

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY
Faculté des sciences
Département de mathématiques



جامعة باجي مختار – عنابة

Polycopié de cours

Pour l'usage des étudiants de (Master 1 et 2)

Systemes Dynamiques Discrets

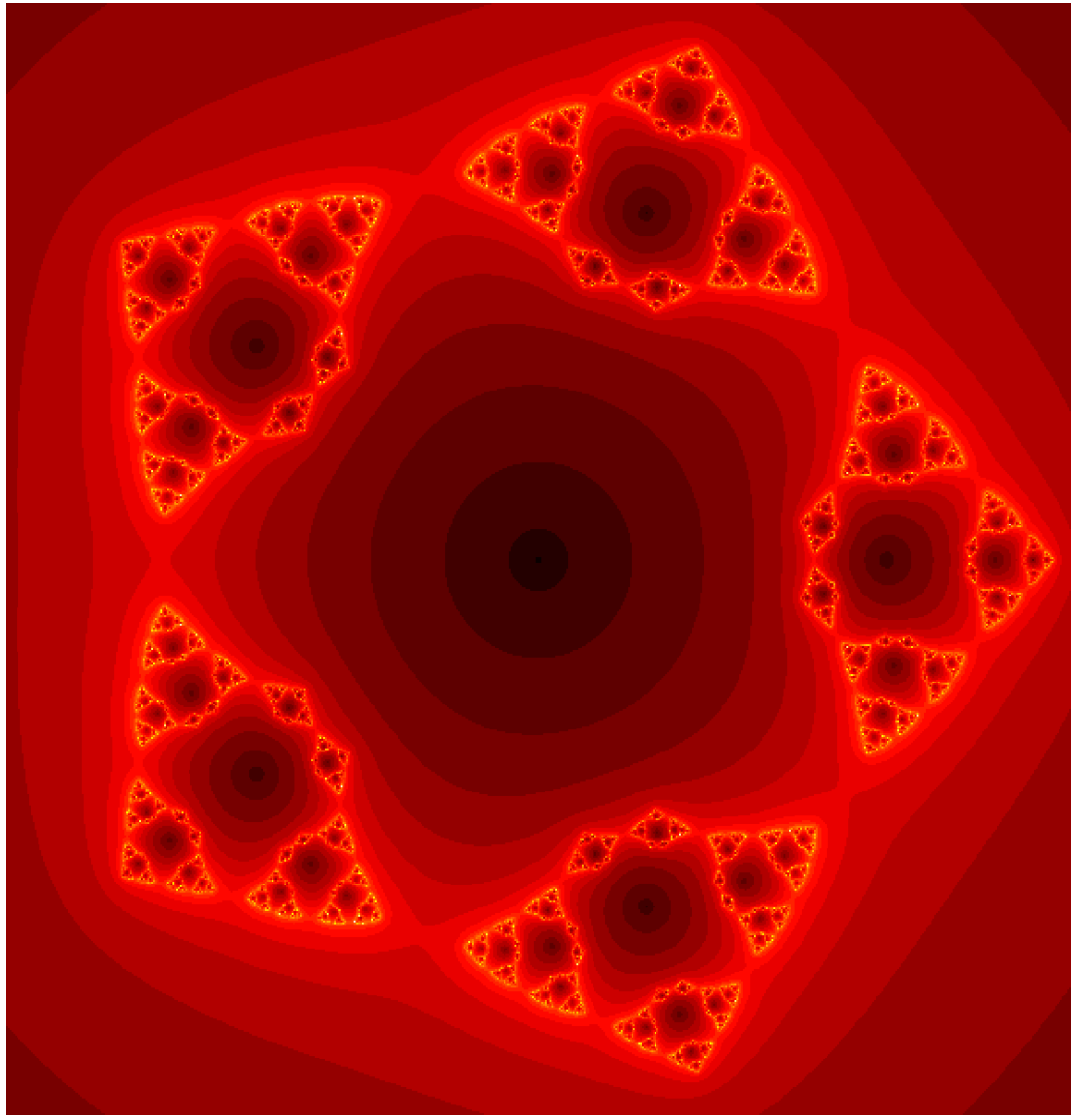
Théorie et aspects calculatoires

Auteur : Dr. Mohamed Lamine Sahari (Université Badji Mokhtar-Annaba)

Année Universitaire : 2025/2026

Systemes Dynamiques Discrets

Theorie et Aspects Calculatoires



Mohamed Lamine Sahari

Table des matières

Table des matières	2
Introduction	5
1 La Dynamique des Récurrences de Premier Ordre	7
1.1 Définitions	7
1.2 Équations aux Différences et Récurrences	8
1.3 Équations aux Différences Linéaires de Premier Ordre	9
1.4 Points Périodiques et Variétés Stables	11
1.5 Analyse Graphique	14
1.6 Quelques Notions de Stabilité	15
1.7 Familles de Fonctions Paramètres et Bifurcations	17
2 La Dynamique des Récurrences d'Ordre Supérieur à Un	27
2.1 Système Dynamique d'Ordre Supérieur à Un	27
2.2 Singularités	28
2.3 Solutions Générales (Cas des Systèmes Linéaires dans \mathbb{R}^p)	29
2.4 Stabilité des Singularités	33
2.5 Le Plan Paramétrique « trace-déterminant »	41
2.6 Bifurcations	57
3 Les Systèmes Chaotiques	77
3.1 La Différence Entre le Chaos et l'Aléatoire	78
3.2 Définition du Chaos	79
3.3 Exposants de Lyapunov	81
3.4 Routes Vers le Chaos (Cas d'une Récurrence d'Ordre Un)	89
3.5 Introduction à la Dynamique Symbolique	105
3.6 Automorphismes Hyperboliques du Tore (adapté depuis R. L. Devaney [13])	113

3.7	Exemples Classiques de Systèmes Chaotiques dans le Plan	118
4	Dynamique Holomorphe	137
4.1	Sphère de Riemann	137
4.2	Dynamique des Fonctions Holomorphes	138
4.3	La Dichotomie de Fatou et Julia	139
4.4	Exemples Importants	140
4.5	Quelques Propriétés	145
4.6	Conjugaison	147
4.7	Introduction à l'Ensemble de Mandelbrot	148
4.8	La Méthode de Newton Complexe	150
4.9	Problème de Cayley	153
4.10	La Dynamique de la Méthode de Newton	155
5	Exercices	165
	Rappels et compléments	207
5.1	Fonctions	207
5.2	Matrices	223
5.3	Forme de Jordan et Calcul de A^n	226
5.4	Topologie dans \mathbb{R}^n	230
5.5	Théorèmes Fondamentaux	231
5.6	Méthodes Numériques et Considérations	232
5.7	Dimension de Boîte	234
5.8	Variété Instable	238
5.9	Codes	241
	Bibliographie	243

Préface

Ce document, intitulé *Systèmes Dynamiques Discrets – Théorie et Aspects Calculatoires*, a été initialement conçu comme un support de cours destiné aux étudiants de Master en mathématiques appliquées et calcul scientifique, au sein du Département de Mathématiques de l'Université Badji Mokhtar-Annaba. Le texte a progressivement évolué pour devenir un manuel proposant une introduction aux concepts fondamentaux des systèmes dynamiques.

L'essentiel de l'ouvrage est consacré à l'étude des systèmes discrets. Une attention particulière est portée à l'analyse de la stabilité locale, à l'étude des bassins d'attraction, ainsi qu'aux phénomènes de bifurcation et à l'émergence du comportement chaotique. L'organisation de l'ouvrage suit une progression articulée autour de quatre volets principaux :

- Les bases fondamentales : Les deux premiers chapitres introduisent les équations aux différences, l'étude de la stabilité des points fixes et des cycles, ainsi que les bifurcations classiques.
- La dynamique chaotique : Le troisième chapitre explore la complexité à travers les exposants de Lyapunov, les routes vers le chaos et l'analyse d'exemples emblématiques.
- La dynamique holomorphe : Le quatrième chapitre est dédié à la rigueur et à la richesse de la dynamique complexe, mettant en lumière les propriétés remarquables des ensembles de Julia et de Mandelbrot.

Une place centrale est accordée aux aspects calculatoires et à la simulation numérique, mis en œuvre à l'aide du langage PYTHON. Convaincus que la pratique numérique est indissociable de la compréhension théorique en systèmes dynamiques, nous avons intégré de nombreux exemples, figures et diagrammes permettant de visualiser concrètement des concepts parfois abstraits.

Afin d'accompagner le lecteur dans son apprentissage, un chapitre final regroupe des

exercices variés, allant de la démonstration théorique à l'implémentation algorithmique complète. Enfin, une annexe détaille les prérequis nécessaires afin de rendre l'ensemble accessible en toute autonomie.

Ce manuel s'adresse aux étudiants de Licence, de Master ainsi qu'aux doctorants souhaitant acquérir une base pour aborder la recherche en systèmes dynamiques. Nous espérons que cet ouvrage aidera le lecteur à explorer ce domaine passionnant où des règles déterministes simples engendrent une diversité de comportements, de la stabilité la plus régulière à la complexité chaotique.

Annaba, le 22 avril 2026

Moahemed Lamine Sahari

I

La Dynamique des Récurrences de Premier Ordre

1.1

Définitions

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- causale, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- déterministe, c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- Une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire. C'est a priori la plus naturelle physiquement, puisque le paramètre temps nous semble continu.
- Une évolution discontinue dans le temps. Ce second cas est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler a priori moins réaliste physiquement. Cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

Définition 1.1 (Espace d'état dynamique).

Les variables d'état sont toutes les grandeurs physiques qui déterminent l'état instantané du système et qui ne sont pas constantes a priori. On les appelle aussi les variables

dynamiques. L'état dynamique d'un système est un état instantané, mais c'est un état de mouvement. Il est déterminé par les valeurs de toutes les variables d'état à cet instant.

Définition 1.2 (Espace des phases). L'espace des phases est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, une variété différentielle ou un fibré vectoriel, un espace mesurable... Pour un système possédant n variables d'état, par exemple, l'espace des phases du système possède n dimensions, de telle sorte que l'état complet du système à l'instant t est en général un vecteur à n composantes.

Définition 1.3 (Dynamique discrète). Un système dynamique discret est généralement défini par une application ϕ de l'espace des phases Γ sur lui-même. Elle opère de la façon suivante :

étant donnée une condition initiale $x_0 \in \Gamma$ de l'état du système, le premier état suivant est :

$$x_1 = \phi(x_0) \in \Gamma.$$

Le second état, qui suit immédiatement le premier, est :

$$x_2 = \phi(x_1) = \phi(\phi(x_0)) = (\phi \circ \phi)(x_0) = \phi^2(x_0) \in \Gamma$$

et ainsi de suite, de telle sorte que le n -ième état est donné par

$$x_n = \phi(x_{n-1}) = \dots = \phi^n(x_0) \in \Gamma.$$

Pour remonter dans le passé, il suffit d'inverser la fonction, ce qui est toujours possible pour une bijection.

1.2

Équations aux Différences et Récurrences

En général les équations aux différences décrivent l'évolution de certains phénomènes au cours du temps. Par exemple, si une certaine population admet une génération discrète, la taille de la génération x_{n+1} est une fonction de la n -ième génération x_n . Cette relation s'exprime par l'équation aux différences

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f : I \longrightarrow I \subset \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Nous pouvons regarder ce problème d'un autre point de vue. À partir d'un point x_0 , on peut générer la séquence

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots$$

$f(x_0)$ est appelé la première itération de x_0 par f ; $f^2(x_0)$ est appelée la seconde itération de x_0 par f ; plus généralement, $f^n(x_0)$ est la n -ième itération de x_0 par f . L'ensemble de tous les itérés positifs $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ où $f^0(x_0) = x_0$, par définition, est appelée l'orbite positive de x_0 et sera noté par $O(x_0)$. Ce processus itératif est un exemple d'un système dynamique discret. Soit $x_n = f^n(x_0)$, on a

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f[f^n(x_0)] = f(x_n),$$

on retrouve donc l'équation (1.1). On note que $x_0 = f^0(x_0) = x_0$.

Exercice 1.1. Soit $f(x) = x^2$ et $x_0 = 0,6$. Trouver la séquence d'itérations $f^n(x_0)$. Montrer que $f^n(x_0)$ tend vers 0 si $x_0 \in]-1, 1[$.

1.3

Équations aux Différences Linéaires de Premier Ordre

Une équation aux différences linéaire du premier ordre homogène est donnée

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (1.2)$$

l'équation non homogène est donnée par

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (1.3)$$

où dans les deux équations, on suppose que $a(n) \neq 0$ et $a(n)$ et $g(n)$ sont deux fonctions réelles définies pour $n \geq n_0 \geq 0$.

On peut obtenir la solution de (1.2) par une simple itération

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} &= a(n_0)x_{n_0} = a(n_0)x_0, \\ x_{n_0+2} &= a(n_0+1)x_{n_0+1} = a(n_0+1)a(n_0)x_0, \\ x_{n_0+3} &= a(n_0+2)x_{n_0+2} = a(n_0+2)a(n_0+1)x_0. \end{aligned}$$

Et, par induction, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n_0+n-n_0} \\ &= a(n-1)a(n-2)\dots a(n_0)x_0. \end{aligned}$$

donc

$$x_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0.$$

L'unique solution l'équation non-homogène (1.3) peut être trouvée comme suit

$$\begin{aligned} y_{n_0+1} &= a(n_0)y_{n_0} + g(n_0), \\ y_{n_0+2} &= a(n_0+1)y_{n_0+1} + g(n_0+1), \\ &= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

Et nous induisons que

$$y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r). \quad (1.4)$$

Pour établir ce fait, supposer que la formule (1.4) est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Puis, à partir de (1.3), $y_{n+1} = a(n)y_n + g(n)$ et la formule (1.4), on obtient

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= a(n) \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[a(n) \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) + g(n), \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^n a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^n a(i) \right] g(r) + \left[\prod_{i=n+1}^n a(i) \right] g(n), \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^n a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^n \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r). \end{aligned}$$

avec $\prod_{i=n+1}^n a(i) = 1$ et $\sum_{i=n+1}^n a(i) = 0$. La formule (1.4) est correcte.

1.3.1 Cas particuliers (équation autonome)

On distingue deux cas particuliers le premier est

$$y_{n+1} = ay_n + g(n).$$

En utilisant la formule (1.4), on trouve

$$y_n = a^n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1} g(r). \quad (1.5)$$

La seconde équation est donnée par

$$y_{n+1} = ay_n + b,$$

la solution est donnée aussi par l'équation (1.4)

$$y_n = \begin{cases} a^n y_0 b \left[\frac{a^n - 1}{a - 1} \right] & \text{si } a \neq 1, \\ y_0 + bn & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

1.4

Points Périodiques et Variétés Stables

Définition 1.4. Si f est une fonction et

$$f(c) = c,$$

alors c est un point fixe de f .

Une fonction réelle admet un point fixe en c si et seulement si le point (c, c) appartient au graphe de f . Ainsi, une fonction possède un point fixe en c si et seulement si son graphe coupe la ligne d'équation $y = x$ au point (c, c) . Le théorème suivant va nous aider à localiser les points fixes.

Théorème 1.1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Alors f possède un point fixe dans I .

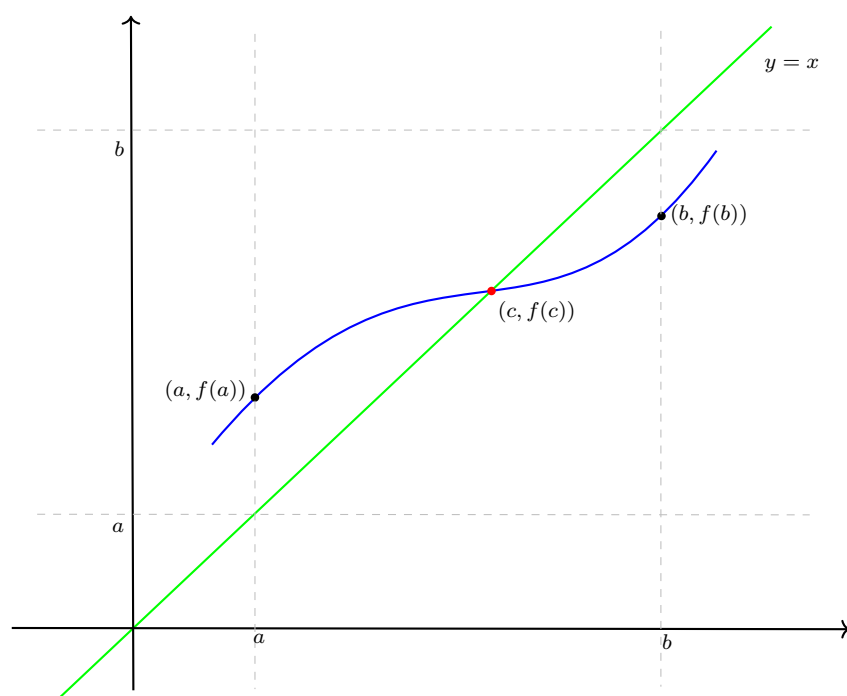
Démonstration. Si $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, alors a ou b est fixé. Supposons que $f(a) \neq a$ et $f(b) \neq b$. Soit $g(x) = f(x) - x$. Puisque $g(x)$ est la différence de deux fonctions continues, elle est donc une fonction continue. Comme $f(a) \neq a$ et $f(a)$ est dans $[a, b]$, $f(a) > a$. De même, $f(b) < b$. Ainsi, $g(a) = f(a) - a > 0$ et $g(b) = f(b) - b < 0$. Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$. Mais $g(c) = f(c) - c = 0$ donc $f(c) = c$. La Figure 1.1 illustre cette démonstration. \square

Exemple 1.1. La fonction $f(x) = 1 - x^2$ admet un point fixe dans l'intervalle $[0, 1]$. Il faut noter que f est une fonction continue et le rang de f est inclus dans $[0, 1]$ (voir Définition 5.1 dans l'Annexe 5). Ainsi, par application du Théorème 1.1, f a un point fixe dans $[0, 1]$. Enfin, nous pouvons trouver le point fixe algébriquement en résolvant l'équation $f(x) = x$, et on trouve

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Théorème 1.2. Soit I un intervalle fermé et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $I \subset f(I)$, alors f admet un point fixe dans I .

Démonstration. Soit $I = [a, b]$. Puisque $I \subset f(I)$, il existe $c, d \in I$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. Si $c = a$ ou $d = b$ on conclut. Sinon, alors $a < c < b$ et $a < d < b$. Si nous définissons $g(x) = f(x) - x$, alors $g(c) = f(c) - c = a - c < 0$ et $g(d) = f(d) - d = b - d > 0$. Comme $g(c) < 0$ et $g(d) > 0$, et g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe e entre c et d (et donc dans I) satisfaisant $g(e) = 0$ et $f(e) = e$. \square

FIGURE 1.1 – Point fixe de la fonction f .

La fonction $f(x) = -x^3$ a un point fixe en 0 de plus $f(1) = -1$ et $f(-1) = 1$. Nous appelons 1 et -1 points périodiques et l'ensemble $\{-1, 1\}$ est une orbite périodique.

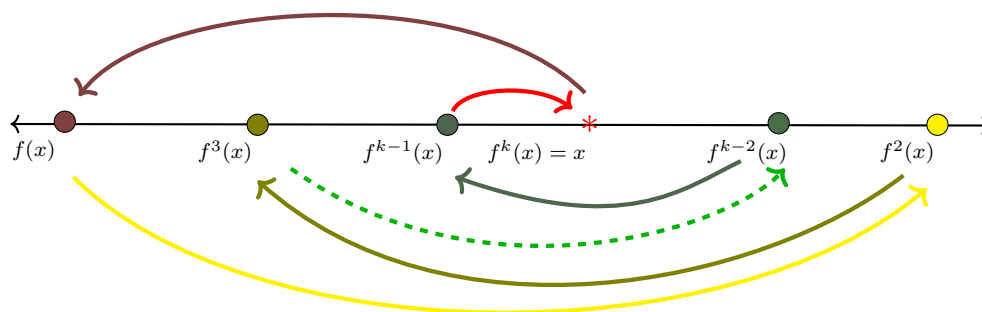
Définition 1.5. Le point x est un point périodique de période $k > 1$ pour f (ou k -périodique) s'il vérifie les deux relations

1. $f^k(x) = x$,
2. $f^i(x) \neq x$, $1 < i < k$.

En d'autres termes, x est un point périodique pour f de période k si x est un point fixe de f^k mais pas de f^i lorsque $1 < i < k$ (voir Figures 1.2).

L'ensemble de toutes les itérations du point x s'appelle l'orbite de x et si x est un point périodique, alors elle et ses itérées sont appelées une orbite périodique ou un cycle périodique. Pour illustrer la Définition 1.5 on considère $f(x) = -x^3$. Les points 1 et -1 forment une orbite périodique de période 2.

Définition 1.6. Soit f une fonction et p un point périodique de période k pour f . Le point x tend asymptotiquement vers p si la suite $x, f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x), \dots$ converge vers p . En d'autres termes, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk} = p$. La variété stable de p , notée par $W^S(p)$, se compose de tous les points qui tendent asymptotiquement vers p .

FIGURE 1.2 – Point k -périodique pour la fonction f .

Si la suite $|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, |f^3(x)|, \dots$ n'est pas bornée, alors x tend asymptotiquement vers ∞ . La variété stable de ∞ notée par $W^s(\infty)$, se compose de tous les points qui tendent asymptotiquement vers ∞ .

Exemple 1.2. Soit $f(x) = -x^3$. Alors $W^s(0) =]-1, 1[$ et $W^s(\infty) =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$, $W^s(-1) = \{-1\}$, $W^s(1) = \{1\}$.

Exemple 1.3. Pour la fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ tel que $f(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$, on a $W^s(0) = \{i \in \mathbb{Z} : i \text{ est paire}\}$ et $W^s(1) = \{i \in \mathbb{Z} : i \text{ est impair}\}$.

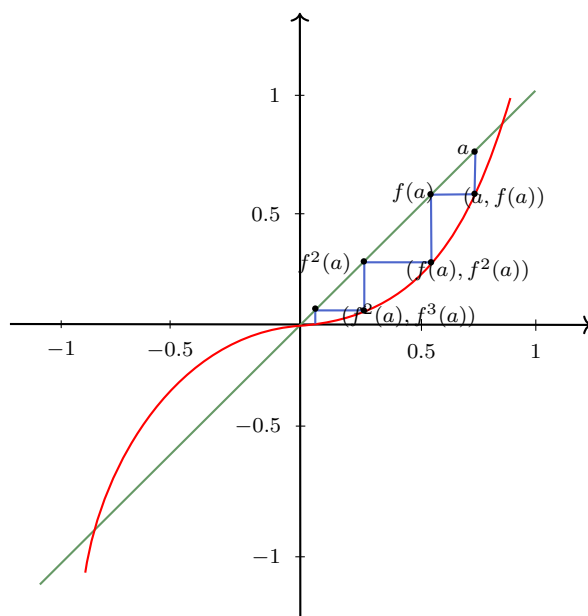
Théorème 1.3. Les variétés stables de deux points périodiques distincts sont disjointes

Démonstration. Soit P_1 et P_2 deux points périodiques distincts de période k_1 et k_2 , respectivement. Nous allons montrer que si $W^s(P_1) \cap W^s(P_2) \neq \emptyset$, alors $P_1 = P_2$.

Soit x dans $W^s(P_1) \cap W^s(P_2)$. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe N_1 et N_2 tel que $n > N_1$ implique $|p_1 - f^{nk_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $n > N_2$ implique $|p_2 - f^{nk_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $n > N_2$. Si M est le plus grand des N_1 et N_2 , alors $n > M$ implique $|p_1 - f^{nk_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|p_2 - f^{nk_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par l'inégalité triangulaire nous avons

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &< |p_1 - f^{nk_1 k_2}(x) + f^{nk_1 k_2}(x) - p_2| \\ &\leq |p_1 - f^{nk_1 k_2}(x)| + |f^{nk_1 k_2}(x) - p_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, alors $p_1 = p_2$. □

FIGURE 1.3 – Point fixe de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

1.5

Analyse Graphique

Comme son nom l'indique, l'analyse graphique utilise le graphe d'une fonction pour analyser une dynamique.

Exemple 1.4. Nous commençons par l'examen de la dynamique de la fonction $f(x) = x^3$. Le graphe de f et la ligne $y = x$ sont représentés sur le même ensemble d'axes de coordonnées, comme dans la Figure 1.3. On essaie de déterminer l'itinéraire (l'orbite) du point a qui se trouve dans l'intervalle $]0, 1[$. Plutôt que de suivre le mouvement du point sur l'axe des x nous regardons la trace de ses allées et venues sur la ligne $y = x$. Il commence au point $(a, 0)$. De ce point nous nous déplaçons à la verticale, jusqu'au graphe de f ... Nous voyons que $f^n(a)$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ . Après avoir essayé plus de points dans l'intervalle $]0, 1[$, nous concluons que chaque point de $]0, 1[$ approchera 0 sous l'itération de f . Un examen plus approfondi suggère que $W^S(0) =]-1, 1[$ et $W^S(\infty) =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$. Les points $-1, 0$ et 1 sont des points fixes de f (voir Figure 1.3).

Exemple 1.5. L'exemple suivant concerne la fonction donnée par $f(x) = -x^{\frac{1}{5}}$. Nous commençons par un point qui est proche de 0 dans l'intervalle $]0, 1[$. Notez que lorsque

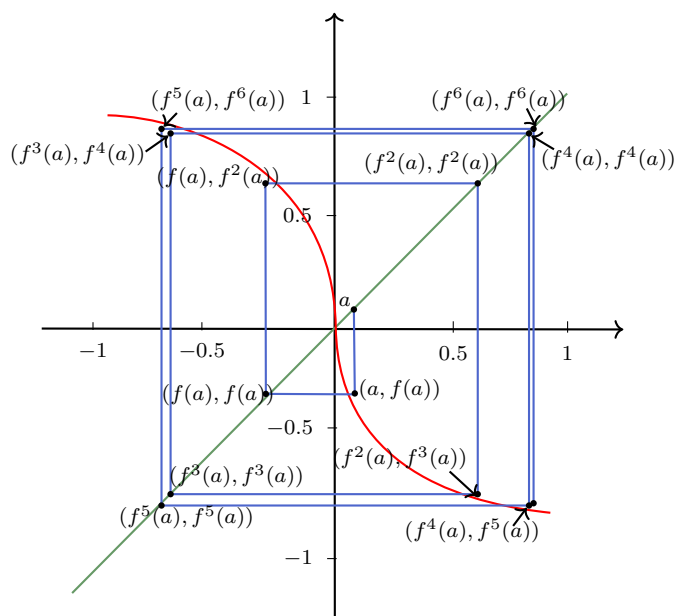


FIGURE 1.4 – L’analyse graphique de l’orbite du point a par $f(x) = -x^{\frac{1}{5}}$.

n augmente la valeur de $f^n(a)$ est proche de 1 en valeur absolue et oscille d’un côté de 0 à l’autre. Notez également que -1 et 1 forment un cycle périodique de période 2. En outre, $f^n(a)$ est toujours positive quand n est pair. Ainsi, nous concluons que $a \in W^S(1)$. Une analyse plus poussée suggère que $W^S(1) =]0, \infty[$, $W^S(-1) =]-\infty, 0[$, 0 est fixe, et $W^S(\infty) = \emptyset$ (voir Figure 1.4).

1.6

Quelques Notions de Stabilité

L’étude de la stabilité d’un point fixe consiste à analyser la sensibilité de l’orbite d’un point face à de petites perturbations initiales. Dans un système discret défini par une application, un point fixe est dit stable si toute suite d’itérés partant suffisamment proche de lui demeure confinée dans un voisinage arbitrairement petit de ce point. Cette analyse se complète par la notion d’attractivité, qui caractérise la capacité du point fixe à attirer les trajectoires voisines sur le long terme. Cette distinction fondamentale entre stabilité locale et convergence, ainsi que les critères algébriques permettant de les caractériser, seront étudiés plus profondément dans le chapitre suivant.

Théorème 1.4. *Soit f une fonction dérivable, soit p un point fixe de f , et supposons que f' est continue. Si $|f'(p)| < 1$, alors il existe un intervalle ouvert U contenant p tel que*

chaque fois que x est dans U , alors $f^n(x)$ converge vers p . Il s'ensuit donc que $U \subset W^S(p)$. Si $|f'(p)| > 1$, alors il existe un intervalle ouvert contenant p tel que tous les points dans l'intervalle qui ne sont pas égal à p quittent cet intervalle sous l'itération de f .

Démonstration. Soit f une fonction continument dérivable, supposons que p est un point fixe de f , et supposons que $|f'(p)| < 1$. Nous souhaitons trouver un voisinage p qui est contenu dans $W^S(p)$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)$. Puisque $|f'(p)| < 1$ alors $\varepsilon > 0$. Du fait que f' est continue, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x) - f'(p)| < \varepsilon$ chaque fois que $|x - p| < \delta$. Si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(x) - f'(p) + f'(p)|, \\ &\leq |f'(x) - f'(p)| + |f'(p)|, \\ &< \varepsilon + |f'(p)|, \\ &= \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)|, \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|f'(p)|, \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)\right), \\ &= 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors $|f'(p)| < 1 - \varepsilon$. Il reste à montrer que $f^n(x)$ converge vers p lorsque $x \in]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in]p - \delta, p + \delta[$ et $x \neq p$. D'après le théorème de la valeur moyenne il existe $c \in]x, p[$ tel que

$$\begin{aligned} |f(x) - p| &= |f(x) - f(p)| = f'(c) |x - p|, \\ &< (1 - \varepsilon) |x - p|. \end{aligned}$$

En itérant le processus, nous constatons que

$$|f^n(x) - p| = (1 - \varepsilon)^n |x - p|.$$

Puisque $0 < 1 - \varepsilon < 1$ alors

$$|f^n(x) - p| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

La preuve pour $|f'(x)| > 1$ est similaire. □

Théorème 1.5. Soit f une fonction de classe C^1 et p un point fixe de f . Si $|f'(p)| < 1$, alors il existe un voisinage de p , contenu dans $W^S(p)$. Si $|f'(p)| > 1$, alors il existe un voisinage de p dont tous les points doivent le quitter sous l'itération de f .

Démonstration. En effet, puisque $|f'(p)| > 1$, alors il existe un nombre $\lambda > 1$ tel que $|f'(p)| > \lambda > 1$. Par continuité de f' il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| > 1$ pour tout $x \in I =]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in I$, on a

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} > \lambda \implies |f(x) - f(p)| = |f(x) - p| > \lambda |x - p|.$$

En appliquant les mêmes arguments pour $f(x)$ et $f(p)$, nous trouvons

$$|f^2(x) - p| > \lambda^2 |x - p|,$$

du fait que $\lambda > 1$, on obtient

$$|f^n(x) - f(p)| > \lambda^n |x - p|.$$

Maintenant, on fait tendre n vers l'infini pour conclure. □

Définition 1.7. Soit p un point k -périodique de la fonction différentiable f . Alors p est un point périodique hyperbolique si $|(f^k)'(p)| \neq 1$. Si $|(f^k)'(p)| = 1$, alors p est un point non-hyperbolique.

Théorème 1.6. Soit f une fonction de classe C^1 et p un point k -périodique pour f . Si $|(f^k)'(p)| < 1$, alors il existe un intervalle ouvert U contenant p tel que $U \subset W^S(p)$. Si $|(f^k)'(p)| > 1$, alors il existe un intervalle ouvert V contenant p tel que tous les points de $V - \{p\}$ doivent quitter l'intervalle V sous l'itération de f^k .

Définition 1.8. Soit p un point k -périodique pour f . Si $|(f^k)'(p)| < 1$, alors p est un point périodique attractif de f . Si $|(f^k)'(p)| > 1$, alors p est un point périodique répulsif pour f .

1.7

Familles de Fonctions Paramètres et Bifurcations

Par une famille de fonctions, nous entendons un ensemble de fonctions de même type. Par exemple nous pourrions considérer la famille des fonctions linéaires de la forme $f_m(x) = mx$ où m est un réel. La variable m est appelé un paramètre et la famille représentée par $f_m(x) = mx$ est appelée une famille paramétrée.

Exemple 1.6. Considérons la famille paramétrée $f_m(x) = mx$. Pour toutes les valeurs de $m \neq 1$, il est clair que 0 est le seul point fixe de f_m .

- Si $m < -1$, alors 0 est un point fixe hyperbolique répulsif et $W^S(\infty) = \mathbb{R}^*$.
- Si $m = -1$, alors tous les points sauf 0 sont des points 2-périodiques.
- Si $-1 < m < 1$, 0 est un point fixe et attractif et $W^S(0) = \mathbb{R}$.
- Si $m = 1$, alors tous les points sont des points fixes.
- Si $m > 1$, 0 est un point fixe répulsif $W^S(\infty) = \mathbb{R}^*$.

Définition 1.9. Soit $f_c(x)$ une famille de fonctions paramétrée. Alors, il y a une bifurcation en c_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si a et b satisfont $c_0 - \varepsilon < a < c_0$ et $c_0 < b < c_0 + \varepsilon$, alors la dynamique de f_a est différente de la dynamique de f_b . En d'autres termes, la dynamique de la fonction f_c change lorsque la valeur du paramètre c passe à travers le point c_0 .

Définition 1.10. Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} , et soient deux applications $f : I \rightarrow I$ et $g : J \rightarrow J$. On dit que f et g sont topologiquement conjuguées s'il existe un homéomorphisme $h : J \rightarrow I$ tel que :

$$f \circ h = h \circ g$$

L'application h est appelée homéomorphisme de conjugaison.

Remarque 1.1. Cette relation implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^n = h \circ g^n \circ h^{-1}$. Ainsi, f et g possèdent la même dynamique : elles ont le même nombre de points fixes, et ces points fixes ont les mêmes propriétés de stabilité.

Exemple 1.7. Considérons la famille de fonctions $F(x) = e^{x+d}$. Nous examinons la dynamique de cette famille en utilisant l'analyse graphique. Il faut noter que si le paramètre augmente en valeur la forme de la courbe reste la même, mais il se déplace vers la gauche. Un examen attentif révèle que nous avons trois cas :

- 1) Les graphes de $F(x)$ et de $y = x$ se croisent dans exactement deux points (voir Figure 1.5a).
- 2) Les graphes de $F(x)$ et $y = x$ ont un seul point de tangence (voir Figure 1.5b).
- 3) Les graphes de $F(x)$ et $y = x$ ne se croisent pas (voir Figure 1.5c).

L'étude approfondie des bifurcations met en évidence le comportement illustré à la Figure 1.6a.

- Si $d < -1$, alors F admet deux points fixes a et b avec $a < b$. Notons que , $0 < F'(a) < 1$, et $F'(b) > 1$. Ainsi, a est un point fixe hyperbolique attractif alors

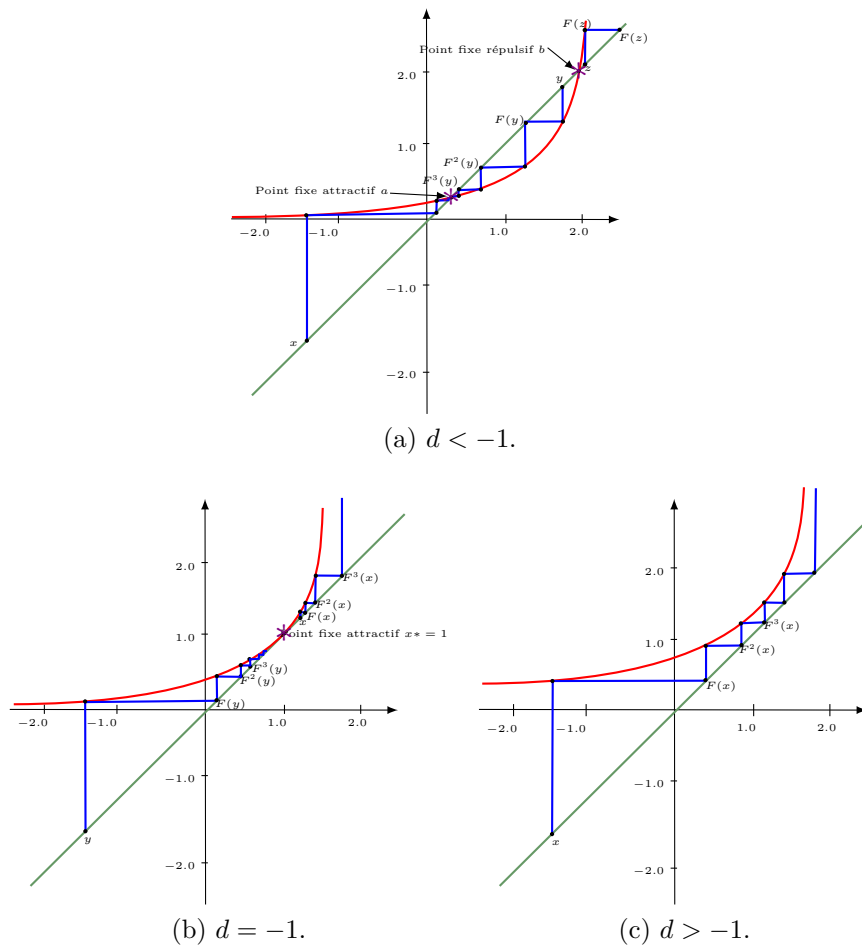


FIGURE 1.5 – L'analyse graphique de l'orbite du point a par $F(x) = e^{x+d}$.

que b est un point fixe hyperbolique répulsif. L'analyse graphique montre que : $W^S(a) =]-\infty, b[$ et $W^S(\infty) =]b, \infty[$.

- Lorsque $d = -1$, les deux points fixes fusionnent dans un seul point fixe en $x = 1$. Ce point fixe est non-hyperbolique puisque $F'_1(1) = 1$. L'analyse graphique montre que $W^S(1) =]-\infty, 1]$ et $W^S(\infty) =]1, \infty[$.
- Enfin, si $d > -1$, alors les graphes de $F(x)$ et $y = x$ ne se croisent pas et par conséquent, F n'a pas de point fixe. Comme F est continue, le théorème Sarkovskii implique que F ne peut pas avoir de points périodiques lorsque $d > -1$ (pourquoi?) de plus $W^S(\infty) = \mathbb{R}$ (voir Figure 1.6a).

Exemple 1.8. Considérons la famille de fonctions $g_k(x) = k \arctan(x)$ pour des valeurs du paramètre proche de 1 (voir Figure 1.6b).

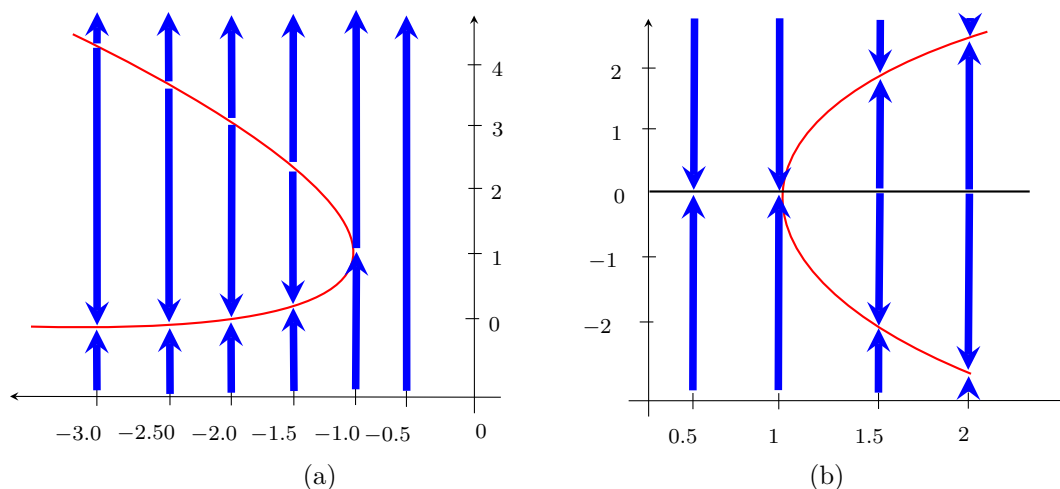


FIGURE 1.6 – Le diagramme de bifurcation de l'application $F(x) = e^{x+c}$ en (a) et de l'application $g_k(x) = k \arctan(x)$ en (b).

- Lorsque $0 < k < 1$, la fonction g_k a un point fixe attractif près de 0 et $W^S(0) = \mathbb{R}$.
- Si $k = 1$, alors 0 est toujours un point fixe, mais $g'_1(0) = 1$. L'analyse graphique montre que 0 est faiblement attractif et que $W^S(0) = \mathbb{R}$.
- Enfin, lorsque $k > 1$, nous trouvons un point fixe répulsif en 0 et ($g_k(0) = k > 1$) et deux autres points fixes ont été formés, qui sont tous les deux attractifs. Si on note ces deux points fixes par a et b avec $a < 0 < b$, alors nous voyons que $W^S(a) =]-\infty, 0[$ et $W^S(b) =]0, \infty[$.

Le type de bifurcation vue pour $g_k(x) = k \arctan(x)$ pour $k = 1$ est appelé une bifurcation fourche. En général, les bifurcations fourches se produisent soit lorsque un point périodique attractif se divise en un point répulsif et un point périodique de même période que le point d'origine de chaque côté, ou, alternativement, un point périodique répulsif se divise en un point périodique entouré par deux points périodiques répulsifs de même période. La justification du nom de cette bifurcation est dû au diagramme de bifurcation. Un diagramme de bifurcation est un graphique des points périodiques d'une fonction tracée en fonction du paramètre. Typiquement, les valeurs périodiques sont tracées sur l'axe vertical et les valeurs des paramètres sont tracées sur l'axe horizontal (voir Figure 1.7).

Exemple 1.9. La fonction $h_r(x) = rx(1-x)$ présente un troisième type de bifurcation :

- Lorsque $0 < r < 1$, h admet deux points fixes, dont l'un est inférieur à 0 et répulsif, et un autre en 0 est attractif.

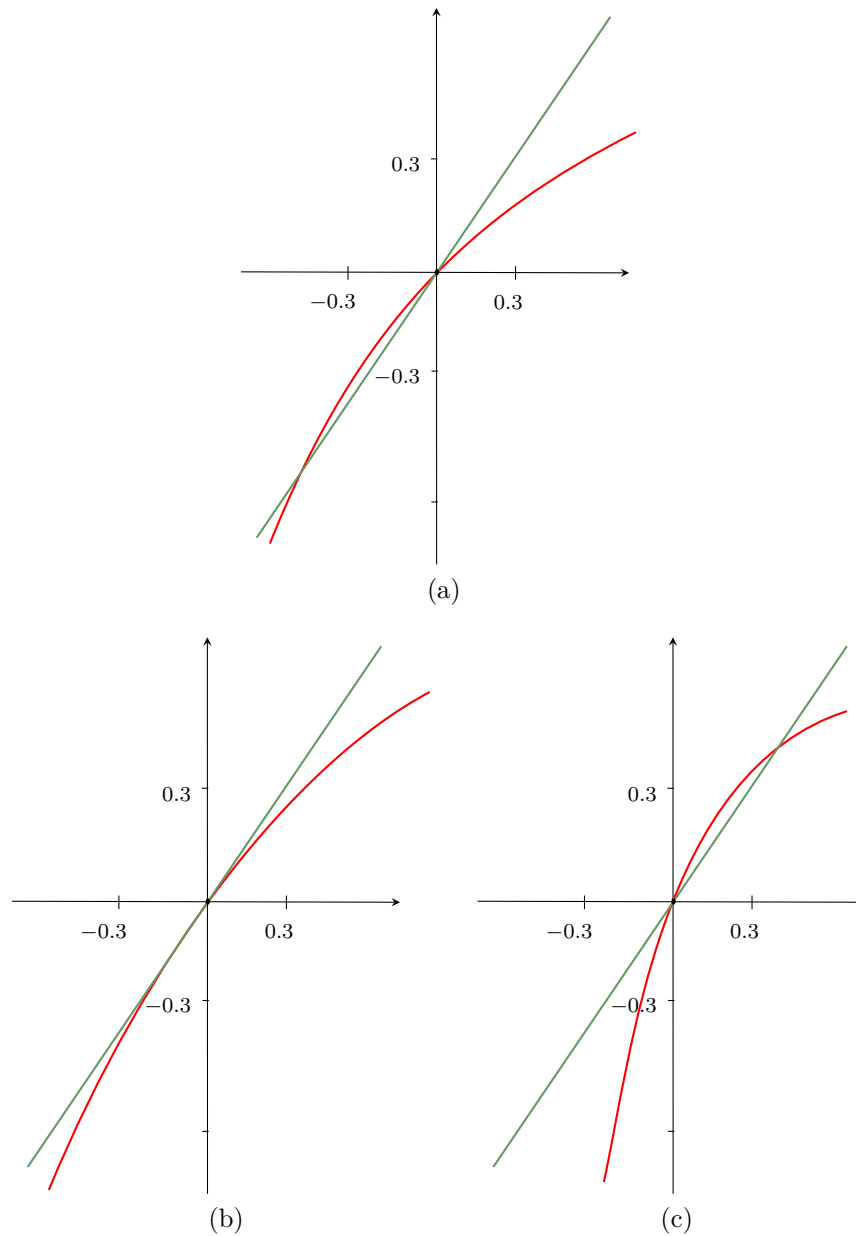


FIGURE 1.7 – Le graphe de $g_k(x) = k \arctan(x)$ avec la droite $y = x$ pour trois valeurs du paramètre proche de 1. En (a) $k = 0,8$, en (b) $k = 1$, et (c) $k = 1,2$. Notez que $g'_k(0) = k$, le point fixe est donc non-hyperbolique.

- Lorsque $r = 1$, les deux points précédents vont fusionner pour former un seul point fixe en 0 qui attire les points $x > 0$ et repousse les points $x < 0$ (une bifurcation transcritique).
- Si $1 < r < 3$, nous voyons que 0 devient un point fixe répulsif avec l'existence d'un autre point fixe attractif > 0 . Les trois dernières configurations sont illustrées dans la Figure 1.8.
- si $r = 3$, le plus grand des points fixes est 0.75 et est faiblement attractif du fait que $h'(0.75) = -1$.
- Lorsque $r > 3.0$, le point fixe est répulsif (La preuve de cela est laissée en exercice).
- Si $r = 3.1$, l'analyse graphique indique que la plupart des points sur $]0, 1[$ sont attirés par un point 2-périodique qui est légèrement plus grand que 3.
- Si la valeur du paramètre traverse 3, la valeur de $(h_r^2)'(p_r)$ passe par -1 ($p_r = \frac{r-1}{r}$). Ainsi, le point fixe change d'un point fixe attractif vers un point fixe répulsif, donnant naissance à un point 2-périodique attractif. Ce type de bifurcation est appelée bifurcation de dédoublement de périodes Figure 1.10-1.9.

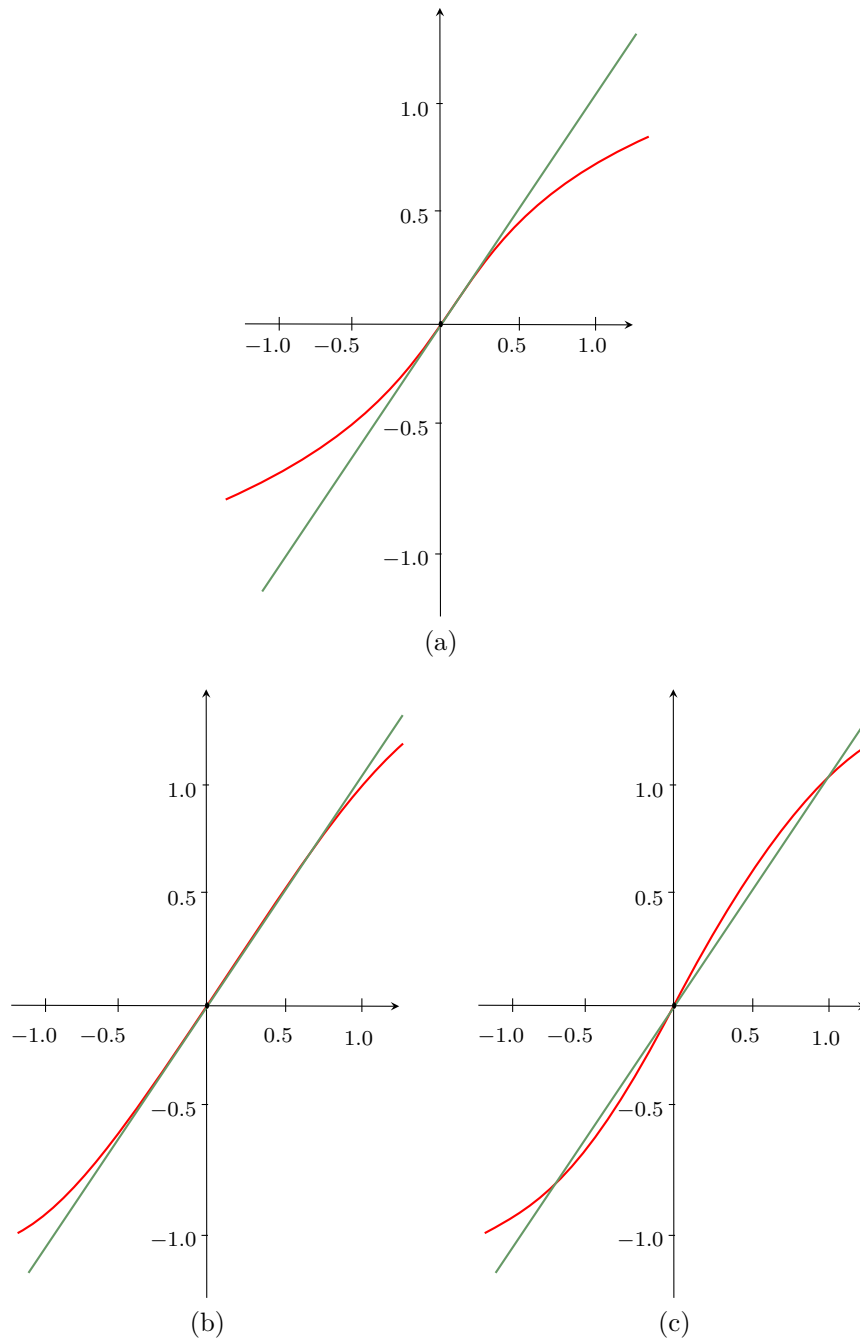


FIGURE 1.8 – Le graphe de la fonction $h_r(x) = rx(1 - x)$ et de $y = x$. En (a) $r = 0,78$, en (b) $r = 1$, et (c) $r = 1,3$. Notez que $h'_r(0) = 1$ lorsque $r = 1$, donc le point fixe n'est pas hyperbolique lorsque la bifurcation se produit.

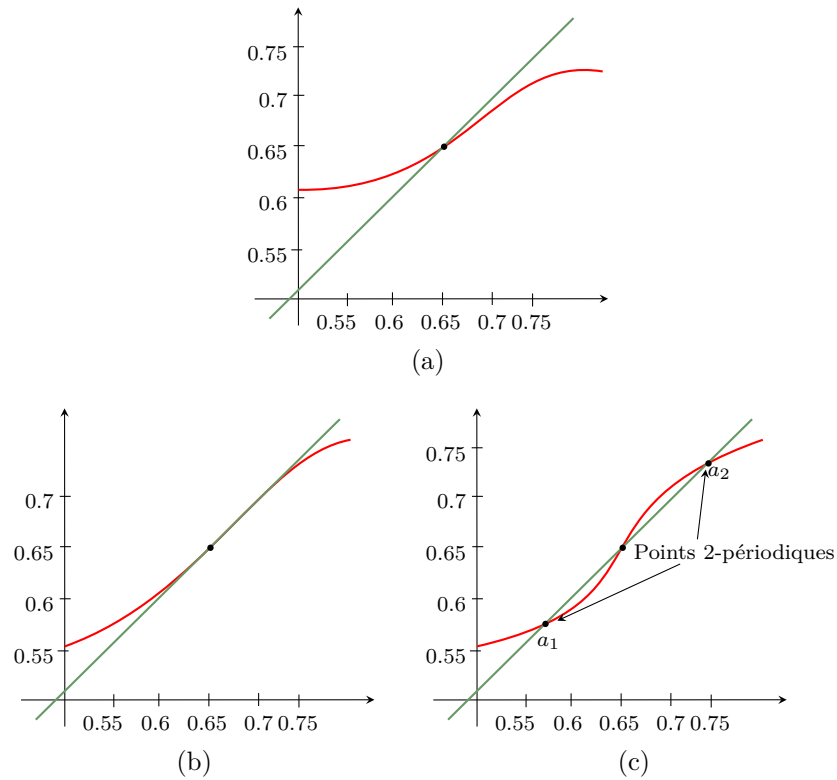


FIGURE 1.9 – Le graphe de $h_r(x) = rx(1-x)$ pour trois valeurs du paramètre. En (a) $r = 2,9$, en (b) $r = 3$, et (c) $r = 3,1$. Notez que le point fixe attractif se divise en un point 2-périodique attractif avec un point fixe répulsif entre les deux points de l'orbite l'orbite périodique.

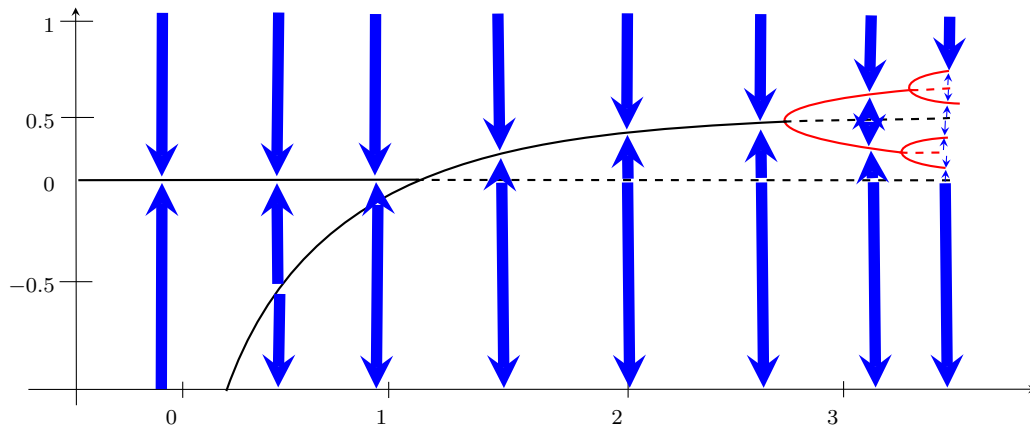


FIGURE 1.10 – Le diagramme de bifurcation de $h_r(x) = rx(1-x)$.



Robert McCredie May, baron May d'Oxford (1936-2020), était un scientifique australien et britannique de renommée mondiale, connu pour ses contributions révolutionnaires à l'écologie, à la théorie des systèmes dynamiques et à la gestion des épidémies. Né à Sydney, en Australie, il a obtenu un doctorat en physique théorique à l'Université de Sydney avant de se tourner vers l'écologie mathématique, où il a laissé une empreinte indélébile. May est surtout célèbre pour ses travaux sur la dynamique des populations et le chaos déterministe, ayant démontré comment

des systèmes simples, tels que les populations d'animaux, peuvent produire des comportements imprévisibles et chaotiques. Son livre "Stability and Complexity in Model Ecosystems" (1973) a redéfini la compréhension de la stabilité dans les écosystèmes complexes.

May a également eu une carrière exceptionnelle en tant que conseiller scientifique en chef du gouvernement britannique de 1995 à 2000, où il a plaidé pour une utilisation accrue des sciences dans la prise de décision politique, notamment sur les questions environnementales et sanitaires. Il a été président de la Royal Society de 2000 à 2005, jouant un rôle clé dans la promotion des sciences en tant que moteur du progrès sociétal. En reconnaissance de son immense contribution, il a été anobli en 2001, devenant baron May d'Oxford.

En plus de ses travaux académiques, Robert May a sensibilisé le public aux défis mondiaux, tels que la perte de biodiversité et la propagation des maladies infectieuses, mettant en avant la nécessité d'approches interdisciplinaires. Scientifique visionnaire, ses recherches continuent d'influencer des domaines variés, de l'écologie et l'épidémiologie à l'économie et la gestion des réseaux complexes.

II

La Dynamique des Récurrences d'Ordre Supérieur à Un

2.1

Système Dynamique d'Ordre Supérieur à Un

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions de base des systèmes dynamiques discrets d'ordre supérieur à un et nous donnons quelques propriétés fondamentales.

Définition 2.1. Un système dynamique discret autonome est défini par

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, \mu) \equiv F(x_n), \\ x_n \in \mathbb{R}^p, \mu \in \mathbb{R}^q, p, q \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (2.1)$$

où $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est au moins de classe C^1 par morceaux, par rapport à la variable x et aux paramètres μ , l'espace \mathbb{R}^p est appelé espace de phase et \mathbb{R}^q l'espace paramétrique.

Une solution de (2.1) est formée par une suite de points $\{x_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ où x_0 est appelée condition initiale, la suite de points $\{x_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ forment la trajectoire discrète de phase, suite itérés ou orbite. Le point x_{n+1} de la récurrence (2.1) est le point conséquent de rang un du point x_n , c'est-à-dire

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

le point x_n est l'antécédent de rang un de x_{n+1} , noté $x_n = F^{-1}(x_{n+1})$.

2.2

Singularités

On appelle singularités de dimension zéro les solutions isolées d'un système dynamique. Pour le système (2.1), on distingue deux types de singularités de dimension zéro : les points fixes et les cycles, également appelés orbites périodiques.

2.2.1 Points fixes

Un point fixe x^* est un point de l'espace des phases vérifiant

$$x^* = F(x^*). \quad (2.2)$$

2.2.1.1 Cycles d'ordre k

Définition 2.2. Un cycle d'ordre k (ou k -cycle) x^* est un point de l'espace des phases, qui vérifie :

1. $F^k(x^*) = x^*$,
2. $F^r(x^*) \neq x^*$ pour tout $0 < r < k$.

Remarque 2.1. Un k -cycle x^* est aussi un point fixe de F^k et l'ensemble $\mathcal{O}(x^*) := \{x^*, F(x^*), \dots, F^{k-1}(x^*)\}$ est appelé orbite du k -cycle x^* .

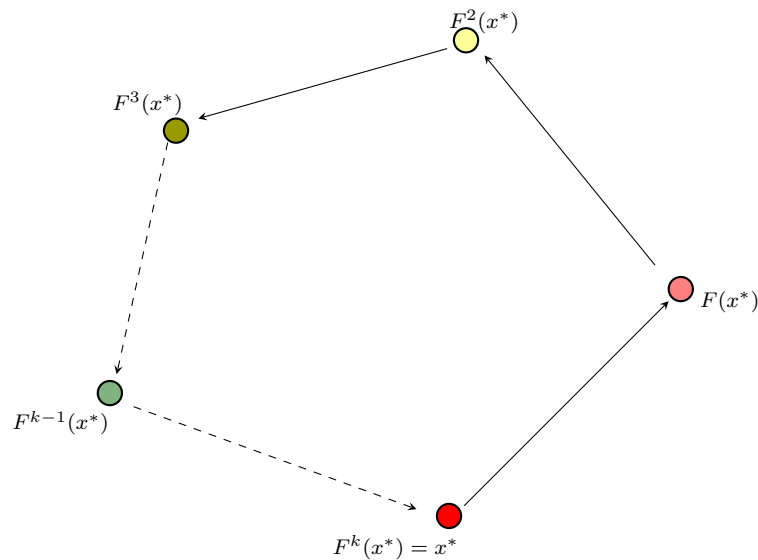
2.2.1.2 Courbes invariantes

Lorsque la dimension de l'espace des phases est supérieure à un ($p > 1$), il peut également apparaître des singularités dites de dimension $p - 1$, qui sont les courbes invariantes par l'application de la transformation F ou F^k . Ces courbes décrivent dans \mathbb{R}^p , une courbe définie par l'équation

$$G(x) = C, \quad C \text{ une constante} \quad (2.3)$$

et qui satisfait l'équation fonctionnelle suivante

$$F(G(x)) = G(x) \quad \text{ou} \quad F^k(G(x)) = G(x). \quad (2.4)$$

FIGURE 2.1 – Point k -périodique pour l'application F .

2.3

Solutions Générales (Cas des Systèmes Linéaires dans \mathbb{R}^p)

L'étude des systèmes discrets linéaires constitue une étape essentielle dans l'analyse des systèmes dynamiques. Considérons le système récurrent

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n \geq 0, \quad (2.5)$$

où $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ (ou éventuellement $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$) et $x_n \in \mathbb{R}^p$. La résolution de ce type de système repose sur la détermination de la puissance A^n appliquée à une condition initiale x_0 , ce qui conduit à la solution explicite

$$x_n = A^n x_0, \quad n \geq 0.$$

La difficulté principale réside donc dans le calcul de A^n . Pour y parvenir, il est nécessaire de comprendre la structure spectrale de la matrice A . En particulier, l'utilisation de la forme de Jordan permet d'obtenir une description précise du comportement asymptotique du système. On introduit alors la notion d'ensemble fondamental de solutions, c'est-à-dire un ensemble de p solutions linéairement indépendantes

$$\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p\} \subset \mathbb{R}^p,$$

permettant d'écrire la solution générale sous la forme

$$x_n = k_1 x_n^1 + k_2 x_n^2 + \dots + k_p x_n^p, \quad k_i \in \mathbb{R}.$$

Dans ce qui suit, nous présenterons la décomposition de Jordan, puis nous en déduirons une formule explicite pour A^n , et donc pour la solution générale de la récurrence. Cette approche fournit non seulement une méthode de calcul efficace, mais aussi une interprétation qualitative en termes de stabilité et de dynamique des solutions.

Théorème 2.1. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$, il existe une matrice inversible P et une matrice de Jordan J telles que*

$$A = PJP^{-1},$$

avec J sous forme de blocs de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

où chaque bloc $J_m(\lambda)$ est de la forme

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

2.3.1 Puissance d'un bloc de Jordan

Il est bien connu (voir Annexe (5), Section (5.3)) que

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + N_m,$$

où N est la matrice nilpotente stricte supérieure avec des 1 sur la sur-diagonale et $N_m^m = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$,

$$J_m(\lambda)^n = (\lambda I_m + N_m)^n = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Démonstration. La formule s'obtient directement par le binôme de Newton généralisé en remarquant que $N_m^m = 0$. □

Ainsi, les puissances de J s'écrivent bloc par bloc :

$$J^n = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1)^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_r}(\lambda_r)^n \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Formule générale de la solution

On obtient donc

$$A^n = PJ^nP^{-1},$$

et ainsi

$$x_n = A^n x_0 = PJ^nP^{-1}x_0.$$

Chaque bloc de Jordan associé à une valeur propre λ contribue à des termes de la forme

$$n^k \lambda^n, \quad 0 \leq k \leq m - 1,$$

où m est la taille du bloc.

Remarque 2.2. Si A est diagonalisable, chaque bloc de Jordan est de taille 1, et donc

$$x_n = \sum_{i=1}^p c_i \lambda_i^n v_i,$$

où λ_i sont les valeurs propres et v_i une base de vecteurs propres.

Exemple 2.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors A est diagonale et

$$x_n = \begin{pmatrix} 2^n c_1 \\ 3^n c_2 \end{pmatrix},$$

si $x_0 = (c_1, c_2)^T$.

Exemple 2.2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = J_2(1)$. On a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et si $x_0 = (c_1, c_2)^T$, alors

$$x_n = \begin{pmatrix} c_1 + nc_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_n = A^n x_0 = \begin{pmatrix} 2^n x_{0,1} \\ (\frac{1}{2})^n x_{0,2} \\ (-1)^n x_{0,3} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.4. Soient $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \end{pmatrix} = r^n R_{n\theta} \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}, \quad x_{n,3} = \lambda^n x_{0,3},$$

où $R_{n\theta}$ est la rotation d'angle $n\theta$.

Exemple 2.5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

Donc pour $x_0 = (u, v, w)^T$,

$$x_n = \begin{pmatrix} u + nv \\ v \\ (\frac{1}{2})^n w \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système linéaire discret $x_{n+1} = Ax_n$ est donnée par $x_n = A^n x_0$, et le calcul de A^n repose sur la décomposition de Jordan. Selon la structure de A , la solution est une combinaison de termes du type $n^k \lambda^n$. Ce formalisme permet de décrire complètement la dynamique en fonction du spectre de A .

Remarque importante

Excepté dans des cas particuliers (systèmes intégrables, transformations linéaires ou possédant des symétries remarquables), la détermination de solutions générales explicites présente des défis théoriques majeurs.

2.4

Stabilité des Singularités

La stabilité d'une singularité du système (2.1) caractérise le comportement asymptotique des trajectoires issues de conditions initiales voisines. Intuitivement, une singularité est dite stable si toute orbite démarrante suffisamment près d'elle y reste indéfiniment proche; elle est dite asymptotiquement stable si, de plus, ces orbites convergent vers ce point. En revanche, une singularité est dite instable s'il existe des orbites arbitrairement proches qui s'en éloignent. L'analyse de la stabilité repose sur l'étude du comportement local de l'application F au voisinage du point considéré, en particulier via l'approximation linéaire, dont les propriétés spectrales (valeurs propres de la matrice jacobienne) permettent de caractériser rigoureusement la nature stable, instable ou col de la singularité. Cette section présente les critères classiques de stabilité linéaire et non linéaire pour les singularités de dimension zéro.

Définition 2.3 (Stabilité au sens de Lyapunov). Un point fixe $x^* \in \mathbb{R}^p$ de F est dit :

- 1) Stable, si pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \geq 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - x^*\| < \delta$ implique $\|F^n(x) - x^*\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
- 2) Attractif, s'il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - x^*\| < \delta$ entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F^n(x) - x^*\| = 0$.
- 3) Répulsif, s'il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - x^*\| < \delta$ entraîne $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|F^n(x) - x^*\| = 0$.
- 4) Asymptotiquement stable, s'il est à la fois stable et attractif.
- 5) Instable, s'il n'est pas stable.

2.4.1 Stabilité des systèmes linéaires

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur les systèmes linéaires définis par (2.5). Pour de tels systèmes, nous pouvons donner une description complète de la stabilité du point fixe

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

Le cas des autres points fixes non nuls se ramène à ce cas par translation.

Théorème 2.2. *Les affirmations suivantes sont vraies pour l'équation (2.5) :*

- (a) Si $\rho(A) < 1$, alors l'origine est asymptotiquement stable.

- (b) Si $\rho(A) > 1$, alors l'origine est instable.
- (c) Si $\rho(A) = 1$, alors l'origine est instable si au moins une valeur propre de module 1 possède un bloc de Jordan non diagonal, et stable sinon.

Démonstration.

- (a) Supposons que $\rho(A) < 1$. Alors, d'après le Théorème 5.12, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Ainsi, l'origine est globalement attractive. Pour prouver la stabilité, considérons la forme de Jordan réelle de A :

$$A = PJP^{-1},$$

où J est une matrice bloc-diagonale composée de blocs de Jordan.

1. Cas 1 : A est diagonalisable.

Si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants, alors J est diagonale :

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

La solution s'écrit

$$x_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix} P^{-1} x_0.$$

Ainsi,

$$\|x_n\| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \rho(A)^n \|x_0\| \leq M \|x_0\|,$$

avec $M = \|P\| \|P^{-1}\|$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, on a

$$\|x_0\| < \delta \implies \|x_n\| < \varepsilon.$$

Ceci montre que l'origine est stable. De plus, puisque $\rho(A)^n \rightarrow 0$, l'origine est asymptotiquement stable.

2. Cas 2 : A n'est pas diagonalisable.

Supposons que A ait des valeurs propres répétées et des blocs de Jordan non diagonaux. Soit J_k un bloc de Jordan associé à une valeur propre λ avec $|\lambda| < 1$.

La puissance n -ième de J_k est de la forme :

$$J_k^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{m-1} \lambda^{n-m+1} \\ & \lambda^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix},$$

où m est la taille du bloc. Puisque $|\lambda| < 1$, on a $\binom{n}{j}|\lambda|^{n-j} \rightarrow 0$ pour tout j . Ainsi, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|J_k^n\| \leq L|\lambda|^n.$$

Par conséquent,

$$\|x_n\| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|J^n\| \|x_0\| \leq M \|x_0\|,$$

avec $M = L\|P\|\|P^{-1}\|$. La stabilité découle alors du même argument que précédemment. La convergence vers zéro est assurée par la décroissance exponentielle de chaque terme.

- (b) Supposons $\rho(A) > 1$. Alors A possède une valeur propre λ avec $|\lambda| > 1$. Soit v un vecteur propre associé à λ . Dans une base appropriée, on peut écrire $A = PJP^{-1}$ avec J en forme de Jordan. On a :

$$A^n(Pv) = PJ^n v.$$

Si v est un vecteur propre, alors $J^n v = \lambda^n v$, d'où

$$\|A^n(Pv)\| = |\lambda|^n \|Pv\| \rightarrow +\infty.$$

Si v est un vecteur propre généralisé, alors $J^n v$ contient des termes en $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}$ qui divergent également. Ainsi, pour tout voisinage de l'origine, on peut trouver une condition initiale x_0 dont la trajectoire quitte ce voisinage. L'origine est donc instable.

- (c) Supposons $\rho(A) = 1$. Alors toutes les valeurs propres λ_i vérifient $|\lambda_i| \leq 1$, et au moins une satisfait $|\lambda| = 1$.

1. **Cas stable :** Si tous les blocs de Jordan associés aux valeurs propres de module 1 sont de taille 1×1 , alors A est diagonalisable pour ces valeurs propres. Soit $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale par blocs avec des blocs de valeurs propres de module 1 et des blocs de Jordan pour les valeurs propres de module inférieur à 1. Alors

$$\|A^n\| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|D^n\|.$$

Pour les valeurs propres de module 1, $|\lambda|^n = 1$. Pour les valeurs propres de module strictement inférieur à 1, $|\lambda|^n \rightarrow 0$. Les blocs de Jordan associés à des valeurs propres de module inférieur à 1 donnent des termes qui tendent vers

zéro. Ainsi, $\|D^n\|$ est bornée, et donc $\|A^n\|$ est bornée. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \delta \implies \|A^n x_0\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n.$$

L'origine est donc stable.

2. **Cas instable** : Si au moins un bloc de Jordan associé à une valeur propre λ de module 1 est de taille $m \geq 2$, alors ce bloc est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sa puissance n -ième contient des termes en $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}$. En particulier, pour $j = 1$, on a $\binom{n}{1}\lambda^{n-1}$, dont la norme diverge lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $w = (0, \dots, 0, 1)^\top$. Alors

$$\|B^n w\| \sim n \rightarrow \infty.$$

Ainsi, pour toute condition initiale non nulle dans l'espace correspondant, la trajectoire diverge. L'origine est donc instable. □

2.4.2 Stabilité locale des systèmes non linéaires

Pour étudier la stabilité locale de x^* , on considère une petite perturbation $d = x - x^*$ autour du point fixe. En linéarisant F autour de x^* et on peut approximer la dynamique de cette perturbation par

$$F(x^* + d) - x^* = DF(x^*)d + \varepsilon(x^*, d),$$

tel que $\varepsilon(x^*, d) = o(\|d\|)$. En outre, lorsque $\|d\| < \eta$ pour un certain $\eta > 0$, une approximation linéaire locale de l'application F près du point fixe x^* peut être exprimée par

$$F(x^* + d) = x^* + DF(x^*)d. \tag{2.6}$$

La représentation matricielle de l'application linéaire $DF(x^*)$ (souvent appelée « matrice Jacobienne »), est donnée par

$$DF(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix}_{x=x^*}.$$

Il est important de déterminer dans quelle mesure la caractérisation dynamique du système non linéaire (2.1) est préservée par l'approximation linéaire (2.6).

Lemme 2.1. *Soit $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application continue telle que $F(x^*) = x^*$ pour un $x^* \in \mathbb{R}^p$. Soit $N \in \mathbb{N}$, alors pour tout $\eta > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \eta$ et pour tout $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, si $\|x - x^*\| < \delta$ alors $\|F^n(x) - x^*\| < \eta$.*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$. La continuité de F^n en x^* pour tous $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ implique qu'il existe une famille de valeurs $\{\delta_n > 0 : n \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ telles que

$$\|F^n(x) - F(x^*)\| = \|F^n(x) - x^*\| < \eta$$

lorsque $\|x - x^*\| < \delta_n$. Prenons $\delta = \min_{1 \leq n \leq N} \{\delta_n, \eta\}$, alors $\delta \leq \eta$ et, pour tout $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a

$$\|F^n(x) - x^*\| < \eta$$

dès que $\|x - x^*\| < \delta$. □

Théorème 2.3. *Soit x^* un point fixe de (2.1) et $J^* := DF(x^*)$ la matrice Jacobienne de F en x^* .*

(i) Si

$$\rho(J^*) < 1,$$

alors x^* est asymptotiquement stable.

