. *Contrairement à la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville l'ordre d'application de la dérivée entière est permuté dans le cas de la dérivée fractionnaire de Caputo.*

Remarque 1.1.6. *La dérivée fractionnaire de Caputo est aussi à caractère non local.*

Exemple 1.1.3. *Soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$ et soit $f(t) = (t-a)^\beta$ avec $\beta > -1$, alors on a*

$$^{C}\mathscr{D}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds,$$

Si $\beta \in \{0,1,2,...,n-1\}$, *alors*

$$ {}^{C}\mathscr{D}_{a}^{\alpha} f(t) = 0. $$

Si $\beta > n-1$, *alors*

$$ f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-n+1\right)}(s-a)^{\beta-n}. $$

En effectuant le changement de variable $s = a+\tau(t-a)$, $(0 \leq \tau \leq 1)$ *on aura*

$$ \begin{aligned} {}^{C}\mathscr{D}_{a}^{\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma\left(\beta-n+1\right)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta-n}d\tau \\ &= \frac{B\left(n-\alpha,\beta-n+1\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} $$

Conséquence : Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante $f = K$ est nulle. On effet, on a

$$ {}^{C}\mathscr{D}_{a}^{\alpha} K = K\,{}^{C}\mathscr{D}_{a}^{\alpha} 1 = 0. $$

Propriétés :

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $[a,b]$ est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.1.7. *[47] Soit* $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$. *Si* f *possède* $n-1$ *dérivées en* a *et si* $\mathscr{D}_{a}^{\alpha} f$ *existe, alors*

$$ {}^{C}\mathscr{D}_{a}^{\alpha} f(t) = \mathscr{D}_{a}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right], $$

presque partout sur $[a,b]$.

Remarque 1.1.7. *On constate que la dérivée au sens de Caputo n'est définie que si celle de Riemann-Liouville existe et que la fonction est* $(n-1)$ *fois dérivable au sens ordinaire.*

Nous notons, que la dérivée fractionnaire de Caputo existe partout sur $[a,b]$ pour toute fonction de $AC^n[a,b]$.

Corollaire 1.1.1. *[47] Si* ${}^C\mathscr{D}_a^\alpha f$ *et* $\mathscr{D}_a^\alpha f$ *existent, et si l'on suppose que* $f^{(k)}(a)=0$ *pour tout* $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, *alors la dérivée fractionnaire de Caputo coincide avec celle de Riemann-Liouville, i.e.*

$${}^C\mathscr{D}_a^\alpha f(t)=\mathscr{D}_a^\alpha f(t),\ \ p.p\ \ t\in[a,b].$$

La dérivée fractionnaire de Caputo est également l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Lemme 1.1.4. *[47] Si* $\alpha>0$, *n est donné par (1.1) et si* $f\in C[a,b]$, *alors*

$${}^C\mathscr{D}_a^\alpha \mathscr{I}_a^\alpha f(t)=f(t),\ \ a\leq t\leq b.$$

La dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1.1.8. *[47] Soient* $\alpha>0$, *et n est donné par (1.1). Si* $f\in AC^n[a,b]$, *alors*

$$\mathscr{I}_a^{\alpha C}\mathscr{D}_a^\alpha f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,\ \ \forall t\in[a,b].$$

1.1.5 Applications du calcul fractionnaire

Au cours de ces dernières décennies, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'intérêt du calcul fractionnaire aussi bien dans la science qu'en ingénierie. En effet, on rencontre des applications du calcul fractionnaire en traitement d'image [55], en géophysique [30], en économie [41]. Plusieurs travaux ont été effectués dans le domaine de la biomédecine, à titre d'exemple, les résultats obtenus sur l'ECG par Ferdi *et al* [38, 39, 42].

En 1823 N. H. Abel est parvenu à résoudre analytiquement le problème du tautochrone posé en physique en faisant apparaitre la forme d'une intégrale à noyau singulier qui ressemble à l'opérateur d'intégration fractionnaire, cette solution a été considérée comme la première application du calcul fractionnaire.

Remarque 1.1.8. *Le problème du tautochrone consiste à identifier une courbe de sorte que le temps pris par une particule glissant sous l'influence uniforme de la gravitation terrestre jusqu'à son point le plus bas reste le même quel que soit son point de départ (une telle courbe est appelée courbe tautochrone).*

Dans le but de montrer le rôle du calcul fractionnaire dans la résolution d'un tel problème nous allons présenter brièvement la solution d'Abel, le détail peut être consulté dans le livre de Miller et Ross (pages 255-260) [56] ou le livre de Oldham et Spanier (pages 183-186) [63].

L'énergie potentielle d'une particule descendante sur une courbe est donnée par

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y_0 - y),$$

où m est la masse de la particule, s est la distance entre la position de la particule et le point de départ (x_0, y_0) et g est la constante de gravitation.
En séparant les variables et en intégrant de $t = 0$ à $t = T$ on obtient

$$\int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-1/2} ds = \sqrt{2g}T. \tag{1.2}$$

Etant donné que le temps pris par la particule pour atteindre le point le plus bas de la courbe est supposé constant, alors le membre de droite de l'équation (1.2) est constant, noté "k".
En posant $s = F(y)$, on obtient $\dfrac{ds}{dy} = F'(y)$. Le changement de variable $y_0 = x$, $y = t$ donne

$$\int_0^{x} (x - t)^{-1/2} f(t)dt = k \tag{1.3}$$

où $f = F'$ désigne la fonction de la courbe tautochrone à déterminer.

En multipliant les deux membres de (1.3) par $\dfrac{1}{\Gamma(1/2)}$ Abel a obtenu l'équation suivante

$$\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t)\,dt = \frac{k}{\Gamma(1/2)}$$

qui est une intégrale fractionnaire d'ordre $\dfrac{1}{2}$, i.e. on a $\mathscr{I}^{1/2} f(x) = \dfrac{k}{\Gamma(1/2)}$.

Comme la dérivée fractionnaire $\mathscr{D}^{1/2}$ est l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire $\mathscr{I}^{1/2}$ il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mathscr{D}^{1/2}\mathscr{I}^{1/2} f(x) &= \mathscr{D}^{1/2}\frac{k}{\Gamma(1/2)} \\ f(x) &= \frac{k}{\pi\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Nous présentons dans ce qui suit une autre application du calcul fractionnaire : en mécanique des matériaux l'opérateur de dérivation fractionnaire s'est introduit pour décrire le comportement visco-élastique de certains matériaux.

En effet, la loi de comportement associée à la réponse d'un élément visqueux est donnée par la loi de Newton suivante

$$\sigma(t) = \tau\mathscr{D}\varepsilon(t) = \tau\varepsilon'(t), \tag{1.4}$$

où σ est la contrainte, ε est la déformation, τ correspond à la viscosité du matériau et $\mathscr{D}$ est la dérivée temporelle d'ordre un.

D'autre part, la loi de Hooke donnée par

$$\sigma(t) = E\mathscr{D}^0\varepsilon(t) = E\varepsilon, \tag{1.5}$$

décrit le comportement associé à la réponse d'un élément élastique où E est le module élastique et $\mathscr{D}^0$ est la dérivée temporelle d'ordre zéro (le symbole $\mathscr{D}^0 = I$ a été employé dans le but de montrer la similitude entre (1.4) et (1.5)).

Cependant, différents matériaux tels que les polymères ainsi que certains métaux comme l'aluminium présentent des caractéristiques intermédiaires entre l'élasticité et la viscosité. Ainsi, en s'inspirant des lois de Hooke et Newton, et moyennant l'opérateur de dérivation fractionnaire P. G. Nutting [60, 61] proposa la loi suivante

$$\sigma(t) = \nu \mathscr{D}^{\alpha} \varepsilon(t) \tag{1.6}$$

où ν est une constante dépendante du matériau utilisé et $\mathscr{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha \leq 1$. La relation (1.6), souvent appelée loi de Nutting, est considérée comme la première formule théorique pour décrire le comportement visco-élastique, dès lors plusieurs auteurs ont utilisé le calcul fractionnaire pour décrire les propriétés des matériaux visco-élastiques, citons entre autres les travaux de Bagley et Torvik [14] qui ont exploré les deux modèles suivants :

$$\sigma(t) = G_0 \varepsilon(t) + G_1 \mathscr{D}^{\alpha} \varepsilon(t) \tag{1.7}$$

$$\sigma(t) + b \mathscr{D}^{\beta} \sigma(t) = G_0 \varepsilon(t) + G_1 \mathscr{D}^{\alpha} \varepsilon(t) \tag{1.8}$$

où $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ représentent respectivement la contrainte et la déformation, quant à b, G_0, G_1, α, β sont les paramètres du modèle.
Le modèle (1.8) traduit les propriétés mécaniques du matériau dans une région caoutchouteuse. Nous notons que l'utilisation de la notion de dérivée fractionnaire réduit considérablement le nombre de paramètres du modèle, ce qui fait du calcul fractionnaire un outil puissant pour la modélisation des propriétés de mémoire et d'hérédité de certains phénomènes et matériaux.

1.2 Systèmes impulsifs

Plusieurs processus réels et phénomènes naturels étudiés en physique, en biologie, en technologie, en économie et autres sont assujettis à des perturbations dont la durée par rap-

port à celle du développement du processus ou du phénomène est négligeable mais ces perturbations provoquent des changements considérables. La modélisation la plus adéquate de tels phénomènes se fait par des systèmes impulsifs.
Un système impulsif est en fait une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle (ordinaire, aux dérivées partielles ou autres) et une équation aux différences qui représente les sauts instantanés de l'état dit "impulsions".
La théorie des équations différentielles ordinaires impulsives a été initiée en 1960 par V. Milman et A. Myshkis et elle a été développée durant la période de 1960-1975 par certains chercheurs ukraniens et russes. Ensuite, de 1975 à 1990, le mérite du développement de cette théorie et de sa popularisation revient au mathématicien américain V. Lakshmikantham. A partir de 1991, en plus de Lakshmikantham, d'autres mathématiciens comme L. Byszewski, D. Bainov contribuaient à l'enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors.

1.2.1 Description d'un système impulsif

Un système différentiel impulsif est généralement défini par une équation différentielle ordinaire soumise à une équation aux différences qui représente la condition impulsive. Un tel système est donné par

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)); \quad h(t,u) \neq 0 \\ \triangle u(t) = I(t, u(t)); \quad h(t,u) = 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

avec $f : \mathbb{R}^+ \times \Pi \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^+ \times \Pi \to \mathbb{R}$; $I : \mathbb{R}^+ \times \Pi \to \mathbb{R}^n$ où Π est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\triangle u(t)$ représente la condition impulsive donnée par

$$\triangle u(t) = u\left(t_k^+\right) - u\left(t_k^-\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

où $u\left(t_k^+\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} u\left(t_k+\varepsilon\right)$ et $u\left(t_k^-\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^-} u\left(t_k+\varepsilon\right)$.
Le problème (1.9) décrit un processus évolutif régie par l'équation différentielle lorsque $h\left(t,u\left(t\right)\right)\neq 0$. Pour $h\left(t,u\left(t\right)\right)=0$ i.e. $t=t_i$, passe de la position $\left(t_i,u\left(t_i\right)\right)$ à la position $\left(t_i^+,u\left(t_i^+\right)\right)$ avec une quantité égale à $I\left(t,u\left(t\right)\right)$, ce saut temporel est dit instant d'impulsion.

Dans le but de simplifier l'étude du système (1.9) on se fixe sur un cas particulier de la relation $h\left(t,u\right)=0$ où on se donne une infinité dénombrable de fonctions $\tau_k:\Pi\to\mathbb{R}^+$ telles que $\tau_0\left(u\right)<\tau_1\left(u\right)<...<\tau_k\left(u\right)<...$ et $\lim_{k\to\infty}\tau_k\left(u\right)=\infty$, pour $u\in\Pi$, ainsi le système (1.9) devient

$$\begin{cases} u'\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right)\right); \quad t\neq\tau_k\left(u\left(t\right)\right) \\ \triangle u\left(t\right)=I_k\left(t,\tau_k\left(u\left(t\right)\right)\right); \quad t=\tau_k\left(u\left(t\right)\right). \end{cases} \tag{1.10}$$

Vu que les fonctions τ_k dépendent de l'état u on dira que le système impulsif (1.10) est un système impulsif avec temps d'impulsion variables.
Dans le cas où τ_k sont constantes, alors le système (1.10) est dit système à temps d'impulsion fixe. Nous pouvons décrire simplement un système différentiel impulsif avec des moments fixes par

$$\begin{cases} u'\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right)\right); \quad t\neq t_k \\ \triangle u\left(t\right)=I_k\left(u(t_k^-)\right); \quad t=t_k;\ k=0,1,... \end{cases} \tag{1.11}$$

Dans ce cas le problème est assujetti à un nombre fini (ou infini) d'impulsions qui ont lieu à des moments fixes donnés par une suite croissante $0=t_0<t_1<...<t_k<...$ n'ayant pas de points d'accumulation à savoir $\lim_{k\to\infty}t_k=+\infty$. Notons que ce type de systèmes sont les plus courants dans le cas naturel.

Comme les solutions d'une équation différentielle impulsive sont continues par morceaux, alors l'espace fonctionnel approprié pour de telles solutions est l'espace de fonctions continues par morceaux

$$\begin{aligned}\mathscr{PC}([a,b];E) \quad = \quad & \big\{u:[a,b]\to E,\ \ u\in\mathscr{C}((t_k,t_{k+1}];E),\ k=0,...,m,\ u(t_k^-) \text{ et } u(t_k^+) \text{ existent} \\ & \text{avec } \ u(t_k^-)=u(t_k),\ \ k=1,\dots,m\big\}\end{aligned}$$

où E est un espace de Banach.

1.2.2 Applications des systèmes impulsifs

Il est reconnu que la théorie des systèmes impulsifs présente un cadre naturel pour la modélisation mathématique de beaucoup de phénomènes réels. Par exemple en pathologie [68], en technologie chimique [29], en biotechnologie [43], en économie [36] etc.

En effet, en médecine les modèles mathématiques basés sur les équations différentielles impulsives contribuent à l'optimisation de l'utilisation du traitement médical existant. Prenons comme exemple le modèle étudié par Panetta [65] décrivant la dynamique des cellules normales et cancéreuses, qui sont en interaction, sous l'effet impulsif de la chimiothérapie.

Le modèles décrivant la croissance des cellules normales et cancéreuses qui sont en interaction est donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_1 x\left(1 - \dfrac{x}{K_1} - \lambda_1 y\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = r_2 y\left(1 - \dfrac{y}{K_2} - \lambda_2 x\right) \end{cases} \tag{1.12}$$

x, y représentent les biomasses des cellules normales et cancéreuses, respectivement.

r_1, r_2 représentent les taux de croissance des cellules normales et cancéreuses, respectivement.

K_1, K_2 représentent les capacités des cellules normales et cancéreuses, respectivement.

λ_1, λ_2 représentent les paramètres d'interaction entre les cellules normales et les cellules cancéreuses.

λ_i, $i = 1,2$ décrivent les différentes interactions entre les cellules normales et cancéreuses, par exemple $\lambda_1 > 0$ décrit les effets négatifs de la tumeur sur les cellules normales, $\lambda_2 > 0$ décrit les effets négatifs des cellules normales (système immunitaire) sur la tumeur, enfin dans le cas où $\lambda_i = 0$, on suppose qu'il n'y a aucune interaction entre les deux types de cellules.

A chaque injection du médicament, la chimiothérapie agit sur les deux types de cellules, le système (1.12) est sujet d'une perturbation de la forme

$$\begin{cases} x\left(t_n^+\right) = e^{-\alpha_1 D} x\left(t_n^-\right) \\ y\left(t_n^+\right) = e^{-\alpha_2 D} y\left(t_n^-\right) \end{cases} \tag{1.13}$$

$e^{-\alpha_1 D}$, $e^{-\alpha_2 D}$ sont les fractions des cellules normales et cancéreuses survivantes, respectivement, après l'injection d'une dose D du médicament, où α_i sont des constantes positives données.

$x\left(t_n^-\right)$, $y\left(t_n^-\right)$ représentent les biomasses des cellules normales et cancéreuses juste avant l'injection du médicament.

$x\left(t_n^+\right)$, $y\left(t_n^+\right)$ représentent les biomasses des cellules normales et cancéreuses juste après l'injection du médicament.

L'analyse du système (1.12)-(1.13) a montré que si la période τ ($\tau = t_{n+1} - t_n$) entre chaque traitement (impulsion) dépasse un certain seuil, et si la dose D est inférieure au volume

$$\frac{\tau r_2 \left(1 - \lambda_2 K_1\right)}{\alpha_2 - \dfrac{\alpha_1 \lambda_2 K_1 r_2}{r_1}},$$

alors les cellules cancéreuses peuvent être reconstituées. Dans le cas où la dose D dépasse la quantité

$$\frac{-1}{\alpha_1} \ln\left(a + e^{-r_1 \tau}\left(1 - a\right)\right)$$

le traitement pourra détruire les cellules normales et tuer le malade par la suite.

1.3 Théorèmes de points fixes

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné

en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.
Dans cette section nous allons présenter les théorèmes de points fixes que nous allons utiliser tout au long de cette thèse en vu d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

On commence par la définition d'un point fixe.

Définition 1.3.1. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que*

$$f(u) = u.$$

En 1922 Stefan Banach prouva son fameux résultat dit *"principe de contraction de Banach"*, ce théorème est le résultat le plus élémentaire et le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.
Le théorème de point fixe de Banach repose essentiellement sur les définitions suivantes :

Définition 1.3.2. *Soit (E, d) un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite Lipschitzienne de constante $L \geq 0$ si elle vérifie*

$$\forall u, v \in E, \quad d\big(f(u), f(v)\big) \leq L d(u, v).$$

Définition 1.3.3. *L'application Lipschitzienne f est dite une contraction si $L = 1$. Dans le cas où $L \in (0, 1)$, f est dite une contraction stricte.*

Théorème 1.3.1. *(Principe de contraction de Banach) Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une contraction stricte. Alors f admet un unique point fixe.*

Notre deuxième résultat de point fixe est le théorème de point fixe de Schauder, ce théorème fut démontré pour le cas des espaces de Banach en 1930 par Juliusz Schauder.

Théorème 1.3.2. *(Théorème de point fixe de Schauder) Soit E un espace de Banach, K un convexe fermé borné de E et $\mathcal{T} : K \to K$ un opérateur continu et compact, alors $\mathcal{T}$ admet au moins un point fixe dans K.*

Voici enfin le théorème de point fixe de Schaefer :

Définition 1.3.4. *Soient E et F deux espaces de Banach. L'opérateur continu $\mathcal{T} : E \to F$ est complètement continu s'il transforme tout borné de E en une partie relativement compacte dans F.*

Théorème 1.3.3. *(Théorème de point fixe de Schaefer) Soient E un espace de Banach et $\mathcal{T} : E \to E$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\chi = \{u \in E : \ u = \lambda \mathcal{T} u, \ \ \lambda \in (0,1)\}$$

est borné, alors $\mathcal{T}$ possède au moins un point fixe.

Enfin, nous rappelons la version "$\mathscr{PC}$" du théorème d'Arzéla-Ascoli,

Théorème 1.3.4. *($\mathscr{PC}$-Arzéla Ascoli [79])Soit E un espace de Banach et $\mathscr{W} \subset \mathscr{PC}([a,b];E)$. Si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. *$\mathscr{W}$ un sous-ensemble uniformément borné de $\mathscr{PC}([a,b];E)$,*
2. *$\mathscr{W}$ est équicontinu dans (t_k, t_{k+1}), $k = 0,\dots,m$,*
3. *$\mathscr{W}(t) = \{u(t) : \ u \in \mathscr{W}, t \in J\backslash\{t_k\}\}$, $\mathscr{W}(t_k^+) = \{u(t_k^+) : \ u \in \mathscr{W}\}$ et $\mathscr{W}(t_k^-) \equiv \{u(t_k^-) : \ u \in \mathscr{W}\}$ sont des sous-ensembles relativement compacts de E,*

alors $\mathscr{W}$ est un sous-ensemble relativement compact de $\mathscr{PC}([a,b];E)$.

1.3.1 Intégrales au sens de Bochner

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, (a,b) un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ une mesure sur (a,b) donnée par $d\mu(t) = \omega(t)dt$ où ω est une fonction positive continue sur (a,b). $\{A_1,\dots,A_k\}$ est une collection finie de sous-ensembles mutuellement disjoints de (a,b) avec mesures finies μ et $\{x_1,\dots,x_k\}$ est un ensemble d'éléments de E.

Définition 1.3.5. *Une fonction ϕ définie par*

$$\phi(t)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(t)x_i, \quad a<t<b$$

est appelée une fonction simple.

On définit l'intégrale de ϕ par rapport à la mesure μ sur (a,b) par

$$\int_a^b \phi(t)d\mu(t)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(t)x_i=\sum_{i=1}^{n}(\int_{A_i}\omega(t)dt)x_i.$$

Définition 1.3.6. *Une fonction $f:(a,b)\to E$ est dite mesurable s'il existe une suite de fonctions simples $\{\phi_n\}$ de supports inclus dans (a,b) tel que*

$$\lim_{n\to\infty}\|f(t)-\phi_n(t)\|=0, \quad p.p.\ dans\ (a,b).$$

Définition 1.3.7. *Une fonction $f:(a,b)\to E$ est intégrable au sens de Bochner s'il existe une suite de fonctions simples $\{\phi_n\}$ telles que $\|f-\phi_n\|$ est intégrable au sens de Lebesgue pour tout n, et*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\|f(t)-\phi_n(t)\|d\mu(t)=0,$$

dans ce cas l'intégrale de Bochner sur (a,b) est définie par

$$\int_a^b f(t)d\mu(t)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\phi_n(t)d\mu(t).$$

Remarque 1.3.1. *Toutes les intégrales qui interviennent tout au long du présent travail doivent être comprises au sens de Bochner.*

CHAPITRE

2

Etude de quelques problèmes impulsifs à valeurs initiales d'ordres fractionnaires multiples

Au cours de ces dernières années, l'étude des équations différentielles fractionnaires impulsives a motivé beaucoup de chercheurs à explorer d'avantage ce domaine [2, 3, 15, 16, 17, 18, 19, 37, 53, 78].

La diversité des travaux consacrés à l'étude de ces équations a eu un impact considérable sur la parution de différents concepts de solution [16, 18, 19, 37, 53, 78].

Malgré les diverses contributions déployées dans le développement de cette théorie émergente, de nombreux aspects ne sont pas encore entièrement élucidés.

Les résultats présentés dans ce chapitre, qui sont issus de [21], sont développés en vu d'étudier des problèmes fractionnaires impulsifs à valeurs initiales relatifs à la dérivée de Caputo où nous allons corriger et améliorer certains travaux parus dans divers journaux spécialisés. En outre, nous établissons des résultats d'existence et d'unicité d'une nouvelle classe de problèmes impulsifs d'ordres fractionnaires à valeurs initiales.

Ce chapitre est structuré comme suit :

Dans la première section nous corrigeons et améliorons le concept de solution proposé dans certains articles récents.

Ensuite, dans la deuxième section nous introduisons le concept d'un problème fractionnaire

impulsif d'ordres multiples, que nous concluons par un exemple illustratif concret dans $\mathbb{R}$.
La troisième section est consacrée à l'étude d'un problème fractionnaire impulsif quasi-linéaire, dans laquelle nous établissons une équivalence entre ce dernier et une équation intégrale de type Volterra-Fredholm. Ensuite, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution d'un tel problème. Finalement, afin de valider le résultat exposé nous présentons un exemple adéquat.
Dans la dernière section, nous présentons un résultat d'existence de la solution d'un problème fractionnaire impulsif semi-linéaire soumis a des conditions non locales. En outre, nous abordons la question de la dépendance de la solution de ce problème par rapport à la donnée initiale. Enfin nous clôturons par un exemple illustratif.

