

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Année :2015

Département de mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

APPROXIMATION D'UN SYSTÈME D'INÉQUATIONS-
QUASI-VARIATIONNELLES
PARABOLIQUE ET SA FRONTIERE LIBRE

Option

Analyse Numérique

Par M^{me} YAHIA. Née : BOUGHIOUT NAWEL

DIRECTEUR DE THESE : D^r M.HAIOUR Prof. U.B.M. Annaba

Devant le jury :

PRESIDENT :	Sissaoui Hocine	Prof.	U.B.M. Annaba
EXAMINATEURS :	Aiadi Abdelhamid	Prof.	U. Oum El Bouaghi
	Saadi Samira	MCA	U.B.M. Annaba
	Ellagoun Fateh	MCA	U. Guelma
	Maouni Messaoud	MCA	U. 20 Aout 55. Skikda

Résumé

On étudie un système d'inéquations quasi-variationnelles paraboliques, qui est l'approximation de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. On étudie le problème continu, l'approximation par éléments finis pour l'espace et par différences finis pour l'intervalle du temps, on établit le comportement asymptotique de la solution. On s'intéresse aussi dans ce travail à la localisation de la frontière libre, ainsi que son comportement asymptotique. Finalement consolidons ces résultats par des simulations numériques.

Mots-clés

Inéquations quasi-variationnelles paraboliques, inéquations variationnelles paraboliques, l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, le comportement asymptotique, la frontière libre.

ملخص

في هذا البحث ندرس دراسة مستمرة و تقريبية لجملة من المتراجحات الشبه المتغيرة المكافئة، هذه الجملة تعتبر تقريب لمعادلة هاميلتون-جاكوبي-بالمان الشهيرة, كما نقوم بدراسة الخاصية المقاربة للحل و الحدود الحرة. بالإضافة إلى أمثلة توثيقية.

الكلمات المفتاحية

المتراجحات الشبه المتغيرة المكافئة، معادلة هاميلتون-جاكوبي-بالمان، الخاصية المقاربة للحل، الحدود الحرة، المتراجحات المتغيرة المكافئة.

Abstract

We study a system of parabolic quasi-variational-inequalities, which is the approximation of the Hamilton-Jacobi-Bellman equations. We establish the survey of the continuous problem, approximation by finite elements for the space and by finite differences for the interval of the time, and we establish the asymptotic behavior of the continuous solution. We also interested in this work in the localization of the free boundary, as well as its asymptotic behavior . Finally strengthen these results by the numerical simulations.

Key-words

Parabolic quasi-variational inequalities, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, parabolic variational inequalities, asymptotic behavior, free boundary.

Introduction

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB en abrégé) est une équation résultant de la méthode de la programmation dynamique initiée par Richard Bellman dans les années 50 pour résoudre des problèmes d'optimisation, c'est à dire des problèmes où l'on doit prendre les meilleures décisions, possibles à chaque date, pour un critère de performance donné.

L'équation de la programmation dynamique généralise les travaux antérieurs en mécanique classique de William Hamilton et Carl Gustav Jacobi, et, est usuellement appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman en reconnaissance de la contribution de ces trois grandes personnalités scientifiques. Historiquement appliquée en ingénierie, puis dans d'autres domaines des mathématiques appliquées, l'équation d'HJB est devenue un outil important dans les problèmes de décision intervenant en économie et finance. Notons aussi, que ce type d'EDP peut également modéliser d'autres problèmes comme la propagation de fronts, la viabilité et les bassins de capture en biologie, la dynamique des dislocations dans les matériaux ,...(pour plus de détail voir [9]).

La programmation dynamique repose sur une technique que Bellman appela "principe d'optimalité". Ce principe général stipule que la solution d'un problème global peut être obtenue en décomposant le problème en sous-problèmes plus simples à résoudre, en étudiant le comportement de la fonction valeur entre deux dates proches, on obtient que cette fonction valeur satisfait une équation aux dérivées partielles (EDP) de premier ordre appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. On cherche d'abord à trouver une solution à l'EDP d'HJB, on calcule alors une commande optimale en feedback en considérant pour chaque date t et état x .

En effet, plusieurs schémas existent pour l'approximation des EDP, ils sont basés pour la plupart sur les différences finies comme le schéma de semi Lagrangien [15, 16, 17] ou encore

les schémas d'ordre élevé du type ENO et WENO proposés par Osher et Shu [4, 5]. Ces schémas donnent une bonne approximation de la solution lorsqu'elle est continue.

Ce pendant, en général, une étape d'interpolation intervient dans ces schémas, et cause une perte croissante de précision en temps long, d'autant que pour l'approximation de fonctions discontinues, cette interpolation provoque une diffusion numérique autour des discontinuités, ainsi ces schémas ne semblent pas bien adaptés pour approcher la fonction valeur, Une façon de remédier a cet effet de diffusion est de considérer la classe de schémas avec limiteurs développés pour l'approximation des lois de conservation scalaire. Cette classe de schémas a été unifiée par Sweby [29] sous le formalisme volumes finis. Dans cette classe de schémas a volumes finis, on investit en particulier le schéma UltraBee (UB), développé par Désprès et Lagoutière dans le cadre de la résolution des EDP hyperboliques pour les discontinuités de contact des gaz compressibles [6, 3], et adapté aux equations HJB (UB-HJB) par Bokanowski et Zidani [20].

Notons qu'il existe d'autres méthodes bien adaptées pour approcher l'équation HJB , les méthodes Fast Marching et Level Set étudiées par Sethian [10] ont, en particulier, été développées pour les problèmes de poursuite d'interface ou encore de propagation de fronts.

Il est bien connu que la méthode HJB souffre de la malédiction de la dimension" ce qui représente en général un handicap à son application à des problèmes de grande dimension (6 ou 7 par exemple, dans les problèmes d'aérospatiale).

Commençons par l'équation de la programmation dynamique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max_{1 \leq m \leq M} (A^m u - f^m) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x, 0) = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.1)$$

Ce problème de Dirichlet a été résolu par [26], des méthodes itératives sont proposés dans [24] ainsi que l'analyse numérique (les méthodes du point fixe dans [32], des éléments finis dans [24] et la méthode de décomposition de domaine [8] dont les auteurs étudient la convergence, la mise en œuvre et l'efficacité sur des exemples traité numériquement, où le résultat de la convergence a été prouvé, mais aucune évaluation de l'erreur n'a été donnée.

Ce travail est consacré à l'effet que l'équation (0.1) peut être approximée par le système d'inéquations quasi variationnelles suivant :

$$\begin{cases} a^m (u^m, v - u^m) - (f^m, v - u^m) \geq 0 \\ u^m \leq k + u^{m+1} \\ v^m \leq k + u^{m+1} \\ u^{M+1} = u^1 \end{cases}, \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall 1 \leq m \leq M \quad (0.2)$$

pour plus de détails sur ce passage de (0.1) à (0.2), voir [11], alors que la résolution de l'équation HJB se rend à la résolution du système de l'I.Q.V (0.2), un résultat de l'estimation de l'erreur optimale a été établi dans [13,14], tel qu'il utilise la discrétisation par éléments finis et combine la convergence géométrique des deux schémas continu et discret de type Bensoussan-Lions, avec l'estimation de l'erreur connue des inéquations variationnelles ([23]), ce mémoire est une extension de ce travail avec le cas d'évolution, dont il est organisé comme suit :

La première section est consacrée à l'étude du problème continu, tel qu'on donne un aperçu sur l'étude de l'inéquation variationnelle d'évolution [1], où la démonstration de l'existence de la solution s'est faite par pénalisation; alors que les estimations à priori de la solution de l'équation pénalisée se conduit à l'existence de la solution [1], l'idée de la démonstration pour l'inéquation quasi variationnelle est d'introduire une suite qui rend le second membre indépendant de la solution, et le système de l'I.Q.V devient un système de l'I.V, utilisant

l'estimation à priori de pénalisation de l'I.V, la convergence de cette suite, vers la solution de l'I.Q.V, se fait immédiatement, ainsi que l'unicité, la monotonie, la lipchitzianité et la régularité. Comme on a indiqué précédemment que l'équation de HJB de la programmation dynamique stationnaire, est une limite formelle du système de l'I.Q.V stationnaire, alors, c'est le même cas, pour le problème d'évolution, tel qu'on utilise aussi la lipchitzianité de la solution (voir [12]).

Grâce au principe du maximum discret (pmd) [25], une étude similaire à celle du cas continu, est introduite dans la seconde section pour le cas discret. L'espace Ω a été discrétisé par les éléments finis dont toutes les démonstrations sont identiques à celles de la section précédente, sauf l'apparition du pas h . La section suivante est consacrée à l'étude de la discrétisation totale mais cette fois ci la discrétisation du temps, est faite par différences finis, tel qu'on utilise le θ -schéma, dont on établit l'étude de stabilité et de convergence [30]; finissons cette section par le théorème global de l'approximation.

Suivant [12], nous étudions dans la troisième section le comportement asymptotique en norme L^∞ de la solution du système de l'I.Q.V parabolique, c-à-d si le problème est défini sur l'intervalle du temps $[0, T]$ et T tend vers l'infini.

La dernière section de ce travail traite l'aspect numérique du problème dans \mathbb{R} , on a établi des exemples étudiés déjà dans [21] avec les méthodes de Fast Marching et l'Ultra-Bee schéma.

UNIVERSITY OF MIAMI

By

A THESIS

Submitted to the Faculty
of the University of Miami
in partial fulfillment of the requirements for
the degree of Master of _____

Coral Gables, Florida

UNIVERSITY OF MIAMI

A Thesis submitted in partial fulfillment of
the requirements for the degree of
Master of _____

Approved:

Ima Sample
Professor of Biology
Chairperson of the Thesis
Committee

Jo Anne K. Hecker
Interim Dean of
The Graduate School

Joseph Smith
Professor of Psychology

Frederick Jones
Associate Professor of
Biology

Table des matières

1	Approximation par la méthode de pénalisation du système d'I.Q.V associé au HJB	5
1.1	Notations et hypothèses	5
1.2	Inéquations variationnelles d'évolution	7
1.2.1	Existence et unicité de la solution	7
1.2.2	Estimations à priori de pénalisation	8
1.3	Position du problème continu	10
1.4	Formulation variationnelle	11
1.5	Approximation par pénalisation	11
1.6	Unicité de la solution	20
1.7	Propriétés de la solution continue	21
1.7.1	Propriété de monotonie	21
1.7.2	Propriété de lipchitzianité	22
1.7.3	Régularité de la solution	24
1.8	L'équation HJB	24
2	Problème discret	27

2.1	Méthode des éléments finis :(semi discretisation de l'espace)	27
2.1.1	Introduction	27
2.1.2	Existence de la solution discrète	29
2.1.3	Unicité de la solution discrète	37
2.1.4	Monotonie de la solution	38
2.1.5	Lipchitzianité de la solution	40
2.1.6	L'équation HJB discrète	41
2.1.7	Etude de la stabilité	42
2.1.8	Etude de la convergence	43
2.2	Méthode des différences finies : (discrétisation totale)	43
2.2.1	Etude de la stabilité	44
2.2.2	Etude de la convergence	47
2.3	Théorème de l'approximation	50

3 Le comportement asymptotique de la solution du système de l'I.Q.V

	parabolique	51
3.1	Le problème continu	51
3.1.1	L'application du point fixe associée au problème continu	52
3.1.2	L'algorithme associé au problème continu	54
3.2	Le problème discret	56
3.2.1	L'application du point fixe associé au problème discret	56
3.2.2	L'algorithme associé au problème discret	57
3.3	Comportement asymptotique	58

	3
4 Localisation de la frontière libre	59
4.1 le cas stationnaire	59
4.1.1 Le problème continu	59
4.1.2 Le problème discret	60
4.1.3 Approximation de la zone de contact	61
4.2 Comportement asymptotique de la frontière libre (Extension)	63
5 Expérimentation numérique	67

Chapitre 1

Approximation par la méthode de pénalisation du système d'I.Q.V associé au HJB

1.1 Notations et hypothèses

On considère :

Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , avec une frontière régulière Γ , $\Omega_0 = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ tel que $0 < T < \infty$.