(ii) Si

$$\rho(J^*) > 1,$$

alors x^* est instable. De plus, si

$$\inf \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(J^*)\} < 1,$$

alors x^* est dit semi-stable.

(iii) Si

$$\inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(J^*)\} > 1,$$

alors x^* est répulsif.

Démonstration. (i) Soit x^* un point fixe de F et $\rho(J^*) < 1$. Selon le Théorème 5.12, il existe $0 < a < 1$ et $N > 0$ tels que

$$\|(J^*)^n\| \leq a^n \|x\|, \quad (2.7)$$

pour tout $[x] \in X$ et $n \geq N$.

D'après (2.6), soit $\eta > 0$ tel que

$$F(x) - x^* = J^*(x - x^*)$$

lorsque $\|x - x^*\| < \eta$. Par ailleurs, d'après le Lemme 2.1, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \eta$ et si $\|x - x^*\| < \delta$, alors

$$\|F^n(x) - x^*\| < \eta,$$

pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$. Ainsi,

$$F^n(x) - x^* = (J^*)^n(x - x^*), \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

En appliquant (2.7), on obtient

$$\|F^N(x) - x^*\| \leq a^N \|x - x^*\| < \|x - x^*\|,$$

d'où $\|F^N(x) - x^*\| < \eta$ et

$$\begin{aligned} F^{N+1}(x) - x^* &= J^*(F^N(x) - x^*), \\ &= (J_F^*)^{N+1}(x - x^*). \end{aligned}$$

En répétant ce processus et en utilisant (2.7), on peut déduire que pour tout $n > N$,

$$\|F^n(x) - x^*\| \leq a^n \|x - x^*\|. \quad (2.8)$$

Puisque $0 < a < 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\|F^n(x) - x^*\| < \varepsilon,$$

lorsque $\|x - x^*\| < \delta$ et $n > N$. Par conséquent, x^* est un point fixe stable pour F . De plus, en faisant tendre n vers l'infini dans (2.8), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F^n(x) - x^*\| = 0,$$

ce qui montre que x^* est asymptotiquement stable (voir la Définition 2.3).

(ii) Si $r(J^*) > 1$, alors

$$\rho(J^*)^n = \rho((J^*)^n) \leq \|(J^*)^n\|,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(J^*)^n\| = +\infty.$$

On peut en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|x - x^*\| < \varepsilon$ implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(J^*)^n(x - x^*)\| \neq 0. \quad (2.9)$$

Si on suppose que x^* est stable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $N > 0$ tels que

$$\|F^n(x) - x^*\| < \varepsilon,$$

lorsque $\|x - x^*\| < \delta$ et $n \geq N$. Cependant, le résultat ci-dessus (2.9) contredit cette hypothèse, donc le point fixe x^* est instable.

(iii) Si $\inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(J^*)\} > 1$, alors J^* est inversible et $\rho((J^*)^{-1}) < 1$. Par le Théorème 5.12, il existe $0 < a < 1$ et $N > 0$ tels que

$$\|[(J^*)^{-1}]^n x\| \leq a^n \|x\|, \quad (2.10)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et $n \geq N$. En utilisant le même raisonnement que pour la première partie de cette démonstration, on montre que x^* est attractif pour F^{-1} , et donc x^* est un point fixe répulsif pour F selon la Définition 2.3. \square

2.4.2.1 Cas particuliers

Le cas unidimensionnel ($p = 1$) : Déjà traité dans le Chapitre 1.

Le cas bidimensionnel ($p = 2$) : Un point fixe ou cycle possède deux multiplicateurs λ_i ($i = 1, 2$) qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de F (pour un point fixe) ou F^k (pour un cycle d'ordre k) au point considéré.

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$ et répulsif si $|\lambda_1| > 1$ ou $|\lambda_2| > 1$.

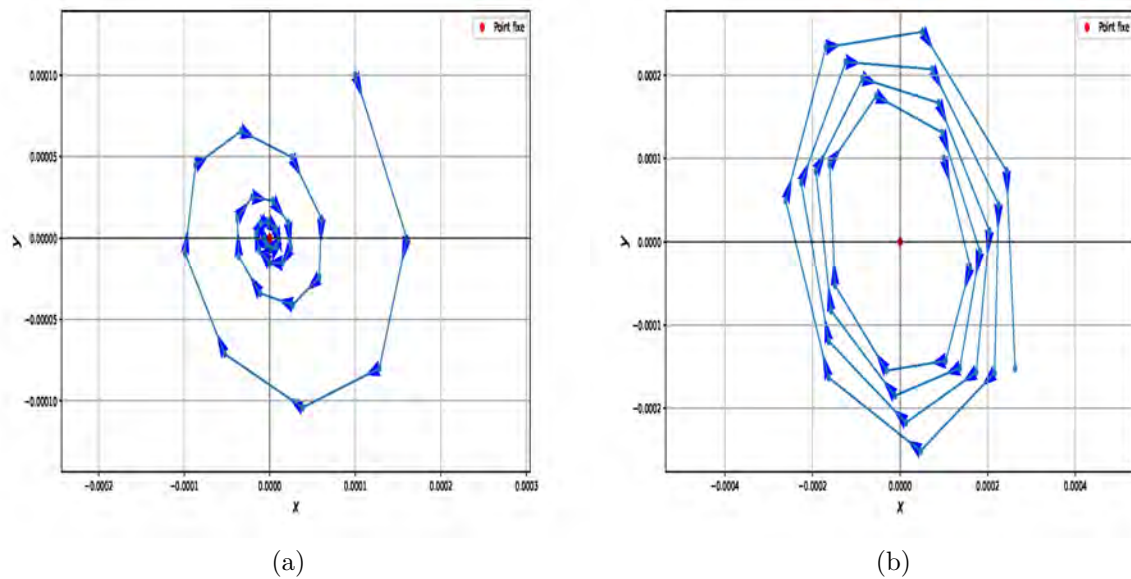


FIGURE 2.2 – Un point périodique attractif en (a) et un point périodique répulsif en (b).

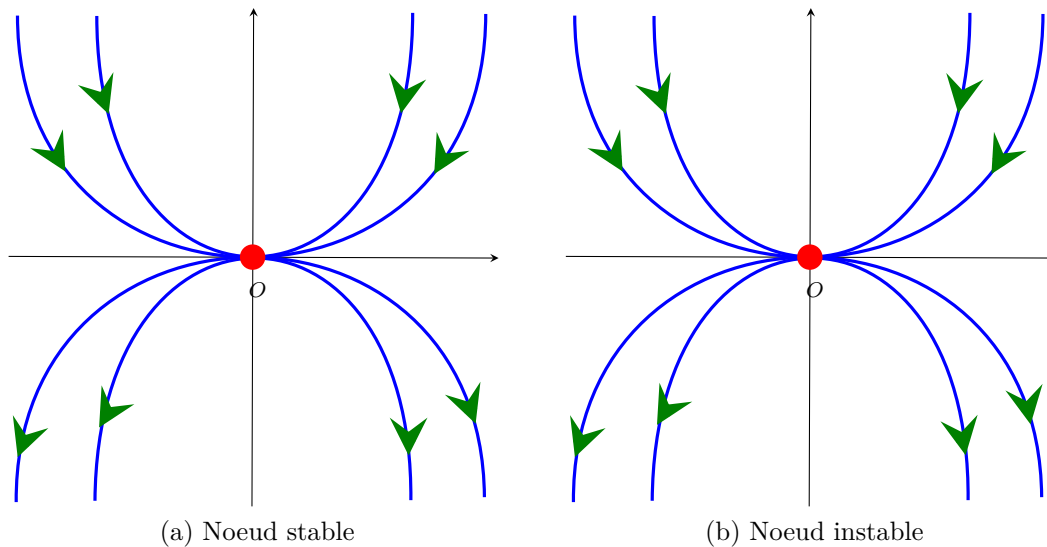


FIGURE 2.3 – Point d'équilibre du type noeud.

Selon les valeurs de s_1 et s_2 on peut définir plusieurs types de cycles (resp. de points fixes). Ces types caractérisent la dynamique du système au voisinage des points de cycle (resp. de points fixes).

- Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
 - Si $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ ou $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$, le point fixe ou le cycle est de type col Figure 2.5b.

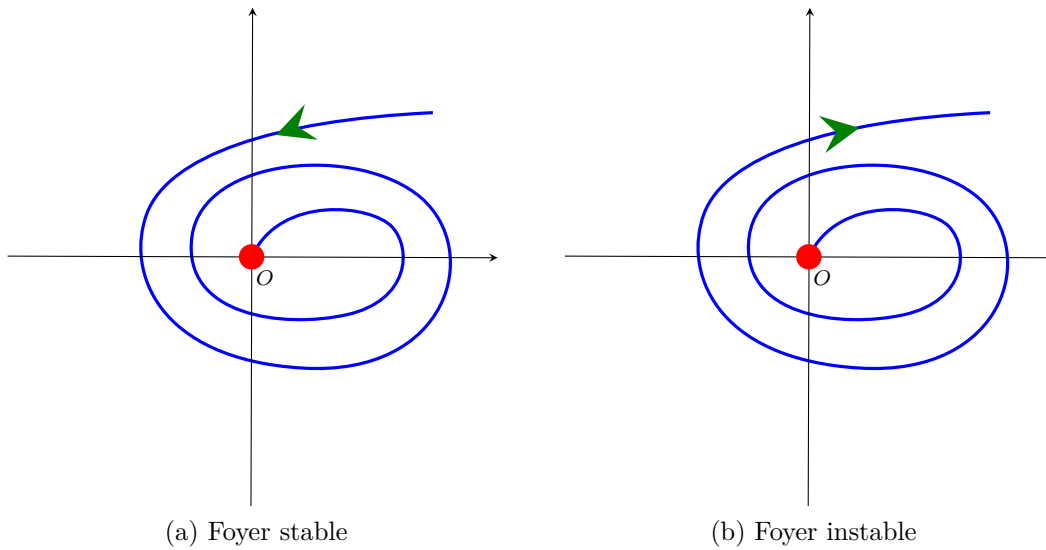


FIGURE 2.4 – Point d'équilibre du type foyer.

- Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, le point fixe ou le cycle est de type nœud stable Figure 2.3a.
- Si $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$, le point fixe ou le cycle est de type nœud instable Figure 2.3b.

- Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjugués
 - Si $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$, le point fixe ou le cycle est un foyer attractif (puit) Figure 2.4a.
 - Si $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$, le point fixe ou le cycle est un foyer répulsif (source) Figure 2.4b.

2.5

Le Plan Paramétrique « trace-déterminant »

Dans cette section, nous présentons une autre manière importante de présenter les résultats précédents, à savoir le plan trace-déterminant. Cela s'avère être un meilleur schéma lorsque l'on s'intéresse à l'étude de la bifurcation dans les systèmes bidimensionnels.

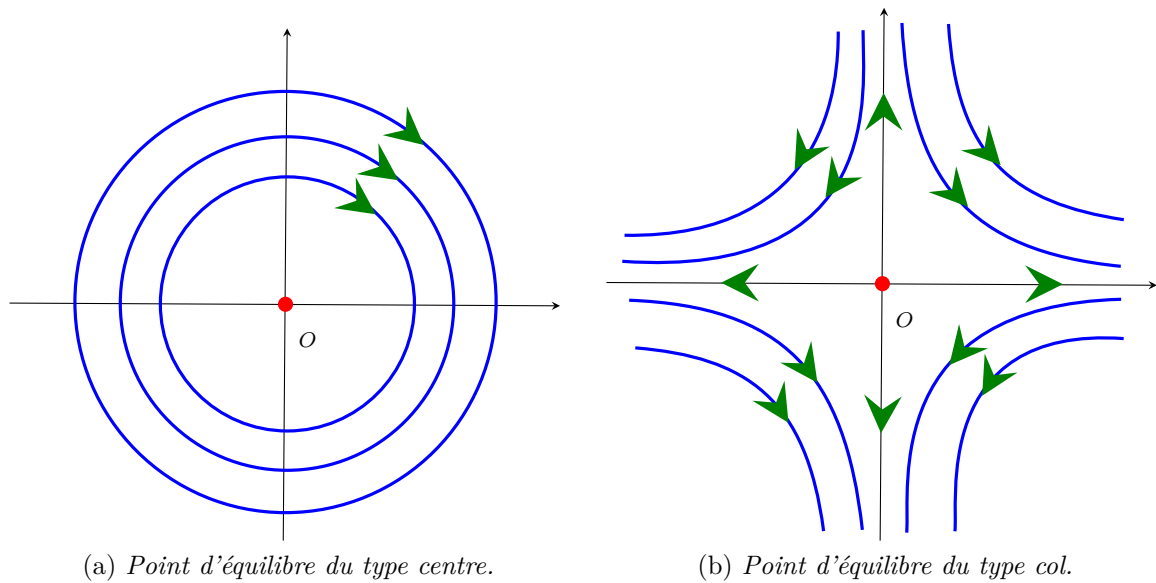


FIGURE 2.5 – Points fixes instables.

Les deux résultats suivants fournissent le cadre pour utiliser le plan trace-déterminant. Rappelons que pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$, et $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Théorème 2.4. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice 2×2 . Alors $\rho(A) < 1$ si et seulement si

$$|\text{tr}(A)| - 1 < \det(A) < 1. \quad (2.11)$$

Démonstration.

(i) Supposons que $\rho(A) < 1$. Si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de A , alors $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$. L'équation caractéristique de la matrice A est donnée par $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$, ou $\lambda^2 - (\text{tr}(A))\lambda + \det(A) = 0$. Ainsi, les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} [\text{tr}(A) + \sqrt{\Delta}],$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(A) - \sqrt{\Delta}],$$

où $\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)$.

Cas (a) λ_1 et λ_2 sont des racines réelles, c'est-à-dire $\Delta \geq 0$. Maintenant, $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ implique que

$$-2 < \text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta} < 2$$

ou

$$-2 - \operatorname{tr}(A) < \sqrt{\Delta} < 2 - \operatorname{tr}(A), \quad (2.12)$$

$$-2 - \operatorname{tr}(A) < -\sqrt{\Delta} < 2 - \operatorname{tr}(A). \quad (2.13)$$

En élevant au carré la seconde inégalité, on obtient

$$1 - \operatorname{tr}(A) + \det A > 0. \quad (2.14)$$

De même, si on élève au carré la première inégalité, on obtient

$$1 + \operatorname{tr}(A) + \det(A) > 0. \quad (2.15)$$

À partir de la seconde inégalité (2.12) et de la première inégalité (2.13), on obtient $2 + \operatorname{tr}(A) > 0$ et $2 - \operatorname{tr}(A) > 0$ ou $|\operatorname{tr}(A)| < 2$. Puisque $(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det A \geq 0$, il suit que

$$\det A \leq (\operatorname{tr}(A))^2/4 < 1. \quad (2.16)$$

En combinant les inégalités (2.14), (2.15) et (2.16), on obtient le résultat.

Cas (b) λ_1 et λ_2 sont des conjugués complexes, c'est-à-dire

$$(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det(A) < 0. \quad (2.17)$$

Dans ce cas, on a $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [\operatorname{tr}(A) \pm i\sqrt{-\Delta}]$ et

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \frac{(\operatorname{tr}(A))^2}{4} + \frac{4 \det A}{4} - \frac{(\operatorname{tr}(A))^2}{4} = \det A.$$

Ainsi, $0 < \det A < 1$. Pour montrer les inégalités (2.14) et (2.15), notez que puisque $\det A > 0$, soit (2.14) (si $\operatorname{tr}(A) > 0$) soit (2.15) (si $\operatorname{tr}(A) < 0$) est vraie. Sans perte de généralité, supposons que $\operatorname{tr}(A) > 0$. Alors (2.14) est vraie. De (2.17), $\operatorname{tr}(A) < 2\sqrt{\det(A)}$. Si on pose $\det(A) = x$, alors $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} < 1 + \det(A) - \operatorname{tr}(A)$. Notez que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ indiquent que f est décroissante sur $]0, 1[$ avec image $]0, 1[$. Cela implique que $1 + \det(A) - \operatorname{tr}(A) > f(x) > 0$, ce qui complète la preuve.

(ii) Réciproquement, supposons que (2.11) est vraie. Alors nous avons deux cas à considérer.

Cas (a) $\Delta \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &= \frac{1}{2} |\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}| < \frac{1}{2} \left| \operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{(\det(A) + 1)^2 - 4 \det(A)} \right| \\ &< \frac{1}{2} \left(\det(A) + 1 + \sqrt{(\det(A) - 1)^2} \right) = \frac{1}{2} (\det(A) + 1 - (\det(A) - 1)) = 1. \end{aligned}$$

Cas (b) $\Delta < 0$. Alors

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2} |\operatorname{tr}(A) \pm i\sqrt{-\Delta}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 + 4 \det A - (\operatorname{tr}(A))^2} = \sqrt{\det A} < 1.$$

□

Pour $p = 2$, on considère la matrice jacobienne $A = DF(x^*)$ du système (2.1) au point fixe x^* . Le résultat précédent conduit alors au critère de stabilité asymptotique suivant.

Corollaire 2.1. *Le point fixe x^* du système (2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si la condition (2.11) est vraie.*

Notez que la condition (2.11) peut être explicitée dans les trois inégalités suivantes :

$$1 + \operatorname{tr}(A) + \det A > 0, \quad \text{ou} \quad \det A > -\operatorname{tr}(A) - 1$$

$$1 - \operatorname{tr}(A) + \det A > 0, \quad \text{ou} \quad \det A > \operatorname{tr}(A) - 1$$

$$\det(A) < 1$$

En considérant $\det(A)$ comme une fonction de $\operatorname{tr}(A)$, les trois inégalités ci-dessus nous donnent la région de stabilité comme l'intérieur du triangle délimité par les droites $\det(A) = -\operatorname{tr}(A) - 1$, $\det(A) = \operatorname{tr}(A) - 1$, et $\det(A) = 1$, comme le montre les Figures 2.6-2.7.

Ensuite, nous approfondissons un peu plus pour trouver les valeurs exactes des valeurs propres de la matrice A le long des frontières du triangle enfermant la région de stabilité. Le résultat suivant nous fournit les réponses nécessaires. Soient $\lambda_1 = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) + \sqrt{\Delta})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) - \sqrt{\Delta})$ les valeurs propres de A .

Théorème 2.5. *Soit A une matrice 2×2 , alors*

(i) Si $|\operatorname{tr}(A)| - 1 = \det(A)$, alors nous avons

(a) les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \det(A)$ si $\operatorname{tr}(A) > 0$,

(b) les valeurs propres de A sont $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_1 = -\det(A)$ si $\operatorname{tr}(A) < 0$.

(ii) Si $|\operatorname{tr}(A)| - 1 < \det(A)$, et $\det(A) = 1$, alors les valeurs propres de A sont $e^{\pm i\theta}$, où $\theta = \cos^{-1}(\operatorname{tr}(A)/2)$.

Démonstration.

(i) Soit $|\operatorname{tr} A| - 1 = \det A$. Alors $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = (\det A + 1)^2 \geq 0$. Cela implique que les valeurs propres sont des nombres réels. De plus, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) \pm (\det(A) - 1))$.

(a) Si $\operatorname{tr}(A) > 0$, alors $\operatorname{tr}(A) = 1 + \det(A)$, et par conséquent,

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1, \\ \det(A). \end{cases}$$

(b) Si $\operatorname{tr}(A) < 0$, alors $\operatorname{tr}(A) = -1 - \det(A)$, et par conséquent,

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -1, \\ -\det(A). \end{cases}$$

(ii) Soit $|\operatorname{tr}(A)| - 1 < \det(A)$, et $\det A = (1)$. Alors $\Delta = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det(A) < (\det(A) + 1)^2 - 4 = 0$. Ainsi, les valeurs propres sont des conjugués complexes. De plus,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((\operatorname{tr}(A))^2/4 \pm \sqrt{-\Delta} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{1 - (\operatorname{tr}(A))^2/4}.$$

Ainsi $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2/4 + 1 - (\operatorname{tr}(A))^2/4} = 1$. De plus,

$$\theta = \arctan(\lambda_{1,2}) = \tan^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - (\operatorname{tr}(A))^2/4}}{(\operatorname{tr}(A))^2/4} \right) = \cos^{-1}(\operatorname{tr}(A)/2);$$

ce qui donne $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$.

□

Remarque 2.3. Le plan $(\operatorname{tr}(A), \det(A))$ est efficace dans l'étude des systèmes avec paramètres. Il nous fournit une carte des emplacements où nous pouvons nous attendre à des changements dramatiques dans le portrait de phase. En effet, les trois lignes critiques : $\Delta = 0$, $\operatorname{tr}(A) + \det(A) + 1 = 0$, et $\operatorname{tr}(A) - \det(A) - 1 = 0$ enferment la région de stabilité dans les plans $(\operatorname{tr}(A), \det(A))$.

Nous illustrons maintenant notre analyse par quelques exemples.

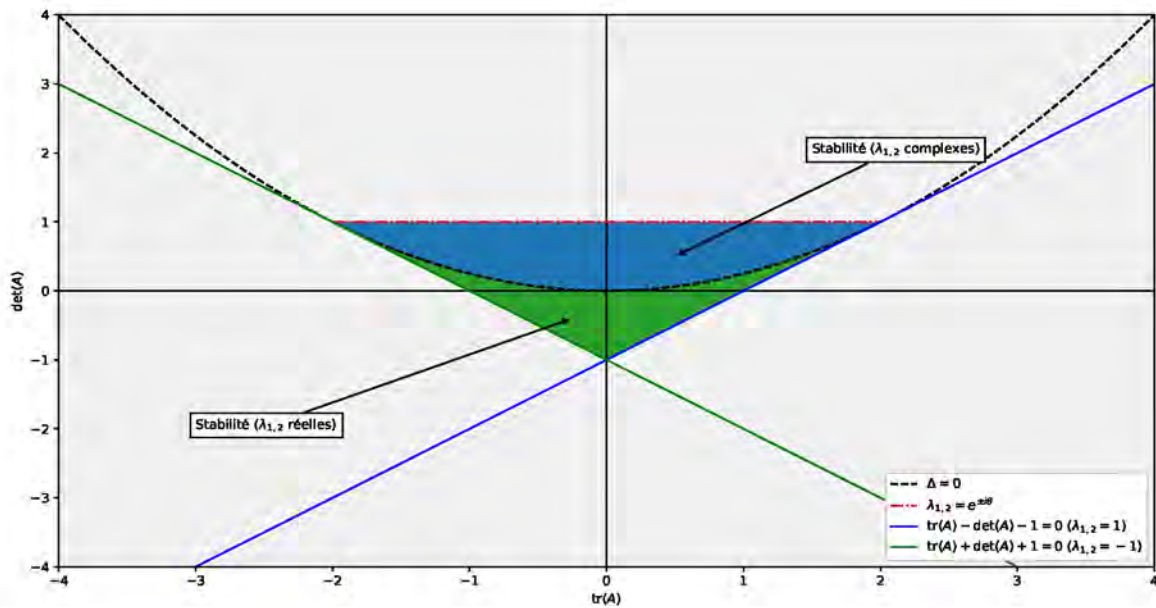


FIGURE 2.6 – Les zones de stabilité du système (2.1) dans le plan $(\text{tr}(A), \det(A))$.

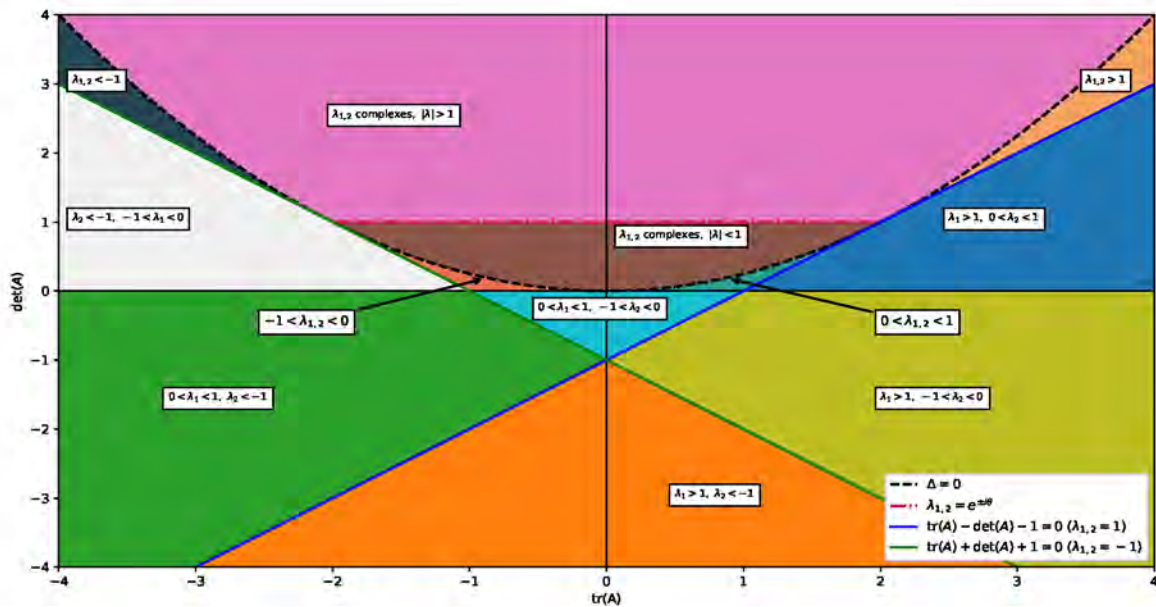


FIGURE 2.7 – La détermination des valeurs propres de $DF(x^*)$ dans les différentes régions du plan $(\text{tr}(A), \det(A))$.

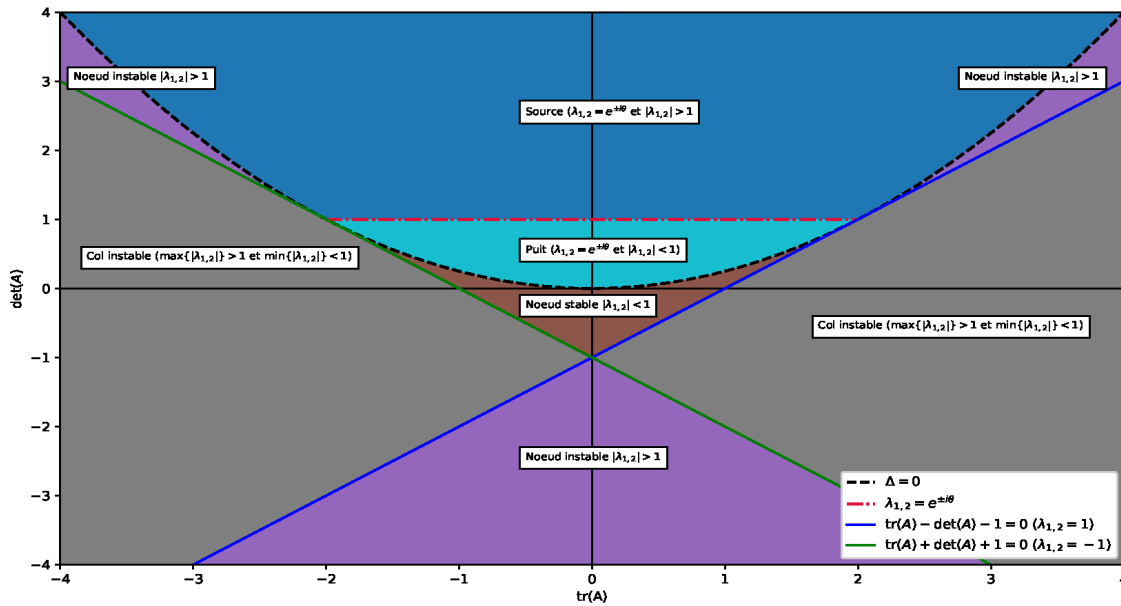


FIGURE 2.8 – La dynamique locale du système (2.1) dans toutes les régions du plan $(\text{tr}(A), \det(A))$.

Exemple 2.6. Considérons un système linéaire découplé, donné par $X_{k+1} = AX_k$, tel que :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

où les conditions initiales $x_0 \equiv (x_0, y_0)$ sont données. Étant donné que la matrice A est une matrice diagonale, le système est découplé, et l'évolution de chaque variable d'état est indépendante de l'autre. Autrement dit, x_{k+1} dépend uniquement de x_k , et y_{k+1} dépend uniquement de y_k . La solution du système, donnée par $X_k = A^k x_0$ est donc

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (0.5)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

En particulier :

$$\begin{aligned} x_k &= 2^k x_0, \\ y_k &= (0.5)^k y_0. \end{aligned}$$

Le système atteint un équilibre stationnaire au point $(x, y) = (0, 0)$. Cependant, l'évolution des deux variables d'état, à mesure que $k \rightarrow \infty$, diffère qualitativement :

La seconde variable d'état, y_k , converge toujours vers son point d'équilibre stationnaire $y = 0$, indépendamment de sa valeur initiale y_0 . En d'autres termes :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y = 0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}.$$

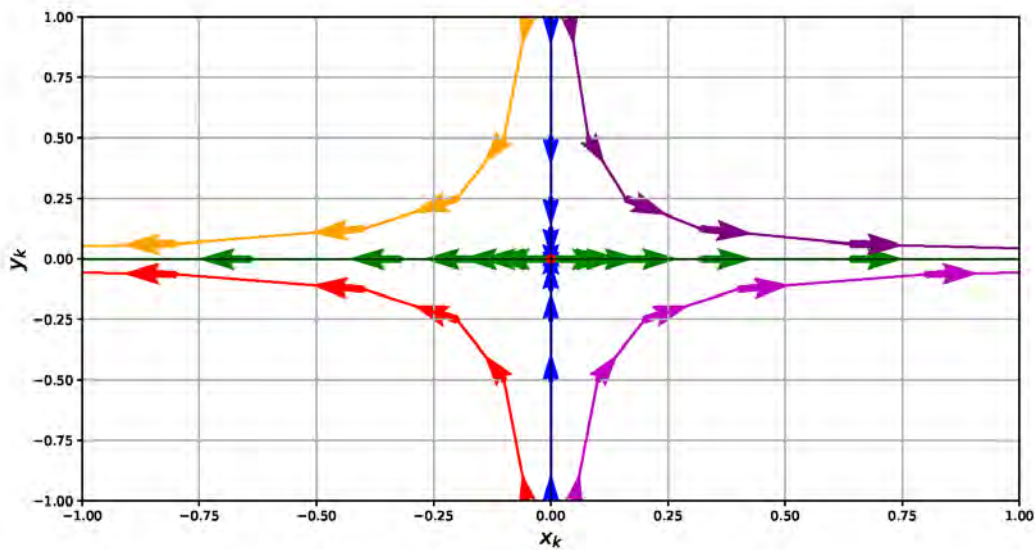


FIGURE 2.9 – Le point fixe $(x^*, y^*) = (0, 0)$ est un noeud instable pour le système découplé (2.18).

Si $y_0 > 0$, y_k approche 0 de manière monotone depuis les quadrants positifs, tandis que si $y_0 < 0$, il approche 0 de manière monotone depuis les quadrants négatifs.

En revanche, la première variable d'état, x_k , diverge, sauf si sa position initiale est déjà au point d'équilibre $x = 0$. Plus précisément :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \begin{cases} -\infty, & \text{si } x_0 < 0, \\ 0, & \text{si } x_0 = 0, \\ +\infty, & \text{si } x_0 > 0. \end{cases}$$

Ainsi, comme illustré dans la Figure 2.9, le point stationnaire $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ est un col. À moins que $x_0 = 0$, le système diverge dans la direction de x_k :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = \begin{cases} (-\infty, 0), & \text{si } x_0 < 0, \\ (0, 0), & \text{si } x_0 = 0, \\ (+\infty, 0), & \text{si } x_0 > 0. \end{cases}$$

Exemple 2.7 (Un système couplé). Considérons un système couplé d'équations aux différences homogènes, linéaires et du premier ordre, donné par :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

où les conditions initiales du vecteur des variables d'état $x_0 \equiv (x_0, y_0)$ sont données.

Le système ne peut pas être directement découplé, car les deux variables x_k et y_k sont interdépendantes. Une méthode de solution différente est donc requise. Cette méthode transforme le système couplé en un nouveau système de coordonnées où le système dynamique est découplé.

La transformation est basée sur les lignes définies par les vecteurs propres de la matrice A . Une matrice de transformation est construite à partir des vecteurs propres de A , et cette matrice permet de passer d'un système de coordonnées couplé à un système découplé.

Valeurs propres de la matrice A : Les valeurs propres de A sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique :

$$P(s) \equiv \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

avec

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Dans notre cas

$$\text{tr}(A) = 2.5, \quad \det(A) = 1.$$

Les valeurs propres sont alors

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0.5.$$

Vecteurs propres de la matrice A : Les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont obtenus en résolvant

$$[A - \lambda I]v = 0.$$

Pour $\lambda_1 = 2$, nous avons $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système donne $v_{12} = 2v_{11}$, soit un vecteur propre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 0.5$, nous avons

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système donne $v_{22} = -v_{21}$, soit un vecteur propre

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres peuvent être multipliés par un scalaire quelconque.

Transformation dans un nouveau système de coordonnées : Pour tout vecteur d'état $X_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe un vecteur $Z_k = (z_k, u_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X_k = v_1 z_k + v_2 u_k.$$

Cela revient à écrire

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_k \\ u_k \end{pmatrix}$$

La matrice de transformation est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son inverse est

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système peut alors être réécrit dans les nouvelles coordonnées

$$X_{k+1} = Q^{-1} A Q Z_k.$$

La matrice transformée $Q^{-1} A Q$ est diagonale, avec les valeurs propres en diagonale

$$D = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Solution dans les nouvelles coordonnées : Dans les nouvelles coordonnées, le système devient découplé

$$z_{k+1} = 2z_k, \quad u_{k+1} = 0.5u_k.$$

Les solutions explicites sont alors

$$z_k = 2^k z_0, \quad u_k = (0.5)^k u_0.$$

Ces solutions montrent que

1. $z_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, indépendamment de z_0 .
2. u_k diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, sauf si $u_0 = 0$.

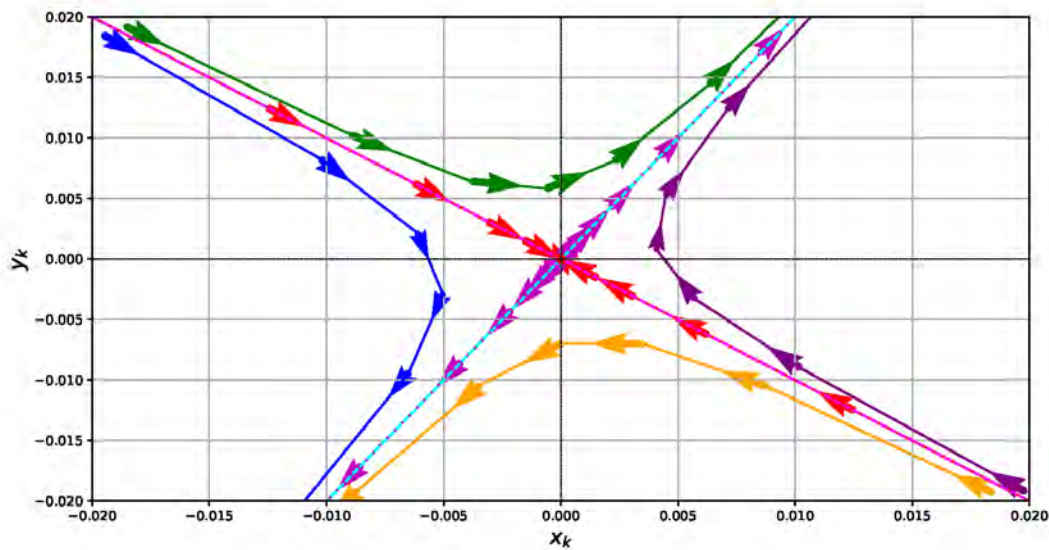


FIGURE 2.10 – Le point fixe $(x^*, y^*) = (0, 0)$ est un col pour le système couplé (2.19).

Solution dans les coordonnées originales : En revenant aux coordonnées originales

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} z_k \\ u_k \end{pmatrix}.$$

Substituant les solutions pour y_k et z_k , on obtient

$$\begin{cases} z_k = \frac{1}{3} \left(2^k(x_0 + y_0) + (0.5)^k(2x_0 - y_0) \right), \\ u_k = \frac{1}{3} \left(2 \cdot 2^k(x_0 + y_0) - (0.5)^k(2x_0 - y_0) \right). \end{cases} \quad (2.20)$$

La trajectoire du système est donc déterminée par les valeurs initiales x_0 et y_0 , ainsi que par les valeurs propres de A .

Stabilité de l'équilibre à l'état stationnaire : Un *équilibre stationnaire* pour le système $X_{k+1} = AX_k$ est un vecteur $\bar{X} \in \mathbb{R}^2$ tel que $A\bar{X} = \bar{X}$. Il s'ensuit, d'après (2.20), que $\bar{X} = (0, 0)$. Cet équilibre est unique car la matrice A est inversible ($\det(A) = 1 \neq 0$). Comme montré dans (2.20) et dans la Figure 2.10

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \bar{X} \iff y_0 = -x_0.$$

Ainsi, $\overline{(x, y)} = (0, 0)$ est un col. Le vecteur des variables d'état initiales X_k converge vers \bar{X} uniquement si les conditions initiales satisfont $y_0 = -x_0$, c'est-à-dire lorsque les trajectoires se trouvent sur l'axe stable y_k .

Exemple 2.8 (Système paramétré). Considérons le système linéaire

$$X_{n+1} = AX_n, \quad (2.21)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

qui dépend du paramètre a . On a

$$\operatorname{tr}(A) = 0, \quad \det(A) = 2a - 1.$$

Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 + (2a - 1).$$

Les valeurs propres s'obtiennent directement :

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1 - 2a}.$$

Ainsi :

- si $a \leq \frac{1}{2}$, les valeurs propres sont réelles et opposées $\lambda = \pm\sqrt{1 - 2a}$;
- si $a > \frac{1}{2}$, les valeurs propres sont purement imaginaires $\lambda = \pm i\sqrt{2a - 1}$.

Classification selon le paramètre a : On distingue les cas suivants :

(I) Stabilité asymptotique

Si $0 < a < 1$ ($|s_{1,2}| < 1$), alors $X^* = (0, 0)$ est asymptotiquement stable et on distingue deux sous-cas :

- $0 < a < \frac{1}{2}$: valeurs propres réelles $\pm\sqrt{1 - 2a} \in]-1, 1[\Rightarrow$ convergence monotone alternée selon composantes (Noeud stable) Figure 2.11b;
- $\frac{1}{2} < a < 1$: valeurs propres purement imaginaires de module $< 1 \Rightarrow$ spirale convergente (puit) Figure 2.11c.

(II) Cas limites / périodiques / extinction

- $a = 0$: $\lambda_{1,2} = 1$. On a $A^2 = I$ donc $X_{n+2} = X_n \implies$ périodicité 2 (non-hyperbolique) Figure 2.12a.
- $a = \frac{1}{2}$: $\lambda_{1,2} = 0$. Alors $A^2 = 0$ et $X_2 = 0$ pour tout X_0 ($X^*(0, 0)$ est super-stable) Figure 2.12b.
- $a = 1$: $\lambda_{1,2} = -1$. Alors $A^2 = -I$ et $A^4 = I \Rightarrow$ périodicité 4 (un centre Figure 2.5a) Figure 2.12c.

Intervalle pour a	Comportement	Remarque
$a < 0$	instable (réel, $ \lambda_{1,2} > 1$)	Divergence
$a = 0$	périodique (période 2)	$\lambda_{1,2} = 1$
$0 < a < \frac{1}{2}$	asympt. stable (réel)	$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-2a} \in]-1, 1[$
$a = \frac{1}{2}$	extinction en 2 pas	$\lambda_{1,2} = 0$
$\frac{1}{2} < a < 1$	asympt. stable (Puit)	Valeurs propres imaginaires, $ \lambda_{1,2} < 1$
$a = 1$	périodique (période 4)	$\lambda_{1,2} = -1$
$a > 1$	instable (Source)	Valeurs propres imaginaires, $ \lambda_{1,2} > 1$

TABLE 2.1 – Résumé des comportements du système (2.21) selon a .

(III) Instabilité

Si $a < 0$ ou $a > 1$ ($|s_{1,2}| > 1$), alors $X^* = (0, 0)$ est asymptotiquement instable et on distingue deux sous-cas :

- $a < 0$: valeurs propres réelles de modules $> 1 \Rightarrow$ divergence par croissance (nœud instable) Figure 2.11a;
- $a > 1$: valeurs propres imaginaires de module $> 1 \Rightarrow$ spirale divergente (source) Figure 2.11d.

L'étude montre que le comportement dynamique d'une itération linéaire dépend, pour cette famille, d'un seul scalaire $1 - 2a$. Les cas remarquables $a = 0, \frac{1}{2}, 1$ donnent respectivement une périodicité 2, extinction en 2 pas et périodicité 4. L'intervalle $0 < a < 1$ correspond à la stabilité asymptotique.

2.5.1 Bassins et domaines attractifs

Définition 2.4. L'ensemble invariant fermé A est dit attractif, s'il existe un voisinage U de A tel que $F(U) \subset U$ et $F^n(x) \rightarrow A$, lorsque $n \rightarrow \infty$, pour tout $x \in U$.

Définition 2.5. Le bassin d'attraction $B(A)$ d'un ensemble attractif A est l'ensemble de tous les points x tels que $F^n(x) \rightarrow A$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Le bassin immédiat de A est la composante connexe du bassin $B(A)$ contenant A .

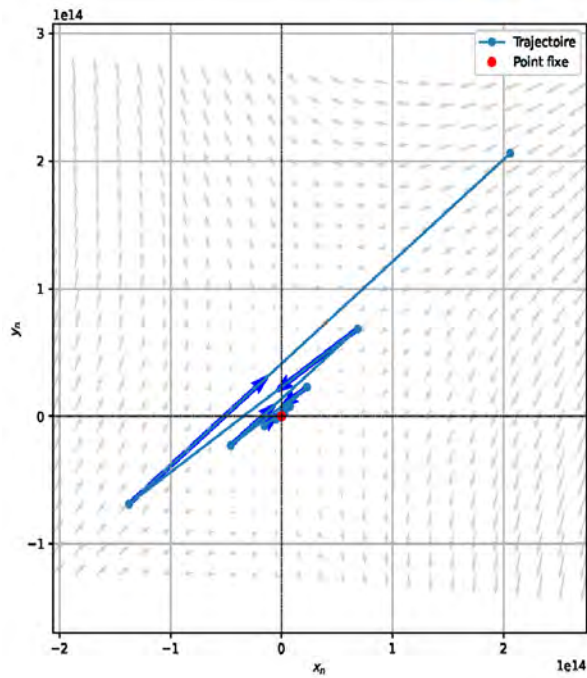
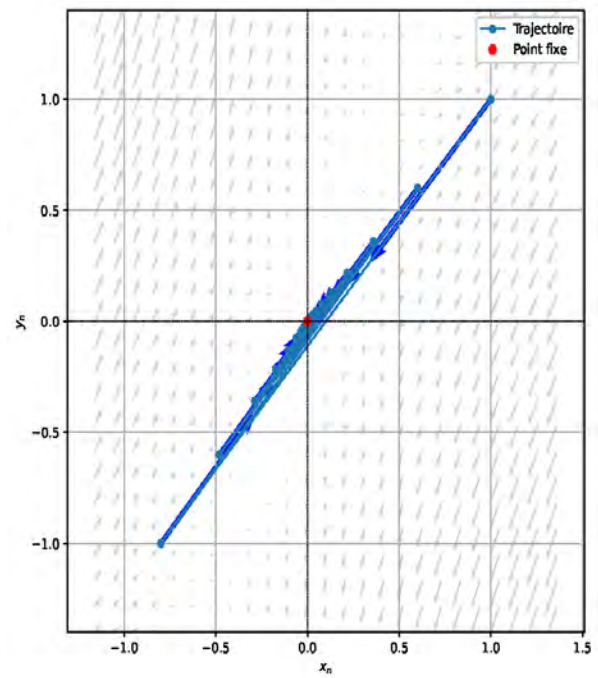
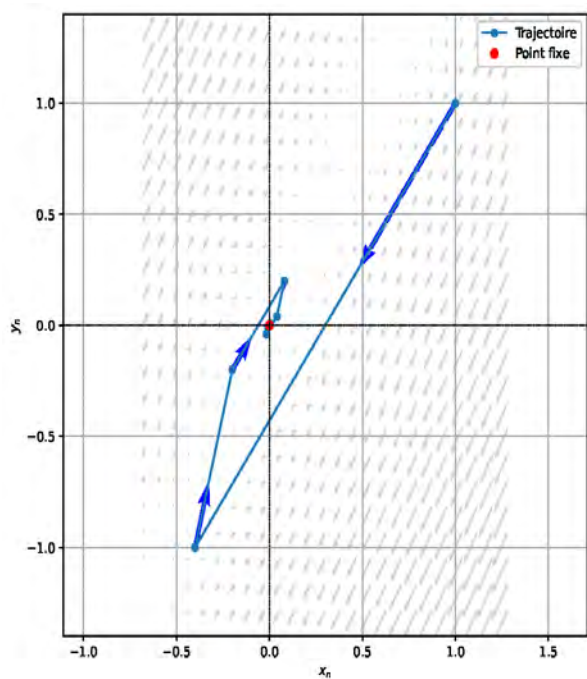
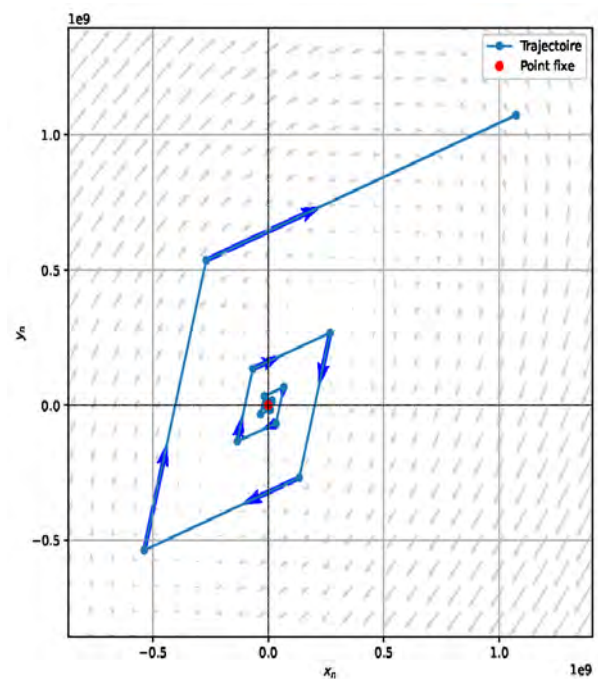
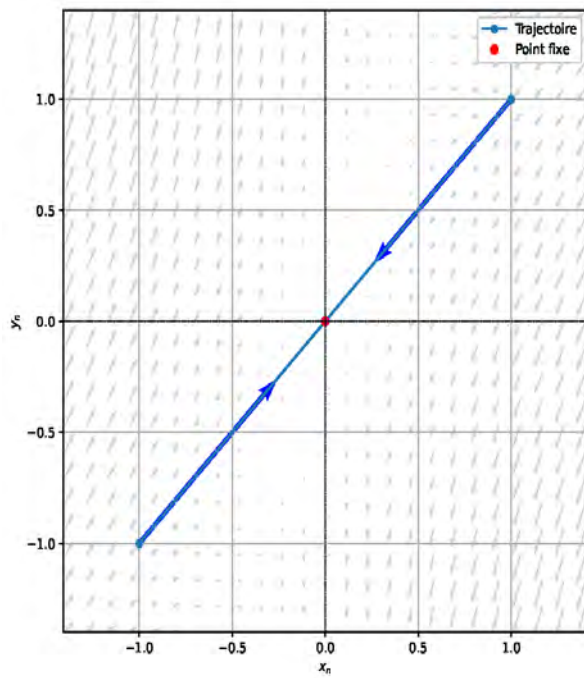
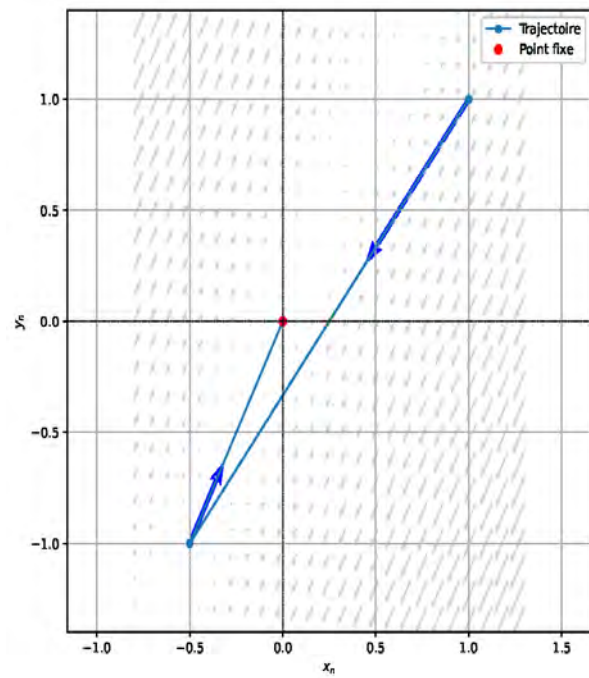
(a) $a = -1.0$ (Noeud instable).(b) $a = 0.2$ (Noeud stable).(c) $a = 0.6$ (Puit).(d) $a = 1.5$ (Source).

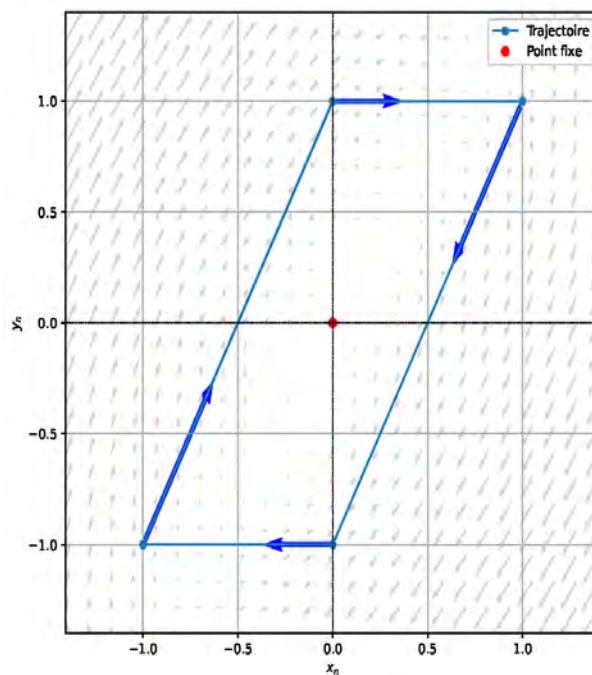
FIGURE 2.11 – Les trajectoires d'un point proche du point fixe $X^* = (0,0)$ pour le système (2.21) avec différentes valeurs du paramètre a .



(a) $a = 0.0$ (2-cycle).



(b) $a = 0.2$ (Noeud stable).



(c) $a = 1.0$ (4-cycle).

FIGURE 2.12 – Cas limites pour les trajectoires du système (2.21) avec différentes valeurs du paramètre a .

Théorème 2.6. *Si x^* est un point fixe asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de x^* .*

Démonstration. Voir Exercice 35. □

Exemple 2.9. Considérons le système récursif suivant

$$F := \begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = ax_k + bx_k^2 + cx_k^3 + dy_k. \end{cases}$$

Points fixes

Les points fixes vérifient $(x^*, y^*) = f(x^*, y^*)$, donc

$$\begin{cases} x^* = x^* + y^*, \\ y^* = ax^* + b(x^*)^2 + c(x^*)^3 + dy^*. \end{cases}$$

On a donc deux points fixes : $P_1^* = (x_1^* = 0, y_1^* = 0)$, $P_2^* = (x_1^* = \frac{-b - \sqrt{-4ac + b^2}}{2c}, y_1^* = 0)$ et $P_3^* = (x_2^* = \frac{-b + \sqrt{-4ac + b^2}}{2c}, y_2^* = 0)$.

Stabilité des points fixes

La matrice jacobienne $DF(x, y)$ est :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a + 2bx + 3cx^2 & d \end{pmatrix}.$$

Pour chaque point fixe, on calcule les valeurs propres de J pour déterminer la stabilité.

La matrice jacobienne pour le point P_1^*

$$DF(P_1^*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & d \end{bmatrix}$$

les valeurs propres sont donc

$$e_1 = \frac{1 + d + \sqrt{d^2 + 4a - 2d + 1 + c}}{2}, e_2 = \frac{1 + d - \sqrt{d^2 + 4a - 2d + 1 + c}}{2}$$

La matrice jacobienne pour le point P_2^*

$$DF(P_2^*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3(-b + \sqrt{-4ca + b^2})^2}{4c} + \frac{b(-b + \sqrt{-4ca + b^2})}{c} + a & d \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{cd + \sqrt{c^2d^2 - 2\sqrt{-4ca + b^2}bc - 8ac^2 + 2b^2c - 2c^2d + c^2 + c}}{2c},$$

$$e_2 = -\frac{-cd + \sqrt{c^2d^2 - 2\sqrt{-4ca + b^2}bc - 8ac^2 + 2b^2c - 2c^2d + c^2 - c}}{2c}.$$

La matrice jacobienne pour le point P_3^*

$$J(P_2^*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3(b - \sqrt{-4ca + b^2})^2}{4c} - \frac{b(b - \sqrt{-4ca + b^2})}{c} + a & d \end{bmatrix}$$

Exemple numérique

Pour $a = 0.5$, $b = a$, $c = -1$, $d = 0$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = 0.5x_k + 0.5x_k^2 - x_k^3. \end{cases}$$

Les points fixes et leur nature sont déterminés comme suit :

- Le point fixe $P_1^* = (0, 0)$: c'est un point selle, car les valeurs propres de la matrice jacobienne sont $\lambda_1 = -0.366025403784439$ (avec $-1 < \lambda_1 < 0$) et $\lambda_2 = 1.36602540378444$ (avec $\lambda_2 > 1$).
- Le point fixe $P_2^* = (-0.5, 0)$: c'est un foyer stable, avec des valeurs propres de module $|\lambda_1 \approx 0.50 + i 0.70710| = |\lambda_2 \approx 0.50 - i 0.70710| = 0.866025403784439$.
- Le point fixe $P_3^* = (-1, 0)$: c'est un foyer instable, avec des valeurs propres de module $|\lambda_1 \approx 0.50 + i 1.11800| = |\lambda_2 \approx 0.50 - i 1.11800| = 1.22474487139159$.

2.6

Bifurcations

Lorsque le système dynamique dépend continûment d'un ou de plusieurs paramètres, la variation de ces paramètres peut entraîner des changements qualitatifs dans l'espace, tels que l'apparition ou la disparition des singularités, le changement de stabilité d'une singularité, le changement de type de singularités ; etc ... ces changements qualitatifs s'appellent bifurcations. Une bifurcation est donc un changement qualitatif ou quantitatif dans la dynamique d'un système lors d'un changement des valeurs du paramètre : Autrement dit ; Soit $\{f_c(x)\}$ une famille de fonctions paramètres. Alors, il y a une bifurcation en c^* s'il existe $\epsilon > 0$ telle que si a et b satisfont $c^* - \epsilon < a < c^*$ et $c^* < b < c^* + \epsilon$, alors la dynamique de f_a est différente de celle de f_b . En d'autres termes, la dynamique de la fonction f_c change lorsque la valeur du paramètre c traverse le point c^* .

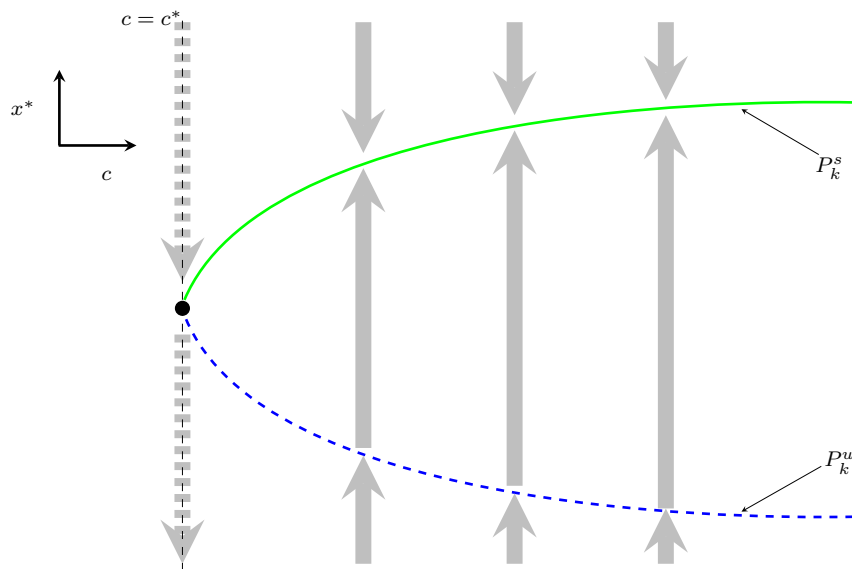


FIGURE 2.13 – Schémas illustrant une bifurcation fold ou nœud-col ($\lambda = +1$).

On expose dans ce paragraphe quelques bifurcations fondamentales, dans le cas des transformations unidimensionnelles et bidimensionnelles.

2.6.1 Bifurcation fold (noeud-col)

Une bifurcation nœud-col se produit lorsque, pour une valeur critique $c = c^*$, deux points fixes (ou cycles d'ordre k) — l'un stable (P_k^s), l'autre instable (P_k^u) — apparaissent ou disparaissent lors de la variation de c . Au seuil de bifurcation, les deux points fixes (cycles) sont confondus en un point fixe (ou cycle d'ordre k) qui possède un multiplicateur $\lambda = 1$. Cette bifurcation est illustrée sur la Figure 2.13.

Théorème 2.7 ([41, 42]). *Soit x^* un point k périodique du système (2.1). On note λ un multiplicateur de $DF(x^*)$. Une bifurcation nœud-col se produit en (x^*, μ^*) si :*

1. $\lambda = 1$ (multiplicateur critique).
2. $\frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{\mu^*} \neq 0$ (condition de transversalité).
3. La dérivée seconde vérifie $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\mu^*} \neq 0$ (non-dégénérescence).

Alors, deux branches de points fixes (l'une stable, l'autre instable) apparaissent ou disparaissent lors du passage de μ par μ^* .

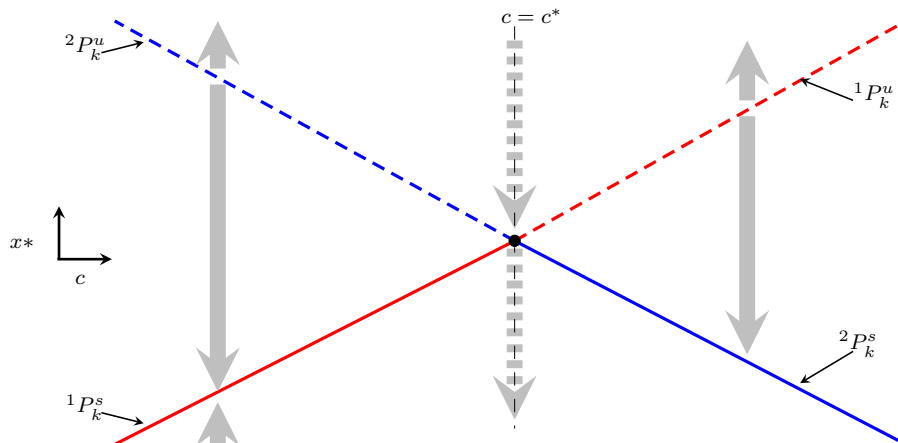


FIGURE 2.14 – Ce schéma montre le scénario d'une bifurcation transcritique ($\lambda = +1$) : Deux points fixes; un stable et l'autre instable s'échangent leur stabilité au point de bifurcation $c = c^*$.

2.6.2 Bifurcation transcritique ou échange de stabilité

Une bifurcation transcritique correspond à l'interaction de deux points fixes (ou cycles d'ordre k) de stabilités opposées. Pour $c = c^*$, ils se rencontrent en un seul point fixe (cycle) de type col, avec un multiplicateur $\lambda = 1$. Lorsque c traverse c^* , les deux points fixes (cycles) se séparent à nouveau en échangeant leurs stabilités respectives. Voir Figure 2.14 pour une illustration.

Théorème 2.8 ([42, 43]). *Soit x^* un point k périodique du système (2.1). Une bifurcation transcritique a lieu en (x^*, μ^*) si :*

1. $\lambda = 1$;
2. $\frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{\mu^*} = 0$ (annulation du terme linéaire en μ) ;
3. $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \Big|_{\mu^*} \neq 0$;
4. $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x^2} \Big|_{\mu^*} \neq 0$.

Lorsque μ traverse μ^ , les deux points fixes se rencontrent, se confondent en un point de type col, puis se séparent en échangeant leurs stabilités.*

2.6.3 Bifurcation fourche ou supercritique

La bifurcation fourche est un mécanisme par lequel un point fixe (ou cycle d'ordre k) P_k^s , stable pour $c < c^*$ (ou $c > c^*$), change de stabilité lorsque le paramètre c franchit la valeur critique c^* , avec un multiplicateur $\lambda = 1$. À la bifurcation, deux nouveaux points fixes (ou cycles d'ordre k) notés ${}^1P_k^s$ et ${}^2P_k^s$ apparaissent, symétriques, et conservent la même stabilité que le point fixe originel avant la bifurcation. Cette bifurcation est représentée sur la Figure 2.15.

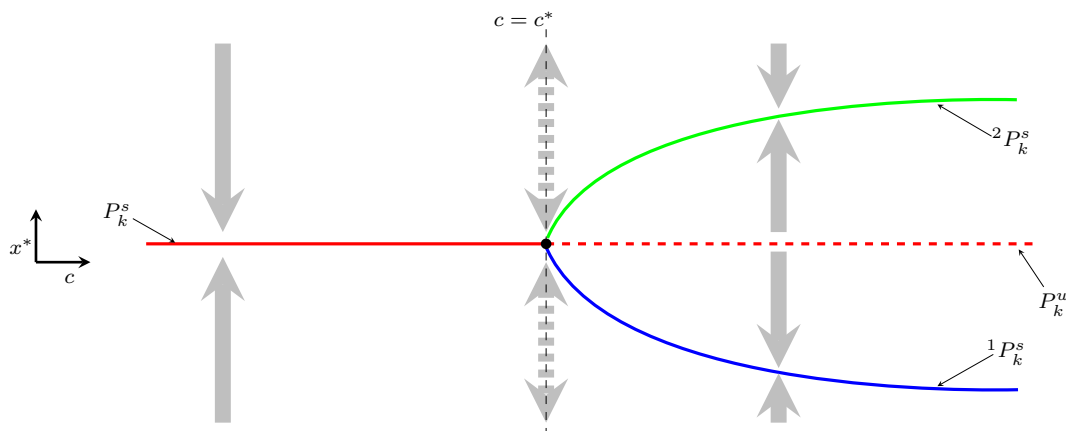


FIGURE 2.15 – Bifurcation fourche ($\lambda = +1$). Deux k -cycles naissent stables par la déstabilisations d'un k -cycle stable.

Théorème 2.9 ([43, 44]). Soit x^* un point k périodique du système (2.1) avec une symétrie impaire (F impaire en x). Une bifurcation fourche supercritique se produit en (x^*, μ^*) si :

1. $\lambda = 1$;
 - a) $\left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{\mu^*} = 0$;
 - b) $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right|_{\mu^*} \neq 0$;
 - c) $\left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_{\mu^*} < 0$ (cas supercritique).

Deux nouveaux points fixes stables et symétriques apparaissent tandis que le point fixe originel devient instable. Dans le cas sous-critique (> 0), les deux branches émergentes sont instables.

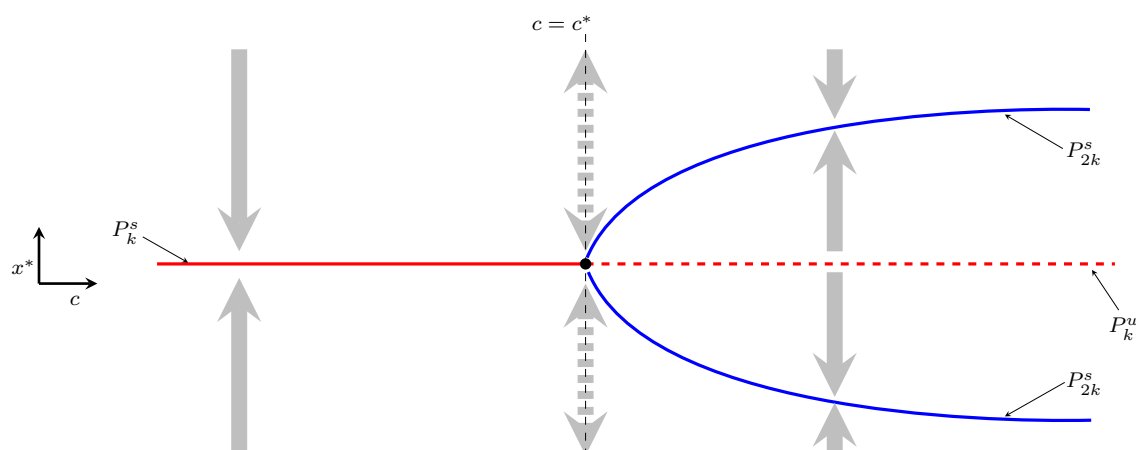


FIGURE 2.16 – Schéma de bifurcation de doublement de période (bifurcation flip).

2.6.4 Bifurcation flip ou doublement période

Un point fixe (resp. cycle d'ordre k) de type nœud subit une bifurcation flip lorsque l'un de ses multiplicateurs vaut $\lambda = -1$ à la valeur critique $c = c^*$. Ce point fixe (resp. cycle d'ordre k) change alors de stabilité et donne naissance à un cycle d'ordre 2 (resp. cycle d'ordre $2k$) dont la stabilité est celle du point fixe (resp. cycle) originel avant la bifurcation. Voir Figure 2.16.

Théorème 2.10 ([45, 46, 43]). *Soit x^* un point k périodique du système (2.1) de type nœud. Une bifurcation flip se produit en (x^*, μ^*) si :*

1. $\lambda = -1$;
2. $\frac{\partial}{\partial \mu} (DF(x^*)) \Big|_{\mu^*} \neq 0$ (transversalité) ;
3. Les conditions de non-dégénérescence de Schwarz [50] :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\mu^*} \neq 0, \quad \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{\mu^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\mu^*} \right)^2 \neq 0.$$

Alors, un cycle d'ordre 2 (resp. $2k$ pour un cycle d'ordre k) naît autour du point fixe (resp. du cycle) avec la même stabilité que ce dernier avant bifurcation.

2.6.5 Bifurcation de Neimark-Hopf

Soit un point fixe (ou cycle d'ordre k) de type foyer, dont les multiplicateurs sont complexes conjugués $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \rho e^{i\theta}$. Une bifurcation de Neimark-Hopf se produit lorsque,

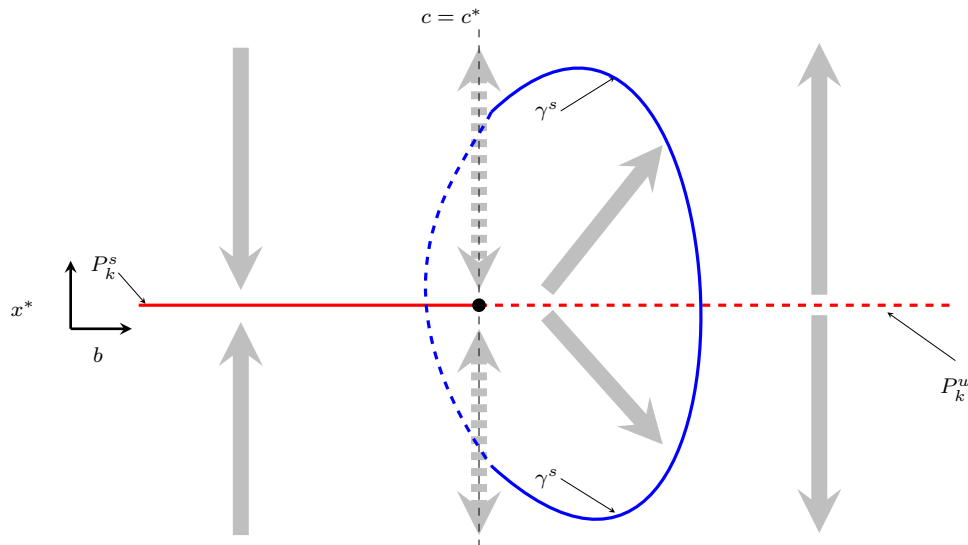


FIGURE 2.17 – Bifurcation de Neimark ($\lambda_{1,2} = \{e^{\pm i\theta} \neq \pm 1, \theta \in \mathbb{R}\}$). Ici, le paramètre c est fixé à la valeur critique c^* .

pour $c = c^*$, on a $\rho = 1$ et $\theta \neq 0, \pi$, avec la condition de transversalité $\frac{d\rho}{dc} \neq 0$. À cette valeur critique, le point fixe (ou cycle) change de stabilité et une courbe fermée invariante (tore invariant) émerge, dont la stabilité est celle du point fixe (ou cycle) avant bifurcation. Cette bifurcation est illustrée sur la Figure 2.17.

Théorème 2.11 ([42, 46, 47]). Soit x^* un point k périodique du système (2.1) en dimension $n \geq 2$, de type foyer. Soient $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta}$ les multiplicateurs critiques. Une bifurcation de Neimark-Hopf a lieu en (x^*, μ^*) si :

1. $\rho = 1$ et $\theta \neq 0, \pi$ (multiplicateurs complexes sur le cercle unité, hors racines réelles) ;
2. $\left. \frac{d\rho}{d\mu} \right|_{\mu^*} \neq 0$ (condition de transversalité) ;
3. $e^{ik\theta} \neq 1$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ (absence de résonances fortes).

Exemple 2.10. Considérons un système discret dans \mathbb{R}^2 donné par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, \mu) = x_n - x_n^2 - y_n + \mu \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n, \mu) = \frac{x_n}{2} \end{cases}$$

où μ est un paramètre de contrôle.

Points fixes

Les points fixes du système sont obtenus en résolvant :

$$\begin{cases} x = x + \mu - x^2 - y, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \mu - x^2 - y = 0, \\ \frac{x}{2} - y = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

En remplaçant y par $\frac{x}{2}$, nous obtenons l'équation :

$$\mu - x^2 - \frac{x}{2} = 0. \quad (2.24)$$

Les solutions sont données par :

$$x_1^* = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16\mu}}{4}, \quad y_1^* = \frac{x_1^*}{2}. \quad (2.25)$$

$$x_2^* = \frac{-1 - \sqrt{1 + 16\mu}}{4}, \quad y_2^* = \frac{x_2^*}{2}. \quad (2.26)$$

Les points fixes existent donc uniquement si $\mu \geq -\frac{1}{16}$.

Stabilité

La stabilité des points fixes peut être analysée en calculant la matrice jacobienne du système :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\det \begin{bmatrix} 1 - 2x - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (2.27)$$

Ce qui donne :

$$(1 - 2x - \lambda)(-\lambda) + 1 = 0. \quad (2.28)$$

D'où :

$$\lambda^2 - (1 - 2x)\lambda - 1 = 0. \quad (2.29)$$

Les solutions sont :

$$\lambda_{\pm} = \frac{(1 - 2x) \pm \sqrt{(1 - 2x)^2 + 4}}{2}. \quad (2.30)$$

En évaluant cette matrice aux points fixes, on peut déterminer leur stabilité en fonction des valeurs propres.