2.1 Concept de solution d'un problème fractionnaire impulsif

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous rencontrons dans la littérature mathématique divers concepts de solution d'un problème fractionnaire impulsif à valeur initiale de type Caputo, voir [15, 16, 17, 18, 19, 37, 53, 78].
Dans ce cadre on peut distinguer deux approches principales où la première a été proposée par M. Benchohra et B. A. Slimani [19] et la deuxième est due à M. Fečkan et *al* [37].
En dépit des déclarations des auteurs de [37] dans lesquelles ils confirment que leur concept est plus réaliste par rapport à celui considéré en [19]. Nous avons pu infirmer par un contre exemple classique d'analyse fonctionnelle que ces propositions sont inexacts.
En effet, le résultat suivant a été présenté en [37]

Lemme 2.1.1. *Soient $\alpha \in (0,1)$, $J=[0,T]$ et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction u est* *dite solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$u(t)=\begin{cases} u_0+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds,\ si\ t\in[0,t_1) \\ u_0+I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds,\ si\ t\in(t_1,t_2) \\ u_0+I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right)+I_2\left(u\left(t_2^-\right)\right)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds,\ si\ t\in(t_2,t_3) \\ \vdots \\ u_0+\sum_{i=1}^m I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds,\ si\ t\in(t_m,T], \end{cases}$$

si et seulement si u est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}_t^\alpha u(t)=h(t),\ t\in J'=J\setminus\{t_1,\dots,t_m\},\ J=[0,T], \\ u(0)=u_0 \\ u\left(t_k^+\right)=u\left(t_k^-\right)+I_k\left(u\left(t_k^-\right)\right),\ k=1,\dots,m. \end{cases}$$

Afin d'établir cette équivalence, les auteurs se basèrent sur le lemme suivant

Lemme 2.1.2. *Soit $\alpha\in(0,1)$ et $h:J\to\mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $u\in\mathscr{C}(J,\mathbb{R})$ est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$u(t)=u_0-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a (a-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds;$$

si seulement si u est une solution du problème fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}_t^\alpha u(t)=h(t),\ t\in[0,T], \\ u(a)=u_0,\ a>0. \end{cases}$$

Néanmoins, cette démarche n'est pas correcte vu que le lemme 2.1.2, sur lequel les auteurs s'appuyèrent pour obtenir leur équivalence n'est pas valide comme le prouve le contre exemple suivant :

Dans le livre de F. Riesz et B. Nagy [58], page 48, il y a un exemple d'une fonction continue monotone $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, qui n'est pas constante sur aucun sous intervalle de $[0,1]$, en plus elle satisfait $f'=0$ presque partout dans $[0,1]$.

Donc, la dérivée de Caputo de f vérifiera

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\, ds = 0, t \in [0,1] \\ f(a) &= f_0,\ (0 < a < 1),\ f_0 \text{ est la valeur de } f \text{ en } a. \end{aligned}$$

Il s'ensuit du lemme 2.1.2 la fonction f est constante et vaut f_0 sur l'intervalle $[0,1]$ ce qui mène à une contradiction. Ainsi l'équivalence déclarée n'est pas vraie.

En revanche, M. Benchohra et B. A. Slimani [19] prouvèrent le résultat suivant

Lemme 2.1.3. *Soit $\alpha \in (0,1)$ et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction u est dite solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$u(t) = \begin{cases} u_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds,\ si\ t \in [0, t_1] \\ \\ u_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ + \sum_{i=1}^{k} I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right),\ si\ t \in (t_k, t_{k+1}], \end{cases}$$

si et seulement si u est une solution du problème fractionnaire impulsif à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha} u(t) = h(t),\ t \in J', \\ u(0) = u_0 \\ \Delta u|_{t=t_k} = I_k\left(u\left(t_k^-\right)\right),\ k = 1, ..., m. \end{cases}$$

On remarque que par définition de la solution, la dérivée de Caputo la de fonction u doit exister sur chaque sous intervalle $J_k := (t_k, t_{k+1}]$. Donc, il faut utiliser la notation ${}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha}$ au lieu de ${}^{C}\mathscr{D}^{\alpha}$ et considérer que pour $t \in J_k$ (au lieu de J'), on a

$${}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha} u(t) = h(t),\ t \in J_k,$$

où

$${}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_k^+}^t (t-s)^{-\alpha} u'(s)\, ds.$$

En vertu de cette remarque le lemme 2.1.3 s'énoncera d'une manière rigoureuse comme suit

Lemme 2.1.4. *Soit $\alpha \in (0,1)$ et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction u est dite solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$u(t) = \begin{cases} u_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds, \ si\ t \in [0, t_1] \\ \\ u_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ + \sum_{i=1}^{k} I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right),\ si\ t \in (t_k, t_{k+1}],\ k = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

si et seulement si u est une solution du problème fractionnaire impulsif à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha} u(t) = h(t),\ t \in J_k, \quad k = 0, \ldots m, \\ u(0) = u_0 \\ \Delta u|_{t=t_k} = I_k\left(u\left(t_k^-\right)\right),\ k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Suite à la discussion précédente, on peut confirmer que le concept proposé par M. Fečkan n'est pas réaliste et que la formule correcte de la solution d'un problème fractionnaire impulsif est donnée par le lemme 2.1.4.

2.2 Problème impulsif d'ordres fractionnaires multiples

Un problème différentiel d'ordre fractionnaire multiple est un système qui contient des dérivées de différents ordres, qui ne sont pas typiquement des entiers.

Dans cette étude on s'intéresse aux problèmes impulsifs d'ordres fractionnaires multiples. Un exemple de tels problèmes de la forme suivante

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = t^p - 1,\ t \in J_0 = [0, 1], \\ {}^{C}\mathscr{D}_{1^+}^{\beta} u(t) = (t-1)^q,\ t \in J_1 = (1, T], \\ u(0) = 1, \\ u\left(1^+\right) = u\left(1^-\right) + 2, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $T > 1$ et $p,\ q \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi, on s'intéresse à la recherche de la fonction $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ qui satisfait le problème (2.1).

En résolvant le sous-problème

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) &= t^p - 1,\ t \in J_0, \\ u(0) &= 1, \end{aligned}$$

on arrive à

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^p\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds \\ &= 1 + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} t^{\alpha+p} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha}, \end{aligned}$$

d'où on tire $u(1) = 1 + \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} - \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$.

D'autre part, la solution du sous-problème

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathscr{D}_{1^+}^{\beta} u(t) &= (t-1)^q,\ t \in J_1, \\ u\left(1^+\right) &= u(1) + 2 = 3 + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

est donnée par

$$\begin{aligned} u(t) &= u\left(1^+\right) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (t-s)^{\beta-1} (s-1)^q\, ds \\ &= 3 + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(\beta+q+1)} (t-1)^{\beta+q}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction continue par morceaux

$$u(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} t^{\alpha+p} - \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha},\ t \in J_0, \\[2ex] 3 + \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} - \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(\beta+q+1)} (t-1)^{\beta+q},\ t \in J_1. \end{cases}$$

est une solution du problème fractionnaire impulsif d'ordres multiples (2.1).

En posant $\gamma = \alpha = \beta$, on obtient le problème suivant, qui est un cas particulier de (2.1)

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}^{\gamma}_{0^+} u(t) = t^p - 1,\ t \in J_0, \\ {}^C\mathscr{D}^{\gamma}_{1^+} u(t) = (t-1)^q,\ t \in J_1, \\ u(0) = 1, \\ u\left(1^+\right) = u(1^-) + 2. \end{cases}$$

La solution correspondante est donnée par

$$u(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\Gamma\left(p+1\right)}{\Gamma\left(\gamma+p+1\right)} t^{\gamma+p} - \dfrac{1}{\Gamma\left(\gamma+1\right)} t^{\gamma},\ t \in J_0, \\ \\ 3 + \dfrac{\Gamma\left(p+1\right)}{\Gamma\left(\gamma+p+1\right)} - \dfrac{1}{\Gamma\left(\gamma+1\right)} + \dfrac{\Gamma\left(q+1\right)}{\Gamma\left(\gamma+q+1\right)} (t-1)^{\gamma+q},\ t \in J_1. \end{cases}$$

On note que la majorité des ouvrages traitant les problèmes impulsifs d'ordre fractionnaire considèrent qu'un seul ordre de dérivation. L'objectif de ce chapitre est l'étude d'une nouvelle classe du problème fractionnaire impulsif d'ordres multiples. Plus précisément on considère les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) = A(t,u)u(t) + f(t, u(t), \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds, \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))ds), \\ t \in J_k,\ k = 0,...,m, \\ u(a) = u_0 \in E, \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1,\dots,m, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) = A(t)u(t) + f(t, u(t), \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds, \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))ds), \\ t \in J_k,\ k = 0,...,m, \\ u(a) + g(u) = u_0 \in E \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1,\dots,m. \end{cases}$$

Les résultats développés dans ce chapitre généralisent ceux obtenus par K. Balachandran et *al* [15, 16, 17].

2.3 Problème quasi-linéaire

Dans la présente section nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème impulsif d'ordres fractionnaires multiples suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+}u(t) = A(t,u)u(t) + f(t,u(t),\int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds, \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))ds), \\ t \in J_k,\ k = 0,...,m, \\ u(a) = u_0 \in E, \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1,\dots,m, \end{cases} \tag{2.2}$$

où

- ${}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha_k \in (0,1)$, $k = 0,...,m$.
- $J = [a,T]$ avec $0 \leq a < T < \infty$, et $J_0 = [a,t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$; $k = 1,...,m$.
- $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach donné.
- $A : J \times E \to \mathscr{B}(E)$ est un opérateur continu, où $\mathscr{B}(E)$ est l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans E.
- $I_k : E \to E$, $t_0 = a < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$, $u(t_k^+) = \lim_{\epsilon\to 0^+} u(t_k+\epsilon)$ et $u(t_k^-) = \lim_{\epsilon\to 0^-} u(t_k+\epsilon) = u(t_k)$ représentent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de $u(t)$ au point de discontinuité $t = t_k$.
- $f : J \times E \times E \times E \to E$ est une fonction non linéaire continue et

$$h : D \times E \to E,\ \ D = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq s \leq t\ \leq T\},$$

$$k : D_0 \times E \to E\ ,\ D_0 = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 :\ t \in J,\ a \leq s\ \leq T\},$$

  sont deux fonctions continues sur $D \times E$ et $D_0 \times E$, respectivement ; en outre, les fonctions $\sigma, \tau : J \to J$ sont continues avec $a \leq \sigma(t) \leq t$ et $a \leq \tau(t) \leq t$, pour $t \in J$.

Nous notons

$$\begin{aligned} Hu(t) &= \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds, \\ K_{t_{k+1}}u(t) &= \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))ds,\ k = 0,1,...,m, \end{aligned}$$

et

$$\Phi_{t_{k+1}}(t,u) = f(t,u(t),Hu(t),K_{t_{k+1}}u(t)),\ k=0,1,...,m.$$

On considère l'espace

$$\begin{aligned}\mathscr{PC}(J;E) \quad = \quad & \big\{u: J\to E,\ \ u\in\mathscr{C}((t_k,t_{k+1}];E),\ k=0,...,m,\ u(t_k^-) \text{ et } u(t_k^+) \text{ existent} \\ & \text{avec } \ u(t_k^-)=u(t_k),\ \ k=1,\dots,m\big\}\end{aligned}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathscr{PC}} = \sup_{t\in J}\|u(t)\|,$$

où $(\mathscr{PC}(J;E),\|.\|_{\mathscr{PC}})$ est un espace de Banach.

Introduisons tout d'abord la définition de la solution du problème (2.2).

Définition 2.3.1. *Une fonction $u\in\mathscr{PC}(J;E)$ est dite une solution du problème (2.2)si ${}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+}u(t)$ existe sur J_k, pour $k=0,...,m$ et elle satisfait*

- *l'équation ${}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+}u(t) = A(t,u)u(t)+\Phi_{t_{k+1}}(t,u)$ dans J_k, $k=0,...,m$,*
- *la condition initiale $u(a)=u_0$, et*
- *les conditions impulsives $u(t_k^+) = u(t_k^-)+I_k(u(t_k^-))$, $k=1,...,m$.*

Lemme 2.3.1. *Une fonction $u\in\mathscr{PC}(J;E)$ satisfait l'équation intégrale suivante*

$$u(t)=\begin{cases} u_0+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\displaystyle\int_a^t(t-s)^{\alpha_0-1}A(s,u)u(s)ds+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\displaystyle\int_a^t(t-s)^{\alpha_0-1}\Phi_{t_1}(s,u)\,ds, \\ t\in[a,t_1] \\ \\ u_0+\sum_{i=1}^k I_i(u(t_i^-))+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\displaystyle\int_{t_k}^t(t-s)^{\alpha_k-1}A(s,u)u(s)ds \\ +\sum_{i=1}^k\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}A(s,u)u(s)ds \\ +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\displaystyle\int_{t_k}^t(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\,ds+\sum_{i=1}^k\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{t_i}(s,u)\,ds, \\ t\in J_k,\ \ k=1,\dots,m\end{cases}\tag{2.3}$$

si et seulement si elle est une solution du problème (2.2).

Démonstration. Nous avons $u(t_k^-) = u(t_k)$, d'où $u(t_k^+) = u(t_k) + I_k(u(t_k^-))$.

Maintenant, pour $t \in J_0 = [a, t_1]$ la solution du problème

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha_0} u(t) = A(t,u)u(t) + \Phi_{t_1}(t,u), \quad t \in J_0 \\ u(a) = u_0 \in E \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^t (t-s)^{\alpha_0 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^t (t-s)^{\alpha_0 - 1} \Phi_{t_1}(s,u)\, ds, \ t \in J_0.$$

Pour $t = t_1$ on a la relation suivante $u(t_1^+) = u(t_1) + I_1(u(t_1^-))$, alors

$$\begin{aligned} u(t_1^+) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^{t_1} (t_1-s)^{\alpha_0 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^{t_1} (t_1-s)^{\alpha_0 - 1} \Phi_{t_1}(s,u)\, ds \\ &\quad + u_0 + I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right). \end{aligned}$$

Ensuite, pour $t \in J_1 = (t_1, t_2]$, nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= u\left(t_1^+\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha_1 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha_1 - 1} \Phi_{t_2}(s,u)\, ds \\ &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^{t_1} (t_1-s)^{\alpha_0 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^{t_1} (t_1-s)^{\alpha_0 - 1} \Phi_{t_1}(s,u)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha_1 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha_1 - 1} \Phi_{t_2}(s,u)\, ds \\ &\quad + I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right) \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} u(t_2^+) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^{t_1} (t_1-s)^{\alpha_0 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_a^{t_1} (t_1-s)^{\alpha_0 - 1} \Phi_{t_1}(s,u)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha_1 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha_1 - 1} \Phi_{t_2}(s,u)\, ds \\ &\quad + I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right) + I_2\left(u\left(t_2^-\right)\right). \end{aligned}$$

Raisonnant de la même manière nous obtenons pour $t \in J_2$

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(t_2^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} (t-s)^{\alpha_2 - 1} A(s,u) u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} (t-s)^{\alpha_2 - 1} \Phi_{t_3}(s,u)\, ds \\
&= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_{a}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha_0 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_{a}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha_0 - 1} \Phi_{t_1}(s,u)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha_1 - 1} A(s,u)\, u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha_1 - 1} \Phi_{t_2}(s,u)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} (t-s)^{\alpha_2 - 1} A(s,u) u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} (t-s)^{\alpha_2 - 1} \Phi_{t_3}(s,u)\, ds \\
&\quad + I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right) + I_2\left(u\left(t_2^-\right)\right).
\end{aligned}$$

De façon générale, pour $t \in J_k$, $k = 1, ..., m$, nous obtenons l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} A(s,u) u(s) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} A(s,u) u(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi_{t_{k+1}}(s,u)\, ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} \Phi_{t_i}(s,u)\, ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(u(t_i^-)).
\end{aligned}$$

Inversement, nous supposons que u satisfait l'équation intégrale (3.2).

Si $t = a$, alors $u(a) = u_0$.

En utilisant le fait que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle nous obtenons pour $t \in J_k$, $k = 0, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) &= {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} A(s,u) u(s) ds \right] \\
&\quad + {}^{C}\mathscr{D}_{t_k}^{\alpha_k} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi_{t_{k+1}}(s,u)\, ds \right] \\
&= {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} \left(\mathscr{I}_{t_k^+}^{\alpha_k} A(t,u) u(t) \right) + {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} \left(\mathscr{I}_{t_k^+}^{\alpha_k} \Phi_{t_{k+1}}(t,u) \right),
\end{aligned}$$

d'où

$${}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) = A(t,u) u(t) + \Phi_{t_{k+1}}(t,u),$$

pour tout $t \in J_k$, $k = 0, ..., m$.

A l'égard des conditions impulsives elles s'obtiennent par une vérification directe. □

Le lemme suivant nous servira par la suite pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2).

Lemme 2.3.2. *Les deux fonctions $h(t,s,u)$ et $k(t,s,u)$ sont continues par rapport à s et t, et ils existent deux constantes positives C_1 et C_2 telles que*

$$\|h(t,s,u) - h(t,s,v)\| \leq C_1 \|u - v\|, \quad \forall t,s \in J\ , \ \forall u,v \in E,$$

et

$$\|k(t,s,u) - k(t,s,v)\| \leq C_2 \|u - v\|, \quad \forall t,s \in J\ , \ \forall u,v \in E.$$

Alors, ils existent deux constantes positives C_1' and C_2' telles que

$$\|Hu(t)\| \leq (T-a)\left(C_1 \|u\|_{\mathscr{PC}} + C_1'\right)$$

$$\|Hu(t) - Hv(t)\| \leq C_1(T-a)\|u - v\|_{\mathscr{PC}},$$

et, pour $k = 0, ..., m$, on a

$$\left\|K_{t_{k+1}} u(t)\right\| \leq (T-a)\left(C_2 \|u\|_{\mathscr{PC}} + C_2'\right)$$

$$\|K_{t_{k+1}} u(t) - K_{t_{k+1}} v(t)\| \leq C_2(T-a)\|u - v\|_{\mathscr{PC}},$$

pour toutes $u, v \in \mathscr{PC}(J,E)$ et $t \in J$.

Démonstration. Soient $t, s \in J$ et $u \in \mathscr{PC}(J;E)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|Hu(t)\| &= \left\| \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds \right\| \\
&= \left\| \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))ds - \int_a^t h(t,s,0)ds + \int_a^t h(t,s,0)ds \right\| \\
&\leq \int_a^t \|[h(t,s,u(\sigma(s)))ds - h(t,s,0)]\| \, ds + \int_a^t \|h(t,s,0)\| \, ds \\
&\leq \int_a^t C_1 \|u(\sigma(s))\| \, ds + \int_a^t C_1' ds \\
&\leq (t-a)\left(C_1 \|u\|_{\mathscr{PC}} + C_1'\right) \\
&\leq (T-a)\left(C_1 \|u\|_{\mathscr{PC}} + C_1'\right),
\end{aligned}$$

où

$$C_1' = \max_{t,s \in D} \|h(t,s,0)\|. \tag{2.4}$$

D'autre part, pour $t, s \in J$ et $u, v \in \mathscr{PC}(J;E)$ on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\|Hu(t) - Hv(t)\| &\leq \int_a^t \|h(t,s,u(\sigma(s))) - h(t,s,v(\sigma(s)))\| \, ds \\
&\leq C_1 \int_a^t \|u(\sigma(s)) - v(\sigma(s))\| \, ds \\
&\leq C_1(t-a)\|u-v\|_{\mathscr{PC}} \\
&\leq C_1(T-a)\|u-v\|_{\mathscr{PC}}.
\end{aligned}$$

Finalement, d'une manière analogue on peut obtenir les estimations suivantes

$$\left\|K_{t_{k+1}} u(t)\right\| \leq (T-a)\left(C_2 \|u\|_{\mathscr{PC}} + C_2'\right)$$

où

$$C_2' = \max_{t,s \in D_0} \|k(t,s,0)\|, \tag{2.5}$$

$$\|K_{t_{k+1}} u(t) - K_{t_{k+1}} v(t)\| \leq C_2(T-a)\|u-v\|_{\mathscr{PC}},$$

pour tout $k = 0, \ldots, m$, $u, v \in \mathscr{PC}(J,E)$ et $t \in J$. $\square$

On considère l'opérateur continu $A : J \times E \to \mathscr{B}(E)$ il existe une constante positive M telle que

$$\|A(t,u) - A(t,v)\| \leq M \|u - v\|_{\mathscr{P}\mathscr{C}} \quad t \in J;\ u, v \in E, \tag{2.6}$$

on pose $M' = \max_{t\in J} \|A(t,0)\|$.

Afin d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2), nous considérons les hypothèses suivantes

(H1) $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in (0,1)$. On pose $T' = \max_{0\leq i\leq m} \left\{(T-a)^{\alpha_i}\right\}$ et $\Gamma' = \min_{0\leq i\leq m} \{\Gamma(\alpha_i + 1)\}$.

(H2) Il existe une constante positive L_1 telle que

$$\begin{aligned} &\|\Phi_{t_{k+1}}(t,u) - \Phi_{t_{k+1}}(t,v)\| \\ &\leq \{L_1 + (C_1 + C_2)(T-a)\} \|u - v\|_{\mathscr{P}\mathscr{C}},\ \ \forall t \in J,\ \ \forall u, v \in \mathscr{P}\mathscr{C},\ k = 0, \ldots, m. \end{aligned}$$

On pose $L = L_1 + (C_1 + C_2)(T-a)$, $L_2 = \sup_{t\in J} \|f(t,0,0,0)\|$, C_1', C_2' sont définies par (2.4)-(2.5) et

$$L' = L_2 + (C_1' + C_2')(T-a). \tag{2.7}$$

(H3) Les fonctions I_k sont continues et il existe une constante positive $\mu > 0$ telle que

$$\|I_k(u) - I_k(v)\| \leq \mu \|u - v\|, \quad \forall u, v \in E \ \text{ et } \ k = 1, \ldots, m.$$

On pose

$$\mu' = \max\{\|I_k(0)\|,\ k = 1, \ldots, m\}. \tag{2.8}$$

(H4) Le nombre réel positif

$$\gamma = m\mu + (m+1)\left(L + 2rM + M'\right)\frac{T'}{\Gamma'}$$

satisfait $0 < \gamma < 1$.

On définit la boule fermée $\mathscr{B}_r = \{u \in \mathscr{P}\mathscr{C}(J,E) : \|u\|_{\mathscr{P}\mathscr{C}} \leq r\}$ de $\mathscr{P}\mathscr{C}(J,E)$ centrée en 0 et de rayon r, on note que $(\mathscr{B}_r, d)$ est espace métrique complet avec

$d(u,v) = \|u-v\|_{\mathscr{PC}}$, pour tout $u, v \in \mathscr{B}_r$.

Maintenant, on considère l'opérateur $\Psi : \mathscr{B}_r \to \mathscr{B}_r$ défini par

$$\begin{aligned}
\Psi u(t) \quad = \quad & u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} A(s,u) u(s) ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} A(s,u) u(s) ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi_{t_{k+1}}(s,u) ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{t_i}(s,u)\, ds + \sum_{a<t_i<t} I_i(u(t_i^-)), \\
& t \in J_k,\ k = 0, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.1. *Il est compris que la somme $\sum_{a<t_i<t}$ vaut zéro si $t \in J_0$.*

En vu d'établir notre résultat d'existence et d'unicité on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.3.3. *Si r satisfait l'inégalité*

$$\varphi(r) := \|u_0\| + m\mu' + \frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'} L' + \left[\frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'} (rM + M' + L) + m\mu \right] r \leq r,$$

alors $\Psi \mathscr{B}_r \subset \mathscr{B}_r$.

Démonstration. Montrons que Ψ est une application de $\mathscr{B}_r$ dans $\mathscr{B}_r$; en effet, pour tout $u \in \mathscr{B}_r$ et $t \in J_k$, $k = 0, \ldots, m$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t)\| \quad \leq \quad & \|u_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|A(s,u)\| . \|u(s)\|\, ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|A(s,u)\| . \|u(s)\|\, ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \left\| \Phi_{t_{k+1}}(s,u) \right\| ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \left\| \Phi_{t_i}(s,u) \right\| ds + \sum_{a<t_i<t} \left\| I_i(u(t_i^-)) \right\| .
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (2.6), les hypothèses **(H2)-(H3)** et le Lemme 2.3.2 on arrive à

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t)\| &\leq \|u_0\| + \frac{\left(M\|u\|_{\mathscr{PC}} + M'\right).\|u\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t} \frac{\left(M\|u\|_{\mathscr{PC}} + M'\right).\|u\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} ds \\
&+ \frac{L\|u\|_{\mathscr{PC}} + (T-a)\left(C_1' + C_2'\right) + L_2}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t} \frac{L\|u\|_{\mathscr{PC}} + (T-a)\left(C_1' + C_2'\right) + L_2}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} ds \\
&+ \mu \sum_{a<t_i<t} \left\| u\left(t_i^-\right) \right\| + \sum_{a<t_i<t} \|I_i(0)\|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse **(H1)** et en calculant les intégrales on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t)\| &\leq \|u_0\| + m\mu' + \frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'} L' + \left[\frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'} \left(rM + M' + L\right) + m\mu \right] r \\
&\leq \varphi(r) \leq r.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|\Psi u\|_{\mathscr{PC}} \leq r$, ce qui implique que $\Psi \mathscr{B}_r \subset \mathscr{B}_r$.