On utilisera les espaces $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ et $L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega))$, tel que l'espace $L^2(]0, T[; V)$, muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle_{L^2(]0, T[; V)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_V dt \quad (1.1)$$

A^m , sont les opérateurs du deuxième ordre définit comme suit :

$$A^m = \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{i,j}^m(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq N} b_j^m(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0^m(x, t) \quad (1.2)$$

où :

$$a_{i,j}^m, a_j^m, a_0^m \in L^\infty(\Omega_0), \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad 1 \leq m \leq M \quad (1.3)$$

On définit les formes bilinéaires a^m associées à l'opérateur A^m :

$$a^m(u^m, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{i,j}^m \frac{\partial u^m}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq N} a_j^m \frac{\partial u^m}{\partial x_j} v + a_0^m u^m v \right) dx \quad (1.4)$$

Ces formes bilinéaires vérifient l'hypothèse de coercivité suivante :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{i,j}^m(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad (x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^N, \alpha > 0) \quad (1.5)$$

et elles sont symétriques :

$$a_{i,j}^m = a_{j,i}^m, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N, \quad 1 \leq m \leq M \quad (1.6)$$

On suppose aussi que :

$$f^m \in L^\infty(\Omega_0), \quad \frac{\partial f^m}{\partial t} \in L^\infty(\Omega_0), \quad 1 \leq m \leq M \quad (1.7)$$

Noterons dans toute la suite que $\|\cdot\|$, désigne la norme dans $H_0^1(\Omega)$, et $|\cdot|$ la norme dans $L^2(\Omega)$.

1.2 Inéquations variationnelles d'évolution

1.2.1 Existence et unicité de la solution

Soit

$$\psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (1.8)$$

Reprenons d'abord les hypothèses, et les notations de (1.1) à (1.7), sauf l'indice m , après on donne la définition de la solution forte :

Définition 1 *On dit que u est une solution forte d'une I. V. d'évolution si*

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (1.9)$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v - u(t)\right) + a(t; u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad p.p.ent \quad (1.10)$$

$$\forall v \in V \quad \text{tel que } v(x) \leq \psi(x, t) \quad p.p. \text{ dans } \Omega \quad (1.11)$$

$$\text{et } u \text{ satisfait } \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au - f\right)(u - \Psi) = 0 \text{ dans } \Omega_0, u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (1.12)$$

$$u(x, 0) = \bar{u}(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.13)$$

Théorème 2 *On suppose les notations (1.3), (1.5), (1.7), et on suppose que*

$$\frac{\partial a_{i,j}}{\partial t} \in L^\infty(\Omega_0) \quad (1.14)$$

$$\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \quad , \quad \bar{u} \leq \psi(T) \quad (1.15)$$

alors le problème fort (1.9), (1.10) et (1.11) admet une solution unique, telle que

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.16)$$

On considère maintenant l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A(t) u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon - \psi)^+ = f \quad (1.17)$$

avec

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.18)$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = \bar{u} \quad (1.19)$$

sa forme variationnelle s'écrit comme suit

$$-\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\right) + a(t; u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} ((u_\varepsilon - \psi)^+, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.20)$$

(1.20) est l'équation pénalisée associée au problème (1.9), (1.10) et (1.11).

Théorème 3 *On suppose (1.8), (1.15) et (1.5), il existe alors u_ε unique tel que :*

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.21)$$

et u_ε vérifie (1.17).

Preuve. (Voir [1]) ■

1.2.2 Estimations a priori de pénalisation

A la suite du problème continu on a besoin des estimations suivantes pour démontrer l'existence de la solution

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|(u_\varepsilon - \psi)^+\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \quad (1.23)$$

On pose

$$\dot{a}(t; u, v) = \sum \int_{\Omega} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum \int_{\Omega} \frac{\partial a_j}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_{\Omega} \frac{\partial a_0}{\partial t} u v dx \quad (1.24)$$

$$\left(\dot{A}(t) u, v \right) = \dot{a}(t; u, v) \quad \text{si } v \in D(\Omega) \quad (1.25)$$

on pose aussi $\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t} = w_{\varepsilon}$, alors on a l'estimation suivante :

$$|w_{\varepsilon}(t)|^2 + \int_t^T \|w_{\varepsilon}(s)\|^2 ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_t^T \left| \frac{\partial}{\partial t} (u_{\varepsilon} - \psi)^+ \right|^2 ds \leq C \quad (1.26)$$

$$\|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega))} + \|u'_{\varepsilon}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|(u_{\varepsilon} - \psi)^+\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \quad (1.27)$$

On suppose maintenant que

$$A(t) \psi \in L^2(\Omega) \quad (1.28)$$

alors on a l'estimation de l'erreur de pénalisation suivante

$$\|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|u - u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad (1.29)$$

Pour plus de détaille, voir [1].

Preuve. (du théorème 2)

Il résulte de (1.26) que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, on peut donc extraire une sous-suite, encore noté u_{ε} , telle que

$$u_{\varepsilon} \rightarrow u \text{ dans } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible étoile,}$$

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible et dans } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.}$$

On a alors

$$u_{\varepsilon} \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega_0) \text{ fort}$$

et comme $(u_\varepsilon - \psi)^+ \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega_0)$ fort, d'après (1.23), on a

$$(u_\varepsilon - \psi)^+ = 0$$

on remplace dans (1.20) v par $v - u_\varepsilon$; on a :

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u_\varepsilon \right) + a(t; u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon - \psi)^+ - (u_\varepsilon - \psi)^+, v - u_\varepsilon \right) \geq 0$$

d'où l'on déduit en intégrant sur (s, t) :

$$\int_s^t \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u_\varepsilon \right) + a(\sigma; u_\varepsilon, v) - (f, v - u_\varepsilon) \right] d\sigma \geq \liminf \int_s^t a(\sigma; u_\varepsilon, u_\varepsilon) d\sigma$$

d'où l'on déduit (comme $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega_0)$ fort) :

$$\int_s^t \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u \right) + a(\sigma; u, v) - (f, v - u) \right] d\sigma \geq \liminf \int_s^t a(\sigma; u_\varepsilon, u_\varepsilon) d\sigma \geq \int_s^t a(\sigma; u, u) d\sigma$$

donc quelque soient s et t , on a :

$$\int_s^t \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u \right) + a(\sigma; u, v) - (f, v - u) \right] d\sigma \geq 0$$

Divisant cette dernière par $t - s$ et faisant tendre s vers t , on en déduit l'inégalité

désirée p.p. ■

1.3 Position du problème continu

Suivant [1] et [13], on pose le problème continu comme suit : trouver une fonction

$U(x, t) = (u^1, \dots, u^m, \dots, u^M)$ telle que $u^m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u^m}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

et telle qu'elle vérifie le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^m}{\partial t} + A^m u^m \leq f^m \\ u^m \leq k + u^{m+1} \\ u^{M+1} = u^1 \\ \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} + A^m u^m - f^m \right) (u^m - (k + u^{m+1})) = 0 \\ u^m(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (1.30)$$

1.4 Formulation variationnelle

On introduit la formulation variationnelle associée au problème (1.30), obtenue par la formule de Green :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u^m}{\partial t}, v - u^m \right) + a^m(u^m, v - u^m) - (f^m, v - u^m) \geq 0, \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u^m \leq k + u^{m+1} \\ v \leq k + u^{m+1} \\ u^{M+1} = u^1 \end{array} \right. \quad (1.31)$$

1.5 Approximation par pénalisation

D'après [1] l'équation d'évolution connue suivante admet une seule solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^{m,0}}{\partial t} + A^m u^{m,0} = f^m \\ u^{m,0}(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (1.32)$$

On considère le problème pénalisé associé au problème (1.30) comme suit :

Trouver u_ε^m , tel qu'il vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t} + A^m u_\varepsilon^m + \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^m - (k + u_\varepsilon^{m+1}))^+ = f^m \\ u_\varepsilon^m(x, 0) = 0 \\ u_\varepsilon^{M+1} = u_\varepsilon^1 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (1.33)$$

Pour résoudre ce système on construit une suite $u_\varepsilon^{m,n}$ définie à partir de $u_\varepsilon^{m,n-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t} + A^m u_\varepsilon^{m,n} + \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+ = f^m \\ u_\varepsilon^{m,n}(x, 0) = 0 \\ u_\varepsilon^{M+1,n} = u_\varepsilon^{1,n} \end{array} \right. \quad (1.34)$$

tel que $u^{m,0}$ est la solution de (1.32).

Si on prend $\psi^m = (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1})$, et comme ce dernier appartient à $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

d'après le théorème (1.2), la solution de (1.34) existe, et vérifie

$$u_\varepsilon^{m,n} \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t} \in L(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (1.35)$$

Théorème 4 *Sous les hypothèses (1.1) à (1.6), la suite définie en (1.34) décroît et*

$$u_\varepsilon^{m,n} \longrightarrow u_\varepsilon^m \text{ dans } \left\{ \begin{array}{l} L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible} \\ L^\infty(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right. \quad (1.36)$$

De plus, on a :

$$0 \leq u_\varepsilon^m \leq u^{m,0}, \forall 1 \leq m \leq M \quad (1.37)$$

Preuve. 1) $u_\varepsilon^{m,n}$ est décroissante :

Multiplions scalairement (1.32) par v tel que $v \in L^2(0, T; V)$:

$$\left(\frac{\partial u^{m,0}}{\partial t}, v \right) + a^m(u^{m,0}, v) = (f^m, v) \quad (1.38)$$

et (1.34) par v :

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, v \right) + a^m (u_\varepsilon^{m,n}, v) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, v \right) = (f^m, v) \quad (1.39)$$

pour $n=1$, (1.39) s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,1}}{\partial t}, v \right) + a^m (u_\varepsilon^{m,1}, v) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,1} - (k + u_\varepsilon^{m+1,0}))^+, v \right) = (f^m, v) \quad (1.40)$$

dans (1.38) et (1.40), on remplace v par $w^{m,0} = (u^{m,1} - u^{m,0})^+$, et après soustraction

on trouve que :

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{m,0}}{\partial t}, w^{m,0} \right) + a^m (u_\varepsilon^{m,1} - u^{m,0}, w^{m,0}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,1} - (k + u_\varepsilon^{m+1,0}))^+, w^{m,0} \right) = 0$$

puisque le dernier membre est ≥ 0 , alors :

$$\left(\frac{\partial w^{m,0}}{\partial t}, w^{m,0} \right) + a^m (w^{m,0}, w^{m,0}) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w^{m,0}(t)|^2 + \alpha \|w^{m,0}(t)\|^2 \leq 0$$

après intégration :

$$\frac{1}{2} |w^{m,0}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w^{m,0}(s)\|^2 ds \leq 0$$

$$w^{m,0} \equiv 0$$

Supposons maintenant que la proposition de décroissance est vraie pour $(n-1)$, c-à-d

que $u_\varepsilon^{m+1,n} \leq u_\varepsilon^{m+1,n-1}$, et l'on démontre pour n :