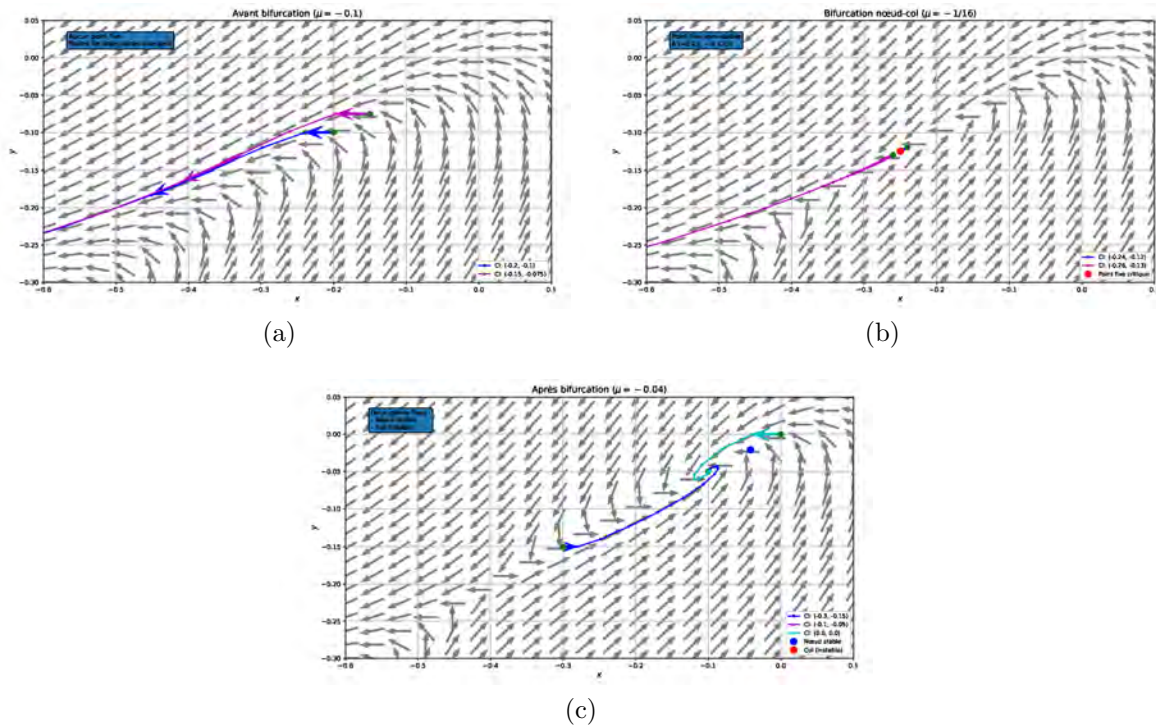


FIGURE 2.18 – Bifurcation nœud-col : (a) Pour $\mu = -0.1$ (avant bifurcation), les trajectoires divergent : on utilise des conditions initiales (CI) proches de l'origine. (b) Pour $\mu = \mu^*$, on se concentre autour du point fixe semi-stable $(-0.25, -0.125)$. (c) Pour $\mu = -0.04$ (après bifurcation), un nœud stable $(-0.1, -0.05)$ (bleu) et un Col instable $(-0.4, -0.2)$ (rouge) apparaissent.

Bifurcation fold

Lorsque $\mu = -\frac{1}{4}$, les deux points fixes se confondent en un seul point $(x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Pour $\mu < -\frac{1}{4}$, il n'y a plus de points fixes réels. Cette disparition/apparition de points fixes correspond à une bifurcation de type fold (ou nœud-col).

Conclusion

Ce système discret présente une bifurcation de type fold lorsque $\mu = \mu^* = -\frac{1}{4}$, où deux points fixes (un stable et un instable) se confondent et disparaissent pour $\mu < \mu^*$. Ce comportement est caractéristique des bifurcations fold dans les systèmes dynamiques discrets voir Figure 2.18-2.19.

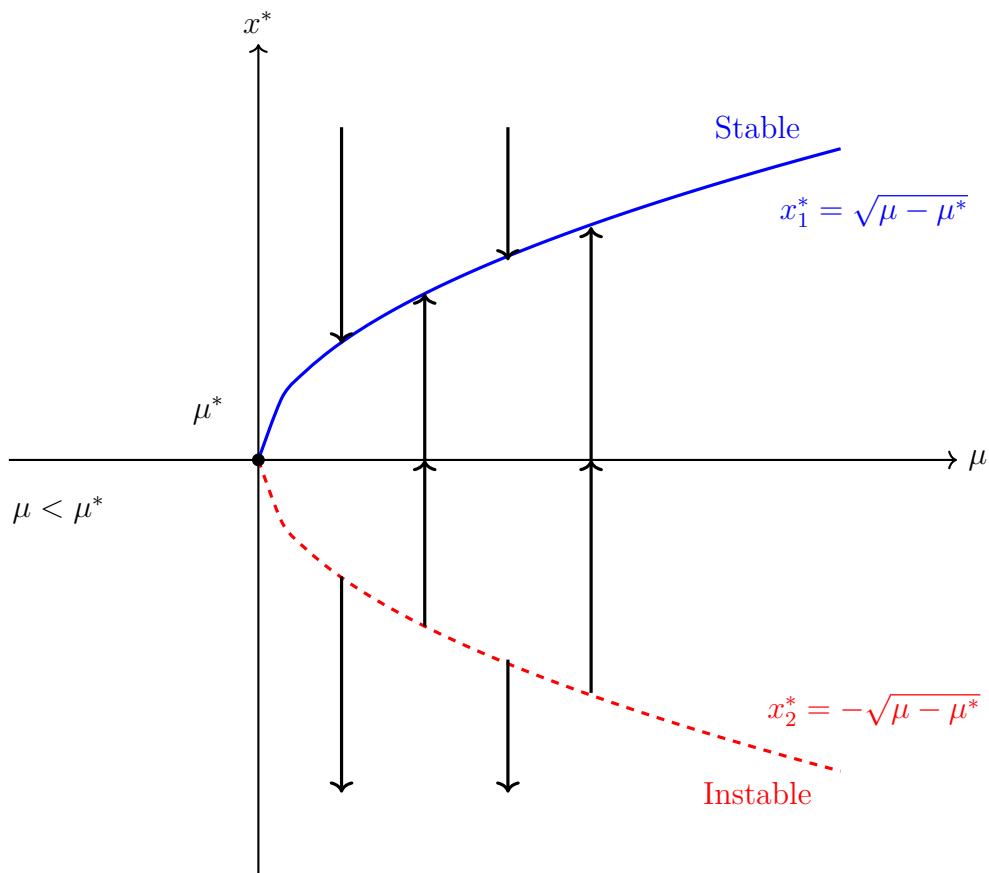


FIGURE 2.19 – Diagramme de bifurcation nœud-col : deux points fixes apparaissent pour $\mu > \mu^*$.

Considérons le système discret suivant dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mu x_n - x_n^2 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n \end{cases}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le paramètre de contrôle.

Points fixes

Les points fixes (x^*, y^*) satisfont

$$\begin{cases} x^* = \mu x^* - (x^*)^2 \\ y^* = \frac{1}{2} y^* \end{cases}$$

Les solutions du système précédent sont

- Point fixe $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ pour tout μ ,
- Point fixe $(x_2^*, y_2^*) = (\mu - 1, 0)$ pour tout μ .

Analyse de stabilité

La matrice jacobienne du système est :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

— Stabilité de $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{Valeurs propres : } \lambda_1 = \mu, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

- Stable pour $|\mu| < 1$,
- Instable pour $|\mu| > 1$.

— Stabilité de $(x_2^*, y_2^*) = (\mu - 1, 0)$

$$J(\mu - 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 - \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{Valeurs propres : } \lambda_1 = 2 - \mu, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

- Stable pour $|2 - \mu| < 1$ (i.e., $1 < \mu < 3$),
- Instable pour $|2 - \mu| > 1$ (i.e., $\mu < 1$ ou $\mu > 3$).

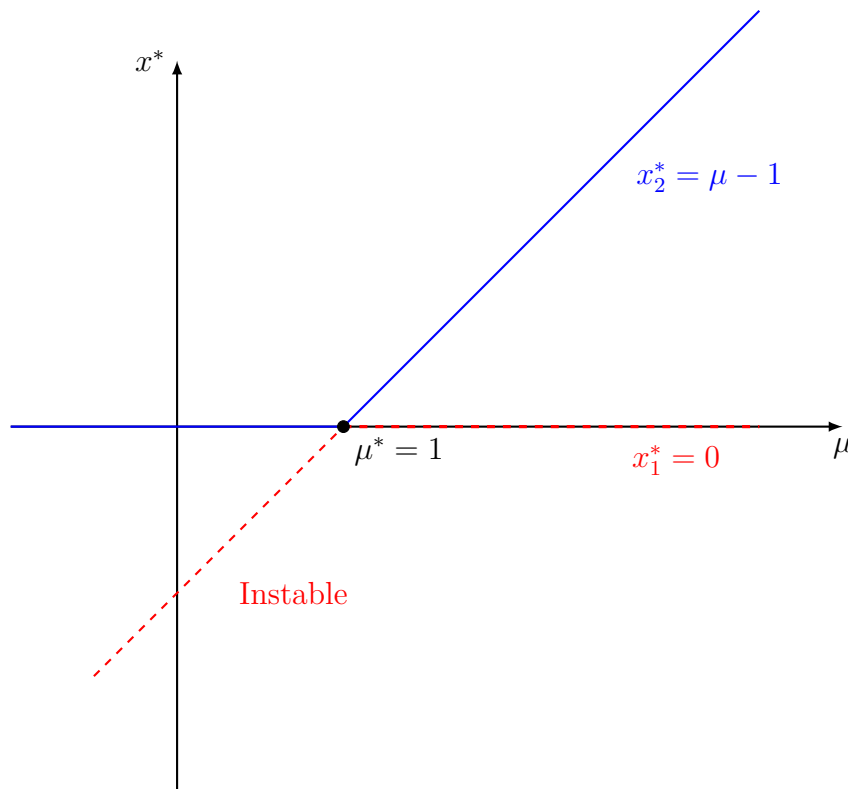
Bifurcation transcritique ($s = +1$)

— Comportement selon μ

- Pour $\mu < 1$:
 - $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ stable,
 - $(x_2^*, y_2^*) = (\mu - 1, 0)$ instable.
- À $\mu = 1$:
 - Les points fixes coïncident en $(0, 0)$,
 - Valeur propre dominante : $\lambda_1 = \mu = 1$ ($s = +1$).
- Pour $\mu > 1$:
 - $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ instable,
 - $(x_2^*, y_2^*) = (\mu - 1, 0)$ stable ($1 < \mu < 3$).

Exemple 2.11. Considérons le système dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x_{n+1} = rx_n - x_n^3 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \end{cases}$$

FIGURE 2.20 – Diagramme de bifurcation transcritique ($S = 1$).

où $r \in \mathbb{R}$ est le paramètre de contrôle.

Points fixes

Solutions de $x^* = rx^* - (x^*)^3$ et $y^* = \frac{1}{2}y^*$:

- Point fixe trivial : $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0) \forall r \in \mathbb{R}$.
- Points non-triviaux : $(x_{2,3}^*, y_{2,3}^*) = (\pm\sqrt{r-1}, 0)$ pour $r \geq 1$

Stabilité

Matrice jacobienne :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} r - 3x^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- En $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$
Valeurs propres : $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$
 - $r < 1$: stable,
 - $r > 1$: instable.
- En $(x_{2,3}^*, y_{2,3}^*) = (\pm\sqrt{r-1}, 0)$
Valeurs propres : $\lambda_1 = -2r + 3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$
 - $1 < r < 2$: stable,

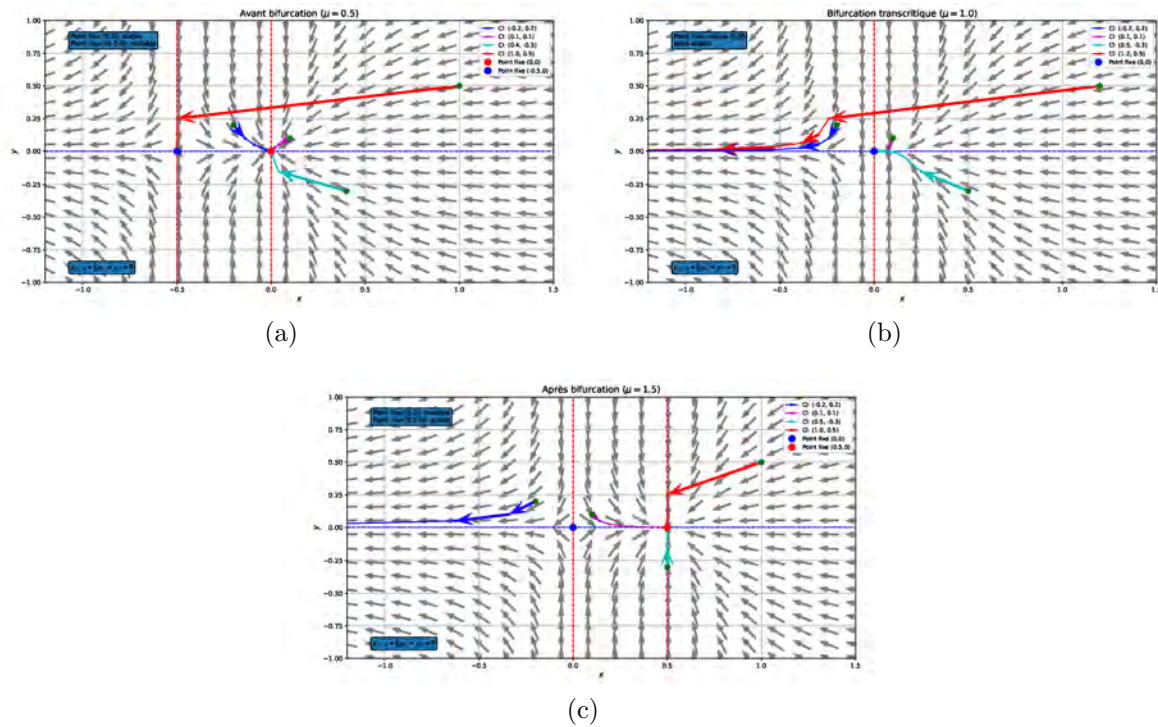


FIGURE 2.21 – Bifurcation transcritique ou échange de stabilité : (a) Système avant la bifurcation transcritique ($\mu = \frac{1}{2} < \mu^* = 1$) : Point fixe stable à $(0,0)$ et instable à $(-0.5, 0)$. (b) Pour $\mu = \mu^*$, les points fixes coïncident en $(0,0)$. (c) Pour $\mu = 1.5 > \mu^*$ (après bifurcation), échange de stabilité, $(0,0)$ instable et $(0.5, 0)$ stable.

○ $r > 2$: instable.

Exemple 2.12. Considérons le système discret suivant dans \mathbb{R}^2 :

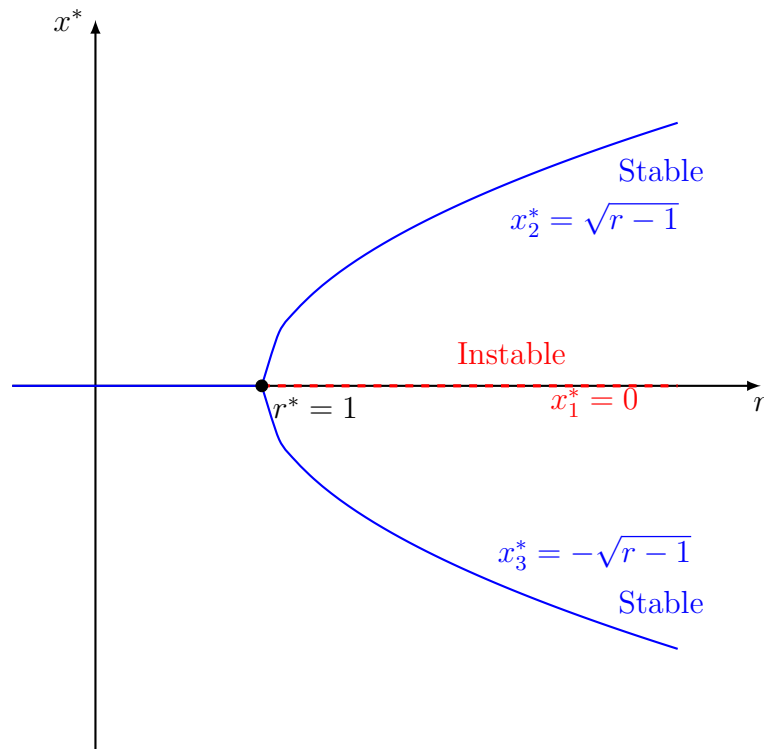
$$\begin{cases} x_{n+1} = -(1 + \mu)x_n + x_n^3 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \end{cases}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le paramètre de contrôle.

— Points fixes

Les points fixes (x^*, y^*) satisfont :

$$\begin{cases} x^* = -(1 + \mu)x^* + (x^*)^3 \\ y^* = \frac{1}{2}y^* \end{cases}$$

FIGURE 2.22 – Bifurcation fourche supercritique ($\lambda = +1$).

Solutions :

- Point fixe $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

— Analyse de stabilité

La matrice jacobienne du système est :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - \mu + 3x^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Stabilité de $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 - \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{Valeurs propres : } \lambda_1 = -1 - \mu, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

- Stable pour $|-1 - \mu| < 1$ (i.e., $-2 < \mu < 0$),
- Instable pour $|\mu| > 0$.

— Bifurcation flip ($S = -1$), voir Figures 2.24-2.25.

- Comportement selon μ ,
- Pour $\mu < 0$:
 - $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ stable.

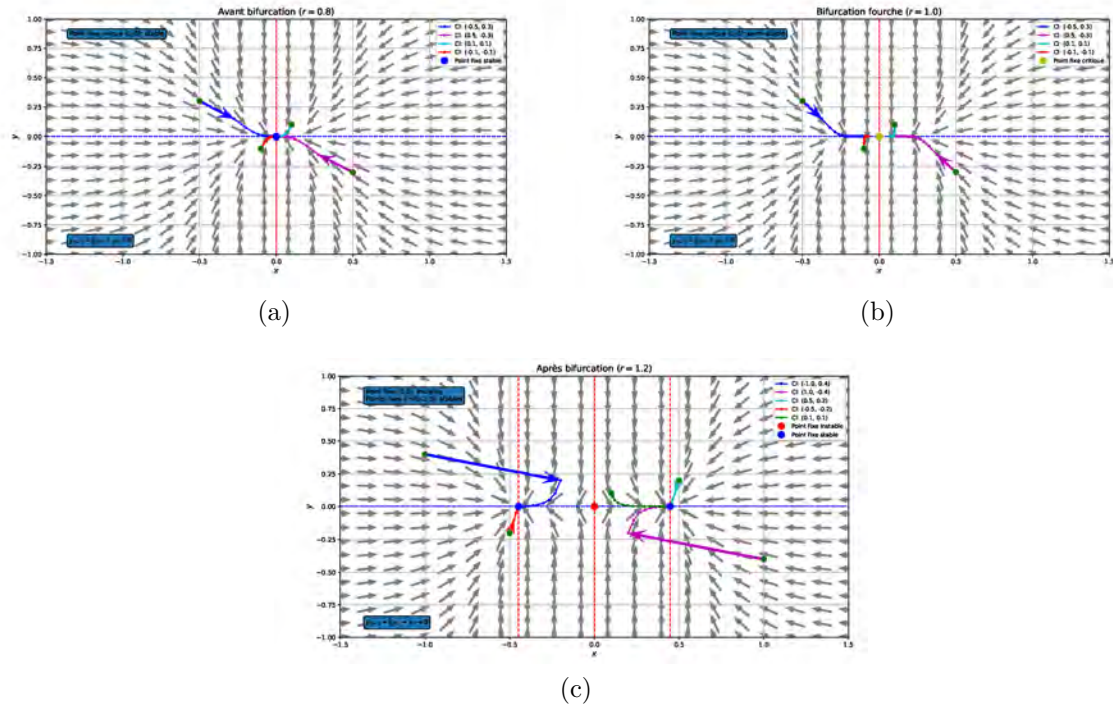


FIGURE 2.23 – Bifurcation fourche ou supercritique : (a) Système avant la bifurcation transcritique ($r = \frac{1}{2} < r^* = 1$) : Point fixe stable à $(0, 0)$ et instable à $(-0.5, 0)$. (b) Pour $\mu = \mu^*$, les points fixes coïncident en $(0, 0)$. (c) Pour $r = 1.5 > r^*$ (après bifurcation), échange de stabilité, $(0, 0)$ instable et $(0.5, 0)$ stable.

- À $\mu = 0$:
 - Valeur propre dominante : $\lambda_1 = -1$ ($S = -1$) ,
 - Perte de stabilité .
- Pour $\mu > 0$:
 - $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ instable.
 - Apparition d'un cycle de période 2 stable :

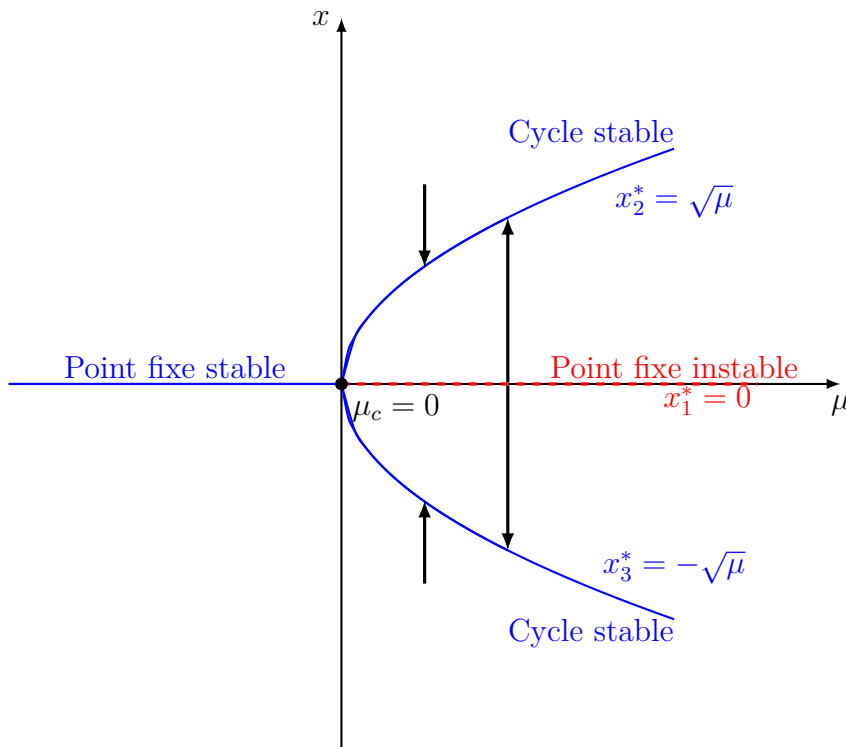
$$(x_1^*, y_1^*) = (\sqrt{\mu}, 0) \rightarrow (x_2^*, y_2^*) = (-\sqrt{\mu}, 0) \rightarrow (\sqrt{\mu}, 0) .$$

— Stabilité du cycle de période 2

Le multiplicateur du cycle est :

$$\Lambda = [f'(\sqrt{\mu}) \cdot f'(-\sqrt{\mu})] = (-1 + 2\mu)^2 .$$

- Stable pour $0 < \mu < 1$ ($|\Lambda| < 1$) ,
- Instable pour $\mu > 1$.

FIGURE 2.24 – Diagramme de bifurcation flip ($\lambda = -1$).

Exemple 2.13. Considérons le système discret suivant dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 + \mu)(x_n \cos \beta - y_n \sin \beta) - (x_n^2 + y_n^2)(x_n \cos \beta - y_n \sin \beta) \\ y_{n+1} = (1 + \mu)(x_n \sin \beta + y_n \cos \beta) - (x_n^2 + y_n^2)(x_n \sin \beta + y_n \cos \beta) \end{cases}$$

où :

- $\mu \in \mathbb{R}$ est le paramètre de contrôle,
- $\beta = \frac{\pi}{4}$ (angle fixe).
- Points fixes

Le seul point fixe est l'origine :

$$P_0 = (0, 0) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

- Analyse de stabilité

La matrice jacobienne en $(0, 0)$ est :

$$DF(0, 0) = (1 + \mu) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = (1 + \mu)R(\beta)$$

où $R(\beta)$ est la matrice de rotation d'angle β .

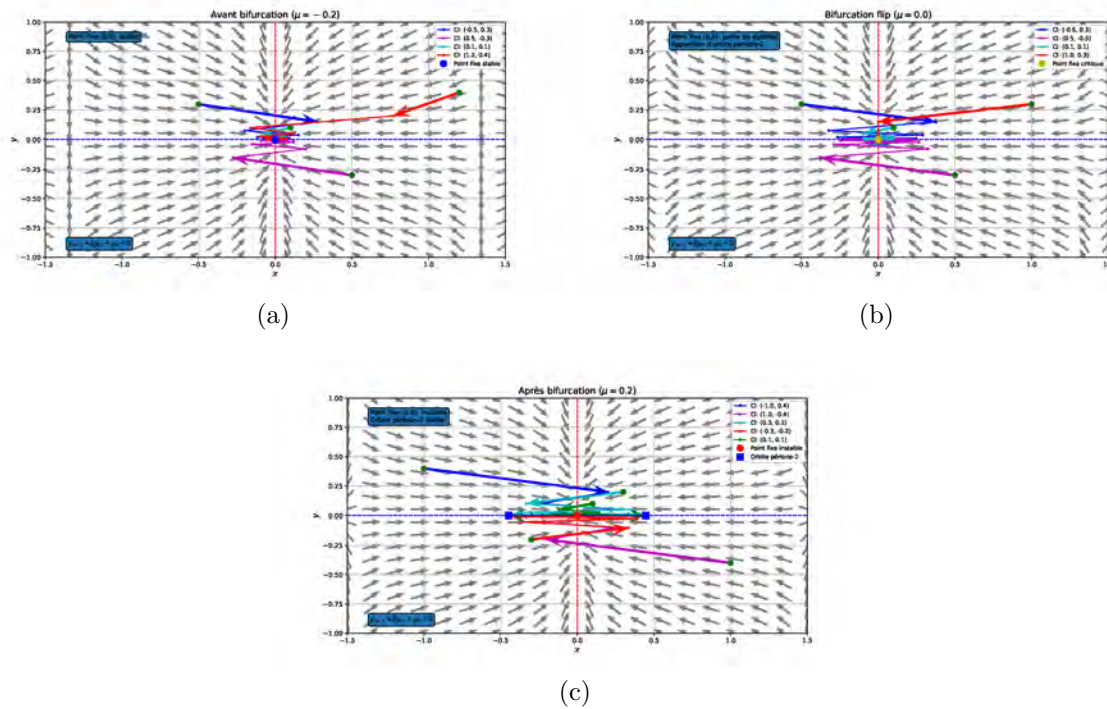


FIGURE 2.25 – Bifurcation flip ou doublement période : (a) $\mu < \mu^* = 0$: Le point fixe $(0,0)$ est stable (attracteur). $\mu = \mu^*$: $(0,0)$ devient instable et apparition d'une orbite de période 2. $\mu = 0.2 > \mu^*$: $(0,0)$ reste instable et un orbite de période 2 stable $(\pm\mu, 0)$ apparaît.

o Valeurs propres

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_{\pm} = (1 + \mu)e^{\pm i\beta}$$

Leur module est :

$$|\lambda_{\pm}| = |1 + \mu|$$

— Comportement selon μ

o Pour $-2 < \mu < 0$: $|\lambda_{\pm}| < 1$, donc P_0 est stable.

o Pour $\mu = 0$: $|\lambda_{\pm}| = 1$, bifurcation ($\rho = 1$).

o Pour $\mu > 0$: $|\lambda_{\pm}| > 1$, donc P_0 est instable.

— Bifurcation de Neimark-Hopf ($\rho = 1$), voir Figures 2.26-2.27.

o Apparition d'un cycle limite

Pour $\mu > 0$, un cercle invariant stable apparaît :

$$x^2 + y^2 = \mu$$

o Stabilité du cycle limite

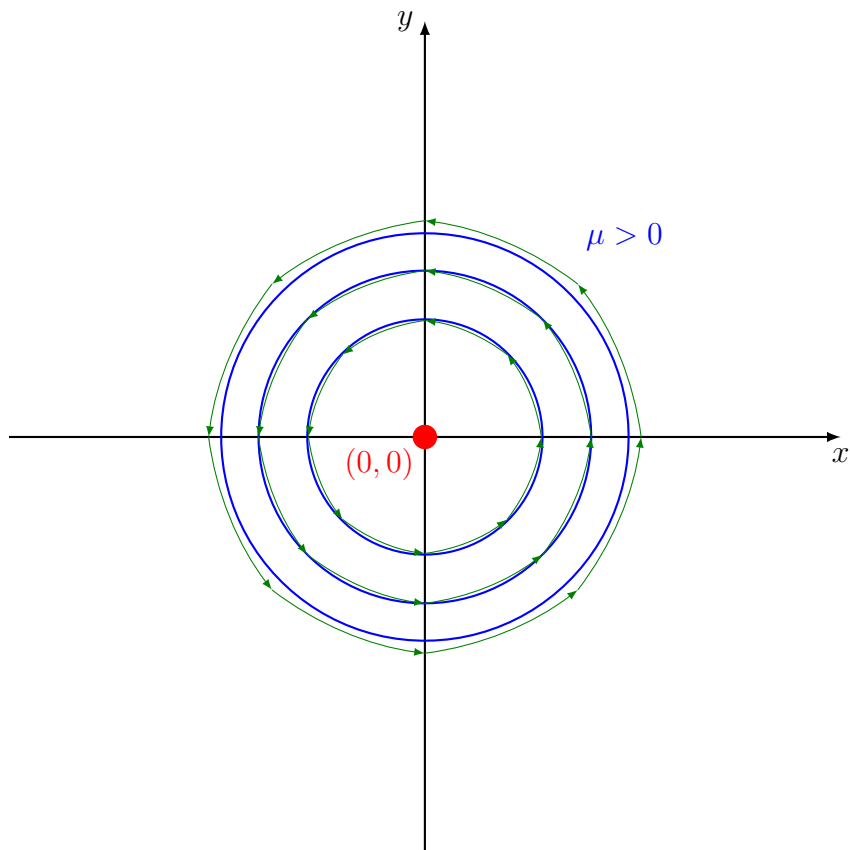


FIGURE 2.26 – Portrait de phase pour $\mu > 0$ (cycles limites stables)

Le cycle limite est attractif (bifurcation supercritique) car le coefficient du terme cubique est négatif.

- Remarque 2.4.*
- La bifurcation est supercritique (cycle stable apparaît),
 - Le paramètre β contrôle la vitesse de rotation,
 - Pour $\mu < 0$, toutes les trajectoires convergent vers $(0, 0)$,
 - Pour $\mu > 0$, $(0, 0)$ est répulsif, le cycle limite est attractif .

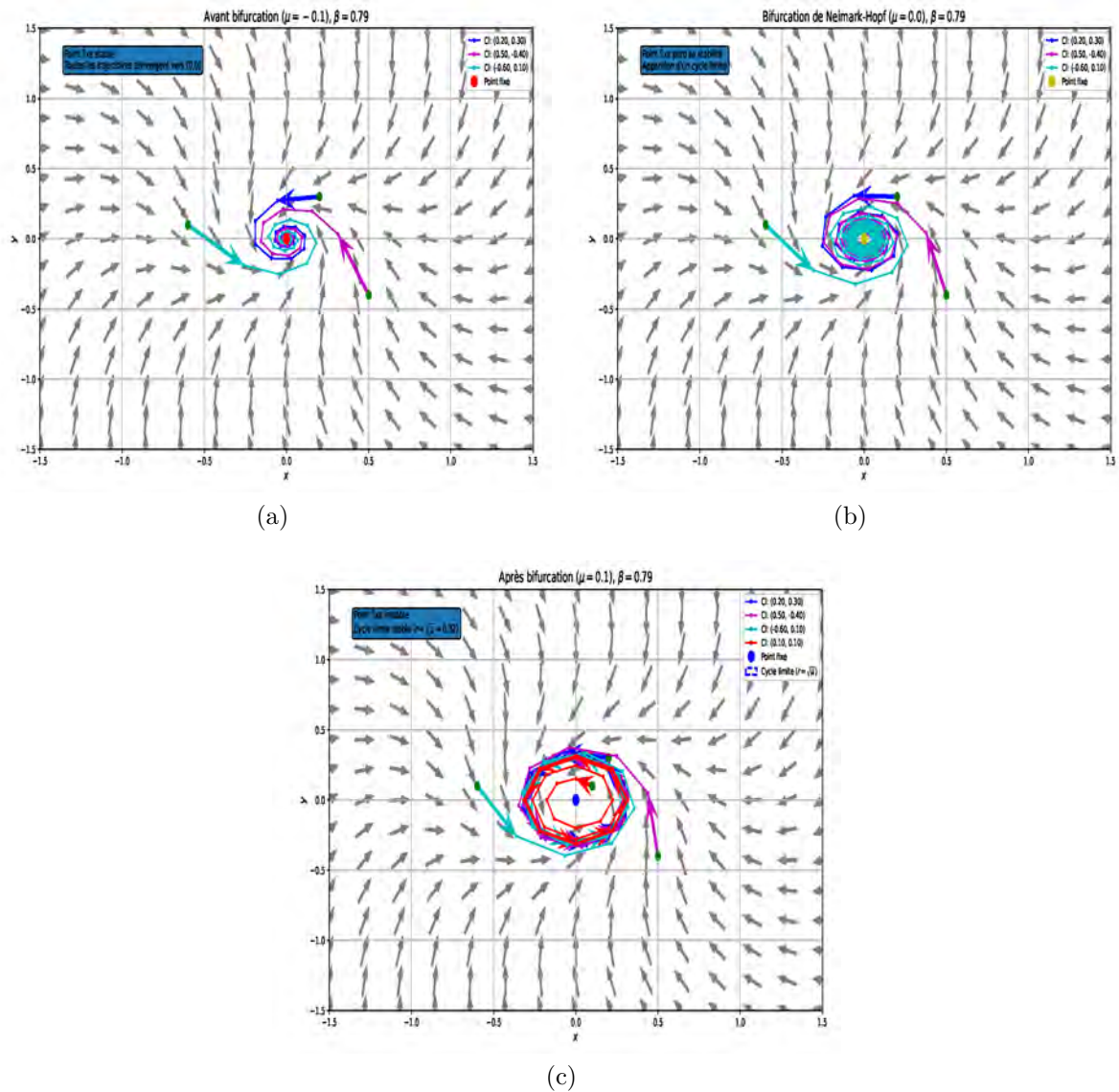


FIGURE 2.27 – Bifurcation de Neimark-Hopf : (a) Avant bifurcation ($\mu = -0.1 < \mu^* = 0.0$) : Toutes les trajectoires convergent vers $(0,0)$. (b) A la bifurcation ($\mu = \mu^*$) : $(0,0)$ est semi-stable, les trajectoires près de zéro convergent, mais plus lentement et apparition d'un comportement critique. (c) Après bifurcation ($\mu = 0.2 > \mu^*$) : $(0,0)$ devient répulsif et un cycle limite (courbe fermée invariante) attractif apparaît.



Christian Mira (1930 – 2021) était un mathématicien français, spécialiste reconnu des systèmes dynamiques discrets et de leurs applications, en particulier dans le domaine de la modélisation et des équations aux différences non linéaires. Professeur émérite à l'Université Paul Sabatier (Toulouse III), il a consacré l'essentiel de sa carrière à l'étude des applications itératives non linéaires en dimension un et deux, avec un intérêt marqué pour les phénomènes de bifurcation, de chaos et pour les modèles issus des sciences appliquées.

Christian Mira a joué un rôle central dans le développement de la recherche française en systèmes dynamiques discrets à partir des années 1970. Il a publié de nombreux travaux sur la dynamique des équations aux différences, le comportement des itérations de fonctions quadratiques, les attracteurs étranges, et les cartes bidimensionnelles (y compris les généralisations de la transformation de Hénon). Il est également l'auteur ou le co-auteur de plusieurs ouvrages et monographies, dont certains sont devenus des références dans le domaine, et a contribué à faire le lien entre la théorie mathématique et les applications en physique, biologie et ingénierie. Reconnu comme un pédagogue passionné, il a encadré de nombreux doctorants et participé à la structuration de l'école française de dynamique discrète. Ses travaux restent une référence pour l'étude qualitative des systèmes itératifs et des bifurcations dans les modèles discrets.

III

Les Systèmes Chaotiques

Pendant des siècles, le chaos fut perçu comme l'antithèse de l'ordre, synonyme de désordre absolu, opposé à l'harmonie supposée régir l'univers. Jusqu'au XIX^e siècle, la pensée scientifique, héritée de la physique classique de Newton (1642-1727) et de Laplace (1749-1827), reposait sur l'idée d'un cosmos parfaitement déterministe : connaître l'état exact d'un système à un instant donné permettrait, en principe, de reconstituer son passé et de prédire son futur avec certitude.

Cette vision fut ébranlée au début du XX^e siècle par Henri Poincaré (1854-1912). En étudiant le problème des trois corps célestes, il montra que l'introduction d'une troisième masse engendrait une sensibilité extrême aux conditions initiales : de minuscules écarts dans les positions ou vitesses conduisent à des trajectoires orbitales radicalement différentes. Ce comportement, absent dans le système à deux corps parfaitement intégrable, annonçait la notion moderne de chaos.

L'une des confusions les plus tenaces concerne la distinction entre chaos et aléatoire. Dans l'intuition commune, un phénomène imprévisible serait simplement trop complexe pour être décrit de façon exhaustive, et relèverait alors d'une approche probabiliste. Or, un système chaotique, bien que semblant aléatoire, obéit à des lois parfaitement déterministes : ses équations, souvent non linéaires, fixent sans ambiguïté l'évolution de l'état du système. L'imprédictibilité naît non pas d'un hasard intrinsèque, mais de la "dépendance sensitive aux conditions initiales".

Cette propriété fut mise en évidence en 1963 par le météorologiste Edward Lorenz [28], à partir d'un modèle atmosphérique réduit à trois équations différentielles. Ses simulations numériques révélèrent qu'une variation de l'ordre de 10^{-7} sur les données initiales suffisait à produire des scénarios météorologiques radicalement différents. Cette découverte popularisa la métaphore de « l'effet papillon » : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil

pouvant, en théorie, déclencher une tornade au Texas.

Aujourd'hui, on définit un système chaotique déterministe non linéaire par :

- Une dépendance sensitive aux conditions initiales (exposants de Lyapunov positifs)
- Une imprédictibilité à long terme, malgré des règles d'évolution exactes
- Une mixité topologique (orbites densément entrelacées dans l'espace des phases)

Cette révolution conceptuelle a profondément marqué des domaines variés :

- Biologie : Robert May (1976) montre que des contraintes environnementales non linéaires peuvent engendrer des fluctuations chaotiques dans la dynamique des populations [31].
- Médecine : Richard J. Cohen observe que la perte de variabilité chaotique du rythme cardiaque est corrélée à des pathologies ischémiques [22].
- Économie : William Baumol et Jess Benhabib identifient des attracteurs étranges dans certains cycles de marché, remettant en cause les modèles linéaires classiques [3].

Ainsi, le chaos n'est plus perçu comme une absence d'ordre, mais comme l'expression d'une grammaire universelle des systèmes complexes : qu'il s'agisse de réactions chimiques oscillantes, de dynamiques écologiques ou de turbulences financières, il révèle l'unité profonde de l'imprévisibilité sous des lois mathématiques rigoureuses.

3.1

La Différence Entre le Chaos et l'Aléatoire

La différence entre le chaos et l'aléatoire paraît comme le point le plus important de la compréhension du chaos. En effet, on a toujours tendance à considérer qu'un phénomène tire son imprédictibilité du nombre trop important de paramètres en jeu dans sa description. Ce qui conduit à en donner une approche probabiliste qui peut être parfaitement satisfaisante, qui garde par sa définition une certaine marge d'aléatoire.

En ce qui concerne le chaos, il n'en est rien, les systèmes chaotiques se comportent, en effet, d'une manière qui peut sembler aléatoire. Mais ce comportement est en fait décrit de manière déterministe par des équations non-linéaires parfaitement déterministes, c'est-à-dire en particulier avec des outils mathématiques qui permettent une approche précise et certaine.

3.2

Définition du Chaos

Il n'existe pas de définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature mais cependant nous savons comment l'obtenir.

Définition 3.1 (Au sens de Devaney). Soit (X, d) un espace métrique séparable et $F : X \rightarrow X$ une application continue. On considère le système dynamique discret

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Le système est dit chaotique au sens de Devaney si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

Sensibilité aux conditions initiales

Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in X$ et pour tout $\delta > 0$, il existe un point $y_0 \in X$ et un entier $k \geq 0$ vérifiant

$$d(x_0, y_0) < \delta \quad \text{et} \quad d(F^k(x_0), F^k(y_0)) > \varepsilon.$$

Transitivité topologique

L'application F est dite topologiquement transitive si, pour tous ensembles ouverts non vides $U, V \subset X$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$F^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Sous les conditions de cette définition, cette propriété est équivalente à l'existence d'au moins une orbite dense dans X .

Densité des points périodiques

L'ensemble des points périodiques de F est dense dans X .

Selon la définition de Devaney (Devaney, 2003 [13]), un attracteur $\Lambda \subset X$ est dit chaotique si la dynamique induite par F sur Λ , c'est-à-dire la restriction $F|_{\Lambda}$, est chaotique au sens de Devaney.

Toutefois, dans la pratique, l'étude des systèmes dynamiques repose le plus souvent sur des méthodes numériques, ce qui rend cette approche topologique du chaos et des attracteurs chaotiques difficilement exploitable. En particulier, la notion de dépendance sensible aux conditions initiales introduite par Devaney s'avère contraignante, dans la mesure où elle impose des conditions globales portant sur l'ensemble des points initiaux d'un

domaine donné. Par ailleurs, les deux autres propriétés constitutives de cette définition — la transitivité topologique et la densité des points périodiques — soulèvent également des difficultés d'ordre pratique, en raison de la complexité inhérente à l'analyse géométrique fine des systèmes dynamiques et de leurs attracteurs [15].

C'est pourquoi, dans le cadre de l'étude de la dynamique de l'application de Hénon, ainsi que des exemples considérés par la suite, nous n'adopterons pas la définition topologique classique du chaos ni celle de la dépendance sensible aux conditions initiales au sens de Devaney. Nous privilégierons en revanche une approche fondée sur les exposants de Lyapunov, mieux adaptée aux investigations numériques, afin de caractériser la dépendance sensible aux conditions initiales et de qualifier le caractère chaotique d'un attracteur.

Définition 3.2. Deux fonctions $F : X_1 \rightarrow X_1$ et $g : X_2 \rightarrow X_2$ sont conjuguées s'il existe une fonction bijective continue $h : X_1 \rightarrow X_2$, telle que son inverse h^{-1} est continue et $F \circ h = h \circ g$.

Théorème 3.1. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $F : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ deux applications continues. Si F est chaotique au sens de Devaney et s'il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que $h \circ F = g \circ h$, alors g est également chaotique au sens de Devaney.

Démonstration. On suppose que F est chaotique au sens de Devaney et que g est topologiquement conjuguée à F par l'homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$, c'est-à-dire $h \circ F = g \circ h$.

Transitivité topologique

Soient $U, V \subset Y$ deux ouverts non vides. Comme h est un homéomorphisme, les ensembles $h^{-1}(U)$ et $h^{-1}(V)$ sont des ouverts non vides de X . La transitivité de F implique l'existence d'un entier $n \geq 0$ tel que $F^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. En appliquant h et en utilisant la relation de conjugaison, on obtient $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$, ce qui montre que g est topologiquement transitive.

2) Densité des points périodiques

Soit $x \in X$ un point périodique de F , de période k , c'est-à-dire $F^k(x) = x$. La relation de conjugaison entraîne $g^k(h(x)) = h(F^k(x)) = h(x)$, ce qui montre que $h(x)$ est un point périodique de g de même période. Ainsi, l'image par h de l'ensemble des points périodiques de F est exactement l'ensemble des points périodiques de g . Comme h est un homéomorphisme, il préserve la densité, et les points périodiques de g sont denses dans Y .

3) Sensibilité aux conditions initiales

Puisque F est chaotique au sens de Devaney, elle possède une dépendance sensible aux conditions initiales. Or, la conjugaison topologique par un homéomorphisme préserve cette propriété qualitative (voir [13]). Il s'ensuit que g est également sensible aux conditions initiales.

En conclusion, g vérifie les trois propriétés constitutives du chaos au sens de Devaney. Elle est donc chaotique. □

Exemple 3.1. Soient X_1 et X_2 deux ensemble compacts, définis respectivement par $X_1 = [0, 1]$ et $X_2 = [-1, 1]$. Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f & : X_1 \rightarrow X_1, \\ g & : X_2 \rightarrow X_2, \\ h & : X_1 \rightarrow X_2. \end{aligned}$$

définies respectivement par

$$\begin{aligned} f(x) & = 4x(1-x), \\ g(x) & = 2x^2 - 1, \\ h(x) & = \frac{1}{2}(1-x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les fonctions f et g sont conjuguées à travers h car $f \circ h = h \circ g = 1 - x^2$. Comme f est chaotique au sens de Devaney (comme il sera précisé ultérieurement), g est également chaotique, d'après le théorème précédent.

3.3

Exposants de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux variations de leurs conditions initiales, ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions.

Le concept d'exposants de Lyapunov, comme son nom l'indique, a été initialement imaginé par Aleksandr Lyapunov dans sa thèse de doctorat *Le Problème Général de la Stabilité du Mouvement* (Lyapunov, 1892 [29]). De plus, dans sa thèse, l'une des premières définitions de la stabilité des trajectoires des systèmes dynamiques a été donnée parallèlement à l'idée des fonctions de Lyapunov.

L'exposant de Lyapunov est une mesure quantitative possible du chaos et Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases. Par ailleurs, parmi les exposants retenus pour un système donné on considère généralement l'exposant le plus élevé.

Bien que la définition de la stabilité et de la stabilité asymptotique de Lyapunov (voir Définition 2.3) permette de caractériser les trajectoires selon que les trajectoires voisines restent suffisamment proches ou sont attirées, elle ne quantifie pas précisément dans quelle mesure elles le font. Lyapunov a donc proposé le concept de *nombres caractéristiques* pour quantifier le taux exponentiel auquel une perturbation particulière d'une trajectoire augmente en distance par rapport à celle-ci. De manière informelle, étant donné une perturbation d'une trajectoire, où δ_n mesure la distance au fil du temps (supposée croître approximativement de manière exponentielle), le *nombre caractéristique* λ_c est tel que $\delta_n e^{\lambda_c n}$ ne diverge ni vers l'infini ni ne converge vers zéro (Pikovsky & Politi, 2016 [36]).

Aujourd'hui, ils sont généralement définis comme la valeur qui mesure approximativement le taux de croissance exponentielle de la distance, ce qui correspondrait à $-\lambda_c$ si λ_c est le nombre caractéristique défini par Lyapunov. Plus précisément, en utilisant la notation ci-dessus, l'exposant de Lyapunov est le nombre λ tel que $\delta_n \approx \delta_0 e^{\lambda n}$ (Pikovsky & Politi, 2016 [36]).

3.3.1 Théorème Ergodique Multiplicatif d'Oseledets

Bien que la définition originale des exposants caractéristiques par Lyapunov fournisse une intuition utile et une motivation pour leur utilisation, elle ne fournit aucune méthode directe pour les calculer et ne garantit pas leur existence. Par conséquent, nous ne les définissons pas ainsi. Cela dit, pour les systèmes dynamiques discrets définis par des applications C^1 itérés, nous pouvons obtenir des nombres similaires en nous appuyant sur le fait que, localement, l'application est bien approximée par sa linéarisation.

Supposons $F : U \rightarrow U$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ est un domaine et F est C^1 . Alors, un petit cercle centré en $x \in U$ est transformé en un ellipsoïde centré en $F(x)$ si nous approximons F par la linéarisation DF , à condition que DF soit non singulière. En particulier, le centre x du cercle est envoyé sur $F(x)$ et ses demi-axes sont étirés ou contractés le long de certaines directions. De plus, lorsque DF est diagonalisable, cet effet d'étirement (ou de contraction) est caractérisé par les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de DF . De même, les valeurs propres et vecteurs propres de DF^N donnent une approximation de la façon dont les points voisins de x sont transformés et du comportement d'expansion du système. La Figure 3.1 présente un exemple illustratif de la façon dont un cercle est

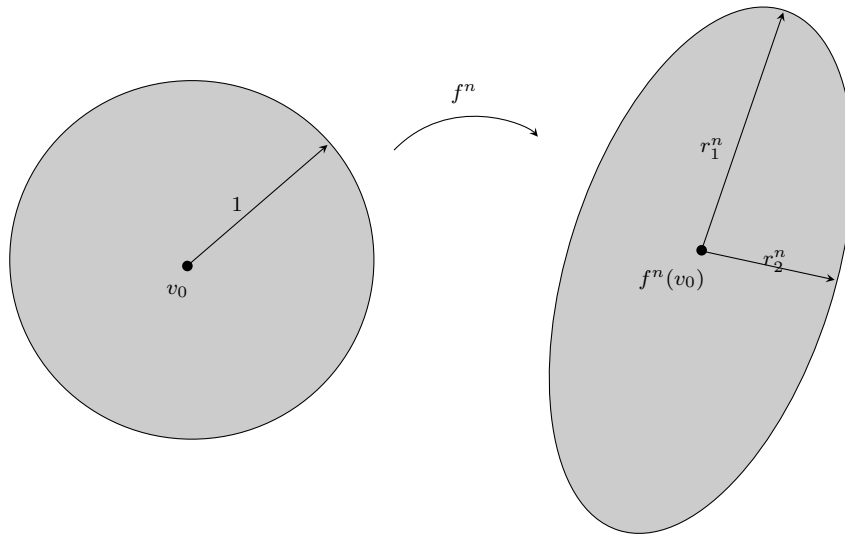


FIGURE 3.1 – Exemple montrant comment, pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 , f^n transforme un disque centré en v_0 vers un ellipsoïde centré en $f^n(v_0)$ lorsque l'on approxime f par sa linéarisation $Df^n(x)|_{v_0}$.

transformé en une ellipse par la linéarisation d'une application C^1 du plan.

3.3.1.1 Cas simplifié

Supposons, à titre d'illustration, que la linéarisation DF soit égale à une matrice constante A pour tout $x \in U$. Supposons également que toutes les valeurs propres de A soient distinctes et vérifient $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_p| > 0$ avec les vecteurs propres respectifs v_1, \dots, v_p . Alors, pour un petit $v \in \mathbb{R}^p$ avec $v = \sum_{i=1}^p c_i v_i$, nous avons

$$F^N(x+v) - F^N(x) \approx (DF^N)_x(v) = A^N v = \sum_{i=1}^p c_i \lambda_i^N v_i.$$

Où, en supposant $c_1 \neq 0$, les seconds membres tendent vers la direction correspondant à la valeur propre dominante λ_1 et, par conséquent, pour N suffisamment grand, peuvent être approximés par

$$\|F^N(x+v) - F^N(x)\| \approx \|c_1 \lambda_1^N v_1\| = e^{N \log |\lambda_1|} |c_1| \cdot \|v_1\| \propto e^{N \log |\lambda_1|} \|v\|.$$

En notant $\delta(N) = F^N(x+v) - F^N(x)$ avec $\delta_0 = v$, cela donne

$$\|\delta_N\| \propto e^{N \log |\lambda_1|} \|\delta_0\|,$$

ce qui implique que $\delta_N e^{-N \log |\lambda_1|}$ ne diverge ni ne converge vers zéro quand $N \rightarrow \infty$. Ainsi, $-\log |\lambda_i|$ correspond à la définition de l'exposant caractéristique de Lyapunov en direction de v , et donc $\log |\lambda_i|$ est l'exposant de Lyapunov en x en direction de v . L'ensemble des exposants de Lyapunov possibles en x est $\{\log |\lambda_i|\}$, où λ_i sont les valeurs propres de A .

Théorème 3.2. *Soit $F : U \rightarrow U$ une application C^1 où $U \subset \mathbb{R}^p$ est un domaine. Supposons que F définisse un système ergodique préservant une probabilité et que DF satisfasse des propriétés de régularité supplémentaires. Alors, pour presque tout $x \in U$ (le complémentaire a une mesure de Lebesgue nulle), il existe des nombres*

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_k,$$

et des sous-espaces :

$$T_x U \cong \mathbb{R}^n = V^1 \supseteq V^2 \supseteq \cdots \supseteq V^k \supseteq V^{k+1} = \{0\},$$

tels que pour tout $v \in V^i \setminus V^{i+1}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \|DF^N(v)\| = \lambda_i.$$

De plus, les nombres λ_i sont constants le long de l'orbite de x définie par F .

Cette formulation est une version simplifiée du théorème original (Filip, 2017 [17]). Un traitement formel nécessite des concepts de théorie ergodique (voir Filip, 2017 ou Viana, 2014 [17, 39]).

3.3.2 Définition des Exposants de Lyapunov

Définition 3.3 (Exposants de Lyapunov). Soit $F : U \rightarrow U$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ est un domaine et F est C^1 . Pour $x \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$, le nombre λ tel que :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \|DF^N(v)\|,$$

si la limite existe, est l'exposant de Lyapunov de x en direction de v . L'ensemble des exposants de Lyapunov possibles pour une orbite définie par $x \in U$ est appelé spectre de Lyapunov de cette orbite. Pour simplifier, on note souvent le spectre comme $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, où chaque λ_i est répété selon la multiplicité de l'espace correspondant.

Cette définition correspond à l'idée originale de Lyapunov : pour une perturbation $x + v$ avec un exposant λ , on a

$$\|F^N(x + v) - F^N(x)\| \approx \|DF^N(v)\| \propto e^{N\lambda}.$$

Les exposants de Lyapunov classifient ainsi la sensibilité aux conditions initiales le long des orbites.

3.3.2.1 Le cas $p = 1$

Soit un système dynamique discret de dimension 1, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Soient deux conditions initiales très proches, x_0 et x'_0 la trajectoire issue de la condition initiale x_0 est $x_n = f^n(x_0)$ et celle issue de la condition initiale x'_0 est $x'_n = f^n(x'_0)$. Si les trajectoires x_n et x'_n s'écartent à un rythme exponentiel après n itérations, alors

$$|x'_n - x_n| = |x'_0 - x_0| \exp(n\Lambda),$$

$\Lambda \in \mathbb{R}$ correspond au taux de divergence des deux trajectoires. Il vient

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{x'_n - x_n}{x'_0 - x_0} \right|.$$

Si l'on considère que les deux conditions initiales sont très proches, leur différence $\varepsilon = |x'_0 - x_0|$ tend vers 0 et lorsque n tend vers l'infini, il vient

$$\Lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x'_n - x_n}{x'_0 - x_0} \right|.$$

Cette relation est équivalente à

$$\Lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x'_n - x_n}{x'_{n-1} - x_{n-1}} \cdot \frac{x'_{n-1} - x_{n-1}}{x'_{n-2} - x_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{x'_1 - x_1}{x'_0 - x_0} \right|.$$

Ce qui se réécrit aussi

$$\begin{aligned} \Lambda_L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{x'_{i+1} - x_{i+1}}{x'_i - x_i} \right|, \\ \Lambda_L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{f(x'_i) - f(x_i)}{x'_i - x_i} \right|. \end{aligned}$$

Finalement, cette relation devient

$$\Lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|. \quad (3.2)$$

Le terme Λ_L est appelé exposant de Lyapunov de la trajectoire $x_n = f^n(x_0)$. Λ_L mesure le taux moyen de convergence ou divergence de deux trajectoires issues de conditions initiales très proches. S'il est positif, les trajectoire divergent. Très souvent dans la littérature, si $\Lambda_L > 0$, le système est dit chaotique. Intuitivement, cela reflète la sensibilité aux conditions initiales.

3.3.2.2 Le cas $p > 1$

La relation (3.2) se généralise aux systèmes de dimension $p > 1$, qui possèdent alors p exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes de l'espace des phases. On a alors $x_n = F^n(x_0)$ avec $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p)}) \in \mathbb{R}^p$. Les p exposants de Lyapunov Λ_i s'écrivent

$$\Lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_i(J_n \dots J_1)|; \quad i = 1, \dots, p,$$

$\lambda_i(J_n \dots J_1)$ représente la i ème valeur propre du produit $J_n \dots J_1$ où

$$J_n \equiv DF(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p)}).$$

Une condition nécessaire pour qu'un système dynamique discret soit chaotique est qu'au moins un des ses exposants de Lyapunov soit positif.

Parmi les n exposants de Lyapunov calculés, nous n'allons nous intéresser qu'à la plus grande valeur pour Λ_i . Cette valeur nous permet non seulement de quantifier la sensibilité du système aux conditions initiales, mais aussi de déterminer le comportement du système, quand nous avons des cycles attractifs, les valeurs propres sont plus petites que 1, l'exposant de Lyapunov est donc négatif. Lorsqu'on se trouve sur une valeur de bifurcation, les valeurs propres sont égales à 1 en valeur absolue, cela implique que l'exposant de Lyapunov est nul. Finalement, dans le cas où nous avons un attracteur chaotique l'exposant de Lyapunov est positif. De plus, s'il est plus grand que 1, nous avons alors un système dit "fortement chaotique" (voir Tableau 3.1).

Attracteur	Exposants de Lyapunov
<i>Point d'Équilibre</i>	$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$
<i>Cycle limite</i>	$\lambda_1 = 0; \quad 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
<i>Tore d'ordre 2</i>	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad 0 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_p$
<i>Tore d'ordre k</i>	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0; \quad 0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_p$
<i>Attracteur chaotique</i>	$\lambda_1 > 0, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i < 0$

TABLE 3.1 – Exposants de Lyapunov pour différents attracteurs.

3.3.3 Classification

Le spectre de Lyapunov est constant le long d'une orbite et généralement identique pour tous les points initiaux dans le bassin d'attraction d'un attracteur (Parker & Chua,

1989; Pikovsky & Politi, 2016 [34, 36]). Ceci découle du fait que les exposants sont définis comme des limites le long de l'orbite, rendant le comportement transitoire non pertinent.

Remarque 3.1. Si $F : U \rightarrow U$ est C^1 et $x, y \in U$ satisfont $\omega(x) = \omega(y)$ (voir la notion de l'ensemble ω -limite, Définition 5.12, Annexe 5), alors leurs spectres de Lyapunov sont identiques. Si Λ est un attracteur et x, y sont dans son bassin d'attraction, leurs spectres coïncident (Parker & Chua, 1989 [34]).

Le spectre de Lyapunov peut être considéré comme une propriété de l'attracteur et est indicatif de son type. Par exemple, si une orbite est dans le bassin d'attraction d'un cycle k -périodique attractif, son spectre est lié aux valeurs propres des points fixes de F^k .

Remarque 3.2.

- Si x est dans le bassin d'attraction d'un cycle k -périodique attractif et y est un point du cycle, alors les exposants de Lyapunov le long de l'orbite de x sont $\lambda_i = \frac{1}{k} \log |m_i|$, où m_i sont les valeurs propres de $(DF^k)_y$ (Parker & Chua, 1989 [34]).
- Si x est dans le bassin d'attraction d'un cycle périodique attractif, alors tous ses exposants de Lyapunov sont strictement négatifs.

Lors d'une bifurcation par dédoublement de période, le plus grand exposant de Lyapunov λ_1 tend vers 0 au point de bifurcation. Un exposant maximal nul est typique des bifurcations et est classé comme un *cercle invariant*.

Un exposant maximal strictement positif en un point x correspond à une *dépendance sensible aux conditions initiales*. Pour classer une orbite comme chaotique, des conditions supplémentaires sont nécessaires :

Définition 3.4 (Orbite chaotique). Soit $F : U \rightarrow U$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine. Supposons que l'orbite de $x \in U$ soit bornée. Elle est dite chaotique si :

- F n'est pas asymptotiquement périodique,
- Le plus grand exposant de Lyapunov de x est strictement positif,
- Aucun exposant de Lyapunov de x n'est nul.

Définition 3.5 (Attracteur chaotique). L'ensemble ω -limite $\omega(x)$ est un ensemble chaotique s'il existe $y \in \omega(x)$ dont l'orbite est chaotique. Un attracteur chaotique est un attracteur qui est un ensemble chaotique.

Définition 3.6 (Attracteur). Un ensemble ω -limite $\omega(x)$ est un attracteur s'il existe $V \subset U$ de mesure de Lebesgue non nulle tel que $\omega(y) \subset \omega(x)$ pour tout $y \in V$.

Remarque 3.3. Si l'orbite positive de x reste bornée, son plus grand exposant de Lyapunov est strictement positif et aucun autre n'est nul, alors (sauf cas rares) elle tend vers un attracteur chaotique.

3.3.4 Dimension de Capacité et Dimension de Boîte

Définition 3.7. Dimension de Capacité Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borné et $N(\varepsilon)$ le nombre minimal d'éléments de volume de diamètre ε pour recouvrir A . La dimension de capacité est

$$D_{cap} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Il s'avère que cette définition de la dimension de capacité permet d'obtenir des valeurs non entières pour des formes complexes comme les fractales.

En effet, interpréter la dimension de capacité d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ comme une mesure de son occupation spatiale dans \mathbb{R}^n s'avère être une approche intuitive pour appréhender cette notion, bien que quelque peu vague. Par exemple, l'ensemble de Cantor ne se comporte ni comme une collection finie de points (de dimension de capacité 0) ni comme un intervalle (de dimension 1) dans \mathbb{R} . Ainsi, en termes d'occupation spatiale, l'ensemble de Cantor se situe entre ces deux extrêmes : plus structuré qu'un ensemble fini de points mais moins qu'un intervalle continu (Parker & Chua, 1989 [34]). À l'inverse, l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ possède une dimension de capacité de 1, signifiant que bien qu'il soit dénombrable, il remplit l'espace de manière analogue à un intervalle – une propriété cohérente avec sa densité dans $[0, 1]$.

La dimension de capacité présente certaines difficultés : le nombre minimal d'éléments de volume requis pour un ε donné peut varier selon le type d'élément utilisé. Par exemple, recouvrir un ensemble particulier peut nécessiter plus de boîtes que de boules (Parker & Chua, 1989 [34]). En pratique, cela rend le calcul numérique de la dimension de capacité particulièrement délicat. Ainsi, plutôt que de calculer la dimension de capacité de l'attracteur de Hénon, nous limitons notre étude aux recouvrements utilisant exclusivement des boîtes comme éléments de volume. Cette approche définit la dimension de boîte (box-counting dimension).

Définition 3.8 (Dimension de Boîte). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borné et $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boîtes de côté ε pour recouvrir A . La dimension de boîte D_{box} est

$$D_{box} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Pour le calcul, on utilise une grille de boîtes et on estime la pente de $\log N(\varepsilon)$ vs $-\log \varepsilon$ (voir Annexe A, Chapitre 5.7).

Théorème 3.3 ([26]). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. Si f admet un point périodiques de période 3, alors f admet des points périodiques de toute période.*

Remarque 3.4. Ce théorème nous donne une condition d'existence d'orbite périodique de période infinie.

3.4

Routes Vers le Chaos (Cas d'une Récurrence d'Ordre Un)

Considérons la fonction $P(x) = \frac{-3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$. Il est facile de voir que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, et $P(2) = 0$. Donc $\{0, 1, 2\}$ forment une orbite avec de période trois. Il est raisonnable de se demander combien d'autres points périodiques possède P . Ces questions trouvent une réponse, au moins en partie, par le théorème suivant.

Théorème 3.4. *Si une fonction réelle continue admet un point périodiques de période 3, alors elle admet des points périodiques de toute période.*

Démonstration. Soit $\{a, b, c\}$ une orbite périodique de période trois de f . Sans perte de généralité, nous supposons $a < b < c$. Il y a deux cas, $f(a) = b$ ou $f(a) = c$. Nous supposons que $f(a) = b$. Cela implique $f(b) = c$ et $f(c) = a$. La preuve de $f(a) = c$ est similaire. Soit $I_0 = [a, b]$ et soit $I_1 = [b, c]$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique que $I_1 \subset f(I_0)$, $I_1 \subset f(I_1)$ et $I_0 \subset f(I_1)$. Puisque $I_1 \subset f(I_1)$, et d'après le Théorème 1.2, f admet un point fixe dans I_1 .

Maintenant, soit n un entier naturel supérieur à 1. Supposons qu'il y ait une suite imbriquée d'intervalles fermés, $I_1 = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n$, avec les propriétés suivantes.

- (1) $I_1 = A_0$,
- (2) $f(A_k) = A_{k-1}$ pour $k = 1, 2, \dots, n - 2$,
- (3) $f^k(A_k) = I_1$ pour $k = 1, 2, \dots, n - 2$,
- (4) $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$,
- (5) $f^n(A_n) = I_1$.

D'après $A_n \subset I_1$, (5) et le Théorème 1.2, on déduit que f^n admet un point fixe dans A_n . Si p est un point périodique de période n dans A_n , alors (3.4) et (3.4) impliquent que $p, f(p), f^2(p), \dots, f^{n-1}(p)$ sont dans $I_1 = [b, c]$ et (3.4) implique $f^{n-1}(p)$ est dans $I_0 = [a, b]$. Si $p = c$, alors $f(p) = a$ qui n'est pas dans I_1 . Puisque seule $f^{n-1}(p)$ est dans

I_0 parmi les premières itérations de p , il faut que $n = 2$. Toutefois, cela contredit le fait que la période de c est trois. Ainsi, p doit être dans l'intervalle semi-ouvert $]b, c[$.

Si $p = b$, alors $n = 3$ puisque $f^2(p) = a$ qui n'est pas dans I_1 et le seul des n premiers itérés de p qui n'est pas dans I_1 est $f^{n-1}(p)$. Supposons que $n \neq 3$. Il s'ensuit que p doit être dans l'intervalle ouvert $]b, c[$. Puisque $f^{n-1}(p) \in I_0 = [a, b]$ entraîne $f^{n-1}(p) \neq p$ et donc p ne peut pas être de période $n - 1$. Si la période de p était inférieure à $n - 1$, alors de (3.4) et le fait que $p \neq b$ et $p \neq c$, implique que l'orbite de p est contenue entièrement dans $]b, c[$ et ce serait en contradiction avec (3.4). Puisque $f^{n-1}(p) \in]b, c[$, il faut que p est de période n .

Pour compléter la démonstration, nous démontrons l'existence d'une telle séquence d'ensembles fermés, pour chaque entier naturel supérieur à 1. Soit n un entier naturel qui est plus grand que 1. Évidemment, nous pouvons choisir de telle sorte que $A_0 = I_1$ donc (3.4) est satisfaite. Le fait que si f est une fonction continue et J et K sont des intervalles fermés tels que $K \subset f(J)$, alors il existe un intervalle J_0 tel que $J_0 \subset J$ et $f(J_0) = K$. C'est un résultat intuitivement clair dont la preuve repose sur la continuité de f (Exercice 12).

Maintenant, puisque $A_0 = I_1$ et $I_1 \subset f(I_1)$, nous avons $A_0 \subset f(A_0)$ et soit $A_1 \subset A_0$ de façon à ce que $A_0 = f(A_1)$. Mais puisque $A_1 \subset A_0$, alors $A_1 \subset f(A_1)$. Par conséquent, il y a un $A_2 \subset A_1$, telle que $f(A_2) = A_1$ et $A_2 \subset f(A_2)$. Nous poursuivons ce processus pour définir les A_k pour $k = 1, 2, \dots, n - 2$. Dans chaque cas, nous trouvons $A_k \subset A_{k-1}$ de telle sorte que $f(A_k) = A_{k-1}$ pour $k = 1, 2, \dots, n - 2$ tel que requis par (3.4). De plus, $A_{k-1} \subset f(A_k)$ pour chaque k de sorte que le processus qui définit les intervalles A_k peut se poursuivre indéfiniment. Alors $f(A_k) = A_{k-1}$ implique

$$\begin{aligned} f^2(A_k) &= f(f(A_k)) = f(A_{k-1}) = A_{k-2}, \\ f^3(A_k) &= \dots = A_{k-3}, \\ &\vdots \\ f^k(A_k) &= A_0 = I_1, \end{aligned}$$

pour tout $k = 1, 2, \dots, n - 2$ tel que requis par (3.4). Pour (3.4), on a

$$f^{n-1}(A_{n-2}) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f(I_1) \supset I_0.$$

Donc, il existe $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tel que $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$. Finalement

$$f^n(A_{n-1}) = f(f^{n-1}(A_{n-1})) = f(I_0) \supset I_1 \Rightarrow \exists A_n \subset A_{n-1} : f^n(A_n) \supset I_1,$$

ce qui est requis par (3.4). □

Remarque 3.5. Ce résultat est un cas très particulier du théorème de Sarkovskii (1964) [?].

Définition 3.9. L'ordre de Sarkovskii est une relation d'ordre définie sur les entiers strictement positifs de la façon suivante

$$\begin{aligned} 3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \times 3 \triangleleft 2 \times 5 \triangleleft 2 \times 7 \triangleleft \\ \dots \triangleleft 2^n \times 3 \triangleleft 2^n \times 5 \triangleleft 2^n \times 7 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2^{n+1} \times 3 \triangleleft 2^{n+1} \times 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^n \triangleleft 2^{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1 \end{aligned}$$

Autrement dit, on place d'abord les impairs à partir de 3 par ordre croissant, puis les impairs multipliés par 2, puis par 4, etc. et on termine par les puissances de 2 par ordre décroissant.

Théorème 3.5 (Sarkovskii, 1964 [?]). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f admet un point périodique de période n , alors pour tout m succédant à n dans l'ordre de Sarkovskii ($n \triangleleft m$), f admet un point périodique de période m .*

En plus d'impliquer l'existence d'orbites de périodes premières plus petites que celle d'une orbite connue, le Théorème de Sarkovskii peut être utilisé pour montrer que certains points périodiques n'existent pas.

Par exemple, dans la Figure 3.2, on représente les graphes de $f_\mu(x) = \mu x_n(1 - x_n)$, de $f_\mu^2(x)$ et de $f_\mu^4(x)$ pour $\mu = 2.2$. Dans le premier graphe (en bleu), on observe que f_μ possède des points fixes en 0 et près de 0.7. Dans le second graphe (en vert), on retrouve ces points fixes ainsi qu'une orbite de période 2 située près de 0.5 et 0.8. Dans le troisième graphe (en rouge), on constate que les seuls points de période 4 sont 0 et ceux proches de 0.7, 0.5 et 0.8. Autrement dit, f_μ ne possède aucune orbite de période 4.

On peut donc conclure que f_μ ne possède pas d'orbites de période autre que 2 et 1, puisque ce sont les seules périodes inférieures à 4 dans l'ordre de Sarkovskii.

Par la suite, nous analyserons de manière plus approfondie la dynamique de la fonction logistique.

3.4.1 Suite logistique

Nous considérons un modèle d'accroissement de population donné par l'équation aux différences

$$P_{n+1} - P_n = \lambda P_n (M - P_n),$$

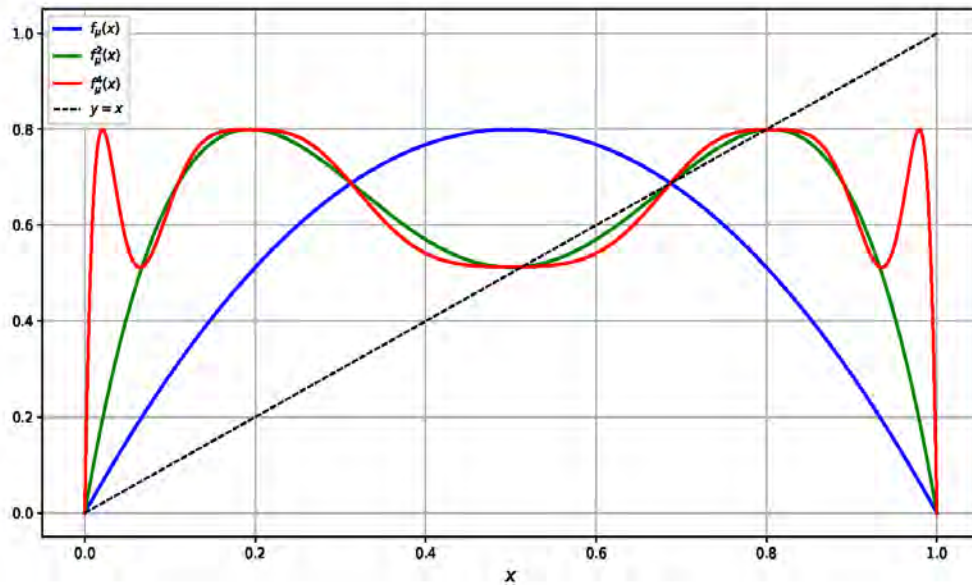


FIGURE 3.2 – Graphes des fonction $f_\mu(x)$, de $f_\mu^2(x)$ et de $f_\mu^4(x)$ pour $\mu = 2.2$.

où λ est un taux de croissance et M la population maximale. Cette équation se réécrit sous forme quadratique

$$P_{n+1} = \mu P_n - \lambda P_n^2 = \mu P_n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} P_n \right),$$

avec $\mu = 1 + \lambda M$. Pour garantir la positivité de la population ($P_n \geq 0$), on impose $P_n \leq \frac{\mu}{\lambda}$.