□

Nous énonçons maintenant notre théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.2).

Théorème 2.3.1. *Si les hypothèses (**H1**)-(**H4**) sont satisfaites, alors le problème (2.2) admet une unique solution* $u \in \mathscr{PC}(J, E)$.

Démonstration. Dans le but d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2), nous allons utiliser le principe de contraction de Banach.

En effet, pour $u, v \in \mathscr{B}_r$ et $t \in J_k$, $k = 0, \ldots, m$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t) - \Psi v(t)\| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|A(s,u)u(s)-A(s,v)v(s)\|ds\\
&+\sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|A(s,u)u(s)-A(s,v)v(s)\|\,ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)-\Phi_{t_{k+1}}(s,v)\|ds\\
&+\sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\left\|\Phi_{t_i}(s,u)-\Phi_{t_i}(s,v)\right\|ds\\
&+\sum_{a<t_i<t}\|I_i(u(t_i^-))-I_i(v(t_i^-))\|.
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses **(H2)-(H3)** on trouve que

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t) - \Psi v(t)\| \leq\ & m\mu\|u-v\|_{\mathscr{PC}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\\
&\times\|A(s,u)u(s)-A(s,u)v(s)+A(s,u)v(s)-A(s,v)v(s)\|ds\\
&+\sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\\
&\times\|A(s,u)u(s)-A(s,u)v(s)+A(s,u)v(s)-A(s,v)v(s)\|ds\\
&+\frac{L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}ds\\
&+\sum_{a<t_i<t}\frac{L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}ds.
\end{aligned}$$

D'après (2.6) on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t) - \Psi v(t)\| \leq\ & m\mu\|u-v\|_{\mathscr{PC}}+\frac{\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}[2Mr+M']ds\\
&+\sum_{a<t_i<t}\frac{\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}[2Mr+M']ds\\
&+\frac{L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}ds\\
&+\sum_{a<t_i<t}\frac{L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}ds.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\|\Psi u-\Psi v\|_{\mathscr{PC}} &\leq [m\mu+(m+1)\left(L+2rM+M'\right)\frac{T'}{\Gamma'}]\,\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\\
&\leq \gamma\,\|u-v\|_{\mathscr{PC}}.
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse **(H4)** le nombre $\gamma \in (0,1)$, ce qui montre que Ψ est une contraction stricte, et partant le principe de contraction de Banach assure l'existence d'un unique point fixe $u = \Psi u \in \mathscr{B}_r$ qui est l'unique solution du problème (2.2). Ce qu'il fallait démontrer. □

Nous concluons cette section par l'exemple illustratif suivant

Exemple 2.3.1. *On considère le problème impulsif d'ordres fractionnaires multiples suivant*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t) = \dfrac{t}{24} u(t) \cos u(t) + \dfrac{|u(t)|}{(|u(t)|+2)\left(t^2+12\right)} + \displaystyle\int_0^t \dfrac{e^{-\frac{|u(s)|}{6}}}{(t+2)^2} ds + \int_0^{1/2} \dfrac{\sin \frac{u(s)}{4}}{e^t+6} ds, \\ t \in J_0, \\ {}^{C}\mathscr{D}_{(1/2)^+}^{\frac{3}{4}} u(t) = \dfrac{t}{24} u(t) \cos u(t) + \dfrac{|u(t)|}{(|u(t)|+2)\left(t^2+12\right)} + \displaystyle\int_0^t \dfrac{e^{-\frac{|u(s)|}{6}}}{(t+2)^2} ds + \int_0^{1} \dfrac{\sin \frac{u(s)}{4}}{e^t+6} ds, \\ t \in J_1, \\ u(0) = 1, \\ u\left((1/2)^+\right) = u\left((1/2)^-\right) + \dfrac{|u(1/2^-)|}{|u(1/2^-)|+6}. \end{cases} \tag{2.9}$$

On a $J_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $J_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ *et* $J = [0,1]$.

On prend $E = \mathbb{R}$, $a = t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $T = 1$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ *et* $\mathscr{B}_r = \{u \in \mathscr{PC}(J,E),\ \|u\|_{\mathscr{PC}} \leq r\}$.

On définit

$$A(t,u) = \frac{t}{24} (\cos u) I,$$

$$Hu(t) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{|u(s)|}{6}}}{(t+2)^2} ds, \quad K_{t_{k+1}} u(t) = \int_0^{t_{k+1}} \frac{\sin \frac{u(s)}{4}}{e^t+6} ds, \ k = 0,1,$$

et

$$\Phi_{t_{k+1}}(t, u(t)) = \frac{|u(t)|}{(|u(t)|+2)\left(t^2+12\right)} + \int_0^t \frac{e^{-\frac{|u(s)|}{6}}}{(t+2)^2} ds + \int_0^{t_{k+1}} \frac{\sin \frac{u(s)}{4}}{e^t+6} ds, \ k = 0,1.$$

$$I_1 u\left(\frac{1}{2}^-\right) = \frac{\left|u\left(\frac{1}{2}^-\right)\right|}{\left|u\left(\frac{1}{2}^-\right)\right| + 6}.$$

Pour tout $u, v \in \mathcal{B}_r$ et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|Hu(t) - Hv(t)| &\leq \int_0^t \left| \frac{e^{-\frac{|u(s)|}{6}} - e^{-\frac{|v(s)|}{6}}}{(t+2)^2} \right| ds \\
&\leq \frac{1}{24} \|u - v\|_{\mathcal{PC}},
\end{aligned}$$

alors $C_1 = \dfrac{1}{24}$.

De la même manière on peut obtenir, pour $k = 0, 1$, l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\left|K_{t_{k+1}} u(t) - K_{t_{k+1}} v(t)\right| &\leq \int_0^{t_{k+1}} \left| \frac{\sin \frac{u(s)}{4} - \sin \frac{v(s)}{4}}{e^t + 6} \right| ds \\
&\leq \frac{1}{24} \|u - v\|_{\mathcal{PC}},
\end{aligned}$$

d'où $C_2 = \dfrac{1}{24}$.

*D'autre part, en utilisant l'hypothèse **(H2)** on obtient*

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_{t_{k+1}}(t, u) - \Phi_{t_{k+1}}(t, v)\right| &\leq \left| \frac{|u(t)|}{(|u(t)| + 2)\left(t^2 + 12\right)} - \frac{|v(t)|}{(|v(t)| + 2)\left(t^2 + 12\right)} \right| \\
&\quad + |Hu(t) - Hv(t)| + \left|K_{t_{k+1}} u(t) - K_{t_{k+1}} v(t)\right| \\
&\leq \frac{3}{24} \|u - v\|_{\mathcal{PC}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$L_1 = \frac{1}{24} \text{ et } L = \frac{3}{24}.$$

*L'hypothèse **(H3)** donne*

$$\begin{aligned}
|I_1(u) - I_1(v)| &\leq \left| \frac{\left|u\left(\frac{1}{2}^-\right)\right|}{\left|u\left(\frac{1}{2}^-\right)\right| + 6} - \frac{\left|v\left(\frac{1}{2}^-\right)\right|}{\left|v\left(\frac{1}{2}^-\right)\right| + 6} \right| \\
&\leq \frac{1}{6} \|u - v\|_{\mathcal{PC}},
\end{aligned}$$

d'où $\mu = \dfrac{1}{6}$.

*L'hypothèse **(H1)** implique que*

$$T' = \max\left\{(T - a)^{\alpha_0}, (T - a)^{\alpha_1}\right\} = 1,$$

et

$$\Gamma' = \min\{\Gamma(\alpha_0+1), \Gamma(\alpha_1+1)\} = \min\left\{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dû à la définition de $A(t,u)$ on trouve que $M = M' = \dfrac{1}{24}$.

*Finalement, nous allons déterminer le seuil de la valeur de r pour laquelle la condition **(H4)** est satisfaite. Par définition on a*

$$\gamma = m\mu + (m+1)\left(L + 2rM + M'\right)\frac{T'}{\Gamma'}$$

où $\gamma \in (0,1)$, et ainsi

$$0 < 1.\frac{1}{6} + (1+1)\left(\frac{3}{24} + 2r\frac{1}{24} + \frac{1}{24}\right)\frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} < 1$$

donnant

$$0 < \frac{1}{6} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{r}{3\sqrt{\pi}} < 1.$$

*Par conséquent, $r < \left(5\sqrt{\pi} - 4\right)/2 = 2.4311$. Il s'ensuit que pour tout $r < \left(5\sqrt{\pi} - 4\right)/2$ **(H4)** est satisfaite.*

Toutes les hypothèses du théorème (2.3.1) sont vérifiées, donc le problème (2.9) admet une unique solution $u \in \mathcal{PC}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\|u\|_{\mathcal{PC}} \leq r$.

2.4 Problème semi-linéaire avec condition non locale

Cette section est consacrée à l'étude d'un problème fractionnaire impulsif semi-linéaire d'ordres multiples soumis à une condition non locale, dans un espace de Banach $(E, \|.\|)$ de dimension finie, un tel problème s'énonce de la manière suivante

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) = A(t)u(t) + \Phi_{t_{k+1}}(t,u), \ t \in J_k, \ k = 0, \ldots, m, \\ u(a) + g(u) = u_0 \in E \\ u\left(t_k^+\right) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.10}$$

Notons que la notion de conditions non locales a été initiée par L. Byzewski et V. Lakshmikantham [26], où ils étudièrent l'existence des solutions faibles et classiques de problème de

Cauchy non local. Ensuite Byzewski prouva dans ces travaux [23, 24] que comparativement aux conditions locales classiques, les conditions non locales peuvent être plus utiles en décrivant certains phénomènes physiques. Dès lors une série d'étude des problèmes non locales est démarré, par exemple K. Deng [33] utilisa la condition non locale $u(0)+g(u)=u_0$ pour décrire le phénomène de diffusion d'une petite quantité de gaz dans un tube transparent où

$$g(u)=\sum_{i=1}^{p} c_i u(\tau_i)$$

avec c_i, $i=1,...,p$ sont des constantes données et $0<\tau_1<...<\tau_p<T$. Le lecteur intéressé est invité à consulter les ouvrages [10, 11, 33, 44].

Remarque 2.4.1. *L'exigence d'un espace de dimension finie est dûe à certaines difficultés techniques rencontrées lors de la vérification de quelques propriétés de compacité.*

On suppose que $A : J \to \mathscr{B}(E)$ est continu et on pose

$$M'' = \max_{t\in J} \|A(t)\|. \tag{2.11}$$

Soit l'hypothèse :

(**H5**) Il existe une constante $G>0$ telle que l'application $g : \mathscr{P}\mathscr{C}(J,E) \to E$ satisfait

$$\|g(u)-g(v)\| \le G\|u-v\|_{\mathscr{P}\mathscr{C}}, \quad \forall u,v \in \mathscr{P}\mathscr{C}(J,E).$$

Considérons l'opérateur $Q : \mathscr{P}\mathscr{C}(J,E) \to \mathscr{P}\mathscr{C}(J,E)$ défini par

$$\begin{aligned} Qu(t) \quad = \quad & u_0 - g(u) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}A(s)u(s)ds \\ & + \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}A(s)u(s)ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_{t_{k+1}}(s,u)ds \\ & + \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{t_i}(s,u)\,ds \\ & + \sum_{a<t_i<t} I_i(u(t_i^-)), \quad t\in J_k,\ k=0,\dots,m. \end{aligned}$$

Avant d'établir notre résultat d'existence nous avons besoin des lemmes suivants

Lemme 2.4.1. *Pour tout $u \in \mathscr{PC}(J;E)$ alors $Qu \in \mathscr{PC}(J;E)$.*

Démonstration. Nous montrons que si $u \in \mathscr{PC}(J;E)$, alors $Qu \in \mathscr{PC}(J;E)$.

En effet, pour $t \in (t_k, t_{k+1})$, $u \in \mathscr{C}((t_k, t_{k+1}), E)$ et $\delta > 0$ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} Qu(t+\delta) \quad = \quad & u_0 - g(u) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t+\delta-s)^{\alpha_k-1} A(s)u(s)ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t+\delta} (t+\delta-s)^{\alpha_k-1} A(s)u(s)ds \\ & + \sum_{a<t_i<t+\delta} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1} A(s)u(s)ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t+\delta-s)^{\alpha_k-1} \Phi_{t_{k+1}}(s,u)ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t+\delta} (t+\delta-s)^{\alpha_k-1} \Phi_{t_{k+1}}(s,u)ds \\ & + \sum_{a<t_i<t+\delta} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{t_i}(s,u)\,ds \\ & + \sum_{a<t_i<t+\delta} I_i(u(t_i^-)),\ t \in J_k,\ k = 0, \ldots, m. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Qu(t+\delta) - Qu(t)\| \quad \le \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} \left[(t-s)^{\alpha_k-1} - (t+\delta-s)^{\alpha_k-1}\right] \|A(s)\|\, \|u(s)\|\, ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t+\delta} (t+\delta-s)^{\alpha_k-1} \|A(s)\|\, \|u(s)\|\, ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} \left[(t-s)^{\alpha_k-1} - (t+\delta-s)^{\alpha_k-1}\right] \left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\| ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t+\delta} (t+\delta-s)^{\alpha_k-1} \left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\| ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse **(H2)** et le Lemme (2.3.2) on obtient

$$\begin{aligned} \|Qu(t+\delta) - Qu(t)\| \quad \le \quad & \frac{(M''+L)\|u\|_{\mathscr{PC}} + L'}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} [(t-s)^{\alpha_k-1} - (t+\delta-s)^{\alpha_k-1}]ds \\ & + \frac{(M''+L)\|u\|_{\mathscr{PC}} + L'}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t}^{t+\delta} (t+\delta-s)^{\alpha_k-1} ds. \end{aligned}$$

En calculant les intégrales on arrive à

$$\|Qu(t+\delta) - Qu(t)\| \le \frac{3\delta^{\alpha_k}\left[(M''+L)\|u\|_{\mathscr{PC}} + L'\right]}{\Gamma'}.$$

Ainsi, le membre de droite tend vers zéro quand $\delta \to 0$.

D'une manière analogue on obtient $\lim_{\delta\to 0} \|Qu(t)-Qu(t-\delta)\| = 0$; ceci prouve que la fonction Qu est continue en t, donc $Qu \in \mathscr{C}((t_k, t_{k+1}), E)$.

Ensuite, pour $t = t_{k+1}$ et $\delta > 0$ suffisamment petit, on obtient

$$\|Qu(t_{k+1}) - Qu(t_{k+1}-\delta)\| \leq \frac{3\delta^{\alpha_k}\left[(M''+L)\|u\|_{\mathscr{PC}} + L'\right]}{\Gamma'},$$

donc, le membre de droite tend vers zéro quand $\delta \to 0$. Par conséquent, Qu est continue au point t_{k+1}. En conclusion nous avons $Qu \in \mathscr{PC}(J,E)$ pour tout $u \in \mathscr{PC}(J,E)$. □

Lemme 2.4.2. *Q est un opérateur continu.*

Démonstration. Pour montrer la continuité de l'opérateur Q, on considère $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{PC}(J,E)$ telle que $u_n \to u$ dans $\mathscr{PC}(J,E)$, alors

$$\begin{aligned}
\|Qu_n(t) - Qu(t)\| \leq\ & \left\|g(u_n) - g(u)\right\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|A(s)(u_n(s)-u(s))\|\,ds \\
& + \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|A(s)(u_n(s)-u(s))\|\,ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u_n) - \Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\|\,ds \\
& + \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\left\|\Phi_{t_i}(s,u_n) - \Phi_{t_i}(s,u)\right\|\,d4s \\
& + \sum_{a<t_i<t}\left\|I_i\left(u_n\left(t_i^-\right)\right) - I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right)\right\|,\ t \in J_k,\ k = 0,\ldots,m.
\end{aligned}$$

Tenant compte de (2.11), les hypothèses (**H2**)-(**H3**) et (**H5**), et dû au Lemme 2.3.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\|Qu_n(t) - Qu(t)\| \leq\ & G\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}} + \frac{M''}{\Gamma(\alpha_k)}\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}ds \\
& + M''\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}}\sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}ds \\
& + \frac{L}{\Gamma(\alpha_k)}\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}ds \\
& + L\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}}\sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}ds \\
& + m\mu\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}},\ t \in J_k,\ k = 0,\ldots,m.
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales du membre de droite il résulte que

$$\|Qu_n - Qu\|_{\mathscr{PC}} \leq \left[G + m\mu + \frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'}\left(M'' + L\right)\right]\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}}.$$

Alors

$$\|Qu_n - Qu\|_{\mathscr{PC}} \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

ce qui prouve la continuité de Q. □

Lemme 2.4.3. *L'opérateur Q envoie tout borné de $\mathscr{PC}(J,E)$ en une partie relativement compact.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $B_\varepsilon = \{u \in \mathscr{PC}(J,E) : \|u\|_{\mathscr{PC}} \leq \varepsilon\}$. En posant $\mathscr{W} = \{Qu : u \in B_\varepsilon\}$, on obtient pour tout $u \in B_\varepsilon$ et $t \in J_k,\ k = 0,\ldots,m$ l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\|Qu(t)\| \quad \leq \quad & \left\|u_0 - g(u)\right\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|A(s)\|\,\|u(s)\|\,ds \\
& + \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|A(s)\|\,\|u(s)\|\,ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\|ds \\
& + \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\left\|\Phi_{t_i}(s,u)\right\|ds + \sum_{a<t_i<t}\left\|I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\|Qu(t)\| \quad \leq \quad & \|u_0\| + G\|u\|_{\mathscr{PC}} + \left\|g(0)\right\| + \frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'}M''.\|u\|_{\mathscr{PC}} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}[L\|u\|_{\mathscr{PC}} + L']ds \\
& + \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_k-1}[L\|u\|_{\mathscr{PC}} + L']ds + m\mu\|u\|_{\mathscr{PC}} + m\mu',
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Qu\|_{\mathscr{PC}} \leq \|u_0\| + m\mu' + \left\|g(0)\right\| + \frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'}\left(M''\varepsilon + L\varepsilon + L'\right) + G\varepsilon + m\mu\varepsilon := \varrho,$$

avec L' et μ' sont les constantes définis respectivement dans (2.7) et (2.8). D'où $\mathscr{W}$ est uniformément borné.

Nous allons établir l'équicontinuité de $\mathscr{W}$.

Soit $u \in B_\varepsilon$, alors pour $t_k < \tau_1 < \tau_2 \leq t_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\|Qu(\tau_2) - Qu(\tau_1)\| \quad \leq \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{\tau_1} [(\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1}] \|A(s)\| \|u(s)\| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} \|A(s)\| \|u(s)\| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{\tau_1} [(\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1}] \|\Phi_{t_{k+1}}(s, u)\| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi_{t_{k+1}}(s, u)\| ds.
\end{aligned}$$

Compte tenu de (2.11) et les hypothèses **(H1)-H3** et **H5** on a

$$\begin{aligned}
\|Qu(\tau_2) - Qu(\tau_1)\| \quad \leq \quad & \frac{(M'' + L)\varepsilon + L'}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{\tau_1} [(\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1}] ds \\
& + \frac{(M'' + L)\varepsilon + L'}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} ds \\
\leq \quad & 3 \frac{\left[(M'' + L)\varepsilon + L'\right]}{\Gamma'} (\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_k}.
\end{aligned}$$

Quand $\tau_1 \to \tau_2$, le membre de droite tend vers zéro, d'où l'équicontinuité de $\mathscr{W}$.

On note que les fermetures des sous ensembles $\mathscr{W}(t) := \left\{Qu(t) : u \in B_\varepsilon,\ t \in J \setminus \{t_k\},\ k = 1, \ldots, m\right\}$, $\mathscr{W}(t_k^-) := \left\{Qu\left(t_k^-\right) : u \in B_\varepsilon\right\}$ et $\mathscr{W}(t_k^+) := \left\{Qu\left(t_k^+\right) : u \in B_\varepsilon\right\}$, $k = 1, \ldots, m$, sont bornées dans E, ce qui impliquent leur compacité ($\dim E < \infty$).

En vertu du théorème $\mathscr{PC}$-Arzela-Ascoli nous concluons que $\mathscr{W}$ est un sous-ensemble relativement compact de $\mathscr{PC}(J; E)$. □

Le théorème suivant établit l'existence de la solution du problème (2.10)

Théorème 2.4.1. *Si les hypothèses (**H1**)-(**H3**) et (**H5**) sont satisfaites, alors le problème (2.10) admet au moins une solution $u \in \mathscr{PC}(J, E)$.*

Démonstration. Afin d'établir l'existence de la solution nous allons montrer que Q admet un point fixe, pour ce faire nous utilisons le théorème de point fixe de Schaefer.

Compte tenu des Lemmes 2.4.2, 2.4.3 Q est un opérateur complètement continu, donc il suffit de prouver que l'ensemble

$$X = \{u \in \mathscr{PC}(J,E) : u = \lambda Qu,\ \lambda \in (0,1)\}$$

est borné.

En effet, soit $u \in X$, alors $u = \lambda Qu$, pour $\lambda \in (0,1)$.

Ainsi, en se servant des hypothèses **(H1)-(H3)**, **(H5)** et (2.11) on obtient pour tout $t \in J_k,\ \ k = 1,\dots,m,$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \lambda\|u_0\| + \lambda\|g(u)\| + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|A(s)\|.\|u(s)\|ds \\
&\quad +\lambda\sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|A(s)\|.\|u(s)\|ds \\
&\quad +\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\|ds \\
&\quad +\lambda\sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{t_i}(s,u)\|ds + \lambda\sum_{a<t_i<t}\|I_i(u(t_i^-))\| \\
&\quad +\lambda\sum_{a<t_i<t}\|I_i(0)\| \\
&\leq \lambda\Big[\|u_0\| + m\mu' + \|g(0)\| + \frac{(m+1)\,T'}{\Gamma'}(M''\varepsilon + L\varepsilon + L') + G\varepsilon + m\mu\varepsilon\Big] < \infty.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que X est borné.