Dans (1.39) remplaçons v par $w_\varepsilon^m = (u_\varepsilon^{m,n+1} - u_\varepsilon^{m,n})^+$ une fois pour l'équation à la solution $u_\varepsilon^{m,n+1}$, et une autre pour l'équation qui à la solution $u_\varepsilon^{m,n}$, et après soustraction, on trouve :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_\varepsilon^{m,n+1} - u_\varepsilon^{m,n}), w_\varepsilon^m \right) + a^m \left((u_\varepsilon^{m,n+1} - u_\varepsilon^{m,n}), w_\varepsilon^m \right) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n+1} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n}))^+ - (u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, w_\varepsilon^m \right) = 0$$

alors :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_\varepsilon^{m,n+1} - u_\varepsilon^{m,n}), w_\varepsilon^m \right) + a^m \left((u_\varepsilon^{m,n+1} - u_\varepsilon^{m,n}), w_\varepsilon^m \right) + \frac{1}{\varepsilon} (w_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^{m+1,n} - u_\varepsilon^{m+1,n-1}, w_\varepsilon^m) \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial w_\varepsilon^m}{\partial t}, w_\varepsilon^m \right) + a^m (w_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m) \leq 0 \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_\varepsilon^m(t)|^2 + \alpha \|w_\varepsilon^m(t)\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Intégrant de 0 à t :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |w_\varepsilon^m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w_\varepsilon^m(s)\|^2 ds \leq 0 \\ & w_\varepsilon^m \equiv 0 \end{aligned}$$

2) Convergence de $u_\varepsilon^{m,n}$:

On va montrer d'abord que $u_\varepsilon^{m,n}$ est borné :

Soit la formulation variationnelle associée à (1.34) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, v - u_\varepsilon^{m,n} \right) + a^m (u_\varepsilon^{m,n}, v - u_\varepsilon^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, v - u_\varepsilon^{m,n} \right) = \\ & \hspace{20em} (1.41) \\ & = (f^m, v - u_\varepsilon^{m,n}) \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, u_\varepsilon^{m,n} \right) + a^m (u_\varepsilon^{m,n}, u_\varepsilon^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}) \right) = \\ & \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, v \right) + a^m (u_\varepsilon^{m,n}, v) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, v - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}) \right) - \end{aligned}$$

$$-(f^m, v - u_\varepsilon^{m,n})$$

on prend $v \leq k + u^{m+1,n-1}$, ainsi que (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\varepsilon^{m,n}|^2 + \alpha \|u_\varepsilon^{m,n}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| (u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+ \right|^2 &\leq \left(\frac{\partial u^{m,n}}{\partial t}, v \right) + a^m (u^{m,n}, v) - \\ &- (f, v - u_\varepsilon^{m,n}) \end{aligned}$$

après intégration :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |u_\varepsilon^{m,n}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_\varepsilon^{m,n}(s)\|^2 ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left| (u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+ \right|^2 ds \\ &\leq \int_0^t \left\{ \left(\frac{\partial u^{m,n}}{\partial t}, v \right) + a^m (u^{m,n}, v) - (f, v - u_\varepsilon^{m,n}) \right\} ds \\ &\leq C \end{aligned}$$

On déduit, alors que :

$$\|u_\varepsilon^{m,n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad (1.42)$$

$$\|u_\varepsilon^{m,n}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| (u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+ \right\|_{L^2(0,T;H)} \leq C \quad (1.44)$$

On peut, alors extraire une sous suite notée encore $u_\varepsilon^{m,n}$ tel que :

$$u_\varepsilon^{m,n} \longrightarrow u_\varepsilon^m \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible} \quad (1.45)$$

$$u_\varepsilon^{m,n} \longrightarrow u_\varepsilon^m \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ faible} \quad (1.46)$$

3) Convergence de $\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}$:

D'après [1] $\frac{\partial}{\partial t} u^{m,0}$ est bornée, alors on va démontrer la convergence de $\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}$ par récurrence :

On dérive (1.34) par rapport à t , on pose $\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t} = w_\varepsilon^{m,n}$ et on obtient :

$$\frac{\partial w_\varepsilon^{m,n}}{\partial t} + A^m w_\varepsilon^{m,n} + \dot{A}^m u_\varepsilon^{m,n} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+ = \frac{\partial f}{\partial t}$$

avec :

$$\left(\dot{A}^m u^m, v \right) = \dot{a}^m (u^m, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq N} \frac{a_{i,j}^m}{\partial t} \frac{\partial u^m}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq N} \frac{a_j^m}{\partial t} \frac{\partial u^m}{\partial x_j} v + \frac{a_0^m}{\partial t} u^m v \right) dx$$

On multiplie scalairement par $(w_\varepsilon^{m,n} - \frac{\partial}{\partial t} (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial w_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, w_\varepsilon^{m,n} \right) + a(w_\varepsilon^{m,n}, w_\varepsilon^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+ \right) \right|^2 = \\ & = \left(\frac{\partial w_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}) \right) + a \left(w_\varepsilon^{m,n}, \frac{\partial}{\partial t} (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}) \right) - \\ & - \dot{a} (u_\varepsilon^{m,n}, w_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1})) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}, w_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}) \right) \end{aligned}$$

Utilisons la continuité de a, \dot{a} et le produit scalaire, le fait que $(\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^{m+1,n-1})$ est borné, ainsi que l'inégalité de Young, on trouve que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_\varepsilon^{m,n}|^2 + c \|w_\varepsilon^{m,n}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial t} (u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+ \right|^2 \leq C$$

Ce qui nous donne :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^{m,n} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad (1.47)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^{m,n} \right\|_{L^2(0,T,H)} \leq C \quad (1.48)$$

\exists une sous suite notée encore $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^{m,n}$ tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^{m,n} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m \text{ faiblement}$$

4) $u_\varepsilon^m = \lim_{n \rightarrow \infty} u_\varepsilon^{m,n}$ vérifie (1.11) :

On utilise la formule de pénalisation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, v - u_\varepsilon^{m,n} \right) + a^m(u_\varepsilon^{m,n}, v - u_\varepsilon^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, v - u_\varepsilon^{m,n} \right) = \\ = (f^m, v - u_\varepsilon^{m,n}) \end{aligned}$$

Utilisons le fait que les formes bilinéaires a^m sont semi continues inférieurement pour passer à la limite inf :

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}, v - u_\varepsilon^m \right) + a^m(u_\varepsilon^m, v - u_\varepsilon^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^m - (k + u_\varepsilon^{m+1}))^+, v - u_\varepsilon^m \right) \leq (f^m, v - u_\varepsilon^m) \quad (*)$$

Aussi passons à la limite inf dans la formule suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, v - u_\varepsilon^{m,n} \right) + a^m(u_\varepsilon^{m,n}, v) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, v - u_\varepsilon^{m,n} \right) - \\ - (f^m, v - u_\varepsilon^{m,n}) = a^m(u_\varepsilon^{m,n}, u_\varepsilon^{m,n}) \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}, v - u_\varepsilon^m \right) + \liminf a^m(u_\varepsilon^{m,n}, v) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^m - (k + u_\varepsilon^{m+1}))^+, v - u_\varepsilon^m \right) - (f^m, v - u_\varepsilon^m) \geq \\ \geq a^m(u_\varepsilon^m, u_\varepsilon^m) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \liminf a^m(u_\varepsilon^{m,n}, v) &= \liminf \left(- \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, v \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^{m,n} - (k + u_\varepsilon^{m+1,n-1}))^+, v \right) + (f^m, v) \right) \\ &= - \left(\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}, v \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^m - (k + u_\varepsilon^{m+1}))^+, v \right) + (f^m, v) \\ &= a^m(u_\varepsilon^m, v) \end{aligned}$$

Alors :

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}, v - u_\varepsilon^m \right) + a^m(u_\varepsilon^m, v - u_\varepsilon^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^m - (k + u_\varepsilon^{m+1}))^+, v - u_\varepsilon^m \right) \geq (f^m, v - u_\varepsilon^m) \quad (**)$$

De (*) et (**), on a le resultat :

$$5) \mathbf{0} \leq \mathbf{u}_\varepsilon^m \leq \mathbf{u}^{m,0}:$$

Multipliant scalairement (1.32) et (1.33) par $w_\varepsilon^m = (u_\varepsilon^m - u^{m,0})^+$, après additionnement, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t} - \frac{\partial u^{m,0}}{\partial t}, w_\varepsilon^m \right) + a^m (u_\varepsilon^m - u^{m,0}, w_\varepsilon^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^m - (k + u_\varepsilon^{m+1}))^+, w_\varepsilon^m \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_\varepsilon^m - u^{m,0}), w_\varepsilon^m \right) + a^m (w_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m) &\leq 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_\varepsilon^m(t)|^2 + \alpha \|w_\varepsilon^m(t)\|^2 &\leq 0 \\ \frac{1}{2} |w_\varepsilon^m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w_\varepsilon^m(s)\|^2 ds &\leq 0 \\ w_\varepsilon^m &\equiv 0 \end{aligned}$$

■

Corollaire 5 u_ε^m est maximale, c'est à dire si on suppose que z^m est une autre solution de (1.33) avec $0 \leq z^m \leq u^{m,0}$, nous arivons à :

$$u_\varepsilon^m \geq z^m \tag{1.49}$$

Preuve. Il est claire que la proposition est vraie pour $n = 0$, on suppose maintenant qu'elle est vraie pour $(n - 1)$ et l'on démontre pour n :

On multipli scalairement (1.33) qui a pour solution z^m par $w_\varepsilon^m = (z^m - u_\varepsilon^{m,n})^+$:

$$\left(\frac{\partial z^m}{\partial t}, w_\varepsilon^m \right) + a^m (z^m, w_\varepsilon^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_\varepsilon^m - (k + u_\varepsilon^{m+1}))^+, w_\varepsilon^m \right) = (f^m, w_\varepsilon^m)$$

la soustraction (1.34) de cette dernière, nous donne :

$$\left(\frac{\partial z^m}{\partial t} - \frac{\partial u_\varepsilon^{m,n}}{\partial t}, w_\varepsilon^m \right) + a^m (z^m - u_\varepsilon^{m,n}, w_\varepsilon^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((z^m - u_\varepsilon^{m,n}) - (z^{m+1} - u_\varepsilon^{m+1,n}), w_\varepsilon^m \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} (z^m - u_\varepsilon^{m,n}), w_\varepsilon^m \right) + a^m (w_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m) &\leq 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_\varepsilon^m(t)|^2 + \alpha \|w_\varepsilon^m(t)\|^2 &\leq 0 \\ \frac{1}{2} |w_\varepsilon^m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w_\varepsilon^m(s)\|^2 ds &\leq 0 \\ w_\varepsilon^m &\equiv 0 \end{aligned}$$

Finalement passons à la limite sur la suite $u_\varepsilon^{m,n}$ pour obtenir le résultat. ■

Théorème 6 *On suppose qu'on a les mêmes hypothèses du théorème (3), alors lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, u_ε^m converge vers u^m solution de (1.30).*

Preuve. De (1.42) et (1.43) :

$$\|u_\varepsilon^m\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf \|u_\varepsilon^{m,n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad (1.50)$$

$$\|u_\varepsilon^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|u_\varepsilon^{m,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \quad (1.51)$$

pour $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m$, on utilise (1.47) et (1.48) :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m \right\| \leq \liminf \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^{m,n} \right\| \leq C \quad (1.52)$$

On peut alors extraire une sous suite notée encore u_ε^m tel que $u_\varepsilon^m \xrightarrow{\text{faiblement}} u^m$, et une autre $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m$ tel que $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m \xrightarrow{\text{faiblement}} \frac{\partial}{\partial t} u^m$.