En introduisant la variable adimensionnée $x_n = \frac{P_n}{M}$ (rapport de la population à la capacité maximale), on obtient l'équation logistique standard

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

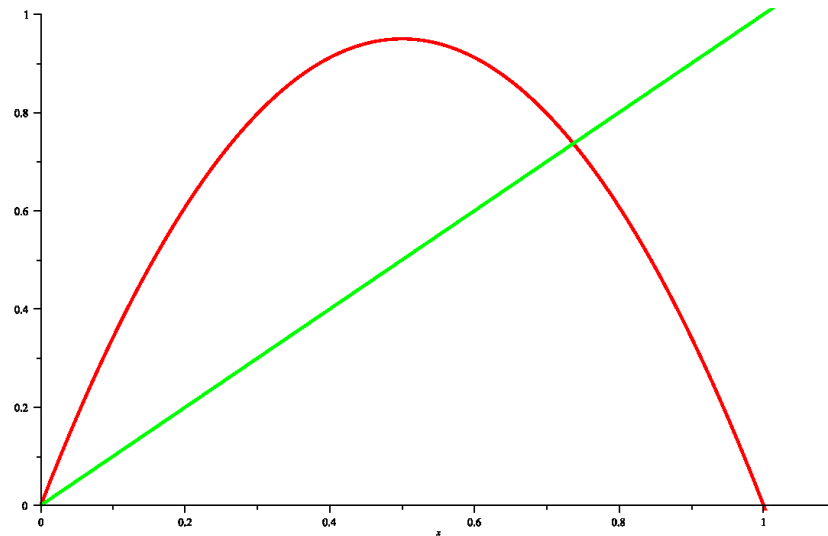
Cette équation ne dépend que du paramètre μ . La contrainte $0 \leq x_n \leq 1$ impose $\mu \in [0, 4]$.

Dans toute la suite, on étudie la dynamique de la suite (u_n) définie par $u_0 \in I = [0, 1]$ et la récurrence :

$$u_{n+1} = f_\mu(u_n) = \mu u_n (1 - u_n), \quad 0 < \mu \leq 4.$$

3.4.1.1 Les points fixes de la fonction f_μ

Pour $\mu \in]0, 4]$, la fonction $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ est une parabole de sommet $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$, avec $f_\mu(0) = f_\mu(1) = 0$. Son image est $[0, \frac{\mu}{4}]$, et comme $\mu \leq 4$, I est stable par f_μ (Figure 3.3).

FIGURE 3.3 – Graphe de la fonction logistique pour $\mu = 3.8$.

Les points fixes de f_μ sont $p_1 = 0$ et $p_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$ (ce dernier est dans I ssi $\mu > 1$). La dérivée $f'_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$ donne

- En p_1 : $f'_\mu(0) = \mu$. Donc p_1 est attractif si $\mu < 1$, répulsif si $\mu > 1$.
- En p_2 : $f'_\mu(p_2) = 2 - \mu$. Donc p_2 est attractif si $1 < \mu < 3$, répulsif si $\mu > 3$.

Théorème 3.6. *On suppose que $0 < \mu \leq 3$. Alors, pour toute valeur initiale $u_0 \in I$, la suite (u_n) est convergente.*

Pour la preuve on distingue les cas suivants :

Le cas $0 < \mu < 1$ Il y a un unique point fixe dans I , le 0, qui est attractif, comme le montre la Figure 3.4.

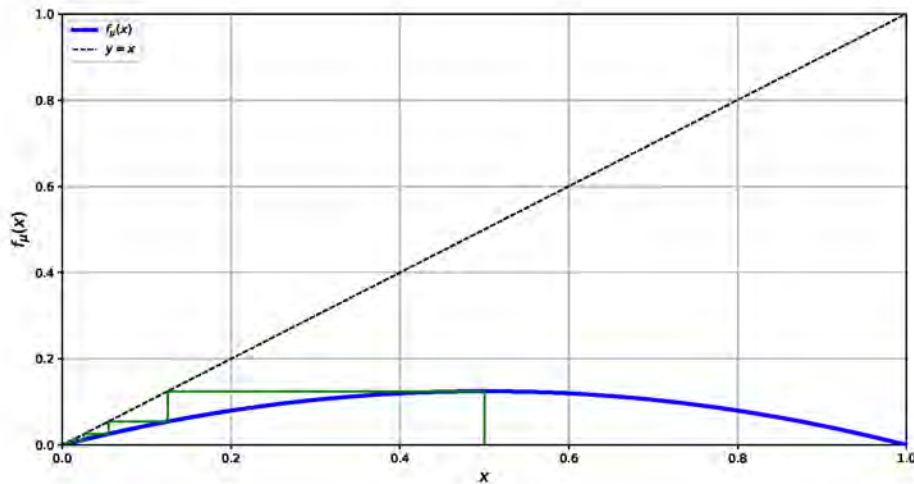
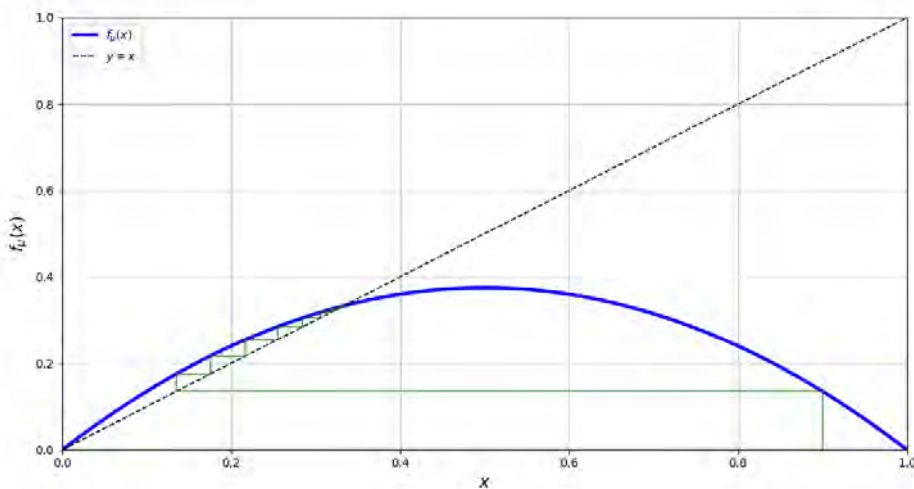
Théorème 3.7. *On suppose que $0 < \mu < 1$. Soit $u_0 \in I$.*

- Pour $u_0 = 0$ la suite est constante. Pour $u_0 = 1$ elle est constante et égale à 0 à partir du rang 1.
- On suppose $u_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. La suite (u_n) décroît et converge géométriquement vers 0.
- On suppose que $u_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On a $u_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et on est ramené au cas 2.

Le cas $\mu = 1$ Pour $u_0 \in I$, la suite converge vers 0 (convergence en escalier).

Le cas $1 < \mu < 2$

Il y a deux points fixes, 0 et p_2 . Et pour $u_0 \in I$, on a une convergence.

FIGURE 3.4 – Convergence en escalier pour $0 < \mu < 1$.FIGURE 3.5 – La convergence pour $1 < \mu < 2$.

Théorème 3.8. *On suppose que $1 < \mu < 2$ (donc $0 < p_2 < \frac{1}{2}$). Soit $u_0 \in I$.*

1. *Pour $u_0 = 0$ ou $u_0 = p_2$, la suite est constante. Pour $u_0 = 1$ (resp $u_0 = \frac{1}{\mu}$), elle est constante et égale à 0 (resp p_2) à partir du rang 1.*
2. *On suppose $u_0 \in]0, p_2]$ (resp $u_0 \in]p_2, \frac{1}{2}[$). La suite (u_n) est croissante (resp décroissante) et converge vers p_2 .*
3. *On suppose $u_0 \in]\frac{1}{\mu}, 1[$ (resp $u_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{\mu}[$). Alors on a $u_1 \in]0, p_2[$ (resp $]p_2, \frac{1}{2}[$) et on est ramené au cas 2.*

Le cas $\mu = 2$ Cette fois, on a $p_2 = \frac{1}{2}$ et $f'_\mu(p_2) = 0$ donc p_2 est un point superattractif.

Le cas $2 < \mu < 3$ Le point p_2 est encore attractif, mais avec une dérivée négative. On a donc, au moins au voisinage de p_2 , un comportement "en escargot". (voir Figure 3.6)

Proposition 3.1. *Soit $u_0 \in]0, 1[$. La suite (u_n) converge vers p_2 .*

Démonstration. On pose $\hat{p}_2 = \frac{1}{\mu}$ et on a $f_\mu(\hat{p}_2) = p_2$. Avec l'hypothèse sur μ , on a $0 < \hat{p}_2 < \frac{1}{2} < p_2 < 1$. Posons $J =]\hat{p}_2, p_2]$ et montrons que $f_\mu^2(J) \subset]\frac{1}{2}, p_2]$. Comme f_μ atteint son maximum en $\frac{1}{2}$, il est clair qu'on a $f_\mu(J) =]p_2, \frac{\mu}{4}]$ avec $p_2 < \frac{\mu}{4}$. On a donc $f_\mu^2(J) = f_\mu(]p_2, \frac{\mu}{4}]) =]f_\mu(\frac{\mu}{4}), p_2]$ et on a $f_\mu(\frac{\mu}{4}) < p_2$ car f_μ est décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Il reste à montrer que $f_\mu(\frac{\mu}{4})$ est bien supérieur à $\frac{1}{2}$. Cela équivaut à $-\mu^3 + 4\mu^2 - 8 \geq 0$ (on a cette inégalité pour $\mu \in]2, 3.236[$).

On en déduit d'abord que, si $u_0 \in J$, la suite u_{2n} converge vers p_2 . En effet, on a alors $u_2 \in]\frac{1}{2}, p_2]$ et cet intervalle est stable par f_μ^2 . Comme f_μ^2 est croissante sur cet intervalle, la suite u_{2n} est croissante et majorée par p_2 . Elle converge vers un point fixe de f_μ^2 et on vérifie que ce ne peut être que p_2 (Voir 3.8).

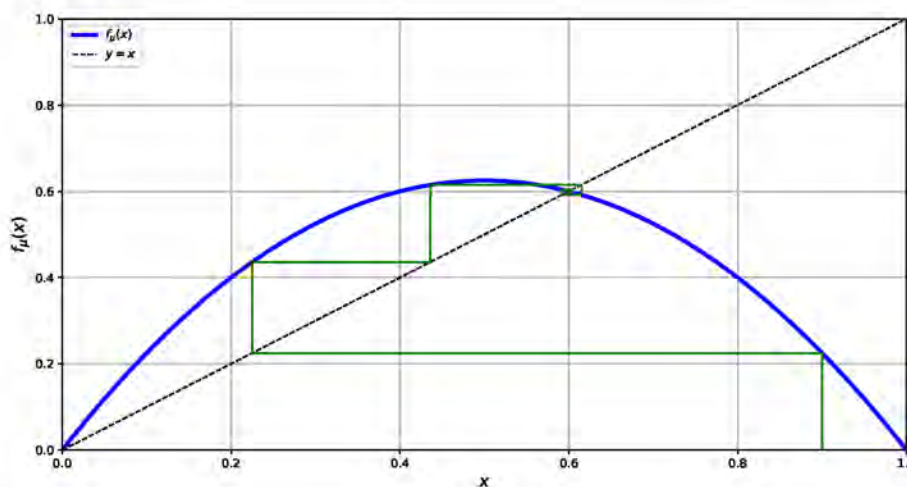
On en déduit ensuite que (u_n) converge vers p_2 . En effet, on sait que la suite u_{2n} converge vers p_2 et la suite u_{2n+1} aussi, comme on le voit en appliquant f_μ .

Supposons maintenant $u_0 < \hat{p}_2$ et montrons qu'il existe k tel que u_k soit dans J . Cela montrera que la suite converge vers p_2 en vertu du premier cas. Comme on a $f_\mu(x) > x$ pour $x < p_2$, on a $u_0 < u_1$ et la suite u_n croît tant qu'elle reste inférieure à p_2 . Si elle est majorée par \hat{p}_2 elle converge, mais cela ne peut être vers p_2 et c'est absurde. Sinon, soit $k-1$ le dernier indice tel que $u_{k-1} < \hat{p}_2$. On a alors $\hat{p}_2 \leq u_k = f_\mu(u_{k-1}) < f_\mu(\hat{p}_2) = p_2$ car u_{k-1} et \hat{p}_2 sont dans $[0, \frac{1}{2}]$ sur lequel la fonction f_μ est croissante.

Supposons enfin $u_0 \in]p_2, 1[$. Comme f_μ est décroissante, on a $u_1 \in f_\mu(]p_2, 1[) =]0, p_2[$ et on est ramené à l'un des cas précédents. \square

Théorème 3.9 (Théorème de Coppel). *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. On suppose que f n'admet pas de 2-cycle. Alors, pour tout $x_0 \in I$, la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge.*

Remarque 3.6. La réciproque de ce résultat est évidemment vraie car, si f admet un 2-cycle : $f(x) = y$ et $f(y) = x$ avec $x \neq y$, la suite récurrente définie par $x_0 = x$ est divergente.

FIGURE 3.6 – Convergence en escargot pour $2 < \mu < 3$.

Démonstration. La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant □

Lemme 3.1. *Avec les notations du théorème, on suppose que f n'admet pas de 2-cycle. Soit $c \in I$ et supposons $f(c) > c$ (resp $f(c) = c$, resp $f(c) < c$). Alors on a $f^n(c) > c$ (resp $f^n(c) = c$, resp $f^n(c) < c$) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Maintenant on peut terminer la démonstration du Théorème 3.9.

la suite de la preuve du théorème précédent. Soit $x_0 \in I$ quelconque. S'il existe n tel que $x_{n+1} = x_n$, la suite est stationnaire donc convergente. On peut donc supposer qu'on a $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout n . Si on a, disons, $x_n < x_{n+1}$ à partir d'un certain rang, la suite est croissante et majorée, donc convergente. On peut donc supposer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $x_n < x_{n+1}$ et une infinité tels que $x_n > x_{n+1}$. Appelons (y_n) (resp (z_n)) la sous-suite des premiers (resp des seconds). Ces deux sous-suites ont pour réunion (x_n) . Si on a $y_p = x_n$, on a $x_{n+1} > x_n$ et, en vertu du lemme, $x_{n+k} > x_n$ pour tout $k > 0$. En particulier, on a $y_{p+1} > y_p$, de sorte que la suite que la suite (y_p) est croissante. On montre de même que la suite (z_q) est décroissante. Comme ces suites sont confinées dans $[a, b]$, elles convergent respectivement vers y et z . Comme la suite des z_q est infinie, il existe une infinité d'indices n tels que x_n soit un y_p mais x_{n+1} un z_q . Appelons (w_p) la sous-suite des y_p en question. Elle converge vers z car $f(w_p)$ est une sous-suite de z_q . On en déduit $f(y) = z$. Le même raisonnement (avec d'autres sous-suites, bien entendue) donne $f(z) = y$, donc $f^2(y) = y$. Mais, comme f n'admet pas de 2-cycle, on en déduit

$f(y) = y = z$ et les deux sous-suites (y_p) et (z_q) ont même limite. Comme elles épuisent (x_n) , cette dernière suite converge vers y . \square

Corollaire 3.1. *Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction de classe C^1 . On suppose que les points fixes de f sont en nombre fini et répulsifs et que les fibres de f (c.a.d les ensembles $f^{-1}(\{x\})$) sont finies. Alors, f admet un 2-cycle.*

Démonstration. En effet, sinon, toutes les suites récurrentes convergentes vers des points fixes. Comme ceux-ci sont répulsifs, les suites sont constantes à partir d'un certain rang. Mais les points qui tombent sur un point fixes sont nombre dénombrable et c'est absurde. \square

Le cas $\mu = 3$ La suite converge vers p_2 (sauf si $u_0 = 0$) en vertu du Théorème de Coppel.

3.4.1.2 Le doublement de période

Pour $\mu > 3$, les points fixes de f_μ sont tous deux répulsifs. Dans ce cas, une suite récurrente associée à f_μ ne peut converger vers l'un de ces points fixes que si elle est stationnaire. Comme f_μ est polynomiale, cela ne concerne qu'un nombre dénombrable de points de départ u_0 , de sorte que la plupart des suites (u_n) associées à f_μ vont diverger.

Un premier phénomène apparaît, c'est l'existence de points périodiques attractifs à commencer par des points de période 2.

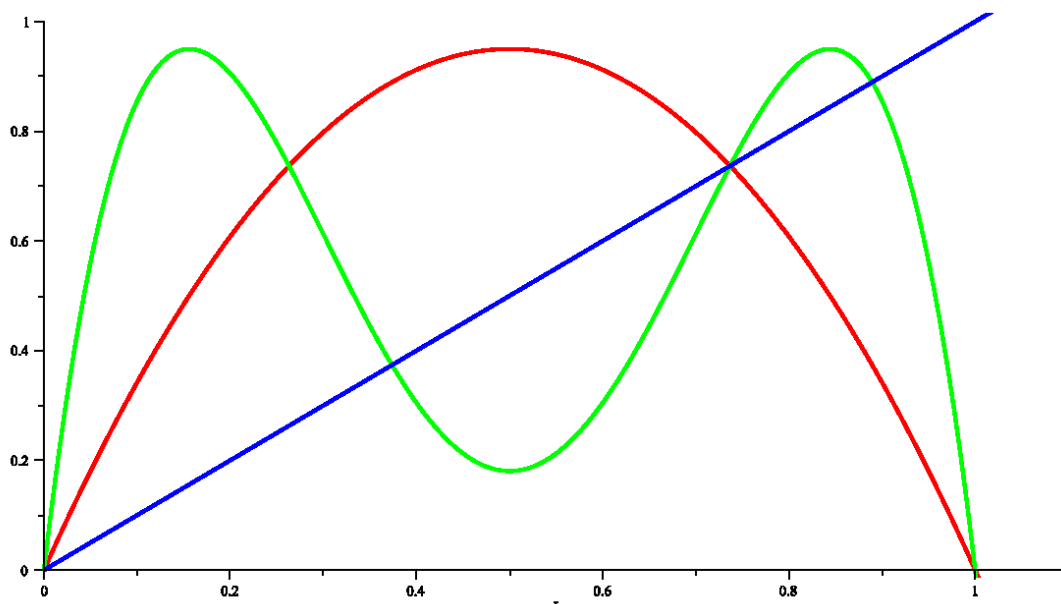
Apparition des cycles d'ordre 2

Proposition 3.2. *Si on a un n -cycle $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ attractif, et si u_0 est suffisamment voisin de l'un des point du cycle, il existe un entier $k \in [0, n - 1]$ tel que les suites $u_{np}, u_{np+1}, \dots, u_{np+n-1}$ convergent respectivement, quand $p \rightarrow \infty$ vers $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}$. Autrement dit, les termes de la suite se rapprochent alternativement des n valeurs des points du cycle.*

Le cycle sera dit super-attractif si on a $(f_\mu^n)'(x_i) = 0$. La convergence de la suite (u_n) vers le cycle est alors une convergence rapide.

Le lemme suivant donne une méthode pour construire des valeurs de μ qui donnent des cycles super-attractifs :

Lemme 3.2. *Un n -cycle a_1, \dots, a_n relatif à f_μ est super attractif si et seulement si, il contient $\frac{1}{2}$. Les valeurs de μ qui donnent des n -cycles super-attractifs sont obtenues en résolvant l'équation polynomiale $f_\mu^n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.*

FIGURE 3.7 – Les points fixes de f_μ^2 .

Démonstration. En effet, on a $(f_\mu^n)'(a_i) = 0 = f_\mu'(a_1) \dots f_\mu'(a_n)$ et on sait d'auparavant que le seul point où f_μ' s'annule est $\frac{1}{2}$. \square

Les points fixes de f_μ^2 Vu le Théorème Coppel, les points fixes de f_μ^2 vont jouer un rôle essentiel.

Proposition 3.3. On a $f_\mu^2(x) - x = -x(\mu x - \mu + 1)(\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1)$. Les points fixes de f_μ^2 autre que 0 et p_2 , sont les racines de l'équation $\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1 = 0$. Il n'y en a que pour $\mu > 3$. Ces points fixes sont alors

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} - \frac{\sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \text{ et } x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} + \frac{\sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

Ces deux points sont dans I , précisément, le point $x_2 > \frac{1}{2}$, tandis que $x_1 < \frac{1}{2}$ ou $> \frac{1}{2}$, selon que μ est $> 1 + \sqrt{5}$ ou $< 1 + \sqrt{5}$.

Remarque 3.7. On voit dans cet exemple, la première manifestation du phénomène de bifurcation. Pour $\mu < 3$ il n'y a pas de 2-cycle, tandis qu'il y en a pour $\mu > 3$. Lorsque μ tends vers 3 par valeurs supérieures, on voit, sur l'expression des racines ci-dessus, que x_1 et x_2 tendent toutes deux vers le point $\frac{2}{3}$ qui est un point fixe pour f_μ^3 (voir Figure 3.7).

On cherche maintenant à savoir si le 2-cycle (x_1, x_2) est attractif, c.a.d si les termes d'une suite récurrente vont se rapprocher alternativement de x_1 et x_2 . Cela signifie que la suite des termes pairs u_{2p} (resp des termes impaires u_{2p+1}) converge par exemple vers x_1 (resp x_2). Comme ces deux suites sont des suites récurrentes associées à f_μ^2 , il s'agit de voir si les points fixes x_1, x_2 de f_μ^2 sont attractifs pour f_μ^2 , donc si $|(f_\mu^2(x_i))'| < 1$.

Remarque 3.8. On suppose que $\mu \geq 3$. Soit σ l'un quelconque des points fixes de $f_\mu^2 (\neq 0, p_2)$. On a $(f_\mu^2)'(\sigma) = -\mu^2 + 2\mu + 4$. Cette quantité est positive pour $3 \leq \mu \leq 1 + \sqrt{5} \simeq 3.236$ et elle est alors ≤ 1 (et même < 1 pour > 3). On a donc un cycle d'ordre 2 attractif. Elle est nulle pour $\mu = 1 + \sqrt{5}$, le cycle (formé de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$) est alors super attractif. Elle est négative pour $\mu > 1 + \sqrt{5}$ et elle est alors > -1 (donc avec un cycle d'ordre 2 attractif) pour $\mu < 1 + \sqrt{6} \simeq 3.449$.

Corollaire 3.2. *On suppose $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ et $u_0 \neq 0, 1, p_2, \frac{1}{\mu}$. Soit (u_n) la suite récurrente associée à u_0 . Alors, les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers les points fixes de f_μ^2 .*

Les points fixes de f_μ^4 lorsque le cycle d'ordre 2 cesse d'être attractif, le Théorème de Coppel, appliqué à f_μ^2 , montre qu'il y a un cycle d'ordre 2 pour f_μ^4 donc d'ordre 4 pour f_μ (Voir Figure 3.2).

Proposition 3.4. *Pour $\mu \leq 1 + \sqrt{6}$, f_μ^4 n'a pas de point fixe (autre que ceux de f_μ et f_μ^2). Pour $\mu > 1 + \sqrt{6} = \mu_2$, f_μ admet un cycle d'ordre 4 unique et ce cycle est attractif tant que l'on a $\mu < \mu_3 \sim 3.544090$. Pour $\mu = \nu_2 \sim 3.49856169933$, le cycle d'ordre 4 est super-attractif.*

3.4.1.3 La zone des cycles attractifs d'ordre 2^n ($3 < \mu < \mu_\infty$)

Le phénomène que nous venons de voir apparaître pour les cycles l'ordre 2, les cycles d'ordre 4 et les cycles d'ordre 8, continue lorsque μ croît. On parle de cascade de doublement de périodes. Ce phénomène a été mis en évidence vers 1978 par M. Feigenbaum [16], qui a formulé à son sujet un certain nombre de conjectures, démontré ensuite par d'autres auteurs (notamment par Collet & Eckmann [12]).

Théorème 3.10 ([16, 12]). *On considère la fonction définie en (3.3) pour $0 \leq \mu \leq 4$. Soit μ_n la valeur de μ où apparaît un cycle de période 2^n pour f_μ .*

1) *On a $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$, $\mu_3 \approx 3,544090$, $\mu_4 \approx 3,564407$.*

- 2) La suite $\{\mu_n\}$ est strictement croissante, majorée par 4, elle converge vers un réel $\mu_\infty \approx 3.5699456$ et la différence $\mu_1 - \mu_n$ est équivalente, quand n tend vers l'infini, à $\frac{K}{\delta^n}$ où K est une constante et δ est la constante de Feigenbaum

$$\delta \approx 4.66921166091029906.$$

- 3) Pour $\mu_\infty > \mu > \mu_n$, f_μ admet un unique cycle d'ordre 2^n , qui est attractif tant que $\mu < \mu_{n+1}$ est répulsif pour $\mu > \mu_{n+1}$.
- 4) Pour $\mu < \mu_\infty$, f_μ n'a pas de cycle d'ordre m si m n'est pas une puissance de 2.

On se tiendra qu'à la démonstration des choses simples

Lemme 3.3. Soit g une fonction continue définie sur un intervalle de \mathbb{R} . Si g admet un 2-cycle, elle admet un point fixe. Si elle admet un 2^n -cycle avec $n \geq 1$, elle admet des 2^k -cycles pour tout k avec $0 \leq k \leq n - 1$.

Démonstration. Si g échange a et b avec $a \neq b$, la fonction $g(x) - x$ change de signe sur $[a, b]$, donc s'annule. La deuxième assertion en résulte par récurrence. \square

Maintenant, il est clair que μ_n est croissante. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit μ vérifiant $\mu_{n+1} < \mu < \mu_{n+1} + \varepsilon$ tel que f_μ admette un 2^{n+1} -cycle. Alors, par le lemme, f_μ admet aussi un 2^n -cycle donc on a $\mu \geq \mu_n$. Comme cela vaut pour tout ε on a bien $\mu_{n+1} \geq \mu_n$.

Nous verrons dans la section suivante que f_4 admet des cycles de tout ordre, ce qui montre que la suite μ_n est majorée par 4, donc converge.

Corollaire 3.3. Pour $\mu < \mu_\infty$, toute suite récurrente associée à f_μ converge vers un point fixe ou un cycle. Le bassin d'attraction du cycle attractif d'ordre 2^n est partout dense.

Démonstration. Si on a $\mu_n \leq \mu < \mu_{n+1}$, il n'y a pas de cycle d'ordre 2^{n+1} pour f_μ , donc pas de cycle d'ordre 2 pour $f_\mu^{2^n}$. En vertu du théorème de Coppel, cela montre que toute suite récurrente associée à $f_\mu^{2^n}$ converge, donc que la suite associée à f_μ converge vers un cycle d'ordre 2^i avec $i \leq n$. De plus, comme le cycle d'ordre 2^n est le seul à être attractif, les autres donnent des suites périodiques stationnaires, en nombre dénombrable, de sorte que les points dont l'orbite tend vers le 2^n -cycle sont partout denses. \square

3.4.1.4 La fonction logistique est chaotique

Proposition 3.5. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et soit $f : I \rightarrow I$ une fonction de classe C^1 . Si la dynamique de f est chaotique, il n'y a pas de cycles attractifs pour f .

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $\alpha \in I$, périodique d'ordre $n \geq 1$ et attractif. Soient $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, les images de α . Comme α est un point fixe attractif de f^n , il existe un intervalle $J = [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, avec $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in J$, $f^{pn}(x) \rightarrow \alpha$, quand $p \rightarrow +\infty$. Il en résulte que la suite $f^{pn+k}(x)$ converge vers α_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$. Les valeurs de l'adhérence de la suite $f^i(x)$, pour $x \in J$, sont donc exactement les points du cycle. Mais, on sait qu'il existe dans J un point dont l'orbite est partout dense, donc admet tous les points de l'intervalle I comme valeurs d'adhérence, et c'est une contradiction \square

Chaos pour $\mu = 4$ On pose à nouveau $I = [0, 1]$. Une propriété fondamentale consiste à noter qu'on a, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^2 2\theta = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 4 \sin^2(1 - \sin^2 \theta)$. On a donc, avec $f_4(x) = 4x(1 - x)$, la formule

$$\sin^2 2\theta = f_4(\sin^2 \theta) \quad (3.4)$$

On utilisera cette propriété sous la forme suivante

Proposition 3.6. *Tout nombre $x \in [0, 1]$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sin^2 \theta$, avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a les formules*

$$f_4(x) = f_4(\sin^2 \theta) = \sin^2(2\theta)$$

et, plus généralement

$$f_4^n(x) = f_4^n(\sin^2 \theta) = \sin^2(2^n \theta).$$

Remarque 3.9. Si l'on pose $g(\theta) = 2\theta$ et $h(\theta) = \sin^2 \theta$, on a $h \circ g = f_4 \circ h$, de sorte que la formule (3.4) ressemble à la formule de conjugaison $f = hgh^{-1}$. Mais, attention, h n'est pas un homéomorphisme (c'est une fonction de période π). On parle ce propos de semi-conjugaison. En revanche, f_4 est vraiment conjuguée de l'application « tente », très proche de l'application de doublement de l'angle.

Proposition 3.7. *On considère l'application $t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par*

$$t(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soit φ l'application de $[0, 1]$ dans lui-même définie par

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin } \sqrt{x}$$

et on a la formule

$$f_4 = \varphi t \varphi^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier la formule $\sin^2 \frac{\pi t(x)}{2} = \sin^2 \pi x$ pour tout $x \in [0, 1]$. \square

La transitivité

Théorème 3.11. *Il existe $a \in I$ tel que l'orbite de a par f_4 soit partout dense dans I . Autrement dit, la dynamique de f_4 est chaotique sur I .*

la sensibilité aux conditions initiales On a vu que la transitivité implique la sensibilité. Dans le cas de f_4 , il est facile de prouver celle-ci directement :

Proposition 3.8. *Soit $J =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ un intervalle ouvert contenu dans I . Il existe un entier n tel que $f_4^n(J) = I$. En particulier, il existe y dans J tel que*

$$|f_4^n(x) - f_4^n(y)| \geq \frac{1}{2},$$

ce qui montre la sensibilité aux conditions initiales.

Démonstration. On utilise la formule (2.1). On écrit $x - \varepsilon = \sin^2 \alpha$ et $x + \varepsilon = \sin^2 \beta$, avec $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Pour n assez grand, on a $2^n(\beta - \alpha) > 2\pi$, de sorte que l'intervalle $]2^n\alpha, 2^n\beta[$ contient un intervalle de la forme $[k\pi, (k+1)\pi]$. Pour cet n on a $f_4^n(J) \supset I$. En effet, si z est dans I on peut l'écrire $z = \sin^2 \theta$ avec $\theta \in [k\pi, (k+1)\pi]$. On a alors $\theta = 2^n\varphi$ avec $\alpha < \varphi < \beta$, donc $z = f_4^n(y)$ avec $y = \sin^2 \varphi \in J$. Si on choisit z tel que $|z - f_4^n(x)| \geq \frac{1}{2}$, on a bien réalisé la condition de sensibilité. \square

La densité des points périodiques Comme pour la sensibilité, la densité des points périodiques est une conséquence du chaos, mais il est facile de la prouver directement.

Le lemme de base est purement trigonométrique :

Lemme 3.4. *Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On a $\sin^2 \theta = \sin^2 \varphi$ si et seulement si φ est égal, modulo π , à θ ou $-\theta$.*

On en déduit le calcul des points périodiques :

Proposition 3.9. *Les points $u_0 \in [0, 1]$ qui sont tels que la suite (u_n) soit périodique de période ≥ 1 sont les points $u_0 = \sin^2 \frac{k\pi}{2^n \pm 1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq 2^{n-1}$ (resp. $0 \leq k < 2^{n-1}$) si le signe est $+$ (resp. si le signe est $-$). La période de la suite associée à un tel point est égale à n sauf s'il existe un entier $p < n$ et un entier $l \leq 2^{p-1}$ tel que l'on ait $\frac{k}{2^n \pm 1} = \frac{1}{2^p \pm 1}$. Si la fraction $\frac{k}{2^n \pm 1}$ est irréductible, ce cas ne peut se produire.*

Démonstration. Posons $u_0 = \sin^2 \theta$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dire que la suite admet la période n signifie qu'on a $f_4^n(u_0) = u_0$, c'est-à-dire $\sin^2(2^n \theta) = \sin^2 \theta$. On a ainsi, en vertu du lemme 4.17, $2^n \theta = \pm \theta + k\pi$. On a donc bien $u_0 = \sin^2 \frac{k}{2^n \pm 1}$. \square

Proposition 3.10. *Les points périodiques sont partout denses dans $[0, 1]$. Si (p_n) est une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, on peut même préciser que les points admettant les p_n comme périodes sont denses dans $[0, 1]$. C'est le cas de la suite $p_n = 2^n$.*

Démonstration. Soit $x \in [0, 1]$ que l'on écrit $x = \sin^2 \theta_0$ et soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer que l'intervalle $J =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contient un point périodique. Comme la fonction $\theta \rightarrow \sin^2 \theta$ est lipschitzienne de rapport 1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, il suffit de trouver un correspondant à un point périodique tel que $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$. Si on choisit n assez grand pour que $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ soit $< 2\varepsilon$, il y a un k tel que $\frac{k\pi}{2^{n+1}}$ soit dans l'intervalle $]\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon[$ et le point périodique $\sin^2 \frac{k\pi}{2^{n+1}}$ est alors dans J . \square

3.4.1.5 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation illustre de manière synthétique l'ensemble des comportements décrits dans les paragraphes précédents. En effet, en faisant varier le paramètre μ , plusieurs comportements différents sont observés (Figure 3.8) :

- Si $0 < \mu < 1$, la récurrence (3.3) admet un point fixe $p_1 = 0$ attractif (un noeud stable) (Figure 3.8a).
- Si $1.0 < \mu \leq 3.0$, la récurrence (3.3) admet un point fixe $p_2 = \frac{\mu - 1}{\mu}$ attractif (Figure 3.8a).
- Si $3.0 < \mu \leq 1 + \sqrt{6} = 3.45$, le point fixe p_2 devient répulsif et un cycle de période 2 attractif apparaît en $\mu = 3.0$ (Figure 3.8b).
- Si $3.45 < \mu \leq 3.54$ le cycle de période 2 devient instable et donne naissance à un cycle attractif de période 4 et à partir de $\mu = 3.54$ ce cycle va à son tour bifurquer en un cycle stable d'ordre 8, ... (voir Figure 3.8b)
- Si $\mu > 3.57$, le chaos s'installe. Aucune oscillation n'est encore visible et de légères variations de la condition initiale conduisent à des résultats radicalement différents (voir Figure 3.8c-3.9).
- La plupart des valeurs au-delà de 3.57 présentent un caractère chaotique, mais il existe quelques valeurs isolées de μ avec un comportement qui ne l'est pas. Par exemple vers 3.82, un petit intervalle de valeurs de μ présente une oscillation entre trois valeurs et pour μ légèrement plus grand, entre six valeurs, puis douze, etc (voir Figure 3.8c-3.8d). D'autres intervalles offrent des oscillations entre 5 valeurs, etc. Toutes les périodes sont présentes, là encore indépendamment de la condition initiale.

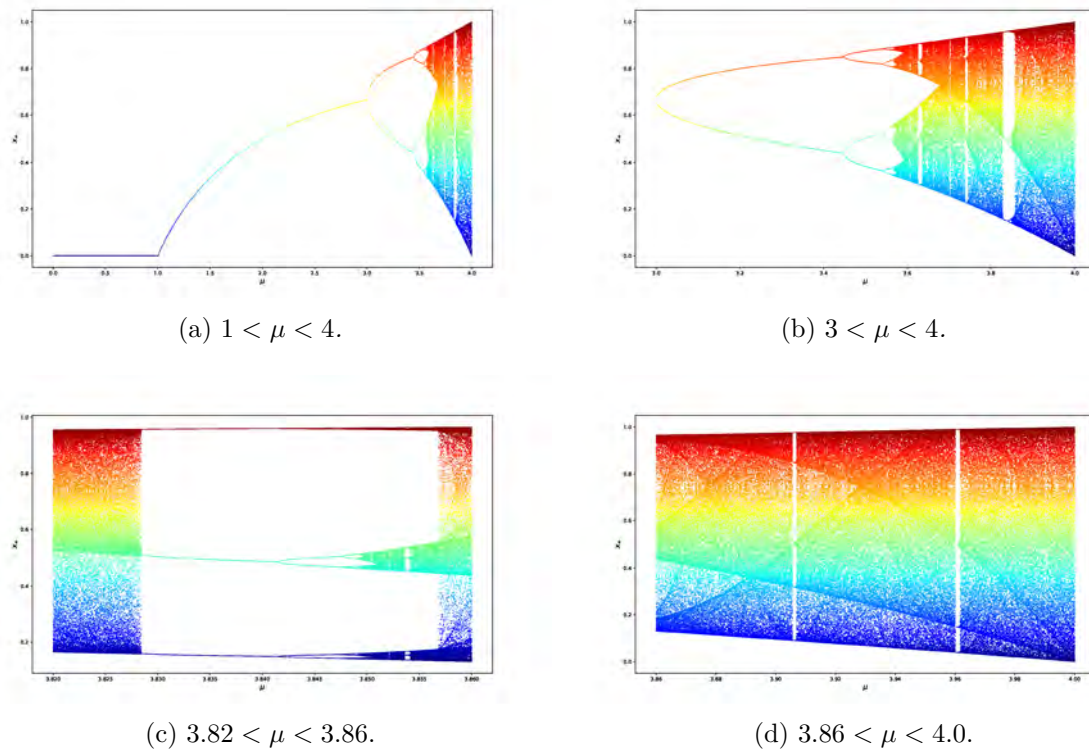


FIGURE 3.8 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.

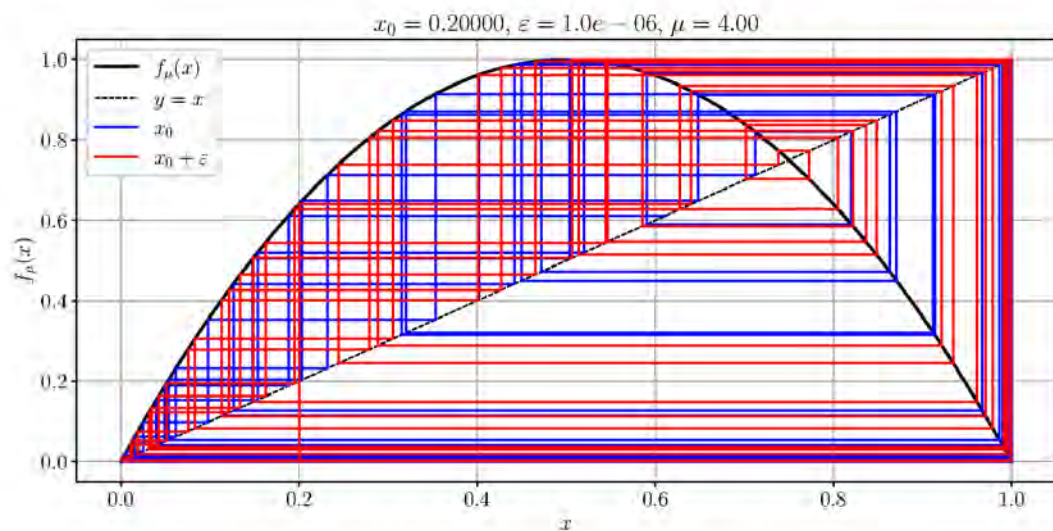


FIGURE 3.9 – La fonction $f_\mu(x)$ est chaotique pour $\mu = 4$.

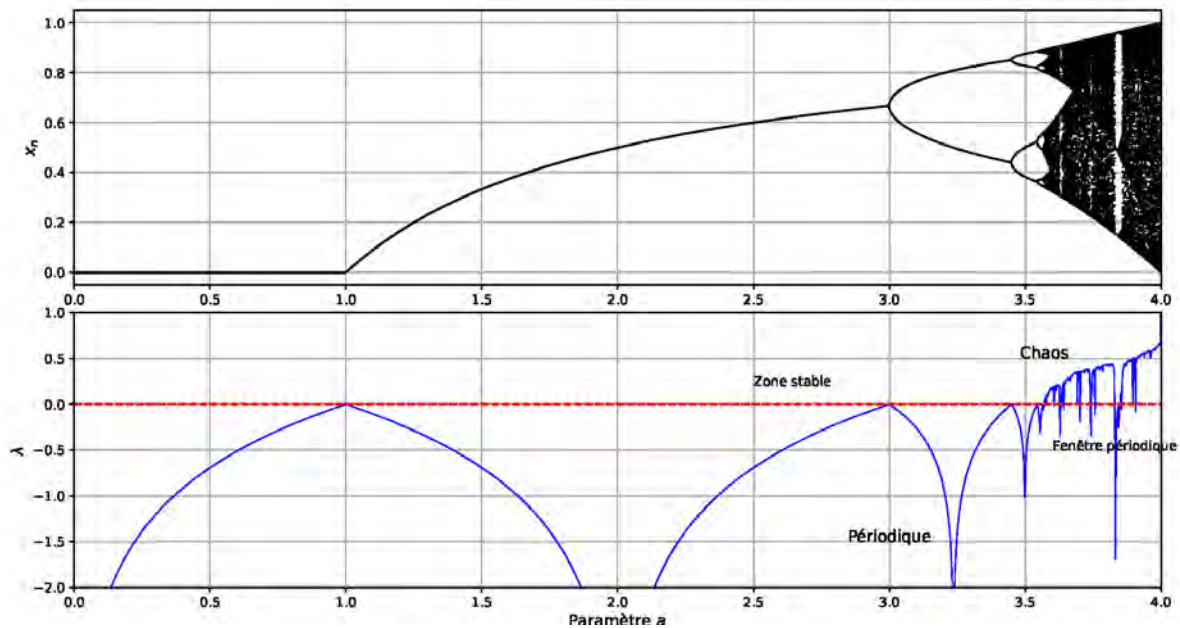


FIGURE 3.10 – Exposant de Lyapunov λ en fonction du paramètre μ pour la fonction logistique $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. Pour $1 < a < 3$, $a < 0$: le système est périodique et stable. Entre $\mu \approx 3$ et $\mu \approx 3.57$, on observe une cascade de bifurcations par doublement de période, avec $\mu = 0$ aux points de bifurcation. Pour $\mu > 3.57$, $\mu > 0$: le système est chaotique avec sensibilité aux conditions initiales. Des fenêtres périodiques apparaissent dans le chaos (ex. $\mu \approx 3.83$, où $\mu < 0$). Pour $\mu \leq 4$, les orbites restent bornées, sans divergence vers l'infini.

3.4.1.6 Exposant de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov λ quantifie la sensibilité aux conditions initiales (Figure 3.10) :

- $\lambda < 0$: Régime périodique stable ($\mu < 3.57$),
- $\lambda = 0$: Points de bifurcation,
- $\lambda > 0$: Chaos ($\mu > 3.57$).

3.5

Introduction à la Dynamique Symbolique

La dynamique symbolique est une technique mathématique qui transforme l'étude des systèmes dynamiques continus en problèmes discrets sur des séquences symboliques.

Développée initialement par Hadamard pour l'étude des géodésiques sur les surfaces à courbure négative, elle est devenue un outil fondamental en théorie ergodique et en systèmes dynamiques.

L'idée centrale consiste à :

1. Partitionner l'espace des phases en régions finies.
2. Associer à chaque trajectoire une séquence de symboles indiquant les régions visitées.
3. Étudier la dynamique sur l'espace des séquences symboliques.

Cette approche permet de simplifier l'analyse de systèmes complexes tout en préservant leurs propriétés dynamiques essentielles [27].

3.5.1 Espace des séquences

Définition 3.10 (Espace symbolique). Soit $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, k\}$ un alphabet fini. L'espace des séquences bilatères est :

$$\Sigma_k = \{x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \mid x_i \in \mathcal{A}\}$$

et l'espace des séquences unilatères :

$$\Sigma_k^+ = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathcal{A}\}.$$

On munit Σ_k de la topologie produit, qui en fait un espace compact, métrisable par la distance :

$$d(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n(x, y)}{2^{|n|}},$$

où $\delta_n(x, y) = 0$ si $x_n = y_n$ et 1 sinon.

3.5.2 Décalage

Définition 3.11 (Opérateur de décalage). L'opérateur de décalage $\sigma : \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$ est défini par

$$(\sigma(x))_n = x_{n+1}.$$

C'est une application continue et surjective.

Le système dynamique (Σ_k, σ) est appelé *décalage complet* sur k symboles.

3.5.3 Sous-décalages

Définition 3.12 (Sous-décalage). Un sous-décalage est un sous-ensemble fermé $X \subset \Sigma_k$ invariant par σ ($\sigma(X) \subseteq X$).

Les sous-décalages sont souvent définis par des ensembles de mots interdits ou des règles de transition.

3.5.4 Exemple : Le Décalage Binaire

Considérons le cas fondamental où $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

3.5.4.1 Espace et dynamique

L'espace Σ_2 contient toutes les séquences bi-infinies de 0 et de 1. Le décalage σ agit comme un décalage vers la gauche :

Exemple 3.2. Soit $x = (\dots, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$ avec $x_0 = 1$. Alors :

$$\sigma(x) = (\dots, 0, 1, 1, 0, 1, \dots).$$

Ce système, appelé *décalage de Bernoulli*, est un prototype de système chaotique, fortement utilisé pour modéliser la complexité des trajectoires.

Remarque 3.10.

— L'espace Σ_2 est équipé de la métrique définie par

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}},$$

pour chaque $x, y \in \Sigma_2$.

- On peut montrer que si $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$, alors $x_i = y_i$ pour $|i| \leq n$ (pour montrer ceci, assumons que $x_j \neq y_j$ pour $|j| \leq n$).
- Inversement, si $x_i = y_i$ pour $|i| \leq n \leq n$, alors $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ (pour montrer ceci, on a $d(x, y) = \sum_{i=0}^n \frac{0}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^n}$).
- L'application décalage $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ déplace le point décimal d'une position vers la droite. Par exemple, si

$$x = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2x_3 \dots,$$

alors

$$\sigma(x) = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2x_3 \dots$$

- Il existe deux points fixes de σ :
 - La séquence doublement répétée $\dots\overline{0.0}\dots$ et $\dots\overline{1.1}\dots$. Les deux cycles sont $\dots\overline{10.10}\dots$ et $\dots\overline{01.01}\dots$
 - Un n -cycle est de la forme $\dots\overline{x_{-n}\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1\dots x_{n-1}}\dots$ où $x_{-n} = x_0, \dots, x_{-1} = x_{n-1}$.

Lemme 3.5. *L'application décalage $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Pour montrer que σ est un homéomorphisme, nous devons prouver :

1. σ est bijective,
2. σ est continue,
3. σ^{-1} est continue,

— **Étape 1 : Continuité de σ**

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ donné et $x = \{\dots x_{-1}x_0x_1\dots\} \in \Sigma_2$. Choisissons $n \in \mathbb{Z}^+$ tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Posons $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Soit $y \in \Sigma_2$ tel que $d(x, y) < \delta$. Par la propriété de la métrique, $x_i = y_i$ pour $|i| \leq n+1$. Considérons $\sigma(x) = \{\dots x_{-1}x_0x_1x_2\dots\}$ et $\sigma(y) = \{\dots y_{-1}y_0y_1y_2\dots\}$. Pour tout i avec $|i| \leq n$, on a :

$$(\sigma(x))_i = x_{i+1} \quad \text{et} \quad (\sigma(y))_i = y_{i+1}.$$

Comme $|i| \leq n$ implique $|i+1| \leq n+1$, et que $x_j = y_j$ pour $|j| \leq n+1$, on a :

$$x_{i+1} = y_{i+1} \quad \text{pour} \quad |i| \leq n.$$

Ainsi, $(\sigma(x))_i = (\sigma(y))_i$ pour $|i| \leq n$.

Par la propriété de la métrique, ceci implique

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{car} \quad \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \frac{1}{2^n} < 2\varepsilon.$$

Mais nous avons besoin de $d(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon$. Ajustons notre choix : choisissons $m \in \mathbb{Z}^+$ tel que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ et posons $\delta = \frac{1}{2^{m+1}}$. Alors

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^m} < \varepsilon.$$

Ainsi, σ est continue en x . Comme x est arbitraire, σ est continue sur Σ_2 . □

— **Étape 2 : Bijectivité de σ**

Démonstration. Définissons l'application inverse $\sigma^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ par

$$\sigma^{-1}(\{\dots y_{-1}y_0y_1\dots\}) = \{\dots y_{-2}y_{-1}y_0\dots\}$$

On vérifie directement que :

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id} \quad \text{et} \quad \sigma^{-1} \circ \sigma = \text{id}$$

Donc σ est bijective. □

— **Étape 3 : Continuité de σ^{-1}**

Démonstration. La preuve est similaire à celle de σ . Soit $\varepsilon > 0$, choisissons n tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, et posons $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Pour $y, z \in \Sigma_2$ avec $d(y, z) < \delta$, on a $y_i = z_i$ pour $|i| \leq n+1$. Alors $(\sigma^{-1}(y))_i = y_{i-1} = z_{i-1} = (\sigma^{-1}(z))_i$ pour $|i| \leq n$, donc :

$$d(\sigma^{-1}(y), \sigma^{-1}(z)) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

Ainsi, σ^{-1} est continue. □

□

Théorème 3.12. *L'application décalage $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ est chaotique sur Σ_2 .*

Démonstration. Pour prouver que σ est chaotique, il suffit de montrer qu'elle est transitive et que l'ensemble de ses points périodiques est dense dans Σ_2 .

Pour la transitivité, on construit une orbite dense en utilisant la séquence \tilde{x} :

$$\dots 0011 0010 0001 0000 11 10 01 00.0 1 000 001 010 011 100 101 110 111 \dots$$

où tous les n -uplets possibles apparaissent à droite (ordre spécifique) et à gauche (ordre inverse pour n pair). L'orbite de \tilde{x} est dense dans Σ_2 .

Pour la densité des points périodiques, soit $x = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\dots$ arbitraire. Pour chaque $n > 0$, la séquence périodique \tilde{x} de période $2n+1$:

$$x_{-n} \dots x_{-2}x_{-1} \underbrace{x_0x_1x_2 \dots x_n}_{2n+1} x_{-n} \dots x_{-2}x_{-1} \underbrace{x_0x_1x_2 \dots x_nx_{-n} \dots}_{2n+1}$$

satisfait $d(x, \tilde{x}) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Ainsi, les points périodiques sont denses. □

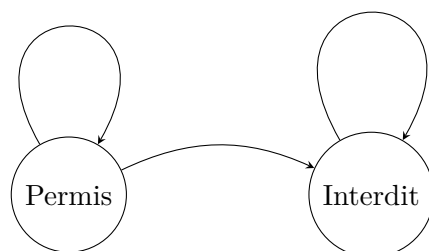


FIGURE 3.11 – Diagramme de transition entre états permis et interdits.

3.5.5 Sous-décalages de type fini

L'espace Σ_N^+ des séquences unilatères sur $\{1, \dots, N\}$ a la métrique :

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i} \quad \text{pour } x = (x_0 x_1 \dots), y = (y_0 y_1 \dots).$$

Soit $A = (a_{ij})$ une *matrice de transition* $N \times N$ avec $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $\sum_j a_{ij} \geq 1$ et $\sum_i a_{ij} \geq 1$. On définit le sous-espace :

$$\Sigma_A^+ = \left\{ x \in \Sigma_N^+ : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

L'application $\sigma_A : \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+$ (restriction de σ) est un *sous-décalage de type fini*.

Définition 3.13. Soit $\mathcal{A} = \{s_1, \dots, s_n\}$ un alphabet fini. On appelle *matrice de transition* une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le symbole } s_j \text{ peut suivre le symbole } s_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice A encode ainsi les règles de transition autorisées pour les suites symboliques.

Exemple 3.3. Pour l'alphabet $\{0, 1\}$, considérons la règle : un 1 ne peut pas suivre un autre 1. La matrice de transition s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie : $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ sont permis et $1 \rightarrow 1$ est interdit (voir Figure 3.11).

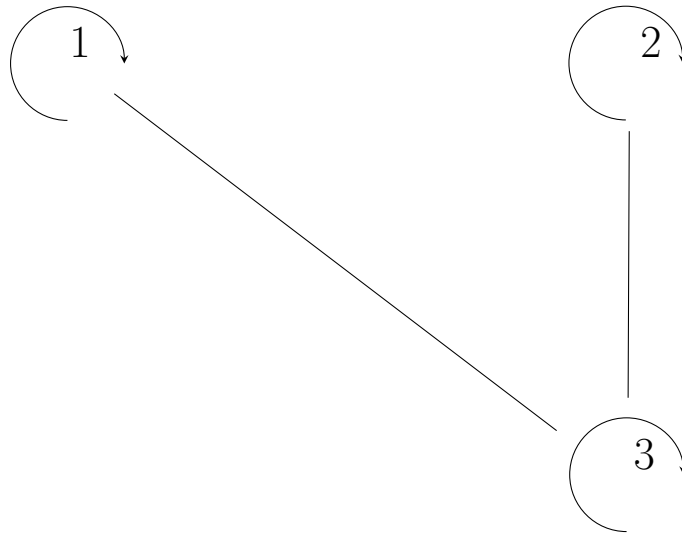


FIGURE 3.12 – Graphe de la transition dans l'exemple 3.4

Exemple 3.4. Pour la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, les séquences admissibles incluent $111 \dots$, $222 \dots$, $333 \dots$, $333 \dots 111 \dots$, mais pas de transitions $1 \rightarrow 2$ ou $3 \rightarrow 1$, la représentation graphique de est donnée dans Figure 3.12.

Lemme 3.6. *Le nombre de k -cycles de σ_A est égal à $\text{tr}(A^k)$.*

Démonstration. $\sigma_A^k(x) = x$ ssi x est $(\overline{x_0 \dots x_{k-1}})$ avec $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ (indices mod k). La somme :

$$\sum_{x_0, \dots, x_{k-1}} a_{x_0 x_1} \cdots a_{x_{k-1} x_0} = \text{tr}(A^k)$$

donne le nombre de tels cycles. □

Définition 3.14. Une matrice de transition A est *réductible* s'il existe i, j tels que $(A^k)_{ij} = 0$ pour tout $k \geq 1$. Sinon, elle est *irréductible* (il existe un chemin admissible entre toute paire i, j).

Exemple 3.5. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible (Figure 3.13).

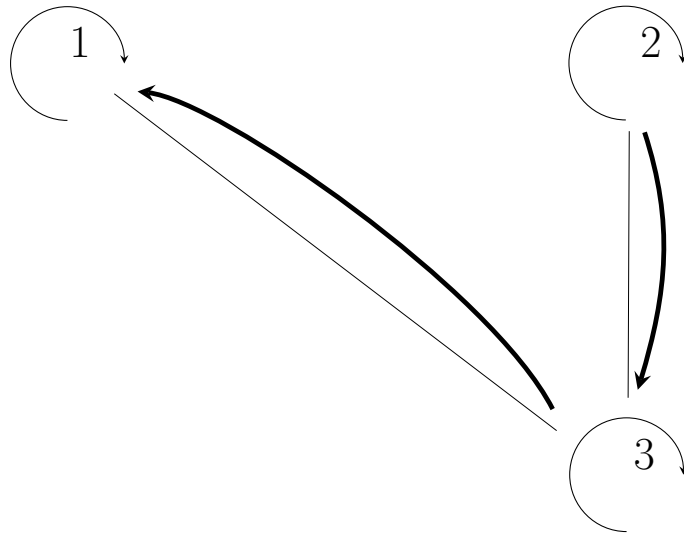


FIGURE 3.13 – Le graphe de la transition dans Exemple 3.5

Théorème 3.13. *Pour une matrice de transition A , les énoncés suivants sont équivalents :*

- A est irréductible.
- σ_A est topologiquement transitive sur Σ_A^+ .

Démonstration. Rappelons que la topologie de produit sur Σ_A^+ est engendrée par les *cylindres*

$$[u_0 \cdots u_{k-1}] = \{x \in \Sigma_A^+ : x_0 = u_0, \dots, x_{k-1} = u_{k-1}\},$$

où $u = u_0 \cdots u_{k-1}$ est un mot *permis* (i.e. $A_{u_\ell, u_{\ell+1}} = 1$ pour tout ℓ). Comme tout ouvert non vide contient un cylindre non vide, il suffit de vérifier la condition de transitivité pour des paires de cylindres.

(1) \Rightarrow (2). Supposons A irréductible. Soient $[u]$ et $[v]$ deux cylindres non vides, avec $u = u_0 \cdots u_{p-1}$ et $v = v_0 \cdots v_{q-1}$ des mots permis. Par irréductibilité, il existe $m \geq 0$ et un mot permis $w = w_1 \cdots w_m$ (tout mot vide étant autorisé si $m = 0$) tel que

$$A_{u_{p-1}, w_1} = A_{w_1, w_2} = \cdots = A_{w_{m-1}, w_m} = A_{w_m, v_0} = 1.$$

Ainsi, la concaténation uwv est un mot permis. Choisissons une suite infinie $z \in \Sigma_A^+$ qui prolonge v (toujours possible car le graphe a au moins une arête sortante depuis v_{q-1} dans un cylindre non vide). Posons

$$x = uwz \in [u].$$

Alors, par construction, $\sigma_A^{|uw|}(x)$ commence par v , donc $\sigma_A^{|uw|}(x) \in [v]$. Il s'ensuit que $\sigma_A^{|uw|}([u]) \cap [v] \neq \emptyset$, d'où la transitivité topologique.

(2) \Rightarrow (1). Supposons σ_A topologiquement transitive. Soient i, j deux symboles (états). Considérons les cylindres de longueur 1, $[i]$ et $[j]$, qui sont non vides. Par transitivité, il existe $n \geq 0$ et $x \in \Sigma_A^+$ tels que $x \in [i]$ et $\sigma_A^n(x) \in [j]$. Les $n + 1$ premiers symboles de x définissent alors un chemin permis

$$i = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n = j$$

dans le graphe orienté de A , de longueur n , ce qui équivaut à $(A^n)_{ij} > 0$. Comme i, j sont arbitraires, A est irréductible.

Les deux implications étant établies, on a l'équivalence. \square

Remarque 3.11. Dans le même cadre, A est *primitive* (i.e. $\exists N$ tel que $A^n > 0$ pour tout $n \geq N$) \iff le décalage σ_A est *topologiquement mélangeant*.

3.5.6 Conjugaison avec l'application tent

La puissance de la dynamique symbolique apparaît dans la conjugaison avec des systèmes continus. Considérons l'application tent $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Théorème 3.14. *Le système $([0, 1], T)$ est topologiquement conjugué au décalage unilatère (Σ_2^+, σ) via l'application :*

$$\phi(x) = (s_0, s_1, s_2, \dots) \quad \text{où} \quad s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } T^n(x) \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Cette conjugaison permet de transférer les propriétés dynamiques du décalage à l'application tent.

3.6

Automorphismes Hyperboliques du Tore (adapté depuis R. L. Devaney [13])

Nous abordons ici une classe fondamentale de systèmes dynamiques : les automorphismes hyperboliques du tore (systèmes d'Anosov). Ces transformations présentent un chaos uniforme sur tout l'espace, tout en admettant une description complète. Leur particularité topologique réside dans leur définition naturelle sur le tore \mathbb{T}^n contrairement aux

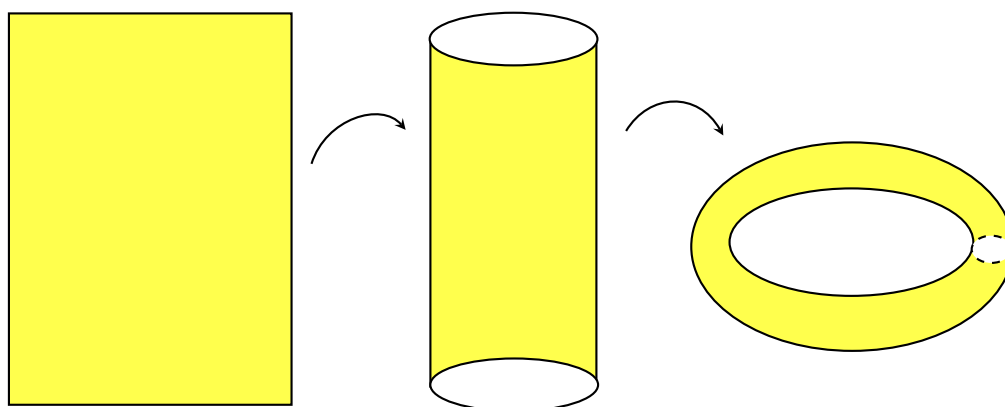


FIGURE 3.14 – Construction d'un tore à partir d'un carré.

systèmes euclidiens précédents. Bien qu'induites par des applications linéaires simples sur \mathbb{R}^n , leur réduction modulo \mathbb{Z}^n engendre une dynamique complexe où stabilité hyperbolique et ergodicité coexistent.

Définition 3.15 (Tore n -dimensionnel). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une relation d'équivalence \sim sur \mathbb{R}^n par :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n,$$

c'est-à-dire si et seulement si $x_j - y_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Le tore n -dimensionnel, noté \mathbb{T}^n , est l'espace quotient :

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.$$

Chaque élément $[x] \in \mathbb{T}^n$ est la classe d'équivalence d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ modulo le réseau \mathbb{Z}^n . Pour $n = 2$, on parle de tore bidimensionnel.

Géométriquement, cette définition peut être visualisée comme suit. Considérons le carré unité dans le plan $0 \leq x, y \leq 1$. Sous les identifications ci-dessus, seuls les points sur la frontière du carré doivent être considérés. En effet, la frontière supérieure $y = 1$ doit être identifiée à la frontière inférieure $y = 0$, et de même les frontières gauche et droite $x = 0$ et $x = 1$ doivent être identifiées. Lorsque cela est fait, le carré devient d'abord un cylindre puis un tore, comme sur la Figure 3.14.

Remarque 3.12.

1. Cette définition n'est pas limitée à deux dimensions; on peut définir un tore n -dimensionnel en utilisant la même relation d'équivalence sur \mathbb{R}^n (voir Exercice 55).

2. Le tore peut aussi être vu comme le produit cartésien de deux cercles (voir Exercice 54).

3. Notons T le tore, et π la projection naturelle de \mathbb{R}^2 sur T , c'est-à-dire

$$\pi(x, y) = [x, y] = \pi(x + M, y + N).$$

Certains systèmes dynamiques sur un tore peuvent être décrits plus efficacement dans le plan puis projetés sur le tore. Par exemple, supposons que $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ait la propriété

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} x + M \\ y + N \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2,$$

pour tous les points du plan et tous les entiers M et N . Il s'ensuit que Alors

$$\pi \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pi \circ F \begin{pmatrix} x + M \\ y + N \end{pmatrix}.$$

Donc, F induit une application bien définie \hat{F} sur le tore par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\hat{F}} & T \end{array}$$

3.6.1 Automorphismes Hyperboliques du Tore

Si L est une application linéaire dont la matrice est à coefficients entiers, alors \hat{L} est bien définie sur T . On appelle \hat{L} un automorphisme torique. Nous imposons quelques hypothèses supplémentaires sur L .

Définition 3.16. Soit $L(x) = A \cdot x$ où A est une matrice 2×2 vérifiant

- toutes les entrées de A sont des entiers ;
- $\det(A) = \pm 1$;
- A est hyperbolique.

L'application induite sur T par A est appelée un *automorphisme torique hyperbolique* et est notée L_A . L_A est différentiable, et comme $\det(A) = \pm 1$, l'inverse A^{-1} est aussi à coefficients entiers et hyperbolique. Ainsi A^{-1} induit l'inverse de L_A , ce qui montre que L_A est un difféomorphisme de T .

Proposition 3.11. *Les points périodiques de L_A sont denses dans T .*

Preuve. Soit p un point de T à coordonnées rationnelles, que l'on peut écrire $[\alpha/k, \beta/k]$ avec α, β, k entiers. Ces points sont denses dans T . On montre que p est périodique de période inférieure ou égale à k^2 en utilisant que A permute un ensemble fini de tels points.

Comme exemple, si L est une application linéaire dont la représentation matricielle est une matrice entière, alors \hat{L} est clairement bien définie sur T . \hat{L} est appelé un automorphisme du tore.

Définition 3.17. Soit $L(x) = A \cdot x$ où A est une matrice 2×2 vérifiant :

- Tous les coefficients de A sont entiers
- $\det(A) = \pm 1$
- A est hyperbolique

L'application induite sur T par A est appelée automorphisme hyperbolique du tore et est notée L_A . L_A est différentiable (sa jacobienne est simplement A). De plus, puisque $\det(A) = \pm 1$, l'inverse de A est aussi une matrice entière hyperbolique. Ainsi L_A est un difféomorphisme de T .

3.6.2 Propriétés Dynamiques

Proposition 3.12. *Les points périodiques de L_A sont denses dans T .*

Démonstration. Soit p un point quelconque dans T à coordonnées rationnelles. En trouvant un dénominateur commun, on peut supposer que p est de la forme $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$ où α, β, k sont entiers. Ces points sont clairement denses dans T . Nous affirmons que p est périodique de période $\leq k^2$.

Il y a exactement k^2 points dans T de la forme $[\alpha/k, \beta/k]$ avec $0 \leq \alpha, \beta < k$. De plus, l'image de tout tel point par L_A peut aussi s'écrire sous cette forme car les coefficients de A sont entiers. Ainsi L_A permute ces points. Par conséquent, il existe des entiers i et j tels que $L_A^i(p) = L_A^j(p)$ avec $|i - j| \leq k^2$. \square

Exemple 3.6. Considérons l'application $L_A : T \rightarrow T$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point $[0, 0]$ est un point fixe. Le point $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est périodique de période 3 :

$$L_A[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = [\frac{1}{2}, 0], \quad L_A[\frac{1}{2}, 0] = [0, \frac{1}{2}], \quad L_A[0, \frac{1}{2}] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

La densité des points périodiques n'est que le début de l'histoire du comportement chaotique de L_A . Puisque A est hyperbolique de déterminant ± 1 , les valeurs propres λ_s et λ_u vérifient $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$. Les sous-espaces stables et instables W^s et W^u sont des droites passant par l'origine dans \mathbb{R}^2 . Pour $[x, y] \in T$, soit ℓ_s et ℓ_u des droites dans \mathbb{R}^2 se coupant en (x, y) et parallèles à W^s et W^u respectivement. Nous notons :

$$W^s[x, y] = \pi(\ell_s), \quad W^u[x, y] = \pi(\ell_u).$$

Proposition 3.13.

— $W^s[x, y]$ est l'ensemble stable associé à $[x, y]$, i.e. si $[x', y'] \in W^s[x, y]$ alors

$$d(L_A^n[x', y'], L_A^n[x, y]) \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$

— $W^u[x, y]$ est l'ensemble instable associé à $[x, y]$

Proposition 3.14. $W^s[x, y]$ et $W^u[x, y]$ sont denses dans T pour chaque $[x, y] \in T$.

Démonstration. Considérons W^s dans \mathbb{R}^2 . Supposons que W^s ait une pente irrationnelle. Si ce n'était pas le cas, W^s passerait par un point à coordonnées entières (M, N) , mais alors les itérés de (M, N) auraient des coordonnées entières, ce qui contredit $L^n(M, N) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Considérons les intersections successives de W^s avec les droites $y = N$. Soit x_N l'abscisse du point d'intersection. Notons que x_1 est l'inverse de la pente de W^s , qui est irrationnelle. Sur le tore, les points (x_j, j) se projettent sur des points de la forme $[\alpha_j, 0]$. Ces points sont denses dans le cercle $y = 0$ par le théorème de Jacobi. \square

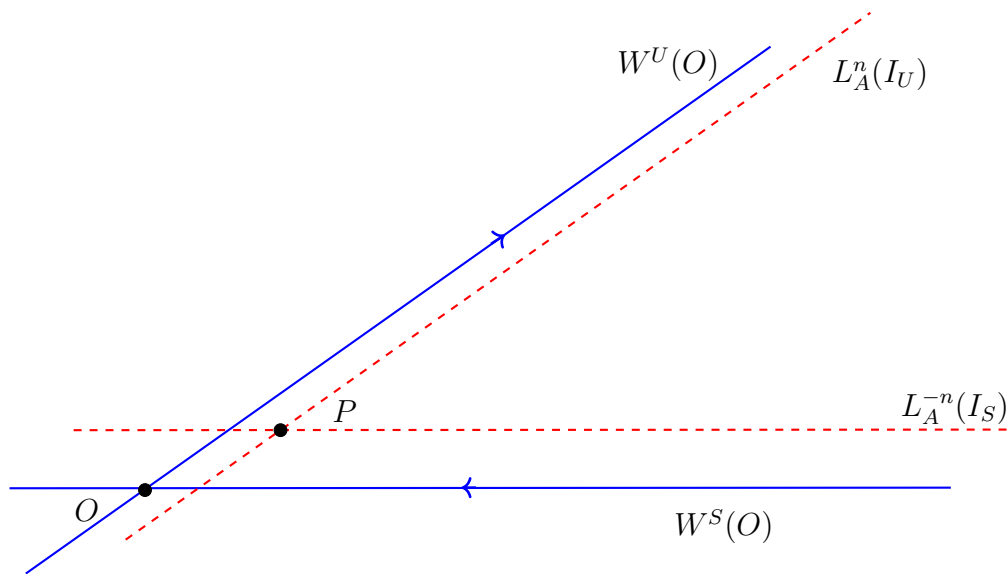
3.6.3 Points Homoclines et Chaos

Définition 3.18. Soit $[x, y] \in T$ un point périodique pour L_A . Un point homocline à $[x, y]$ est un point $p \neq [x, y]$ situé dans $W^s[x, y] \cap W^u[x, y]$.

Proposition 3.15. Les points homoclines transverses sont denses dans T .

Ces idées nous permettent aussi de montrer que L_A est topologiquement transitif. Soient U et V deux ouverts quelconques dans T . Nous allons trouver un point $[p]$ dans U et un entier k tel que $L_A^k[p] \in V$. Nous pouvons sélectionner des points $[r] \in U$ et $[s] \in V$ homoclines à $[0]$.

En utilisant la dilatation le long des variétés instables et la contraction le long des variétés stables (Figure 3.15), on montre qu'il existe un point $[q] \in L_A^n(I_u) \cap L_A^{-n}(I_s)$. Alors $[p] = L_A^{-n}[q] \in U$ et $L_A^{2n}[p] \in V$.

FIGURE 3.15 – Images $L_A^n(I_u)$ et $L_A^{-n}(I_s)$

Enfin, L_A a une dépendance sensible aux conditions initiales. Si $[p] \in T$ et $[q] \in W^u[p]$, chaque itération de L_A allonge la distance entre les images de $[p]$ et $[q]$ le long de $W^u[p]$.

Théorème 3.15. *Soit L_A un automorphisme hyperbolique du tore T . Alors :*

- Les points périodiques de L_A sont denses dans T
- L_A est topologiquement transitif
- L_A a une dépendance sensible aux conditions initiales

Ainsi, un automorphisme hyperbolique du tore est chaotique sur tout T .

3.7

Exemples Classiques de Systèmes Chaotiques dans le Plan

3.7.1 Itération du chat d'Arnold

L'itération du chat d'Arnold est définie par :

$$T(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} (x_n + y_n) \pmod{1} \\ (x_n + 2y_n) \pmod{1} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Ce système est chaotique et conserve l'aire (il est conservatif).

3.7.1.1 Propriétés algébriques

Sous forme matricielle :

$$v_{n+1} = Av_n \pmod{1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ ($\det A = 1$), valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

Points périodiques Points fixes : solution de $Av \equiv v \pmod{1}$:

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Solution unique : $(0, 0)$.

3.7.1.2 Propriétés dynamiques

Théorème 3.16. *La transformation T définie par l'équation ((3.5)) est hyperbolique : l'espace tangent en chaque point se décompose en la somme directe de sous-espaces stables et instables invariants.*

Démonstration. On résout $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\lambda_1 > 1$ et $0 < \lambda_2 < 1$, il existe des vecteurs propres réels v_1, v_2 donnant la décomposition recherchée. \square

Théorème 3.17 (Ergodicité et mélange Katok [23]). *Soit A une matrice entière inversible définissant un automorphisme hyperbolique du tore \mathbb{T}^n , c'est-à-dire que :*

- $\det A = \pm 1$,
- A n'a pas de valeurs propres de module 1.

Alors l'automorphisme linéaire $T : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ donné par

$$T(x) = Ax \pmod{\mathbb{Z}^n}$$

préserve la mesure de Lebesgue et satisfait les propriétés suivantes :

1. **Ergodicité** : Pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{T}^n$ tel que $T^{-1}(B) = B$, on a

$$\lambda(B) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(B) = 1.$$

Autrement dit, il n'existe pas d'ensemble invariant non trivial.

2. **Mélange** : Pour tous ensembles mesurables $B, C \subset \mathbb{T}^n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T^{-n}(B) \cap C) = \lambda(B) \lambda(C).$$

Ainsi, les images de B se répartissent uniformément sur le tore et se « mélangent » avec C .