Nous concluons par le théorème de point fixe de Schaefer que l'opérateur Q admet au moins un point fixe $u \in \mathscr{PC}(J,E)$ qui est la solution du problème (2.10), ce qui achève la démonstration. □

Exemple 2.4.1. *Considérons le problème impulsif d'ordres fractionnaires multiples suivant*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) = \dfrac{e^{-t}}{5} u(t) + \dfrac{|u(t)|}{t^2+3} + \displaystyle\int_{3/4}^{t} e^{-\frac{|u(\sin s)|}{4}} ds + \int_{3/4}^{t_{k+1}} \ln(2+|u(\cos s)|)\, ds, \\ t \in J_k,\ k = 0,1,2,3. \\ u(3/4) + g(u) = 1, \\ u\left(t_k^+\right) = u\left(t_k^-\right) + \dfrac{\sin\left(u\left(t_k^-\right)\right)}{7},\ k = 1,2,3. \end{cases} \tag{2.12}$$

On prend $(E, \|.\|) = (\mathbb{R}, |.|)$, *soit* $J = \left[\frac{3}{4}, 2\right]$ *avec* $J_0 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, $J_1 = \left(1, \frac{7}{6}\right]$, $J_2 = \left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}\right]$, $J_3 = \left(\frac{3}{2}, 2\right]$ *où* $a = \frac{3}{4}$ *et* $m = 3$.

t_k	α_k
$t_0 = 3/4$	$\alpha_0 = 1/2$
$t_1 = 1$	$\alpha_1 = 5/4$
$t_2 = 7/6$	$\alpha_2 = 1/6$
$t_3 = 3/2$	$\alpha_3 = 3/4$

On définit

$$A(t) = \frac{e^{-t}}{5} I,$$

$$Hu(t) = \int_{3/4}^{t} e^{-\frac{|u(\sin s)|}{4}} ds +,\ \ K_{t_{k+1}} u(t) = \int_{3/4}^{t_{k+1}} \ln(2+|u(\cos s)|)\, ds,\ k = 0,1,2,3$$

et

$$\Phi_{t_{k+1}}(t, u(t)) = \frac{|u(t)|}{t^2+3} + \int_{3/4}^{t} e^{-\frac{|u(\sin s)|}{4}} ds + \int_{3/4}^{t_{k+1}} \ln(2+|u(\cos s)|)\, ds,\ k = 0,1,2,3.$$

$$I_k u\left(t_k^-\right) = \frac{\sin\left(u\left(t_k^-\right)\right)}{7},\ k = 1,2,3.$$

La condition non locale est donnée par $u(3/4) = 1 - c_1 u(t_1)$ *où*

$$g(u) = c_1 u(t_1)$$

*L'hypothèse **(H1)** donne*

$$\begin{aligned} T' &= \max_{0\le i\le 3}\left\{(T-a)^{\alpha_i}\right\} = \max_{0\le i\le 3}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha_i}\right\} \\ &= \max\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{1/2},\left(\frac{5}{4}\right)^{5/4},\left(\frac{5}{4}\right)^{1/6},\left(\frac{5}{4}\right)^{3/4}\right\} \\ &= 1.3217, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \min_{0\le i\le 3}\{\Gamma(\alpha_i+1)\} = \min_{0\le i\le 3}\left\{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right),\Gamma\left(\frac{3}{2}\right),\Gamma\left(\frac{9}{4}\right),\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\right\} \\ &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Pour tout $u, v \in \mathscr{B}_r$ et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |Hu(t) - Hv(t)| &\le \int_{3/4}^{t}\left|e^{-\frac{|u(\sin s)|}{4}} - e^{-\frac{|v(\sin s)|}{4}}\right| ds \\ &\le \frac{1}{4}\left(T-\frac{3}{4}\right)\|u-v\|_{\mathscr{PC}} \\ &\le \frac{5}{16}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}, \end{aligned}$$

Pour $k = 0,1,2,3,$ on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \left|K_{t_{k+1}}u(t) - K_{t_{k+1}}v(t)\right| &\le \int_{3/4}^{t_{k+1}} |\ln(2+|u(\cos s)|) - \ln(2+|v(\cos s)|)|\, ds \\ &\le \frac{1}{2}\left(T-\frac{3}{4}\right)\|u-v\|_{\mathscr{PC}} \\ &\le \frac{5}{8}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}, \end{aligned}$$

*Maintenant, en appliquant l'hypothèse **(H2)** on arrive à*

$$\begin{aligned} \left|\Phi_{t_{k+1}}(t,u) - \Phi_{t_{k+1}}(t,v)\right| &\le \left|\frac{|u(t)|}{t^2+3} - \frac{|v(t)|}{t^2+3}\right| + |Hu(t) - Hv(t)| + \left|K_{t_{k+1}}u(t) - K_{t_{k+1}}v(t)\right| \\ &\le \frac{61}{48}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}. \end{aligned}$$

où

$$L_1 = \frac{1}{3} \textit{ et } L = \frac{61}{48}.$$

*L'hypothèse **(H3)** donne*

$$\begin{aligned}
|I_k(u) - I_k(v)| &\leq \left| \frac{\sin\left(u\left(t_k^-\right)\right)}{7} - \frac{\sin\left(u\left(t_k^-\right)\right)}{7} \right| \\
&\leq \frac{1}{7} \|u - v\|_{\mathscr{PC}},
\end{aligned}$$

d'où $\mu = \dfrac{1}{7}$.

*Finalement, il découle de la condition **(H5)** que*

$$\left| g(u) - g(v) \right| \leq c_1 \|u - v\|_{\mathscr{PC}},$$

avec $c_1 = G = \dfrac{1}{9}$.

En conclusion, toutes les hypothèses du Théorème (2.4.1) sont vérifiées, donc le problème (2.12) admet au moins une solution $u \in \mathscr{PC}([3/4, 2], \mathbb{R})$.

2.4.1 Dépendance de la solution par rapport à la condition initiale

Ce paragraphe s'intéresse à l'étude de la dépendance de la solution du problème (2.10) par rapport à la condition initiale u_0.

Proposition 2.4.1. *Sous les hypothèses **(H1)-(H3)** et (**H5**) la solution du problème (2.10) dépend continûment de sa valeur initiale si*

$$G + m\mu + (m+1)\left(L + M''\right)\frac{T'}{\Gamma'} < 1.$$

Démonstration. Soit v une solution du problème (2.10) avec la condition initiale

$v(a) = v_0 - g(v)$. Alors $v(t)$ satisfait l'équation intégrale

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_0 - g(v) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}A(s)v(s)ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}A(s)v(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_{t_{k+1}}(s,v)\,ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{t_i}(s,v)\,ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t} I_i(v(t_i^-)),\ t\in J_k,\ k=0,\ldots,m.
\end{aligned}$$

En estimant la différence entre $u(t)$ et $v(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\| &\le \|u_0-v_0\| + \|g(u)-g(v)\| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|A(s)\|.\|u(s)-v(s)\|ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|A(s)\|.\|u(s)-v(s)\|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)-\Phi_{t_{k+1}}(s,v)\|ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{t_i}(s,u)-\Phi_{t_i}(s,v)\|ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\|I_i(u(t_i^-))-I_i(v(t_i^-))\|,\ t\in J_k,\ k=0,\ldots,m.
\end{aligned}$$

Les hypothèses **(H2)-(H3)**, **(H5)** et (2.11) impliquent que

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\| &\le \|u_0-v_0\| + G\|u-v\|_{\mathscr{PC}} + \frac{M''\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{M''\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}ds \\
&+ \frac{L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}ds \\
&+ \sum_{a<t_i<t}\mu\|(u(t_i^-))-(v(t_i^-))\|,\ t\in J_k,\ k=0,\ldots,m.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\| \le \|u_0-v_0\| + G\|u-v\|_{\mathscr{PC}} + \frac{M''(m+1)\,T'}{\Gamma'}\|u-v\|_{\mathscr{PC}} \\ + \frac{L(m+1)\,T'}{\Gamma'}\|u-v\|_{\mathscr{PC}} + m\mu\|u-v\|_{\mathscr{PC}}, \\ t\in J_k,\ k=0,\dots,m.\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur l'intervalle J on arrive à

$$\|u-v\|_{\mathscr{PC}} \le \frac{1}{\rho}\|u_0-v_0\|,$$

où

$$\rho = 1-G-m\mu-(m+1)\left(L+M''\right)\frac{T'}{\Gamma'},$$

ce qui prouve que l'application $u_0 \mapsto u$ est continue de $E \to \mathscr{PC}(J,E)$, ce qui prouve la proposition. $\square$

Chapitre

3 Etude d'un problème aux limites impulsif d'ordres fractionnaires multiples

Une attention particulière a été focalisée récemment sur l'étude des problèmes fractionnaires soumis à des conditions aux limites de type intégral ou à deux, trois point ou multi-points. Ces résultats peuvent être consultés dans les références [2, 4, 5, 6, 27, 62, 69, 72, 75, 77].

En dépit du grand nombre de publications traitant les problèmes aux limites fractionnaires il y a seulement un nombre restreint de chercheurs qui ont étudié les équations différentielles fractionnaires impulsives soumises à des conditions aux limites, voir [1, 7, 8, 76].

Dans ce contexte, nous apportons notre contribution au développement de l'étude des problèmes impulsifs d'ordres fractionnaires multiples en abordant la question d'existence et d'unicité des solutions d'une nouvelle classe d'équations fractionnaires impulsives soumises à des conditions aux limites intégrales fractionnaires de type multi-point de la forme suivante

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) = f(t, u(t), \int_{t_k}^{t} h(t,s,u(s))ds), \ t \in J_k, \ k = 0, ..., m, \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \\ u(0) + au(T) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathscr{I}_{t_k^+}^{\beta_k} u(\varepsilon_k). \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous notons que ces problèmes ne sont pas encore explorés par les chercheurs.

Ce chapitre est composé de trois sections.
Dans la première nous établissons l'équivalence entre une équation intégrale et le problème étudié, ensuite dans la deuxième section nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de tel problème et nous terminons par un exemple illustratif.
Enfin, nous fournissons à la dernière section les hypothèses sous lesquelles nous pouvons établir l'existence de la solution, la validité de ce résultat est justifiée par un exemple adéquat.

3.1 Equivalence entre le problème (3.1) et une équation intégrale

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous sommes essentiellement intéressé par l'étude de l'existence et l'unicité de la solution correspondant au problème aux limites impulsif d'ordres fractionnaire multiples suivant

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) = f(t, u(t), \int_{t_k}^t h(t,s,u(s))ds), \ t \in J_k, \ k = 0, ..., m, \\ u(t_k^+) = u\left(t_k^-\right) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \\ u(0) + au(T) = \sum_{k=0}^m b_k \mathscr{I}_{t_k^+}^{\beta_k} u(\varepsilon_k), \end{cases}$$

où $J = [0, T]$ avec $T < \infty$, et $J_0 = [0, t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$; $k = 1, ..., m$, ${}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha_k \in (0, 1)$; $k = 0, ..., m$;
$u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k^-))$, représentent les conditions impulsives. $\mathscr{I}_{t_k^+}^{\beta_k}$ est l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\beta_k > 0$; $t_k < \varepsilon_k < t_{k+1}$ et a, b_k sont des constantes réelles données.
$f : J \times E \times E \to E$ est une fonction non linéaire continue, et

$$h : D \times E \to E, \ \ D = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq s \leq t \ \leq T\},$$

est une fonction continue sur $D \times E$.

Remarque 3.1.1. *Ce genre de fonctions non linéaires apparaissent dans certains problèmes mathématiques modélisant la propagation de la chaleur dans des matériaux mémoire ainsi que les problèmes visco-élastiques dont le terme intégral h représente la partie de viscosité, pour plus de détails le lecteur pourra se référer à [28].*

Pour plus de simplicité nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} H_k u(t) &= \int_{t_k}^{t} h(t,s,u(s))ds \\ \Phi_k(t,u(t)) &= f(t,u(t),H_k u(t)), \text{ pour } k=0,\dots,m. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous rappelons la définition de la solution du problème (3.1).

Définition 3.1.1. *Une fonction $u \in \mathscr{PC}(J;E)$ est dite solution du problème (3.1) si ${}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t)$ existe sur J_k, pour $k=0,\dots,m$ et elle satisfait*

- *l'équation ${}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) = \Phi_k(t,u(t))$ dans J_k, $k=0,\dots,m$,*
- *les conditions impulsives $u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k^-))$, $k=1,\dots,m$,*
- *la condition aux limites $u(0) + au(T) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathscr{I}_{t_k^+}^{\beta_k} u(\varepsilon_k)$.*

Suite à cette définition on peut établir l'équivalence suivante :

Lemme 3.1.1. *Une fonction $u \in \mathscr{PC}(J;E)$ satisfait l'équation intégrale suivante*

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} \Phi_0(s,u(s))ds + K_u, \quad t \in [0,t_1] \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \displaystyle\int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha_k-1} \Phi_k(s,u(s))ds \\ +\sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{i-1}(s,u(s))ds \\ +\sum_{i=1}^{k} I_i(u(t_i^-)) + K_u, \ t \in J_k, \ \ k=1,\dots,m, \end{cases} \tag{3.2}$$

si et seulement si elle satisfait au problème (3.1), où K_u est donné par

$$\begin{aligned}
K_u &= \frac{1}{\eta}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}\Phi_k(s,u(s))ds\right.\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}I_i(u(t_i^-))-a\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\alpha_m-1}\Phi_m(s,u(s))ds\right.\\
&\left.\left.+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds+\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i^-))\right)\right],
\end{aligned}$$

et $\eta=1+a-\sum_{k=0}^{m}\dfrac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}\neq 0.$

Démonstration. En appliquant le Théorème 1.1.8 pour $t\in J_0=[0,t_1]$, on obtient l'équation intégrale suivante

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_0-1}\Phi_0(s,u(s))ds-c,\ \ t\in J_0. \tag{3.3}$$

De façon analogue à la preuve du Lemme 2.3.1 nous obtenons pour $t\in J_k,\ \ k=1,\dots,m$, l'expression générale suivante

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_k(s,u(s))ds\\
&+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds\\
&+\sum_{i=1}^{k}I_i(u(t_i^-))-c.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{t_k^+}^{\beta_k}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}\Phi_k(s,u(s))ds\\
&+\sum_{i=1}^{k}\frac{(t-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds\\
&+\sum_{i=1}^{k}\frac{(t-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}I_i(u(t_i^-))-c\frac{(t-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}.
\end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} b_k \mathscr{J}_{t_k^+}^{\beta_k} u(\varepsilon_k) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \int_{t_k}^{\varepsilon_k} (\varepsilon_k - s)^{\alpha_k+\beta_k-1} \Phi_k(s, u(s))ds \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{b_k(\varepsilon_k - t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{i-1}(s, u(s))ds \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{b_k(\varepsilon_k - t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} I_i(u(t_i^-)) - c \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k(\varepsilon_k - t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, en combinant (3.3) et (3.4) on arrive à

$$\begin{aligned}
u(0) &= -c \\
u(T) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_m)} \int_{t_m}^{T} (T-s)^{\alpha_m-1} \Phi_m(s, u(s))ds \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{i-1}(s, u(s))ds \\
&+ \sum_{i=1}^{m} I_i(u(t_i^-)) - c.
\end{aligned}$$

La condition aux limites $u(0) + au(T) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathscr{J}_{t_k^+}^{\beta_k} u(\varepsilon_k)$ implique

$$\begin{aligned}
-c = K_u &= \frac{1}{\eta} \Bigg[\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)} \int_{t_k}^{\varepsilon_k} (\varepsilon_k - s)^{\alpha_k+\beta_k-1} \Phi_k(s, u(s))ds \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{b_k(\varepsilon_k - t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{i-1}(s, u(s))ds \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{b_k(\varepsilon_k - t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} I_i(u(t_i^-)) \\
&- a\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha_m)} \int_{t_m}^{T} (T-s)^{\alpha_m-1} \Phi_m(s, u(s))ds \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{i-1}(s, u(s))ds + \sum_{i=1}^{m} I_i(u(t_i^-)) \Bigg) \Bigg],
\end{aligned}$$

où $\eta = 1 + a - \sum_{k=0}^{m} \dfrac{b_k(\varepsilon_k - t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} \neq 0$.

Inversement, nous supposons que u satisfait (3.2), donc pour $t \in J_k$, $k = 0, \ldots, m$, on a

$$\begin{aligned}
{}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) &= {}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} \Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1} \Phi_k(s, u(s))ds \Big] \\
&= {}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} \Big(\mathscr{J}_{t_k^+}^{\alpha_k} \Phi_k(t, u(t)) \Big) \\
&= \Phi_k(t, u(t)).
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant la condition aux limites, nous avons

$$\begin{aligned} u(0) &= K_u \\ u(T) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(t-s)^{\alpha_m-1}\Phi_m(s,u(s))ds \\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds+\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i^-))+K_u, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} u(0)+au(T) &= \frac{a}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(t-s)^{\alpha_m-1}\Phi_m(s,u(s))ds \\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{a}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds+\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i^-)) \\ &+\frac{\eta+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}}{\eta}\Bigg[\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}\Phi_k(s,u(s))ds \\ &+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds \\ &+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}I_i(u(t_i^-)) \\ &-a\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\alpha_m-1}\Phi_m(s,u(s))ds \\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds+\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i^-))\Bigg)\Bigg] \\ &= \sum_{k=0}^{m}b_k\mathscr{I}_{t_k^+}^{\beta_k}u(\varepsilon_k). \end{aligned}$$

Finalement, on note que les conditions impulsives $u\left(t_k^+\right)=u(t_k)+I_k(u(t_k^-))$, $k=1,...,m.$ s'obtiennent par une vérification directe. □

Dans le but d'établir nos résultats d'existence et d'unicité nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.2. *Soit $h(t,s,u)$ une fonction continue par rapport à s et t, et il existe une constante positive C telle que*

$$\|h(t,s,u)-h(t,s,v)\|\leq C\|u-v\|,\ \ \forall t,s\in J\ ,\ \ \forall u,v\in E,$$

Alors, il existe une constante positive C' telle que

$$\| H_k u(t) \| \leq T \left(C \| u \|_{\mathscr{PC}} + C' \right)$$

et

$$\| H_k u(t) - H_k v(t) \| \leq CT \| u - v \|_{\mathscr{PC}},$$

pour tout $u, v \in \mathscr{PC}(J, E)$, $t \in J$, $C' = \max_{(t,s)\in D} \| h(t,s,0) \|$ et $k = 0, \ldots, m$.

Démonstration. Les estimations ci dessus s'établissent comme pour la preuve du Lemme 2.3.2. □

3.2 Existence et unicité de la solution

Pour établir le résultat d'existence et d'unicité nous considérons des conditions appropriées sur les fonctions impliquées dans le problème (3.1). Nous proposons les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe une fonction $L_1 \in L^{\infty}\left(J, \mathbb{R}^+\right)$ telle que

$$\begin{aligned} \|\Phi_k(t, u(t)) - \Phi_k(t, v(t))\| \quad &\leq \quad (CT + L_1(t)) \|u - v\|_{\mathscr{PC}}, \\ & t \in J, \;\; u, v \in \mathscr{PC}(J, E), \; k = 0, \ldots, m. \end{aligned}$$

On pose $L = CT + \|L_1\|_{\infty}$ et $L_2 = \sup_{t\in J} \| f(t, 0, 0) \|$.

(H2) Il existe une constante positive $\mu > 0$ telle que

$$\| I_k(u) - I_k(v) \| \leq \mu \| u - v \|, \;\; u, v \in E \;\text{ et }\; k = 1, \ldots, m.$$

(H3) Le nombre réel positif

$$\xi = \frac{T' L}{\Gamma'} (\Lambda + \Omega) + \mu \Omega$$

satisfait $0<\xi<1$, où $T'=\max_{0\le i\le m}\left\{T^{\alpha_i}\right\}$, $\Gamma'=\min_{0\le i\le m}\{\Gamma(\alpha_i+1)\}$ et

$$\Omega = m\left(1+\frac{a}{|\eta|}+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k T^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}\right),$$
$$\Lambda = 1+\frac{a}{|\eta|}+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k T^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k+1,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}.$$

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer et démontrer le résultat principal de cette section.

Théorème 3.2.1. *Si les hypothèses **(H1)-(H3)** sont satisfaites, alors le problème (3.1) admet une unique solution $u\in\mathscr{PC}(J,E)$.*

Démonstration. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de point fixe de Banach.
On définit l'opérateur $\mathscr{N}:\mathscr{PC}(J,E)\to\mathscr{PC}(J,E)$ par

$$\begin{aligned}\mathscr{N}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_k(s,u(s))ds\\ &\quad+\sum_{0<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{i-1}(s,u(s))ds\\ &\quad+\sum_{0<t_i<t}I_i(u(t_i^-))+K_u,\qquad t\in J_k,\ k=0,\dots,m.\end{aligned}$$

Notons qu'en procédant de la même façon que dans la preuve du Lemme 2.4.1 on démontre que si $u\in\mathscr{PC}(J;E)$, alors $\mathscr{N}u\in\mathscr{PC}(J;E)$.
Nous allons maintenant prouver que $\mathscr{N}$ est une contraction ; en effet, pour toutes $u,v\in\mathscr{PC}(J,E)$ on a

$$\begin{aligned}\|\mathscr{N}u(t)-\mathscr{N}v(t)\| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\|\Phi_k(s,u(s))-\Phi_k(s,v(s))\|ds\\ &\quad+\sum_{0<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\\ &\quad\times\|\Phi_{i-1}(s,u(s))-\Phi_{i-1}(s,v(s))\|\,ds\\ &\quad+\sum_{0<t_i<t}\|I_i(u(t_i^-))-I_i(v(t_i^-))\|+\|K_u-K_v\|.\end{aligned}$$

Les hypothèses **(H1)**-**(H2)** impliquent

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)-\mathcal{N}v(t)\| \leq\ & \frac{LT^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}+L\sum_{0<t_i<t}\frac{T^{\alpha_{i-1}}}{\Gamma(\alpha_{i-1}+1)}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\\
&+\mu\sum_{0<t_i<t}\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\|+\|K_u-K_v\|.
\end{aligned}
$$

En estimant la différence entre K_u et K_v, on arrive à

$$
\begin{aligned}
\|K_u-K_v\| \leq\ & \frac{1}{|\eta|}\Bigg[\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}\|\Phi_k(s,u(s))-\Phi_k(s,v(s))\|\,ds\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\\
&\times\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{i-1}(s,u(s))-\Phi_{i-1}(s,v(s))\|\,ds\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}\left\|I_i(u(t_i^-))-I_i(v(t_i^-))\right\|\\
&+\frac{a}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\alpha_m-1}\|\Phi_m(s,u(s))-\Phi_m(s,v(s))\|\,ds\\
&+\sum_{i=1}^{m}\frac{a}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{i-1}(s,u(s))-\Phi_{i-1}(s,v(s))\|\,ds\\
&+a\sum_{i=1}^{m}\left\|I_i(u(t_i^-))-I_i(v(t_i^-))\right\|\Bigg].
\end{aligned}
$$

Compte tenu du Lemme 3.1.2 et **(H1)**, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\|K_u-K_v\| \leq\ & \frac{1}{|\eta|}\Bigg[L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{k=0}^{m}\frac{b_kT^{\alpha_k+\beta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)}\\
&+L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_kT^{\alpha_{i-1}+\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1}+1)}\\
&+\mu\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_kT^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}\left\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\right\|+aL\frac{T^{\alpha_m}}{\Gamma(\alpha_m+1)}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\\
&+aL\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{i=1}^{m}\frac{T^{\alpha_{i-1}}}{\Gamma(\alpha_{i-1}+1)}+a\mu\sum_{i=1}^{m}\left\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\right\|\Bigg].
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)-\mathcal{N}v(t)\| \leq\; & \frac{T^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}+L\sum_{0<t_i<t}\frac{T^{\alpha_{i-1}}}{\Gamma(\alpha_{i-1}+1)}\|u-v\|_{\mathscr{PC}} \\
& +\mu\sum_{0<t_i<t}\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\|+L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{k=0}^{m}\frac{b_kT^{\alpha_k+\beta_k}}{\left|\eta\right|\Gamma(\alpha_k+\beta_k+1)} \\
& +L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_kT^{\alpha_{i-1}+\beta_k}}{\left|\eta\right|\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1}+1)} \\
& +\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_kT^{\beta_k}}{\left|\eta\right|\Gamma(\beta_k+1)}\mu\left\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\right\| \\
& +aL\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\frac{T^{\alpha_m}}{\left|\eta\right|\Gamma(\alpha_m+1)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{a\mu}{\left|\eta\right|}\left\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\right\| \\
& +aL\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{i=1}^{m}\frac{T^{\alpha_{i-1}}}{\left|\eta\right|\Gamma(\alpha_{i-1}+1)}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\Gamma\left(\alpha_k+\beta_k+1\right)=\frac{\Gamma\left(\beta_k\right)\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}{\mathbf{B}\left(\alpha_k+1,\beta_k\right)},$$

alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)-\mathcal{N}v(t)\| \leq\; & \frac{LT^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}+\sum_{0<t_i<t}\frac{LT^{\alpha_{i-1}}}{\Gamma(\alpha_{i-1}+1)}\|u-v\|_{\mathscr{PC}} \\
& +\mu\sum_{0<t_i<t}\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\| \\
& +L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{k=0}^{m}\frac{b_kT^{\alpha_k}T^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k+1,\beta_k\right)}{\left|\eta\right|\Gamma\left(\beta_k\right)\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} \\
& +L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_kT^{\alpha_{i-1}}T^{\beta_k}}{\left|\eta\right|\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1}+1)} \\
& +\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_kT^{\beta_k}}{\left|\eta\right|\Gamma(\beta_k+1)}\mu\left\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\right\| \\
& +L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\frac{aT^{\alpha_m}}{\left|\eta\right|\Gamma(\alpha_m+1)} \\
& +L\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\sum_{i=1}^{m}\frac{aT^{\alpha_{i-1}}}{\left|\eta\right|\Gamma(\alpha_{i-1}+1)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{a\mu}{\left|\eta\right|}\left\|u(t_i^-)-v(t_i^-)\right\|.
\end{aligned}$$

En estimant le membre de droite nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)-\mathcal{N}v(t)\| &\leq \left[\frac{T'L}{\Gamma'}\Big(1+m+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k+1,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}\right.\\
&\quad +m\sum_{k=1}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}+\frac{a}{|\eta|}+\frac{am}{|\eta|}\Big)\\
&\quad \left.+\mu m\Big(1+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}+\frac{a}{|\eta|}\Big)\right]\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\\
&\leq \left[\frac{T'L}{\Gamma'}\left(1+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k+1,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}+\frac{a}{|\eta|}\right.\right.\\
&\quad \left.+m\left(1+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}+\frac{a}{|\eta|}\right)\right)\\
&\quad \left.+\mu m\left(1+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}+\frac{a}{|\eta|}\right)\right]\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\\
&\leq \left[\frac{T'L}{\Gamma'}(\Lambda+\Omega)+\mu\Omega\right]\|u-v\|_{\mathscr{PC}}\\
&\leq \xi\,\|u-v\|_{\mathscr{PC}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\mathcal{N}u-\mathcal{N}v\|_{\mathscr{PC}}\leq\xi\,\|u-v\|_{\mathscr{PC}}.$$

Or, l'hypothèse **(H3)** implique que $\xi\in(0,1)$, ce qui entraine que $\mathcal{N}$ est une contraction stricte. Le principe de contraction de Banach nous permet de conclure qu'il existe un unique point fixe $u=\mathcal{N}u$, ce qui établit le résultat. □

Afin de valider le résultat précédent nous présentons l'exemple suivant :

Exemple 3.2.1. *Examinons le problème fractionnaire impulsif aux limites suivant*

$$\begin{cases}
{}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+}u(t)=\dfrac{\ln(3+|u(t)|)}{t^2+8}+\displaystyle\int_{t_k}^{t}\frac{\cos\left(\frac{u(s)}{6}\right)}{e^t+4}ds,\ t\in J_k,\ k=0,1,2,\\
u\left(t_k^+\right)=u\left(t_k^-\right)+\sin\left(\dfrac{u\left(t_k^-\right)}{9}\right),\ k=1,2,\\
u(0)+u(1)=\sum_{k=0}^{2}b_k\mathscr{I}^{\beta_k}_{t_k^+}u(\varepsilon_k)
\end{cases}\tag{3.5}$$

Soit $(E, \|.\|) = (\mathbb{R}, |.|)$ *et* $J = [0,1]$, $J_0 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $J_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$, $J_2 = \left(\frac{2}{3}, 1\right]$,

avec $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{2}{3}$, $m = 2$ *et* $a = 1$.