On démontre maintenant que cette limite vérifie (1.30) :

De (1.44), on passe directement à limite lorsque $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$(u^m - (k + u^{m+1}))^+ = 0$$

Ce qui nous donne :

$$u^m \leq k + u^{m+1}$$

De (1.33) on a :

$$\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t} + A^m u_\varepsilon^m \leq f^m$$

Passons à la limite inf, on obtient (1.30). ■

1.6 Unicité de la solution

Dans (1.31), on prend $v = \tilde{u}$, et dans l'I.Q.V associée à \tilde{u} on prend $v = u$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u^m}{\partial t}, \tilde{u}^m - u^m \right) + a(u^m, \tilde{u}^m - u^m) \geq (f^m, \tilde{u}^m - u^m) \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial t}, u^m - \tilde{u}^m \right) + a(\tilde{u}^m, u^m - \tilde{u}^m) \geq (f^m, u^m - \tilde{u}^m) \end{array} \right.$$

Après addition :

$$\left(\frac{\partial (u^m - \tilde{u}^m)}{\partial t}, u^m - \tilde{u}^m \right) + a(u^m - \tilde{u}^m, u^m - \tilde{u}^m) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} |u - \tilde{u}|^2 + \alpha \int_0^t \|u - \tilde{u}\|^2 ds \leq 0$$

$$u \equiv \tilde{u}$$

1.7 Propriétés de la solution continue

1.7.1 Propriété de monotonie

Théorème 7 Soit u_f^m (\tilde{u}_f^m) deux solutions de (1.32) pour les seconds membres f (\tilde{f}), et soit $f \leq \tilde{f}$, alors

$$u_f^{m,0} \leq \tilde{u}_f^{m,0}, \quad \forall m \in \{1, M\}. \quad (1.53)$$

Preuve. Soit $w = (u^{m,0} - \tilde{u}^{m,0})^+$, dans (1.32), on prend $v = w$, on obtient ces deux équations :

$$\left(\frac{\partial u^{m,0}}{\partial t}, w \right) + a(u^{m,0}, w) = (f, w)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}^{m,0}}{\partial t}, w \right) + a(\tilde{u}^{m,0}, w) = (\tilde{f}, w)$$

alors

$$\left(\frac{\partial (u^{m,0} - \tilde{u}^{m,0})}{\partial t}, w \right) + a(u^m - \tilde{u}^m, w) \leq (f - \tilde{f}, w)$$

$$\frac{1}{2} |w|^2 + \alpha \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq 0$$

Donc

$$w = 0$$

■

Théorème 8 Soit u_f^m (\tilde{u}_f^m) deux solutions de (1.30) pour le second membre f (\tilde{f}), et soit $f \leq \tilde{f}$, alors

$$u_f^m \leq \tilde{u}_f^m, \quad \forall m \in \{1, M\}. \quad (1.54)$$

Preuve. On utilise la démonstration par récurrence sur la suite $u_\varepsilon^{m,n}$:

On suppose que $u_\varepsilon^{m,n-1} \leq \tilde{u}_\varepsilon^{m,n-1}, \forall m, \forall n$, aussi $w = (u_\varepsilon^{m,n} - \tilde{u}_\varepsilon^{m,n})^+$, utilisons

(1.34) et la même preuve précédente, on trouve :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |w|^2 + \alpha \|w\|^2 + S \leq 0$$

avec :

$$S = \frac{1}{\varepsilon} \left[(u^{m,n} - (k + u^{m+1,n-1}))^+ - (\tilde{u}^{m,n} - (k + \tilde{u}^{m+1,n-1}))^+, w \right]$$

On voit que :

$$S \geq 0$$

Ce qui nous donne :

$$w = 0$$

Finalement, par passage à la limite sur n et ε , on obtient le résultat. ■

1.7.2 Propriété de lipchitzianité

Théorème 9 Soit u_f^m (\tilde{u}_f^m) deux solutions de (1.30) pour les seconds membres f (\tilde{f}) et les paramètres k (\tilde{k}), on suppose qu'il existe $c \geq 0$ tel que :

$$ca_0^m \geq 1 \tag{1.55}$$

alors :

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u_f^m - u_{\tilde{f}}^m\|_\infty \leq C \left(\max_{1 \leq m \leq M} |k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \right) \tag{1.56}$$

Preuve. On pose :

$$\Phi = C \left(|k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \right)$$

Si on prend $f^m \leq \tilde{f}^m$, alors :

$$\begin{aligned} f^m &\leq \tilde{f}^m + |k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \\ f^m &\leq \tilde{f}^m + ca_0^m \left(|k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \right) \end{aligned}$$

$$f^m \leq \tilde{f}^m + a_0^m \Phi \quad (*)$$

On a aussi :

$$k \leq \tilde{k} + \Phi \quad (**)$$

De (*), (**) et d'après la monotonie de la solution :

$$u^m(f, k) \leq u^m(\tilde{f} + a_0^m \Phi, \tilde{k} + \Phi)$$

On a :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial(u^m + \Phi)}{\partial t}, v - (u^m + \Phi) \right) + a^m(u^m + \Phi, v - (u^m + \Phi)) \\ &= \left(\frac{\partial u^m}{\partial t}, v - (u^m + \Phi) \right) + a^m(u^m, v - (u^m + \Phi)) + a^m(\Phi, v - (u^m + \Phi)) \\ &= \left(\frac{\partial u^m}{\partial t}, v - u^m \right) + a^m(u^m v - u^m) + \left(\frac{\partial u^m}{\partial t}, -\Phi \right) + a^m(u^m, -\Phi) + a_0^m \Phi [v - (u^m + \Phi)] \\ &\geq (f, v - u^m) + (f, -\Phi) + (a_0^m \Phi, v - (u^m + \Phi)) \\ &\geq (f + a_0^m \Phi, v - (u^m + \Phi)). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que :

$$u^m(\tilde{f} + a_0^m \Phi, \tilde{k} + \Phi) = u^m(\tilde{f}, \tilde{k}) + \Phi$$

Alors

$$u_f^m - \tilde{u}_f^m \leq \Phi \quad , \forall m$$

Finalement

$$\max_{1 \leq m \leq M} \left\| u_f^m - u_{\tilde{f}}^m \right\|_{\infty} \leq C \left(\max_{1 \leq m \leq M} |k - \tilde{k}| + \left\| f^m - \tilde{f}^m \right\|_{\infty} \right)$$

■

1.7.3 Régularité de la solution

Théorème 10 *sous les hypothèses du théorème (4), la solution u^m de (1.30) vérifie*

$$Au^m \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (1.57)$$

Preuve. D'après (1.44), on a :

$$\left\| \frac{\partial u_{\varepsilon}^m}{\partial t} + Au_{\varepsilon}^m \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial u^m}{\partial t} + Au^m \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

et comme $\frac{\partial u^m}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, on a directement (1.57). ■

Corollaire 11 *Sous l'hypothèse (1.3), on a :*

$$u^m \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \quad (1.58)$$

Preuve. Comme $u^{m,0} \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$ (cf. [1]), l'utilisation de (1.57), nous donne le résultat. ■

1.8 L'équation HJB

Soit l'équation de Hamilton Jacobi Bellman sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{1 \leq m \leq M} \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} + A^m u - f^m \right) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (1.59)$$

Théorème 12 *La solution $U = (u^1, \dots, u^m, \dots, u^M)$ de (1.30) converge vers (u, \dots, u, \dots, u) solution de (1.59) lorsque $k \rightarrow 0$*

Preuve. Dans (1.56), on prend $f^m = \tilde{f}^m$ et $\tilde{k} = 0$, on trouve que :

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u^m - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ck \quad (1.60)$$

tel que u est la solution du problème (1.59). ■

Chapitre 2

Problème discret

2.1 Méthode des éléments finis :(semi discretisation de l'espace)

2.1.1 Introduction

Soit $(\mathfrak{S}_h)_{h>0}$ une suite de maillages triangulaire $(K_i)_{1 \leq i \leq n_h}$ de Ω qui vérifient :

$$K_i \subset \Omega \quad \text{et} \quad \Omega = \cup_{i=1}^{n_h} K_i \quad (2.1)$$

$$K_i \cap K_j = \begin{cases} \phi & \text{ou} \\ \text{un sommet commun} & \text{ou} \\ \text{une arête commune entière} \end{cases} \quad (2.2)$$

► Le paramètre h désigne le maximum des diamètre des k_i .

Les $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_h}$ sont les fonctions de base définies par :

$$\varphi_i(\omega_j) = \delta_{i,j} \text{ tel que } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\{\omega_i\}_{i=1}^{n_h}$ sont les sommets des triangles et n_h le nombre des noeuds de la triangulation.

► Soit maintenant l'opérateur de restriction :

$$r_h v(x) = \sum_{i=1}^{n_h} v(\omega_i) \varphi_i(x) \quad (2.4)$$

► et finalement l'espace V_h des éléments finis :

$$V_h = \{v \in C(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ such that } v|_K \in P_1, \forall K \in \mathfrak{S}_h\}$$

On considère le problème approché suivant :

Trouver une fonction $u_h^m : t \in [0, T] \longrightarrow u_h^m(t) \in V_h$ solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_h^m}{\partial t} + A_h^m u_h^m \leq f^m \\ u_h^m \leq k + u_h^{m+1} \\ u_h^{M+1} = u_h^1 \\ \left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t} + A_h^m u_h^m - f^m \right) (u_h^m - (k + u_h^{m+1})) = 0 \\ u_h^m(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (2.5)$$

et tel que $A_h^m = A^m(u_h^m, \cdot)$

Ci-dessous est la formulation variationnelle discrète associée au problème (2.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, v_h - u_h^m \right) + a_h^m (u_h^m, v_h - u_h^m) - (f^m, v_h - u_h^m) \geq 0, \forall v_h \in V_h \\ u_h^m \leq k + u_h^{m+1} \\ v_h \leq k + u_h^{m+1} \\ u_h^{M+1} = u_h^1 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.1.2 Existence de la solution discrète

On suppose que les matrices dont ses coefficients sont $a^m(\varphi_i, \varphi_j)$, sont des M-matrices (Voir [25]), alors grâce au principe du maximum discret, on peut introduire une étude similaire à celle du cas continu, et on pose le problème pénalisé comme suit :

Trouver $u_{h,\varepsilon}^m \in V_h$ tel qu'il vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_{h,\varepsilon}^m}{\partial t} + A^m u_{h,\varepsilon}^m + \frac{1}{\varepsilon} (u_{h,\varepsilon}^m - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1}))^+ = f^m \\ u_{h,\varepsilon}^m(x, 0) = 0 \\ u_{h,\varepsilon}^{M+1} = u_{h,\varepsilon}^1 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (2.7)$$

Pour résoudre ce système en fait construire aussi une suite $u_{h,\varepsilon}^{m,n}$ définit à partir de $u_{h,\varepsilon}^{m,n-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t} + A^m u_{h,\varepsilon}^{m,n} + \frac{1}{\varepsilon} (u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+ = f^m \\ u_{h,\varepsilon}^{m,n}(x, 0) = 0 \\ u_{h,\varepsilon}^{M+1,n} = u_{h,\varepsilon}^{1,n} \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (2.8)$$

dont $u_{h,\varepsilon}^{m,0}$ est la solution de l'équation parabolique discrète suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_h^{m,0}}{\partial t} + A^m u_h^{m,0} = f^m \\ u_h^{m,0}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad 1 \leq m \leq M \quad (2.9)$$

D'après [22] cette équation admet une solution unique.