Remarque 3.13. L'automorphisme hyperbolique $T(x) = Ax \pmod{1}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est ergodique car :

1. $|\det(A)| = 1$ (préservation de la mesure).
2. Les valeurs propres $\lambda_1 > 1 > |\lambda_2|$ (hyperbolicité).

Exposants de Lyapunov Les exposants de Lyapunov (Figure (3.16)) caractérisent le taux moyen de divergence/convergence infinitésimale :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|DT^n \cdot v_i\| \quad \text{pour } v_i \in E_i$$

Pour le chat d'Arnold :

$$\lambda_1 = \ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \approx 0.962, \quad \lambda_2 = \ln \left| \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right| \approx -0.962.$$

Sensibilité aux conditions initiales La sensibilité est quantifiée par l'exposant de Lyapunov positif :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{T}^2, \|x - y\| < \delta \implies \|T^n(x) - T^n(y)\| \sim \varepsilon e^{n\lambda_1}$$

Une erreur initiale δ est amplifiée exponentiellement avec taux $\lambda_1 > 0$. En effet, la Figure 3.17 montre une distribution uniforme et apparemment aléatoire des points sur le tore $[0, 1] \times [0, 1]$. Après 1000 itérations, l'orbite recouvre densément tout l'espace des phases sans laisser de régions vides.

Cette distribution homogène est une manifestation directe de :

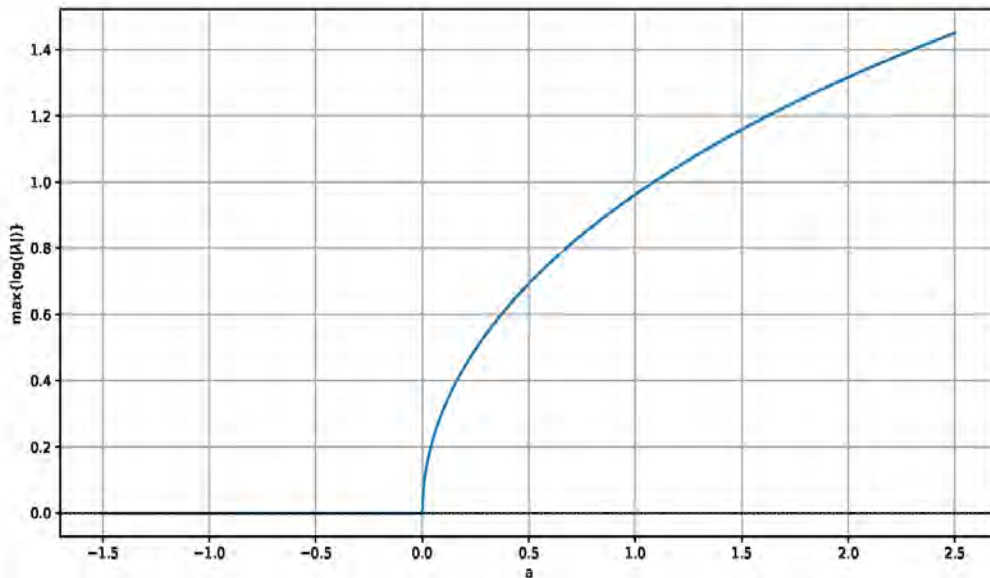


FIGURE 3.16 – Pour chaque valeur de a on calcule le plus grand exposant de Lyapunov de l'itération (3.5).

- L'ergodicité du système : L'orbite visite de manière dense tout l'espace des phases.
- La préservation de la mesure : La distribution uniforme correspond à la mesure de Lebesgue invariante.
- La transitivité topologique : L'existence d'une orbite dense sur le tore.

Cette figure illustre parfaitement le théorème ergodique de Birkhoff : la moyenne temporelle le long de la trajectoire équivaut à la

3.7.1.3 Sensibilité aux conditions initiales

La distance entre deux trajectoires initialement proches ($\delta_0 \approx 10^{-5}$) croît exponentiellement, apparaissant comme une droite en échelle semi-logarithmique (voir Figure 3.18).

Cette croissance exponentielle révèle :

- Un exposant de Lyapunov positif $\lambda \approx \ln((3 + \sqrt{5})/2) \approx 0.962 > 0$.
- La nature chaotique du système : Sensibilité extrême aux conditions initiales.
- Le mélange : La divergence rapide des trajectoires permet l'exploration rapide de tout l'espace des phases.

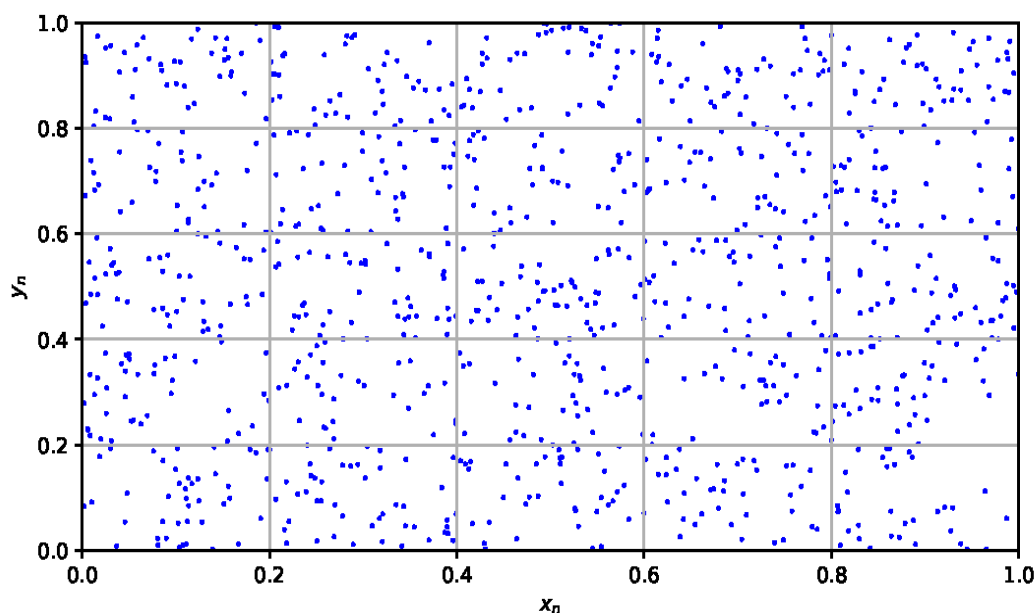


FIGURE 3.17 – Les 1000 premières itérations.

- La pente mesurée expérimentalement (≈ 0.962) coïncide remarquablement avec la valeur théorique $\lambda = \ln(\phi)$ où ϕ est le nombre d'or, confirmant la nature hyperbolique du système.

3.7.1.4 Diagramme de phase

Le champ vectoriel montre une structure globale de déformation avec des directions préférentielles de contraction et dilatation.

Cette visualisation (Figure 3.19) révèle :

- La décomposition stable/instable : Présence de directions de contraction (stable) et dilatation (instable).
- L'hyperbolicité uniforme : En chaque point, l'espace tangent se décompose en $E_s \oplus E_u$.
- L'absence de points attracteurs : Cohérent avec le caractère conservatif du système.
- La nature Anosov : Le système est uniformément hyperbolique sur tout le tore.

Ces visualisations démontrent expérimentalement les propriétés fondamentales du chat d'Arnold :

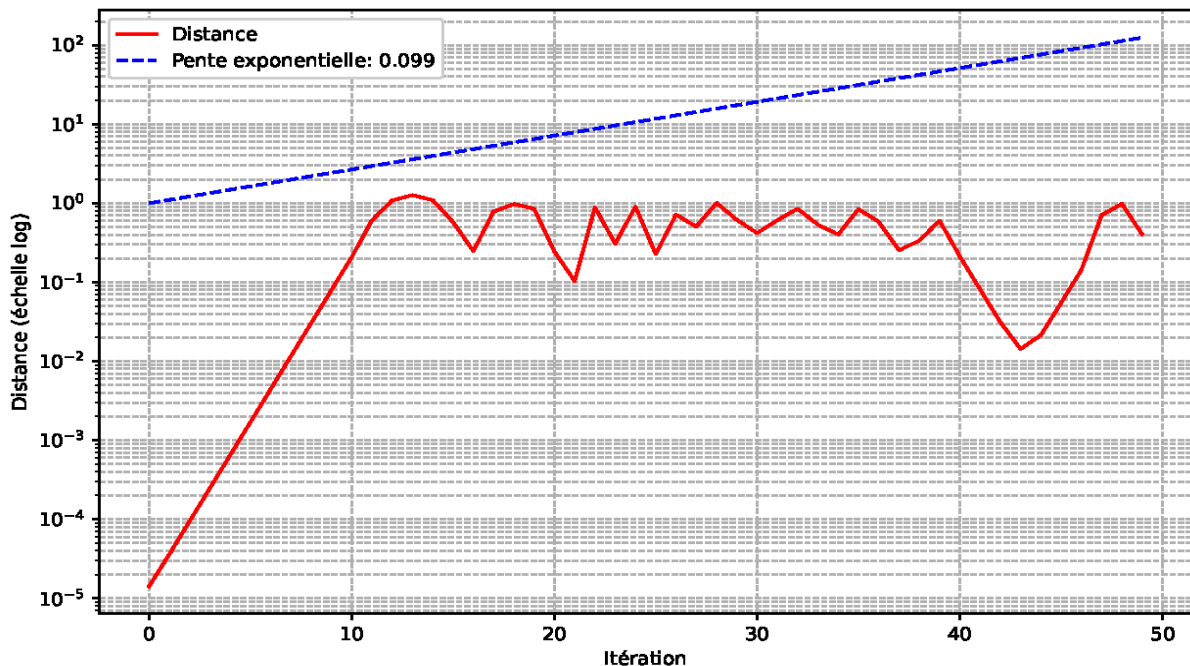


FIGURE 3.18 – Sensibilité aux conditions initiales.

- Chaos déterministe : Malgré sa simplicité mathématique, le système exhibe un comportement chaotique avec sensibilité exponentielle aux conditions initiales ($\lambda > 0$), révélé par la divergence rapide des trajectoires.
- Ergodisme et mélange : La distribution uniforme des orbites et la couverture dense de l'espace des phases confirment l'ergodicité et la propriété de mélange, essentiels pour les applications en théorie ergodique.
- Structure hyperbolique : La présence simultanée de directions stables et instables, visible dans le diagramme de phase (Figure 3.19), et confirmée par les valeurs propres de la matrice A , établit la nature hyperbolique uniforme du système.
- Universalité des points périodiques : La densité des orbites périodiques (démontrée ici pour $n = 2$, Figure 3.21) et leur structure rationnelle illustrent le théorème de densité des points périodiques pour les systèmes hyperboliques.

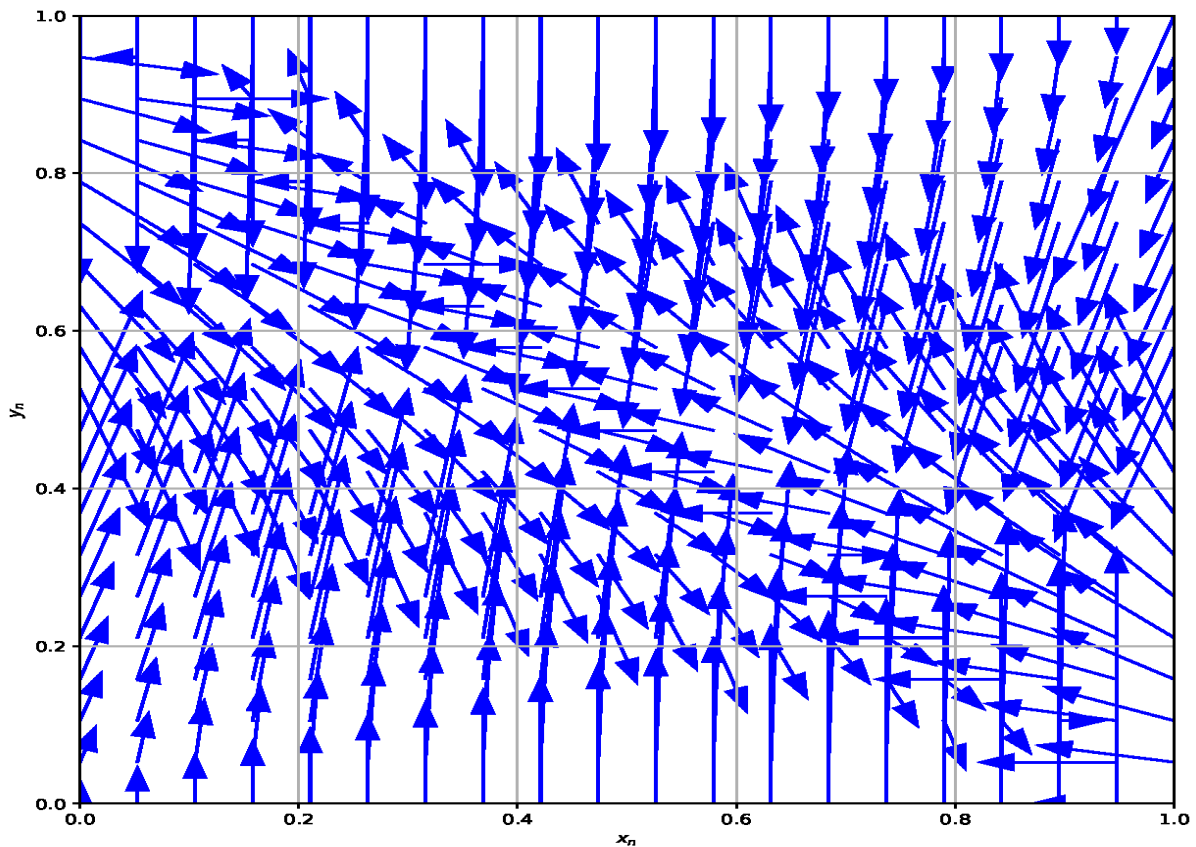


FIGURE 3.19 – Le champ vectoriel pour la récurrence du caht d’Arnold.

3.7.2 Application de Hénon

L’application de Hénon est un système discret chaotique défini par

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où a et b sont des paramètres réels.

3.7.2.1 Singularités

Les points fixes sont les solutions de l’équation

$$\begin{cases} x = 1 - ax^2 + y, \\ y = bx. \end{cases}$$

En substituant $y = bx$ dans la première équation, on obtient

$$x = 1 - ax^2 + bx$$

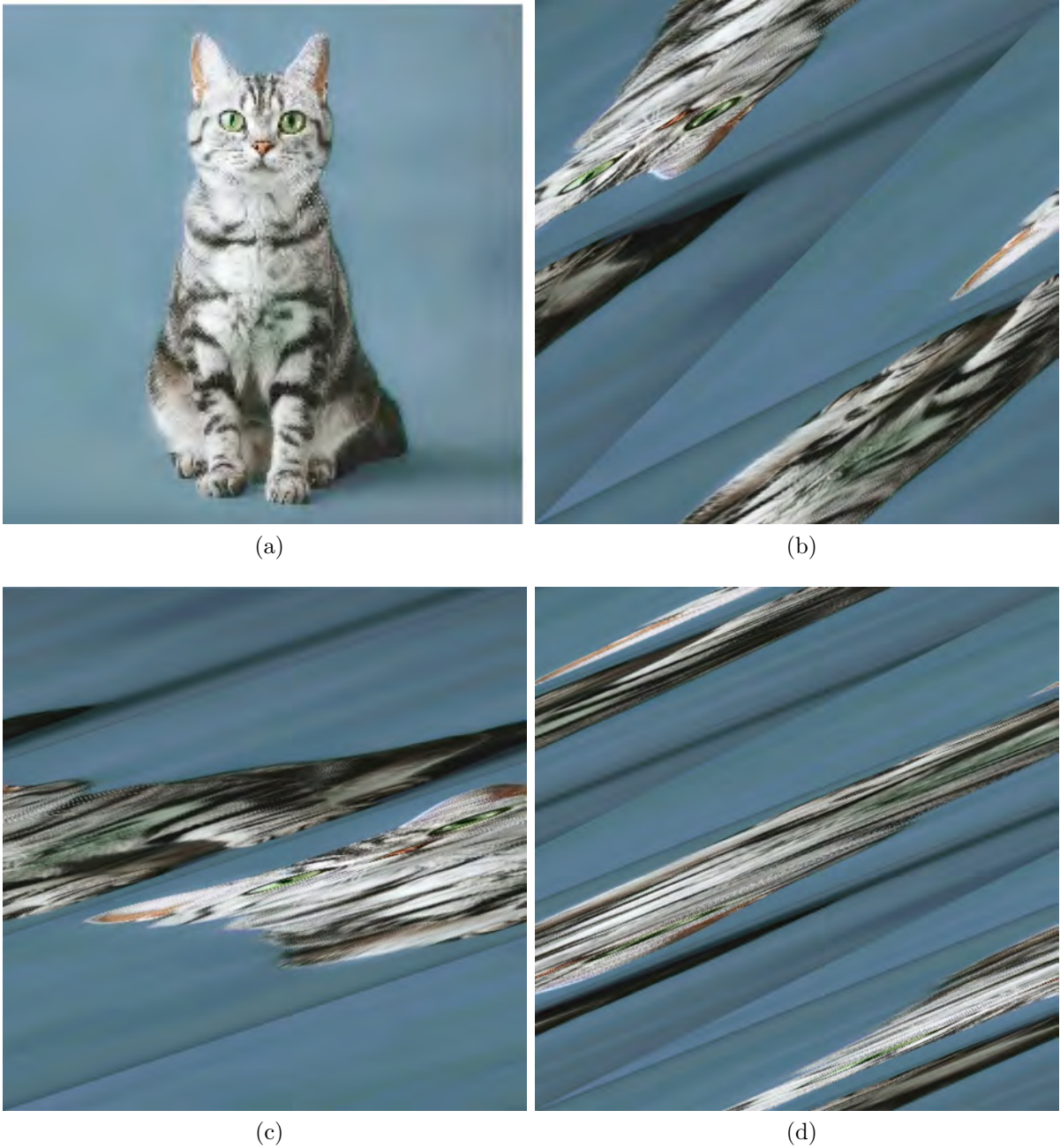


FIGURE 3.20 – Illustration de l’application (3.5) à travers quatre itérations appliquées sur une figure d’un gentil chat.

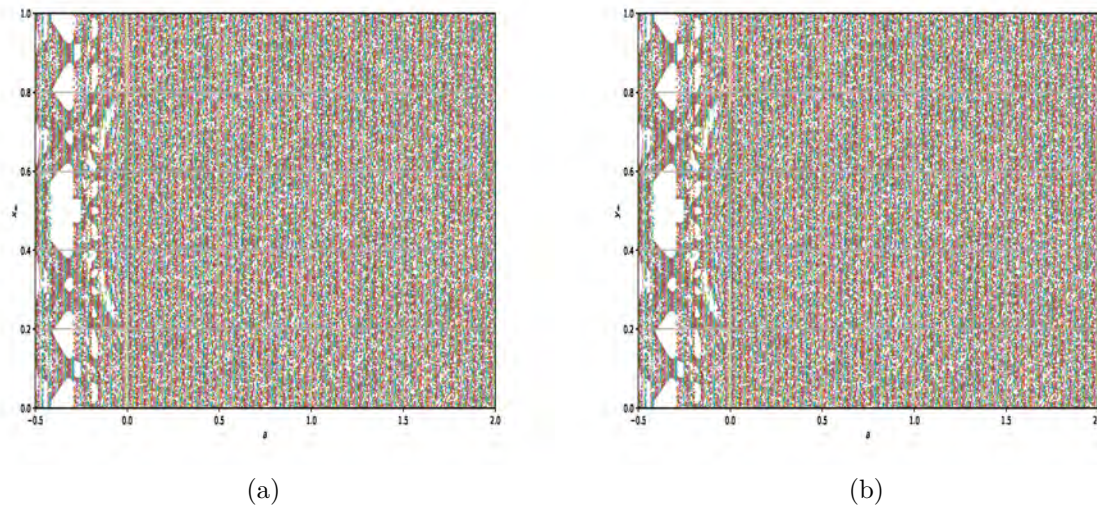


FIGURE 3.21 – Diagramme de bifurcation de l'itération d'Arnold.

c'est-à-dire

$$ax^2 - 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation quadratique donne deux points fixes $P_1 = (x_1^*, y_1^*)$ et $P_2 = (x_2^*, y_2^*)$ qui sont données par

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{b-1+\sqrt{(1+b)^2-4a}}{2a}, \\ y_1^* = bx_1^*, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_2^* = -\frac{b+1+\sqrt{(1+b)^2-4a}}{2a}, \\ y_2^* = bx_2^*. \end{cases}$$

3.7.2.2 Matrice Jacobienne et valeurs propres

La matrice jacobienne de $F(x, y)$ est

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (1 - ax^2 + y) & \frac{\partial}{\partial y} (1 - ax^2 + y) \\ \frac{\partial}{\partial x} (bx) & \frac{\partial}{\partial y} (bx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque point fixe (x^*, y^*) , la matrice jacobienne évaluée est

$$J^* := DF(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -2ax^* & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres λ de cette matrice sont les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \text{tr}(J^*)\lambda + \det(J^*) = 0,$$

où

$$\text{tr}(J^*) = -2ax^* \quad \text{et} \quad \det(J^*) = -b.$$

Cela donne l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + (2ax^*)\lambda - b = 0.$$

Les solutions en termes de valeurs propres λ_1 et λ_2 sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -ax^* + \sqrt{(ax^*)^2 + 2b}, \\ \lambda_2 &= -ax^* - \sqrt{(ax^*)^2 + 2b}. \end{aligned}$$

3.7.2.3 Conditions de Stabilité

Pour que le point fixe (x^*, y^*) soit stable, il faut que

$$|\lambda| < 1$$

pour toutes les valeurs propres λ trouvées. En fonction des valeurs de a et b , cette condition peut indiquer la stabilité, une bifurcation de période-doublée ou un comportement chaotique pour l'itérateur de Hénon. En faisant varier a entre 0 et 1.4, on observe deux zones :

- Une zone stable pour $a \in [0, 1.052]$.
- Une zone chaotique pour $a \in]1.052, 1.4]$.

3.7.2.4 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation montre comment le comportement du système change en fonction du paramètre a Figure 3.22. Pour $b = 0.3$, on observe les phénomènes suivants :

- Pour $-0.1225 < a < 0.3675$, les itérations convergent vers un point fixe.
- Pour $0.3675 < a < 0.9$, on observe un doublement de période.
- Pour $0.9 < a < 1.02$, un nouveau doublement de période se produit.
- Pour $a \geq 1.02$, le système devient chaotique.

Dans le plan paramétrique (a, b) , on a besoin d'outils graphique plus puissants pour étudier la stabilité des différents cycles de la récurrence de Hénon (voir Figure 3.23)

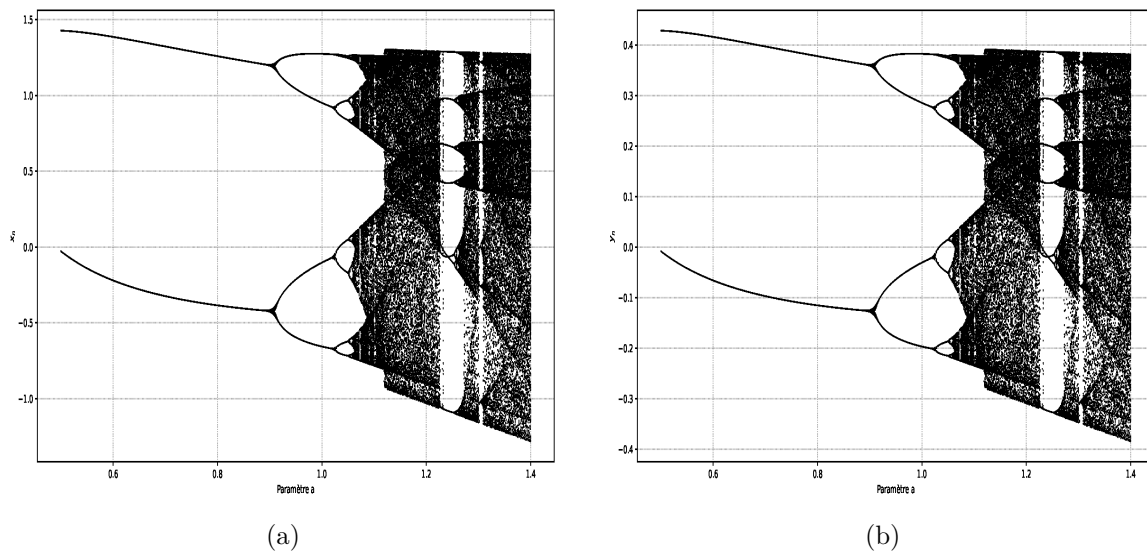


FIGURE 3.22 – Diagramme de bifurcation pour le système de Hénon.

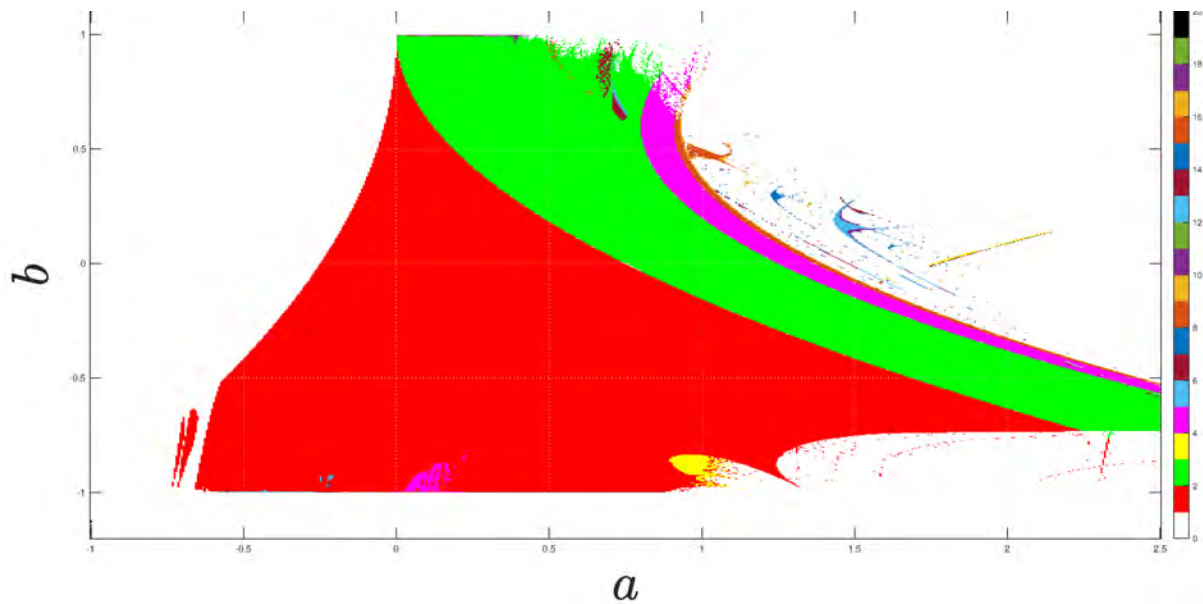


FIGURE 3.23 – Comportement dynamique de la récurrence de Hénon : L'espace complet des paramètres (a, b) caractérisé en différents types de dynamiques asymptotiques, à savoir la solution à point fixe (zone rouge), la solution périodique de période deux (zône verte), et la solution non bornée (zône blanche).

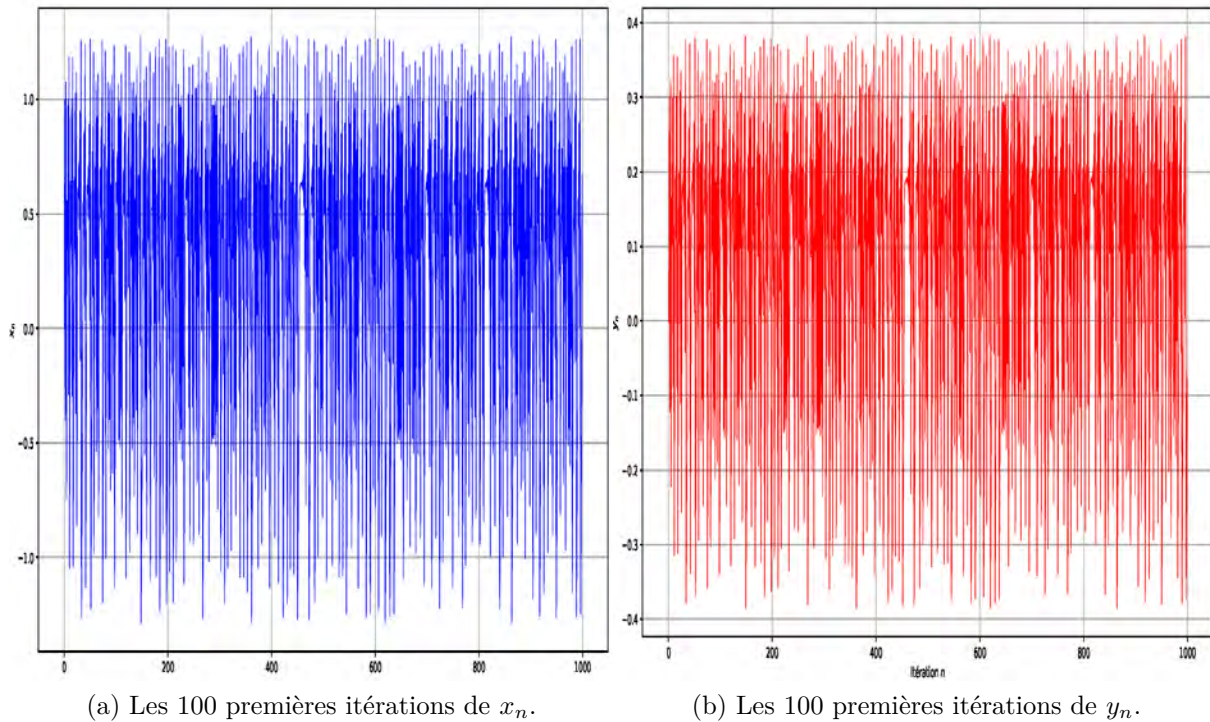


FIGURE 3.24 – Les 100 premières itérations de la récurrence (3.6), initialiser en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

3.7.2.5 Sensibilité aux conditions initiales

Les Figures 3.24a-3.24b montrent l'évolution des variables x_n et y_n pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Pour illustrer la sensibilité aux conditions initiales, on compare les orbites pour deux conditions initiales proches : $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$. Les figures suivantes (Figures 3.25) montrent la divergence des orbites.

3.7.2.6 Exposants de Lyapunov de l'Application de Hénon

Pour le calcul des exposants, nous utilisons l'algorithme de (Benettin et al. 1980 [5]) basé sur l'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir Annexe A.1). La Figure 3.28 montre

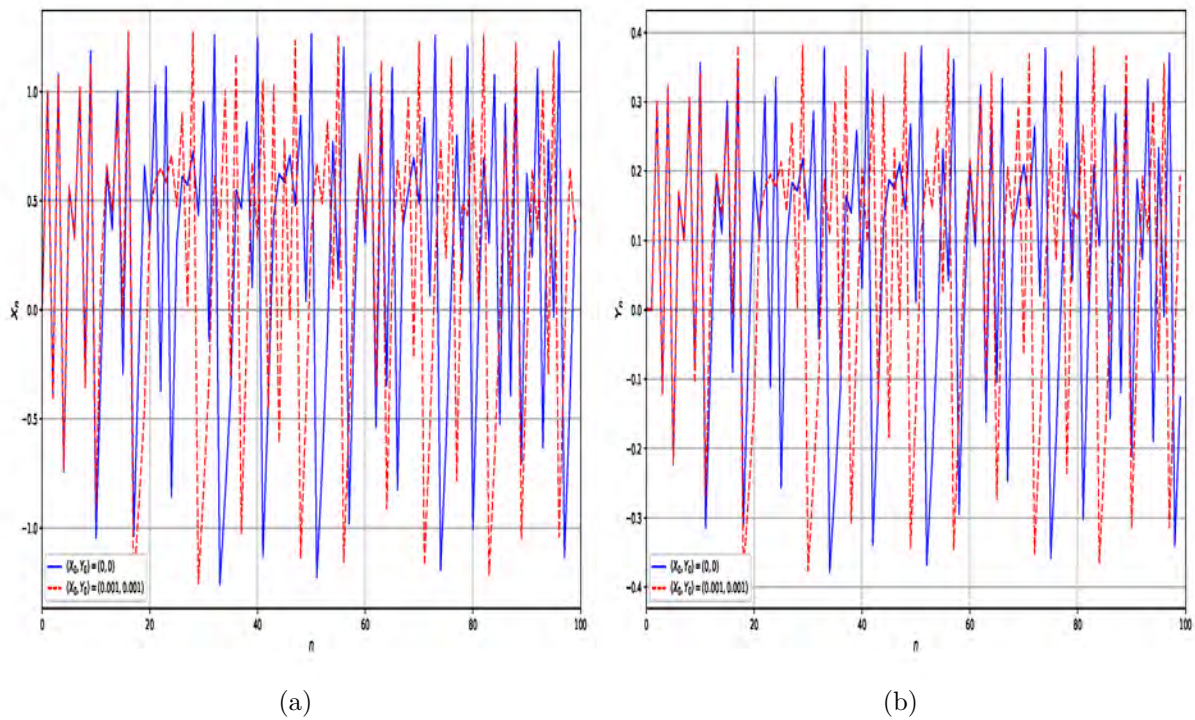


FIGURE 3.25 – Les 100 premières itérations de (3.6) pour deux conditions initiales proches. en (a) pour x_n et en (b) pour y_n .

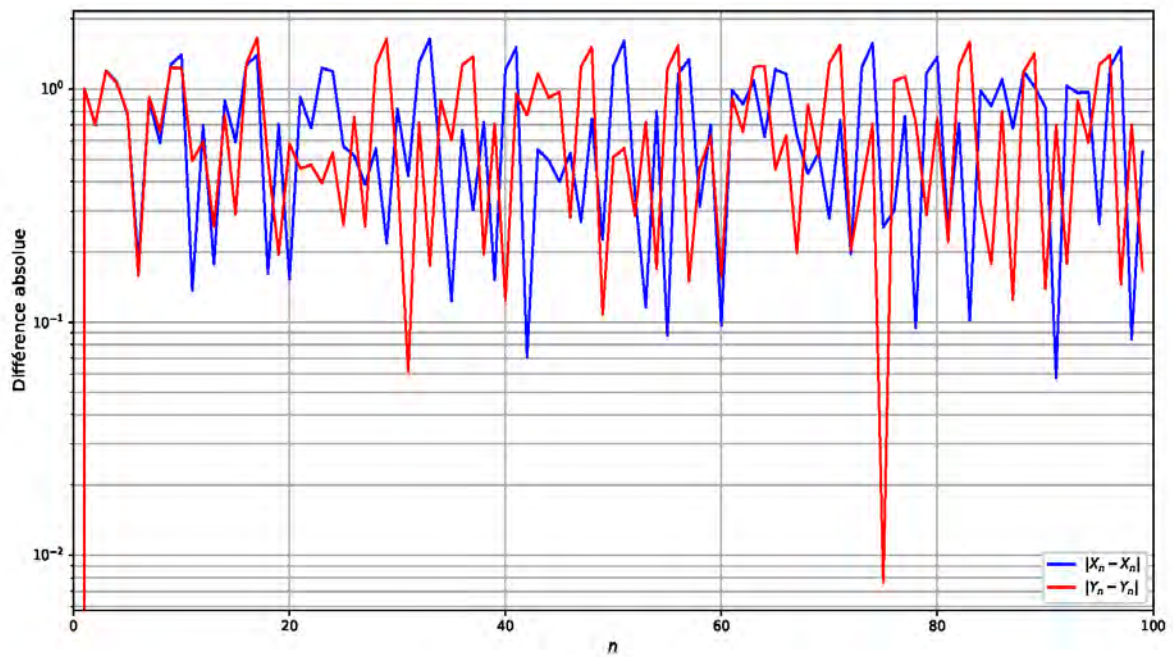


FIGURE 3.26 – Différence absolue entre les trajectoires (échelle logarithmique).

Couleur	Exposants de Lyapunov	Type d'attracteur
Vert foncé	$0 > \lambda_1 > \lambda_2$	Cycle périodique (type nœud)
Bleu	$0 > \lambda_1 = \lambda_2$	Cycle périodique (type foyer)
Vert clair	$0 = \lambda_1 > \lambda_2$	Cercle invariant
Rouge	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Attracteur chaotique
Blanc	-	Aucun attracteur détecté

TABLE 3.2 – Signification des couleurs dans le diagramme de Lyapunov (Figure 3.27)

les exposants pour l'application de Hénon avec $b = 0.2$ et a variant. Conformément aux remarques :

- Les exposants sont négatifs dans les régimes périodiques (remarque 5.6).
- $\lambda_1 \rightarrow 0$ aux points de bifurcation $a = a^*$ (remarque 5.7).
- $\lambda_1 > 0$ dans les régions chaotiques (remarque 5.11).

Proposition 3.16. *Si $F : U \rightarrow U$ est C^1 et $\det(DF) = c$ (constant non nul), alors pour les exposants $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$:*

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \log(|c|).$$

Corollaire 3.4. *Pour l'application de Hénon $H_{a,b}$, les exposants $\lambda_1 \geq \lambda_2$ vérifient :*

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \log(|b|), \quad \lambda_1 \geq \frac{1}{2} \log(|b|), \quad \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \log(|b|).$$

La Figure 3.27 montre un diagramme de Lyapunov dans le plan des paramètres (a, b) . La classification est donnée dans le Tableau 3.2.

3.7.2.7 Conjecture et Observations

Conjecture 3.1. *La région chaotique est contenue dans l'adhérence des paramètres où l'application de Hénon a un cycle périodique attractif (Benedicks & Carleson, 1991 ; Eckmann & Ruelle, 1985 [4, 15]).*

La Figure 3.27 montre des agrandissements de la région chaotique, révélant des structures complexes ("crevettes" et "hirondelles") suggérant une structure fractale. Le plus grand exposant de Lyapunov observé est $\lambda_1 \approx 0.6851 < \log 2$.

Théorème 3.18. *Pour tout $c < \log 2$, il existe $b_0 > 0$ tel que pour tout $b \in (0, b_0)$, il existe un ensemble $E(b)$ de mesure de Lebesgue unidimensionnelle positive tel que pour tout $a \in E(b)$, il existe un point z_0 dans l'attracteur avec $\lambda_1 \geq c$.*

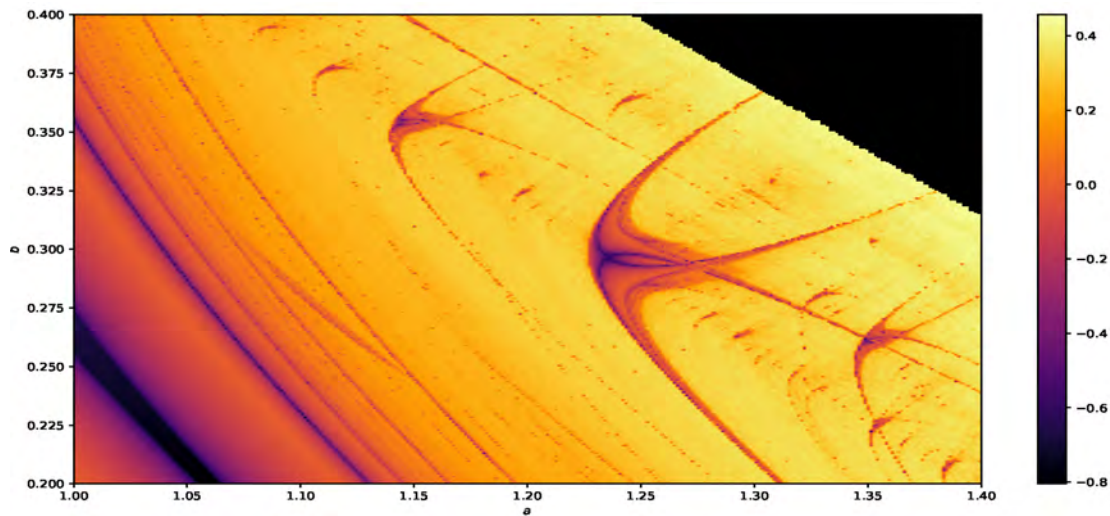


FIGURE 3.27 – Diagramme des exposants de Lyapunov de l'application de Hénon dans le plan des paramètres (a, b) .

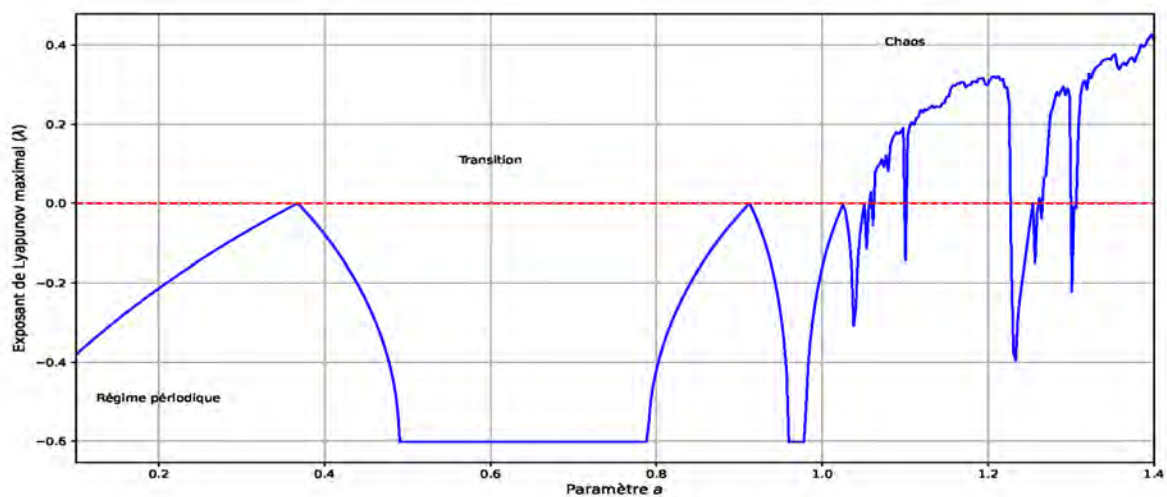
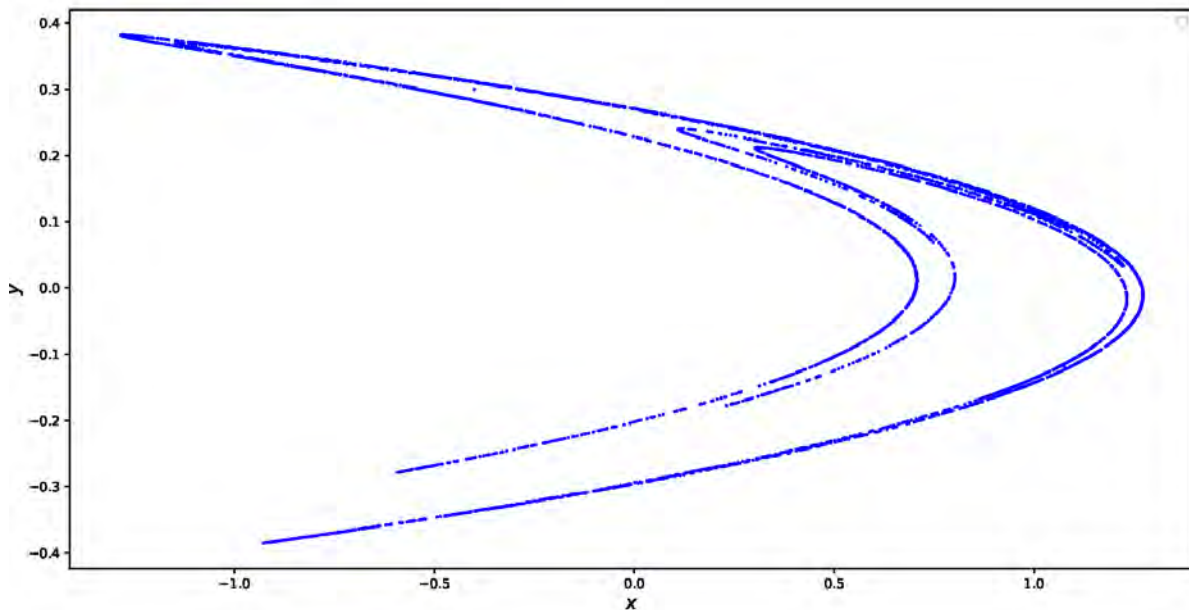


FIGURE 3.28 – Exposants de Lyapunov en fonction de a . Régime périodique ($a < 0.3$) : $\lambda < 0$, attracteur périodique stable. Cascade de bifurcations ($0.3 < a < 1.0$), λ oscille autour de 0 points où $\lambda = 0$ correspondent aux bifurcations doublements de période successifs. Régime chaotique ($a > 1.0$) : $\lambda > 0$, chaos (sensibilité aux conditions initiales), valeur typique à $a = 1.4$: $\lambda \approx 0.42$ bits/itération, fenêtres périodiques où $\lambda < 0$ (ex : $a \approx 1.15$). Divergence ($a > 1.4$) : Orbits échappent à l'infini $\lambda \rightarrow \infty$ théoriquement.

FIGURE 3.29 – Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

3.7.2.8 Attracteur de Hénon

Par ailleurs, pour certaines valeurs des paramètres, l'application de Hénon semble posséder un attracteur étrange présentant une structure semblable à celle d'un ensemble de Cantor (Figure 3.29). Par exemple, pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, l'attracteur semble constitué de courbes repliées très étroitement les unes sur les autres. De plus, un grossissement au voisinage du point fixe (x^*, y^*) (voir Figure 3.30) révèle que les courbes formant l'attracteur sont repliées de manière étroitement imbriquée, selon une structure fractale auto-similaire qui évoque un ensemble de Cantor. Ainsi, l'attracteur semble être le produit d'une variété unidimensionnelle avec un ensemble de Cantor. Cette structure est analogue à celle de l'attracteur étrange du système de Lorenz, qui apparaît comme le produit d'une variété bidimensionnelle avec un ensemble de Cantor (Hénon, 1976). Pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, l'attracteur de Hénon présente une structure fractale en forme de croissant. La Figure 3.29 suivante montre l'attracteur obtenu après 10 000 itérations.

3.7.2.9 Bassin d'attraction

L'itération ne converge pas pour toutes les conditions initiales (x_0, y_0) . L'ensemble des conditions initiales telles que l'itération converge est le bassin d'attraction de l'attracteur. Un calcul numérique permet de construire une partie de ce bassin d'attraction (voir Figure 3.31).

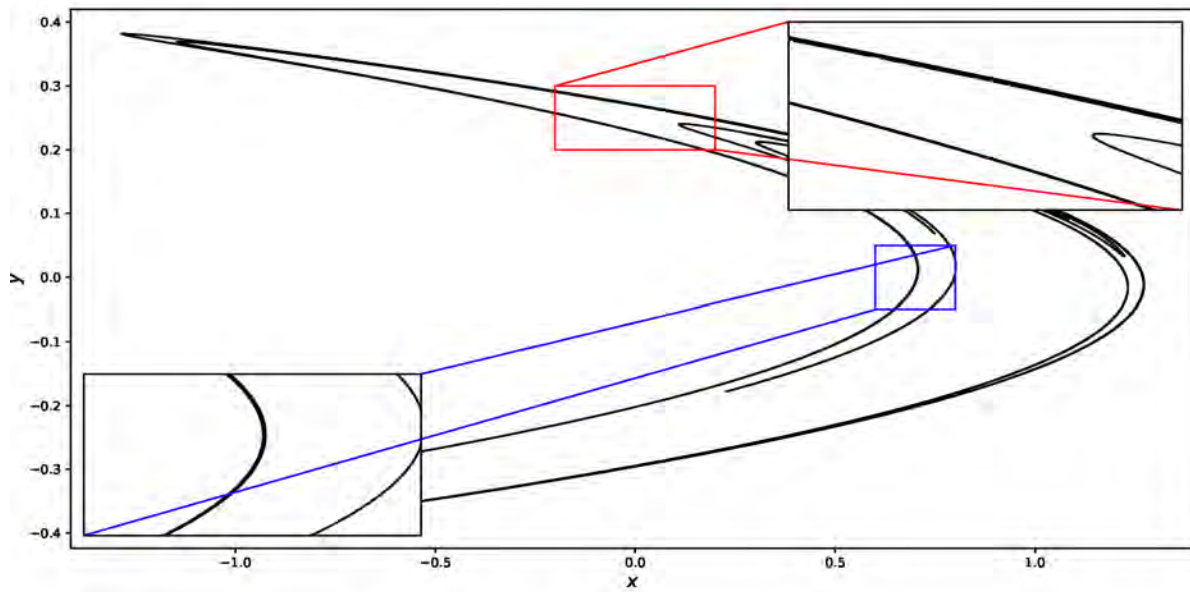


FIGURE 3.30 – L'attracteur de Hénon pour les paramètres $a = 1.4$ and $b = 0.3$ avec des agrandissements de deux régions situées sur l'attracteur.

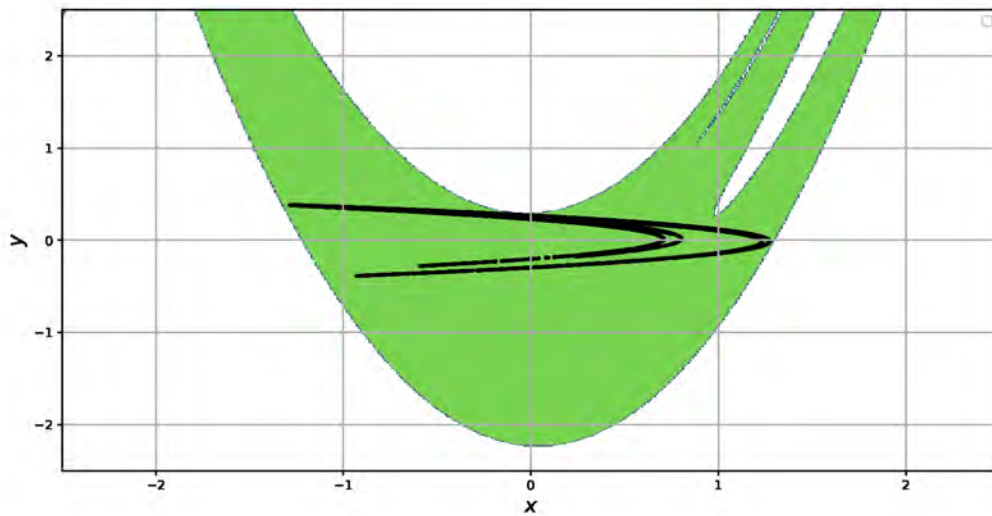


FIGURE 3.31 – Bassin d'attraction (en vert) de l'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$. L'attracteur est représenté en noir.



Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky est un mathématicien ukrainien, né le 7 décembre 1936, connu pour ses contributions fondamentales à la théorie des systèmes dynamiques. Diplômé de l'Université nationale Taras-Chevtchenko de Kyiv, il a mené des recherches au prestigieux Institut de mathématiques de l'Académie nationale des sciences d'Ukraine, où il a consacré sa carrière à l'étude des comportements complexes dans les systèmes non linéaires. Sa découverte la plus célèbre, le théorème de Sharkovsky (1964), établit un ordre strict sur les périodes des points fixes pour les fonctions continues sur des intervalles. Ce résultat est révolutionnaire dans l'analyse des itérations de fonctions et constitue une base essentielle dans

l'étude de la dynamique chaotique. L'ordre de Sharkovsky illustre notamment que si une fonction a un point périodique de période trois, elle doit avoir des points périodiques de toutes les autres périodes.

Sharkovsky a également exploré des thèmes en analyse non linéaire et en équations différentielles, contribuant à élargir notre compréhension de la transition entre l'ordre et le chaos dans divers contextes mathématiques. Son travail a influencé non seulement les mathématiques, mais aussi des domaines comme la physique, la biologie, et l'économie, où les systèmes dynamiques jouent un rôle crucial. Réputé pour son approche rigoureuse et sa créativité, Sharkovsky est célébré comme une figure clé de la mathématique moderne, ayant apporté des idées qui continuent d'inspirer de nouvelles recherches.

IV

Dynamique Holomorphe

La dynamique holomorphe étudie le comportement des itérations de fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann. Ce chapitre présente les concepts fondamentaux de cette théorie, incluant les ensembles de Julia et Fatou, ainsi que des exemples importants comme la méthode de Newton complexe.

4.1

Sphère de Riemann

Nous considérons l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ obtenu par adjonction au plan complexe \mathbb{C} , d'un point à l'infini. La projection stéréographique qui à tout point (x_1, x_2, x_3) de la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, excepté $(0, 0, 1)$, associe un nombre complexe

$$z = \pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},$$

permet d'identifier $\hat{\mathbb{C}}$ à la sphère \mathbb{S}^2 . De plus, la métrique sphérique $d_{\mathbb{S}}$ définie par

$$d_{\mathbb{S}}(z, w) \equiv \left\| \pi^{-1}(z) - \pi^{-1}(w) \right\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

et

$$d_{\mathbb{S}}(z, \infty) \equiv \lim_{w \rightarrow \infty} \left\| \pi^{-1}(z) - \pi^{-1}(w) \right\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

induit sur $\hat{\mathbb{C}}$ une structure de topologie qui, de plus les cartes $z \mapsto z$ sur \mathbb{C} et $z \mapsto \frac{1}{z}$ au voisinage de l'infini, munit $\hat{\mathbb{C}}$ d'une structure de variété compacte complexe de dimension 1, appelée la sphère de Riemann (voir [6]).

4.2

Dynamique des Fonctions Holomorphes

Définition 4.1. Une fonction $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est appelée fonction rationnelle si

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (4.1)$$

où P et Q sont deux polynômes complexes sans un facteur commun. Le degré de R est le nombre de points de $R^{-1}(a)$ (comptés avec multiplicité) pour $a \in \hat{\mathbb{C}}$, ou encore le maximum des degrés de P et de Q .

Le théorème suivant justifie l'intérêt pour les fractions rationnelles.

Théorème 4.1. *L'ensemble des applications holomorphes de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ dans elle-même coïncide avec le corps des fractions rationnelles.*

Démonstration. [1, 7] On note que la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ est compacte. Une fonction $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorphe est, par définition, holomorphe en tout point de \mathbb{C} , et possède un prolongement holomorphe en ∞ . Toute fonction holomorphe $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . En effet, une fonction holomorphe définie sur la sphère de Riemann n'a qu'un nombre fini de pôles (aucune singularité essentielle n'est permise sur une surface compacte). Soit f holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$. Alors f est méromorphe sur \mathbb{C} et a au plus un pôle en ∞ . En effet : Si f est holomorphe en ∞ , alors f est une fonction entière bornée (par compacité de $\hat{\mathbb{C}}$), donc constante par le théorème de Liouville. Sinon, f a un pôle en ∞ , donc il existe des polynômes P et Q tels que :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \text{avec } Q(z) \neq 0,$$

car les seules fonctions méromorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$ sont les fractions rationnelles. \square

Par la suite, on note $R^k \equiv R \circ \dots \circ R$ (k fois) et $R^0 := I_d$. La dynamique holomorphe est formée par la composition répétée de l'application R de $\hat{\mathbb{C}}$ dans lui même.

Définition 4.2. Prenons un point $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, la suite $\{z_n\}$ est définie par

$$z_{k+1} = R^{k+1}(z_0) = R(z_k).$$

Cette suite est appelée l'orbite - future - de z_0 notée $\mathcal{O}(z_0)$. L'orbite inverse de z_0 notée $\mathcal{O}^-(z_0)$, est l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^-(z_0) &= \{w : \exists k \in \mathbb{N}, R^k(w) = z_0\}, \\ &= \bigcup_k R^{-k}\{z_0\}. \end{aligned}$$

Le problème central de la dynamique holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ consiste à étudier les différents types d'orbites $\mathcal{O}^-(z_0)$, $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, sous l'action du « semi-groupe » $\{R^n\}_{n \geq 0}$ des itérés d'une fraction rationnelle R de degré supérieur à un, ainsi que les variations subies par ces orbites lorsque le point z_0 varie. Cela conduit à donner les définitions suivantes :

Définition 4.3. Un point $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ est périodique de période $p > 1$ (ou p -périodique) s'il vérifie les deux relations

$$\begin{aligned} R^p(\alpha) &= \alpha \\ R^i(\alpha) &\neq \alpha, \quad 1 < i < p. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Si

$$R(\alpha) = \alpha, \tag{4.3}$$

α est appelé point fixe.

Définition 4.4. Si α est p -périodique son orbite $\mathcal{O}(\alpha)$ est appelé aussi cycle d'ordre p (ou p -cycle) et on lui associe son multiplicateur μ défini par

$$\mu \equiv (R^p)'(\alpha) = \prod_{i=0}^{p-1} R'(R^i(\alpha)), \tag{4.4}$$

localement

$$R^p(\alpha) = \alpha + \mu(z - \alpha) + O(|z - \alpha|^2). \tag{4.5}$$

Définition 4.5. On dit que le cycle α est

répulsif	si $ \mu > 1$;
attractif (superattractif)	si $0 \leq \mu < 1$ ($\mu = 0$);
indifférent rationnel	si $\mu = e^{2i\pi m/n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$;
indifférent irrationnel	si $\mu = e^{2i\pi\theta}$, θ irrationnel.

4.3

La Dichotomie de Fatou et Julia

Historiquement, c'est Fatou et Julia qui furent les premiers à proposer la dichotomie de la sphère de Riemann en deux sous-ensembles disjoints sous l'action de la dynamique d'une fonction rationnelle.

Définition 4.6. Soit (X, d) un espace métrique et U un ouvert de X . La famille de fonctions $\{f_i : U \rightarrow X\}$ est équicontinue sur l'ensemble $E \subset U$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $d(x_1, x_2) < \delta$ pour $x_1, x_2 \in E$, implique $d(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \varepsilon$, pour tout i .

Définition 4.7. On dit que la suite de fonctions $\{f_k\}$ est normale au sens de Montel en un point $z \in \hat{\mathbb{C}}$, s'il existe un voisinage V de z tel que la suite $\{f_k : V \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}$ soit équicontinue.

Théorème 4.2. Soit U un domaine (ensemble ouvert et connexe) dans $\hat{\mathbb{C}}$; a, b, c , trois points distincts et $\{f_k : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}\}$ une suite de fonctions holomorphes, alors $\{f_k\}$ est normale sur U .

Démonstration. voir [1]. □

Définition 4.8. (La dichotomie de Julia et Fatou) L'ensemble de Fatou \mathcal{F}_R est l'ensemble des points où la suite de fonctions $\{R^k\}$ est normale; l'ensemble de Julia \mathcal{J}_R est l'ensemble défini par

$$\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}} - \mathcal{F}_R.$$

Autrement dit, La sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ est formée de deux ensembles complémentaires \mathcal{F}_R et \mathcal{J}_R ; l'ensemble de Fatou constitué des points $z \in \hat{\mathbb{C}}$ dont l'orbite $\mathcal{O}(z)$ est stable par perturbation du point initial z . En revanche, le comportement de l'orbite d'un point $z \in \mathcal{J}_R$ sous l'influence d'une perturbation de z n'est pas prévisible.

4.4

Exemples Importants

Nous traitons maintenant quelques exemples célèbres de la théorie des itérations holomorphes

4.4.1 L'itération de la transformation de Möbius

La transformation de Möbius est la fonction rationnelle de la forme

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

On peut facilement vérifier que

$$R(\infty) = \frac{a}{c}, \quad R\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

si $c \neq 0$. Et que $R(\infty) = \infty$, si $c = 0$. La transformation de Möbius est une classe de fonctions très strictes où il est possible de calculer explicitement les itérations successives. Par exemple, si $a = 3$, $b = -2$, $c = 2$ et $d = -1$, on a

$$R(z) = \frac{3z - 2}{2z - 1}.$$

Par induction

$$R^n(z) = \frac{(2n+1)z - 2n}{2nz - (2n-1)} = 1 + \frac{z-1}{2nz - (2n-1)},$$

et pour tout z on a

$$R^n(z) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Malgré les apparences le point 1 n'est pas un point fixe attractif. Puisque $R'(1) = 1$, quelques calculs montrent que pour $z_0 = 1 - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est assez petit, la suite $\{z_n\}$ commence par s'éloigner du point 1. Cependant elle finit par retourner vers celui-ci.

En général toute transformation de Möbius R possède un seul point fixe (double) ou deux points fixes distincts :

Cas 1 : R possède un seul point fixe. Supposons que R possède l'infini comme un point fixe unique. Alors $R(z) = z + \beta$, et pour $\beta \neq 0$ on a

$$R^n(z) = z + n\beta$$

pour tout z , $R^n(z) \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$.

Maintenant supposant que R admet $\alpha \in \mathbb{C}$ comme un point fixe unique. Dans ce cas, soit $M(z) = \frac{1}{z-\alpha}$, $(M^{-1}(z) = \alpha + \frac{1}{z})$ et définissons S par

$$S(z) = (MRM^{-1})(z). \quad (4.6)$$

S admet un point fixe z , si et seulement si $z = \infty$, ce qui implique que S est une translation et donc $S^n(z) \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$. De plus,

$$\begin{aligned} S^n(z) &= (MRM^{-1})(MRM^{-1}) \cdots (MRM^{-1})(z) \\ &= (MR^n M^{-1})(z), \end{aligned} \quad (4.7)$$

en remplaçant z par $M(z)$, et en appliquant M^{-1} , on obtient

$$M^{-1}S^n M = R^n,$$

impliquant

$$R^n(z) \rightarrow M^{-1}(\infty) = \alpha.$$

Donc si R est une application de Möbius avec un point fixe unique α , alors pour tout z , $R^n(z) \rightarrow \alpha$. Notons que la formule (4.6) permet de calculer R^n explicitement par

$$R^n = M^{-1}S^n M.$$

Cas 2 : R possède exactement deux points fixes distincts. Supposons que R fixe les deux points 0 et ∞ . Alors $R(z) = az$ et $R^n(z) = a^n z$, et pour tout z autre que 0 et ∞ , on a

$$\begin{aligned} R^n(z) &\rightarrow 0 && \text{si } |a| < 1; \\ |R^n| &= |z| && \text{si } |a| = 1; \\ R^n(z) &\rightarrow \infty && \text{si } |a| > 1. \end{aligned}$$

pour $|a| = 1$, on a aussi

- (i) a est la racine n -ème de l'unité et R^n est l'identité;
- (ii) a n'est pas une racine de l'unité, et les points $R^n(z)$ sont denses dans le cercle centré à l'origine et de rayon $|z|$.

Maintenant, on suppose que R admet exactement deux points fixes α_1 et α_2 où $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Soit la transformation de Möbius suivante

$$M(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}$$

qui transforme α_1 en 0 et α_2 en ∞ . Si $S = MRM^{-1}$, alors S fixe 0 et ∞ et les remarques précédentes s'appliquent dans ce cas. Nous avons vu que les itérés d'une fonction -assez simple- de degré un, à savoir les transformations de Möbius, se comportent d'une façon très simple, mais pour le reste de ce mémoire, nous serons seulement concernés par des fonctions rationnelles de degré supérieur ou égal à deux.

4.4.2 L'itération $z \mapsto z^2$

Soit l'itération quadratique

$$R(z) = z^2.$$

Les points fixes de R sont 0 (attractif), 1 (répulsif) et ∞ (attractif), et on a $z_n \rightarrow 0$, quand $|z_0| < 1$ et $z_n \rightarrow \infty$ quand $|z_0| > 1$. Il est évident que la dynamique intéressante de R (c'est-à-dire, l'action des itérés R^n) se produira sur le cercle d'unité

$$\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$$

D'abord, le cercle \mathbb{S}^1 a la propriété intéressante, d'être complètement invariant (c'est-à-dire, les points de \mathbb{S}^1 restent dans \mathbb{S}^1 , par les applications R et R^{-1}). Le fait que $\mathcal{J}_R = \mathbb{S}^1$, et l'invariance de \mathcal{J}_R est un des résultats de base dans la théorie générale. Le comportement des points $R^n(e^{i\theta})$ sur le cercle unité \mathbb{S}^1 est plutôt complexe et dépend du nombre θ (voir [13]).

Posons $z = e^{i\theta}$, on a

$$R^n(z) = e^{2^n i\theta}$$

donc, si z est de la forme

$$e^{\frac{2\pi ir}{2^m}} \quad (4.8)$$

pour certains entiers r et m , alors $R^m(z) = e^{2\pi ir} = 1$ et par conséquent

$$R^n(z) = 1 \quad \text{quand } n \geq m.$$

Notons que l'ensemble des points de la forme (4.8) est dense dans \mathbb{S}^1 et en partant d'un de ces points les itérations finissent sur le point fixe 1 après un nombre fini d'étapes. Par contre, si on démarre d'un point z_0 dans \mathbb{S}^1 , mais qui n'est pas de la forme (4.8), alors la suite z_n des itérations converge vers un point quelconque. En effet, si $z_n \rightarrow w$, alors w doit être un point fixe de R dans \mathbb{S}^1 et donc $w = 1$ qui est répulsif, et on doit avoir $z_n = 1$ pour un certain n (sinon $w = 1$ devient un point d'accumulation pour la suite $\{z_n\}$, contredisant le fait que w est un point fixe répulsif). Ce qui implique que z_0 doit être de la forme (4.8) contrairement à l'hypothèse.

Dans la suite nous analyserons le comportement complexe et « chaotique » des itérations $R^n(z)$ dans le cercle unité. En effet chaque arc du cercle \mathbb{S}^1 contient une infinité de points qui convergent vers le point 1 et d'autres qui ne convergent vers aucun point. Pour un point z_0 dans \mathbb{S}^1 on peut choisir un autre point $w_0 \in \mathbb{S}^1$ arbitrairement proche de z_0 de façon à ce que z_n et w_n se comportent différemment et que si z_0 et w_0 appartiennent au disque unité

$$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}.$$

Les points z_n et w_n convergent de manière similaire (convergence vers 0). La même chose si z_n et w_n sont dans $\{z : |z| > 1\}$ (les deux suites convergent vers ∞) ce qui implique

$$\mathcal{J}_R = \mathbb{S}^1$$

et

$$\mathcal{F}_R = \mathbb{S}^1 - \hat{\mathbb{C}}.$$

Maintenant, prenons n'importe quel arc I d'angle positif dans \mathbb{S}^1 . L'application $R^2 : z \mapsto z^2$ double l'angle polaire des points de \mathbb{S}^1 donc si l'arc I correspond à l'angle θ alors, l'arc $R(I)$ va correspondre à l'angle 2θ . Ce qui implique que pour n assez grand, $R^n(I)$ couvre le cercle unité \mathbb{S}^1 . Cette propriété reste valable pour I assez petit. Le fait que sous l'action de R^n un arc arbitrairement petit couvre le cercle unité \mathbb{S}^1 tout entier est une propriété très importante pour l'ensemble \mathcal{J}_R .

Considérons un point n -périodique de R , qui est un point fixe de R^n et puisque

$$R^n(z) = z^{2^n},$$

alors $R^n(z) = z$, impliquant

$$z^{2^n-1} = 1.$$

Donc, si

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{2^n-1}},$$

alors α est un point fixe de R^n mais pas de R^m pour tout $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et que pour tout entier k , il existe un point périodique dans \mathbb{S}^1 de période k .

Prenons z dans \mathbb{S}^1

$$z = e^{2\pi i\theta}$$

où θ vérifie $0 \leq \theta < 1$. L'image de z par R est $e^{2\pi i2\theta}$ en ignorant la partie entière de 2θ et puisque la fonction $t \mapsto e^t$ est périodique de période $2\pi i$, il est possible d'étudier le comportement de l'application R sur \mathbb{S}^1 par l'intermédiaire de l'application $\theta \mapsto 2\theta \bmod(1)$ dans l'intervalle $[0, 1[$.

Écrivons θ dans la base binaire

$$\theta = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \bmod(1),$$

où les a_i ($i = 1, 2, \dots$) sont des 0 ou des 1. L'action de $\theta \mapsto 2\theta$ est donnée par

$$2\theta = 0, a_2 a_3 a_4 \dots \bmod(1).$$

Maintenant, on peut construire des points z_0 dans \mathbb{S}^1 de telle façon que la suite z_n soit dense dans \mathbb{S}^1 . Simplement en mettant côte à côte les suites finies de séquences a_1, a_2, a_3, \dots formées seulement de 1 et de 0. En appliquant la transformation $\theta \mapsto 2\theta \bmod(1)$, un nombre bien défini de fois, la suite a_1, a_2, a_3, \dots est transformée en n'importe quelle suite prédéterminée. De la même façon, on peut construire des points z_0 dans \mathbb{S}^1 de manière à ce que la suite $\{z_k\}$ est infinie mais pas dense dans \mathbb{S}^1 (voir [13]).

Remarque 4.1. Il est clair que les propriétés de l'itération $z \mapsto z^2$ sont les mêmes que celle de l'itération $z \mapsto b z^d$ où $d \geq 2$ et $|b| = 1$ et que pour cette dernière $\mathcal{J}_R = \mathbb{S}^1$, donc on a aussi

$$\mathcal{F}_R = \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{S}^1.$$

Dans le cas général, si R est un polynôme de degré supérieur ou égal à deux, il est facile d'identifier les ensembles de Julia et de Fatou, grâce à la remarque suivante :

Remarque 4.2. Si R est un polynôme, l'ensemble de Julia \mathcal{J}_R est la frontière de l'ensemble des points bornés sous l'action de R . i.e.

$$K_R = \left\{ z : |R^k(z)| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty \right\},$$

appelé ensemble de Julia rempli (voir *Figure 4.1*).

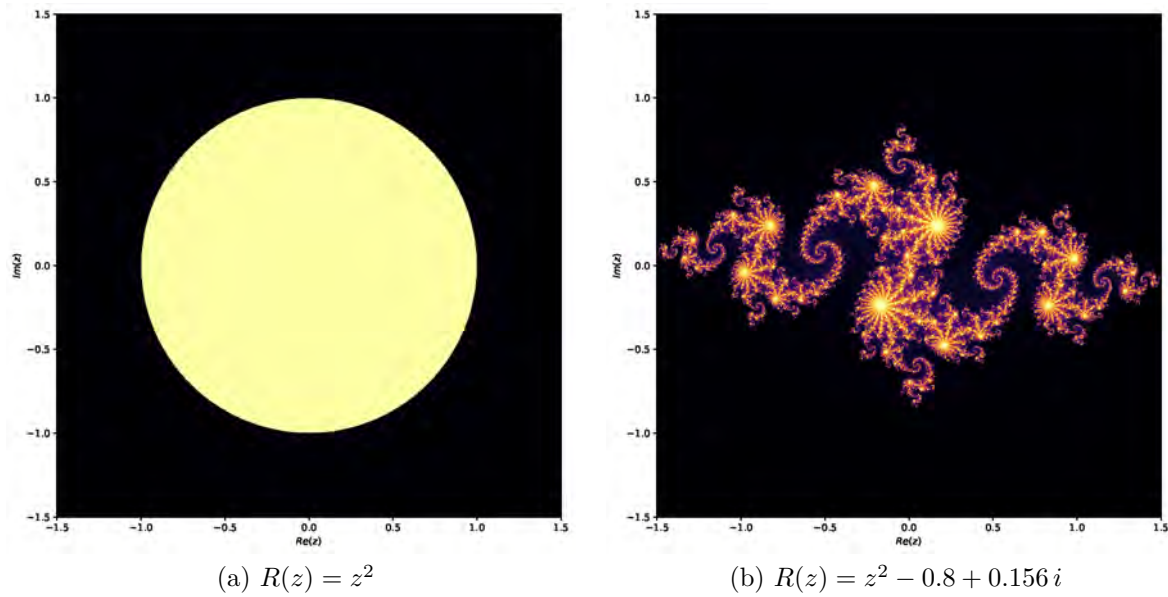


FIGURE 4.1 – L'ensemble de Julia rempli pour le polynôme rationnel $R(z) = z^2 + c$; $c \in \mathbb{C}$

4.5

Quelques Propriétés

Définition 4.9. Soit f une application d'un ensemble X vers lui même. Une partie $E \subset X$,

- (i) est invariante si $f(E) = E$;
- (ii) est inversement invariante si $f^{-1}(E) = E$;
- (iii) est complètement invariante si $f(E) = f^{-1}(E) = E$.

Théorème 4.3. Soit R une fonction rationnelle de degré supérieur ou égal à deux et supposons que la partie finie $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ est complètement invariante. Alors E admet au plus deux éléments.