Les constantes ε_k, b_k, β_k, α_k *sont données par*

ε_k	b_k	β_k	α_k
$\varepsilon_0 = 1/6$	$b_0 = 1$	$\beta_0 = 3/2$	$\alpha_0 = 1/5$
$\varepsilon_1 = 1/2$	$b_1 = 1/6$	$\beta_1 = 4/5$	$\alpha_1 = 1/2$
$\varepsilon_2 = 3/4$	$b_2 = 1/8$	$\beta_2 = 3/4$	$\alpha_2 = 1/6$

Définissons

$$\begin{aligned} H_k(t) &= \int_{t_k}^{t} \frac{\cos\left(\frac{u(s)}{6}\right)}{e^t + 4} ds, \ k = 0,1,2, \\ \Phi_k(s, u(s)) &= \frac{\ln(3 + |u(t)|)}{t^2 + 8} + H_k u(t), \\ I_k u\left(t_k^-\right) &= \sin\left(\frac{u\left(t_k^-\right)}{9}\right), \ k = 1,2. \end{aligned}$$

Pour $u, v \in \mathscr{PC}([0,1], \mathbb{R})$, *et* $t \in J$, *on a*

$$\begin{aligned} |H_k u(t) - H_k v(t)| &\leq \int_{t_k}^{t} \frac{\left|\cos\left(\frac{u(s)}{6}\right) - \cos\left(\frac{v(s)}{6}\right)\right|}{e^t + 4} ds \\ &\leq \frac{\|u - v\|_{\mathscr{PC}}}{6\left(e^t + 4\right)} \\ &\leq \frac{1}{24} \|u - v\|_{\mathscr{PC}}. \end{aligned}$$

D'où $C = \dfrac{1}{24}$.

*D'autre part, l'hypothèse **(H1)** donne*

$$\begin{aligned} |\Phi_k(s, u(s)) - \Phi_k(s, v(s))| &\leq \frac{|\ln(3 + |u(t)|) - \ln(3 + |v(t)|)|}{t^2 + 8} + |H_k u(t) - H_k v(t)| \\ &\leq \left(\frac{1}{3\left(t^2 + 8\right)} + \frac{1}{24}\right) \|u - v\|_{\mathscr{PC}}. \\ &\leq \frac{1}{12} \|u - v\|_{\mathscr{PC}}, \end{aligned}$$

où

$$\|L_1\|_\infty = \frac{1}{24} \; et \; L = \frac{1}{12}.$$

*En appliquant l'hypothèse **(H2)** il résulte que*

$$\begin{aligned}\left|I_k\left(u\left(t_k^-\right)\right) - I_k\left(v\left(t_k^-\right)\right)\right| &= \left|\sin\left(\frac{u\left(t_k^-\right)}{9}\right) - \sin\left(\frac{v\left(t_k^-\right)}{9}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{9}\|u-v\|_{\mathscr{PC}},\end{aligned}$$

alors $\mu = \frac{1}{9}$.

*Maintenant nous allons vérifier la condition **(H3) :***

Tout d'abord, en calculant la valeur de η *nous obtenons*

$$\begin{aligned}\eta &= 1 + a - \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k\left(\varepsilon_k - t_k\right)^{\beta_k}}{\Gamma\left(\beta_k+1\right)} \\ &= 1 + 1 - \left(\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{5}}}{6\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{4}}}{8\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\right) \\ &= 1.868.\end{aligned}$$

Ensuite, l'évaluation de Ω *donne*

$$\begin{aligned}\Omega &= m\left(1 + \frac{a}{|\eta|} + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k T^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma\left(\beta_k+1\right)}\right) \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{6|\eta|\,\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)} + \frac{1}{8|\eta|\,\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} + \frac{1}{|\eta|}\right) \\ &= 3.407.\end{aligned}$$

La valeur de Λ *est donnée par*

$$\begin{aligned}\Lambda &= 1 + \frac{a}{|\eta|} + \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k T^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k+1, \beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)} \\ &= 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{|\eta|\,\Gamma\left(\frac{27}{10}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{6|\eta|\,\Gamma\left(\frac{23}{10}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{8|\eta|\,\Gamma\left(\frac{23}{12}\right)} + \frac{1}{|\eta|} \\ &= 1.985.\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}\Gamma' &= \min\{\Gamma(\alpha_0+1), \Gamma(\alpha_1+1), \Gamma(\alpha_2+1)\} \\ &= \min\left\{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right), \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}T' &= \max_{0\le i\le 2}\left\{T^{\alpha_i}\right\} = \max_{0\le i\le 2}\left\{T^{\frac{1}{5}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{6}}\right\} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ceci implique que la valeur de ξ est donnés par

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{T'L}{\Gamma'}(\Lambda+\Omega) + \mu\Omega \\ &= \frac{1}{6\sqrt{\pi}}(\Lambda+\Omega) + \frac{\Omega}{9} \\ &= 0.886 < 1.\end{aligned}$$

Le Théorème 3.2.1 assure l'existence et l'unicité d'une unique solution $u \in \mathcal{PC}([0,1], \mathbb{R})$ du problème (3.5).

3.3 Un autre résultat d'existence de la solution

Dans cette section nous présentons des conditions suffisantes pour l'existence des solutions du problème (3.1) dans un espace de Banach de dimension finie.

Afin d'établir un résultat d'existence de la solution du problème (3.1) nous considérons les hypothèses suivantes :

(H4) La fonction non linéaire $f : J \times E \times E \to E$ est continue.

(H5) Il existe une constante $0 < p < \alpha$, $(\alpha = \min_{0\le i\le m}\{\alpha_i\})$ et une fonction $M(t) \in L^{\frac{1}{p}}(J, E)$ telles que

$$\|f(t,u,v)\| \le M(t)(1 + \|u\| + \|v\|), \text{ pour tout } t \in J \text{ et } u, v \in E.$$

(H6) I_k sont continues et il existe une constante positive λ telle que

$$\|I_k u\| \leq \lambda \|u\|, \ \forall u \in E \text{ et } k = 1, ..., m.$$

(H7)
$$\frac{AT' \|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma'' T^p} \left(P\left(1 + \Omega + \frac{a}{|\eta|}\right) + \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k b_k T^{\beta_k} \mathbf{B}(\alpha_k, \beta_k)}{|\eta| \Gamma(\beta_k)} \right) + \lambda\Omega < 1,$$

où $A = 1 + CT$, $T' = \max_{0\leq i\leq m}\left\{T^{\alpha_i}\right\}$, $\Gamma'' = \min_{0\leq i\leq m}\{\Gamma(\alpha_i)\}$, $P = \left(\frac{1-p}{\alpha - p}\right)^{1-p}$,
$P_k = \left(\frac{1-p}{\alpha_k + \beta_k - p}\right)^{1-p}$ et $\Omega = m\left(1 + \frac{a}{|\eta|} + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k T^{\beta_k}}{|\eta| \Gamma(\beta_k + 1)}\right)$.

Considérons le sous-ensemble fermé, borné et convexe $B_r = \{u \in \mathscr{PC}(J, E) : \|u\|_{\mathscr{PC}} \leq r\}$ de $\mathscr{PC}(J, E)$. On définit l'opérateur $\mathscr{N} : B_r \to B_r$ par

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi_k(s, u(s)) ds \\
&+ \sum_{0<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{i-1}(s, u(s)) ds \\
&+ \sum_{0<t_i<t} I_i(u(t_i^-)) + K_u, \quad t \in J_k, \ k = 0, ..., m.
\end{aligned}$$

Lemme 3.3.1. *Si r satisfait l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
r \quad > \quad & \left[\frac{AT' \|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma'' T^p} \left(P\left(1 + \Omega + \frac{a}{|\eta|}\right) + \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k b_k T^{\beta_k} \mathbf{B}(\alpha_k, \beta_k)}{|\eta| \Gamma(\beta_k)} \right) + \lambda\Omega \right] r \\
& + \frac{A' T' \|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma'' T^p} \left[P\left(1 + \Omega + \frac{a}{|\eta|}\right) + \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k b_k T^{\beta_k} \mathbf{B}(\alpha_k, \beta_k)}{|\eta| \Gamma(\beta_k)} \right],
\end{aligned}$$

avec $A' = 1 + C'T$, *alors* $\mathscr{N} B_r \subset B_r$.

Démonstration. En effet, pour tout $u \in B_r$ on a

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{N}u(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi_k(s, u(s))\| ds \\
&+ \sum_{0<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi_{i-1}(s, u(s))\| ds \\
&+ \sum_{0<t_i<t} \left\| I_i(u(t_i^-)) \right\| + \|K_u\|.
\end{aligned}$$

Au vu des hypothèses **(H5)** ; **(H6)** et le Lemme 3.1.2on trouve

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}u(t)\| &\leq \frac{\left(1+\|u\|_{\mathscr{PC}}+CT\|u\|_{\mathscr{PC}}+C'T\right)}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}M(s)\,ds\\ &+\sum_{0<t_i<t}\frac{\left(1+\|u\|_{\mathscr{PC}}+CT\|u\|_{\mathscr{PC}}+C'T\right)}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}M(s)\,ds\\ &+m\lambda\|u\|_{\mathscr{PC}}+\|K_u\|.\end{aligned}$$

En estimant la valeur de $\|K_u\|$ on arrive à

$$\begin{aligned}\|K_u\| &\leq \frac{1}{|\eta|}\Bigg[\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}\|\Phi_k(s,u(s))\|\,ds\\ &+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{i-1}(s,u(s))\|\,ds\\ &+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}\left\|I_i(u(t_i^-))\right\|\\ &+\frac{a}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\alpha_m-1}\|\Phi_m(s,u(s))\|\,ds\\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{a}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{i-1}(s,u(s))\|\,ds+a\sum_{i=1}^{m}\left\|I_i(u(t_i^-))\right\|\Bigg].\end{aligned}$$

L'application des hypothèses **(H5)-(H6)**et le Lemme 3.1.2 implique que

$$\begin{aligned}\|K_u\| &\leq \frac{\left(1+\|u\|_{\mathscr{PC}}+CT\|u\|_{\mathscr{PC}}+C'T\right)}{|\eta|}\Bigg[\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}M(s)\,ds\\ &+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}M(s)\,ds\\ &+\frac{a}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\alpha_m-1}M(s)\,ds+\sum_{i=1}^{m}\frac{a}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}M(s)\,ds\Bigg]\\ &+\frac{m\lambda\|u\|_{\mathscr{PC}}}{|\eta|}\left[a+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}\right].\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)\| \quad \leq \quad & \left(A' + A\|u\|_{\mathcal{PC}}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}M(s)\,ds\right.\\
&+\sum_{0<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}M(s)\,ds\\
&+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}M(s)\,ds\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}M(s)\,ds\\
&+\frac{a}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\alpha_m-1}M(s)\,ds\\
&\left.+\sum_{i=1}^{m}\frac{a}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}M(s)\,ds\right]\\
&+m\lambda\|u\|_{\mathcal{PC}}\left[1+\frac{a}{|\eta|}+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}\right].
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)\| \quad \leq \quad & \left(A' + Ar\right)\left[\frac{\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\frac{\alpha_k-1}{1-p}}ds\right)^{1-p}\right.\\
&+\sum_{0<t_i<t}\frac{\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J_k)}}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\frac{\alpha_{i-1}-1}{1-p}}ds\right)^{1-p}\\
&+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J_k)}}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left(\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\frac{\alpha_k+\beta_k-1}{1-p}}ds\right)^{1-p}\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J_k)}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\frac{\alpha_{i-1}-1}{1-p}}ds\right)^{1-p}\\
&+\frac{a\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J_k)}}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_m)}\left(\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\frac{\alpha_m-1}{1-p}}ds\right)^{1-p}\\
&\left.+\sum_{i=1}^{m}\frac{a\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J_k)}}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_{i-1})}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\frac{\alpha_{i-1}-1}{1-p}}ds\right)^{1-p}\right]\\
&+m\lambda r\left[1+\frac{a}{|\eta|}+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}\right].
\end{aligned}$$

Le calcul des intégrales de membre de droite donne

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)\| \leq & \left(A'+Ar\right)\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\frac{(t-t_k)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}\right)^{1-p}+\sum_{0<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\left(\frac{(t_i-t_{i-1})^{\frac{\alpha_{i-1}-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_{i-1}-p}{1-p}}\right)^{1-p}\right.\\
&+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\left(\frac{(\varepsilon_k-t_k)^{\frac{\alpha_k+\beta_k-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_k+\beta_k-p}{1-p}}\right)^{1-p}\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\left(\frac{(t_i-t_{i-1})^{\frac{\alpha_{i-1}-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_{i-1}-p}{1-p}}\right)^{1-p}\\
&\left.+\frac{a}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_m)}\left(\frac{(T-t_m)^{\frac{\alpha_m-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_m-p}{1-p}}\right)^{1-p}+\sum_{i=1}^{m}\frac{a}{|\eta|\,\Gamma(\alpha_{i-1})}\left(\frac{(t_i-t_{i-1})^{\frac{\alpha_{i-1}-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_{i-1}-p}{1-p}}\right)^{1-p}\right]\\
&+m\lambda r\left[1+\frac{a}{|\eta|}+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(t)\| \leq & \left(A'+Ar\right)\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}\frac{T'}{T^p\Gamma''}\left[P+mP++mP\frac{a}{|\eta|}+mP\sum_{k=1}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{P_kb_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}+P\frac{a}{|\eta|}\right]+m\lambda r\left[1+\frac{a}{|\eta|}+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k+1)}\right].\\
\leq & \left(A'+Ar\right)\frac{\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}T'}{\Gamma''T^p}\left[P\left(1+\frac{a}{|\eta|}+\Omega\right)+\sum_{k=0}^{m}\frac{P_kb_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}\right]\\
&+\lambda r\Omega\\
\leq & \left[\frac{A\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}T'}{T^p\Gamma''}\left(P\left(1+\frac{a}{|\eta|}+\Omega\right)+\sum_{k=0}^{m}\frac{P_kb_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}\right)+\lambda\Omega\right]r\\
&+\frac{A'\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}T'}{\Gamma''T^p}\left[P\left(1+\frac{a}{|\eta|}+\Omega\right)+\sum_{k=0}^{m}\frac{P_kb_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}\right]\\
< & \ r.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que $\|\mathcal{N}u\|_{\mathcal{PC}} \leq r$; par conséquent $\mathcal{N}B_r \subset B_r$. $\square$

Lemme 3.3.2. *L'opérateur $\mathcal{N}$ envoie tout borné de $\mathcal{PC}(J,E)$ en une partie relativement compacte.*

Démonstration. Définissons l'ensemble $\mathscr{W} = \{\mathscr{N} u : u \in B_r\}$.

Dû à l'inclusion $\mathscr{N} B_r \subset B_r$; $\mathscr{W}$ est uniformément borné.

Montrons maintenant l'équicontinuité de $\mathscr{W}$.

Soit $u \in B_r$, pour $t_k < \tau_1 < \tau_2 \leq t_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{N} u(\tau_2) - \mathscr{N} u(\tau_1)\| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{\tau_1} \left[(\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1}\right] \|\Phi_k(s, u(s))\| \, ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi_k(s, u(s))\| \, ds.
\end{aligned}$$

L'hypothèse **(H5)** donne

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{N} u(\tau_2) - \mathscr{N} u(\tau_1)\| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{\tau_1} \left[(\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1}\right] \\
& \times M(s) (1 + \|u(s)\| + \|Hu(s)\|) \, ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} M(s) (1 + \|u(s)\| + \|Hu(s)\|) \, ds.
\end{aligned}$$

Tenant compte du Lemme 3.1.2 et l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{N} u(\tau_2) - \mathscr{N} u(\tau_1)\| \leq\ & \frac{\left(A' + Ar\right)}{\Gamma(\alpha_k)} \left[\left(\int_{t_k}^{\tau_1} \left((\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1}\right)^{\frac{1}{1-p}} ds \right)^{1-p} \right. \\
& \times \left(\int_{t_k}^{\tau_1} M^{\frac{1}{p}}(s) \, ds \right)^{p} + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\frac{\alpha_k - 1}{1-p}} ds \right)^{1-p} \\
& \left. \times \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} M^{\frac{1}{p}}(s) \, ds \right)^{p} \right].
\end{aligned}$$

L'utilisation de l'inégalité

$$(a - b)^{\omega} \leq a^{\omega} - b^{\omega}, \ \text{pour } \omega > 1 \text{ et } 0 \leq b \leq a,$$

donne

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{N} u(\tau_2) - \mathscr{N} u(\tau_1)\| \leq\ & \frac{\left(A' + Ar\right) \|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma(\alpha_k)} \left[\left(\int_{t_k}^{\tau_1} \left((\tau_1 - s)^{\frac{\alpha_k - 1}{1-p}} - (\tau_2 - s)^{\frac{\alpha_k - 1}{1-p}} \right) ds \right)^{1-p} \right. \\
& \left. + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\frac{\alpha_k - 1}{1-p}} ds \right)^{1-p} \right].
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(\tau_2)-\mathcal{N}u(\tau_1)\| &\leq \frac{\left(A'+Ar\right)\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma(\alpha_k)} \\
&\times\left[\left(\frac{(\tau_1-t_k)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}+\frac{(\tau_2-\tau_1)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}-\frac{(\tau_2-t_k)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}\right)^{1-p}\right. \\
&\left.+\left(\frac{(\tau_2-\tau_1)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}}{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}\right)^{1-p}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(\tau_2)-\mathcal{N}u(\tau_1)\| &\leq \frac{\left(A'+Ar\right)\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\frac{1-p}{\alpha_k-p}\right)^{1-p} \\
&\times\left[\left((\tau_1-t_k)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}+(\tau_2-\tau_1)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}-(\tau_2-t_k)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}\right)^{1-p}\right. \\
&\left.+(\tau_2-\tau_1)^{\alpha_k-p}\right].
\end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité

$$\left|c^{\sigma}-d^{\sigma}\right|\leq(d-c)^{\sigma}\quad \text{où } \sigma\in(0,1] \text{ et } 0<c\leq d,$$

il résulte que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(\tau_2)-\mathcal{N}u(\tau_1)\| &\leq \frac{\left(A'+Ar\right)\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\frac{1-p}{\alpha_k-p}\right)^{1-p} \\
&\times\left[\left((\tau_2-\tau_1)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}+[\tau_2-t_k-\tau_1+t_k]^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}\right)^{1-p}+(\tau_2-\tau_1)^{\alpha_k-p}\right] \\
&\leq \frac{\left(A'+Ar\right)\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma(\alpha_k)}\left(\frac{1-p}{\alpha_k-p}\right)^{1-p} \\
&\times\left[\left((\tau_2-\tau_1)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}+(\tau_2-\tau_1)^{\frac{\alpha_k-p}{1-p}}\right)^{1-p}+(\tau_2-\tau_1)^{\alpha_k-p}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}u(\tau_2)-\mathcal{N}u(\tau_1)\| &\leq 3\frac{\left(A'+Ar\right)\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma''}\left(\frac{1-p}{\alpha-p}\right)^{1-p}(\tau_2-\tau_1)^{\alpha-p} \\
&\leq \frac{3\left(A'+Ar\right)P\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{\Gamma''}(\tau_2-\tau_1)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Quand $\tau_1 \to \tau_2$, le membre de droite tend vers zéro, d'où l'équicontinuité de $\mathscr{W}$.

D'autre part, les sous-ensembles $\mathscr{W}(t) := \{\mathscr{N}u(t) : u \in B_r,\ t \in J \setminus \{t_k\},\ k = 1,...,m\}$,

$\mathscr{W}(t_k^-) := \left\{\mathscr{N}u\left(t_k^-\right) : u \in B_r\right\}$ et $\mathscr{W}(t_k^+) := \left\{\mathscr{N}u\left(t_k^+\right) : u \in B_r\right\}$, $k = 1,...,m$, sont compacts vu que leurs fermetures sont bornées dans E $(\dim E < \infty)$.

Ainsi, le théorème $\mathscr{PC}$-Arzela-Ascoli affirme que $\mathscr{W}$ est un sous-ensemble relativement compact de $\mathscr{PC}(J;E)$. □

Nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses* ***(H4)-(H7)*** *le problème (3.1) admet au moins une solution.*

Démonstration. En vue de prouver que l'opérateur $\mathscr{N}$ admet un point fixe nous appliquons le théorème de point fixe de Schauder. Établissons tout d'abord la continuité de $\mathscr{N}$

Soit $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset B_r$ telle que $u_n \to u$ dans B_r, alors

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{N}u_n(t) - \mathscr{N}u(t)\| \quad \leq \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi_k(s, u_n(s)) - \Phi_k(s, u(s))\| \, ds \\
& + \sum_{0<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi_{i-1}(s, u_n(s)) - \Phi_{i-1}(s, u(s))\| \, ds \\
& + \sum_{0<t_i<t} \left\| I_i(u_n(t_i^-)) - I_i(u(t_i^-)) \right\| + \left\| K_{u_n} - K_u \right\|,
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
\left\|K_{u_n}-K_u\right\| \leq\ & \frac{1}{|\eta|}\Bigg[\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha_k+\beta_k)}\int_{t_k}^{\varepsilon_k}(\varepsilon_k-s)^{\alpha_k+\beta_k-1}\\
&\times\|\Phi_k(s,u_n(s))-\Phi_k(s,u(s))\|\,ds+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)\Gamma(\alpha_{i-1})}\\
&\times\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{i-1}(s,u_n(s))-\Phi_{i-1}(s,u(s))\|\,ds\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_k(\varepsilon_k-t_k)^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}\left\|I_i(u_n(t_i^-))-I_i(u(t_i^-))\right\|\\
&+\frac{a}{\Gamma(\alpha_m)}\int_{t_m}^{T}(T-s)^{\alpha_m-1}\|\Phi_m(s,u_n(s))-\Phi_m(s,u(s))\|\,ds\\
&+\sum_{i=1}^{m}\frac{a}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\|\Phi_{i-1}(s,u_n(s))-\Phi_{i-1}(s,u(s))\|\,ds\\
&+a\sum_{i=1}^{m}\left\|I_i(u_n(t_i^-))-I_i(u(t_i^-))\right\|\Bigg].
\end{aligned}
$$

La continuité des fonctions h, f, I_k implique celle de $\mathcal{N}$.