On peut écrire le système (2.8) sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial u_h^{m,n}}{\partial t}, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) + b^m(u_h^{m,n}, v_h - u_h^{m,n}) = (g_h^m, v_h - u_h^{m,n}), \forall v_h \in V_h$$

$b^m(\cdot, \cdot) = a^m(\cdot, \cdot) + \lambda(\cdot, \cdot)$, $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$, $g_h^m = (k + u_h^{m+1,n-1} + f^m) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, d'après

[22], la solution existe, elle est unique et sous la forme :

$$u_h^{m,n} = \sum_{i=1}^{n_h} \xi_i(t) \varphi_i(x)$$

Théorème 13 *Sous les hypothèses (1.1) à (1.6), (2.1) à (2.4); la suite définie en (2.8) décroît lorsque n croît et*

$$u_{h,\varepsilon}^{m,n} \longrightarrow u_{h,\varepsilon}^m \text{ dans } \begin{cases} L^2(0, T; V_h) \text{ faible} \\ L^\infty(V_h) \text{ faible} \end{cases} \quad (2.10)$$

De plus on a

$$0 \leq u_{h,\varepsilon}^m \leq u_h^{m,0}, \forall 1 \leq m \leq M \quad (2.11)$$

Preuve. 1) $u_{h,\varepsilon}^{m,n}$ est décroissante :

Multipliant scalairement (2.9) par v_h :

$$\left(\frac{\partial u_h^{m,0}}{\partial t}, v_h \right) + a^m(u_h^{m,0}, v_h) = (f^m, v_h) \quad (2.12)$$

et (2.8) par v_h :

$$\left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, v_h \right) + a^m(u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+, v_h \right) = (f^m, v_h) \quad (2.13)$$

pour $n=1$, (2.13) devienne :

$$\left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,1}}{\partial t}, v_h \right) + a^m(u_{h,\varepsilon}^{m,1}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,1} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,0}))^+, v_h \right) = (f^m, v_h) \quad (2.14)$$

dans (2.12) et (2.14), on remplace v_h par $w_h^{m,0} = (u_h^{m,1} - u_h^{m,0})^+$, et après soustraction on trouve que :

$$\left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,1}}{\partial t} - \frac{\partial u_h^{m,0}}{\partial t}, w_h^{m,0} \right) + a^m(u_{h,\varepsilon}^{m,1} - u_h^{m,0}, w_h^{m,0}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,1} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,0}))^+, w_h^{m,0} \right) = 0$$

puisque le dernier membre est ≥ 0 , on a :

$$\left(\frac{\partial w_h^{m,0}}{\partial t}, w_h^{m,0} \right) + a^m(w_h^{m,0}, w_h^{m,0}) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_h^{m,0}(t)| + \alpha \|w_h^{m,0}(t)\|^2 \leq 0$$

$$\frac{1}{2} |w_h^{m,0}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w_h^{m,0}(s)\|^2 ds \leq 0$$

$$w_h^{m,0} \equiv 0$$

On suppose maintenant que la proposition de la décroissance est vraie pour $(n-1)$, et l'on démontre pour n .

Dans (2.8) remplaçons v_h par $w_{h,\varepsilon}^m$ une fois pour l'équation à la solution $u_{h,\varepsilon}^{m,n+1}$, et une autre pour l'équation qui à la solution $u_{h,\varepsilon}^{m,n}$, et après soustraction, on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_{h,\varepsilon}^{m,n+1} - u_{h,\varepsilon}^{m,n}), w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m(u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n+1} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n}))^+ - (u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m,n-1}))^+, w_{h,\varepsilon}^m \right) = 0 \end{aligned}$$

alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_{h,\varepsilon}^{m,n+1} - u_{h,\varepsilon}^{m,n}), w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m(u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} (w_{h,\varepsilon}^m, w_{h,\varepsilon}^m) = \frac{1}{\varepsilon} (u_{h,\varepsilon}^{m+1,n} - u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}, w_{h,\varepsilon}^m) \leq 0$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_{h,\varepsilon}^m}{\partial t}, w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (w_{h,\varepsilon}^m, w_{h,\varepsilon}^m) &\leq 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_{h,\varepsilon}^m(t)| + \alpha \|w_{h,\varepsilon}^m(t)\|^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Intégrant de 0 à t :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |w_{h,\varepsilon}^m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w_{h,\varepsilon}^m(s)\|^2 ds &\leq 0 \\ w_{h,\varepsilon}^m &\equiv 0 \end{aligned}$$

2) Convergence de $u_{h,\varepsilon}^{m,n}$:

On va montrer d'abord que $u_{h,\varepsilon}^{m,n}$ est borné :

Multipliant scalairement (2.8) par $v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) &= \\ = (f^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) & \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, u_{h,\varepsilon}^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+, u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}) \right) &= \\ \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, v_h \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+, v_h - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}) \right) &- \\ - (f^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) & \end{aligned}$$

utilisons le fait que $v_h \leq k + u_h^{m+1,n-1}$, ainsi que (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{h,\varepsilon}^{m,n}|^2 + \alpha \|u_{h,\varepsilon}^{m,n}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| (u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+ \right|^2 &\leq \left(\frac{\partial u_h^{m,n}}{\partial t}, v_h \right) + a^m (u_h^{m,n}, v_h) - \\ - (f, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) & \end{aligned}$$

après intégration :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_{h,\varepsilon}^{m,n}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_{h,\varepsilon}^{m,n}(s)\|^2 ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left| (u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+ \right|^2 \leq \\ & \leq \int_0^t \left\{ \left(\frac{\partial u_h^{m,n}}{\partial t}, v_h \right) + a^m (u_h^{m,n}, v_h) - (f, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) \right\} ds \leq C \end{aligned}$$

On déduit, alors que :

$$\|u_{h,\varepsilon}^{m,n}\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq C \quad (2.15)$$

$$\|u_{h,\varepsilon}^{m,n}\|_{L^2(0,T;V_h)} \leq C \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| (u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+ \right\|_{L^2(0,T;V_h)} \leq C \quad (2.17)$$

On peut alors extraire une sous suite notée encore $u_{h,\varepsilon}^m$ tel que :

$$u_{h,\varepsilon}^{m,n} \longrightarrow u_{h,\varepsilon}^m \text{ dans } L^\infty(\Omega_h) \text{ faiblement} \quad (2.18)$$

$$u_{h,\varepsilon}^{m,n} \longrightarrow u_{h,\varepsilon}^m \text{ dans } L^2(0,T;V_h) \text{ faiblement} \quad (2.19)$$

3) Convergence de $\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}$:

D'après [22] $\frac{\partial}{\partial t} u_h^{m,0}$ est borné, alors on démontre par récurrence.

On dérive (2.2) par rapport à t ,on pose $\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t} = w_{h,\varepsilon}^{m,n}$ et on obtient :

$$\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t} + A^m w_{h,\varepsilon}^{m,n} + \dot{A}^m u_{h,\varepsilon}^{m,n} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+ = \frac{\partial f^m}{\partial t}$$

avec :

$$\left(\dot{A}^m u_h, v_h \right) = a^m (u_h^m, v_h) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq N} \frac{a_{i,j}^m}{\partial t} \frac{\partial u_h^m}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq N} \frac{a_j^m}{\partial t} \frac{\partial u_h^m}{\partial x_j} v_h + \frac{a_0^m}{\partial t} u_h^m v_h \right) dx$$

On multiplie scalairement par $(w_{h,\varepsilon}^{m,n} - \frac{\partial}{\partial t} (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))$:

$$\left(\frac{\partial w_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, w_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) + a (w_{h,\varepsilon}^{m,n}, w_{h,\varepsilon}^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+ \right) \right|^2 =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial w_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}) \right) + a \left(w_{h,\varepsilon}^{m,n}, \frac{\partial}{\partial t} (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}) \right) - \dot{a} (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, w_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1})) \\ & + \dot{a} (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, w_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1})) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}, w_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}) \right) \end{aligned}$$

Utilisons la continuité de a et \dot{a} , aussi le produit scalaire, et le fait que $(\frac{\partial}{\partial t} u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1})$ est borné ainsi que l'inégalité de Young, on trouve que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_{h,\varepsilon}^{m,n}|^2 + c \|w_{h,\varepsilon}^{m,n}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial t} (u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+ \right|^2 \leq C$$

Ce qui nous donne :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right\| \leq C \quad (2.20)$$

\exists une sous suite notée encore $\frac{\partial}{\partial t} u_{h,\varepsilon}^{m,n}$ tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{h,\varepsilon}^{m,n} \xrightarrow{\text{faiblement}} \frac{\partial}{\partial t} u_{h,\varepsilon}^m$$

4) $u_{h,\varepsilon}^m = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{h,\varepsilon}^{m,n}$ **vérifie (2.7)** : Reprenons l'équation (2.14) suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) \\ & = (f^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) \end{aligned}$$

Utilisons le fait que les formes bilinéaires a^m sont semi continues inférieurement pour passer à la limite inf :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^m}{\partial t}, v_h - u_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^m - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1}))^+, v_h - u_{h,\varepsilon}^m \right) \leq (*) \\ & \leq (f^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^m) \end{aligned}$$

Aussi de (2.14) :

$$\left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right) -$$

$$- (f^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^{m,n}) = a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, u_{h,\varepsilon}^{m,n})$$

Passons à la limite inf :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^m}{\partial t}, v_h - u_{h,\varepsilon}^m \right) + \liminf a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^m - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1}))^+, v_h - u_{h,\varepsilon}^m \right) - \\ & - (f^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^m) \geq a^m (u_{h,\varepsilon}^m, u_{h,\varepsilon}^m) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} & \liminf a^m (u_{h,\varepsilon}^{m,n}, v_h) = \\ & = \liminf \left(- \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, v_h \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^{m,n} - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1,n-1}))^+, v_h \right) + (f^m, v_h) \right) \\ & = - \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^m}{\partial t}, v_h \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^m - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1}))^+, v_h \right) + (f^m, v_h) \\ & = a^m (u_{h,\varepsilon}^m, v_h) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^m}{\partial t}, v_h - u_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^m - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1}))^+, v_h - u_{h,\varepsilon}^m \right) \geq \\ & \hspace{25em} (**) \\ & \geq (f^m, v_h - u_{h,\varepsilon}^m) \end{aligned}$$

De (*) et (**), on a le resultat.

$$\mathbf{5) } \mathbf{0} \leq \mathbf{u}_{h,\varepsilon}^m \leq \mathbf{u}_h^{m,0}:$$

Multipliant scalairement (2.7) et (2.9) par $w_{h,\varepsilon}^m = (u_{h,\varepsilon}^m - u_h^{m,0})^+$, après additionnement on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^m}{\partial t} - \frac{\partial u_h^{m,0}}{\partial t}, w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (u_{h,\varepsilon}^m - u_h^{m,0}, w_{h,\varepsilon}^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^m - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1}))^+, w_{h,\varepsilon}^m \right) = 0 \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_{h,\varepsilon}^m - u_h^{m,0}), w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (w_{h,\varepsilon}^m, w_{h,\varepsilon}^m) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_{h,\varepsilon}^m(t)|^2 + \alpha \|w_{h,\varepsilon}^m(t)\|^2 &\leq 0 \\ \frac{1}{2} |w_{h,\varepsilon}^m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w_{h,\varepsilon}^m(s)\|^2 ds &\leq 0 \\ w_{h,\varepsilon}^m &\equiv 0 \end{aligned}$$

■

Corollaire 14 $u_{h,\varepsilon}^m$ est maximale, c'est à dire si on suppose que z_h^m est une autre solution de (2.7) avec $0 \leq z_h^m \leq u_h^{m,0}$, nous arrivons à :

$$u_{h,\varepsilon}^m \geq z_h^m \quad (2.21)$$

Preuve. Il est clair que la proposition est vraie pour $n = 0$, on suppose maintenant qu'elle est vraie pour $(n - 1)$ et l'on démontre pour n :