Démonstration. Voir [6] (Théorème 3.2.1, p53). □

Proposition 4.1. \mathcal{F}_R est un ensemble ouvert complètement invariante i.e.

$$R(\mathcal{F}_R) = R^{-1}(\mathcal{F}_R) = \mathcal{F}_R. \tag{4.9}$$

Démonstration. Le fait que \mathcal{F}_R est ouvert découle directement de la définition, l'invariance aussi (voir aussi [7, 8]). □

Théorème 4.4. *L'ensemble de Julia \mathcal{J}_R est non vide, fermé et complètement invariant.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}_R = \hat{\mathbb{C}}$. La famille de fonction $\{R^n\}$ est normale sur $\hat{\mathbb{C}}$, donc elle possède une sous-suite $\{R^{n_i}\}$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe f qui est non constante, du fait que $R^{n_i}(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$. Puisque f est une fonction continue de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, on obtient une contradiction si on calcul le degré de f ,

$$\deg(f) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \deg(R^{n_i}) = \infty.$$

Mais $\deg(f)$ est fini. L'invariance de \mathcal{J}_R est une conséquence de l'invariance de \mathcal{F}_R . \square

On trouve dans [6, 7, 8] les démonstrations des résultats suivants :

Lemme 4.1. *Pour toute fonction rationnelle R et pour tout entier positif k , $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_{R^k}$ et $\mathcal{J}_R = \mathcal{J}_{R^k}$.*

Lemme 4.2. *Les cycles attractifs (et super-attractifs) sont contenus dans l'ensemble de Fatou \mathcal{F}_R .*

Lemme 4.3. *Les cycles répulsifs ou indifférents rationnel, i.e. de multiplicateur*

$$e^{2i\pi \frac{p}{q}}$$

sont contenus dans l'ensemble de Julia \mathcal{J}_R .

Lemme 4.4. *Si \mathcal{P}_R est l'ensemble des points périodiques répulsifs ; alors*

$$\mathcal{J}_R = \overline{\mathcal{P}_R}.$$

Lemme 4.5. *Si $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ est un point périodique répulsif pour R , alors*

$$\mathcal{J}_R = \overline{\{z \in \hat{\mathbb{C}} : R^k(z) = \alpha, \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}}$$

Théorème 4.5. *L'ensemble de Julia vérifie les propriétés suivantes :*

- *L'ensemble \mathcal{J}_R est d'intérieur vide sauf si $\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}}$.*
- *\mathcal{J}_R est parfait – sans points isolés –.*

Remarque 4.3. La fonction

$$z \mapsto \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)},$$

(due à Lattès [32]) est un exemple d'une fonction rationnelle avec $\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}}$.

Définition 4.10. Le bassin d'attraction $\mathcal{A}(\alpha)$ d'un point périodique attractif α , associé à R est défini par

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : R^k(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathcal{O}(\alpha)\}.$$

Le bassin immédiat de α est la composante connexe du bassin de α contenant α . le bassin (resp. bassin immédiat) d'un cycle attractif est la réunion des bassins (resp. bassins immédiat) des points de ce cycle.

Théorème 4.6. *Les bassins d'attraction des cycles attractifs ou super-attractifs sont contenus dans l'ensemble de Fatou \mathcal{F}_R .*

Théorème 4.7. *Si α est un point périodique attractif pour R ; alors*

$$\mathcal{J}_R = \partial\mathcal{A}(\alpha).$$

Définition 4.11. Un point critique de R est un point ω avec

$$R'(\omega) = 0.$$

Théorème 4.8 (Julia-Fatou). *Tout bassin immédiat d'un cycle (fini) attractif contient au moins un point critique.*

Théorème 4.9. *Une fonction rationnelle de degré d possède $2d - 2$ points critiques comptés avec multiplicité.*

En conséquence, on a le résultat suivant :

Corollaire 4.1. *Une fonction rationnelle R de degré d , a au plus $2d - 2$ cycles attractifs.*

4.6 --- Conjugaison

La notion de conjugaison joue un rôle important dans l'étude de la dynamique holomorphe.

Définition 4.12. Si $R(z)$ et $H(z)$ sont deux fonctions rationnelles et $M(z)$ est une transformation de Möbius (fonction rationnelle bijective), telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \hat{\mathbb{C}} \\ M \downarrow & & \downarrow M \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{H} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

commute, alors on dit que R et H sont analytiquement conjuguées et on écrit

$$H = M \circ R \circ M^{-1}.$$

Remarque 4.4. Si R et H sont conjuguées par M , alors R^k et H^k sont aussi conjuguées par M , i.e.

$$H = M \circ R \circ M^{-1} \iff H^k = M \circ R^k \circ M^{-1}.$$

Dans ce cas les transformations R et H possèdent la même dynamique.

Théorème 4.10. *Une fonction rationnelle non constante R est conjuguée à un polynôme, si et seulement si, il existe un point $w \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $R^{-1}\{w\} = \{w\}$.*

Démonstration. Il faut noter qu'une fonction rationnelle est un polynôme si et seulement si R admet un pôle en ∞ , et aucun dans \mathbb{C} ; plus précisément, si et seulement si $R^{-1}\{\infty\} = \{\infty\}$. Prenons

$$M(z) = \frac{z}{z-w}, \quad M^{-1}(z) = \frac{wz}{z-1},$$

par la conjugaison $H = M \circ R \circ M^{-1}$, on a

$$H^{-1}\{\infty\} = (M \circ R^{-1} \circ M^{-1})\{\infty\} = \{\infty\}.$$

□

4.7

Introduction à l'Ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot constitue un objet central dans l'étude de la dynamique holomorphe. Il est défini comme l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'orbite de l'origine reste bornée sous l'itération de la fonction quadratique :

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

Autrement dit, on considère la suite (z_n) définie par :

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c,$$

et l'ensemble de Mandelbrot est donné par :

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n| < \infty\}.$$

4.7.1 Propriétés dynamiques

La dynamique complexe étudie les itérations de fonctions holomorphes sur le plan complexe. Dans le cas de $f_c(z) = z^2 + c$, on observe différents comportements en fonction du paramètre c :

- Si $c \in \mathcal{M}$, alors l'orbite de $z = 0$ est bornée. Cela indique une certaine forme de *stabilité dynamique*.
- Si $c \notin \mathcal{M}$, alors l'orbite diverge vers l'infini. Le point $z = 0$ est attiré vers l'extérieur du plan complexe.

L'ensemble \mathcal{M} joue un rôle analogue à une “carte de stabilité” : les valeurs de c à l'intérieur de \mathcal{M} sont associées à des dynamiques “régulières”, tandis que celles à l'extérieur engendrent un comportement chaotique.

4.7.2 Lien avec les ensembles de Julia

L'ensemble de Julia J_c associé à f_c est l'ensemble frontière entre les points dont les orbites sont stables et ceux qui divergent. Il a une structure fractale dans la plupart des cas.

Il existe un lien fondamental entre \mathcal{M} et les ensembles de Julia :

$$c \in \mathcal{M} \text{ si et seulement si } J_c \text{ est connexe.}$$

Ainsi, \mathcal{M} agit comme un **discriminant topologique** des ensembles de Julia.

4.7.3 Structure de l'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est :

- **Compact** : contenu dans le disque $|c| \leq 2$.
- **Connexe** : prouvé par Douady et Hubbard (1982)[14].
- **Fractal** : son bord est d'une complexité infinie, avec une auto-similarité à toutes les échelles.
- **Auto-répliatif** : on observe des copies déformées de \mathcal{M} appelées “bébés Mandelbrots”.

4.7.4 Exploration numérique

Pour visualiser \mathcal{M} , on utilise une méthode itérative : pour chaque c dans une grille du plan complexe, on itère la fonction $f_c(z)$ jusqu'à ce que $|z_n| > 2$ (critère de divergence),

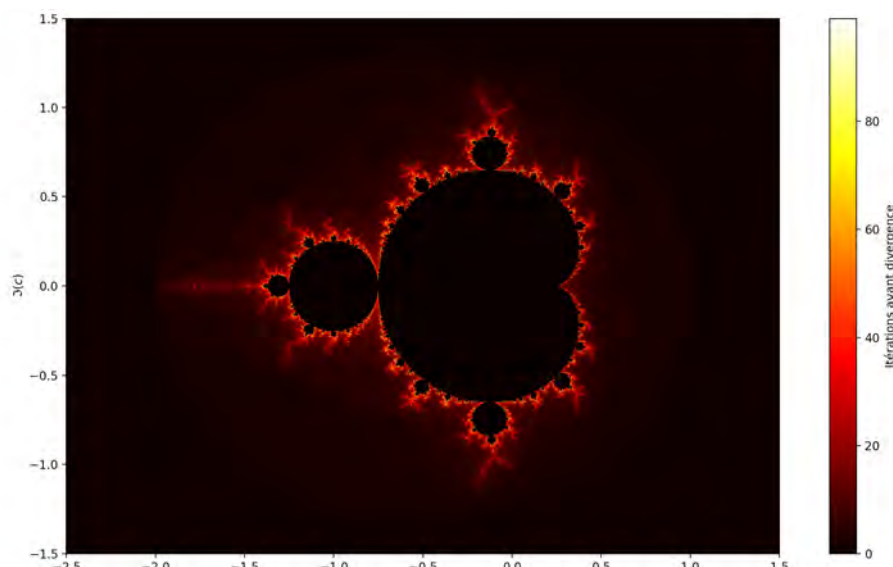


FIGURE 4.2 – Visualisation de l'ensemble de Mandelbrot

ou qu'on ait atteint un nombre maximal d'itérations. Le temps de divergence (ou son absence) permet de colorier le point c .

Remarque importante

L'ensemble de Mandelbrot n'est pas seulement une curiosité visuelle : il est un outil fondamental pour comprendre la transition entre comportements réguliers et chaotiques dans les systèmes dynamiques holomorphes.

4.8

La Méthode de Newton Complexe

La méthode de Newton est un procédé itératif classique d'approximation des zéros (ou racines) d'une fonction différentiable. Cette technique a été appliquée initialement sur la

droite réelle de la manière suivante : Étant donnée une fonction différentiable

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous voulons trouver un point $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $f(\xi) = 0$. Si x_0 est une approximation d'un zéro de $f(x)$, la méthode de Newton raffine cette approximation en prenant pour nouvelle valeur la solution x_1 de l'équation linéarisée au voisinage de x_0 :

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0.$$

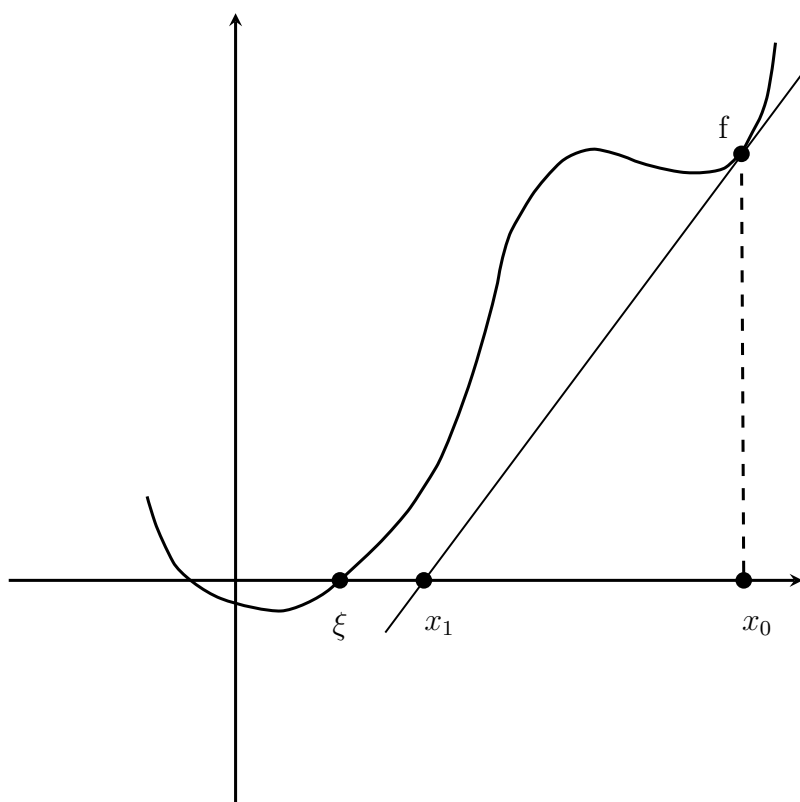


FIGURE 4.3 – Pour une valeur initiale x_0 suffisamment proche de la racine ξ de f , la racine x_1 de la tangente à f en x_0 est une meilleure approximation de ξ .

Lorsque $f'(x_0)$ est non-nulle, on obtient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

D'où le procédé itératif suivant

$$x_{k+1} = N_f(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4.10)$$

L'idée de résoudre une équation en améliorant une estimation de la solution, par l'ajout d'un terme correcteur est fort ancienne.

En 1664 Viète utilisait la formule

$$x_{k+1} = x_k - 10^{n-k-1} \left[\frac{f(x_k)}{f(x_k + 10^{n-k-1}) - f(x_k)} \right],$$

en s'inspirant de procédés semblables à ceux utilisés par des mathématiciens arabes du XI^{ème} au XII^{ème} siècle, tels que Al-Khayyām, Sharaf al-Dīn al-Tūsī et Al-Kashī [40]. La

méthode sera développée d'une manière satisfaisante dans « De analysi per aequationes numero terminorum infinitas » de 1669, où Issac Newton (1643 – 1727) considère des fonctions polynomiales et utilise une technique de linéarisation. Le cas d'une fonction non-polynomiale ($f(x) = x - e \sin(x) + M$) est décrit dans « Philosophiae Naturalis Principia Mathematicae » publiée en 1687. D'autres noms sont associés à cette méthode : Joseph Raphson et Thomas Simpson [40], le premier pour avoir raffiné la méthode de Newton sur les polynômes et le deuxième pour avoir introduit la notion de « luxions » c'est-à-dire les dérivées. Dans le cas d'une fonction réelle continûment différentiable, la convergence d'une suite $\{x_n\}$ générée par la méthode de Newton peut être obtenue comme application de la formule de Taylor. En effet, si le point initial est choisi suffisamment proche d'une racine simple ξ de f . Au voisinage de ξ , on écrit

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\mu)}{2}(x - \xi)^2,$$

avec μ entre x et ξ . Au bout d'une itération, la méthode de Newton donne la relation

$$N_f(x) - \xi = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \xi = \frac{f''(\mu)}{2f'(x)}(x - \xi)^2.$$

Pour un intervalle compact I incluant x et ξ , on pose $\mu_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|$ et $\mu_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|$. Alors, pour tout $x_0 \in I$

$$|N_f(x_0) - \xi| < \frac{\mu_2}{2\mu_1} |x_0 - \xi|^2.$$

Par récurrence, on obtient

$$\mu |x_k - \xi| < (\mu |x_0 - \xi|)^{2^n}.$$

Où $\mu = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, en passant par le logarithme

$$\log |x_k - \xi| < 2^n \log(\mu |x_0 - \xi|) - \log(\mu).$$

La convergence de x_k vers ξ est donc quadratique, si on considère que $|x_0 - \xi| < \frac{1}{\mu}$ ($\Rightarrow \log(\mu |x_0 - \xi|) < 0$). D'autre part, dans plusieurs cas, on peut trouver des ouverts de points initiaux tels que la suite des itérées ne converge vers aucune racine de f . Considérons

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

pour tout point initial $x_0 \in \mathbb{R}$, la méthode de Newton donne l'itération suivante

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 - 1}{\frac{3}{2}x_k^2 - 1}.$$

Il est facile de voir que pour $x_0 = 0$, on a $x_1 = 1$ et $x_2 = 0 = x_0$, donc la suite ne converge pas vers une racine de f . On dit que la méthode possède un point périodique en 0, et

son bassin d'attraction est un ouvert contenant des points ne convergeant pas vers une racine de f . Il faut noter que le procédé (4.10) reste valable dans des contextes bien plus larges que celui d'une simple fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (par exemple, dans le cas où f est une application différentiable d'un espace de Banach E , à valeurs dans E). Dans [21], on démontre plusieurs types de résultats concernant la convergence :

- Un résultat de convergence locale : Pour toute solution ξ de l'équation $f(x) = 0$ telle que $f'(\xi)$ soit inversible, il existe un voisinage U de ξ tel que pour tout $x_0 \in U$, la suite définie par la méthode de Newton soit définie pour tout entier et converge quadratiquement vers ξ .
- Un résultat de convergence un peu plus précis qui fournit, sous certaines hypothèses, l'existence d'une boule B telle que la suite donnée par la méthode de Newton soit définie pour tout premier terme dans B et converge (quadratiquement) vers un élément ξ de B qui est l'unique solution dans B de l'équation $f(x) = 0$.
- Dans certains cas très particuliers, comme celui des fonctions convexes, un résultat de convergence globale, pour toute valeur initiale x_0 .

4.9

Problème de Cayley

On considère la dynamique d'une classe spéciale de fonctions rationnelles, obtenues à partir de la méthode de Newton appliquée à des équations polynomiales complexes. L'étude de cette dynamique est très utile pour au moins deux raisons :

- Elle forme un cadre naturel des itérations non-polynomiales, et les propriétés de cette dynamique sont très utiles pour comprendre le comportement des algorithmes numériques.
- Elle permet de résoudre le problème de la convergence globale de la méthode de Newton, étant donné que les mêmes arguments du paragraphe précédent conduisent à déduire la convergence locale (au voisinage d'une racine) pour un polynôme complexe. En d'autres termes, définir les bassins d'attraction de ces racines et caractériser leurs frontières.

Arthur Cayley (1821 - 1895), fut le premier à proposer une solution au problème du comportement global de la méthode de Newton pour des polynômes quadratiques. En utilisant un langage mathématique moderne, nous énonçons les résultats obtenus par Cayley [10?] :

z	α	β	∞	0
$M(z)$	0	∞	1	$\frac{\alpha}{\beta}$

TABLE 4.1 – Les points important pour la transformation M

Théorème 4.11. Soit $p(z)$ un polynôme quadratique, ayant deux racines distinctes. Alors la méthode de Newton

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \quad (4.11)$$

est analytiquement conjuguée avec le polynôme $R(z) \equiv z^2$.

Démonstration. Notons α et β , les racines de $p(z)$ et considérons la transformation de Möbius

$$M(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}.$$

Un calcul simple, nous donne

$$R(z) \equiv (M \circ N_p \circ M^{-1})(z) = z^2.$$

□

Le tableau (Tab. 4.1) contient la liste des points importants pour N_p et leurs images par la transformation de Möbius M .

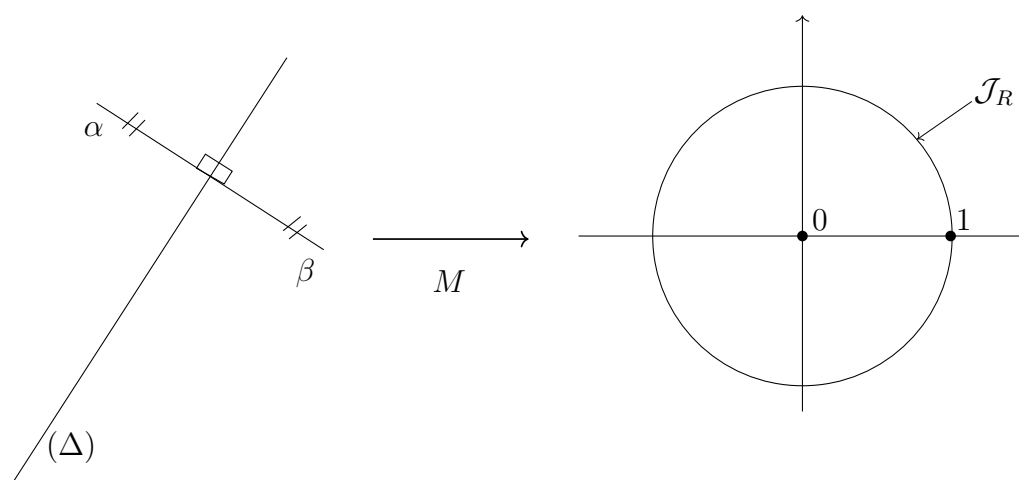
D'après l'analyse faite au paragraphe 4.4.2; R possède des points fixes superattractifs en 0 et ∞ . Leurs bassins d'attraction respectifs $\hat{\mathcal{A}}(0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$ et $\hat{\mathcal{A}}(\infty) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ sont séparés par l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_R = \partial\hat{\mathcal{A}}(0) = \partial\hat{\mathcal{A}}(\infty) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| = 1\}$. Alors que le 1 est un point fixe répulsif ($|R'(1)| > 1$). Par la conjugaison M on peut déduire que α et β sont des points fixes attractifs pour N_p , et que le point ∞ est répulsif, de plus on a

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}(\alpha)) &= \hat{\mathcal{A}}(0), \\ M(\mathcal{A}(\beta)) &= \hat{\mathcal{A}}(\infty), \\ M(\mathcal{J}_{N_p}) &= \mathcal{J}_R. \end{aligned}$$

L'ensemble de Julia \mathcal{J}_{N_p} correspond à la ligne

$$\Delta = \left\{ x + iy \in \hat{\mathbb{C}} : y = ax + b; a = \frac{Re(\alpha) - Re(\beta)}{Im(\alpha) - Im(\beta)}, b = \frac{Re(\beta)^2 + Im(\beta)^2 - Re(\alpha)^2 + Im(\alpha)^2}{Im(\alpha) - Im(\beta)} \right\},$$

médiane du segment de droite $[\alpha\beta]$. L'intérieur et l'extérieur du disque unité correspondent aux bassins d'attraction des seuls points fixes attractifs de la transformation N_p .

FIGURE 4.4 – La conjugaison par M

Donc les deux demi-plans limités par la droite (Δ) , forment les bassins d'attraction $\mathcal{A}(\alpha)$ et $\mathcal{A}(\beta)$ (Voir Figure 4.4). Cette analyse résout parfaitement le problème dit de Cayley, dans le cas d'un polynôme de degré 2.

La question qui se pose maintenant est la suivante : Pouvons-nous appliquer la même technique de calcul à un polynôme de degré supérieur à 2 ? Autrement-dit, la fonction conjugaison M existe-elle pour la méthode de Newton dans ce cas ? Nous consacrons le reste de ce chapitre pour répondre à cette question.

4.10

La Dynamique de la Méthode de Newton

Utiliser la méthode de Newton pour résoudre les équations polynomiales

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

revient à calculer l'orbite individuelle d'un système dynamique généré par la méthode de Newton

$$z_{k+1} = N_p(z_k) = z_k - \frac{p(z_k)}{p'(z_k)}. \quad (4.12)$$

Commençant nos investigations par un résumé de quelques remarques importantes concernant cette méthode.

Remarque 4.5.

(1) D'après (4.12), on voit que les racines de $p(z)$ correspondent aux points fixes de N_p

(2) Le point à l'infini est un point fixe répulsif (puisque $N'(\infty) = \frac{d}{d-1}$ via une conjugaison avec la transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$)

(3) La dérivée de N_p est

$$N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{[p'(z)]^2}, \quad (4.13)$$

donc les racines simples de $p(z)$ sont des points fixes superattractifs de N_p . En fait cette propriété est assez appréciée pour les algorithmes de résolution des équations algébriques, car elle permet de conclure qu'au voisinage d'un point fixe superattractif α , la convergence est quadratique. En effet, si z_k est assez proche de α , on a

$$N_p(z_k) = z_{k+1} = N_p(\alpha) + (z_k - \alpha)N'_p(\alpha) + \frac{N''_p(\alpha)}{2}(z_k - \alpha)^2$$

puisque $N_p(\alpha) = \alpha$ et $N'_p(\alpha) = 0$, on a

$$|z_{k+1} - \alpha| < c |z_k - \alpha|^2$$

avec $0 < c < \left| \frac{N''_p(\alpha)}{2} \right|$.

(4) Une racine α , de multiplicité $m > 1$ de $p(z)$ est un point fixe attractif mais non superattractif. En effet la dérivée de N_p en α est

$$N'_p(\alpha) = \frac{m-1}{m}.$$

La convergence de l'algorithme est linéaire dans ce cas.

(5) Du fait que ∞ est un point fixe répulsif pour la méthode de Newton, et que les pôles de $N_p(z)$ sont des points critiques pour $p(z)$, alors, les orbites de N_p qui évitent les points critiques de $p(z)$, ont de grandes chances de converger rapidement vers les racines.

(6) D'après les remarques (3) et (5), il est clair qu'il y a deux types de points critiques de N_p , les racines et les points d'inflexions de $p(z)$.

4.10.1 La théorie de Julia et Fatou

Dans ce paragraphe, nous verrons que l'application de la théorie de Julia et Fatou sur les itérations des fonctions rationnelles permet de répondre à la question de Cayley.

Pour la simplicité des calculs et sans perte de généralité, nous limiterons notre étude au cas du polynôme cubique

$$p(z) = z^3 - 1$$

l'équation de Newton (Exercice) s'écrit sous la forme

$$2z_k^3 - 3z_{k+1}z_k^2 + 1 = 0, \quad (4.14)$$

plus explicitement

$$z_{k+1} = N_p(z_k) = z_k + \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} = \frac{2z_k^3 + 1}{3z_k^2}. \quad (4.15)$$

Les trois racines de $p(z)$ sont

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

qui sont des points fixes superattractifs (remarque 4.5(3)) et, d'après le théorème 4.7, l'ensemble de Julia de N_p est donnée par

$$\mathcal{J}_{N_p} = \partial\mathcal{A}(\alpha_1) = \partial\mathcal{A}(\alpha_2) = \partial\mathcal{A}(\alpha_3). \quad (4.16)$$

Cette propriété exprime la dichotomie du plan $\hat{\mathbb{C}}$ et donne une réponse négative à la question de Cayley dans le sens où (4.16) veut dire qu'il n'y a pas de frontière lisse (une courbe de classe C^1) séparant les bassins d'attraction des racines de $p(z)$ (voir *Figure 4.5*). Plus explicitement le théorème suivant permet de caractériser l'ensemble de Julia \mathcal{J}_{N_p} .

Théorème 4.12. *Si $p(z) = z^3 - 1$ et $N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$, alors*

$$\mathcal{J}_{N_p} = \overline{\{N_p^{-k}(0), k \in \mathbb{N}\}}. \quad (4.17)$$

*En effet, soit $z \in \mathcal{J}_{N_p}$ et U un voisinage arbitraire de z . Et par la propriété (4.17), on déduit qu'il existe $z' \in U$, tel que $N_p^k(z') = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Notons que $(N_p^k)'(z') \neq 0$ (sinon, $p(N_p^{k'}(z')) = 0$ pour un certain $k' \in \{0, \dots, k\}$), donc N_p^k est inversible sur un voisinage V de z' . Soit $B = B(0, \varepsilon)$ une boule ouverte centrée en 0 et de rayon ε telle que N_p^k soit une bijection de V dans B . Soit $I_\varepsilon =]0, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$, il est facile de voir (*Figure 4.6*) que $I_\varepsilon \subset \mathcal{A}(+1)$, et par symétrie, on a $D(I_\varepsilon) \subset \mathcal{A}(\alpha_2)$ et $D^2(I_\varepsilon) \subset \mathcal{A}(\alpha_3)$, où D est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, i.e.*

$$D(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z.$$

Donc

$$\mathcal{A}(\alpha_j) \cap U \neq \emptyset; j = 1, 2, 3.$$

Maintenant, pour la démonstration du théorème 4.12, il est nécessaire d'introduire la notion de points exceptionnels (voir [8, 20]).

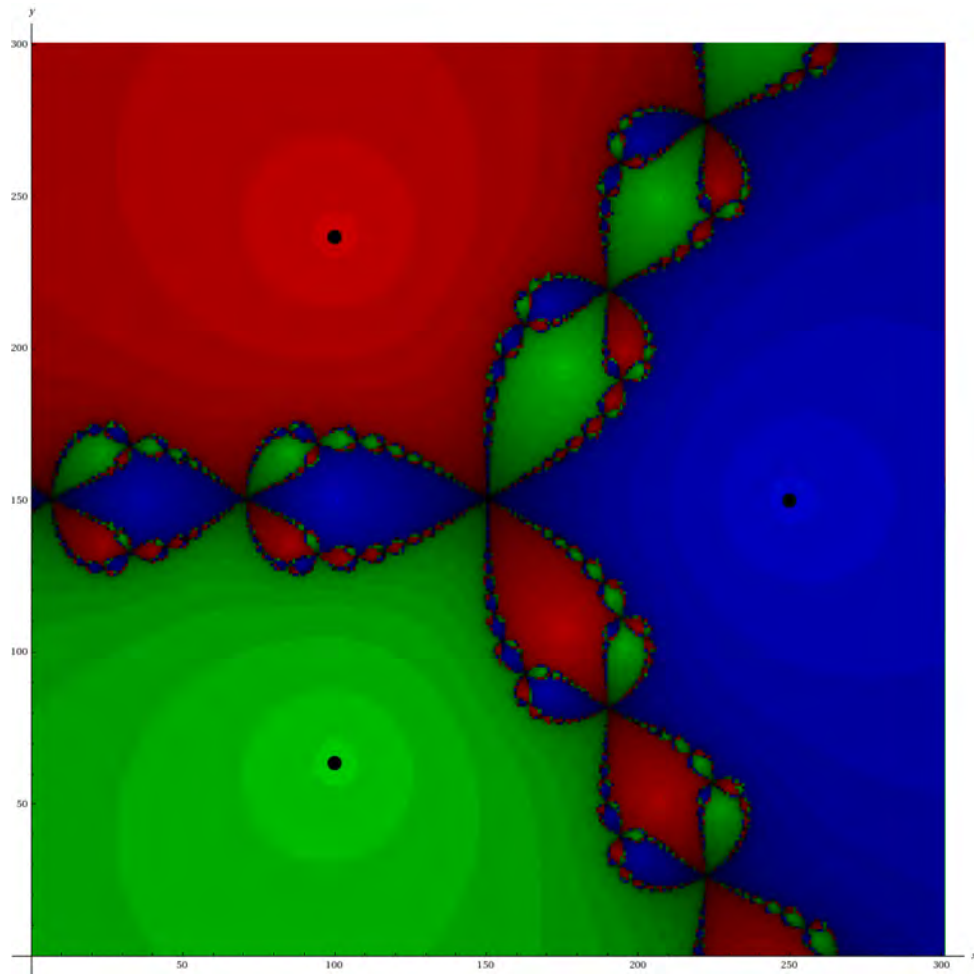


FIGURE 4.5 – La dichotomie de la méthode de Newton $N_p(z)$, $p(z) = z^3 - 1$.

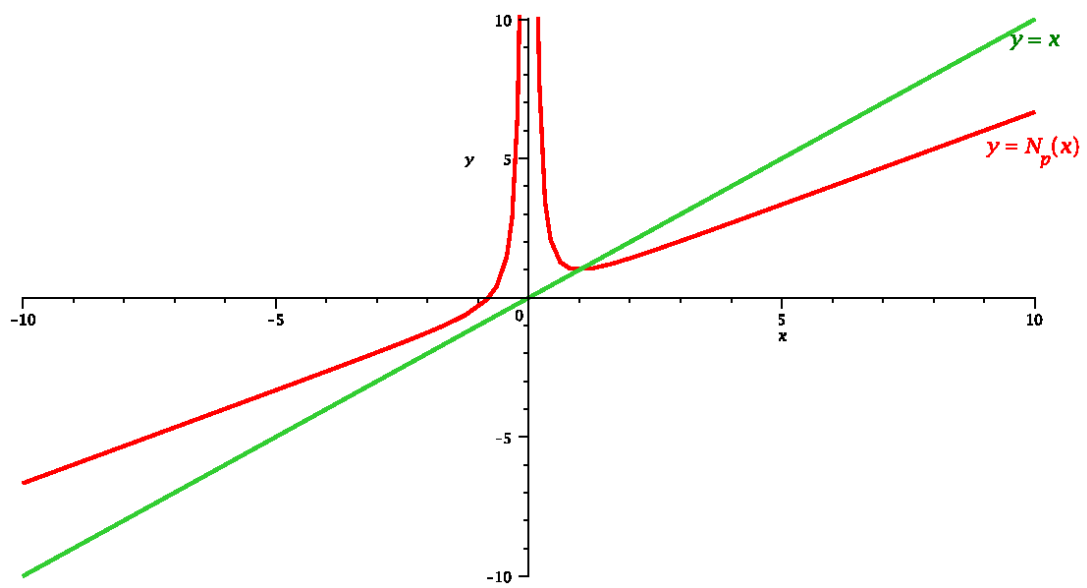


FIGURE 4.6 – La Méthode de Newton pour le polynôme $p(x) = x^3 - 1$.

Définition 4.13. Pour une application f d'un ensemble X dans lui même, La relation

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists(n, m) \in \mathbb{N}^2 : f^n(x) = f^m(y). \quad (4.18)$$

est une relation d'équivalence, et la classe d'équivalence $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ est appelée grande orbite de x .

Exercice 4.1. Montrer que la relation \sim définit sur X dans la Définition 4.13 est une relation d'équivalence sur X .

Théorème 4.13. Soit f , une application de X dans lui même. Alors, $[x]$ est l'ensemble complètement invariant engendré par le singleton $\{x\}$ (le plus petit ensemble complètement invariant contenant x).

Démonstration. On note $\langle x \rangle$, l'ensemble complètement invariant engendré par $\{x\}$ (le plus petit ensemble complètement invariant contenant x). Pour tout y dans $[x]$, il existe deux entiers naturels n et m tels que $f^n(x) = f^m(y)$ ce qui implique

$$y \in f^{-m} f^n \{x\} \subset f^{-m} f^n \langle x \rangle = \langle x \rangle$$

donc $[x] \subset \langle x \rangle$. Pour compléter la preuve il suffit de montrer que $[x]$ est complètement invariant. En effet, puisque $y \sim f(y)$, on a

$$x \sim y \Leftrightarrow x \sim f(y)$$

autrement

$$y \in [x] \Leftrightarrow f(y) \in [x] \quad (4.19)$$

ceci est équivalent à

$$y \in [x] \Leftrightarrow y \in f^{-1}([x]) \quad (4.20)$$

La relation (4.19) montre l'invariance de $[x]$, et (4.20) l'invariance inverse. Par conséquent on a $[x] \equiv \langle x \rangle$. \square

Définition 4.14. Pour une fonction rationnelle R , un point $z \in \hat{\mathbb{C}}$ est dit exceptionnel, si $[z]$ est fini. L'ensemble des points exceptionnels est noté par $\mathcal{E}(R)$.

Théorème 4.14. Une fonction rationnelle R de degré supérieur à deux, admet au plus deux points exceptionnels. Si $\mathcal{E}(R) = \{\zeta\}$, alors R est conjugué à un polynôme tel que ζ correspond à ∞ . Si $\mathcal{E}(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, tel que $\zeta_1 \neq \zeta_2$, alors R est conjugué à une application $z \mapsto z^d$, avec ζ_1 et ζ_2 qui correspondent à 0 et ∞ .

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{E}(R)$ est complètement invariant par R et d'après le théorème 4.3, R admet au plus deux points exceptionnels. A l'aide d'une conjugaison convenable, on peut considérer les quatre possibilités suivantes :

- (i) $\mathcal{E}(R) = \emptyset$;
- (ii) $\mathcal{E}(R) = \{\infty\} = [\infty]$;
- (iii) $\mathcal{E}(R) = \{0, \infty\}$, $[0] = \{0\}$, $[\infty] = \{\infty\}$;
- (iv) $\mathcal{E}(R) = \{0, \infty\} = [0] = [\infty]$;

Il n'y a rien à dire pour (i). Si (ii) est juste, alors R est un polynôme (d'après théorème 4.10). Si (iii) est juste, R est encore un polynôme mais cette fois, il est de la forme

$$z \mapsto az^d; d > 0.$$

Le derniers cas (iv) implique $R(0) = \infty$ et $R(\infty) = 0$, donc R est de la forme $z \mapsto az^d$, avec d un entier négatif . \square

Une conséquence directe de ce théorème est le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *Si $\deg(R) \geq 2$, alors les points exceptionnels de R sont dans \mathcal{F}_R . De plus, \mathcal{J}_R est infini.*

Démonstration. Puisque $\deg(R) \geq 2$ et suite à une conjugaison convenable, on a $\mathcal{E}(R) = \{\infty\}$ ou $\mathcal{E}(R) = \{0, \infty\}$. Pour le premier cas R est un polynôme et donc le point ∞ est attractif, impliquant $\infty \in \mathcal{F}_R$. Le deuxième cas $R(z) = az^{\pm d}$, $d > 0$ et les points ∞ et 0 sont attractifs, alors $\{0, \infty\} \in \mathcal{F}_R$. Et puisque $\mathcal{J}_R \neq \emptyset$ (théorème 4.4), alors $\exists z \in \mathcal{J}_R$, si \mathcal{J}_R est fini, on a $\mathcal{J}_R = \{z_1, z_2, \dots\}$, l'invariance de $\mathcal{J}_R \subset \mathcal{E}(R) \subset \mathcal{F}_R$, conduit à une contradiction, donc \mathcal{J}_R est infini. \square

Puisque $\mathcal{O}^-(z) \subset [z]$, il est clair que tout point exceptionnel admet une orbite inverse finie, la réciproque de cette proposition est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 4.15. *L'orbite inverse $\mathcal{O}^-(z)$ de z est fini si et seulement si z est exceptionnel.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, si $\mathcal{O}^-(z)$ est fini alors, z est un point exceptionnel. Définissons les ensembles non vides B_k par

$$B_k = \bigcup_{m \geq k} R^{-m}\{z\},$$

ainsi $R^{-1}(B_k) = B_{k+1}$ et

$$[z] \supset \mathcal{O}^-(z) = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots \quad (4.21)$$

Supposons maintenant, que $\mathcal{O}^-(z)$ est fini. Alors, chaque B_k est fini et donc, il existe un entier naturel m tel que $B_m = B_{m+1}$, impliquant $R^{-1}(B_m) = B_m$, donc B_m est complètement invariant, mais dans ce cas il existe un $w \in B_m$ tel que $[w] \subset B_m$ et de (4.21), on a

$$[z] \supset \mathcal{O}^-(z) = B_0 \supset B_m \supset [w],$$

donc $[z] = \mathcal{O}^-(z)$ et de ce fait $[z]$ est fini. \square

Lemme 4.6. *Soit R une fonction rationnelle de degré supérieur à deux, et soit U un ouvert non vide tel que*

$$U \cap \mathcal{J}_R \neq \emptyset,$$

alors

$$\hat{\mathbb{C}} - \mathcal{E}(R) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k(U) \quad (4.22)$$

Démonstration. Soit $U_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k(U)$, et $V = \hat{\mathbb{C}} - U_0$. Il est clair que $R(U_0) \subset U_0$. Si V contient trois points distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; et en appliquant le théorème 4.2, on déduit que la famille $\{R^k : U_0 \rightarrow R^k(U_0) \subset U_0\}$ est normale sur U_0 et donc, $U_0 \subset \mathcal{F}_R$, qui est une contradiction. Ceci montre que U_0 couvre la sphère $\hat{\mathbb{C}}$ entièrement sauf au plus deux exceptions. Considérons maintenant un point $z \in \hat{\mathbb{C}}$, qui n'est pas un point exceptionnel de R , d'après le théorème 4.15, z possède une orbite inverse infinie qui doit rencontrer U_0 (selon la remarque précédente). Donc il existe $w \in U_0$ et deux entiers naturels p et q , tel que $R^p(w) = z$ et $w \in R^q(U)$, ce qui implique

$$z \in R^{p+q}(U)$$

d'où (4.22). \square

Lemme 4.7. *Soit R une fonction rationnelle telle que $\deg(R) \geq 2$. Si z n'est pas un point exceptionnel, alors*

$$\mathcal{J}_R \subset \overline{\mathcal{O}^-(z)}.$$

Démonstration. Soit z un point non exceptionnel et $w \in \mathcal{J}_R$, et soit U un ouvert quelconque non vide U tel que $w \in U$. D'après le lemme 4.6, $z \in R^k(U)$ pour un certain entier naturel k , donc $\mathcal{O}^-(z) \cap U \neq \emptyset$, impliquant

$$w \in \overline{\mathcal{O}^-(z)}.$$

\square

Théorème 4.16. *Soit R une fonction rationnelle, telle que $\deg(R) \geq 2$. Si $z \in \mathcal{J}_R$, alors*

$$\mathcal{J}_R = \overline{\mathcal{O}^-(z)}$$

Démonstration. Puisque $z \in \mathcal{J}_R$ et du fait de l'invariance de \mathcal{J}_R , on a

$$\mathcal{O}^-(z) \subset \mathcal{J}_R$$

la fermeture de \mathcal{J}_R , implique

$$\overline{\mathcal{O}^-(z)} \subset \mathcal{J}_R.$$

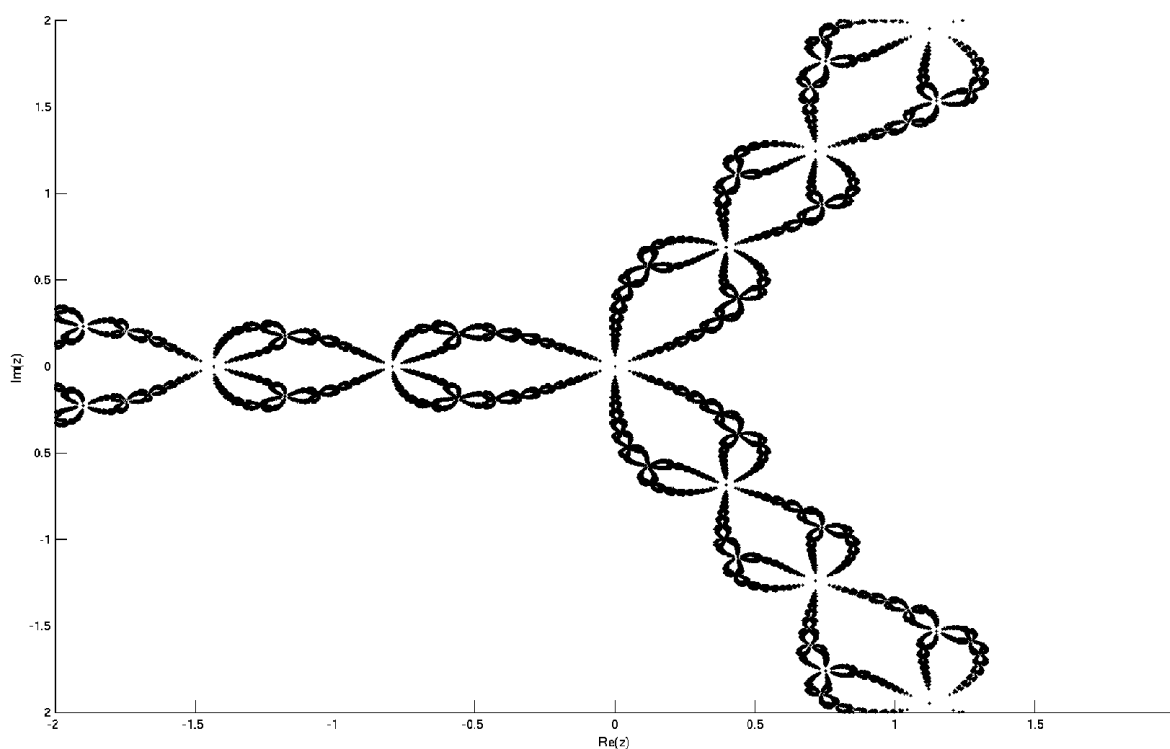
De plus z n'est pas un point exceptionnel (corollaire 4.2), donc, le lemme précédent, donne

$$\mathcal{J}_R = \overline{\mathcal{O}^-(z)}.$$

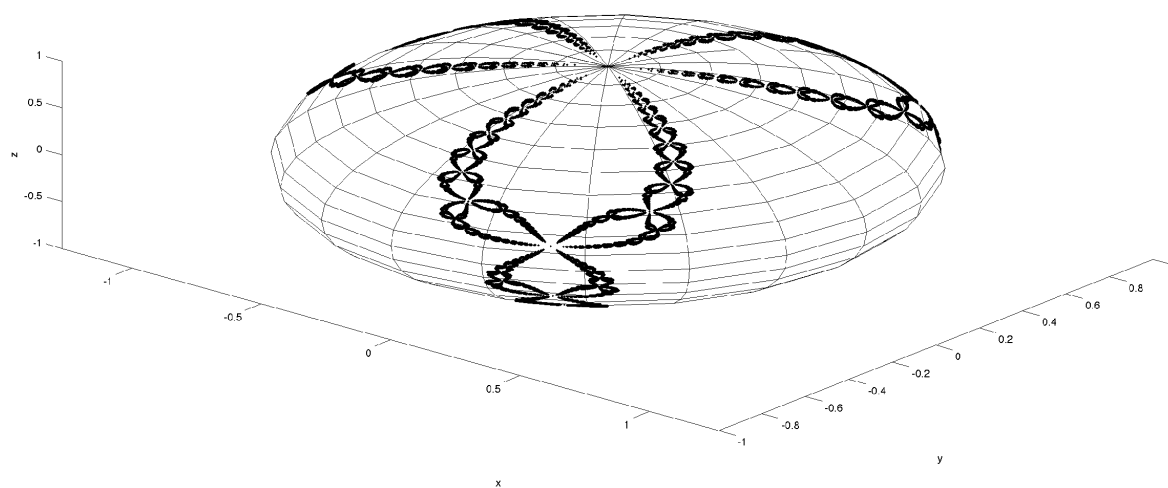
□

Démonstration du théorème 4.12. Le fait que $N_p(0) = \infty \in \mathcal{J}_{N_p}$, implique $0 \in \mathcal{J}_{N_p}$, une application directe du théorème 4.16 (en posant $R = N_p$), conduit à (4.17). □

Remarque. Le Théorème 4.12 est à la base des algorithmes numériques qui nous ont permis de générer graphiquement, les ensembles de Julia, exposés dans les Figures 4.7.



(a) L'ensemble de Julia dans le plan $\hat{\mathbb{C}}$.



(b) Le plan $\hat{\mathbb{C}}$ est identifié à la sphère de Riemann \mathbb{S} .

FIGURE 4.7 – L'ensemble de \mathcal{J}_{N_p} , $p(z) = z^3 - 1$.



Gaston Maurice Julia (1893–1978) était un mathématicien français né le 3 février 1893 à Sidi-Bel-Abbès (Algérie), connu pour ses travaux pionniers en dynamique complexe et en particulier pour les ensembles de Julia, qui décrivent les zones de comportement chaotique dans l'itération des fonctions rationnelles. Grièvement blessé au visage pendant la Première

Guerre mondiale, il poursuivit néanmoins une brillante carrière académique, publiant en 1918 un mémoire fondamental sur l'itération des fonctions, couronné par le Grand Prix de l'Académie des sciences. Ses recherches, menées parallèlement à celles de Pierre Fatou, ont jeté les bases de la théorie moderne des systèmes dynamiques holomorphes. Membre influent de l'Académie des sciences (dont il fut président en 1950), Julia a vu son œuvre redécouverte au XXe siècle grâce aux fractales de Benoît Mandelbrot, qui ont largement popularisé ses ensembles.

En 1918, Julia publie un mémoire fondateur intitulé : Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles — publié dans le Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Ce travail pose les bases de la dynamique holomorphe, bien avant les avancées informatiques du XXe siècle. Il y étudie les comportements des suites définies par itération d'une fonction rationnelle complexe : $f(z) = P(z)/Q(z)$, où P et Q sont des polynômes complexes. Julia cherche à classer les comportements asymptotiques des points sous l'itération répétée de f .

Ces idées ont été développées en parallèle et indépendamment par le mathématicien français Pierre Fatou, d'où l'expression encore utilisée aujourd'hui : théorie de Fatou–Julia.

Julia travaille sans les outils visuels ou informatiques modernes. Ses recherches reposent sur une analyse fine, une intuition géométrique forte, et des démonstrations rigoureuses. Il pressent que les comportements dynamiques des fonctions rationnelles sur le plan complexe cachent une richesse insoupçonnée, ce que les visualisations numériques à partir des années 1970 confirmeront pleinement. Malgré ses apports fondamentaux, son influence a été en partie éclipsée jusqu'aux années 1970, quand les travaux de Benoît Mandelbrot, Douady et Hubbard ont redonné un nouvel éclat aux ensembles de Julia grâce aux images informatiques.

Les ensembles de Julia sont aujourd'hui des objets centraux en dynamique holomorphe, et l'un des premiers exemples de fractales naturelles. Ses travaux ont inspiré toute une génération de mathématiciens du XXe siècle, parmi lesquels Adrien Douady, John H. Hubbard, Dennis Sullivan, Curtis McMullen, etc. Il est considéré comme l'un des pères fondateurs de la dynamique complexe, même si son œuvre a été davantage reconnue après l'arrivée des ordinateurs.

V

Exercices

Exercice 1. Déterminer si chacune des fonctions suivantes est injective, surjective, un homéomorphisme, ou un difféomorphisme sur leur domaine de définition.

1. $f(x) = x^{5/3}$
2. $f(x) = x^{4/3}$
3. $f(x) = 3x + 5$
4. $f(x) = e^x$
5. $f(x) = 1/x$
6. $f(x) = 1/x^2$

Solution :

1. $f(x) = x^{5/3}$, domaine : \mathbb{R}
 - **Injectivité** : Oui, car strictement croissante.
 - **Surjectivité** : Oui, car tout réel a une unique racine cinquième et cube.
 - **Continuité** : Oui.
 - **Dérivabilité** : $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$ existe et est continue, donc f est C^1 .
 - **Inverse** : $f^{-1}(y) = y^{3/5}$ n'est pas dérivable en $y = 0$.
 - **Conclusion** : Bijective, continue, C^1 , mais pas un difféomorphisme.
2. $f(x) = x^{4/3}$, domaine : \mathbb{R}
 - **Injectivité** : Non, car $f(-1) = 1$ et $f(1) = 1$.
 - **Surjectivité** : Non, car $f(x) \geq 0$.
 - **Conclusion** : Ni injective ni surjective.
3. $f(x) = 3x + 5$, domaine : \mathbb{R}
 - **Injectivité** : Oui.

- **Surjectivité** : Oui.
 - **Continuité** : Oui.
 - **Dérivabilité** : $f'(x) = 3$ constante, inverse $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$ est C^∞ .
 - **Conclusion** : Difféomorphisme C^∞ .
4. $f(x) = e^x$, domaine : \mathbb{R}
- **Injectivité** : Oui.
 - **Surjectivité** : Non, car $e^x > 0$.
 - **Conclusion** : Injective mais pas surjective.
5. $f(x) = 1/x$, domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- **Injectivité** : Oui.
 - **Surjectivité** : Oui, car pour tout $y \neq 0$, $x = 1/y$.
 - **Continuité** : Oui sur son domaine.
 - **Dérivabilité** : $f'(x) = -1/x^2$ continue, inverse $f^{-1}(y) = 1/y$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - **Conclusion** : Difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur lui-même.
6. $f(x) = 1/x^2$, domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- **Injectivité** : Non, car $f(1) = 1$ et $f(-1) = 1$.
 - **Surjectivité** : Non, car $f(x) > 0$.
 - **Conclusion** : Ni injective ni surjective.

Exercice 2. Identifier lesquels des sous-ensembles suivants de \mathbb{R} sont fermés, ouverts, ou ni l'un ni l'autre.

1. $\{x \mid x \text{ est un entier}\}$
2. $\{x \mid x \text{ est un nombre rationnel}\}$
3. $\{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ pour un entier naturel } n\}$
4. $\{x \mid \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$
5. $\{x \mid x \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$
6. $\{x \mid \sin(\frac{1}{x}) > 0\}$

Solution :

1. $\{x \mid x \text{ est un entier}\}$
 - **Fermé** : Oui, car son complémentaire est ouvert.
 - **Ouvert** : Non, car aucun point n'est intérieur.
2. $\{x \mid x \text{ est un nombre rationnel}\}$
 - **Fermé** : Non, car son adhérence est \mathbb{R} .
 - **Ouvert** : Non, car tout intervalle contient des irrationnels.

3. $\{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ pour un entier naturel } n\}$
 - **Fermé** : Non, car 0 est un point d'accumulation non inclus.
 - **Ouvert** : Non, car tout point est isolé.
4. $\{x \mid \sin(1/x) = 0\}$
 - **Fermé** : Non, car 0 est un point d'accumulation non inclus.
 - **Ouvert** : Non, car tout point est isolé.
5. $\{x \mid x \sin(1/x) = 0\}$
 - **Fermé** : Oui, car il contient tous ses points d'accumulation (0 est inclus).
 - **Ouvert** : Non, car 0 n'est pas intérieur.
6. $\{x \mid \sin(1/x) > 0\}$
 - **Fermé** : Non, car 0 est un point d'accumulation non inclus.
 - **Ouvert** : Non, car tout voisinage d'un point contient des points où $\sin(1/x) \leq 0$.

Le but des prochains exercices est de construire des fonctions spéciales qui seront utiles lorsque nous perturberons ou modifierons légèrement une fonction donnée. Ces fonctions sont appelées "fonctions bosses", définie par

$$B(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Esquisser le graphe de la fonction $B(x)$.

Solution :

- Pour $x \leq 0$, $B(x) = 0$.
- Pour $x > 0$, $B(x) > 0$, tend vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$, et tend vers 1 quand $x \rightarrow +\infty$.
- La fonction est très plate à l'origine.

Exercice 4. Prouver que $B'(0) = 0$.

Solution : Par définition :

$$B'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(0+h) - B(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(h)}{h}$$

- Pour $h < 0$, $B(h) = 0$, donc la limite à gauche est 0.
- Pour $h > 0$, $\frac{B(h)}{h} = \frac{e^{-1/h^2}}{h}$. Soit $t = 1/h$, alors $t \rightarrow +\infty$ et l'expression devient $te^{-t^2} \rightarrow 0$.
- Ainsi, $B'(0) = 0$.

Exercice 5. Prouver par récurrence que $B^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . Conclure que $B(x)$ est une fonction C^∞ .

Solution : Par récurrence :

- Pour $n = 0$, $B(0) = 0$.
- Supposons que $B^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.
- Pour $x > 0$, $B^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}$ où P_{n-1} est un polynôme.
- Alors :

$$B^{(n)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B^{(n-1)}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n-1}(1/h)}{h} e^{-1/h^2}$$

- Soit $u = 1/h$, alors $u \rightarrow \infty$ et l'expression devient $uP_{n-1}(u)e^{-u^2} \rightarrow 0$.
- Donc $B^{(n)}(0) = 0$, et B est C^∞ .

Exercice 6. Modifier $B(x)$ pour construire une fonction $C^\infty C(x)$ qui satisfait :

1. $C(x) = 0$ si $x \leq 0$
2. $C(x) = 1$ si $x \geq 1$
3. $C'(x) > 0$ si $0 < x < 1$

Solution : On définit :

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\int_0^x B(t)dt}{\int_0^1 B(t)dt} & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- $C(x) = 0$ si $x \leq 0$, $C(x) = 1$ si $x \geq 1$.
- Pour $0 < x < 1$, $C'(x) = \frac{B(x)}{\int_0^1 B(t)dt} > 0$.
- C est C^∞ car B est C^∞ .

Exercice 7. Modifier $C(x)$ pour construire une fonction bosse $C^\infty D(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire que $D(x)$ satisfait :

1. $D(x) = 1$ pour $a \leq x \leq b$
2. $D(x) = 0$ pour $x < \alpha$ et $x > \beta$ où $\alpha < a$ et $\beta > b$
3. $D'(x) \neq 0$ sur les intervalles (α, a) et (b, β)

Solution : Soit $C(x)$ la fonction de l'Exercice 6. On définit :

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ C\left(\frac{x-\alpha}{a-\alpha}\right) & \alpha < x < a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ C\left(\frac{\beta-x}{\beta-b}\right) & b < x < \beta \\ 0 & x \geq \beta \end{cases}$$

- $D(x) = 1$ pour $a \leq x \leq b$, $D(x) = 0$ pour $x \leq \alpha$ et $x \geq \beta$.
- Sur (α, a) , $D'(x) = C' \left(\frac{x-\alpha}{a-\alpha} \right) \cdot \frac{1}{a-\alpha} > 0$.
- Sur (b, β) , $D'(x) = -C' \left(\frac{\beta-x}{\beta-b} \right) \cdot \frac{1}{\beta-b} < 0$.
- D est C^∞ .

Exercice 8. Utiliser une fonction bosse pour construire un difféomorphisme $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ qui satisfait $f'(a) = f'(b) = 1$ et $f(a) = c$, $f(b) = d$.

Solution : On veut $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ avec $f'(a) = f'(b) = 1$, $f(a) = c$, $f(b) = d$.

- Soit $L = b - a$, $D = d - c$.
- Si $D = L$, alors $f(x) = c + (x - a)$ convient.
- Si $D \neq L$, on construit $\gamma : [0, L] \rightarrow [0, D]$ de classe C^∞ telle que :
 - $\gamma(0) = 0$, $\gamma(L) = D$,
 - $\gamma'(0) = 1$, $\gamma'(L) = 1$,
 - $\gamma'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, L]$.
- Alors $f(x) = c + \gamma(x - a)$ est le difféomorphisme cherché.
- Pour construire γ , on utilise une fonction de transition basée sur $C(x)$ pour ajuster la dérivée entre les régions linéaires près des bords et une région à pente constante au centre.

Exercice 9. Soit f une fonction dérivable, soit p un point fixe de f , et supposons que f' est continue. Si $|f'(p)| < 1$, alors il existe un intervalle ouvert U contenant p tel que chaque fois que x est dans U , alors $f^n(x)$ converge vers p .

Solution : Soit f une fonction continûment dérivable, supposons que p est un point fixe de f , et supposons que $|f'(p)| < 1$. Nous souhaitons trouver un voisinage p qui est contenu dans $W^S(p)$. Soit $\epsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)$. Puisque $|f'(p)| < 1$ alors $\epsilon > 0$. Du fait que f' est continue, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x) - f'(p)| < \epsilon$ chaque fois que $|x - p| < \delta$. Si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors

$$\begin{aligned}
 |f'(x)| &= |f'(x) - f'(p) + f'(p)| \\
 &\leq |f'(x) - f'(p)| + |f'(p)| \\
 &< \epsilon + |f'(p)| \\
 &= \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)| \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|f'(p)| \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) \right) \\
 &= 1 - \epsilon
 \end{aligned}$$

Donc, si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors $|f'(p)| < 1 - \varepsilon$. Il reste à montrer que $f^k(x)$ converge vers p lorsque $x \in]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in]p - \delta, p + \delta[$ et $x \neq p$. D'après le théorème de la valeur moyenne il existe $c \in]x, p[$ telle que

$$\begin{aligned} |f(x) - p| &= |f(x) - f(p)| = f'(c) |x - p| \\ &< (1 - \varepsilon) |x - p| \end{aligned}$$

En itérant le processus, nous constatons que

$$|f^k(x) - p| = (1 - \varepsilon)^k |x - p|$$

Puisque $0 < 1 - \varepsilon < 1$ alors

$$|f^k(x) - p| \rightarrow 0, \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Exercice 10.

1) Trouvez la solution exacte de l'itération :

$$x_{k+1} = x_k^4. \tag{5.1}$$

— Déterminez le comportement asymptotique de $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x_0 = \frac{2}{3}$ sous l'action de (1).

2) Trouvez la solution exacte de l'itération :

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k}, x_0 \geq 0.$$

— Déterminez le comportement asymptotique de $x_0 = \frac{1}{2}$ et $x_0 = 1$.

Exercice 11. Soit f une fonction dérivable, soit p un point fixe de f , et supposons que f' est continue. Si $|f'(p)| < 1$, alors il existe un intervalle ouvert U contenant p tel que chaque fois que x est dans U , alors $f^n(x)$ converge vers p .

Solution : Soit f une fonction continûment dérivable, supposons que p est un point fixe de f , et supposons que $|f'(p)| < 1$. Nous souhaitons trouver un voisinage p qui est contenu dans $W^S(p)$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)$. Puisque $|f'(p)| < 1$ alors $\varepsilon > 0$. Du fait que f' est continue, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x) - f'(p)| < \varepsilon$ chaque fois que $|x - p| < \delta$.

Si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors

$$\begin{aligned}
 |f'(x)| &= |f'(x) - f'(p) + f'(p)| \\
 &\leq |f'(x) - f'(p)| + |f'(p)| \\
 &< \epsilon + |f'(p)| \\
 &= \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)| \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|f'(p)| \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)\right) \\
 &= 1 - \epsilon
 \end{aligned}$$

Donc, si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors $|f'(p)| < 1 - \epsilon$. Il reste à montrer que $f^k(x)$ converge vers p lorsque $x \in]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in]p - \delta, p + \delta[$ et $x \neq p$. D'après le théorème de la valeur moyenne il existe $c \in]x, p[$ telle que

$$\begin{aligned}
 |f(x) - p| &= |f(x) - f(p)| = f'(c) |x - p| \\
 &< (1 - \epsilon) |x - p|
 \end{aligned}$$

En itérant le processus, nous constatons que

$$|f^k(x) - p| = (1 - \epsilon)^k |x - p|$$

Puisque $0 < 1 - \epsilon < 1$ alors

$$|f^k(x) - p| \rightarrow 0, \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

La preuve pour $|f'(x)| > 1$ est similaire.

Exercice 12. Soient $J = [a, b]$ et $I = [c, d]$ deux intervalles fermés. Soit $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $I \subset f(J)$. Alors il existe un sous-intervalle $J_0 \subset J$ tel que $f(J_0) = I$.

Solution :

Démonstration. Si K est réduit à un point, disons $K = \{c\}$, alors puisque $c \in f(J)$, il existe $x_0 \in J$ tel que $f(x_0) = c$. On prend $J_0 = \{x_0\}$, qui est un intervalle fermé (dégénéré) et on a $f(J_0) = \{c\} = K$.

Supposons maintenant que K est un intervalle non trivial, donc $K = [c, d]$ avec $c < d$. Soit $J = [a, b]$. Puisque $K \subset f(J)$, il existe $x_0, y_0 \in J$ tels que $f(x_0) = c$ et $f(y_0) = d$.

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe un point dans $[x_0, b]$ dont l'image est d . En effet, si un tel point n'existait pas, alors nécessairement il existerait un point dans $[a, x_0]$ dont l'image est d , et on travaillerait symétriquement.

Définissons :

$$x_2 = \min\{y \in [x_0, b] \mid f(y) = d\}.$$

Cet ensemble est non vide par hypothèse et fermé (car image réciproque d'un fermé par une fonction continue), donc son minimum existe.

Définissons ensuite :

$$x_1 = \max\{x \in [x_0, x_2] \mid f(x) = c\}.$$

Cet ensemble est non vide (car x_0 appartient à cet ensemble) et fermé, donc son maximum existe.

Montrons que $f([x_1, x_2]) = [c, d]$.

Par construction, $f(x_1) = c$ et $f(x_2) = d$. Puisque f est continue, $f([x_1, x_2])$ est un intervalle contenant c et d , donc $[c, d] \subset f([x_1, x_2])$.

Il reste à montrer que $f([x_1, x_2]) \subset [c, d]$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) > d$ ou $f(x) < c$.

- Si $f(x) > d$ pour un $x \in [x_1, x_2]$, alors puisque $f(x_1) = c \leq d$ et $f(x) > d$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in (x_1, x)$ tel que $f(z) = d$. Mais alors $z \in [x_0, x_2]$ et $z < x_2$, ce qui contredit la minimalité de x_2 .
- Si $f(x) < c$ pour un $x \in [x_1, x_2]$, alors puisque $f(x_2) = d \geq c$ et $f(x) < c$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in (x, x_2)$ tel que $f(z) = c$. Mais alors $z \in [x_0, x_2]$ et $z > x_1$, ce qui contredit la maximalité de x_1 .

Ainsi, pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on a $c \leq f(x) \leq d$, donc $f([x_1, x_2]) \subset [c, d]$.

On conclut que $f([x_1, x_2]) = [c, d]$. Il suffit de prendre $J_0 = [x_1, x_2]$, qui est bien un intervalle fermé inclus dans J . □

Exercice 13.

1) Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Montrer que f admet un seul point fixe p et que $W^S(p) = \mathbb{R}$.

2) Soit la fonction définie par

$$f(x) = |x - 1|$$

Calculer les points fixes et les points périodiques de période 2, puis trouver les variétés stables de ces cycles.

3) Soit la fonction définie par

$$f(x) = 4x(1 - x)$$

Montrer que f admet 3 points fixes éventuels dans $[0, 1]$.

Solution :

1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$f(p) = p \iff p = 3 \iff p \text{ est l'unique point fixe pour } f$$

Puisque $f'(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ alors, le théorème de la valeur moyenne entre x et p implique $|f(x) - p| < \frac{1}{2}|x - p|$ pour tout x dans \mathbb{R} en itérant le processus, on trouve

$$|f^k(x) - p| < \left(\frac{1}{2}\right)^k |x - p| \rightarrow 0, \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Donc $W^S(p) = \mathbb{R}$.

2) Puisque $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$, alors

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x - 1 = x & \text{si } x > 1 \\ 1 - x = x & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \iff x = \frac{1}{2}$$

Donc f admet un seul point périodique $x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Puisque } f^2(x) = \begin{cases} |x - 2| & \text{si } x > 1 \\ |x| & \text{si } x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x > 2 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, \text{ alors}$$

$$f^2(x) = x \iff \begin{cases} x - 2 = x & \text{si } x > 2 \\ 2 - x = x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x = x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x = x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Si $x \in [0, 1]$ alors x est un point 2-périodique.

3 $f(x) = x \iff x = 0 \vee x = \frac{3}{4}$. x est un point fixe éventuel ssi $x \neq x^*$ et $f(x) = x^*$ où x^* est un point fixe. Donc

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x = 0 \vee x = 1 \\ f(x) = \frac{3}{4} &\iff x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc $x = 1$ et $x = \frac{1}{4}$ sont des points fixes éventuels.

Exercice 14. Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. Étudiez l'existence des points fixes de f_r selon les valeurs du paramètre $r \geq 0$.
2. Utiliser la dérivée de f_r pour étudier la stabilité des points fixes selon le paramètre r .
3. Étudier l'existence des points 2-périodique de f_r et leur stabilité lorsque $r = 3$ (utiliser la division euclidienne.)

Solution : Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. $f_r(x) = x \iff x = 0 \vee x = \frac{r-1}{r}$.
2. $f'(x) = r(1-x) - rx \implies f'(0) = r$ et $f'(\frac{r-1}{r}) = 2-r$. Il est facile de remarquer que $|2-r| < 1$ si et seulement si $r \in]1, 3[$ et donc :
 - a) Le point fixe $p = 0$ est attractif si et seulement si $r \in]0, 1[$, répulsif si $r \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.
 - b) Le point fixe $p = \frac{r-1}{r}$ est attractif si et seulement si $r \in]1, 3[$, répulsif si $r \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$.
3. $f_r^2(x) = r^2 x (1-x) (1-rx(1-x))$ les points 2-périodique de f_r sont les racines du polynôme

$$Q(x) = f^2(x) - x \tag{5.2}$$

qui est de 3ème degré. Comme $x = 0$ et $x = \frac{r-1}{r}$ sont aussi racines de $Q(x)$, en utilisant la division euclidienne du polynôme $Q(x)$ par le polynôme $R(x) = x(x - \frac{r-1}{r})$ on obtient l'équation

$$W(x) = r^3 x - r^3 x^2 + r^2 x - r^2 - r \tag{5.3}$$

équivalent à (1). Pour $r = 3$, (2) admet deux racines confondues $\alpha = \frac{2}{3}$. De plus $(f_3^2)'(\alpha) = 1$ et le point $\alpha = 1$ est donc non-hyperbolique.

4. En regardant les premières itérations

$$x_1 = x_0^4, \quad x_2 = x_1^4 = x_0^{4^2}, \quad x_3 = x_0^{4^3}, \quad \dots, \quad x_k = x_0^{4^k}.$$

Maintenant, si $x_0 = \frac{3}{2}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{4^k} = +\infty.$$

De même, si $x_0 = \frac{2}{3}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{4^k} = 0.$$

5. En regardant les premières itérations

$$x_1 = x_0^{\frac{3}{2}}, \quad x_2 = x_1^{\frac{3}{2}} = x_0^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}, \quad \dots, \quad x_k = x_0^{\left(\frac{3}{2}\right)^k}.$$

Maintenant, si $x_0 = \frac{1}{2}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

De même, si $x_0 = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1.$$

Exercice 15.

Discuter les bifurcations des points fixes dans les familles de fonctions suivantes aux valeurs données et dessiner les diagrammes de bifurcation pour chacune des fonctions :

- 1) $f_c(x) = x^2 + c$ pour $c \geq 0$.
- 2) $g_r(x) = rx - x^3$ pour $r < 1$.

Solution :

- 1) $x \geq 0$ est un point fixe pour $f_c \Leftrightarrow f_c(x) = x \Leftrightarrow x^2 + c = x \Leftrightarrow x = p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$, $x = p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$.

On a aussi $f'(x) = 2x$ et $f'_c(p_1) = 1 - \sqrt{1-4a}$, $f'_c(p_2) = 1 + \sqrt{1-4a}$.

- Si $0 \leq c < \frac{1}{4}$, f_c possède deux points fixes $p_1 < p_2$, p_1 est hyperbolique et attractif du fait que $|f'_c(p_1)| = |1 - \sqrt{1-4a}| < 1$, alors que p_2 est hyperbolique répulsif puisque $|f'_c(p_2)| = |1 + \sqrt{1-4a}| > 1$.

- Si $c = \frac{1}{4}$, les deux points fixes p_1 et p_2 se confondent en un seul point fixe $p = \frac{1}{2}$ non hyperbolique puisque $|f'_c(p)| = 1$. Ce point est attractif sur $]0, \frac{1}{2}[$ et répulsif sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$
 - Si $c > \frac{1}{4}$, f_c ne possède aucun point fixe.
- 2) $x < 1$ est un point fixe pour $g_r \Leftrightarrow g_r(x) = x \Leftrightarrow rx - x^3 = x \Leftrightarrow x = p = 0$, $x = p_2 = -\sqrt{r-1}$, $x = p_3 = \sqrt{r-1}$.
- On a aussi $g'_r(p_2) = g'_r(p_3) = -2r + 3$, $g'_r(p_1) = r$.
- Si $r < -1$, g_r possède un point fixe p_1 hyperbolique répulsif du fait que $|g'_r(p_1)| = |r| > 1$.
 - Si $r = -1$, g_r possède qu'un seul point fixe p_1 non hyperbolique répulsif (l'analyse graphique).
 - Si $r \in]-1, 1[$, g_r possède un point fixe p_1 non hyperbolique attractif, puisque $|g'_r(p_1)| = |r| < 1$ alors que les points fixe p_2 et p_3 sont répulsif puisque $|g'_r(p_2)| = |g'_r(p_3)| = |3 - 2r| > 1$.

Exercice 16. Montrez la proposition suivante :

Théorème 5.1. Soit I un intervalle fermé et $f : I \rightarrow I$ une fonction différentiable satisfaisant $|f'(a)| < 1$ pour tout x dans I . Alors f possède un unique point fixe dans I . Par ailleurs, si x et y sont deux points dans I tels que $x \neq y$, alors $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Solution : $f : I \rightarrow I$ est différentiable sur I donc continue sur I , par conséquent il existe au moins un point fixe sur I (Théorème 1.1 du cours).