Les Lemmes (3.3.1)-(3.3.2) ainsi que la continuité de l'opérateur $\mathcal{N}$ nous permettent de conclure que $\mathcal{N}$ est complètement continu.

Nous concluons par le théorème de point fixe de Schauder l'opérateur $\mathcal{N}$ admet au moins un point fixe $u \in \mathcal{PC}(J,E)$ qui est la solution du problème (3.1), ce qui achève la démonstration. □

Nous terminons par un exemple illustrant l'utilité de notre résultat

Exemple 3.3.1. *Considérons le problème aux limites impulsif d'ordres fractionnaires multiples suivant*

$$
\begin{cases}
{}^{C}\mathcal{D}_{t_k^+}^{\alpha_k}u(t)=\dfrac{t^{p\omega}(1+\sin u(t))}{\omega+2}+\displaystyle\int_{t_k}^{t}\frac{t^{p\omega}\ln(1+|u(s)|)}{(\omega+2)\left(t^2+\omega+1\right)}ds,\ t\in J_k,\ k=0,1,2,\\
u\left(t_k^+\right)=u\left(t_k^-\right)+\dfrac{\left|u\left(t_k^-\right)\right|}{27+\left|u\left(t_k^-\right)\right|},\ k=1,2,\\
u(0)+4u(1)=\sum_{k=0}^{2}b_k\mathcal{J}_{t_k^+}^{\beta_k}u(\varepsilon_k).
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

Soit $(E, \|.\|) = (\mathbb{R}, |.|)$ *et* $J = [0,1]$, $J_0 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $J_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $J_2 = \left(\frac{3}{4}, 1\right]$, *avec* $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{3}{4}$, $\omega > 0$, $m = 2$ *et* $a = 4$.

Les constantes ε_k, b_k, β_k, α_k *sont données par*

ε_k	b_k	β_k	α_k
$\varepsilon_0 = 1/7$	$b_0 = 1/8$	$\beta_0 = 3/2$	$\alpha_0 = 5/6$
$\varepsilon_1 = 1/2$	$b_1 = 1/9$	$\beta_1 = 9/4$	$\alpha_1 = 3/4$
$\varepsilon_2 = 5/6$	$b_2 = 1/10$	$\beta_2 = 5/2$	$\alpha_2 = 4/5$

On définit

$$\begin{aligned}\Phi_k(t, u(t)) &= \frac{t^{p\omega}}{\omega+2} + \frac{t^{p\omega}}{\omega+2}\sin u(t) + \frac{t^{p\omega}}{\omega+2}\int_{t_k}^{t} \frac{\ln(1+|u(s)|)}{t^2+\omega+1} ds, \\ I_k u\left(t_k^-\right) &= \frac{\left|u\left(t_k^-\right)\right|}{27 + \left|u\left(t_k^-\right)\right|}.\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse ***(H5)*** *on trouve*

$$|\Phi_k(t, u(t))| \leq \frac{t^{p\omega}}{\omega+2}\left(1 + |\sin u(t)| + \left|\int_{t_k}^{t} \frac{\ln(1+|u(s)|)}{t^2+\omega+1} ds\right|\right),$$

ce qui signifie que $M(t) = \dfrac{t^{p\omega}}{\omega+2}$, *d'où, par un simple calcul on obtient*

$$\|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)} = \frac{1}{(\omega+2)(\omega+1)^p}.$$

D'autre part, on a $H_k u(t) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} \frac{\ln(1+|u(s)|)}{t^2+\omega+1} ds$, *et le Lemme 3.1.2 implique* $C' = 0$ *et*

$$\begin{aligned}|H_k u(t)| &\leq \int_{t_k}^{t} \left|\frac{\ln(1+|u(s)|)}{t^2+\omega+1}\right| ds \\ &\leq \frac{\|u\|_{\mathscr{PC}}}{\omega+1}.\end{aligned}$$

Comme $C = \dfrac{1}{\omega+1}$, *alors* $A = \dfrac{\omega+2}{\omega+1}$.

L'hypothèse ***(H6)*** *donne*

$$\left|I_k u\left(t_k^-\right)\right| = \frac{\left|u\left(t_k^-\right)\right|}{27 + \left|u\left(t_k^-\right)\right|} \leq \frac{1}{27}\|u\|_{\mathscr{PC}},$$

d'où $\lambda = \dfrac{1}{27}$.

*Maintenant, nous allons vérifier la condition **(H7)**.*

Tout d'abord, en calculant la valeur de η *on trouve*

$$\begin{aligned}
\eta &= 1+a-\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k\left(\varepsilon_k-t_k\right)^{\beta_k}}{\Gamma\left(\beta_k+1\right)}\\
&= 1+4-\left(\frac{\frac{1}{7}^{\frac{3}{2}}}{8\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{\frac{1}{4}^{\frac{9}{4}}}{9\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}+\frac{\frac{1}{12}^{\frac{5}{2}}}{10\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\right)\\
&\approx 4.9929.
\end{aligned}$$

Pour Ω *on a*

$$\begin{aligned}
\Omega &= m\left(1+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_kT^{\beta_k}}{|\eta|\,\Gamma\left(\beta_k+1\right)}+\frac{a}{|\eta|}\right)\\
&= 2\left(1+\frac{1}{9|\eta|\,\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}+\frac{1}{10|\eta|\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}+\frac{4}{|\eta|}\right)\\
&\approx 3.6318.
\end{aligned}$$

Evaluant $\sum_{k=0}^{m}\dfrac{P_kb_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}$, *on arrive à*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\frac{P_kb_kT^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)} &= \left(\frac{1-p}{\frac{7}{3}-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{8|\eta|\,\Gamma(\frac{7}{3})}+\left(\frac{1-p}{3-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{9|\eta|\,\Gamma(3)}\\
&\quad+\left(\frac{1-p}{\frac{33}{10}-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma(\frac{4}{5})}{10|\eta|\,\Gamma(\frac{33}{10})}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\alpha = \min\left\{\frac{5}{6},\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right\} = \frac{3}{4},$$

d'où

$$P = \left(\frac{1-p}{\alpha-p}\right)^{1-p} = \left(\frac{1-p}{\frac{3}{4}-p}\right)^{1-p}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\Gamma'' &= \min\left\{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right),\Gamma\left(\frac{4}{5}\right),\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\right\}\\
&= \Gamma\left(\frac{5}{6}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{AT' \|M\|_{L^{\frac{1}{p}}(J)}}{T^p\Gamma''}\left(P\left(1+\Omega+\frac{a}{|\eta|}\right)+\sum_{k=0}^{m}\frac{P_k b_k T^{\beta_k}\mathbf{B}\left(\alpha_k,\beta_k\right)}{|\eta|\,\Gamma(\beta_k)}\right)+\lambda\Omega\\
&=\frac{1}{(\omega+1)^{p+1}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\left[\left(\frac{1-p}{\frac{3}{4}-p}\right)^{1-p}\left(1+\Omega+\frac{4}{|\eta|}\right)+\left(\frac{1-p}{\frac{7}{3}-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{8|\eta|\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1-p}{3-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{9|\eta|\Gamma(3)}+\left(\frac{1-p}{\frac{33}{10}-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{10|\eta|\Gamma\left(\frac{33}{10}\right)}\right]+\frac{\Omega}{27}.
\end{aligned}$$

En choisissant $\omega>0$ *suffisamment grand et* $p\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$ *nous arrivons à*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\omega+1)^{p+1}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\left[\left(\frac{1-p}{\frac{3}{4}-p}\right)^{1-p}\left(1+\Omega+\frac{4}{|\eta|}\right)+\left(\frac{1-p}{\frac{7}{3}-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{8|\eta|\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1-p}{3-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{9|\eta|\Gamma(3)}+\left(\frac{1-p}{\frac{33}{10}-p}\right)^{1-p}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{10|\eta|\Gamma\left(\frac{33}{10}\right)}\right]+\frac{\Omega}{27}<1.
\end{aligned}$$

A titre d'exemple pour :

- $p=\dfrac{1}{2}$ *et* $\omega=4$ *on a*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5^{\frac{1}{2}+1}\times\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\left[\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{2}}\left(1+3.6318+\frac{4}{4.9929}\right)+\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{7}{3}-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{8\times 4.9929\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{9\times 4.9929\Gamma(3)}+\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{33}{10}-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{10\times 4.9929\Gamma\left(\frac{33}{10}\right)}\right]+\frac{3.6318}{27}\\
&\approx 0.74508
\end{aligned}$$

- $p=\dfrac{5}{7}$ *et* $\omega=9$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{10^{\frac{5}{7}+1}\times\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\left[\left(\frac{1-\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{7}}\right)^{1-\frac{5}{7}}\left(1+3.6318+\frac{4}{4.9929}\right)+\left(\frac{1-\frac{5}{7}}{\frac{7}{3}-\frac{5}{7}}\right)^{1-\frac{5}{7}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{8\times 4.9929\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1-\frac{5}{7}}{3-\frac{5}{7}}\right)^{1-\frac{5}{7}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{9\times 4.9929\Gamma(3)}+\left(\frac{1-\frac{5}{7}}{\frac{33}{10}-\frac{5}{7}}\right)^{1-\frac{5}{7}}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{10\times 4.9929\Gamma\left(\frac{33}{10}\right)}\right]+\frac{3.6318}{27}\\
&\approx 0.30329
\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que toutes les hypothèses du Théorème 3.3.1 sont vérifiées ce qui nous permet de conclure que le problème (3.6) admet au moins une solution.

CHAPITRE

4

Conclusion et Perspectives

Au terme de cette thèse, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires impulsives, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail, nous avons proposé une correction et une amélioration du concept en cours de solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive. Ainsi, en utilisant les techniques de points fixes, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité de certains problèmes différentiels impulsifs d'ordres fractionnaires multiples relatifs à la dérivée de Caputo dans des espaces de Banach. La dépendance de solutions par rapport aux données initiales a été également discutée. Une synthèse de ces résultats a fait l'objet d'une publication dans une revue de renommée établie [21].

Par ailleurs, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une nouvelle classe de problèmes aux limites impulsifs d'ordres fractionnaires multiples. Ces résultats sont soumis pour publication [22].

Enfin, vu sa nouveauté ce domaine est très riche en questions ouvertes ; par conséquent différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail.

En effet, nous avons l'intention d'étudier ultérieurement une classe d'équations impulsives d'ordres fractionnaires à retard ; de plus nous prévoyons l'étude de la stabilité des solutions d'une telle classe d'équations.

Par ailleurs, la diversité de la nature des conditions impulsives qui peuvent être de type intégral ou multi-points, en nombre fini ou infini de moments d'impulsion, fixes ou variables, nous incite à l'étude d'une classe d'équations différentielles d'ordres fractionnaires soumises à des conditions impulsives de type intégral.

Finalement, le développement d'éventuels modèles numériques correspondant aux équations impulsives d'ordres fractionnaires présentées dans ce travail occupe une place appréciable dans l'ordre de nos perspectives.

ANNEXE

A Copie de l'article publié

Hindawi Publishing Corporation
International Journal of Differential Equations
Volume 2013, Article ID 191060, 12 pages
http://dx.doi.org/10.1155/2013/191060

Research Article

An Alternative Method for the Study of Impulsive Differential Equations of Fractional Orders in a Banach Space

Asma Bouzaroura and Saïd Mazouzi

Laboratory of Applied Mathematics, Badji Mokhtar-Annaba University, P.O. Box 12, 23000 Annaba, Algeria

Correspondence should be addressed to Saïd Mazouzi; mazouzi_sa@yahoo.fr

Received 15 April 2013; Accepted 14 July 2013

Academic Editor: Fawang Liu

This paper is concerned with the existence, uniqueness, and stability of the solution of some impulsive fractional problem in a Banach space subjected to a nonlocal condition. Meanwhile, we give a new concept of a solution to impulsive fractional equations of multiorders. The derived results are based on Banach's contraction theorem as well as Schaefer's fixed point theorem.

1. Introduction

It is well known that the theory of fractional calculus deals with the concepts of differentiation and integration of arbitrary orders, real and complex. Actually, the real importance of fractional derivatives lies in their nonlocal character which gives rise to a long memory effect and thus to a better insight into the modelled processes. On the other hand, since models using classical derivatives are just a special case of those using fractional derivatives, then most of the investigators in different areas such as electronics, viscoelasticity, satellite guidance, medicine, anomalous diffusion, signal processing, and many other branches of science and technology have revisited some classical dynamic systems in the framework of fractional derivatives to get better results; see the references [1–8]. We point out that most of dynamic systems are naturally governed by fractional differential equations; for further applications of fractional derivatives in other areas and useful backgrounds we refer the reader to the works [1–5, 7–12].

As far as we are concerned with impulsive fractional differential equations, we intend to improve and correct in this paper some existence results established earlier in [4, 13–18] for impulsive fractional differential equations. There have been in the last couple of years several concepts of solutions satisfying some fractional equations subjected to impulsive conditions, see [13, 14, 18, 19], while the authors of [18] claimed that their new concept is the more realistic than the existing ones. Actually, we believe that nobody holds all the truth about this subject and a lot of dark sides of these approaches are not yet well elucidated.

Regarding the concept of a solution for impulsive fractional equations introduced by [18] we point out that Lemma 2.6 which has been used by the authors to obtain the equivalence between an impulsive fractional problem and an integral equation is false as we see in the following counterexample.

In the famous book of Nagy and Riesz [20, page 48], there is an example of monotonic continuous function $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ which is not constant in any subinterval of $[0,1]$ and satisfies $F' = 0$, almost everywhere in $[0,1]$. So, in terms of Caputo's derivative we would have formally for any $\alpha \in (0,1)$

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}F(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} F'(s)\, ds = 0, \quad t \in [0,1], $$

$$ F(a) = F_0, \quad 0 < a < 1, \text{ with } F_0 \text{ being the value of } F \text{ at } a. \tag{1} $$

However, there is no apparent equivalence between this problem and the fractional integral representation of F defined in Lemma 2.6 [18]; otherwise the function $F(t)$ would be constant and equal to F_0 throughout the interval $[0,1]$

which is a contradiction! Moreover, since in the same work Lemma 2.7 is based on the latter lemma then it is not correct and may lead to apparent contradiction.

Our main contribution in this paper is the study of new fractional problems of several orders in a Banach space subjected to some impulsive conditions of the form

$$\begin{gathered}
{}^{C}D^{\alpha_k}_{t_k^+} u(t) \\
= A(t,u)\,u(t) + F\Big(t, u(t), \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))\,ds, \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))\,ds\Big), \\
t \in J_k,\ k = 0,\dots,m, \\
u(a) = u_0 \in E, \\
u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k^-)),\quad k = 1,\dots,m.
\end{gathered} \tag{2}$$

Let us first give a concrete example of such a problem in $\mathbb{R}$; namely;

$$\begin{gathered}
{}^{C}D^{\alpha}_{0^+} u(t) = t^p - 1, \quad t \in J_0 = [0,1], \\
{}^{C}D^{\beta}_{1^+} u(t) = (t-1)^q, \quad t \in J_1 = (1,T], \\
u(0) = 1, \\
u(1^+) = u(1^-) + 2,
\end{gathered} \tag{3}$$

where $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $T > 1$, and $p, q \in \mathbb{R}^+$. So, we look for a piecewise continuous function $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfying (3). Solving the subproblem

$$\begin{gathered}
{}^{C}D^{\alpha}_{0^+} u(t) = t^p - 1, \quad t \in J_0, \\
u(0) = 1,
\end{gathered} \tag{4}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
u(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^p\,ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds \\
&= 1 + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} t^{\alpha+p} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha},
\end{aligned} \tag{5}$$

from which we get $u(1) = 1 + (\Gamma(p+1)/\Gamma(\alpha+p+1)) - (1/\Gamma(\alpha+1))$.

On the other hand, the solution of the subproblem

$$\begin{gathered}
{}^{C}D^{\beta}_{1^+} u(t) = (t-1)^q, \quad t \in J_1, \\
u(1^+) = u(1) + 2 = 3 + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}
\end{gathered} \tag{6}$$

is given by

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(1^+) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (t-s)^{\beta-1} (s-1)^q\,ds \\
&= 3 + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(\beta+q+1)} (t-1)^{\beta+q}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Hence, the piecewise continuous function

$$u(t) = \begin{cases}
1 + \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} t^{\alpha+p} - \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha}, & t \in J_0, \\
3 + \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} - \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \\
\quad + \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(\beta+q+1)} (t-1)^{\beta+q}, & t \in J_1,
\end{cases} \tag{8}$$

is a solution to the impulsive fractional problem (3).

A particular problem of (3) is as follows:

$$\begin{gathered}
{}^{C}D^{\gamma}_{0^+} u(t) = t^p - 1, \quad t \in J_0, \\
{}^{C}D^{\gamma}_{1^+} u(t) = (t-1)^q, \quad t \in J_1, \\
u(0) = 1, \\
u(1^+) = u(1^-) + 2
\end{gathered} \tag{9}$$

corresponding to the case $\gamma = \alpha = \beta$ whose solution is

$$u(t) = \begin{cases}
1 + \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\gamma+p+1)} t^{\gamma+p} - \dfrac{1}{\Gamma(\gamma+1)} t^{\gamma}, & t \in J_0, \\
3 + \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\gamma+p+1)} - \dfrac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \\
\quad + \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(\gamma+q+1)} (t-1)^{\gamma+q}, & t \in J_1.
\end{cases} \tag{10}$$

The paper is organized as follows. We present in Section 2 our problem as we establish some equivalence between the the given problem and a nonlinear integral equation. Next, we state a piecewise-continuous type of the Ascoli-Arzela theorem as well as Schaefer's fixed point theorem in order to apply them subsequently in our proofs. In Section 3 we use the Banach contraction theorem to establish an existence and uniqueness theorem of a quasilinear impulsive fractional problem in an abstract Banach space. In Section 4 we apply Schaefer's fixed point theorem to some semilinear impulsive fractional problem in a finite dimensional Banach space to obtain the existence of a piecewise continuous solution; on the other hand we prove the stability of the obtained solution with respect to the initial value. Finally, we conclude the paper by a concrete example illustrating one of our results.

2. Preliminaries

The main purpose of this paper is the investigation of the existence and uniqueness of solution corresponding to the following impulsive fractional integrodifferential equation in a Banach space $(E, \|\cdot\|)$

$$\begin{aligned}
&{}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) \\
&\quad = A(t,u)\,u(t) + F\Big(t, u(t), \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))\,ds, \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))\,ds\Big), \\
&\qquad t \in J_k,\ k = 0,\dots,m, \\
&u(a) = u_0 \in E, \\
&u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1,\dots,m,
\end{aligned} \tag{11}$$

where

(i) $J = [a,T]$ with $0 \le a < T < \infty$ and $J_0 = [a,t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$; $k = 1,\dots,m$,

(ii) ${}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}$ is Caputo's fractional derivative of order $\alpha_k \in (0,1)$, $k = 0,\dots,m$,

(iii) $A : J \times E \to \mathscr{B}(E)$ is a continuous operator, where $\mathscr{B}(E)$ is the Banach space of bounded linear operators on E in itself,

(iv) $I_k : E \to E$, $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = T$; $u(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} u(t_k + \epsilon)$ and $u(t_k^-) = \lim_{h\to 0^-} u(t_k + \epsilon) = u(t_k)$ are, respectively, the right and left limits of $u(t)$ at the discontinuity point $t = t_k$.

We set the following hypotheses:

(j) the functions $\sigma, \tau : J \to J$ are continuous with $a \le \sigma(t) \le t$ and $a \le \tau(t) \le t$, for every $t \in J$,

(jj) the nonlinear function $F : J \times E \times E \times E \to E$ is continuous, and

$$\begin{aligned}
&h : D \times E \longrightarrow E, \quad D = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : a \le s \le t \le T\right\}, \\
&k : D_0 \times E \longrightarrow E, \\
&\text{where } D_0 = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \in J, a \le s \le T\right\},
\end{aligned} \tag{12}$$

are two continuous functions over $D \times E$ and $D_0 \times E$, respectively.

We will use in the sequel the following notation:

$$\begin{aligned}
&Hu(t) = \int_a^t h(t,s,u(\sigma(s)))\,ds, \\
&K_{t_{k+1}} u(t) = \int_a^{t_{k+1}} k(t,s,u(\tau(s)))\,ds, \quad k = 0,1,\dots,m, \\
&\Phi_{t_{k+1}}(t,u(t)) = F\left(t, u(t), Hu(t), K_{t_{k+1}} u(t)\right), \\
&\qquad k = 0,1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{13}$$

We recall that $\mathscr{C} = \mathscr{C}(J;E)$ is the Banach space of continuous functions $u : J \to E$ endowed with the norm

$$\|u\|_{\mathscr{C}} = \sup_{t\in J} \|u(t)\|. \tag{14}$$

Next, we introduce the definition of the fractional derivative in the sense of Caputo. We have the following.

Definition 1. We define the left-sided fractional Riemann-Liouville integral of order $\alpha \in (0,1)$ of a function $f : [c,d] \to E$ as follows:

$$J_{c^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad t > c. \tag{15}$$

We define the left-sided fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$ of a function $f : [c,d] \to E$ in the sense of Caputo by

$${}^{C}D_{c^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_c^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\,ds, \quad t > c. \tag{16}$$

Remark 2. (1) We point out that the previous integrals are understood in the sense of Bochner.

(2) We assume of course that the function f satisfies the necessary conditions for which those integrals are well defined.

Next, we consider the linear functional space

$$\begin{aligned}
&\mathscr{PC}(J;E) \\
&\quad = \{u : J \longrightarrow E,\ u \in \mathscr{C}((t_k, t_{k+1}]\,;E), \\
&\qquad k = 0,\dots,m \text{ s.t. } u(t_k^-) \text{ and } u(t_k^+) \\
&\qquad \text{exist with } u(t_k^-) = u(t_k),\ k = 1,\dots,m\}
\end{aligned} \tag{17}$$

equipped with the norm

$$\|u\|_{\mathscr{PC}} = \sup_{t\in J} \|u(t)\|. \tag{18}$$

We obtain a Banach space $(\mathscr{PC}(J;E), \|\cdot\|_{\mathscr{PC}})$.

Now, we recall the definition of the solution of the problem (11).

Definition 3. A function $u \in \mathscr{PC}(J;E)$ is said to be a solution of the problem (11) if ${}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t)$ exists in J_k, for $k = 0,\dots,m$, and satisfies

(i) the equation ${}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) = A(t,u)u(t) + \Phi_{t_{k+1}}(t,u(t))$ in J_k, $k = 0,\dots,m$,

(ii) the initial condition $u(a) = u_0$,

(iii) the impulsive conditions $u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k^-))$, $k = 1,\dots,m$.

Lemma 4. *A function $u \in \mathscr{PC}(J;E)$ satisfies the following nonlinear integral equation*

$$u(t)=\begin{cases} u_0+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\displaystyle\int_a^t (t-s)^{\alpha_0-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ \quad +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\displaystyle\int_a^t (t-s)^{\alpha_0-1}\Phi_{t_1}(s,u)\,ds, \\ \qquad\qquad t\in[a,t_1], \\ u_0+\displaystyle\sum_{i=1}^{k} I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right) \\ \quad +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\displaystyle\int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha_k-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ \quad +\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(t_i-s\right)^{\alpha_{i-1}-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ \quad +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\displaystyle\int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\,ds \\ \quad +\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(t_i-s\right)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{t_i}(s,u)\,ds, \\ \qquad\qquad t\in J_k,\ k=1,\ldots,m, \end{cases} \tag{19}$$

if and only if it is a solution to problem (11).

Proof. Since we have $u(t_k^-)=u(t_k)$, then $u(t_k^+)=u(t_k)+I_k(u(t_k^-))$.