On multiplie scalairement (2.7) qui a pour solution z_h^m par $w_{\varepsilon,h}^m = (z_h^m - u_{h,\varepsilon}^{m,n})^+$:

$$\left(\frac{\partial z_h^m}{\partial t}, w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (z_h^m, w_{h,\varepsilon}^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((u_{h,\varepsilon}^m - (k + u_{h,\varepsilon}^{m+1}))^+, w_{h,\varepsilon}^m \right) = (f^m, w_{h,\varepsilon}^m)$$

la soustraction (2.8) de cette dernière, nous donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z_h^m}{\partial t} - \frac{\partial u_{h,\varepsilon}^{m,n}}{\partial t}, w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (z_h^m - u_{h,\varepsilon}^{m,n}, w_{h,\varepsilon}^m) + \frac{1}{\varepsilon} \left((z_h^m - (k + z_h^{m+1}))^+, w_{h,\varepsilon}^m \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} (z_h^m - u_{h,\varepsilon}^{m,n}), w_{h,\varepsilon}^m \right) + a^m (w_{h,\varepsilon}^m, w_{h,\varepsilon}^m) &\leq 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_{h,\varepsilon}^m(t)|^2 + \alpha \|w_{h,\varepsilon}^m(t)\|^2 &\leq 0 \\ \frac{1}{2} |w_{h,\varepsilon}^m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|w_{h,\varepsilon}^m(s)\|^2 ds &\leq 0 \\ w_{h,\varepsilon}^m &\equiv 0 \end{aligned}$$

Finalement passons à la limite de $u_{\varepsilon}^{m,n}$ pour obtenir le résultat. ■

Théorème 15 *On suppose qu'on a les mêmes hypothèses du théorème (13), alors lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, $u_{h,\varepsilon}^m$ converge vers u_h^m solution de (2.5).*

Preuve. De (2.15) et (2.16) :

$$\|u_{h,\varepsilon}^m\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \liminf \|u_{h,\varepsilon}^{m,n}\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq C \quad (2.22)$$

$$\|u_{h,\varepsilon}^m\|_{L^2(0,T;V_h)} \leq \liminf \|u_{h,\varepsilon}^{m,n}\|_{L^2(0,T;V_h)} \leq C \quad (2.23)$$

pour $\frac{\partial}{\partial t}u_{h,\varepsilon}^m$, on utilise (2.19) :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}u_{h,\varepsilon}^m \right\| \leq \liminf \left\| \frac{\partial}{\partial t}u_{h,\varepsilon}^{m,n} \right\| \leq C \quad (2.24)$$

On peut alors extraire une sous suite notée encore $u_{h,\varepsilon}^m$ tel que $u_{h,\varepsilon}^m \longrightarrow u_h^m$, et une autre $\frac{\partial}{\partial t}u_{h,\varepsilon}^m$ tel que $\frac{\partial}{\partial t}u_{h,\varepsilon}^m \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}u_h^m$.

On démontre maintenant que cette limite vérifie (2.5) :

De (2.17), on passe directement à limite lorsque $n \longrightarrow \infty$, $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient que :

$$(u_h^m - (k + u_h^{m+1}))^+ = 0$$

Ce qui nous donne :

$$u_h^m \leq k + u_h^{m+1}$$

De (2.7) on a :

$$\frac{\partial u_{h,\varepsilon}^m}{\partial t} + A^m u_{h,\varepsilon}^m \leq f^m$$

Passons à la limite inf on obtient (2.5). ■

2.1.3 Unicité de la solution discrète

Dans (2.5), on prend $v_h = \tilde{u}_h$, dans l'I.Q.V associée à \tilde{u} on prend $v = u$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, \tilde{u}_h^m - u_h^m \right) + a(u_h^m, \tilde{u}_h^m - u_h^m) \geq (f_h^m, \tilde{u}_h^m - u_h^m) \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}_h^m}{\partial t}, u_h^m - \tilde{u}_h^m \right) + a(\tilde{u}_h^m, u_h^m - \tilde{u}_h^m) \geq (f_h^m, u_h^m - \tilde{u}_h^m) \end{array} \right.$$

Après addition :

$$\left(\frac{\partial (u_h^m - \tilde{u}_h^m)}{\partial t}, u_h^m - \tilde{u}_h^m \right) + a(u_h^m - \tilde{u}_h^m, u_h^m - \tilde{u}_h^m) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} |u_h - \tilde{u}_h|^2 + \alpha \int_0^t \|u_h - \tilde{u}_h\|^2 ds \leq 0$$

$$u_h \equiv \tilde{u}_h$$

2.1.4 Monotonie de la solution

Théorème 16

$$\text{Soit } f \leq \tilde{f}, \text{ alors } u_h^{m,0} \leq \tilde{u}_h^{m,0}, \forall m \in \{1, M\} \quad (2.25)$$

Preuve. Soit $w_h = (u_h^{m,0} - \tilde{u}_h^{m,0})^+$. Dans (2.9), on prend $v_h = w_h$, on obtient

ces deux équations :

$$\left(\frac{\partial u_h^{m,0}}{\partial t}, w_h \right) + a(u_h^{m,0}, w_h) = (f, w_h)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_h^{m,0}}{\partial t}, w_h \right) + a(\tilde{u}_h^{m,0}, w_h) = (\tilde{f}, w_h)$$

alors

$$\left(\frac{\partial (u_h^{m,0} - \tilde{u}_h^{m,0})}{\partial t}, w_h \right) + a(u_h^{m,0} - \tilde{u}_h^{m,0}, w_h) \leq (f - \tilde{f}, w_h)$$

$$\frac{1}{2} |w_h|^2 + \alpha \int_0^t \|w_h(s)\|^2 ds \leq 0$$

$$w_h = 0$$

■

Théorème 17

Soit $f \leq \tilde{f}$, alors $u_h^m \leq \tilde{u}_h^m, \forall m \in \{1, M\}$.

Preuve. *On utilise la démonstration par récurrence sur la suite $u_{h,\varepsilon}^{m,n}$:*

On suppose que $u_{h,\varepsilon}^{m,n-1} \leq \tilde{u}_{h,\varepsilon}^{m,n-1}, \forall m, \forall n$, aussi $w_h = (u_h^{m,n} - \tilde{u}_h^{m,n})^+$, utilisons

(2.12) et la même preuve précédente, on trouve :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |w_h|^2 + \alpha \|w_h\|^2 + S_h \leq 0$$

avec :

$$S_h = \frac{1}{\varepsilon} \left[(u_h^{m,n} - (k + u_h^{m+1,n-1}))^+ - (\tilde{u}_h^{m,n} - (k + \tilde{u}_h^{m+1,n-1}))^+, w_h \right]$$

On voit que :

$$S_h \geq 0$$

Ce qui nous donne :

$$w_h = 0$$

Finalement par passage à la limite sur n et ε , on obtient le résultat. ■

2.1.5 Lipchitzianité de la solution

Théorème 18 Soit $u_{h,f}^m$ ($\tilde{u}_{h,f}^m$) solution de (1.1) pour le second membre f (\tilde{f}) et le paramètre k (\tilde{k}), on suppose qu'il existe $c \geq 0$ tel que :

$$ca_0^m \geq 1 \quad (2.27)$$

alors :

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u_{h,f}^m - u_{h,\tilde{f}}^m\|_\infty \leq C \left(\max_{1 \leq m \leq M} |k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \right) \quad (2.28)$$

Preuve. On pose :

$$\Phi = C \left(|k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \right)$$

Si on prend $f^m \leq \tilde{f}^m$, alors :

$$\begin{aligned} f^m &\leq \tilde{f}^m + |k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \\ f^m &\leq \tilde{f}^m + ca_0^m \left(|k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_\infty \right) \end{aligned}$$

$$f^m \leq \tilde{f}^m + a_0^m \Phi \quad (*)$$

On a aussi :

$$k \leq \tilde{k} + \Phi \quad (**)$$

De (*), (**) et d'après la monotonie de la solution :

$$u_h^m(f, k) \leq u_h^m(\tilde{f} + a_0^m \Phi, \tilde{k} + \Phi)$$

On a :

$$\left(\frac{\partial (u_h^m + \Phi)}{\partial t}, v_h - (u_h^m + \Phi) \right) + a^m (u_h^m + \Phi, v_h - (u_h^m + \Phi)) = \left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, v_h - (u_h^m + \Phi) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +a^m (u_h^m, v_h - (u_h^m + \Phi)) + a^m (\Phi, v_h - (u_h^m + \Phi)) \\
& = \left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, v_h - u_h^m \right) + a^m (u_h^m, v_h - u_h^m) + \left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, -\Phi \right) + a^m (u_h^m, -\Phi) + \\
& + a_0^m \Phi [v_h - (u_h^m + \Phi)] \geq (f, v_h - u_h^m) + (f, -\Phi) + (a_0^m \Phi, v_h - (u_h^m + \Phi)) \\
& \geq (f + a_0^m \Phi, v_h - (u_h^m + \Phi)).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$u_h^m(\tilde{f} + a_0^m \Phi, \tilde{k} + \Phi) = u_h^m(\tilde{f}, \tilde{k}) + \Phi$$

Alors

$$u_{h,f}^m - \tilde{u}_{h,f}^m \leq \Phi, \forall m$$

Finalement

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u_{h,f}^m - u_{h,\tilde{f}}^m\|_{\infty} \leq C \left(\max_{1 \leq m \leq M} |k - \tilde{k}| + \|f^m - \tilde{f}^m\|_{\infty} \right)$$

■

2.1.6 L'équation HJB discrète

Théorème 19 *La solution $U_h = (u_h^1, \dots, u_h^m, \dots, u_h^M)$ de (2.5) converge vers $(u_h, \dots, u_h, \dots, u_h)$*

lorsque $k \rightarrow 0$, tel que u_h est la solution de l'équation de Hamilton Jacobi Belman

discrète suivante :

$$\begin{cases} \max_{1 \leq m \leq M} \left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t} + A^m u_h - f^m \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_h(0, x) = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Preuve. Dans (2.28), on prend $f^m = \tilde{f}^m$ et $\tilde{k} = 0$, on trouve que :

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u_h^m - u_h\|_{\infty} \leq ck$$

Où u_h est la solution de (2.29). ■

2.1.7 Etude de la stabilité

Lemme 20 Soit u_h^m la solution de (2.5), alors :

$$\|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f^m\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall m \quad (2.30)$$

Preuve. Dans (2.6), on prend $v = 0$:

$$-\left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, u_h^m\right) - a_h^m(u_h^m, u_h^m) + (f^m, u_h^m) \geq 0$$

On a :

$$(f^m, u_h^m) \leq \|f^m\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$a_h^m(u_h^m, u_h^m) \geq \alpha \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

$$\left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, u_h^m\right) + \alpha \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f^m\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_h^m|^2 + \alpha \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f^m\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\frac{1}{2} |u_h^m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_h^m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^t \|f^m(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h^m(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds$$

$$\alpha \int_0^t \|u_h^m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^t \|f^m(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h^m(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds$$

Divisons cette dernière par $(t - s)$ et faisons tendre s vers t , on déduit que :

$$\alpha \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f^m\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

alors, on a le resultat :

$$\|u_h^m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f^m\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

■

2.1.8 Étude de la convergence

De (2.30), on peut extraire de u_h^m une sous suite, encore notée u_h^m , telle que

$$u_h^m \rightharpoonup u^m \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible lorsque } h \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

Il reste à voir que u^m est la solution de (1.31).

Soit l'hypothèse de la méthode de l'approximation variationnelle usuelle suivante

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in \gamma \quad (2.32)$$

telle que γ est un sous espace dense dans $H_0^1(\Omega)$.(pour plus de détaille voir [22]).