Maintenant, supposons que x et y sont deux points fixes dans I tels que $x \neq y$. Le théorème de la valeur moyenne implique l'existence d'un $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1$$

ce qui contredit le fait que $|f'(c)| < 1$, donc le point fixe est unique. Pour établir la seconde assertion de la proposition, nous allons de nouveau utiliser le Théorème de la valeur moyenne pour tout $x, y \in \overset{\circ}{I}$, $x \neq y$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| < |x - y|.$$

Exercice 17. 1) Trouvez la solution exacte de l'itération :

$$x_{k+1} = x_k^3. \tag{5.4}$$

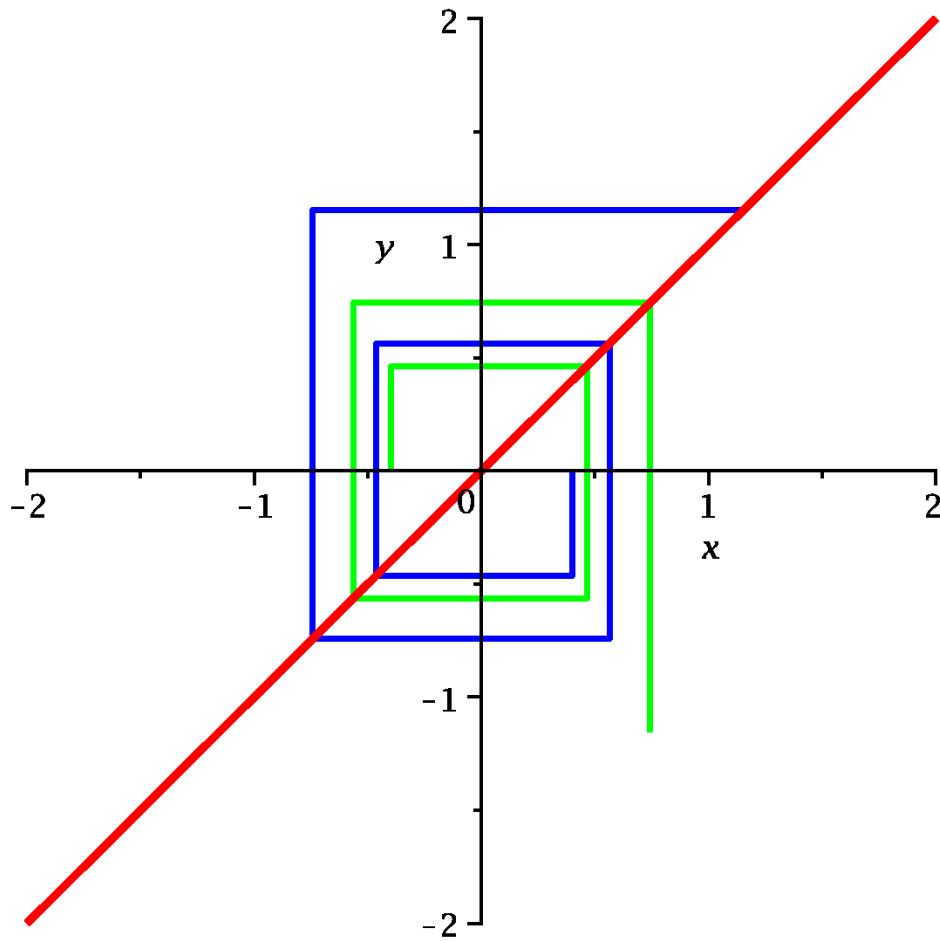


FIGURE 5.1 – Le diagramme de bifurcation de la fonction f_c , $c \geq 0$

— Déterminez le comportement asymptotique de $x_0 = 2$ et $x_0 = \frac{1}{2}$ sous l'action de (1).

2) Trouvez la solution exacte de l'itération :

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k}, x_0 \geq 0. \quad (5.5)$$

— Déterminez le comportement asymptotique de $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$ sous l'action de (2).

Solution :

1. En regardant les premières itérations

$$x_1 = x_0^3, \quad x_2 = x_1^3 = x_0^{3^2}, \quad x_3 = x_2^3 = x_0^{3^3}, \quad \dots, \quad x_k = x_0^{3^k}.$$

Maintenant, si $x_0 = 2$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{3^k} = +\infty.$$

De même, si $x_0 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3^k} = 0.$$

2. En regardant les premières itérations

$$x_1 = x_0^{\frac{1}{2}}, \quad x_2 = x_1^{\frac{1}{2}} = x_0^{\frac{1}{2^2}}, \quad \dots, \quad x_k = x_0^{\frac{1}{2^k}}.$$

Maintenant, si $x_0 = 0$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

De même, si $x_0 = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1.$$

Exercice 18. Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_c(x) = x^2 + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \geq 0$$

1. Étudiez l'existence et la stabilité des points fixes de f_c selon les valeurs du paramètre $c \geq 0$.
2. Aidez par les Figures (5.2a), (5.2b) et (5.2c), déterminer les variétés stables des points fixes attractifs s'il y a lieux.
3. Étudiez l'existence des points périodiques d'ordre 2. Que peut-on déduire sur l'existence des points périodiques de période supérieure à 2 (justifier votre réponse) ?
4. D'après 1), 2) et 3) qu'elles sont les valeurs de bifurcation pour f_c puis tracer dans le plan (c, x) le diagramme de bifurcation de f_c , $c \geq 0$.

Solution :

1. $x \in \mathbb{R}$ est un point fixe pour $f_c \Leftrightarrow f_c(x) = x \Leftrightarrow x^2 + c = x \Leftrightarrow x = p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$, $x = p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$.
On a aussi $f'_c(p_1) = 1 - \sqrt{1-4c}$, $f'_c(p_2) = 1 + \sqrt{1-4c}$.
 - Si $0 \leq c < \frac{1}{4}$, f_c possède deux points fixes $p_1 < p_2$, p_1 est hyperbolique et attractif du fait que $|f'_c(p_1)| = |1 - \sqrt{1-4c}| < 1$, alors que p_2 est hyperbolique répulsif puisque $|f'_c(p_2)| = |1 + \sqrt{1-4c}| > 1$.
 - Si $c = \frac{1}{4}$, les deux points fixes p_1 et p_2 se confondent en un seul point fixe $p = \frac{1}{2}$ non hyperbolique puisque $|f'_c(p)| = 1$.

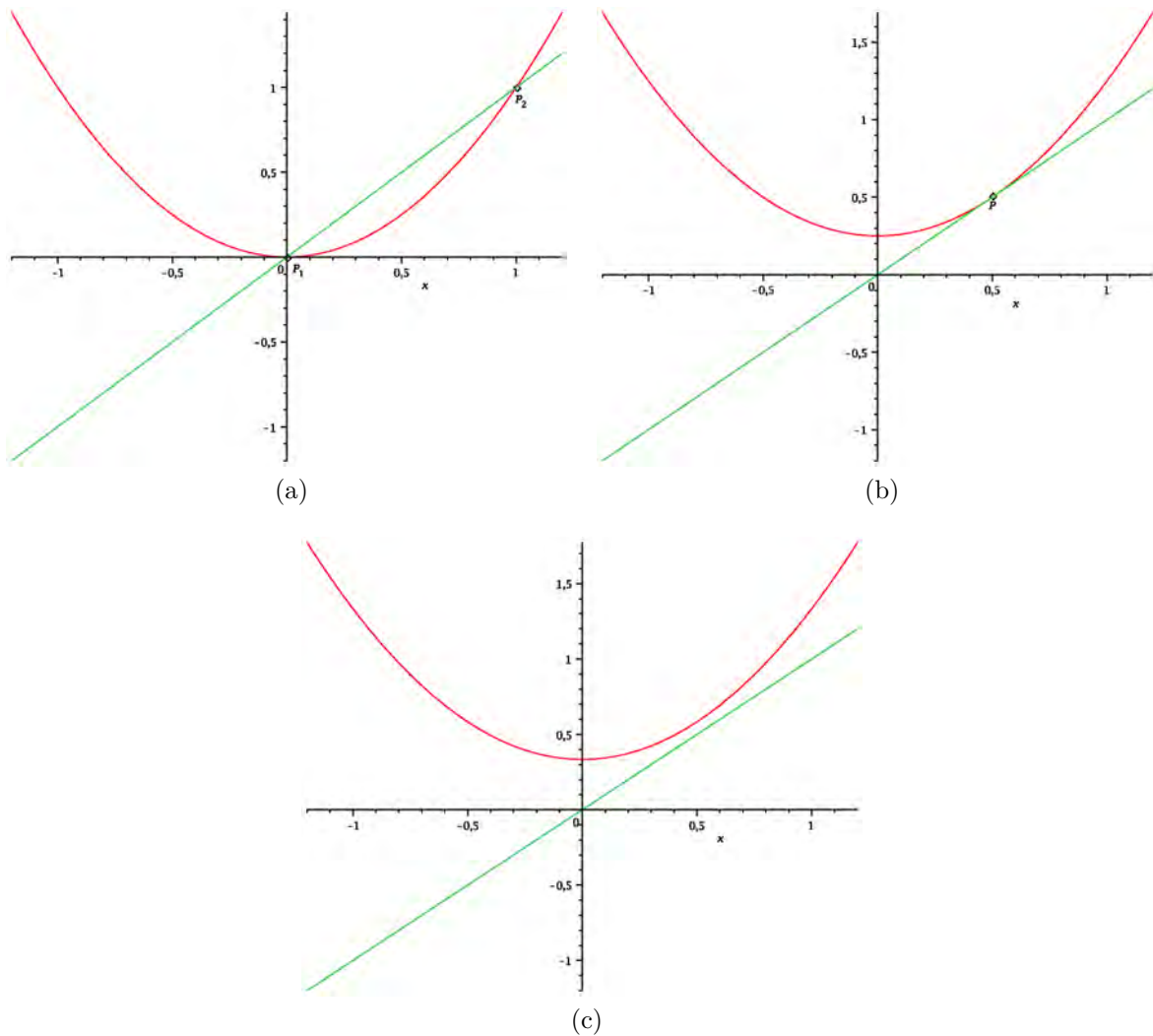


FIGURE 5.2 – Le graphe de f_c et $y = x$ pour quelques valeurs de $c \geq 0$.

— Si $c > \frac{1}{4}$, f_c ne possède aucun point fixe.

2.

a) Si $0 \leq c < \frac{1}{4}$, $W^S(p_1) =]p', p_2[$ où $p' = -p_2$ est un point fixe éventuel puisque $f_c(p') = p_1$. On remarque aussi que $W^S(\infty) =]-\infty, p' \cup]p_2, \infty[$.

b) Si $c = \frac{1}{4}$, $W^S(p) =]p', p[$ où $p = \frac{1}{2}$ (point fixe) et $p' = -\frac{1}{2}$ (point fixe éventuel), $]-\infty, p' \cup]p, \infty[$.

c) Si $c > \frac{1}{4}$, $W^S(\infty) = \mathbb{R}$.

3. $x \in \mathbb{R}$ est un point périodique de période 2 $\Leftrightarrow f_c^2(x) = x$ et $f_c(x) \neq x \Leftrightarrow x^4 + 2cx^2 + c^2 + c = 0$ et $f_c(x) \neq x$.

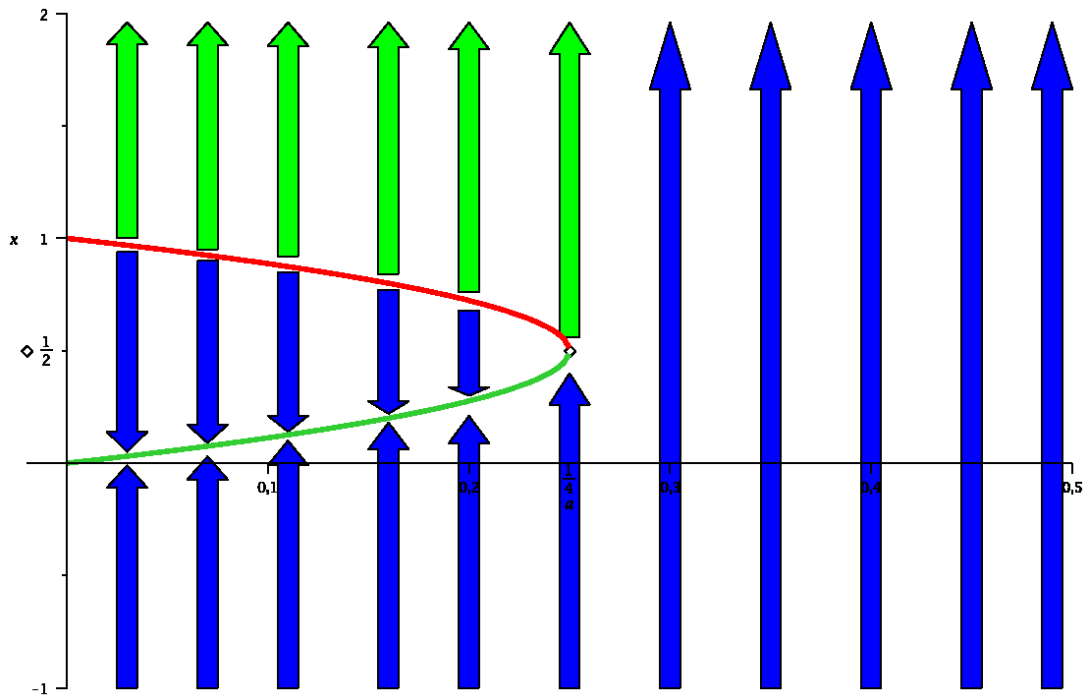


FIGURE 5.3 – Le diagramme de bifurcation de la fonction f_c , $c \geq 0$.

Puisque p_1 et p_2 sont des racines de $f(x) - x = x^2 - x + c$ ainsi que $f^2(x) - x = x^4 + 2cx^2 + c^2 + c$, en procédant par une division Euclidienne, on trouve

$$f^2(x) - x = (x^2 + x + c + 1)(x^2 - x + c)$$

Ce polynôme ne possède que les points fixes p_1 et p_2 comme racines réelles puisque $c \geq 0$, donc f_c n'a pas de points 2-périodiques. On déduit directement du théorème de Sharkovskii que f_c n'a de points périodiques autres que les points fixes p_1 et p_2 .

4. D'après l'analyse faite en 1., 2. et 3., $c = \frac{1}{4}$ est une valeur de bifurcation pour la dynamique f_c (de type noeud-selle).

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- 1) Si f admet un point périodique de période 3, est ce qu'elle admet un point périodique de période 2013? (Justifier votre réponse)
- 2) Si f n'admet pas de point périodique de période 2, est ce qu'elle admet un point périodique de période 5? (Justifier votre réponse)

Exercice 20. Montrer la proposition suivante :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continûment dérivable, soit p un point fixe attractif pour f . Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant p tel que ; si $x \in I$, alors $f^k(x) \in I$ pour tout k , en plus

$$f^k(x) \rightarrow p, \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Solution : En effet, puisque $|f'(p)| < 1$, alors il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $|f'(p)| < \lambda < 1$. Par continuité de f' il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| < \lambda$ pour tout $x \in I =]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in I$, on a

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < \lambda \implies |f(x) - f(p)| = |f(x) - p| < \lambda |x - p|.$$

En appliquant les mêmes arguments pour $f(x)$ et $f(p)$, nous trouvons

$$|f^2(x) - p| < \lambda^2 |x - p|$$

du fait que $0 < \lambda < 1$, on obtient

$$|f^k(x) - f(p)| < \lambda^k |x - p|.$$

Maintenant, on fait tendre k vers l'infini pour conclure.

Exercice 21. Montrer la proposition suivante :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable, soit p un point fixe répulsif pour f . Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant p tel que ; si $x \in I$ et $x \neq p$, alors il existe un entier $k > 0$ tel que $f^k(x) \notin I$.

Solution : En effet, puisque $|f'(p)| > 1$, alors il existe un nombre $\lambda > 1$ tel que $|f'(p)| > \lambda > 1$. Par continuité de f' il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| > \lambda$ pour tout $x \in I =]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in I$, on a

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} > \lambda \implies |f(x) - f(p)| = |f(x) - p| > \lambda |x - p|.$$

En appliquant les mêmes arguments pour $f(x)$ et $f(p)$, nous trouvons

$$|f^2(x) - p| > \lambda^2 |x - p|$$

du fait que $\lambda > 1$, on obtient

$$|f^k(x) - f(p)| > \lambda^k |x - p|.$$

Maintenant, on fait tendre k vers l'infini pour conclure.

Exercice 22. Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. Étudier l'existence des points fixes de f_r selon les valeurs du paramètre $r \geq 0$.
2. Utiliser la dérivée de f_r pour étudier la stabilité des points fixes selon le paramètre r .
3. Étudier l'existence des points 2-périodique de f_r et leur stabilité lorsque $r = 3$.

Solution : Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. $f_r(x) = x \iff x = 0 \vee x = \frac{r-1}{r}$.
2. $f'_r(x) = r(1-x) - rx \implies f'_r(0) = r$ et $f'_r\left(\frac{r-1}{r}\right) = 2-r$. Il est facile de remarquer que $|2-r| < 1$ si et seulement si $r \in]1, 3[$ et donc :
 - a) Le point fixe $p = 0$ est attractif si et seulement si $r \in]0, 1[$, répulsif si $r \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.
 - b) Le point fixe $p = \frac{r-1}{r}$ est attractif si et seulement si $r \in]1, 3[$, répulsif si $r \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$.
3. $f_r^2(x) = r^2 x (1-x) (1-rx(1-x))$ les points 2-périodique de f_r sont les racines du polynôme

$$Q(x) = f^2(x) - x \tag{5.6}$$

qui est de 3ème degré. Comme $x = 0$ et $x = \frac{r-1}{r}$ sont aussi racines de $Q(x)$, en utilisant la division euclidienne du polynôme $Q(x)$ par le polynôme $R(x) = x(x - \frac{r-1}{r})$ on obtient l'équation

$$W(x) = r^3 x - r^3 x^2 + r^2 x - r^2 - r \tag{5.7}$$

équivalent à (1). Pour $r = 3$, (2) admet deux racines confondues $\alpha = \frac{2}{3}$. De plus $(f_3^2)'(\alpha) = 1$ et le point $\alpha = 1$ est donc non-hyperbolique.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- 1) Si f admet un point périodique de période 3 est ce qu'elle admet un point périodique de période 2013? (Justifier votre réponse)

2) Si f n'admet pas de point périodique de période 2 est ce qu'elle admet un point périodique de période 5. ? (Justifier votre réponse)

Solution :

1) Oui : Puisque dans l'ordre de Sarkovskii

$$3 \triangleleft 2013$$

alors ; si f admet un point périodique de période 3 $\implies f$ admet un point périodique de période 2013.

2) Non : Puisque dans l'ordre de Sarkovskii

$$5 \triangleleft 2$$

alors ; f n'admet pas un point périodique de période 2 $\implies f$ n'admet pas un point périodique de période 5.

Exercice 24. Soit f une fonction dérivable, soit p un point fixe de f , et supposons que f' est continue. Si $|f'(p)| < 1$, alors il existe un intervalle ouvert U contenant p tel que chaque fois que x est dans U , alors $f^n(x)$ converge vers p .

Solution : Soit f une fonction continûment dérivable, supposons que p est un point fixe de f , et supposons que $|f'(p)| < 1$. Nous souhaitons trouver un voisinage p qui est contenu dans $W^S(p)$. Soit $\epsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)$. Puisque $|f'(p)| < 1$ alors $\epsilon > 0$. Du fait que f' est continue, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x) - f'(p)| < \epsilon$ chaque fois que $|x - p| < \delta$. Si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(x) - f'(p) + f'(p)| \\ &\leq |f'(x) - f'(p)| + |f'(p)| \\ &< \epsilon + |f'(p)| \\ &= \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)| \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|f'(p)| \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)\right) \\ &= 1 - \epsilon \end{aligned}$$

Donc, si $x \in]p - \delta, p + \delta[$, alors $|f'(p)| < 1 - \epsilon$. Il reste à montrer que $f^k(x)$ converge vers p lorsque $x \in]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in]p - \delta, p + \delta[$ et $x \neq p$. D'après le théorème de la

valeur moyenne il existe $c \in]x, p[$ telle que

$$\begin{aligned} |f(x) - p| &= |f(x) - f(p)| = f'(c) |x - p| \\ &< (1 - \epsilon) |x - p| \end{aligned}$$

En itérant le processus, nous constatons que

$$|f^k(x) - p| = (1 - \epsilon)^k |x - p|$$

Puisque $0 < 1 - \epsilon < 1$ alors

$$|f^k(x) - p| \rightarrow 0, \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Exercice 25. Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. Étudiez l'existence des points fixes de f_r selon les valeurs du paramètre $r \geq 0$.
2. Utiliser la dérivée de f_r pour étudier la stabilité des points fixes selon le paramètre r .
3. Étudier l'existence des points 2-périodique de f_r et leur stabilité lorsque $r = 3$.

Solution : Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. $f_r(x) = x \iff x = 0 \vee x = \frac{r-1}{r}$.
2. $f'(x) = r(1-x) - rx \implies f'(0) = r$ et $f'(\frac{r-1}{r}) = 2-r$. Il est facile de remarquer que $|2-r| < 1$ si et seulement si $r \in]1, 3[$ et donc :
 - a) Le point fixe $p = 0$ est attractif si et seulement si $r \in]0, 1[$, répulsif si $r \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.
 - b) Le point fixe $p = \frac{r-1}{r}$ est attractif si et seulement si $r \in]1, 3[$, répulsif si $r \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$.
3. $f_r^2(x) = r^2 x (1-x) (1-rx(1-x))$ les points 2-périodique de f_r sont les racines du polynôme

$$Q(x) = f^2(x) - x \tag{5.8}$$

qui est de 3ème degré. Comme $x = 0$ et $x = \frac{r-1}{r}$ sont aussi racines de $Q(x)$, en utilisant la division euclidienne du polynôme $Q(x)$ par le polynôme $R(x) = x(x - \frac{r-1}{r})$ on obtient l'équation

$$W(x) = r^3x - r^3x^2 + r^2x - r^2 - r \quad (5.9)$$

équivalent à (1). Pour $r = 3$, (2) admet deux racines confondues $\alpha = \frac{2}{3}$. De plus $(f_3^2)'(\alpha) = 1$ et le point $\alpha = 1$ est donc non-hyperbolique.

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- 1) Si f admet un point périodique de période 3, est ce qu'elle admet un point périodique de période 2013? (Justifier votre réponse)
- 2) Si f n'admet pas de point périodique de période 2, est ce qu'elle admet un point périodique de période 5? (Justifier votre réponse)

Solution :

- 1) Oui : Puisque dans l'ordre de Sarkovskii

$$3 \triangleleft 2013$$

alors; si f admet un point périodique de période 3 $\implies f$ admet un point périodique de période 2013.

- 2) Non : Puisque dans l'ordre de Sarkovskii

$$5 \triangleleft 2$$

alors; f n'admet pas un point périodique de période 2 $\implies f$ n'admet pas un point périodique de période 5.

Exercice 27. Montrer la proposition suivante :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continûment dérivable, soit p un point fixe attractif pour f . Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant p tel que; si $x \in I$, alors $f^k(x) \in I$ pour tout k , en plus

$$f^k(x) \rightarrow p, \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Exercice 28. Montrer la proposition suivante :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable, soit p un point fixe répulsif pour f . Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant p tel que; si $x \in I$ et $x \neq p$, alors il existe un entier $k > 0$ tel que $f^k(x) \notin I$.

Solution : En effet, puisque $|f'(p)| > 1$, alors il existe un nombre $\lambda > 1$ tel que $|f'(p)| > \lambda > 1$. Par continuité de f' il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| > 1$ pour tout $x \in I =]p - \delta, p + \delta[$. Soit $x \in I$, on a

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} > \lambda \implies |f(x) - f(p)| = |f(x) - p| > \lambda |x - p|.$$

En appliquant les mêmes arguments pour $f(x)$ et $f(p)$, nous trouvons

$$|f^2(x) - p| > \lambda^2 |x - p|$$

du fait que $\lambda > 1$, on obtient

$$|f^k(x) - f(p)| > \lambda^k |x - p|.$$

Maintenant, on fait tendre k vers l'infini pour conclure.

Exercice 29. Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. Étudier l'existence des points fixes de f_r selon les valeurs du paramètre $r \geq 0$.
2. Utiliser la dérivée de f_r pour étudier la stabilité des points fixes selon le paramètre r .
3. Étudier l'existence des points 2-périodique de f_r et leur stabilité lorsque $r = 3$.

Solution : Soit la famille de fonctions paramétrées donnée par

$$f_r(x) = r x (1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \geq 0$$

1. $f_r(x) = x \iff x = 0 \vee x = \frac{r-1}{r}$.
2. $f'(x) = r(1-x) - rx \implies f'(0) = r$ et $f'(\frac{r-1}{r}) = 2-r$. Il est facile de remarquer que $|2-r| < 1$ si et seulement si $r \in]1, 3[$ et donc :
 - a) Le point fixe $p = 0$ est attractif si et seulement si $r \in]0, 1[$, répulsif si $r \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.
 - b) Le point fixe $p = \frac{r-1}{r}$ est attractif si et seulement si $r \in]1, 3[$, répulsif si $r \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$.
3. $f_r^2(x) = r^2 x (1-x) (1-rx(1-x))$ les points 2-périodique de f_r sont les racines du polynôme

$$Q(x) = f^2(x) - x \tag{5.10}$$

qui est de 3ème degré. Comme $x = 0$ et $x = \frac{r-1}{r}$ sont aussi racines de $Q(x)$, en utilisant la division euclidienne du polynôme $Q(x)$ par le polynôme $R(x) = x(x - \frac{r-1}{r})$ on obtient l'équation

$$W(x) = r^3x - r^3x^2 + r^2x - r^2 - r \quad (5.11)$$

équivalent à (1). Pour $r = 3$, (2) admet deux racines confondues $\alpha = \frac{2}{3}$. De plus $(f_3^2)'(\alpha) = 1$ et le point $\alpha = 1$ est donc non-hyperbolique.

Exercice 30. Résoudre le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (5.12)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :

Les valeurs propres de A sont répétées : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Le seul vecteur propre que l'on peut trouver est $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour construire P , on doit trouver un vecteur propre généralisé V_2 . Ceci est accompli en résolvant l'équation $(A - 2I)V_2 = V_1$. Alors, V_2 peut être pris comme n'importe quel vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $3y - 2x = 1$. On prend $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Maintenant si on pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la solution de l'équation (5.12) est donnée par

$$\begin{aligned} X_n &= PJ^n P^{-1}x_0 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 1 - 3n \\ -2n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 31. Résoudre le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution :

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2 + 3i$ et $\lambda_2 = -2 - 3i$. Les vecteurs propres correspondants sont $V = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\bar{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}$, respectivement.

Cette fois, nous prenons un raccourci et utilisons l'équation (4.20). Les vecteurs V_1 et V_2 mentionnés dans cette formule sont la partie réelle de V , $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et la partie imaginaire de V , $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Maintenant, $|\lambda_1| = \sqrt{13}$, $\omega = \arctan(\frac{-3}{2}) \approx 123.69^\circ$. Ainsi,

$$x_n = (13)^{n/2} \left[(k_1 \cos n\omega + k_2 \sin n\omega) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-k_1 \sin n\omega + k_2 \cos n\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Donc,

$$\begin{aligned} x_n &= (13)^{n/2} \left[(\cos n\omega + 2 \sin n\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\sin n\omega + 2 \cos n\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= (13)^{n/2} \begin{pmatrix} -\cos n\omega - 2 \sin n\omega \\ -\sin n\omega + 2 \cos n\omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 32. Trouver le point d'équilibre du modèle prix-demande :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2.5y_n - 0.1x_n^2 - 1, \\ y_{n+1} = y_n + \frac{5}{x_n} - 1, \end{cases}$$

et déterminer s'il s'agit d'un attracteur (puits), d'une source (source) ou d'un point-col (point-selle) ?

Solution : Pour trouver le point fixe, nous résolvons le système d'équations simultanées :

$$x = x + 2.5y - 0.1x^2 - 1, \quad y = y + \frac{5}{x} - 1.$$

La deuxième équation donne $x = 5$. En substituant cette valeur dans la première équation, on obtient $y = 1.4$. Ainsi, le point d'équilibre est $(5, 1.4)$.

Pour déterminer si ce point est un attracteur, une source ou un point-col, nous calculons d'abord les dérivées partielles des fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ associées au système. Puisque $f(x, y) = x + 2.5y - 0.1x^2 - 1$, alors :

$$f_x(x, y) = 1 - 0.1x, \quad f_y(x, y) = 2.5.$$

En traitant l'autre variable comme constante pour chaque dérivée partielle, et pour $g(x, y) = y + \frac{5}{x} - 1$, on obtient :

$$g_x(x, y) = -\frac{5}{x^2}, \quad g_y(x, y) = 1.$$

Ensuite, nous évaluons ces dérivées partielles au point $(5, 1.4)$:

$$f_x(5, 1.4) = 0, \quad f_y(5, 1.4) = 2.5, \quad g_x(5, 1.4) = -0.2, \quad g_y(5, 1.4) = 1.$$

La matrice associée à la linéarisation du système au point $(5, 1.4)$ est donc :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant les techniques du Chapitre 4, nous trouvons les valeurs propres de cette matrice :

$$\lambda = \frac{1 \pm i}{2}.$$

Puisque $|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, selon notre théorème, le point $(5, 1.4)$ est un attracteur (sink). Cela signifie que pour tout prix initial P_0 suffisamment proche de 5 et toute demande initiale D_0 suffisamment proche de 1.4, le prix P_n et la demande D_n se stabiliseront éventuellement à ces niveaux.

Exercice 33. Classifiez les points fixes du système proie-prédateur suivant à l'aide de la linéarisation :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 0.02x_n y_n, \\ y_{n+1} = 0.1y_n + 0.01x_n x_n. \end{cases}$$

Solution :

Pour déterminer la dynamique autour des points fixes, nous calculons d'abord les quatre dérivées partielles nécessaires. Puisque $f(x, y) = 5x - 0.02xy$ et $g(x, y) = 0.1y + 0.01xy$, les dérivées partielles sont :

$$f_x(x, y) = 5 - 0.02y, \quad f_y(x, y) = -0.02x,$$

$$g_x(x, y) = 0.01y, \quad g_y(x, y) = 0.1 + 0.01x.$$

Analyse du point fixe $(0, 0)$ En évaluant ces dérivées au point $(0, 0)$, on obtient :

$$f_x(0, 0) = 5, \quad f_y(0, 0) = 0, \quad g_x(0, 0) = 0, \quad g_y(0, 0) = 0.1.$$

Cela donne la matrice jacobienne suivante :

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de D sont 5 et 0.1. Ces valeurs indiquent que $(0, 0)$ est un point col (saddle). Les trajectoires proches de ce point présentent un comportement hyperbolique, confirmant ainsi les observations numériques.

Analyse du point fixe $(90, 200)$ Pour le point fixe $(90, 200)$, les dérivées partielles évaluées sont :

$$\begin{aligned} f_x(90, 200) &= 1, & f_y(90, 200) &= -1.8, \\ g_x(90, 200) &= 2, & g_y(90, 200) &= 1. \end{aligned}$$

Cela donne la matrice jacobienne suivante :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1.8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de D sont $1 \pm i\sqrt{3.6}$, avec un module $\sqrt{1^2 + 3.6}/2 = 2.145 > 1$. Cela montre que $(90, 200)$ est une source. De plus, en raison des valeurs propres complexes, les solutions locales autour de ce point présentent une rotation. La combinaison de ces deux dynamiques entraîne une spirale divergente autour de $(90, 200)$, ce qui confirme également les résultats numériques précédents.

Exercice 34.

1. Montrer que l'inégalité suivante

$$\left| \frac{\sqrt{1 + 16\mu} - 3 - \sqrt{2 + 16\mu - 6\sqrt{1 + 16\mu}}}{4} \right| < 1$$

est vérifiée pour $\mu \in \left] -\frac{1}{16}, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right[\cup \left] 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}, \infty \right[$.

2. Montrer que l'inégalité suivante

$$\left| \frac{\sqrt{1 + 16\mu} - 3 + \sqrt{2 + 16\mu - 6\sqrt{1 + 16\mu}}}{4} \right| < 1$$

est vérifiée pour $\mu \in \left] -\frac{1}{16}, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right[\cup \left] 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{35}{16} \right[$

Solution :

1. Posons $x = \sqrt{1 + 16\mu}$. Alors, l'expression devient :

$$\left| \frac{x - 3 - \sqrt{2 + 16\mu - 6x}}{4} \right|$$

En remplaçant $16\mu = x^2 - 1$, on obtient :

$$2 + 16\mu - 6x = 2 + (x^2 - 1) - 6x = x^2 - 6x + 1$$

Ainsi, l'expression se simplifie en :

$$\left| \frac{x - 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{4} \right|$$

Considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{x - 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{4}$$

Nous devons montrer que $|f(x)| < 1$ pour les valeurs de x correspondant aux intervalles de μ . La racine carrée $\sqrt{x^2 - 6x + 1}$ est définie lorsque $x^2 - 6x + 1 \geq 0$. Résolvons cette inégalité :

$$x^2 - 6x + 1 \geq 0$$

Le discriminant est $\Delta = 36 - 4 = 32$, donc les racines sont :

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Ainsi, $x^2 - 6x + 1 \geq 0$ lorsque $x \leq 3 - 2\sqrt{2}$ ou $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

— Pour $\mu \in \left] 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}, \infty \right[:$

$$x = \sqrt{1 + 16\mu} \geq \sqrt{1 + 16 \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \right)} = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Donc $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

— Pour $\mu \in \left] -\frac{1}{16}, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right[:$

$$x = \sqrt{1 + 16\mu} < \sqrt{1 + 16 \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right)} = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Donc $x < 3 - 2\sqrt{2}$.

Nous étudions $f(x)$ séparément pour $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$ et $x < 3 - 2\sqrt{2}$.

Cas 1 : $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$ Simplifions l'expression sous la racine carrée :

$$x^2 - 6x + 1 = (x - 3)^2 - 8.$$

Ainsi, la fonction devient :

$$f(x) = \frac{x - 3 - \sqrt{(x - 3)^2 - 8}}{4}.$$

Posons $y = x - 3$. Alors $y \geq 2\sqrt{2}$, et :

$$f(x) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 8}}{4}$$

Nous voulons montrer que $|f(y)| < 1$ pour $y \geq 2\sqrt{2}$.

— Pour y très grand, $\sqrt{y^2 - 8} \approx y$, donc :

$$f(y) \approx \frac{y - y}{4} = 0.$$

- Ainsi, $f(y)$ tend vers 0 lorsque $y \rightarrow +\infty$.
- Pour $y = 2\sqrt{2}$, $f(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$.
- Pour $y \geq 2\sqrt{2}$, la fonction $f(y)$ est décroissante.

Par conséquent, pour $y \geq 2\sqrt{2}$ (c'est-à-dire $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$), on a :

$$0 < f(y) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Ainsi, $|f(x)| < 1$ pour $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Cas 2 : $x < 3 - 2\sqrt{2}$ Posons $y = x - 3$. Alors $y < -2\sqrt{2}$, et

$$f(x) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 8}}{4},$$

donc

$$y - \sqrt{y^2 - 8} \leq y < y + 4$$

Comme $y < -2\sqrt{2}$, on a

$$f(x) < \frac{-2\sqrt{2} + 4}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.293 < 1$$

D'autre part

$$y - \sqrt{y^2 - 8} \geq y - |y| = 0 \quad (\text{car } y < 0)$$

Donc $f(x) \geq 0 > -1$.

Ainsi, $|f(x)| < 1$ pour $x < 3 - 2\sqrt{2}$.

Nous avons montré que $|f(x)| < 1$ pour $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$ et $x < 3 - 2\sqrt{2}$, ce qui correspond aux intervalles de μ donnés. Ainsi, l'inégalité est vérifiée.

2. Pour montrer que $\left| \frac{\sqrt{1+16\mu}-3+\sqrt{2+16\mu-6\sqrt{1+16\mu}}}{4} \right| < 1$ si $\mu \in]-\frac{1}{16}, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} [\cup]1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{35}{16} [$, on suit le même raisonnement que dans 1.

Exercice 35. Si x^* est un point fixe asymptotiquement stable, alors son bassin d'attraction $\mathcal{B}(x^*)$ est un voisinage ouvert de x^* .

Solution :

Soit $x \in \mathcal{B}(x^*)$. Par définition, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^*$. Puisque x^* est asymptotiquement stable, il existe un voisinage U de x^* tel que pour tout $y \in U$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(y) = x^*$. Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^*$, il existe un entier N tel que $f^N(x) \in U$. Par continuité de f^N , il existe un voisinage V de x tel que $f^N(V) \subseteq U$. Pour tout $y \in V$, on a $f^N(y) \in U$, et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(y) = x^*$. Ainsi, $y \in \mathcal{B}(x^*)$. Par conséquent, $V \subseteq \mathcal{B}(x^*)$. Donc, pour tout $x \in \mathcal{B}(x^*)$, il existe un voisinage V de x tel que $V \subseteq \mathcal{B}(x^*)$. Cela montre que $\mathcal{B}(x^*)$ est un ensemble ouvert.

Exercice 36. Soit la fonction de rotation dans le plan \mathbb{R}^2 , définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos \theta - y_n \sin \theta, \\ y_{n+1} = x_n \sin \theta + y_n \cos \theta. \end{cases}$$

où θ est un angle fixe de rotation. Cette transformation représente une rotation autour de l'origine de l'angle θ . Nous allons analyser les points fixes, la stabilité, et les bifurcations de ce système.

Solution :

1. Points Fixes

Un point fixe (x^*, y^*) pour ce système satisfait :

$$x^* = x^* \cos \theta - y^* \sin \theta$$

$$y^* = x^* \sin \theta + y^* \cos \theta$$

Ces équations peuvent être réécrites en termes de vecteurs :

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

Pour qu'un point (x^*, y^*) soit fixe, il doit être invariant sous la rotation. En résolvant cette équation, nous trouvons que le seul point fixe est l'origine :

$$x^* = 0, \quad y^* = 0$$

Autrement dit, pour une rotation non triviale (c'est-à-dire $\theta \neq 0$ modulo 2π), l'unique point fixe est l'origine.

2. Stabilité du Point Fixe

Pour évaluer la stabilité de l'origine, calculons la matrice jacobienne de $f(x, y)$ au point $(0, 0)$. La matrice jacobienne de f est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x \cos \theta - y \sin \theta) & \frac{\partial}{\partial y}(x \cos \theta - y \sin \theta) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x \sin \theta + y \cos \theta) & \frac{\partial}{\partial y}(x \sin \theta + y \cos \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cette matrice jacobienne J est une matrice de rotation, qui a pour valeurs propres :

$$\lambda = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \lambda = e^{-i\theta}$$

Les valeurs propres sont donc de module 1, ce qui signifie que les perturbations autour de l'origine ne croissent ni ne décroissent. En d'autres termes, le point fixe est marginalement stable : les perturbations restent de même amplitude mais tournent autour de l'origine. Cela est caractéristique d'un système conservatif sans atténuation ni amplification.

3. Bifurcations

Dans ce système de rotation, il n'y a pas de bifurcation au sens habituel, car le système ne présente ni attracteur ni comportement chaotique. Cependant, le comportement global des trajectoires dépend de la valeur de l'angle θ :

- Cas rationnel de $\theta/(2\pi)$: Si $\theta/(2\pi)$ est un nombre rationnel, les trajectoires sont périodiques, revenant à leur position initiale après un certain nombre de rotations.
 - Cas irrationnel de $\theta/(2\pi)$: Si $\theta/(2\pi)$ est irrationnel, les trajectoires ne reviennent jamais à leur position initiale et remplissent le cercle de manière dense, ce qui conduit à un comportement quasi-périodique.

Conclusion

- Point fixe : L'origine $(0, 0)$ est le seul point fixe.
- Stabilité : Le point fixe est marginalement stable, car les valeurs propres ont un module de 1, ce qui conserve les perturbations en amplitude.
- Bifurcations : Le système passe d'un comportement périodique (si $\theta/(2\pi)$ est rationnel) à un comportement quasi-périodique (si $\theta/(2\pi)$ est irrationnel), mais il n'y a pas de bifurcation en termes d'attracteurs ou de changements de stabilité.

Les exercices suivants concernent les transformations de Möbius de la forme $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Exercice 37. Prouver qu'une transformation de Möbius induit un difféomorphisme analytique de la sphère de Riemann.

Solution :

Une transformation de Möbius $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est :

Analytique : C'est une fonction rationnelle, donc holomorphe sur \mathbb{C} privé du pôle $z = -\delta/\gamma$ (si $\gamma \neq 0$).

Biholomorphe : Son inverse est aussi une transformation de Möbius (exercice 2), donc T est bijective et son inverse est analytique.

Sur la sphère de Riemann : On étend T à $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par :

$$T(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{si } \gamma = 0 \\ \alpha/\gamma & \text{si } \gamma \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad T(-\delta/\gamma) = \infty \quad (\text{si } \gamma \neq 0)$$

Cette extension est continue et T devient un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Ainsi, T est un difféomorphisme analytique de la sphère de Riemann.

Exercice 38. Montrer que l'inverse de T existe et est également une transformation de Möbius.

Solution : Soit $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ avec $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. On cherche $T^{-1}(w)$ tel que $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

En résolvant pour z :

$$\begin{aligned} w(\gamma z + \delta) &= \alpha z + \beta \Rightarrow \gamma w z + \delta w - \alpha z - \beta = 0 \\ z(\gamma w - \alpha) &= -\delta w + \beta \Rightarrow z = \frac{-\delta w + \beta}{\gamma w - \alpha} = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha} \end{aligned}$$

Ainsi, $T^{-1}(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$, qui est une transformation de Möbius de déterminant $(-\gamma)(-\beta) - (\delta)(\alpha) = \beta\gamma - \alpha\delta = -\Delta \neq 0$.

Exercice 39. Calculer $T(\infty)$ et montrer que $T(-\delta/\gamma) = \infty$.

Solution :

— Pour $T(\infty)$: Si $\gamma = 0$, alors $T(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$ et $T(\infty) = \infty$. Si $\gamma \neq 0$, alors :

$$T(z) = \frac{\alpha + \beta/z}{\gamma + \delta/z} \Rightarrow T(\infty) = \frac{\alpha + 0}{\gamma + 0} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

— Pour $T(-\delta/\gamma)$ (avec $\gamma \neq 0$) :

$$T(-\delta/\gamma) = \frac{\alpha(-\delta/\gamma) + \beta}{\gamma(-\delta/\gamma) + \delta} = \frac{-\alpha\delta/\gamma + \beta}{-\delta + \delta} = \frac{-\alpha\delta/\gamma + \beta}{0} = \infty$$

Exercice 40. Prouver que toute transformation de Möbius peut être écrite comme une composition de translations, d'inversions et de transformations homothétiques.

Solution :

On considère différents cas :

Cas 1 : $\gamma = 0$. Alors $T(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$. C'est une composition :

$$z \xrightarrow{\text{homothétie}} \frac{\alpha}{\delta}z \xrightarrow{\text{translation}} \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$$

Cas 2 : $\gamma \neq 0$. Écrivons :

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta - \alpha\delta/\gamma}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)}$$

Notons $k = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} \neq 0$. Alors :

$$T(z) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{k}{\gamma z + \delta}$$

Ce qui donne la composition :

$$z \xrightarrow{\text{translation}} z + \delta/\gamma \xrightarrow{\text{homothétie}} \gamma z + \delta \xrightarrow{\text{inversion}} \frac{1}{\gamma z + \delta} \xrightarrow{\text{homothétie}} \frac{k}{\gamma z + \delta} \xrightarrow{\text{translation}} \frac{k}{\gamma z + \delta} + \frac{\alpha}{\gamma}$$

Ainsi, T est bien une composition de translations, homothéties et inversion.

Exercice 41. Prouver qu'une transformation de Möbius envoie les cercles généralisés (cercles et droites) sur des cercles généralisés.

Solution :

D'après l'exercice précédent, toute transformation de Möbius est une composition de :

- Translations : $z \mapsto z + a \rightarrow$ préservent droites et cercles.
- Homothéties : $z \mapsto bz \rightarrow$ préservent droites et cercles (centre à l'origine).

— Inversion : $z \mapsto 1/z$.

Il suffit donc de montrer que l'inversion préserve les cercles généralisés.

L'équation générale d'un cercle généralisé est :

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{avec } A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

En termes de $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, on a :

$$Az\bar{z} + \frac{B}{2}(z + \bar{z}) + \frac{C}{2i}(z - \bar{z}) + D = 0$$

Sous l'inversion $w = 1/z$ (donc $z = 1/w$), on obtient :

$$A\frac{1}{w\bar{w}} + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) + \frac{C}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right) + D = 0$$

En multipliant par $w\bar{w}$:

$$A + \frac{B}{2}(\bar{w} + w) + \frac{C}{2i}(\bar{w} - w) + Dw\bar{w} = 0$$

Ce qui est à nouveau l'équation d'un cercle généralisé (éventuellement une droite si $D = 0$).

Ainsi, chaque transformation élémentaire préserve les cercles généralisés, donc toute transformation de Möbius aussi.

Exercice 42. Prouver que si $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$, alors T a un unique point fixe et est parabolique.

Solution :

Les points fixes de $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ vérifient :

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \Rightarrow \gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0$$

Le discriminant de cette équation quadratique est :

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$$

Si $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$, alors il y a une racine double, donc un unique point fixe :

$$z = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \quad (\text{si } \gamma \neq 0)$$

Si $\gamma = 0$, alors l'équation devient $(\delta - \alpha)z - \beta = 0$. La condition devient $(\alpha - \delta)^2 = 0$ donc $\alpha = \delta$, et alors l'équation devient $-\beta = 0$ donc $\beta = 0$, et $T(z) = z$ (transformation identité) qui a tout point fixe (cas dégénéré). On exclut ce cas en supposant une transformation non triviale. Ainsi, sous la condition donnée, T a un unique point fixe et est dite parabolique.

Exercice 43. Montrer qu'une transformation parabolique est analytiquement conjuguée à une translation.

Solution : Soit T parabolique avec unique point fixe z_0 . On considère la transformation de Möbius $S(z) = \frac{1}{z-z_0}$ qui envoie z_0 sur ∞ . Soit $U = S \circ T \circ S^{-1}$. Alors $U(\infty) = S(T(S^{-1}(\infty))) = S(T(z_0)) = S(z_0) = \infty$, donc U est une transformation affine $U(w) = aw + b$. De plus, T parabolique $\implies U$ a un unique point fixe à l'infini $\implies a = 1$ (sinon il y aurait un autre point fixe fini). Ainsi $U(w) = w + b$ est une translation. Donc T est conjuguée à une translation par S .

Exercice 44. Montrer que si T a deux points fixes, alors T est conjuguée à une application linéaire $z \mapsto \mu z$.

Solution :

Soient z_1 et z_2 les deux points fixes de T . Considérons la transformation de Möbius $S(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ qui envoie z_1 sur 0 et z_2 sur ∞ .

Soit $U = S \circ T \circ S^{-1}$. Alors

$$U(0) = S(T(S^{-1}(0))) = S(T(z_1)) = S(z_1) = 0$$

$$U(\infty) = S(T(S^{-1}(\infty))) = S(T(z_2)) = S(z_2) = \infty$$

Ainsi, U fixe 0 et ∞ , donc $U(w) = \mu w$ pour un certain $\mu \in \mathbb{C}^*$.

Donc T est conjuguée à $w \mapsto \mu w$ par S .

Exercice 45. Identifier le type des transformations suivantes :

1. $T(z) = 1/z$
2. $T(z) = 2z + 1$
3. $T(z) = \frac{z+1}{z-1}$
4. $T(z) = \frac{z}{2-z}$
5. $T(z) = iz + 1 - i$

Solution :

On considère les transformations comme des homographies $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, agissant sur $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1. $T(z) = \frac{1}{z}$

On écrit $T(z) = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}$. Les points fixes vérifient $z = \frac{1}{z} \iff z^2 = 1$, d'où $z = \pm 1$.

De plus, $T \circ T(z) = z$, donc T est d'ordre 2. Elle est conjuguée à la transformation $w \mapsto -w$, dont le multiplicateur est $\mu = -1$ et $|\mu| = 1$.

Ainsi, T est une transformation elliptique.

2. $T(z) = 2z + 1$

Transformation affine : $T(z) = \frac{2z+1}{1}$.

Les points fixes vérifient $z = 2z + 1 \iff z = -1$.

Le multiplicateur est $T'(z) = 2$.

Comme $|2| > 1$, le point fixe est répulsif et la transformation possède deux points fixes dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (-1 et ∞).

Ainsi, T est hyperbolique (et non parabolique).

3. $T(z) = \frac{z+1}{z-1}$

Les points fixes satisfont $z = \frac{z+1}{z-1}$, $z(z-1) = z+1$, $z^2 - 2z - 1 = 0$.

Il existe donc deux points fixes distincts $z = 1 \pm \sqrt{2}$.

Deux points fixes distincts réels impliquent que la transformation est hyperbolique.

4. $T(z) = \frac{z}{2-z}$

On écrit $T(z) = \frac{z}{2-z}$.

Les points fixes vérifient $z = \frac{z}{2-z}$, $z(2-z) = z$, $z(1-z) = 0$.

Ainsi, $z = 0$ et $z = 1$ sont deux points fixes distincts.

La transformation est donc hyperbolique.

5. $T(z) = iz + 1 - i$

Transformation affine.

Les points fixes vérifient $z = iz + 1 - i$, $z(1-i) = 1-i$, $z = 1$.

Le multiplicateur vaut $T'(z) = i$.

Comme $|i| = 1$ et $i \neq 1$, la transformation est conjuguée à une rotation.

Ainsi, T est elliptique (et non parabolique).

Exercice 46. Esquisser les cercles de Steiner pour :

1. $T(z) = 1/z$

2. $T(z) = 2z + 1$

3. $T(z) = z/(2-z)$

Solution :

Les cercles de Steiner sont les images des droites passant par l'origine et des cercles centrés à l'origine sous la conjugaison qui envoie T sur $z \mapsto \mu z$.

1. Pour $z = x + iy$, on a

$$T(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = u + iv.$$

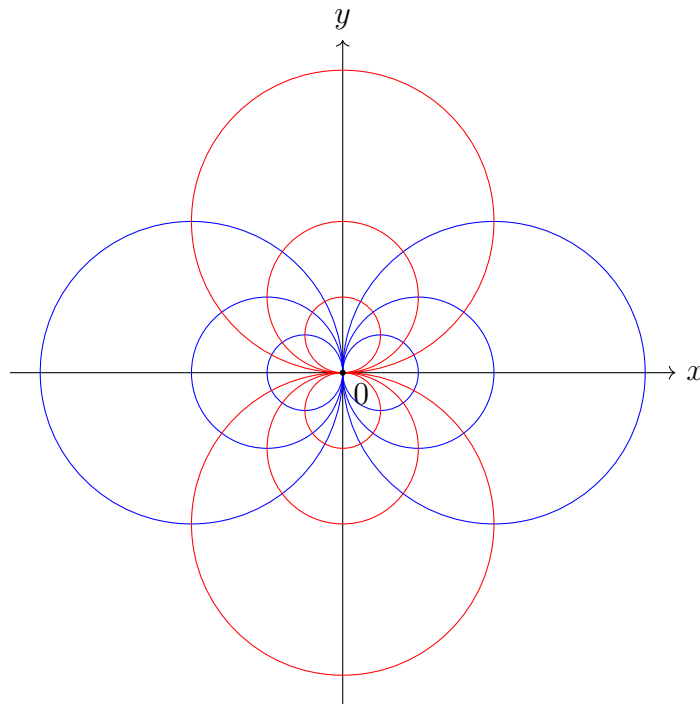


FIGURE 5.4 – $T(z) = 1/z$ (inversion, cercle unité invariant)

— Si $\operatorname{Re}(w) = u_0$, alors

$$\left(x - \frac{1}{2u_0}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(2u_0)^2},$$

c'est-à-dire une famille de cercles centrés sur l'axe des abscisses et tangents à l'origine.

— Si $\operatorname{Im}(w) = v_0$, alors

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2v_0}\right)^2 = \frac{1}{(2v_0)^2},$$

c'est-à-dire une famille de cercles centrés sur l'axe des ordonnées et tangents à l'origine.

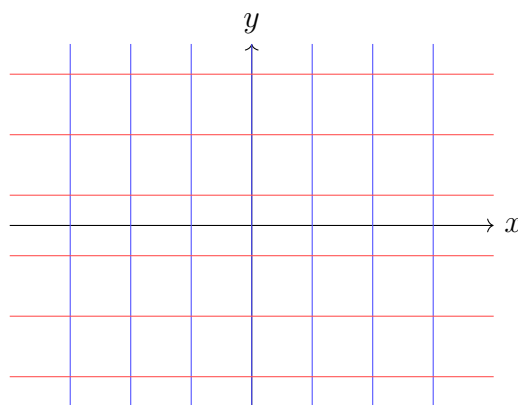
2. Il s'agit d'une transformation affine. Les droites verticales et horizontales restent des droites.

— $\operatorname{Re}(w) = u_0 \iff x = \frac{u_0 - 1}{2}$: droites verticales.

— $\operatorname{Im}(w) = v_0 \iff y = \frac{v_0}{2}$: droites horizontales.

3. Pour $z = x + iy$, on obtient

$$T(z) = \frac{x(2-x) - y^2}{(2-x)^2 + y^2} + i \frac{2y}{(2-x)^2 + y^2}.$$

FIGURE 5.5 – $T(z) = 2z + 1$ (Droites parallèles \rightarrow cercles équidistants)

— Si $\operatorname{Re}(w) = u_0 \neq -1$, alors

$$\left(x - \frac{2u_0+1}{u_0+1}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(u_0+1)^2},$$

famille de cercles centrés sur l'axe réel.

— Si $\operatorname{Im}(w) = v_0 \neq 0$, alors

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{v_0^2},$$

famille de cercles centrés en $(2, 1/v_0)$.

Exercice 47. Prouver que la dérivée schwarzienne d'une transformation de Möbius est identiquement nulle.

Solution :

La dérivée schwarzienne d'une fonction f est définie par :

$$S(f)(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

Soit $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

On calcule :

$$T'(z) = \frac{\alpha(\gamma z + \delta) - \gamma(\alpha z + \beta)}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2}$$

$$T''(z) = -2\gamma \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^3}$$

$$T'''(z) = 6\gamma^2 \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^4}$$

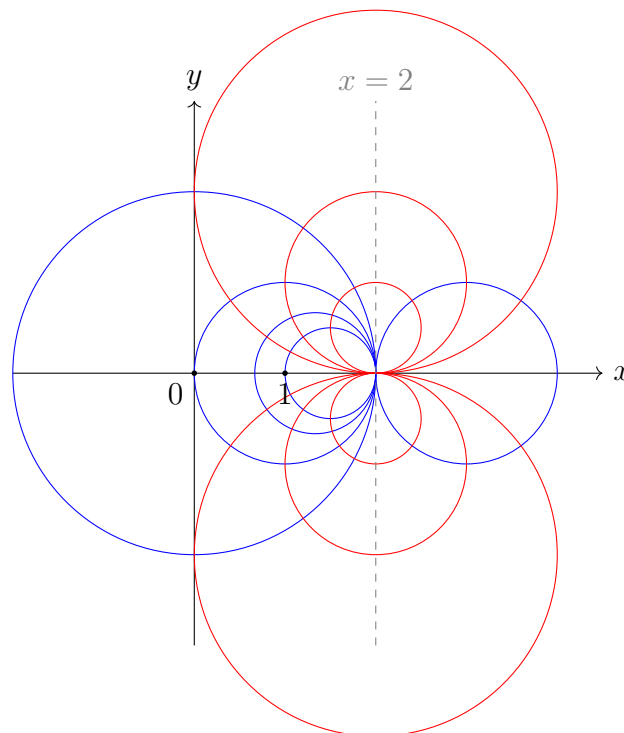


FIGURE 5.6 – $T(z) = \frac{z}{2-z}$ (conjugaison, fixes 0 et 1).

Ainsi

$$\frac{T'''(z)}{T'(z)} = \frac{6\gamma^2}{(\gamma z + \delta)^2}, \quad \frac{T''(z)}{T'(z)} = \frac{-2\gamma}{\gamma z + \delta}$$

$$S(T)(z) = \frac{6\gamma^2}{(\gamma z + \delta)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4\gamma^2}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{6\gamma^2 - 6\gamma^2}{(\gamma z + \delta)^2} = 0$$

Ainsi, la dérivée schwarzienne d'une transformation de Möbius est bien identiquement nulle.

Exercice 48. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{C}$, l'ensemble rempli de Julia K_c est compact.

Solution :

Soit $f_c(z) = z^2 + c$. On cherche l'ensemble des points dont l'orbite reste bornée.

- On définit $K_c = \{z \in \mathbb{C} : \forall n \in \mathbb{N}, |f_c^n(z)| \leq M\}$ pour une certaine constante $M > 0$.
- On peut montrer que pour $|z| > 2$, on a $|f_c(z)| > |z|$ si $|c|$ est borné, donc les orbites s'échappent à l'infini.
- On définit alors un disque $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ contenant tous les points à orbite bornée.
- L'ensemble K_c est fermé (intersection d'ensembles fermés) et contenu dans un disque fermé, donc compact (fermé et borné).

Exercice 49. Tracer l'ensemble de Julia pour $c = -0.123 + 0.745i$. Que constate-t-on ?

Solution :

- Le script Python (https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/julia_0.py) fourni permet de tracer cet ensemble Figure 5.7.
- Le résultat montre une structure fractale très riche et complexe, non connexe : typique d'un comportement chaotique.
- Les points intérieurs de l'ensemble ont des orbites bornées, les extérieurs divergent.

Exercice 50. Comparer les ensembles de Julia pour $c = 0.2$, $c = -1$, et $c = -2$.

Solution :

- Pour $c = 0.2$: ensemble connexe, symétrique, orbites stables, Julia connexe.
- Pour $c = -1$: bord de la connexité, comportement plus complexe, fractal.
- Pour $c = -2$: orbites divergent rapidement, Julia totalement déconnecté (ensemble poussière de points).

Exercice 51. Montrer que si $|z_n| > 2$ pour un n , alors l'orbite diverge.

Solution :

- On suppose $|z_n| > 2$. Alors $|z_{n+1}| = |f_c(z_n)| = |z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c|$.
- Si $|z_n| > 2$, alors $|z_n|^2 > 4$, donc $|z_{n+1}| > 4 - |c|$.
- Par récurrence, $|z_{n+k}| \rightarrow \infty$, donc l'orbite diverge.

Exercice 52. Étudier la dynamique locale autour du point fixe $z = 0$ pour $f_c(z) = z^2 + c$.

Solution :

- On cherche les points fixes : $z = f_c(z) \Rightarrow z = z^2 + c \Rightarrow z^2 - z + c = 0$.
- Solutions : $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$.
- Le point fixe est $z^* = 0$ ssi $c = 0$. On regarde alors $|f'_c(0)| = |0| = 0$ donc super-attractif.

Exercice 53. Soit L_A un automorphisme hyperbolique du tore. Démontrer que :

1. Les points homoclines transverses sont denses dans T
2. Tous les points de T sont non-errants
3. Les points homoclines ne sont pas récurrents

Exercice 54. 1. On peut définir un tore n -dimensionnel T^n par analogie avec la construction en deux dimensions. Démontrer que :

2. L'automorphisme induit a des points périodiques denses

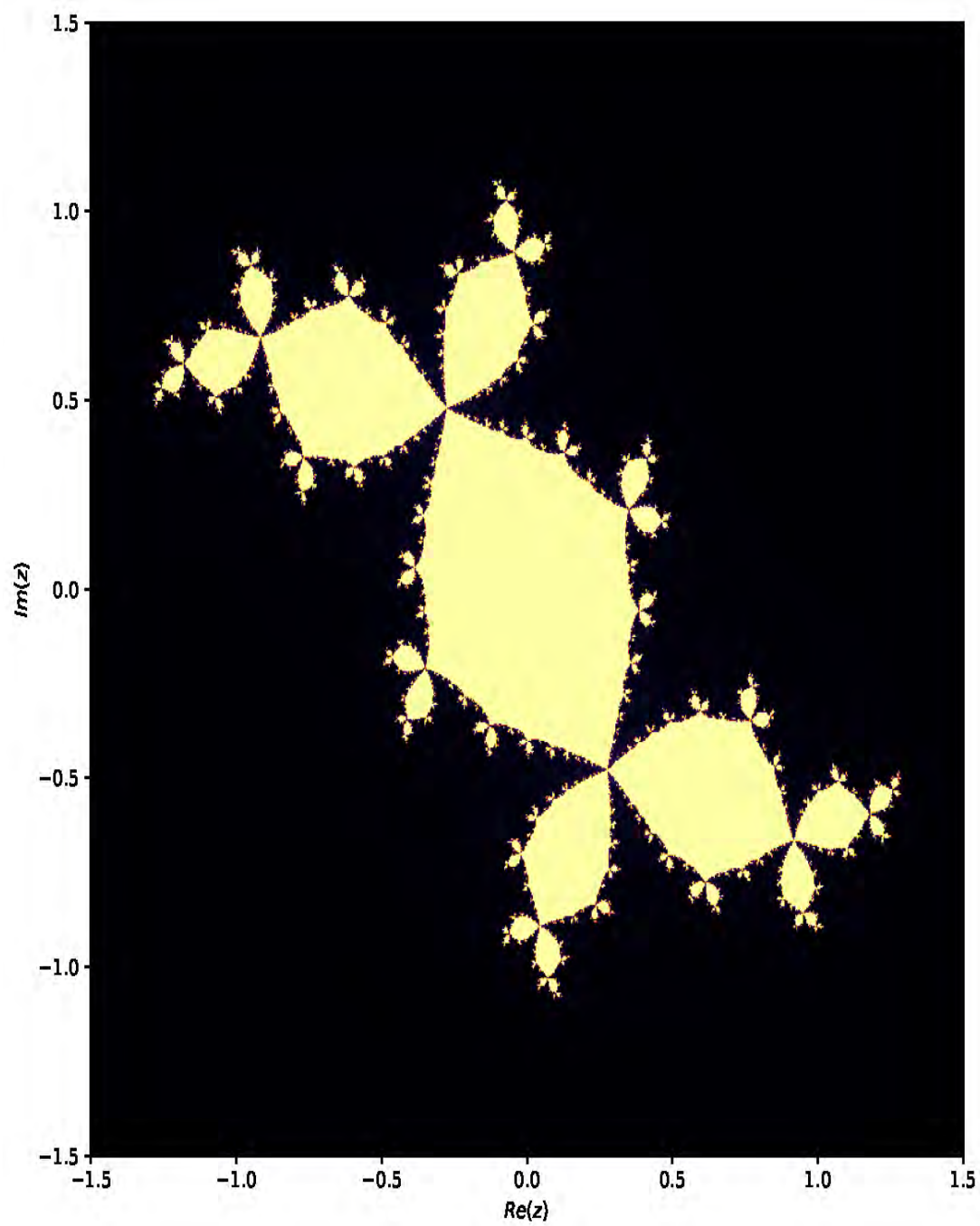


FIGURE 5.7 - $R(z) = z^2 - 0.123 + 0.745i$.

3. Pour tout $[p] \in T^n$, $W^s[p]$ et $W^u[p]$ sont denses dans T^n
4. Un automorphisme hyperbolique du tore est chaotique sur T^n

Exercice 55. 1. Démontrer que T^n est homéomorphe au produit cartésien de n cercles $S^1 \times \dots \times S^1$

Exercice 56. Considérons l'application $A(x) = 2x$ sur \mathbb{R}^n . Démontrer que :

1. Les points périodiques sont denses
2. Les points éventuellement fixes sont denses
3. Cette application est chaotique sur T^n

Exercice 57. 1. Construire une partition de Markov pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 58. Soit $[p] \in W^s[0] \cap W^u[0]$ un point homocline. Construire un rectangle R contenant le segment stable entre $[0]$ et $[p]$.

1. Montrer qu'il existe n tel que $L_A^n(R) \supset \ell_u$
2. Montrer que $L_A^n : R \rightarrow L_A^n(R)$ est topologiquement conjuguée au fer à cheval

Exercice 59. Lister tous les cycles de période première 4 pour l'application shift.

Solution :

Une suite est de *période première* 4 si elle est périodique de période 4 et n'est pas de période 1 ni 2. Parmi les $2^4 = 16$ blocs binaires de longueur 4, on exclut 0000, 1111 (période 1) et 0101, 1010 (période 2). Il reste donc $16 - 4 = 12$ points périodiques d'ordre premier 4, répartis en $12/4 = 3$ cycles (orbits) de longueur 4 sous σ .

Ces trois cycles sont :

$$\text{Cycle A : } (0001) \xrightarrow{\sigma} (0010) \xrightarrow{\sigma} (0100) \xrightarrow{\sigma} (1000) \xrightarrow{\sigma} (0001).$$

$$\text{Cycle B : } (0011) \xrightarrow{\sigma} (0110) \xrightarrow{\sigma} (1100) \xrightarrow{\sigma} (1001) \xrightarrow{\sigma} (0011).$$

$$\text{Cycle C : } (0111) \xrightarrow{\sigma} (1110) \xrightarrow{\sigma} (1101) \xrightarrow{\sigma} (1011) \xrightarrow{\sigma} (0111).$$

Remarque. Toute orbite fixe (période 1) et tout 2-cycle sont trivialement des 4-cycles pour l'itérée σ^2 , mais pas d'ordre premier 4.

Exercice 60. Calculer $d[s, t]$ où :

$$s = (100), \quad t = (001).$$

Solution :

Ici $s = 100\ 100\ 100\dots$ et $t = 001\ 001\ 001\dots$. Sur un bloc de longueur 3, les différences (pondérées) valent

$$1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

et ce motif se répète avec un facteur de $2^{-3} = \frac{1}{8}$. Ainsi

$$d[(100), (001)] = \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{256}\right) + \dots = \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{10}{7}.$$

Exercice 61. Calculer $d[s, t]$ où :

$$s = (100), \quad t = (010).$$

Solution :

Même idée : sur un bloc de longueur 3,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} = \frac{3}{2},$$

puis répétition avec facteur $1/8$. Donc

$$d[(100), (010)] = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{128}\right) + \dots = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{12}{7}.$$

Comparaison (001) vs (010). Les deux séquences diffèrent d'abord en position 1 et 2 : sur un bloc de longueur 3,

$$\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

d'où

$$d[(001), (010)] = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{7}.$$

Ainsi, (001) et (010) sont plus proches l'une de l'autre ($6/7$) que chacune ne l'est de (100) ($10/7$ et $12/7$), car elles coïncident déjà en première position.

Exercice 62. Calculer $d[s, t]$ où :

$$s = (1011), \quad t = (0101).$$

Solution :

Ici les blocs sont de longueur 4 : $s = 1011\ 1011\dots$, $t = 0101\ 0101\dots$. Sur un bloc,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} = \frac{7}{4},$$

et la répétition se fait avec facteur $2^{-4} = \frac{1}{16}$. Ainsi

$$d[(1011), (0101)] = \frac{7}{4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \dots\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{28}{15}.$$

Rappels et compléments

Cette annexe regroupe des rappels et notions fondamentales utiles à la lecture de l'ouvrage. On y trouve des éléments de fonctions, d'algèbre linéaire, de topologie, ainsi que quelques théorèmes de base. Des compléments numériques sont également proposés avec les codes sources utilisés dans chaque chapitre.

5.1

Fonctions

Définition 5.1. Une fonction est une loi qui associe à chaque élément d'un ensemble un seul élément au plus d'un autre ensemble. Le premier ensemble est appelé le domaine de définition de la fonction et le second est appelé le co-domaine. L'ensemble des éléments du co-domaine à qui sont associés à un élément du domaine de définition est appelé le rang de la fonction. Nous utilisons les notations suivantes

$$f : D \rightarrow C$$

pour indiquer la fonction f de domaine D et de co-domaine C .

Si $f : D \rightarrow C$ et $A \in D$, alors $f(A)$ est défini

$$f(A) = \{c \in C \mid \text{il existe } a \text{ dans } A \text{ satisfaisant } f(a) = c\}$$

Cet ensemble est aussi appelé l'image par f de A . Notons que si $f : D \rightarrow C$ alors $f(D)$ est le rang de f . Si $B \in C$, alors $f^{-1}(B)$ est appelé l'image inverse de B par f , i.e.

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}$$

Exemple 5.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors

$$f([-1, 2]) = [0, 4] \text{ et } f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

Notons que

$$f(f^{-1}([1, 4])) = [1, 4], \text{ mais } f^{-1}(f([1, 2])) = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

(L'utilisation du signe f^{-1} n'implique pas l'inversibilité de la fonction f).

Définition 5.2. Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et a un point de I . La fonction f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Dans ce cas, on dit que f est dérivable en a et $f'(a)$ est appelée la dérivée de f en a . Une fonction est différentiable si elle est dérivable à chaque point de son domaine.

Théorème 5.2 (Théorème de la moyenne, [2]). . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $[a, b]$. Alors il existe c dans $[a, b]$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Théorème 5.3. Soit I un intervalle fermé et $f : I \rightarrow I$ une fonction différentiable qui satisfait $|f'(x)| < 1$ pour tout x dans I . Alors f possède un unique point fixe dans I . Par ailleurs, si x et y sont deux points dans I tels que $x \neq y$, alors $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Démonstration. $f : I \rightarrow I$ est différentiable sur I donc continue sur I , par conséquent il existe au moins un point fixe sur I (Théorème 1.1). Maintenant, supposons que x et y sont deux points fixes dans I tels que $x \neq y$. Le théorème de la valeur moyenne implique l'existence d'un $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1$$

ce qui contredit le fait que $|f'(c)| < 1$, donc le point fixe est unique. Pour établir la seconde assertion de la proposition, nous allons de nouveau utiliser le Théorème de la valeur moyenne pour tout $x, y \in \overset{\circ}{I}$, $x \neq y$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| < |x - y|.$$

□

Remarque 5.1. Nous disons que f est de classe C^r sur I si $f^{(r)}(x)$ existe et est continue en tout $x \in I$. Une fonction est dite lisse si elle est de classe C^∞ . La fonction f est C^∞ si toutes ses dérivées existent et sont continues.

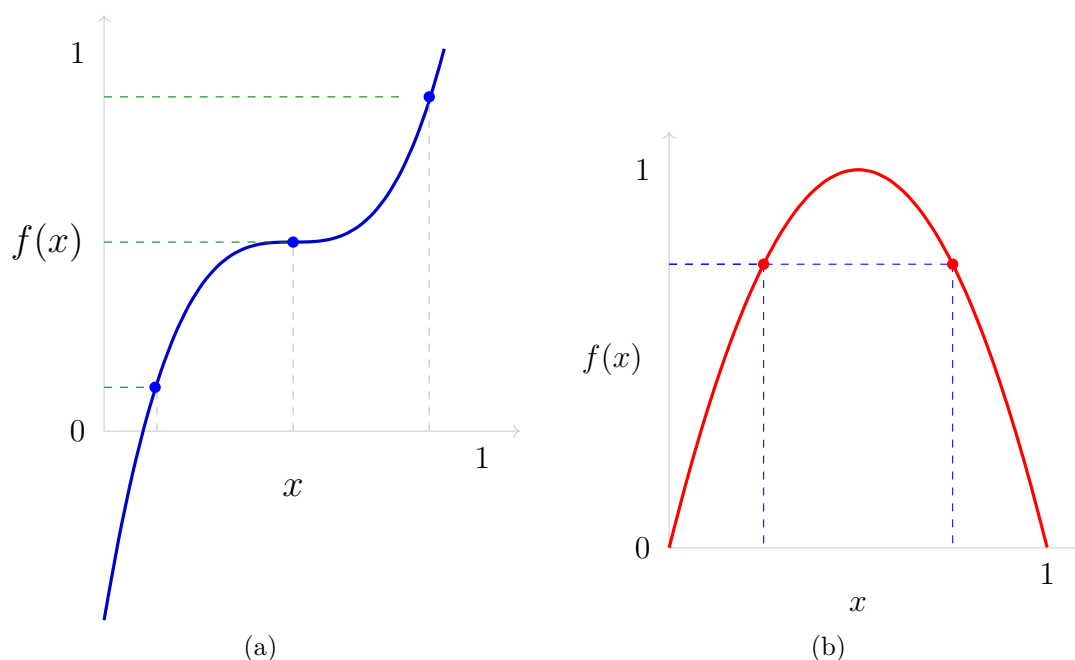


FIGURE 5.8 – En (a), $f(x)$ est injective sur $[0, 1]$; en (b), $f(x)$ est surjective sur $[0, 1]$.

Il existe des classes spéciales de fonctions qui apparaissent souvent. La fonction $f(x)$ est linéaire si $f(x) = ax$ pour une certaine constante a ; $f(x)$ est affine si $f(x) = ax + b$; $f(x)$ est linéaire par morceaux si $f(x)$ est affine sur une collection d'intervalles. Par exemple, $f(x) = |x|$ est linéaire par morceaux, les "morceaux" étant les réels positifs et négatifs sur chacun desquels $f(x)$ est linéaire.

Définition 5.3. $f(x)$ est injective si $f(x) \neq f(y)$ dès que $x \neq y$. Voir la Figure 5.8a

Clairement, les fonctions croissantes ou décroissantes sont les seuls types de fonctions continues injectives d'une variable réelle. Si $f : I \rightarrow J$ est injective, alors nous pouvons définir l'inverse de f , notée $f^{-1}(x)$, par la règle $f^{-1}(x) = y$ si et seulement si $f(y) = x$. Par exemple, si $f(x) = x^3$, alors $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, et si $g(x) = \tan x$, alors $g^{-1}(x) = \arctan x$. Ici, $g : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, donc $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$.

Définition 5.4. Soient I et J des intervalles et $f : I \rightarrow J$. La fonction f est surjective si pour tout y dans J , il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Voir la Figure 5.8b.

Définition 5.5. Soit $f : I \rightarrow J$. La fonction f est un homéomorphisme si f est bijective, continue, et f^{-1} est également continue.