Now, for $t\in J_0=[a,t_1]$, the solution of the problem

$$\begin{gathered} {}^{c}D_{a^+}^{\alpha_0}u(t)=A(t,u)\,u(t)+\Phi_{t_1}(t,u), \quad t\in J_0, \\ u(a)=u_0\in E \end{gathered} \tag{20}$$

is given by

$$\begin{aligned} u(t)={}&u_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^t (t-s)^{\alpha_0-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^t (t-s)^{\alpha_0-1}\Phi_{t_1}(s,u)\,ds, \quad t\in J_0. \end{aligned} \tag{21}$$

We have for $t=t_1$ the following relation $u(t_1^+)=u(t_1)+I_1(u(t_1^-))$, and so

$$\begin{aligned} u\left(t_1^+\right)={}&\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}\Phi_{t_1}(s,u)\,ds \\ &+u_0+I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Next, for $t\in J_1=(t_1,t_2]$, we have

$$\begin{aligned} u(t)={}&u\left(t_1^+\right)+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha_1-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha_1-1}\Phi_{t_2}(s,u)\,ds \\ ={}&u_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}\Phi_{t_1}(s,u)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha_1-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha_1-1}\Phi_{t_2}(s,u)\,ds+I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right) \end{aligned} \tag{23}$$

from which we infer that

$$\begin{aligned} u\left(t_2^+\right)={}&u_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}\Phi_{t_1}(s,u)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha_1-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha_1-1}\Phi_{t_2}(s,u)\,ds \\ &+I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right)+I_2\left(u\left(t_2^-\right)\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Arguing as before we obtain for $t\in J_2$

$$\begin{aligned} u(t)={}&u\left(t_2^+\right)+\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha_2-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha_2-1}\Phi_{t_3}(s,u)\,ds \\ ={}&u_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_a^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha_0-1}\Phi_{t_1}(s,u)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha_1-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha_1-1}\Phi_{t_2}(s,u)\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha_2-1}A(s,u)\,u(s)\,ds \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\alpha_2-1}\Phi_{t_3}(s,u)\,ds$$
$$+I_1\left(u\left(t_1^-\right)\right)+I_2\left(u\left(t_2^-\right)\right). \tag{25}$$

Reasoning by induction we get, for any $t\in J_k$, $k=1,\ldots,m$, the general expression

$$\begin{aligned}u(t) &= u_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}A(s,u)\,u(s)\,ds\\ &+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(t_i-s\right)^{\alpha_{i-1}-1}A(s,u)\,u(s)\,ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\,ds\\ &+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(t_i-s\right)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{t_i}(s,u)\,ds\\ &+\sum_{i=1}^{k}I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right).\end{aligned} \tag{26}$$

Conversely, we assume that u satisfies (19). If $t=a$, then $u(a)=u_0$.

Now, using the fact that Caputo's derivative of a constant is zero, then, for every $t\in J_k$, $k=0,\ldots,m$, we get

$$\begin{aligned}{}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}u(t) &= {}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}A(s,u)\,u(s)\,ds\right]\\ &+{}^{C}D_{t_k}^{\alpha_k}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\,ds\right]\\ &={}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}\left(J_{t_k^+}^{\alpha_k}A(t,u)\,u(t)\right)+{}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}\left(J_{t_k^+}^{\alpha_k}\Phi_{t_{k+1}}(t,u)\right).\end{aligned} \tag{27}$$

So

$${}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}u(t)=A(t,u)\,u(t)+\Phi_{t_{k+1}}(t,u), \tag{28}$$

for every $t\in J_k$, $k=0,\ldots,m$.

Also we can easily show that

$$u\left(t_k^+\right)=u\left(t_k\right)+I_k\left(u\left(t_k^-\right)\right),\quad k=1,\ldots,m. \tag{29}$$

□

We conclude this section by introducing some useful theorems which will be used in the sequel.

Theorem 5 ($\mathscr{PC}$-type Ascoli-Arzela theorem [21]). *Let E be a Banach space and $\mathscr{W}\subset\mathscr{PC}(J,E)$. If the following conditions are satisfied*

(i) *$\mathscr{W}$ is a uniformly bounded subset of $\mathscr{PC}(J,E)$;*

(ii) *$\mathscr{W}$ is equicontinuous in (t_k,t_{k+1}), $k=0,1,2,\ldots,m$;*

(iii) *$\mathscr{W}(t)=\{u(t):u\in\mathscr{W},\ t\in J\setminus\{t_k\}\}$, $\mathscr{W}(t_k^+)=\{u(t_k^+):u\in\mathscr{W}\}$, and $\mathscr{W}(t_k^-)\equiv\{u(t_k^-):u\in\mathscr{W}\}$ are relatively compact subsets of E,*

then $\mathscr{W}$ is a relatively compact subset of $\mathscr{PC}(J,E)$.

Theorem 6 (Schaefer's fixed point theorem). *Let E be a Banach space and let $\mathscr{T}:E\to E$ be a completely continuous operator. If the set*

$$X=\{u\in E:u=\lambda\mathscr{T}u,\ \lambda\in(0,1)\} \tag{30}$$

is bounded, then $\mathscr{T}$ has at least a fixed point.

3. A Quasilinear Impulsive Fractional Problem

We begin our investigation by the following result which ensures the existence and the uniqueness of the solution of the following impulsive quasilinear problem:

$$\begin{aligned}&{}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}u(t)\\ &\quad=A(t,u)\,u(t)+\Phi_{t_{k+1}}(t,u(t)),\quad t\in J_k,\ k=0,\ldots,m,\\ &u(a)=u_0\in E,\\ &u\left(t_k^+\right)=u\left(t_k\right)+I_k\left(u\left(t_k^-\right)\right),\quad k=1,\ldots,m.\end{aligned} \tag{31}$$

We assume that $A:J\times E\to\mathscr{B}(E)$ is continuous and there exists a constant $M>0$ such that

$$\|A(t,u)-A(t,v)\|\le M\|u-v\|,\quad\forall t\in J,\ \forall u,v\in E. \tag{32}$$

We set $M'=\max_{t\in J}\|A(t,0)\|$.

It is not hard to establish the following estimates.

Lemma 7. *Let the functions $h(t,s,u)$ and $k(t,s,u)$ be continuous with respect to the variables s and t, and there are two positive constants C_1 and C_2 such that*

$$\begin{aligned}&\|h(t,s,u)-h(t,s,v)\|\le C_1\|u-v\|,\\ &\qquad\forall t,s\in J,\ \forall u,v\in E,\\ &\|k(t,s,u)-k(t,s,v)\|\le C_2\|u-v\|,\\ &\qquad\forall t,s\in J,\ \forall u,v\in E.\end{aligned} \tag{33}$$

Then, there exist two positive constants C_1' and C_2' so that

$$\begin{aligned}&\|Hu(t)\|\le(T-a)\left(C_1\|u\|_{\mathscr{PC}}+C_1'\right),\\ &\|Hu(t)-Hv(t)\|\le C_1(T-a)\|u-v\|_{\mathscr{PC}},\end{aligned} \tag{34}$$

and, for $k=0,\ldots,m$, one has

$$\begin{aligned}&\left\|K_{t_{k+1}}u(t)\right\|\le(T-a)\left(C_2\|u\|_{\mathscr{PC}}+C_2'\right),\\ &\left\|K_{t_{k+1}}u(t)-K_{t_{k+1}}v(t)\right\|\le C_2(T-a)\|u-v\|_{\mathscr{PC}},\end{aligned} \tag{35}$$

for every $u,v\in\mathscr{PC}(J,E)$ and $t\in J$.

We assume the following hypotheses:

(H1) $\alpha_0,\dots,\alpha_m \in (0,1)$. We set $T' = \max_{0\le i\le m}\{(T-a)^{\alpha_i}\}$ and $\Gamma' = \min_{0\le i\le m}\{\Gamma(\alpha_i+1)\}$.

(H2) There is a positive constant L_1 such that

$$\begin{aligned}\left\|\Phi_{t_{k+1}}(t,u)-\Phi_{t_{k+1}}(t,v)\right\| &\le \{L_1+(C_1+C_2)(T-a)\}\|u-v\|_{\mathscr{PC}}, \\ &\forall t\in J,\ \forall u,v\in\mathscr{PC},\ k=0,\dots,m.\end{aligned} \tag{36}$$

We set $L = L_1 + (C_1+C_2)(T-a)$ and $L_2 = \sup_{t\in J}\|F(t,0,0,0)\|$.

(H3) There is a positive constant $\mu > 0$ such that

$$\begin{aligned}\left\|I_k(u)-I_k(v)\right\| \le \mu\|u-v\|, \\ \forall u,v\in E,\ k=1,\dots,m.\end{aligned} \tag{37}$$

(H4) The positive real number

$$\gamma = m\mu + (m+1)\left(L+2rM+M'\right)\frac{T'}{\Gamma'} \tag{38}$$

satisfies $0<\gamma<1$.

Next, we state and prove the existence and uniqueness result for the quasilinear integrodifferential problem (31); we have the following.

Theorem 8. *If the assumptions (H1)–(H4) are satisfied, then problem* (31) *has one and only one solution $u\in\mathscr{PC}(J,E)$.*

Proof. Since we are concerned with the existence and uniqueness of the solution of (31) then, it is wise to use the Banach contraction principle in order to establish such results.

Let $\mathscr{B}_r = \{u\in\mathscr{PC}(J,E) : \|u\|_{\mathscr{PC}} \le r\}$ be the closed ball of $\mathscr{PC}(J,E)$ centered at 0 with radius r satisfying the following inequality:

$$\begin{aligned}\varphi(r) := \left\|u_0\right\| &+ \frac{(m+1)T'}{\Gamma'}L' \\ &+ \left[\frac{(m+1)T'}{\Gamma'}\left(rM+M'+L\right)+m\mu\right]r \le r,\end{aligned} \tag{39}$$

where

$$L' = \left(C_1'+C_2'\right)(T-a)+L_2. \tag{40}$$

Endowing $\mathscr{B}_r$ with the metric $d(u,v) = \|u-v\|_{\mathscr{PC}}$, for every $u,v\in\mathscr{B}_r$, we obtain a complete metric space $(\mathscr{B}_r,d)$. Next, we define the operator $\Psi:\mathscr{B}_r\to\mathscr{B}_r$ by

$$\begin{aligned}\Psi u(t) = u_0 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \\ &\times \int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}A(s,u)u(s)\,ds \\ &+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}A(s,u)u(s)\,ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\,ds \\ &+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi_{t_i}(s,u)\,ds \\ &+ \sum_{a<t_i<t}I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right),\quad t\in J_k,\ k=0,\dots,m.\end{aligned} \tag{41}$$

It is understood that the sum $\sum_{a<t_i<t}$ is zero if $t\in J_0$.

First, we prove that if $u\in\mathscr{PC}(J;E)$, then $\Psi u\in\mathscr{PC}(J;E)$.

Indeed, for each $t\in(t_k,t_{k+1})$, $u\in\mathscr{C}((t_k,t_{k+1}),E)$, and any sufficiently small $\delta>0$, we have

$$\begin{aligned}&\|\Psi u(t+\delta)-\Psi u(t)\| \\ &\quad\le \frac{\left(M\|u\|_{\mathscr{PC}}+M'+L\right)\|u\|_{\mathscr{PC}}+L'}{\Gamma(\alpha_k)} \\ &\qquad\times\int_{t_k}^{t}\left[(t-s)^{\alpha_k-1}-(t+\delta-s)^{\alpha_k-1}\right]ds \\ &\qquad+\frac{\left(M\|u\|_{\mathscr{PC}}+M'+L\right)\|u\|_{\mathscr{PC}}+L'}{\Gamma(\alpha_k)} \\ &\qquad\times\int_{t}^{t+\delta}(t+\delta-s)^{\alpha_k-1}ds.\end{aligned} \tag{42}$$

Calculating the integrals we find that

$$\|\Psi u(t+\delta)-\Psi u(t)\| \le 3\frac{\left[\left(Mr+M'+L\right)r+L'\right]}{\Gamma'}\delta^{\alpha_k}. \tag{43}$$

Thus, the right-hand side tends to zero as $\delta\to0$. Likewise one gets $\lim_{\delta\to0}\|\Psi u(t)-\Psi u(t-\delta)\| = 0$; this shows that Ψu is continuous at t. Hence $\Psi u\in\mathscr{C}((t_k,t_{k+1}),E)$.

Next, for the right endpoint $t=t_{k+1}$ we get for any sufficiently small $\delta>0$

$$\left\|\Psi u(t_{k+1})-\Psi u(t_{k+1}-\delta)\right\| \le 3\frac{\left[\left(Mr+M'+L\right)r+L'\right]}{\Gamma'}\delta^{\alpha_k}, \tag{44}$$

which shows that the right-hand side tends to zero as $\delta\to0$, and accordingly, Ψu is continuous at t_{k+1}. Therefore $\Psi u\in\mathscr{PC}(J,E)$.

To prove that $\Psi \mathscr{B}_r \subset \mathscr{B}_r$ we see that, for any $u \in \mathscr{B}_r$ and $t \in J_k$, $k = 0, \ldots, m$, we have

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t)\| \leq{} & \|u_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \\
& \times \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|A(s,u)\| \cdot \|u(s)\| \, ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
& \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|A(s,u)\| \cdot \|u(s)\| \, ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1} \left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\| ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \left\|\Phi_{t_i}(s,u)\right\| ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \left\|I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right)\right\|.
\end{aligned} \tag{45}$$

Estimating the right-hand side we find

$$\begin{aligned}
&\|\Psi u(t)\| \\
&\leq \|u_0\| + \frac{(m+1)T'}{\Gamma'} \\
&\quad \times \left(M\|u\|_{\mathscr{PC}} + M'\right) \cdot \|u\|_{\mathscr{PC}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \\
&\quad \times \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1} \left[L\|u\|_{\mathscr{PC}} + (T-a)\left(C_1' + C_2'\right) + L_2\right] ds \\
&\quad + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
&\quad \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \left[L\|u\|_{\mathscr{PC}} + (T-a)\left(C_1' + C_2'\right) + L_2\right] ds \\
&\quad + m\mu\|u\|_{\mathscr{PC}}.
\end{aligned} \tag{46}$$

So

$$\begin{aligned}
&\|\Psi u(t)\| \\
&\qquad \leq \|u_0\| + \frac{(m+1)T'}{\Gamma'} L' \\
&\qquad \quad + \left[\frac{(m+1)T'}{\Gamma'}\left(rM + M' + L\right) + m\mu\right] r \\
&\qquad \leq \varphi(r) \leq r.
\end{aligned} \tag{47}$$

Therefore, $\|\Psi u\|_{\mathscr{PC}} \leq r$, and consequently $\Psi \mathscr{B}_r \subset \mathscr{B}_r$.

Next, we prove that Ψ is a contraction mapping; indeed, for any $u, v \in \mathscr{B}_r$ and $t \in J_k$, $k = 0, \ldots, m$, we have

$$\begin{aligned}
&\|\Psi u(t) - \Psi v(t)\| \\
&\quad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1} \|A(s,u)u(s) - A(s,v)v(s)\| \, ds \\
&\quad + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
&\quad \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|A(s,u)u(s) - A(s,v)v(s)\| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1} \left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u) - \Phi_{t_{k+1}}(s,v)\right\| ds \\
&\quad + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
&\quad \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \left\|\Phi_{t_i}(t,u) - \Phi_{t_i}(s,v)\right\| ds \\
&\quad + \sum_{a<t_i<t} \left\|I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right) - I_i\left(v\left(t_i^-\right)\right)\right\|.
\end{aligned} \tag{48}$$

Taking into account the previous assumptions we get the following estimate:

$$\begin{aligned}
&\|\Psi u(t) - \Psi v(t)\| \\
&\qquad \leq m\mu\|u - v\|_{\mathscr{PC}} \\
&\qquad + \frac{\|u - v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1} \left[Mr + M' + Mr\right] ds \\
&\qquad + \sum_{a<t_i<t} \frac{\|u - v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
&\qquad \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \left[Mr + M' + Mr\right] ds \\
&\qquad + \frac{L\|u - v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1} ds \\
&\qquad + \sum_{a<t_i<t} \frac{L\|u - v\|_{\mathscr{PC}}}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} ds.
\end{aligned} \tag{49}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
&\|\Psi u(t) - \Psi v(t)\| \\
&\qquad \leq \left[m\mu + (m+1)\left(L + 2rM + M'\right)\frac{T'}{\Gamma'}\right] \|u - v\|_{\mathscr{PC}} \\
&\qquad \leq \gamma\|u - v\|_{\mathscr{PC}}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Accordingly, the mapping Ψ has a unique fixed point $u = \Psi u \in \mathscr{B}_r$, which completes the proof. □

4. A Semilinear Impulsive Fractional Problem

In this section we consider a semilinear impulsive fractional integrodifferential problem subjected to a nonlocal condition in a finite dimensional normed space $(E, \|\cdot\|)$. Actually, the finite dimension requirement is due to some technical difficulties in order to prove some compactness properties. The problem is as follows:

$$\begin{aligned}
&{}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k} u(t) \\
&\quad = A(t)u(t) + \Phi_{t_{k+1}}(t, u(t)), \quad t \in J_k,\ k = 0, \dots, m, \\
&\quad u(a) + g(u) = u_0 \in E, \\
&\quad u(t_k^+) = u(t_k) + I_k(u(t_k^-)), \quad k = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{51}$$

We assume that the mapping $A : J \to \mathscr{B}(E)$ is continuous and we put

$$M'' = \max_{t \in J} \|A(t)\|. \tag{52}$$

We need the following hypothesis:

(H5) there exists a constant $G > 0$ such that the mapping $g : \mathscr{PC}(J, E) \to E$ satisfies

$$\|g(u) - g(v)\| \le G\|u - v\|_{\mathscr{PC}}, \quad \forall u, v \in \mathscr{PC}(J, E). \tag{53}$$

Now, we are ready to state and prove the following result.

Theorem 9. *If the assumptions (H1)–(H3) and (H5) are satisfied, then problem* (51) *has at least one solution* $u \in \mathscr{PC}(J, E)$.

Proof. Let us define the operator $Q : \mathscr{PC}(J, E) \to \mathscr{PC}(J, E)$ by

$$\begin{aligned}
Qu(t) &= u_0 - g(u) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \\
&\quad \times \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} A(s)u(s)\,ds \\
&\quad + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} A(s)u(s)\,ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} \Phi_{t_{k+1}}(s, u)\,ds \\
&\quad + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} \Phi_{t_i}(s, u)\,ds \\
&\quad + \sum_{a<t_i<t} I_i(u(t_i^-)), \quad t \in J_k,\ k = 0, \dots, m.
\end{aligned} \tag{54}$$

First, we notice that by using the same technique as that in the proof of the Theorem 8 we can establish that if $u \in \mathscr{PC}(J, E)$, then $Qu \in \mathscr{PC}(J, E)$; that is, the operator Q maps the space $\mathscr{PC}(J, E)$ into itself.

To prove that Q has a fixed point we use Schaefer's fixed point theorem. We proceed in four steps.

Step 1 (Q is continuous). Let $\{u_n\}_{n\ge1} \subset \mathscr{PC}(J, E)$ such that $u_n \to u$ in $\mathscr{PC}(J, E)$; then

$$\begin{aligned}
&\|Qu_n(t) - Qu(t)\| \\
&\quad \le \|g(u_n) - g(u)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \\
&\qquad \times \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} \|A(s)(u_n(s) - u(s))\|\,ds \\
&\qquad + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
&\qquad \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} \|A(s)(u_n(s) - u(s))\|\,ds \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} \left\|\Phi_{t_{k+1}}(s, u_n) - \Phi_{t_{k+1}}(s, u)\right\| ds \\
&\qquad + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
&\qquad \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} \left\|\Phi_{t_i}(s, u_n) - \Phi_{t_i}(s, u)\right\| ds \\
&\qquad + \sum_{a<t_i<t} \|I_i(u_n(t_i^-)) - I_i(u(t_i^-))\|, \\
&\qquad\qquad t \in J_k,\ k = 0, \dots, m.
\end{aligned} \tag{55}$$

Taking into account the assumptions (H2)-(H3) and (H5) and using Lemma 7 we get

$$\begin{aligned}
&\|Qu_n(t) - Qu(t)\| \\
&\quad \le G\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}} + \frac{M''}{\Gamma(\alpha_k)} \|u_n - u\|_{\mathscr{PC}} \\
&\qquad \times \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} ds + M''\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}} \\
&\qquad \times \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} ds \\
&\qquad + \frac{L}{\Gamma(\alpha_k)} \|u_n - u\|_{\mathscr{PC}} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} ds \\
&\qquad + L\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}} \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} ds \\
&\qquad + m\mu\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}}, \quad t \in J_k,\ k = 0, \dots, m.
\end{aligned} \tag{56}$$

Calculating the integrals in the right-hand side we obtain

$$\begin{aligned}&\|Qu_n - Qu\|_{\mathscr{PC}}\\&\quad\leq \left[G + m\mu + \frac{(m+1)T'}{\Gamma'}\left(M'' + L\right)\right]\|u_n - u\|_{\mathscr{PC}}.\end{aligned} \tag{57}$$

So

$$\|Qu_n - Qu\|_{\mathscr{PC}} \longrightarrow 0, \quad \text{as } n \longrightarrow \infty, \tag{58}$$

and accordingly, Q is continuous.

Step 2. Let $\varepsilon > 0$ and $B_\varepsilon = \{u \in \mathscr{PC}(J,E) : \|u\|_{\mathscr{PC}} \leq \varepsilon\}$. Define $\mathscr{W} = \{Qu : u \in B_\varepsilon\}$; then for any $u \in B_\varepsilon$ we have

$$\begin{aligned}\|Qu(t)\| \leq{} & \|u_0 - g(u)\|\\&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k - 1}\|A(s)\|\|u(s)\|\,ds\\&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}\|A(s)\|\|u(s)\|\,ds\\&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k - 1}\left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\|ds\\&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}\left\|\Phi_{t_i}(s,u)\right\|ds\\&+ \sum_{a<t_i<t}\left\|I_i\left(u\left(t_i^-\right)\right)\right\|, \quad t \in J_k,\ k = 0,\ldots,m.\end{aligned} \tag{59}$$

Estimating the right-hand side we obtain

$$\begin{aligned}\|Qu(t)\| \leq{} & \|u_0\| + G\|u\|_{\mathscr{PC}}\\&+ \|g(0)\| + \frac{(m+1)T'}{\Gamma'}M'' \cdot \|u\|_{\mathscr{PC}}\\&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}\left[L\|u\|_{\mathscr{PC}} + L'\right]ds\\&+ \sum_{a<t_i<t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_k-1}\left[L\|u\|_{\mathscr{PC}} + L'\right]ds\\&+ m\mu\|u\|_{\mathscr{PC}},\end{aligned} \tag{60}$$

implying that

$$\begin{aligned}\|Qu\|_{\mathscr{PC}} \leq{} & \|u_0\| + \|g(0)\|\\&+ \frac{(m+1)T'}{\Gamma'}\left(M''\varepsilon + L\varepsilon + L'\right) + G\varepsilon + m\mu\varepsilon := \rho.\end{aligned} \tag{61}$$

Hence $\mathscr{W}$ is uniformly bounded.

Step 3 (we prove that $\mathscr{W}$ is equicontinuous). Let $u \in B_\varepsilon$; then, for any $t_k < \tau_1 < \tau_2 \leq t_{k+1}$, we have

$$\begin{aligned}&\|Qu(\tau_2) - Qu(\tau_1)\|\\&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\\&\quad\times\int_{t_k}^{\tau_1}\left[(\tau_1 - s)^{\alpha_k-1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k-1}\right]\|A(s)\|\|u(s)\|\,ds\\&\quad+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2 - s)^{\alpha_k-1}\|A(s)\|\|u(s)\|\,ds\\&\quad+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{\tau_1}\left[(\tau_1 - s)^{\alpha_k-1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k-1}\right]\left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\|ds\\&\quad+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2 - s)^{\alpha_k-1}\left\|\Phi_{t_{k+1}}(s,u)\right\|ds.\end{aligned} \tag{62}$$

So

$$\begin{aligned}&\|Qu(\tau_2) - Qu(\tau_1)\|\\&\quad\leq \frac{\left(M''+L\right)\varepsilon + L'}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^{\tau_1}\left[(\tau_1 - s)^{\alpha_k-1} - (\tau_2 - s)^{\alpha_k-1}\right]ds\\&\qquad+ \frac{\left(M''+L\right)\varepsilon + L'}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2 - s)^{\alpha_k-1}ds\\&\quad\leq 3\frac{\left[\left(M''+L\right)\varepsilon + L'\right]}{\Gamma'}(\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_k}.\end{aligned} \tag{63}$$

As $\tau_1 \to \tau_2$, the right-hand side of the previous inequality tends to zero, which means that $\mathscr{W}$ is equicontinuous.