Puisque les fonctions de base sont indépendantes de t, on a

$$\frac{\partial u_h^m}{\partial t} = r_h \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} \right) \quad (2.33)$$

Reprenant la formule (2.6), telle que $v_h \rightarrow v$, dans $H_0^1(\Omega)$ fort

$$\left(\frac{\partial u_h^m}{\partial t}, v_h - u_h^m \right) + a_h^m(u_h^m, v_h - u_h^m) - (f^m, v_h - u_h^m) \geq 0$$

Utilisons (2.33), (2.32), le fait que la forme bilinéaire a est semi continue inférieurement et passons à la limite inf dans (2.6) pour obtenir (1.31).

2.2 Méthode des différences finies : (discrétisation totale)

On subdivise l'intervalle du temps $[0, T]$ en n_t intervalles où $\Delta t = \frac{T}{n_t}$ représente le pas de discrétisation, on note $u^{m,n} = u^m(t_n)$; $t_n = n \Delta t$, $0 \leq n \leq n_0$.

Pour calculer numériquement des solutions approchées du problème (1.30), on utilise le θ – schéma, le schéma le plus simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{u_h^{m,n+1} - u_h^{m,n}}{\Delta t}, v_h - u_h^{m,n+1} \right) + a^m \left(u_h^{m,n+\theta}, v_h - u_h^{m,n+1} \right) - (f_h^{m,n+1}, v_h - u_h^{m,n+1}) \geq 0 \\ u_h^{m,n+1} \leq k + u_h^{m+1,n+1} \\ v_h \leq k + u_h^{m+1,n+1} \\ u_h^{m,0} = u_{0,h}^m = 0 \\ u_h^{m,n+\theta} = u_h^{m,n} + \theta (u_h^{m,n+1} - u_h^{m,n}) \end{array} \right. \quad (2.35)$$

$\theta = 0$: schéma explicite

$\theta = 1$: schéma implicite

$\theta = \frac{1}{2}$: schéma de Crank-Nicholson.

Auparavant on notera que l'existence et l'unicité de $u_h^{m,n+1}$ sont immédiates du fait que l'opérateur $(I + \theta A_h)$ est corcif, $\forall \theta \in [0, 1]$. (cf. [30]).

N.B : Pour l'instant on va abandonner le signe m et h .

2.2.1 Etude de la stabilité

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, v_h - u^{n+1} \right) + a (u^{n+\theta}, v_h - u^{n+1}) - (f^{n+1}, v_h - u^{n+1}) \geq 0 \quad (2.36)$$

On prend $v = 0$:

$$\frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n, u^{n+1}) + a (u^{n+\theta}, u^{n+1}) \leq (f^{n+1}, u^{n+1})$$

Utilisons la relation classique :

$$(a - b, a) = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 + \frac{1}{2} |a - b|^2 \quad (2.37)$$

La formule (2.36) devient :

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(|u^{n+1}|^2 - |u^n|^2 + |u^{n+1} - u^n|^2 \right) + a(u^{n+\theta}, u^{n+1}) \leq (f^{n+1}, u^{n+1})$$

Mais :

$$\begin{aligned} a(u^{n+\theta}, u^{n+1}) &= \theta a(u^{n+1}, u^{n+1}) + (1 - \theta) a(u^n, u^{n+1}) \\ &= \theta a(u^{n+1}, u^{n+1}) + (1 - \theta) a(u^n, u^n) + (1 - \theta) a(u^n, u^{n+1} - u^n) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (f^{n+1}, u^{n+1}) &= (f^{n+1}, u^{n+\theta}) + (f^{n+1}, u^{n+1} - u^{n+\theta}) \\ &= (1 - \theta) (f^{n+1}, u^n) + \theta (f^{n+1}, u^{n+1}) + (1 - \theta) (f^{n+1}, u^{n+1} - u^n) \end{aligned}$$

On pose $a(u) = a(u, u)$, alors :

$$\begin{aligned} &|u^{n+1}|^2 - |u^n|^2 + |u^{n+1} - u^n|^2 + 2\Delta t [\theta a(u^{n+1}) + (1 - \theta) a(u^n)] \leq \\ &\leq 2\Delta t [\theta (f^{n+1}, u^{n+1}) + (1 - \theta) (f^{n+1}, u^n) + (1 - \theta) (f^{n+1}, u^{n+1} - u^n)] - \quad (2.38) \\ &\quad - 2\Delta t (1 - \theta) a(u^n, u^{n+1} - u^n) \end{aligned}$$

On a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |(f^{n+1}, u^{n+1})| &\leq \|f^{n+1}\|_* \|u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f^{n+1}\|_*^2 + \frac{1}{2} \|u^{n+1}\|^2 \quad (\text{inégalité de Young}) \\ &\leq \frac{1}{2} \|f^{n+1}\|_*^2 + \frac{1}{2\alpha} a(u^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} |(f^{n+1}, u^{n+1} - u^n)| &\leq \|f^{n+1}\|_* \|u^{n+1} - u^n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f^{n+1}\|_*^2 + \frac{1}{2} \|u^{n+1} - u^n\|^2 \end{aligned}$$

D'après [30] on suppose que :

$$\|u\| \leq S(h) |u|, \text{ tel que } S(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty \quad (2.40)$$

alors :

$$|(f^{n+1}, u^{n+1} - u^n)| \leq \frac{1}{2} \|f^{n+1}\|_*^2 + \frac{S^2(h)}{2} |u^{n+1} - u^n|^2 \quad (2.41)$$

$$|(f^{n+1}, u^n)| \leq \|f^{n+1}\|_* \|u^n\|$$

$$|(f^{n+1}, u^n)| \leq \frac{1}{2} \|f^{n+1}\|_*^2 + \frac{1}{2\alpha} a(u^n) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} |a(u^n, u^{n+1} - u^n)| &\leq M \|u^n\| \|u^{n+1} - u^n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^n\|^2 + \frac{1}{2} M^2 \|u^{n+1} - u^n\|^2 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha} a(u^n) + \frac{M^2}{2} S^2(h) |u^{n+1} - u^n|^2 \quad (2.43)$$

Remplaçant (2.39), (2.43) dans (2.38), on obtient :

$$\begin{aligned} |u^{n+1}|^2 - |u^n|^2 + [1 - (1 - \theta) S^2(h) \Delta t (1 + 2M^2)] |u^{n+1} - u^n|^2 + 2\Delta t (1 - \theta) a(u^n) + \\ + 2\Delta t \left(\theta - \frac{1}{2\alpha} \right) a(u^{n+1}) \leq [(1 - \theta) + \theta \Delta t] \|f^{n+1}\|_*^2 \end{aligned}$$

On introduit l'hypothèse de stabilité suivante :

$$1 - (1 - \theta) \Delta t (1 + 2M^2) S^2(h) \geq \beta > 0, \forall h, \forall \Delta t \quad (2.44)$$

(Cette hypothèse est évidemment sans objet si $\theta = 1$)

alors (2.38) donne de nouveau :

$$\begin{aligned} & |u^{n+1}|^2 - |u^n|^2 + \beta |u^{n+1} - u^n|^2 + 2\Delta t \alpha (1 - \theta) \|u^n\|^2 + 2\Delta t \alpha \left(\theta - \frac{1}{2\alpha} \right) \|u^{n+1}\|^2 \leq \\ & \leq [(1 - \theta) + \theta \Delta t] \|f^{n+1}\|_*^2 \end{aligned}$$

avec l'hypothèse :

$$\|f_h^{m,n}(t)\|_{V_h} \leq C \quad (2.45)$$

On somme de $n = 0$ à $n_0 \leq n_t - 1$, on obtient :

$$|u^{n_0+1}|^2 + \beta \sum_{n=0}^{n_0} |u^{n+1} - u^n|^2 + 2\alpha \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left[(1 - \theta) \|u^n\|^2 + \left(\theta - \frac{1}{2\alpha} \right) \|u^{n+1}\|^2 \right] \leq C$$

On déduit, alors que $\forall h, \forall \Delta t$ vérifiant (2.44), on a :

$$\|u_h^{m,n}\|_{V_h} \leq C \quad (2.46)$$

$$|u^{m,n+1} - u^{m,n}| \leq C \quad (2.47)$$

2.2.2 Etude de la convergence

On veut montrer que :

$$\|u_h^m - u_h^{m,n}\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \quad (2.48)$$

Pour l'instant, on va abandonner le signe m .

On a :

$$\alpha \|u_h - u_h^n\|^2 \leq (A_h u_h - A_h u_h^n, u_h - u_h^n)$$

alors il suffit de prouver que la quantité :

$$X = \int_{t_n}^T (A_h u_h - A_h u_h^n, u_h - u_h^n) dt \longrightarrow 0$$

$$X = \int_{t_n}^T (A_h u_h, u_h - u_h^n) dt - \int_{t_n}^T (A_h u_h^n, u_h) dt + \int_{t_n}^T (A_h u_h^n, u_h^n) dt \quad (2.49)$$

On peut aussi écrire $u_h^{n,\theta}$ comme suit :

$$u_h^{n,\theta} = u_h^n + (\theta - 1)(u_h^n - u_h^{n-1}) \quad (2.50)$$

Ce qui nous donne :

$$\int_{t_n}^T (A_h u_h^n, u_h^n) dt \leq \int_{t_n}^T (A_h u_h^{n,\theta}, u_h^n) dt - (\theta - 1) \int_{t_n}^T (A_h u_h^n - A_h u_h^{n-1}, u_h^n) dt \quad (2.51)$$

On a aussi de (2.6) où on remplace v_h par u_h et utilisons $u_h^{n,\theta}$:

$$\int_{t_n}^T (A_h u_h^{n,\theta}, u_h^n) dt \leq \int_{t_n}^T \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}, u_h - u_h^n \right) dt + \int_{t_n}^T (A_h u_h^{n,\theta}, u_h) dt - \int_{t_n}^T (f_h^n, u_h - u_h^n) dt \quad (2.52)$$

(2.51) et (2.52) dans (2.49) :

$$X \leq \int_{t_n}^T \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}, u_h - u_h^n \right) dt + \int_{t_n}^T (A_h u_h^{n,\theta}, u_h) dt - \int_{t_n}^T (f_h^n, u_h - u_h^n) dt -$$

$$- (\theta - 1) \int_{t_n}^T (A_h u_h^n - A_h u_h^{n-1}, u_h^n) dt - \int_{t_n}^T (A_h u_h^n, u_h) dt + \int_{t_n}^T (A_h u_h, u_h - u_h^n) dt$$

Nous utilisons encore (2.50)

$$\begin{aligned}
X &\leq \int_{t_n}^T \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} + A_h u_h - f_h^n, u_h - u_h^n \right) dt + (1 - \theta) \int_{t_n}^T (A_h u_h^n - A_h u_h^{n-1}, u_h - u_h^n) dt \\
&\leq \int_{t_n}^T \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} + A_h u_h - f_h^n, u_h - u_h^n \right) dt + \\
&\quad + (1 - \theta) \sum_{n=0}^{n_t} \Delta t (A_h (u_h^{n+1} - u_h^n), u_h - u_h^{n+1}) \\
&\leq \int_{t_n}^T \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} + A_h u_h - f_h^n, u_h - u_h^n \right) dt + \\
&\quad + (1 - \theta) \sum_{n=0}^{n_t} \Delta t M \|u_h^{n+1} - u_h^n\| \|u_h - u_h^{n+1}\| \\
&\leq \int_{t_n}^T \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} + A_h u_h - f_h^n, u_h - u_h^n \right) dt + \\
&\quad + (1 - \theta) \sum_{n=0}^{n_t} \Delta t S(h) |u_h^{n+1} - u_h^n| \|u_h - u_h^{n+1}\| \\
&\leq \int_{t_n}^T \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} + A_h u_h - f_h^n, u_h - u_h^n \right) dt + \\
&\quad + (1 - \theta) \Delta t S(h) \left(\sum_{n=0}^{n_t} |u_h^{n+1} - u_h^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{n_t} \|u_h - u_h^{n+1}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

On introduit l'hypothèse de convergence suivante :

$$(1 - \theta) \Delta t S(h) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \quad (2.53)$$

avec cette hypothèse ainsi que (3.46), (3.47) et (2.2), on obtient que :

$$X \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (2.54)$$

2.3 Théorème de l'approximation

Finalement, on peut énoncer un résultat de convergence de ces deux méthodes de semi-discrétisation et discretisation totale :

Théorème 21 Soit $U = (u^1, \dots, u^m, \dots, u^M)$ la solution du problème continu (1.30), soit $U_h^n = (u_h^{n,1}, \dots, u_h^{n,m}, \dots, u_h^{n,M})$ la solution du problème totalement discrétisé (2.35) et sous les conditions (2.44) et (2.53) , on a le résultat de l'approximation suivant :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[\max_{1 \leq m \leq M} \|u^m - u_h^{m,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right] = 0 \quad (2.55)$$

Preuve. Combinant les deux résultats de convergences des éléments finis (2.31) et des différences finis (2.48), on a directement le résultat final de l'approximation (2.55). ■

Chapitre 3

Le comportement asymptotique de la solution du système de l'I.Q.V parabolique

3.1 Le problème continu

Comme déjà mentionné dans l'introduction, l'étude suivante se trouve dans [12], tel que le comportement asymptotique en norme L^∞ de l'inéquations variationnelles et quasi-variationnelle d'évolution a été établi, (quasi-variationnelle au sens que l'obstacle est l'opérateur suivant $Mu = K + \sup_{\xi \geq 0, x+\xi \in \Omega} essu(x + \xi)$).