Par exemple, $\tan x$ est un homéomorphisme entre $] -\pi/2, \pi/2[$ et \mathbb{R} . Ainsi, nous disons que l'intervalle ouvert $] -\pi/2, \pi/2[$ est homéomorphe à \mathbb{R} .

Définition 5.6. Soit $f : I \rightarrow J$. La fonction f est un C^r -difféomorphisme si f est bijective, de classe C^r et f^{-1} est également de classe C^r .

Par exemple, il est facile de voir que $\tan x$ est un C^∞ -difféomorphisme de $] -\pi/2, \pi/2[$ vers \mathbb{R} , tandis que $f(x) = x^3$ est un homéomorphisme qui n'est pas un difféomorphisme car $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ et $(f^{-1})'(0)$ n'existe pas.

Nous notons la composition de deux fonctions par $f \circ g(x) = f(g(x))$. La composition n fois de f avec elle-même est noté par $f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$.

Nous passons maintenant en revue certains théorèmes fondamentaux du calcul qui apparaîtront à plusieurs reprises dans l'étude des systèmes dynamiques. Le théorème le plus important du calcul élémentaire que nous utiliserons est le suivant.

Règle de la chaîne : Si f et g sont des fonctions, alors

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

En particulier, si $h(x) = f^n(x)$, alors

$$h'(x) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot f'(f^{n-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(x).$$

Une autre notion importante du calcul élémentaire qui revient souvent est le résultat suivant :

Théorème 5.4. [Théorème des accroissements finis] Supposons $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 . Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

La Figure 5.9 illustre le contenu du théorème de la valeur moyenne. Un troisième résultat important du calcul est le suivant :

Théorème 5.5 (Théorème des valeurs intermédiaires). Supposons $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons que $f(a) = u$ et $f(b) = v$. Alors pour tout z entre u et v , il existe c , $a \leq c \leq b$, tel que $f(c) = z$.

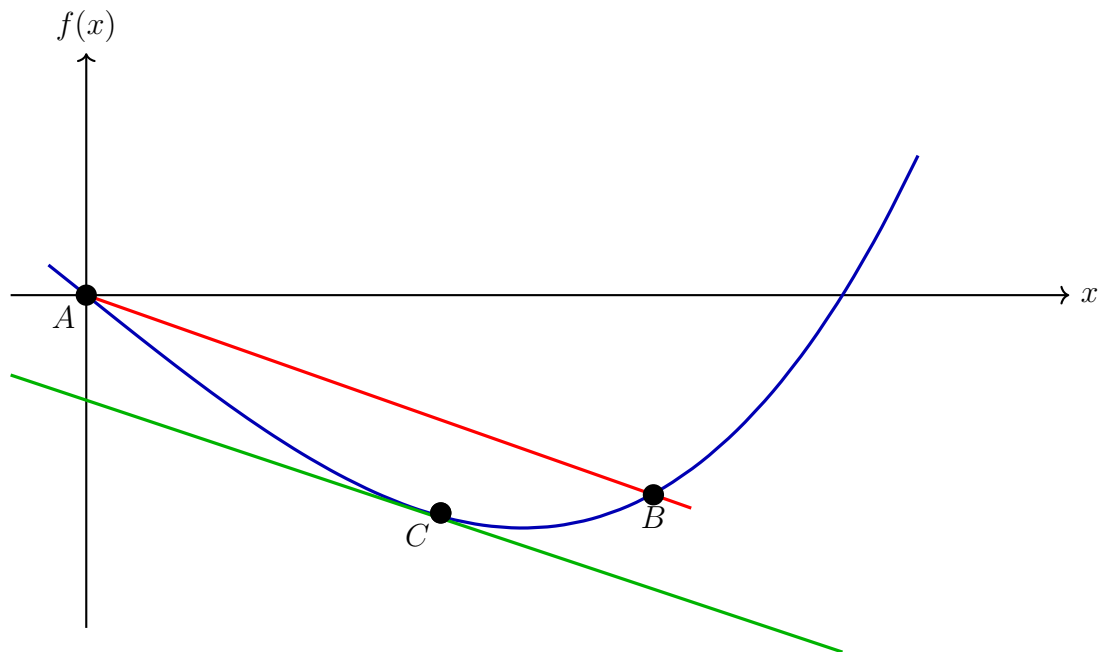


FIGURE 5.9 – Illustration du théorème des accroissements finis.

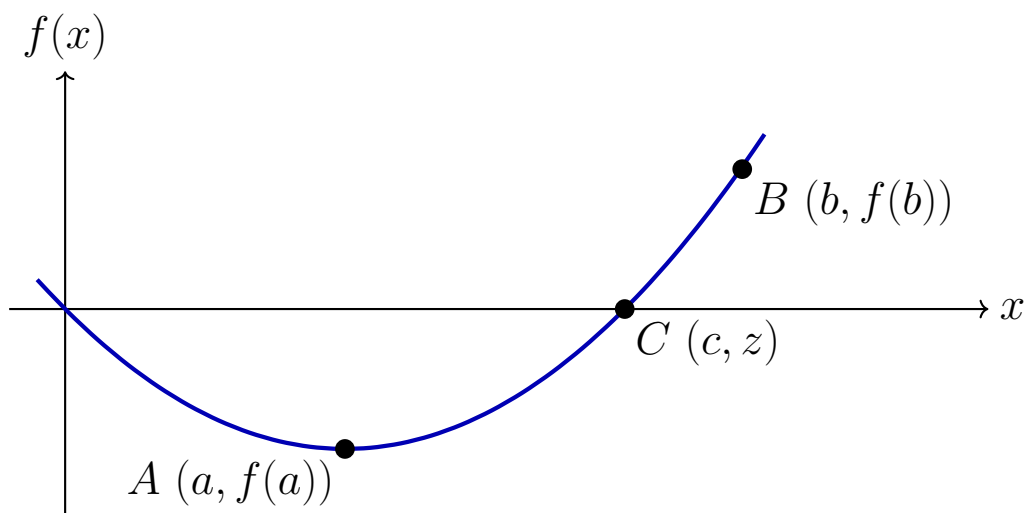


FIGURE 5.10 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

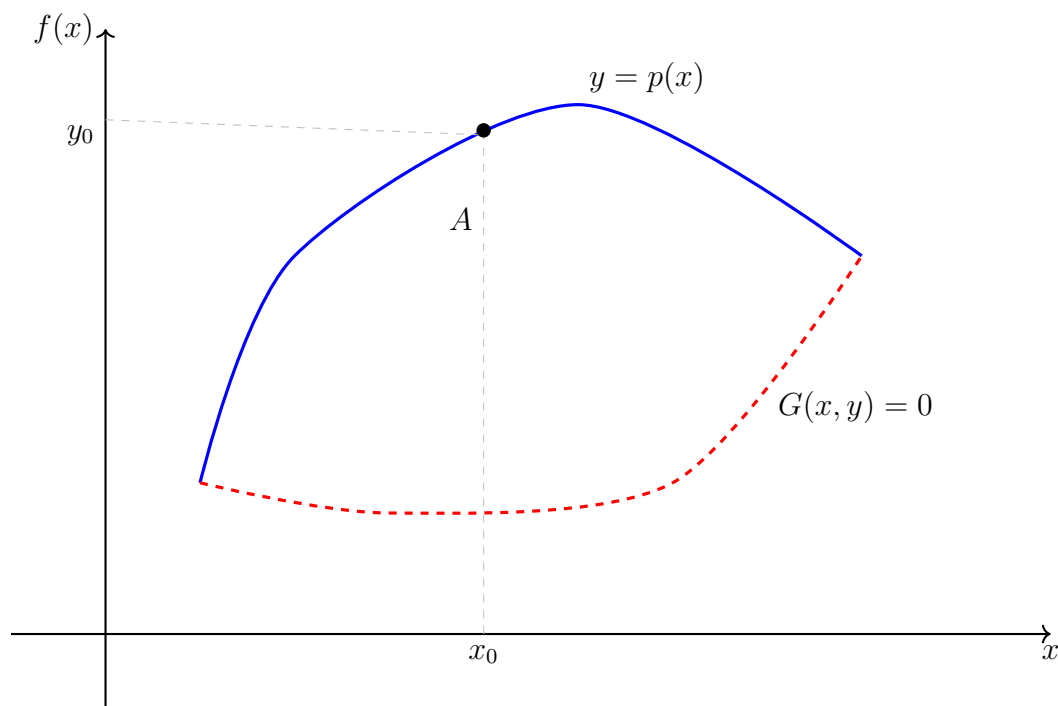


FIGURE 5.11 – Illustration du théorème des fonctions implicites.

Enfin, l'un des théorèmes les plus abstraits et apparemment inutiles du calcul à plusieurs variables est le théorème des fonctions implicites. La plupart des étudiants débutants n'apprécient pas la puissance de ce théorème lorsqu'ils le rencontrent dans leur premier cours d'analyse. Nous espérons que les résultats géométriques en théorie des bifurcations que nous rencontrerons tout au long de ce livre aideront à dissiper toute idée fautive sur l'utilité de ce théorème.

Théorème 5.6 (Théorème des fonctions implicites). *Supposons $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ est une fonction C^1 (c'est-à-dire que les deux dérivées partielles de G existent et sont continues). Supposons en outre que*

$$G(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe des intervalles ouverts I autour de x_0 et J autour de y_0 et une fonction C^1 $p : I \rightarrow J$ satisfaisant

1. $p(x_0) = y_0$,
2. $G(x, p(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Plutôt que de prouver le théorème des fonctions implicites, nous donnons plusieurs exemples de son application. Bien que ces exemples soient évidemment fabriqués, ils sont néanmoins typiques, comme nous le verrons plus tard.

Exemple 5.2. Soit $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Les ensembles de niveau de G sont clairement des cercles, et $G = 0$ définit le cercle unité dans le plan. Supposons $G(x_0, y_0) = 0$ et $y_0 > 0$, c'est-à-dire que (x_0, y_0) est un point sur le demi-cercle supérieur. Clairement,

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$$

donc le théorème des fonctions implicites s'applique. Le résultat est une fonction $p(x)$ qui satisfait $G(x, p(x)) = 0$ pour tout x suffisamment proche de x_0 . Qu'est-ce que $p(x)$? Dans ce cas, nous pouvons construire $p(x)$ explicitement. Clairement, $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$, qui est C^∞ tant que $x \neq \pm 1$ (lorsque $y = 0$). Nous avons $G(x, \sqrt{1 - x^2}) = 0$ pour $|x| < 1$, comme le garantit le théorème des fonctions implicites. Si $y_0 < 0$, alors nous devons choisir $p(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Il est important de réaliser qu'en pratique, on ne peut pas souvent résoudre pour la fonction $p(x)$ comme nous l'avons fait ici. Néanmoins, le théorème des fonctions implicites garantit son existence (que nous puissions ou non l'écrire explicitement), et c'est souvent exactement ce dont nous avons besoin.

Exemple 5.3. $G(x, y) = x^5 y^4 - x y^5 - y x^2 + 1$ satisfait $G(1, 1) = 0$ et

$$\frac{\partial G}{\partial y}(1, 1) = -2.$$

Par conséquent, il existe une fonction $p(x)$ définie dans un certain intervalle autour de $x = 1$ et qui satisfait $G(x, p(x)) = 0$. Cependant, résoudre $G(x, y) = 0$ pour $y = p(x)$ est impossible.

Les points fixes d'une fonction sont les points x qui satisfont $f(x) = x$. Ces points jouent un rôle central dans la théorie des systèmes dynamiques. Voir la Figure 5.10.

Proposition 5.1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow I$ continue. Alors f a au moins un point fixe dans I .

Démonstration. Soit $g(x) = f(x) - x$. Clairement, $g(x)$ est continue sur I . Supposons $f(a) > a$ et $f(b) < b$ (sinon, l'un des points a ou b est fixe). Nous avons ainsi $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de c entre a et b pour lequel $g(c) = 0$. Par conséquent, $f(c) = c$ et nous avons terminé. \square

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général appelé théorème du point fixe de Brouwer, qui donne une condition suffisante similaire pour l'existence de points fixes en dimensions supérieures. On peut faire mieux avec un peu de différentiabilité. Le résultat suivant est un cas particulier du théorème de l'application contractante.

Proposition 5.2. *Soit $f : I \rightarrow I$ et supposons que $|f'(x)| < 1$ pour tout x dans I . Alors il existe un unique point fixe pour f dans I . De plus,*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

pour tout $x, y \in I, x \neq y$.

Démonstration. La proposition précédente garantit au moins un point fixe pour f , donc nous supposons que x et y sont tous deux des points fixes, $x \neq y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe c entre x et y tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1.$$

Mais cela contredit notre hypothèse que $|f'(c)| < 1$ pour tout c dans I . D'où $x = y$.

Pour établir la seconde assertion de la proposition, nous utilisons à nouveau le théorème des accroissements finis pour affirmer que pour tout $x, y \in I, x \neq y$,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| < |y - x|$$

comme requis. Ceci achève la preuve. □

5.1.1 Préliminaires de géométrie et topologie

Nous passons maintenant à quelques notions de topologie générale. En général, ces notions dépassent le cadre des cours élémentaires de calcul. Cependant, beaucoup d'entre elles se présentent dans le cadre le plus simple possible sur la droite réelle, et c'est précisément le cadre dans lequel nous travaillerons ici.

Définition 5.7. Soit $S \subset \mathbb{R}$. Un point $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de S s'il existe une suite de points distincts $x_n \in S$ convergeant vers x . S est un ensemble fermé s'il contient tous ses points d'accumulation.

Clairement, les intervalles fermés de la forme $a \leq x \leq b$ sont des ensembles fermés. Toute union finie d'ensembles fermés est également fermée. Cependant, les unions infinies d'ensembles fermés ne sont pas nécessairement fermées, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.4. Soit $I_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Alors

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n =]0, 1]$$

qui n'est pas fermé, puisque 0 est un point d'accumulation de S qui n'est pas dans S .

Les intersections d'ensembles fermés donnent des ensembles fermés (l'ensemble vide est, par définition, un ensemble fermé). De plus, si I_n est un intervalle fermé, non vide et borné pour chaque n et $I_{n+1} \subset I_n$, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ est un ensemble fermé non vide. Le mot crucial ici est, bien sûr, non vide.

Définition 5.8. Soit $S \subset \mathbb{R}$. S est un ensemble ouvert si, pour tout $x \in S$, il existe $\epsilon > 0$ tel que tous les points t dans l'intervalle ouvert $x - \epsilon < t < x + \epsilon$ sont contenus dans S .

Il est clair que le complémentaire d'un ensemble fermé est ouvert et vice versa. Contrairement aux ensembles fermés, les unions infinies d'intervalles ouverts sont des ensembles ouverts dans \mathbb{R} . Cependant, les intersections infinies d'intervalles ouverts ne sont pas des ensembles ouverts. Par exemple, si $J_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{0\}$ qui est fermé.

Pour tout ensemble S , nous notons l'adhérence de S par \bar{S} . \bar{S} consiste en tous les points de S ainsi que tous les points d'accumulation de S . Par exemple, si S est l'intervalle ouvert $(0,1)$, alors \bar{S} est l'intervalle fermé $[0,1]$. Clairement, si S est fermé, alors $\bar{S} = S$.

Définition 5.9. Un sous-ensemble U de S est dense dans S si $\bar{U} = S$.

Par exemple, tout ensemble ouvert S est dense dans son adhérence \bar{S} . Un exemple plus intéressant est l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} , qui est dense dans \mathbb{R} . De même, les irrationnels sont denses dans \mathbb{R} . Nous mettons en garde le lecteur contre l'idée que les sous-ensembles denses sont nécessairement « grands ». Même des ensembles ouverts et denses peuvent avoir une mesure totale arbitrairement petite. Voici un exemple dans l'intervalle unitaire I donné par $0 \leq x \leq 1$. Comme les rationnels forment un ensemble dénombrable dans I , nous pouvons les lister dans un certain ordre. Un tel ordre est

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

Soit $\epsilon > 0$ petit. Considérons l'intervalle ouvert de longueur ϵ^n autour du $n^{\text{ème}}$ rationnel dans cette liste. L'union de tous ces intervalles est un ensemble ouvert dans I qui est clairement dense car il contient tous les rationnels dans I . Cependant, la longueur totale de cet ensemble est assez petite. En effet, la longueur est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}.$$

Cet exemple montre clairement la différence entre l'approche topologique de la dynamique que nous adopterons dans ce livre et l'approche mesure-théorique. Au sens topologique, un sous-ensemble ouvert et dense est considéré comme "grand". Ces ensembles peuvent ou non être grands au sens mesure-théorique, c'est-à-dire au sens de la longueur totale.

Un sujet qui se posera lorsque nous discuterons des systèmes dynamiques complexes est celui des ensembles connexes et localement connexes.

Définition 5.10. Un ensemble est connexe s'il ne peut pas être écrit comme l'union de deux ouverts disjoints non vides. Un ensemble est localement connexe si pour tout point x et tout voisinage V de x , il existe un ouvert connexe $U \subset V$ contenant x .

Fondamentalement, un ensemble connexe consiste en "juste une pièce", bien que ce concept puisse être un peu trompeur. De plus, les ensembles qui ne sont pas localement connexes peuvent être très compliqués. Un exemple simple qui illustre ces faits est le suivant. Commencez par le graphe de $y = \sin(1/x)$ dans le plan x, y (où $x \neq 0$). Ajoutez ensuite la portion de l'axe des y avec $-1 \leq y \leq 1$. L'ensemble résultant est connexe car le graphe de $\sin(1/x)$ s'accumule partout sur l'intervalle de l'axe des y , et ne peut donc pas être divisé en une collection d'ensembles ouverts disjoints. Mais l'ensemble n'est pas localement connexe car tout point sur l'intervalle de l'axe des y a des voisinages arbitrairement petits qui intersectent l'ensemble en une infinité de morceaux disjoints.

Un autre objet qui joue un rôle central en dynamique est le concept d'espace métrique "abstrait". La plupart des étudiants qui n'ont suivi que des cours de calcul sont principalement familiers avec des espaces comme la droite réelle \mathbb{R} ou l'espace n -dimensionnel \mathbb{R}^n .

Nous commençons par le concept de métrique (ou fonction de distance) sur un espace X .

Définition 5.11. Une métrique sur un espace X est une fonction d définie sur le produit croisé $X \times X$ qui satisfait, pour tous les points $x, y, z \in X$,

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$
- d satisfait l'inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Notez que ce sont précisément les exigences pour une fonction de distance dans \mathbb{R}^n .

Ensuite, nous pouvons utiliser la définition habituelle ε, δ de la continuité pour définir une fonction continue sur un espace métrique.

Définition 5.12 (Ensemble ω -limite). Soit (X, d) un espace métrique et $F : X \rightarrow X$ une application continue. Pour tout point initial $x_0 \in X$, on appelle ensemble ω -limite de x_0 , noté $\omega(x_0)$, l'ensemble des points $y \in X$ tels qu'il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k \geq 1}$ vérifiant

$$n_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad F^{n_k}(x_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y.$$

Autrement dit,

$$\omega(x_0) = \left\{ y \in X \mid y \text{ est une valeur d'adhérence de la suite } (F^n(x_0))_{n \geq 0} \right\}.$$

Proposition 5.3. *Si l'orbite positive de x_0 est relativement compacte, alors l'ensemble $\omega(x_0)$ est non vide, fermé, compact et positivement invariant, c'est-à-dire*

$$F(\omega(x_0)) \subset \omega(x_0).$$

Si, de plus, F est un homéomorphisme, alors $\omega(x_0)$ est invariant

$$F(\omega(x_0)) = \omega(x_0).$$

5.1.2 Préliminaires d'analyse complexe

Bien que nous nous concentrons principalement sur la dynamique des applications polynomiales dans le chapitre sur la dynamique complexe, plusieurs des techniques les plus importantes que nous utiliserons s'appliquent à des fonctions analytiques complexes plus générales. Nous résumerons certains des résultats les plus importants dans cette section. Pour les preuves et plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'une des excellentes introductions au sujet de l'analyse complexe telles que les livres de Conway [9] ou Ahlfors [1].

Nous notons le plan complexe par \mathbb{C} . Un nombre complexe s'écrit sous la forme $z = x + iy$, où $i = \sqrt{-1}$. La partie réelle de z , notée $\operatorname{Re}(z)$, est x , tandis que la partie imaginaire, $\operatorname{Im}(z)$, est y . Nous notons le module de z par $|z|$, c'est-à-dire

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Définition 5.13. $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est (complexe) analytique en z_0 si

$$F'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

existe.

Définition 5.14. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert connexe. $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ est (complexe) analytique dans U si elle est (complexe) analytique en chaque $z_0 \in U$.

Proposition 5.4. Soit F analytique dans un voisinage de z_0 . Alors il existe $r > 0$ tel que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour $|z - z_0| < r$.

C'est-à-dire que toute fonction analytique peut être représentée, au moins localement, par une série entière. Bien sûr, les polynômes sont un cas très particulier, car la somme ci-dessus est finie et la question de la convergence ne se pose pas.

Beaucoup de fonctions rencontrées en mathématiques élémentaires sont analytiques. Outre les polynômes, toutes les fonctions rationnelles de la forme $P(z)/Q(z)$ où P et Q sont des polynômes sont analytiques sur leurs domaines de définition. Dans ce qui suit, nous montrerons comment étendre la définition d'une telle fonction aux points où $Q(z) = 0$. Une autre classe d'applications analytiques est la classe des fonctions transcendentes entières, c'est-à-dire celles des séries entières non polynomiales qui convergent dans tout le plan complexe. Des exemples de fonctions entières incluent l'exponentielle complexe, le sinus et le cosinus. Pour une utilisation ultérieure, nous rappelons ici les définitions de ces applications complexes.

Définition 5.15. Soit $z = x + iy$

$$\exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Nous aurons l'occasion d'utiliser des ensembles ouverts qui sont connexes et n'ont pas de "trous". De telles régions sont appelées simplement connexes. Plutôt que de donner une description technique des ensembles simplement connexes, nous adopterons la définition spéciale suivante de la simple connexité. En vérité, via le très important théorème de représentation conforme de Riemann, notre définition est complètement générale (au moins pour les régions du plan). Nous soulignons que ce n'est pas la définition standard de la simple connexité, mais elle est suffisante pour nos besoins.

Définition 5.16. Un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{C} est simplement connexe si soit $U = \mathbb{C}$, soit il existe une application bijective et analytique $F : D \rightarrow U$ où D est le disque unité ouvert donné par $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Exemple 5.5. Tout demi-plan de la forme $\operatorname{Re}(z) > a$ ou $\operatorname{Im}(z) > a$ est simplement connexe. En effet, l'application

$$F(z) = \frac{z+1}{1-z}$$

envoie D sur le demi-plan droit $\operatorname{Re}(z) > 0$.

La proposition suivante résume certaines des propriétés uniques des applications analytiques.

Proposition 5.5. Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et supposons $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Alors

- $F^{(n)} : U \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique, où $F^{(n)}$ est la $n^{\text{ème}}$ dérivée de F .
- $F(U)$ est ouvert dans \mathbb{C} , à condition que F soit non constante.
- (Principe du maximum) Si \bar{U} est borné, alors $|F(z)|$ atteint sa valeur maximale sur la frontière de \bar{U} .

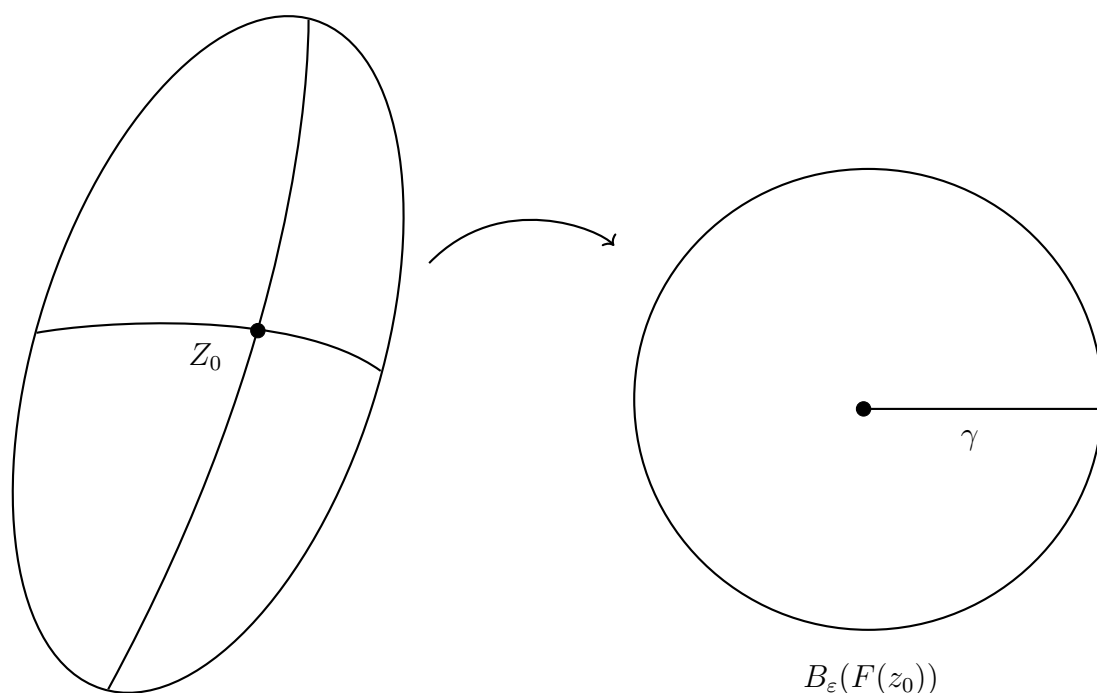
Du théorème des fonctions inverses, nous avons le résultat habituel sur l'existence d'une inverse locale (analytique).

Proposition 5.6. Supposons F analytique et $F'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage U de z_0 tel que F envoie U sur $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - F(z_0)| < \varepsilon\}$ de manière bijective. De plus, l'application inverse $F^{-1} : B \rightarrow U$ est analytique.

L'hypothèse d'analyticité nous permet également de dire beaucoup de choses sur le comportement d'une fonction analytique près d'un point critique, c'est-à-dire un point z_0 où $F'(z_0) = 0$.

Proposition 5.7. Supposons F analytique et $F^{(j)}(z_0) = 0$ pour $1 \leq j < n$, mais $F^{(n)}(z_0) \neq 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage U de z_0 tel que, si $0 < |w - F(z_0)| < \varepsilon$, alors il y a exactement n solutions à l'équation $F(z) = w$ dans U .

Le contenu de cette proposition est mieux visualisé géométriquement. Nous notons le disque de rayon ε autour de $F(z_0)$ par $B_\varepsilon(F(z_0))$. Soit γ un rayon reliant $F(z_0)$ à la frontière de B_ε . Alors les diverses préimages de γ subdivisent U en n secteurs. Ensuite, F envoie l'intérieur de chaque secteur homéomorphiquement sur $B_\varepsilon - \gamma$. Voir la Figure 5.12 Par exemple, considérons $F(z) = z^n$ pour $n \geq 2$. Il existe une unique solution à l'équation $F(z) = 0$, tandis qu'il y a exactement n solutions à $F(z) = w$ pour tout $w \neq 0$. Ces solutions sont, bien sûr, les $n^{\text{èmes}}$ racines de w .

FIGURE 5.12 – Les préimages de γ sous F .

Le résultat suivant est connu sous le nom de lemme de Schwarz, mais son importance dans la suite justifie de l'appeler un théorème.

Théorème 5.7. *Supposons F analytique dans le disque $|z| < 1$ et satisfaisant*

- $|F(z)| \leq 1$
- $F(0) = 0$

Alors $|F(z)| \leq |z|$ et $|F'(0)| \leq 1$. L'égalité a lieu seulement si $F(z) = e^{i\theta}z$.

Pour une preuve, nous renvoyons à L. V. Ahlfors [1]. Le lemme de Schwarz montre que les applications analytiques sur des régions simplement connexes sont très spéciales. La version suivante est plus utile pour nos besoins.

Corollaire 5.1. *Supposons U un sous-ensemble ouvert simplement connexe de \mathbb{C} différent de \mathbb{C} lui-même et supposons $F : U \rightarrow U$ analytique. Si F a un point fixe z_0 dans U , alors soit*

- $|F'(z_0)| < 1$ et $F^n(z) \rightarrow z_0$ pour tout $z \in U$, ou
- $F'(z_0) = e^{i\theta}$ et F est analytiquement conjuguée à une rotation du disque unité par $e^{i\theta}$.

Remarque 5.2. Le cas $U = \mathbb{C}$ doit être exclu car l'application $F(z) = az$ avec $|a| > 1$ est un contre-exemple évident. C'est l'une des caractéristiques remarquables des applications

analytiques complexes que cela ne peut pas se produire sur tout autre sous-ensemble ouvert simplement connexe de \mathbb{C} .

L'une des principales raisons pour lesquelles nous nous concentrerons sur les polynômes est la disponibilité du théorème suivant connu sous le nom de théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 5.8. *Soit $P(z)$ un polynôme de degré n . Si $n > 0$, alors $P(z)$ peut s'écrire sous la forme $P(z) = a(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$ où les α_i ne sont pas nécessairement distincts.*

Les applications analytiques complexes traitent souvent ∞ de manière assez simple. Par exemple, considérons $Q(z) = z^2$. Si $|z| < 1$, alors $Q^n(z) \rightarrow 0$ par itération, tandis que si $|z| > 1$, alors $Q^n(z) \rightarrow \infty$. Par conséquent, pour cette application, à la fois 0 et ∞ peuvent être considérés comme des "points fixes" attractifs. Bien sûr, nous devons définir $Q(\infty) = \infty$ pour que cela ait un sens. Mais cela s'avère parfaitement légitime. Considérons l'application $H(z) = 1/z$. H envoie 0 à ∞ et vice versa. Notez que H est bijective et analytique, et que $H \circ Q \circ H^{-1} = Q$, c'est-à-dire que H conjugue Q à elle-même ! Notez cependant que le comportement local de Q près de ∞ est transporté à celui de Q près de 0. C'est-à-dire que le comportement près de ∞ pour cette application est le même que près de 0. Cela signifie qu'il n'y a rien de spécial à propos de ∞ et que nous pourrions tout aussi bien autoriser ∞ comme un autre point du plan complexe, ou plutôt du plan complexe étendu. Tout cela peut être rendu précis en introduisant la sphère de Riemann. C'est la sphère obtenue comme suit. Nous identifierons chaque point dans $\hat{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec un point unique sur une sphère. Ceci est accompli comme suit.

Prenez la sphère et placez son pôle sud à l'origine dans \mathbb{C} . Du pôle nord N , tracez une ligne droite vers le point que nous notons $S(z)$ dans \mathbb{C} . Cette ligne droite perce la sphère en exactement un point que nous notons z . Cela donne alors un homéomorphisme de la sphère moins le pôle nord vers \mathbb{C} . Notez que S^{-1} donne alors un homéomorphisme de \mathbb{C} sur la sphère moins le pôle nord. Pour compléter l'image, nous posons $S^{-1}(\infty) = \text{pôle nord}$. Vu de cette façon, l'espace $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est appelé la sphère de Riemann et est noté $\bar{\mathbb{C}}$. Intuitivement, la sphère de Riemann est construite en enveloppant le plan sur la sphère moins le pôle nord, puis en le collant ensemble en ajoutant le point à l'infini. Voir la Figure 5.13.

Comment décrivons-nous les applications analytiques sur la sphère de Riemann ? Nous faisons précisément ce que nous avons fait pour l'application $Q(z) = z^2$; nous conjugurons simplement avec une application qui "déplace" ∞ ailleurs. Plus précisément, soit $F : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow$

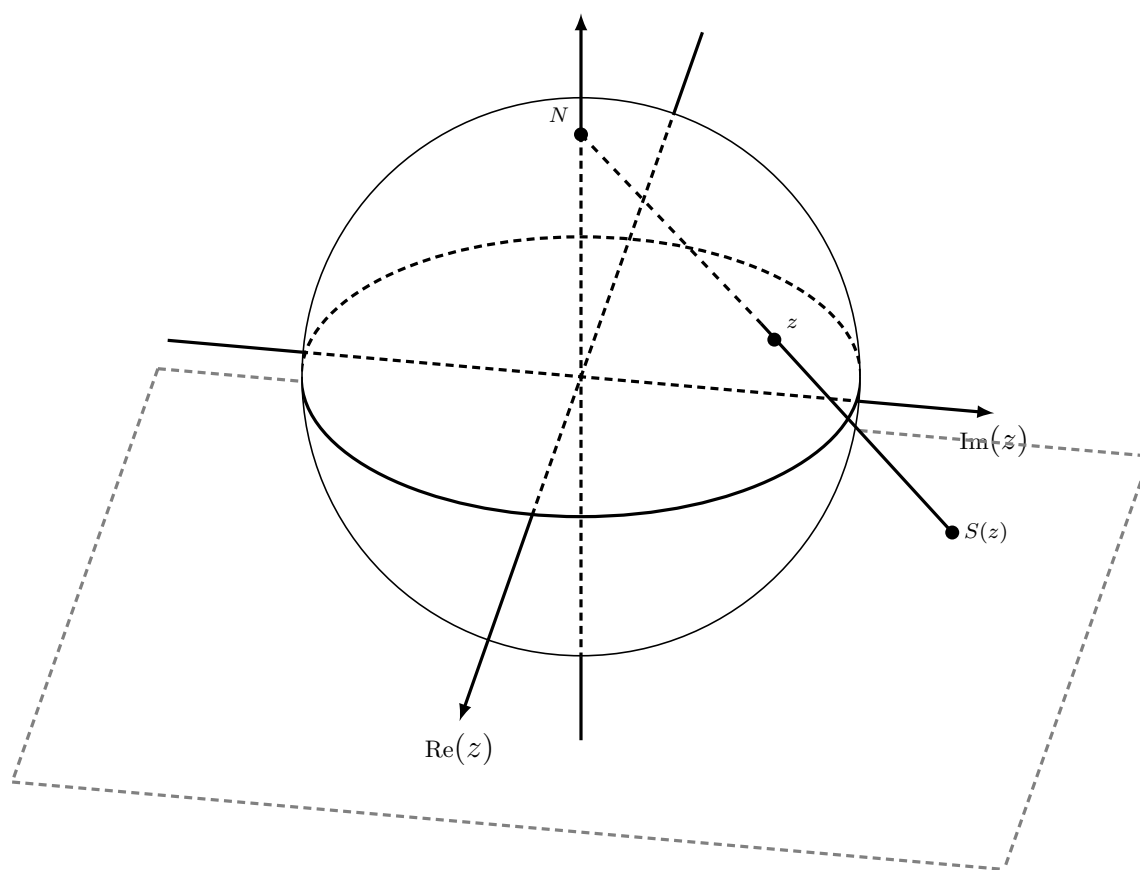


FIGURE 5.13 – La sphère de Riemann.

$\overline{\mathbb{C}}$ et supposons $F(\infty) = z_0$. Pour simplifier, nous supposons que $z_0 \neq 0$. Alors F est dite analytique à ∞ si $H \circ F \circ H^{-1}$ est analytique en 0, où $H(z) = 1/z$ comme ci-dessus. (Si $F(\infty) = 0$, nous remplaçons $H(z)$ par l'application $z \rightarrow 1/z - a$ où $a \neq 0, \infty$.)

Exemple 5.6. Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ un polynôme avec $n \geq 2$. Alors $P(\infty) = \infty$ et P est analytique à ∞ . En effet, nous avons

$$H \circ P \circ H^{-1}(z) = \frac{1}{P(1/z)} = \frac{z^n}{a_n + a_{n-1}z + \dots + a_0 z^n}$$

Cette fonction rationnelle s'annule lorsque $z = 0$, ainsi que sa dérivée. Par conséquent, $P'(\infty) = 0$ également.

Exemple 5.7. Soit

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où les coefficients a, b, c, d sont complexes et satisfont $ad - bc \neq 0$. L est appelée une transformation de Möbius (ou une transformation fractionnaire linéaire). Si $c \neq 0$, $L(\infty) =$

$a/c \neq \infty$. Si $a \neq 0$, la conjugaison par $1/z$ donne l'application

$$F(z) = \frac{c + dz}{a + bz}$$

et $F'(0) = (ad - bc)/a^2 \neq 0$. Par conséquent, ∞ est un point régulier pour L .

Plus généralement, si $R(z)$ est une fonction rationnelle quelconque de la forme $P(z)/Q(z)$ où P et Q sont des polynômes, alors R induit une application analytique sur toute la sphère de Riemann. Le point à ∞ peut être soit fixe, comme dans le cas d'un polynôme, soit périodique, comme dans le cas de $R(z) = 1/z^n$. En fait, ∞ peut se comporter comme tout autre point sous l'itération d'une application analytique. Nous remarquons que les points qui sont envoyés à ∞ par une application rationnelle sont appelés pôles.

5.2

Matrices

Une matrice est un tableau de nombres disposés en lignes et colonnes. Elle est souvent notée par une lettre majuscule, comme A , et sa taille est donnée par le nombre de lignes et de colonnes, notée $m \times n$ pour une matrice de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Matrice carrée : Une matrice A est dite carrée si elle possède le même nombre de lignes et de colonnes ($m = n$).
- Matrice diagonale : Une matrice carrée D est diagonale si tous les éléments hors de la diagonale sont nuls.
- Trace d'une matrice : La trace d'une matrice carrée A , notée $\text{tr}(A)$, est la somme des éléments de sa diagonale : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
- Les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée A sont des scalaires et des vecteurs qui vérifient une relation particulière.

Définition 5.17. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

- Un vecteur propre de A est un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un scalaire λ vérifiant

$$Av = \lambda v$$

où λ est appelé une valeur propre associée au vecteur propre v .

- Équation caractéristique : Pour trouver les valeurs propres, on résout le polynôme caractéristique, qui est donné par

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

où I est la matrice identité de même taille que A . Les racines de ce polynôme sont les valeurs propres de A .

- Diagonalisation : Une matrice A est diagonalisable si elle peut être écrite sous la forme

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de A , et P est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants de A .

Définition 5.18. Une fonction à valeurs réelles sur un espace vectoriel V est appelée une norme, et est notée $\|\cdot\|$, si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ seulement si $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pour tout $x \in V$ et tout scalaire α ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in V$.

Les trois normes les plus couramment utilisées sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^p sont illustrées par les expressions suivantes :

1. La norme ℓ^1 (ou norme "Manhattan") :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i|$$

Elle est appelée "manhattan" ou "taxicab" car elle mesure la distance en suivant une trajectoire orthogonale, comme le ferait un taxi se déplaçant dans une grille de rues de Manhattan.

2. La norme ℓ^2 (ou norme euclidienne) :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$$

C'est la norme la plus courante, qui correspond à la distance euclidienne, ou longueur directe, dans l'espace vectoriel.

3. La norme ℓ^∞ (ou norme "infinie", ou norme de Chebyshev) :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$$

Cette norme prend la valeur maximale des valeurs absolues des composantes du vecteur. Elle mesure donc la "taille" d'un vecteur en se basant sur sa composante la plus grande.

Remarque 5.3. Remarquons ici que toutes les normes sur \mathbb{R}^p sont équivalentes dans le sens où si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes quelconques, alors il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|.$$

Ainsi, si $\{x_n\}$ est une suite dans \mathbb{R}^p , alors $\|x_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ si et seulement si $\|x_n\|' \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

En correspondance avec chaque norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^p , on peut définir une norme opérateur $\|\cdot\|$ sur une matrice $p \times p$ A comme

$$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Il peut être montré facilement que

$$\|A\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

En utilisant cette définition, on peut calculer facilement $\|A\|$ par rapport aux trois normes ci-dessus

- Norme l_1 : $\|x\| = \sum_{i=1}^p |x_i|$, $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^p |a_{ij}|$ (somme sur les colonnes)
- Norme l_∞ : $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$, $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$ (somme sur les lignes)
- Norme l_2 : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$, $\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)}$, où $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$ est le rayon spectral de A .

Théorème 5.9. *Pour toute norme opérateur sur A ,*

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé ($v \neq 0$), tel que

$$Av = \lambda v.$$

Par les propriétés de la norme d'opérateur

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

et

$$\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|.$$

En combinant ces expressions

$$|\lambda| \cdot \|v\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$

Comme $\|v\| > 0$, on divise par $\|v\|$

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

Cette inégalité étant vraie pour toute valeur propre λ , elle est vraie pour le rayon spectral

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valeur propre de } A\} \leq \|A\|$$

□

5.3

Forme de Jordan et Calcul de A^n

Trouver la forme générale de A^n pour une matrice A est une tâche ardue. Heureusement, cependant, on peut transformer une matrice A en une autre matrice plus simple B dont la puissance n -ième B^n peut être facilement calculée. L'essence de ce processus est capturée dans la définition suivante.

Les matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible¹ P telle que

$$P^{-1}AP = B.$$

On note que la relation de « similarité » entre les matrices est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :

1. A est semblable à A .
2. Si A est semblable à B alors B est semblable à A .
3. Si A est semblable à B et B est semblable à C , alors A est semblable à C .

La caractéristique la plus importante des matrices semblables, cependant, est qu'elles possèdent les mêmes valeurs propres.

Définition 5.19. Une matrice P est dite inversible si son inverse P^{-1} existe. Ceci est équivalent à dire que $\det(P) \neq 0$, où \det désigne le déterminant.

Théorème 5.10. Soient A et B deux matrices semblables. Alors A et B ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration. Supposons que $P^{-1}AP = B$ ou $A = PBP^{-1}$. Soit λ une valeur propre de A et V le vecteur propre correspondant. Alors, $\lambda V = AV = PBP^{-1}V$. Donc, $B(P^{-1}V) =$

$\lambda(P^{-1}V)$. Par conséquent, λ est une valeur propre de B avec $P^{-1}V$ comme vecteur propre correspondant. \square

La notion de similarité entre matrices correspond à la conjugaison linéaire, en d'autres termes, deux applications linéaires sont conjuguées si leurs représentations matricielles correspondantes sont semblables. Ainsi, les applications linéaires L_1, L_2 sur \mathbb{R}^p sont linéairement conjuguées s'il existe une application inversible h telle que

$$L_1 \circ h = h \circ L_2$$

ou

$$h^{-1} \circ L_1 \circ h = L_2.$$

Exemple 5.8. Pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On trouve d'abord les valeurs propres de A en résolvant l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$ ou

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Ainsi, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$. Pour trouver le vecteur propre correspondant V_1 , on résout l'équation vectorielle $AV_1 = \lambda V_1$ ou $(A - \lambda_1 I)V_1 = 0$.

Pour $\lambda_1 = 1$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $v_{11} + 3v_{21} = 0$. Donc, $v_{11} = -3v_{21}$. Si on pose $v_{21} = 1$, alors $v_{11} = -3$. Il s'ensuit que le vecteur propre V_1 correspondant à λ_1 est donné par $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 5$, le vecteur propre correspondant peut être trouvé en résolvant l'équation $(A - \lambda_2 I)V_2 = 0$. Cela donne

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $-3v_{12} + 3v_{22} = 0$ ou $v_{12} = v_{22}$. Il est alors approprié de prendre $v_{12} = v_{22} = 1$ et donc $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 5.20. Soit $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$. On dit que A est sous forme de Jordan s'il existe une base de \mathbb{R}^p dans laquelle la matrice de A s'écrit

$$J = \text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \dots, J_{k_m}(\lambda_m)),$$

où chaque bloc $J_k(\lambda)$ est un *bloc de Jordan* associé à une valeur propre λ , défini par

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Autrement dit, chaque bloc $J_k(\lambda)$ est une matrice carrée de taille k ayant λ sur toute la diagonale, des 1 sur la surdiagonale, et des 0 partout ailleurs.

Théorème 5.11. [Théorème fondamental] *Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$, il existe une matrice inversible P telle que*

$$A = PJP^{-1},$$

où J est sous forme de Jordan.

La décomposition ainsi obtenue s'appelle la *forme de Jordan* de A .

Diagonalisation : Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p),$$

où λ_i sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes). Alors

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_p^n)P^{-1}. \quad (5.13)$$

Forme de Jordan : Si A n'est pas diagonalisable, elle est semblable à une matrice de Jordan J :

$$P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k),$$

où chaque bloc de Jordan J_i est de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A^n = PJ^nP^{-1} = P \operatorname{diag}(J_1^n, J_2^n, \dots, J_k^n)P^{-1}. \quad (5.14)$$

Chaque J_i^n se calcule par la formule

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \dots \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^n \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres complexes : Si A a des valeurs propres complexes, on peut les regrouper en paires conjuguées. Pour chaque paire $\alpha \pm i\beta$, on peut former un bloc réel de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

et utiliser la formule (5.14) pour calculer les puissances.

Théorème 5.12. *Soit A une matrice carrée de taille $p \times p$ et supposons que toutes les valeurs propres de A soient dans le disque unité, c'est-à-dire que $\sigma(A) \subset \mathbb{D}(0, 1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, où $\sigma(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A . Alors, il existe une constante $0 < \alpha < 1$ et un entier $K \in \mathbb{N}$ tels que pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$, il existe une constante C telle que pour tous $k \geq K$,*

$$\|A^k x\| \leq \alpha^k \|x\|$$

Démonstration. L'hypothèse donnée est que $\sigma(A) \subset \mathbb{D}(0, 1)$. Cela implique que pour toute valeur propre λ_i de A , $|\lambda_i| < 1$. En utilisant la décomposition spectrale de A , nous pouvons écrire A en termes de ses valeurs propres et de ses vecteurs propres (en supposant que A est diagonalisable) :

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

où Λ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A , et V est la matrice de changement de base formée des vecteurs propres de A . Puisque $A = V\Lambda V^{-1}$, nous avons :

$$A^k = V\Lambda^k V^{-1}$$

Comme les valeurs propres λ_i de A sont dans le disque unité ($|\lambda_i| < 1$), les éléments diagonaux de Λ^k , qui sont λ_i^k , tendent vers zéro lorsque k augmente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0 \quad \text{pour chaque } \lambda_i \in \sigma(A)$$

Pour un vecteur x , on peut écrire

$$A^k x = V \Lambda^k V^{-1} x$$

Si $y = V^{-1} x$, alors

$$A^k x = V \Lambda^k y$$

La norme de $A^k x$ est donc

$$\|A^k x\| = \|V \Lambda^k y\|$$

Par la propriété des normes matricielles, on a

$$\|A^k x\| \leq \|V\| \cdot \|\Lambda^k y\|$$

Comme Λ est une matrice diagonale avec des éléments λ_i^k qui tendent vers zéro, il existe un k_0 tel que pour tous $k \geq k_0$, la norme de Λ^k devient arbitrairement petite. Par conséquent, il existe une constante $0 < \alpha < 1$ telle que pour k suffisamment grand, la norme de $A^k x$ est bornée par $\alpha^k \|x\|$. Ainsi, pour tout x et pour k suffisamment grand, on a

$$\|A^k x\| \leq \alpha^k \|x\|$$

avec $0 < \alpha < 1$. □

5.4

Topologie dans \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n est muni de la distance euclidienne

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

Propriétés fondamentales :

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire) .

Définition 5.21.

- **Boule ouverte** : $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < r\}$.
- **Boule fermée** : $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \leq r\}$.
- **Sphère** : $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) = r\}$.

Ensembles remarquables

Type	Définition	Exemple
Ouvert	$\forall x \in U \subset \mathbb{R}^n, \exists r > 0, B_r(x) \subset U$	$\{(x, y) x^2 + y^2 < 1\}$
Fermé	Complémentaire d'un ouvert	$\{(x, y) x^2 + y^2 \leq 1\}$
Compact	Fermé et borné	$[a, b] \times [c, d]$
Convexe	$\forall x, y \in C, [x, y] \subset C$	Boule, cube
Connexe	Non union de deux ouverts disjoints non vides	Intervalle, tore

Définition 5.22. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$:

- $x \in \mathbb{R}^n$ est un point intérieur si $\exists r > 0, B_r(\mathbf{x}) \subset E$.
- $x \in \mathbb{R}^n$ est un point adhérent si $\forall r > 0, B_r(\mathbf{x}) \cap E \neq \emptyset$.
- $x \in \mathbb{R}^n$ est un point d'accumulation si $\forall r > 0, B_r(\mathbf{x}) \cap (E \setminus \{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset$.
- $x \in \mathbb{R}^n$ est un point isolé si $\exists r > 0, B_r(\mathbf{x}) \cap E = \{\mathbf{x}\}$.

Définition 5.23. Soit E un sous ensemble de \mathbb{R}^n .

- L'intérieur de E noté $\overset{\circ}{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E .
- L'adhérence de E noté \overline{E} est le plus petit fermé contenant E .
- La frontière de E noté ∂E est l'ensemble $\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

Définition 5.24. Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est dense si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in D, d(x, \delta) < \varepsilon.$$

Équivalent à $\overline{D} = \mathbb{R}^n$.

Exemple 5.9.

- \mathbb{Q}^n est dense dans \mathbb{R}^n .
- $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ est dense dans \mathbb{R}^n .

Définition 5.25. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

5.5

Théorèmes Fondamentaux

Théorème 5.13 (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée dans \mathbb{R}^n admet une sous-suite convergente.*

Théorème 5.14 (Heine). *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Théorème 5.15 (Borel-Lebesgue). *$K \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\iff K$ est fermé et borné.*

5.6

Méthodes Numériques et Considérations

5.6.1 Exposants de Lyapunov

Le calcul du spectre de Lyapunov a été réalisé selon la méthode de Benettin et al. (1980), présentée de manière intuitive dans Parker et Chua (1989). La notation utilisée ici s'inspire de Garst (2018).

5.6.1.1 Calcul de λ_1

Considérons $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et $x \in \mathbb{R}^2$ avec des exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2$. D'après le théorème 5.2, pour presque tout $v \in \mathbb{R}^2$ (direction uniformément aléatoire), l'exposant en direction de v est λ_1 avec probabilité 1. L'algorithme est le suivant :

1. Choisir $v \in \mathbb{R}^2$ unitaire et un entier $s \geq 1$ (période de normalisation)
2. Initialiser $v_0 = v, x_0 = x$
3. Itérer pour $0 \leq k \leq N - 1$:

$$u_{k+1} = (DF^s)_{x_{ks}} v_k, \quad v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}, \quad x_{(k+1)s} = F^s(x_{ks})$$

4. L'estimation est donnée par :

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{sN} \sum_{k=1}^N \log \|u_k\|$$

5.6.1.2 Calcul du spectre complet

Une généralisation exploitant la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet d'obtenir λ_1 et λ_2 simultanément. L'idée clé repose sur l'analogie de l'ellipse (section 5.1) et la relation :

$$\lambda_1 + \lambda_2 \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |E(n)|$$

où $|E(n)|$ est le volume 2D de l'ellipse image. L'algorithme étendu :

1. Choisir $v_{0,1}, v_{0,2}$ orthogonaux unitaires

2. Itérer pour $0 \leq k \leq N - 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{k+1,1} &= (DF^s)_{x_{k,s}} v_{k,1} \\ \tilde{u}_{k+1,2} &= (DF^s)_{x_{k,s}} v_{k,2} \\ u_{k+1,1} &= \tilde{u}_{k+1,1} \\ u_{k+1,2} &= \tilde{u}_{k+1,2} - \left(\frac{\langle \tilde{u}_{k+1,2}, u_{k+1,1} \rangle}{\langle u_{k+1,1}, u_{k+1,1} \rangle} \right) u_{k+1,1} \\ v_{k+1,i} &= \frac{u_{k+1,i}}{\|u_{k+1,i}\|}, \quad i = 1, 2\end{aligned}$$

3. Les estimations sont :

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{sN} \sum_{k=1}^N \log \|u_{k,1}\|, \quad \lambda_2 \approx \frac{1}{sN} \sum_{k=1}^N \log \|u_{k,2}\|$$

5.6.1.3 Implémentation numérique

Le code Python suivant calcule les exposants pour l'application de Hénon, en ignorant les orbites non bornées. La normalisation est appliquée à chaque itération ($\lambda = 1$) pour une meilleure stabilité, notamment lorsque $|b| \approx 0$.

```

1 import numpy as np
2
3 Henon = lambda x, a, b: np.array([x[1] + 1 - a * (x[0] ** 2), b * x[0]])
4 JacobianHenon = lambda x, a, b: np.array([[ -2 * a * x[0], 1], [b, 0]])
5
6 def HenonOrbit(x0, a, b, iterations=10000, bound=1e6):
7     X = np.zeros((2, iterations))
8     X[:, 0] = x0
9     bounded = True
10    for i in range(1, iterations):
11        X[:, i] = Henon(X[:, i - 1], a, b)
12        if np.any(np.abs(X[:, i]) > bound):
13            bounded = False
14            break
15    return X, bounded
16
17 def Lyapunov(a, b, N_t=int(1e3), N=int(1e4), x0=np.array([0., 0.])):
18    X, bounded = HenonOrbit(x0, a, b, iterations=N_t + N)
19    if not bounded:
20        return None, None, False
21
22    U = np.eye(2)

```

```

23     Unorm = np.zeros((2, N))
24
25     for i in range(N):
26         x = X[:, N_t + i]
27         DHx = JacobianHenon(x, a, b)
28         V = DHx @ U
29
30         U[:, 0] = V[:, 0]
31         U[:, 1] = V[:, 1] - (np.dot(V[:, 1], U[:, 0]) /
32                             np.dot(U[:, 0], U[:, 0])) * U[:, 0]
33
34         Unorm[0, i] = np.linalg.norm(U[:, 0])
35         Unorm[1, i] = np.linalg.norm(U[:, 1])
36         U[:, 0] /= Unorm[0, i]
37         U[:, 1] /= Unorm[1, i]
38
39     lyap1 = np.sum(np.log(Unorm[0, :])) / N
40     lyap2 = np.sum(np.log(Unorm[1, :])) / N
41
42     return lyap1, lyap2, True
43
44 if __name__ == "__main__":
45     a, b = 1.4, 0.3
46     l1, l2, ok = Lyapunov(a, b)
47     if ok:
48         print(f"Exposants de Lyapunov pour Hénon (a={a}, b={b}):")
49         print(f"$\lambda_1 = ${l1:.6f}, $\lambda_2 = ${l2:.6f}")
50     else:
51         print("Orbite non bornée ")

```

5.7

Dimension de Boîte

La technique de comptage de boîtes (*box-counting*) est adaptée de Parker et Chua (1989). Elle s'applique à des ensembles finis dans \mathbb{R}^2 .

Calcul de $N(\epsilon)$

Soit $M \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fini. Pour un $\epsilon > 0$ donné :

1. Calculer les bornes :

$$x_{\min} = \min_{(x,y) \in M} x, \quad x_{\max} = \max_{(x,y) \in M} x, \quad y_{\min}, \quad y_{\max}$$

2. Déterminer le nombre de boîtes :

$$N_x = \left\lceil \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\epsilon} \right\rceil, \quad N_y = \left\lceil \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\epsilon} \right\rceil$$

3. Initialiser une matrice A (zéro) de taille $N_y \times N_x$

4. Pour chaque point $(x, y) \in M$:

$$i = \left\lfloor \frac{x - x_{\min}}{\epsilon} \right\rfloor$$

$$j = \left\lfloor \frac{y - y_{\min}}{\epsilon} \right\rfloor$$

$$A[j, i] = 1 \quad (\text{marquer la boîte occupée})$$

5. $N(\epsilon) = \sum_{i,j} A[j, i]$ (nombre de boîtes occupées)

5.7.1 Estimation de D_{box}

Par régression linéaire sur l'échelle log-log :

$$\log N(\epsilon) \approx -D_{\text{box}} \log \epsilon + \log k$$

pour une série de ϵ_i suffisamment petits.

5.7.1.1 Implémentation pour l'attracteur de Hénon

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from sklearn.linear_model import LinearRegression
4
5 # -----
6 # Henon map and Jacobian
7 # -----
8 def Henon(x, a, b):
9     return np.array([x[1] + 1 - a * (x[0] ** 2), b * x[0]])
10
11 def HenonOrbit(x0, a, b, iterations=10000, Rmax=1e3):
12     """
13     Generate the orbit of Henon map starting from x0

```

```

14 Returns (X, bounded) with X shape (2, iterations)
15 """
16 X = np.zeros((2, iterations))
17 X[:, 0] = x0
18 for i in range(1, iterations):
19     X[:, i] = Henon(X[:, i-1], a, b)
20     if np.any(np.abs(X[:, i]) > Rmax): # divergence
21         return X[:, :i], False
22 return X, True
23
24 # -----
25 # Stable fixed point
26 # -----
27 def fixed_point(a, b):
28     coeffs = [a, (1 - b), -1]
29     roots = np.roots(coeffs)
30     real_roots = [r.real for r in roots if np.isreal(r)]
31     if not real_roots:
32         return np.array([0.0, 0.0])
33     # choose stable root (positive)
34     x_candidates = sorted(real_roots)
35     x = max(x_candidates)
36     return np.array([x, b * x])
37
38 # -----
39 # Box counting
40 # -----
41 def Boxes(epsilon, a, b, N=200000, N_t=10000):
42     """
43     Compute N(epsilon) for Henon attractor
44     """
45     x0 = fixed_point(a, b) + 0.01 * np.array([-1, 1])
46     X, bounded = HenonOrbit(x0, a, b, iterations=N + N_t)
47     if not bounded:
48         return None
49
50     X_vals = X[0, N_t:]
51     Y_vals = X[1, N_t:]
52
53     xmin, xmax = np.min(X_vals), np.max(X_vals)
54     ymin, ymax = np.min(Y_vals), np.max(Y_vals)
55
56     xboxes = int(np.ceil((xmax - xmin) / epsilon)) + 1

```

```
57     yboxes = int(np.ceil((ymax - ymin) / epsilon)) + 1
58
59     if xboxes <= 1 or yboxes <= 1:
60         return None
61
62     idx_x = np.floor((X_vals - xmin) / epsilon).astype(int)
63     idx_y = np.floor((Y_vals - ymin) / epsilon).astype(int)
64
65     boxes = np.unique(np.stack((idx_x, idx_y), axis=1), axis=0)
66
67     return len(boxes)
68
69 # -----
70 # Fractal dimension estimation
71 # -----
72 def fractal_dimension(a, b, epsilons, N=200000, N_t=10000, plot=True):
73     Ns = []
74     for eps in epsilons:
75         n_eps = Boxes(eps, a, b, N=N, N_t=N_t)
76         print(f"epsilon={eps}, N(eps)={n_eps}")
77         if n_eps is not None and n_eps > 0:
78             Ns.append(n_eps)
79         else:
80             Ns.append(np.nan)
81
82     Ns = np.array(Ns)
83     valid = ~np.isnan(Ns)
84     epsilons = np.array(epsilons)[valid]
85     Ns = Ns[valid]
86
87     if len(Ns) == 0:
88         print("Error: no valid data. Increase N or change epsilons.")
89         return None
90
91     X = np.log(1/epsilons).reshape(-1, 1)
92     y = np.log(Ns)
93     reg = LinearRegression().fit(X, y)
94     slope = reg.coef_[0]
95
96     if plot:
97         plt.figure(figsize=(7,5))
98         plt.plot(np.log(1/epsilons), np.log(Ns), "o-", label="Data")
99         plt.plot(X, reg.predict(X), "r--", label=f"Slope ~ {slope:.3f}")
```

```

100     plt.xlabel("log(1/epsilon)")
101     plt.ylabel("log(N(epsilon))")
102     plt.title("Fractal dimension (box-counting) of Henon attractor")
103     plt.legend()
104     plt.show()
105
106     return slope
107
108 # -----
109 # Main script
110 # -----
111 if __name__ == "__main__":
112     a, b = 1.4, 0.3
113     x0 = fixed_point(a, b) + 0.01 * np.array([-1, 1])
114
115     print("Generating attractor...")
116     X, bounded = HenonOrbit(x0, a, b, iterations=100000)
117     if not bounded:
118         print("Orbit diverged.")
119     else:
120         plt.figure(figsize=(7,7))
121         plt.scatter(X[0, :], X[1, :], s=0.2, color="blue")
122         plt.title("Henon Attractor (a=1.4, b=0.3)")
123         plt.show()
124
125     epsilons = [0.1, 0.05, 0.025, 0.0125]
126     D = fractal_dimension(a, b, epsilons, N=300000, N_t=5000)
127     if D is not None:
128         print(f"Estimated fractal dimension: D ~ {D:.3f}")

```

5.8

Variété Instable

La méthode numérique pour estimer la variété instable d'un point fixe hyperbolique $x \in \mathbb{R}^2$ est adaptée de Garst (2018), inspirée de Broer et Takens (2009) et Simó (1992). La variété instable est calculée comme variété stable de F^{-1} .

Algorithme

Soit F un difféomorphisme, x un point fixe hyperbolique, λ la valeur propre instable ($|\lambda| > 1$), et v un vecteur propre unitaire.

1. Choisir $\epsilon > 0$ petit, N (points), m (itérations)
2. Calculer les points initiaux :

$$s_j = \epsilon \exp\left(j \frac{\log |\lambda^2|}{N}\right), \quad j = 1, \dots, N$$

$$\omega_{0,j}^L = x - s_j v, \quad \omega_{0,j}^R = x + s_j v$$

3. Itérer :

$$\omega_{k,j}^L = F(\omega_{k-1,j}^L), \quad \omega_{k,j}^R = F(\omega_{k-1,j}^R), \quad k = 1, \dots, m$$

4. Interpolation linéaire entre les points $\{\omega_{k,j}^L\}$ et $\{\omega_{k,j}^R\}$

Cas $\lambda < -1$

Utiliser F^2 (même variété instable).

5.8.1 Implémentation

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Definition des fonctions necessaires
5 def Henon(z, a, b):
6     """Application de Henon"""
7     x, y = z
8     return np.array([1 - a*x**2 + y, b*x])
9
10 def JacobianHenon(z, a, b):
11     """Matrice Jacobienne de l'application de Henon"""
12     x, y = z
13     return np.array([-2*a*x, 1], [b, 0])
14
15 def fixed_point(a, b):
16     """Trouve le point fixe hyperbolique de l'application de Henon"""
17     # Resoudre x = 1 - a*x^2 + b*x
18     # Equation quadratique: a*x^2 + (1-b)*x - 1 = 0
19     discriminant = (1-b)**2 + 4*a
20     x1 = (b-1 + np.sqrt(discriminant)) / (2*a)
21     x2 = (b-1 - np.sqrt(discriminant)) / (2*a)
22
23     # Choisir le point fixe dans la region interessante
24     x = x1 if abs(x1) < 10 else x2

```

```
25     y = b*x
26     return np.array([x, y])
27
28 # Parametres de l'application de Henon
29 a, b = 1.4, 0.3
30
31 # Calcul du point fixe et de la Jacobienne
32 p = fixed_point(a, b)
33 DF = JacobianHenon(p, a, b)
34 eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(DF)
35
36 # Identification de la valeur propre instable
37 lambda_u = eigvals[0] if np.abs(eigvals[0]) > 1 else eigvals[1]
38 v_u = eigvecs[:, 0] if np.abs(eigvals[0]) > 1 else eigvecs[:, 1]
39
40 # Normalisation du vecteur propre
41 v_u = v_u / np.linalg.norm(v_u)
42
43 # Parametres pour le calcul de la variete instable
44 N = 1000
45 epsilon = 1e-5
46 m_u = 12 # Nombre d'iterations pour la variete instable
47
48 # Initialisation des points le long de la direction instable
49 s_u = epsilon * np.exp(np.arange(N) * np.log(lambda_u**2) / N)
50 W_left = np.zeros((m_u, N, 2))
51 W_right = np.zeros((m_u, N, 2))
52
53 for j in range(N):
54     W_left[0, j] = p - s_u[j] * v_u
55     W_right[0, j] = p + s_u[j] * v_u
56
57 # Iteration de l'application de Henon
58 for k in range(1, m_u):
59     for j in range(N):
60         W_left[k, j] = Henon(Henon(W_left[k-1, j], a, b), a, b)
61         W_right[k, j] = Henon(Henon(W_right[k-1, j], a, b), a, b)
62
63 # Creation de la figure
64 plt.figure(figsize=(10, 8))
65
66 # Trace de la variete instable
67 for k in range(m_u):
```

```
68 plt.plot(W_left[k, :, 0], W_left[k, :, 1], 'r-', linewidth=0.5,
69         alpha=0.6)
70
71 # Trace du point fixe
72 plt.plot(p[0], p[1], 'bo', markersize=8, label='Point fixe')
73
74 # Configuration du graphique
75 plt.title('Variete instable de l''application de Henon (a=1.4, b=0.3)')
76 plt.xlabel('x')
77 plt.ylabel('y')
78 plt.axis('equal')
79 plt.grid(True, alpha=0.3)
80 plt.legend()
81 plt.xlim(-1.5, 1.5)
82 plt.ylim(-0.5, 0.5)
83
84 plt.show()
```

5.9

Codes

Afin de faciliter la reproduction des figures, la compréhension des simulations numériques et l'exploration approfondie des phénomènes étudiés, les codes sources utilisés dans chaque chapitre sont mis à disposition sur une plateforme GitHub.

Chapitre 2

1. Figure 2.2a : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/orbite_puits.py
2. Figure 2.2b : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/orbite_source.py
3. Figure 2.7 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/plan_tr_det_2.py
4. Figure 2.9 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/noeud_instable.py
5. Figure 2.10 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/noeud_stable.py
6. Figure 2.18 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/n%C5%93ud_col_bifurcation.py
7. Figure 2.12 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/systeme_lineaire.py
8. Figure 2.21 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/transcritique_bifurcation.py
9. Figure 2.23 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/fourche_bifurcation.py

10. Figure 2.25 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/flip_bifurcation.py
11. Figure 2.27 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/hopf_bifurcation.py

Chapitre 3

1. Figure 3.2 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/graphe_f_mu_n.py
2. Figure 3.4-3.6 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/cobwebbe_f.py
3. Figure 3.8 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/diag_bif_logistic_coul.py
4. Figure 3.9 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/Cobweb_logistic.py
5. Figure 3.10 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/lyapunov_diag_bif_logistique.py
6. Figure 3.16 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/lyapunov_arnold.py
7. Figure 3.17 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/arnold_orbite.py
8. Figure 3.17-3.19 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/arnold_orbite.py
9. Figure 3.20 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/arnold_cat_trans.py
10. Figure 3.21 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/diag_bif_arnold_x.py,
11. https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/diag_bif_arnold_y.py
12. Figure 3.22 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/Diag_bif_Henon.py
13. Figure 3.24 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/trajectoire_Henon.py
14. Figure 3.30 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/Attractors_Henon_Zoom.py
15. Figure 3.28 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/lyapunov_Henon.py
16. Figure 3.27 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/lyapunov_plan_a_b_henon.py
17. Figure 3.29 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/attracteur_Henon.py

Chapitre 4

1. Figure 4.1 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/julia_0.py
2. Figure 4.2 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/mandelbrot.py
3. Figure 4.5 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/bassin_newton.py
4. Figure 4.7 : https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/julia_2d.py,
https://github.com/sahariml/dynamical_system_book/blob/main/julia.py

Bibliographie

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1979.
- [2] R. A. Adams and C. Essex. *Calculus : A Complete Course*. Pearson, 9th edition, 2018.
- [3] W. J. Baumol and J. Benhabib. “Chaos : Significance, Mechanism, and Economic Applications.” *Journal of Economic Perspectives*, 3(1) :77–105, 1989.
- [4] M. Benedicks and L. Carleson. “The Dynamics of the Hénon Map.” *Annals of Mathematics*, 133(1) :73–169, 1991.
- [5] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn. “Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems ; A Method for Computing All of Them. Part 1 : Theory.” *Meccanica*, 15(1) :9–20, 1980.
- [6] A. F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] P. Blanchard. “Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere.” *Bulletin of the American Mathematical Society*, 11(1) :85–141, 1984.
- [8] H. Brolin. “Invariant Sets under Iteration of Rational Functions.” *Arkiv för Matematik*, 6(2) :103–144, 1965.
- [9] X. Buff and A. Chéritat. “Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive.” *Comptes Rendus Mathématiques*, 341(11) :669–674, 2005.
- [10] A. Cayley. “Desiderata and Suggestions. No. 3. The Newton–Fourier Imaginary Problem.” *American Journal of Mathematics*, 2(1) :97, 1879.
- [11] A. Cayley. “The Newton–Fourier Imaginary Problem.” *American Journal of Mathematics*, 2 :97, 1879.

-
- [12] P. Collet and J.-P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser, Boston, 1980. Reprint : Springer, 2009.
- [13] R. L. Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems : Theory and Experiment*. CRC Press, 2nd edition, 2018.
- [14] A. Douady and J. H. Hubbard. “Itération des polynômes quadratiques complexes.” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Série I*, 294(3) :123–126, 1982.
- [15] J.-P. Eckmann and D. Ruelle. “Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors.” *Reviews of Modern Physics*, 57(3) :617–656, 1985.
- [16] M. J. Feigenbaum. “Universal Behavior in Nonlinear Systems.” *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 7(1–3) :16–39, 1983.
- [17] S. Filip. “Zero Lyapunov Exponents and Monodromy of the Kontsevich–Zorich Cocycle.” *Duke Mathematical Journal*, 166(4) :657–706, 2017.
- [18] I. Gumowski and C. Mira. *Dynamique Chaotique. Transformations Ponctuelles, Transition Ordre-Désordre*. Éditions Cépadues, Toulouse, 1980.
- [19] M. Hénon. “A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor.” *Communications in Mathematical Physics*, 50(1) :69–77, 1976.
- [20] G. Julia. “Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles.” *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, sér. 8, 1 :47–245, 1918.
- [21] L. V. Kantorovich. “Sur la méthode de Newton.” *Travaux de l’Institut des Mathématiques Steklov*, 28 :104–144, 1949.
- [22] D. T. Kaplan and R. J. Cohen. “Is Fibrillation Chaos?” *Circulation Research*, 67(4) :886–892, 1990.
- [23] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [24] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2002.
- [25] Yu. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, Applied Mathematical Sciences, Vol. 112, 2nd edition, 1998.

- [26] T.-Y. Li and J. A. Yorke. “Period Three Implies Chaos.” *American Mathematical Monthly*, 82(10) :985–992, 1975.
- [27] D. Lind and B. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2021.
- [28] E. N. Lorenz. “Deterministic Nonperiodic Flow.” *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2) :130–141, 1963.
- [29] A. M. Lyapunov. *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor & Francis, London, 1992. (Original : 1892 ; translated and reprinted.)
- [30] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York, 1982.
- [31] R. M. May. “Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics.” *Nature*, 261(5560) :459–467, 1976.
- [32] J. Milnor. “On Lattès Maps.” In *Dynamics on the Riemann Sphere*, pages 9–43. European Mathematical Society, 2006.
- [33] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. Annals of Mathematics Studies, Vol. 160. Princeton University Press, Princeton, 3rd edition, 2006.
- [34] T. S. Parker and L. O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer, New York, 1989.
- [35] H.-O. Peitgen and P. H. Richter. *The Beauty of Fractals : Images of Complex Dynamical Systems*. Springer, Berlin, 1986.
- [36] A. Pikovsky and A. Politi. *Lyapunov Exponents : A Tool to Explore Complex Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [37] A. N. Sharkovskii. “Co-existence of the Cycles of a Continuous Mapping of the Line into Itself.” *Ukrains’kyi Matematychnyi Zhurnal*, 16(1) :61–71, 1964.
- [38] C. L. Siegel. “Iteration of Analytic Functions.” *Annals of Mathematics*, 43(4) :607–612, 1942.
- [39] M. Viana and K. Oliveira. *Foundations of Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 151. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [40] T. J. Ypma. “Historical Development of the Newton–Raphson Method.” *SIAM Review*, 37(4) :531–551, 1995.

- [41] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 42. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [42] Yu. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 112. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2004.
- [43] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, Boulder, CO, 2nd edition, 2015.
- [44] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 2. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [45] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [46] Yu. A. Kuznetsov and R. J. Sacker. “Neimark–Sacker Bifurcation.” *Scholarpedia*, 3(5) :1845, 2008.
- [47] C. Douskos and P. Markellos. “Andronov–Hopf and Neimark–Sacker Bifurcations in Time-Delay Differential and Difference Equation Models.” *Advances in Difference Equations*, 2020(1) :190, 2020.
- [48] A. Dhooge, W. Govaerts, and Yu. A. Kuznetsov. “MATCONT : A MATLAB Package for Numerical Bifurcation Analysis of ODEs.” *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(2) :141–164, 2003. Available at <https://sourceforge.net/projects/matcont/>.
- [49] E. J. Doedel and B. E. Oldeman. *AUTO-07P : Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations*. Concordia University, Montreal, 2012. Available at <https://sourceforge.net/projects/auto-07p/>.
- [50] G. Schwarz. “Nondegeneracy Conditions for Period-Doubling Bifurcations.” In *Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines*, Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 316, pages 106–117, 1979.
- [51] G. Iooss. *Bifurcation of Maps and Applications*. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 36. North-Holland, Amsterdam, 1979.