We point out that the closures of the subsets $\mathscr{W}(t) := \{Qu(t) : u \in B_\varepsilon,\ t \in J\backslash\{t_k\},\ k = 1,\ldots,m\}$, $\mathscr{W}(t_k^-) := \{Qu(t_k^-) : u \in B_\varepsilon\}$, and $\mathscr{W}(t_k^+) := \{Qu(t_k^+) : u \in B_\varepsilon\}$, $k = 1,\ldots,m$, are bounded in E ($\dim E < \infty$); hence they are compact.

As a consequence of the previous steps and the $\mathscr{PC}$-type Arzela-Ascoli theorem we conclude that Q is completely continuous.

Step 4. Now, we show that the set

$$X = \{u \in \mathscr{PC}(J,E) : u = \lambda Qu,\ \lambda \in (0,1)\} \tag{64}$$

is bounded.

Let $u \in X$; then $u = \lambda Q u$, for some $\lambda \in (0,1)$. Thus, for each $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| \le{} & \lambda \|u_0\| + \lambda \|g(u)\| \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|A(s)\| \cdot \|u(s)\| \, ds \\
& + \lambda \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \\
& \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|A(s)\| \cdot \|u(s)\| \, ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \left\| \Phi_{t_{k+1}}(s,u) \right\| ds \\
& + \lambda \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \left\| \Phi_{t_i}(s,u) \right\| ds \\
& + \lambda \sum_{a<t_i<t} \left\| I_i \left(u \left(t_i^- \right) \right) \right\| \\
\le{} & \lambda \left[\|u_0\| + \|g(0)\| + \frac{(m+1) T'}{\Gamma'} \right. \\
& \left. \times \left(M'' \varepsilon + L \varepsilon + L' \right) + G \varepsilon + m \mu \varepsilon \right] \\
<{} & \infty.
\end{aligned} \tag{65}$$

This shows that the set X is bounded.

We conclude by Schaefer's fixed point theorem that the operator Q has a fixed point $u \in \mathscr{PC}(J,E)$ such that $Qu = u$, which means that u is a solution to problem (51). □

Next, we establish the continuous dependence of the solution upon the initial value. We have the following.

Proposition 10. *Under the hypotheses (H1)–(H3) and (H5) the solution of problem* (51) *depends continuously upon its initial value if*

$$G + m\mu + (m+1)\left(L + M''\right) \frac{T'}{\Gamma'} < 1. \tag{66}$$

Proof. Since u is a solution to (51), then it satisfies the integral equation (19). Let v be a solution to problem (51) with initial value $v(a) = v_0 - g(v)$. Then $v(t)$ satisfies the integral equation

$$\begin{aligned}
v(t) ={} & v_0 - g(v) \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} A(s) v(s) \, ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} A(s) v(s) \, ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi_{t_{k+1}}(s,v) \, ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi_{t_i}(s,v) \, ds \\
& + \sum_{a<t_i<t} I_i \left(v \left(t_i^- \right) \right), \quad t \in J_k, \ k = 0, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{67}$$

Estimating the difference between solutions $u(t)$ and $v(t)$ to (19) and (67), respectively, we get

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\| \le{} & \left\| u_0 - v_0 \right\| + G \|u - v\|_{\mathscr{PC}} \\
& + \frac{M''(m+1) T'}{\Gamma'} \|u - v\|_{\mathscr{PC}} \\
& + \frac{L(m+1) T'}{\Gamma'} \|u - v\|_{\mathscr{PC}} \\
& + m\mu \|u - v\|_{\mathscr{PC}}, \quad t \in J_k, \ k = 0, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{68}$$

Taking the supremum over the interval J we find that

$$\|u - v\|_{\mathscr{PC}} \le \frac{1}{\rho} \left\| u_0 - v_0 \right\|, \tag{69}$$

where

$$\rho = 1 - G - m\mu - (m+1)\left(L + M''\right) \frac{T'}{\Gamma'}, \tag{70}$$

which proves that the mapping $u_0 \mapsto u$ is continuous from $E \to \mathscr{PC}(J,E)$. □

5. Example

Consider the following impulsive fractional integrodifferential problem

$$\begin{aligned}
& D_{0^+}^{1/2} u(t) \\
& \quad = \frac{t}{24} u(t) \cos u(t) + \frac{|u(t)|}{(|u(t)| + 2)\left(t^2 + 12\right)} \\
& \qquad + \int_0^t \frac{e^{-|u(s)|/6}}{(t+2)^2} ds + \int_0^{1/2} \frac{\sin(u(s)/4)}{e^t + 6} ds, \quad t \in J_0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&D^{3/4}_{(1/2)^+} u(t) \\
&\quad = \frac{t}{24} u(t)\cos u(t) + \frac{|u(t)|}{(|u(t)|+2)(t^2+12)} \\
&\qquad + \int_0^t \frac{e^{-|u(s)|/6}}{(t+2)^2} ds + \int_0^1 \frac{\sin(u(s)/4)}{e^t+6} ds, \quad t \in J_1, \\
&\qquad\qquad u(0) = 1, \\
&\quad u\left(\frac{1}{2}^+\right) = u\left(\frac{1}{2}^-\right) + \frac{\left|u\left((1/2)^-\right)\right|}{\left|u\left((1/2)^-\right)\right| + 6}.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

We set $J_0 = [0, 1/2]$, $J_1 = (1/2, 1]$, and $J = [0, 1]$. We take $E = \mathbb{R}$, $a = t_0 = 0$, $t_1 = 1/2$, $T = 1$, $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = 3/4$, and $\mathscr{B}_r = \{u \in \mathscr{PC}(J, E), \|u\|_{\mathscr{PC}} \le r\}$. Define

$$
\begin{aligned}
A(t, u) &= \frac{t}{24} (\cos u) I, \\
Hu(t) &= \int_0^t \frac{e^{-|u(s)|/6}}{(t+2)^2} ds, \\
K_{t_{k+1}} u(t) &= \int_0^{t_{k+1}} \frac{\sin(u(s)/4)}{e^t+6} ds, \quad k = 0, 1, \\
\Phi_{t_{k+1}}(t, u(t)) &= \frac{|u(t)|}{(|u(t)|+2)(t^2+12)} + \int_0^t \frac{e^{-|u(s)|/6}}{(t+2)^2} ds \\
&\quad + \int_0^{t_{k+1}} \frac{\sin(u(s)/4)}{e^t+6} ds, \quad k = 0, 1, \\
I_1 u\left(\frac{1}{2}^-\right) &= \frac{\left|u\left((1/2)^-\right)\right|}{\left|u\left((1/2)^-\right)\right| + 6}.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

For any $u, v \in \mathscr{B}_r$ and $t \in J$, we have

$$
|Hu(t) - Hv(t)| \le \frac{1}{24} \|u - v\|_{\mathscr{PC}}. \tag{73}
$$

Hence $C_1 = 1/24$. Likewise, one has, for $k = 0, 1$,

$$
\left|K_{t_{k+1}} u(t) - K_{t_{k+1}} v(t)\right| \le \frac{1}{24} \|u - v\|_{\mathscr{PC}}; \tag{74}
$$

then $C_2 = 1/24$.

By (H1), we have

$$
\begin{aligned}
T' &= \max\left\{(T-a)^{\alpha_0}, (T-a)^{\alpha_1}\right\} = 1, \\
\Gamma' &= \min\left\{\Gamma(\alpha_0+1), \Gamma(\alpha_1+1)\right\} \\
&= \min\left\{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

On the other hand, using (H2) we obtain

$$
\begin{aligned}
&\left|\Phi_{t_{k+1}}(t, u) - \Phi_{t_{k+1}}(t, v)\right| \\
&\quad \le \left|\frac{|u(t)|}{(|u(t)|+2)(t^2+12)} - \frac{|v(t)|}{(|v(t)|+2)(t^2+12)}\right| \\
&\qquad + |Hu(t) - Hv(t)| + \left|K_{t_{k+1}} u(t) - K_{t_{k+1}} v(t)\right| \\
&\quad \le \frac{3}{24} \|u - v\|_{\mathscr{PC}}.
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Thus

$$
L_1 = \frac{1}{24}, \qquad L = \frac{3}{24}. \tag{77}
$$

Assumption (H3) gives

$$
\left|I_1(u) - I_1(v)\right| \le \frac{1}{6} \|u - v\|_{\mathscr{PC}}, \tag{78}
$$

so $\mu = 1/6$.

Due to the definition of $A(t, u)$ we have $M = M' = 1/24$. Let us now find a threshold for the value of r for which condition (H4) is satisfied. We should have

$$
0 < \gamma = \frac{1}{6} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{r}{3\sqrt{\pi}} < 1, \tag{79}
$$

so r is any positive number such that $r < (5\sqrt{\pi} - 4)/2 = 2.4311$. We conclude by Theorem 8 that problem (71) has a unique solution $u \in \mathscr{PC}([0, 1], \mathbb{R})$ such that $\|u\|_{\mathscr{PC}} \le r$.

6. Concluding Remarks

In this work we have first noticed that most of the published papers dealing with impulsive differential equations of fractional orders are not mathematically correct, so we have proved through a concrete counterexample that the concept of solution proposed recently by some authors is not realistic. On the other hand, we introduced a new class of impulsive fractional problems with several fractional orders and we established an equivalence with some integral equation. Moreover, we derived two existence results by using two different fixed point theorems as we proved the stability of the solution of the given problem with respect to the initial value. Finally, we illustrated our first theorem of existence and uniqueness by a concrete example in $\mathbb{R}$.

References

[1] W. M. Ahmad and R. El-Khazali, "Fractional-order dynamical models of love," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 33, no. 4, pp. 1367–1375, 2007.

[2] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodríguez-Germá, and J. J. Trujillo, "Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 187, no. 1, pp. 79–88, 2007.

[3] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 2010.

[4] E. Hernández, D. O'Regan, and K. Balachandran, "On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications A*, vol. 73, no. 10, pp. 3462–3471, 2010.

[5] V. Lakshmikantham, "Theory of fractional functional differential equations," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications A*, vol. 69, no. 10, pp. 3337–3343, 2008.

[6] V. Lakshmikantham, D. D. Baĭnov, and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[7] V. Lakshmikantham, S. Leela, and D. J. Vasundhara, *Theory of Fractional Dynamic Systems*, Cambridge Scientific, Cambridge, UK, 2009.

[8] V. E. Tarasov, *Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, Heidelberg, Germany, 2011.

[9] M. Benchohra and B. A. Slimani, "Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations," *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2009, article 10, 11 pages, 2009.

[10] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1993.

[11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

[12] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science, Longhorne, Pa, USA, 1993.

[13] K. Balachandran, S. Kiruthika, and J. J. Trujillo, "Remark on the existence results for fractional impulsive integrodifferential equations in Banach spaces," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 6, pp. 2244–2247, 2012.

[14] K. Balachandran, S. Kiruthika, and J. J. Trujillo, "Existence results for fractional impulsive integrodifferential equations in Banach spaces," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 4, pp. 1970–1977, 2011.

[15] O. K. Jaradat, A. Al-Omari, and S. Momani, "Existence of the mild solution for fractional semilinear initial value problems," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications A*, vol. 69, no. 9, pp. 3153–3159, 2008.

[16] G. M. Mophou and G. M. N'Guérékata, "Existence of the mild solution for some fractional differential equations with nonlocal conditions," *Semigroup Forum*, vol. 79, no. 2, pp. 315–322, 2009.

[17] G. M. N'Guérékata, "A Cauchy problem for some fractional abstract differential equation with non local conditions," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications A*, vol. 70, no. 5, pp. 1873–1876, 2009.

[18] M. Fečkan, Y. Zhou, and J. Wang, "On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 7, pp. 3050–3060, 2012.

[19] L. Mahto, S. Abbas, and A. Favini, "Analysis of Caputo impulsive fractional order differential equations," *International Journal of Differential Equations*, vol. 2013, Article ID 704547, 11 pages, 2013.

[20] B. Nagy and F. Riesz, *Functional Analysis*, Blackie & Son, London, UK, 1956.

[21] W. Wei, X. Xiang, and Y. Peng, "Nonlinear impulsive integro-differential equations of mixed type and optimal controls," *Optimization*, vol. 55, no. 1-2, pp. 141–156, 2006.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, B. Ahmad, *Existence of solutions for impulsive anti-periodic boundary value problems of fractional semilinear evolution equations,* Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math Anal. 18 (2011) 457-470.

[2] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani,*A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions,* Acta. Appl. Math. 109 (2010) 973-1033.

[3] R. P. Agarwal, M. Benchohra, B. A. Slimani, *Existence results for differential equations with fractional order and impulses*, Memoirs on Differential Equations and Mathemaical Physics 44 (2008) 1-21.

[4] B. Ahmad, J. J. Nieto, *Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions,* Bound. Value Probl. 2009. Article ID 708576(2009).

[5] B. Ahmad, J. J. Nieto, *Riemann-Liouville fractional integrodifferential equations with fractional nonlocal integral boundary conditions,* Bound. Value Probl. 2011. 36(2011).

[6] B. Ahmad, S. Sivasundaram, *Theory of fractional differential equations with three-point boundary conditions,* Commun. Appl. Anal. 12 (2008) 479-484.

[7] B. Ahmad, S. Sivasundaram, *Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations,* Nonlin. Anal. Hybrid Syst. 3 (2009), 251-258.

[8] B. Ahmad, S. Sivasundaram, *Existence of solutions for impulsive integral boundary value problems of fractional order,* Nonlin. Anal. Hybrid Syst. 4 (2010), 134-141.

[9] W. M. Ahmad, R. El-Khazali, *Fractional-order dynamic models of love*, Chaos, Solitons and Fractals 33 (2007), 1367-1375.

[10] S. Aizicovici, M. McKibben, *Existence results for a class of abstract nonlocal Cauchy problems,* Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applications, 39 (2000) 649-668.

[11] A. Anguraj, P. Karthikeyan, G.M. N'Guérékata, *Nonlocal Cauchy problem for some fractional abstract differential equations in Banach spaces*, Communications in Mathematical Analysis, 6 (1) (2009) 31-35.

[12] T. J. Anastasio, *The fractional-order dynamics of Brainstem Vestibulo-Oculomotor neurons,* Biol. Cybernet. 72, no 1, 69-79, 1994.

[13] R. Atmania, *Etude de certaines équations différentielles impulsives,* Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba (2007).

[14] R.L. Bagley, P.J. Torvik, *Fractional calculus : a different approach to the analysis of viscoelastic damped structures,* AIAA Journal, 21(5) :741-748, 1983.

[15] K. Balachandran *et al.*, *Remark on the existence results for fractional impulsive integrodifferential equations in Banach spaces,* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 17 (2012), 2244-2247.

[16] K. Balachandran *et al.*, *Existence results for fractional impulsive integrodifferential equations in Banach spaces.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 16 (2011) 1970-1977.

[17] K. Balachandran, S. Kiruthika, *Existence of solutions of abstract fractional impulsive semilinear evolution equations,* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2010, No.4, 1-12.

[18] M. Benchohra, D. Seba, *Impulsive fractional differential equations in Banach Spaces,* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Spec. Ed. I, 2009, No.8, 1-14.

[19] M. Benchohra, B. A. Slimani, *Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations,* EJDE, Vol 2009 (2009), No 10, 1-11.

[20] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodriguez-Germa, J. J. Trujillo, *Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations,* Applied Mathematics Computation, 187 (2007), 79-88.

[21] A. Bouzaroura, S. Mazouzi, *An alternative method for the study of impulsive differential equations of fractional orders in a Banach space,* International Journal of Differential Equations, vol 2013, Article ID 191060, 12 pages, 2013. doi :10.1155/2013/191060.

[22] A. Bouzaroura, S. Mazouzi, *Existence results for certain multi-orders impulsive fractional boundary value problem,* Soumis pour publication.

[23] L. Byszewski, *Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem,* J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 494-505.

[24] L. Byszewski, *Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem,* Selected problems of mathematics, 25-33, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, 6, Cracow Univ. Technol., Krakow, 1995.

[25] L. Byszewski, H. Acka, *Existence of solutions of semilinear functional differential evolution nonlocal problems*, Nonlinear Analysis, 34 (1998), 65-72.

[26] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, *Theorem about the existce and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space*, Appl. Anal. 40 (1991), 11-19.

[27] A. Cabada, G. Wang, *Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions,* J. Math. Anal. Appl. 389, (2012), 403-411.

[28] M. Caputo, *Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent,* Part II. Geophysical Journal of Royal Astronomical Society, 1967 ;13 : 529-39.

[29] Y. Chou, K. T. Jih. *Robust control of a class of time-delay nonlinear processes,* Industrial and Engineering Chemistry Research, 45(26), pp.8963-8972, 2006.

[30] G. Cooper, D. Cowan. *The application of fractional calculus to potential field data,* Exploration geophysics, 34 :51-56, 2003.

[31] D.W. Davidson, R.H. Cole, *Dielectric relaxation in glycerol, propylene glycol and n-propanol,* Journal of Chemical Physics, 19 :1484-1490, 1951.

[32] D. Delbosco, L. Rodino, *Existence and uniqueness for a fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 204, (1996), 609-625.

[33] K. Deng, *Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 179, (1993), 630-637.

[34] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, Lecture Notes Math, 2010.

[35] P. Duta, P.M. Horn, *Low frequency fluctuations in solids* : 1/f noise. Review of modern physics, 53(3), July 1981.

[36] J. Eastham, K Hastings, *Optimal impulse control of portfolios,* Mathematics of Operations Research, 4 :pp.588-605, 1988.

[37] M. Fečkan, Y. Zhou, J. Wang, *On the Concept and Existence of Solution for Impulsive Fractional Differential Equations*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 17 (2012), 3050-3060.

[38] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, A. Charef. *Un filtre numérique basé sur la dérivation non-entière pour l'analyse du signal électrocardiographique,* ITBM-RBM, 21 :205-209, 2000.

[39] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, A. Charef, B. Boucheham, *R wave detection using fractional digital differentiation.* ITBM-RBM, 24 :273-280, 2003.

[40] E. Flores, T. J. Osler, *The Tautochrone Under Arbitrary Potentials Using Fractional Derivatives,* American Journal of Physics, 67(1999), pp.718-722.

[41] R. Gorenflo, F. Mainardi, M. Raberto, E. Scalas, *Fractional diffusion in finance : Basic theory,* In Modelli dinamici in economia e nanza. Urbino : MDF, 2000.

[42] A. Goutas, Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, M. Boudraa, B. Boucheham, *Digital fractional order differentiation-based algorithm for p and t-waves detection and delineation,* ITBM-RBM, 26 :127-132, 2005.

[43] Z.Y He, Y.F Zhang, L.X Yang, Y.H Shi. *Control chaos in nonautonomous cellular neural networks using impulsive control methods,* International Joint Conference on Neural Networks, 1 :pp.262-267, 1999.

[44] E. Hernández, D. O'Regan, K. Balachandran, *On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives,* Nonlin. Anal. 73 (2010), 3462-3471.

[45] E. Hernández, *Existence of solutions to a second order partial differential equation with nonlocal condition,* Electronic Journal of Differential Equations, 2003 (51) (2003) 1-10.

[46] O. K. Jaradat, A. Al-Omari, S. Momani, *Existence of mild solutions for fractional semilinear initial value problem*, Nonlinear Analysis, 69 (2008), 3153-3159.

[47] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations,* Elsevier. Amsterdam (2006).

[48] V. Lakshmikantham, *Theory of fractional functional differential equations*, Nonlinear Analysis, 69 (2008), 3337-3343.

[49] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[50] V. Lakshmikantham, S. Leela , D. J. Vasundhara, *Theory of fractional dynamic systems*, Cambridge Scientific Publishers ; 2009.

[51] T. L. Guo, W. Jiang, *Impulsive problems for fractional differential equations with boundary value conditions,* Computers and Mathematics with Applications, 64 (2012), 3281-3291.

[52] J.J. Loiseau, H. Mounier, *Stabilisation de l'équation de la chaleur commandée en flux*, ESAIM : Proc., pages 131-144, 1998.

[53] L. Mahto, S. Abbas, A. Favini, *Analysis of Caputo impulsive fractional order differential equations,* International Journal of Differential Equations Vol. 2013, Article ID 704547, 11 pages, 2013. doi :10.1155/2013/704547.

[54] M. Matar, *Existence and uniqueness of solutions to fractional semilinear mixed Volterra-Fredholm integrodifferential equations with nonlocal conditions*, EJDE, Vol. 2009(2009), No. 155, 1–7.

[55] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, Ch. Ceyral, *Fractional differentiation for edge detection,* Signal Processing, 83 :2421-2432, 2003.

[56] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,* John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.

[57] G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, *Existence of mild solution for some fractional differential equations with a nonlocal condition*, Semigroup Forum, 79 (2009), 315-322.

[58] B. Nagy, F. Riesz, *Functional analysis*, Blackie & Son Limited, London, 1956.

[59] G. M. N'Guérékata, *A Cauchy problem for some fractional abstract differential equation with nonlocal condition*, Nonlinear Analysis. 70 (2009), 1873–1876.

[60] P. G. Nutting, *A new general law of deformation,* J. Franklin Inst, 191, 679-685 (1921).

[61] P. G. Nutting, *A general stress-strain-time formula,* J. Franklin Inst, 235, 513-524 (1943).

[62] N. Nyamoradi, *Existence of solutions for multi point boundary value problems for fractional differential equations,* Arab J. Math. Sci. 18 (2012) 165-175.

[63] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculs,* Acadimic Press, New York, 1974.

[64] A. Oustaloup, *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Masson. Paris, 1983.

[65] J. C. Panetta, *A mathematical model of periodically pulsed chemotherapy : tumor recurrence and metastasis in a competition environment,* Bulletin of Mathematical Biology, Vol.58, n 3 (1996) 425-447.

[66] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[67] I. Podlubny, *Fractional order systems and* $pi^{\lambda}d^{\mu}$ *controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control, 44(1) :208-214, 1999.

[68] E Kruger-Thiemer, *Formal theory of drug dosage regiments,* International Journal of Theoretical Biology, 13, 1966.

[69] M. U. Rehman. R. A. Khan, *Existence and uniqueness of solutions for multi-point boundary value problems for fractional differential equations,* Appl. Math. Lett. 23 (2010), 1038-1044.

[70] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Longhorne, PA, 1993.

[71] A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.

[72] W. Sudsutad, J. Tariboon, *Existence results of fractional integrodifferential equations with $m-$point multi-term fractional order integral boundary conditions,* Bound. Value Probl. 2012. 94(2012).

[73] H. Sun, B. Onaral, *A unified approach to represent metal electrode interface*. IEEE Trans. Biomed. Eng., 31 :399-406, July 1984.

[74] V. E. Tarasov, *Fractional dynamics : application of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, HEP : Springer, 2011.

[75] Y. Tian, Y. Zhou, *Positive solutions for multi-point boundary value problem of fractional differential equations,* J. Appl. Math. Comput. 38 (2012), 417-427.

[76] G. Wang, B. Ahmad. *Impulsive anti-periodic boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order,* Nonlin. Anal. 74 (2011), 792–804.

[77] G. Wang, W. Liu, C. Ren, *Existence of solutions for multi-point nonlinear differential equations of fractional orders with integral boundary conditions,* EJDE, Vol. 2012(2012), No. 54, 1–10.

[78] J. Wang, Y. Zhou, M. Fečkan, *Nonlinear impulsive problems for fractional differential equations and Ulam stability,* Computers and Mathematics with Applications, 64 (2012), 3389-3405.

[79] W. Wei, X. Xiang, Y. Peng, *Nonlinear impulsive integrodifferential equation of mixed type and optimal controls*, Optimization, 55 (2006), 141-156.

[80] C. Yu, G. Gao, *Existence of fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl.. 30 (2005), 26–29.

[81] A. Van Der Ziel, *On the noise spectra of semiconductor noise and of flicker effects.* Physica, 16 :359-372, 1950.