On considère le problème continu (1.31) et nous lui associons le schéma semi-implicite suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{u^{m,n} - u^{m,n-1}}{\Delta t} (v - u^{m,n}) dx + a^m(u^{m,n}, v - u^{m,n}) \geq (f^m, v - u^{m,n}) \\ u^{m,n} \leq k + u^{m+1,n-1} \\ u^{m,0} = u^m(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (3.1)$$

Ce qui équivale au système stationnaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^m(u^{m,n}, v - u^{m,n}) \geq (f^m + \lambda u^{m,n-1}, v - u^{m,n}) \\ u^{m,n} \leq k + u^{m+1,n-1} \\ u^{m,0} = u^m(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (3.2)$$

tel que $b(.,.) = a(.,.) + \lambda(.,.)$, $\lambda = \frac{1}{\Delta t}$, $t_n = n\Delta t$.

3.1.1 L'application du point fixe associée au problème continu

Soit l'application suivante :

$$\Pi : IL^{\infty}(\Omega) \longrightarrow IL^{\infty}(\Omega) \quad (3.3)$$

$$W \longrightarrow \xi = \Pi(W)$$

Où $:IL^{\infty}(\Omega) = (L^{\infty}(\Omega))^M$, $W = (w^1, \dots, w^m, \dots, w^M)$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m, \dots, \xi^M)$

et ξ^m est la solution du système de l'I.Q.V suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^m(\xi^m, v - \xi^m) \geq (f^m + \lambda w^m, v - \xi^m) \\ \xi^m \leq k + \xi^{m+1} \\ \xi^m(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (3.4)$$

Proposition 22 (cf. [12]) *Sous les notations et hypothèses (1.1) à (1.6), l'application définie en (3.3) est contractante; c'est à dire :*

$$\left\| \Pi(W) - \Pi(\tilde{W}) \right\|_{IL^\infty(\Omega)} \leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \left\| W - \tilde{W} \right\|_{IL^\infty(\Omega)}$$

Preuve. Soit F et \tilde{F} deux seconds membres associés respectivement au solutions w et \tilde{w} , tel que :

$$F(w^m) = f^m + \lambda w^m$$

$$F(\tilde{w}^m) = f^m + \lambda \tilde{w}^m$$

on pose :

$$\alpha = \frac{1}{\beta + \lambda} \|F(w^m) - F(\tilde{w}^m)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

alors $\xi^m + \alpha$ est la solution du système de l'I.Q.V suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^m (\xi^m + \alpha, (v + \alpha) - (\xi^m + \alpha)) \geq (F(w^m) + a_0 \alpha, (v + \alpha) - (\xi^m + \alpha)) \\ \xi^m + \alpha \leq k + \alpha + \xi^{m+1} \\ v + \alpha \leq k + \alpha + \xi^{m+1} \end{array} \right.$$

On a :

$$\begin{aligned} F(\tilde{w}^m) &\leq F(w^m) + \|F(w^m) - F(\tilde{w}^m)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq F(w^m) + \frac{a_0}{\alpha + \beta} \|F(w^m) - F(\tilde{w}^m)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq F(w^m) + a_0 \alpha \end{aligned}$$

et d'après la monotonie de la solution de (3.4), on arrive à :

$$\tilde{\xi}^m \leq \xi^m + \alpha$$

Changeant le rôle de w et \tilde{w} , on obtient que :

$$\xi^m \leq \tilde{\xi}^m + \alpha$$

alors :

$$\begin{aligned} \left\| \xi^m - \tilde{\xi}^m \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \frac{1}{\lambda + \beta} \|F(w^m) - F(\tilde{w}^m)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\lambda + \beta} \|f^m + \lambda w^m - f^m - \lambda \tilde{w}^m\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \|w^m - \tilde{w}^m\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \max_{1 \leq m \leq M} \left\| \xi^m - \tilde{\xi}^m \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \max_{1 \leq m \leq M} \|w^m - \tilde{w}^m\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \left\| \Pi(W) - \Pi(\tilde{W}) \right\|_{IL^\infty(\Omega)} &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \|W - \tilde{W}\|_{IL^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Concluons qu'il existe un unique point fixe $u^{m,\infty}$ pour l'application Π ; c'est la solution du système de l'I.Q.V continu suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^m(u^{m,\infty}, v - u^{m,\infty}) \geq (f^m + \lambda u^{m,\infty}, v - u^{m,\infty}) \\ u^{m,\infty} \leq k + u^{m+1,\infty} \\ u^{m,\infty}(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (3.5)$$

■

3.1.2 L'algorithme associé au problème continu

Partant de $u^{m,0} = 0$, on définit l'algorithme suivant :

$$u^{m,n} = \Pi(u^{m,n-1}), \quad n = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

Où $u^{m,n}$ est la solution du problème (3.2).

Proposition 23 *Nous avons l'estimation de la vitesse de convergence de l'algorithme*

(3.6) :

$$\|u^{m,n} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right)^n \|u^{m,\infty} - u^{m,0}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.7)$$

Preuve. D'après (3.6), on a :

$$u^{m,\infty} = \Pi(u^{m,\infty})$$

aussi :

$$u^{m,1} = \Pi(u^{m,0})$$

alors :

$$\|u^{m,1} - u^{m,0}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\Pi(u^{m,0}) - \Pi(u^{m,\infty})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right) \|u^{m,0} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

à l'étape n :

$$\|u^{m,n} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right)^n \|u^{m,0} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

alors :

$$\|u^{m,n+1} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\Pi(u^{m,n}) - \Pi(u^{m,\infty})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right) \|u^{m,n} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

donc :

$$\|u^{m,n+1} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right)^{n+1} \|u^{m,0} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

■

3.2 Le problème discret

Soit $u_h^{m,\infty} \in V_h$ la solution de l'I.V discète suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^m(u_h^{m,\infty}, v_h - u_h^{m,\infty}) \geq (f + \lambda u_h^{m,\infty}, v_h - u_h^{m,\infty}) \\ u_h^{m,\infty} \leq k + u_h^{m+1,\infty} \\ v_h \leq k + u_h^{m+1,\infty} \end{array} \right. , \forall v_h \in V_h, \forall m = 1, \dots, M \quad (3.8)$$

et le problème discret complet :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^m(u_h^{m,n}, v_h - u_h^{m,n}) \geq (f + \lambda u_h^{m,n-1}, v_h - u_h^{m,n}) \\ u_h^{m,n} \leq k + u_h^{m+1,n-1} \\ v_h \leq k + u_h^{m+1,n-1} \end{array} \right. , \forall v_h \in V_h, \forall m = 1, \dots, M \quad (3.9)$$

3.2.1 L'application du point fixe associé au problème discret

Soit :

$$\Pi_h : IL^\infty(\Omega) \longrightarrow V_h \quad (3.10)$$

$$W \longrightarrow \Pi_h(W) = \xi_h \quad (3.1)$$

Où ξ_h^m est la solution du système de l'I.Q.V. discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_h^m(\xi_h^m, v_h - \xi_h^m) \geq (f^m + \lambda w^m, v_h - \xi_h^m) \\ \xi_h^m \leq k + \xi_h^{m+1} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Nous obtenons comme dans le cas continu les résultats suivants :

Proposition 24 *L'application définie en (3.10) est contractante, c-à-d :*

$$\left\| \Pi_h(W) - \Pi_h(\tilde{W}) \right\|_{V_h} \leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \left\| W - \tilde{W} \right\|_{IL^\infty(\Omega)}$$

Il existe donc un unique point fixe. c'est la solution du problème (3.8).

3.2.2 L'algorithme associé au problème discret

Partant de $u_h^{m,0} = 0$, on définit l'algorithme suivant :

$$u_h^{m,n} = \Pi_h (u_h^{m,n-1}), \quad n = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

Où $u_h^{m,n}$ est la solution du problème (3.9).

Proposition 25 *Nous avons l'estimation de la vitesse de convergence de l'algorithme*

(3.12) :

$$\|u_h^{m,n} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right)^n \|u_h^{m,\infty} - u_h^{m,0}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.13)$$

Preuve. D'après (3.12), on a :

$$u_h^{m,\infty} = \Pi (u_h^{m,\infty})$$

$$u_h^{m,1} = \Pi_h (u_h^{m,0})$$

alors :

$$\|u_h^{m,1} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\Pi_h (u_h^{m,0}) - \Pi_h (u_h^{m,\infty})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right) \|u_h^{m,0} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

à l'étape n :

$$\|u_h^{m,n} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right)^n \|u_h^{m,0} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

alors :

$$\|u_h^{m,n+1} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\Pi_h (u_h^{m,n}) - \Pi_h (u_h^{m,\infty})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right) \|u_h^{m,n} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

■

3.3 Comportement asymptotique

On évalue l'écart en norme L^∞ entre $u_h^m(T, x)$ la solution discrète calculée à l'instant T et la solution $u^{m,\infty}$ du problème continu (3.5).

Théorème 26 *Sous les hypothèses précédentes, nous avons :*

$$\|u_h^m(T, x) - u^{m,\infty}(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left[h^2 |\log h|^2 + \left(\frac{1}{1 + \Delta t \cdot \beta} \right)^N \right] \quad (3.14)$$

Où C est une constante indépendante de h , Δt .

Preuve. On a :

$$u_h^{m,N}(x) = u_h^m(T, x)$$

alors :

$$\begin{aligned} \|u_h^m(T, x) - u^{m,\infty}(x)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|u_h^{m,N}(x) - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_h^{m,N} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} + \\ &+ \|u_h^{m,\infty} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

D'après [19], on a :

$$\|u_h^{m,\infty} - u^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h|^2$$

et d'après (3.13), on a :

$$\|u_h^{m,N} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_h^{m,n} - u_h^{m,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta} \right)^N \|u^{m,\infty} - u^{m,0}\|$$

Comme $\lambda = \frac{1}{\Delta t}$, nous obtenons :

$$\|u_h^m(T, x) - u^{m,\infty}(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left[h^2 |\log h|^2 + \left(\frac{1}{1 + \Delta t \cdot \beta} \right)^N \right].$$

■

Chapitre 4

Localisation de la frontière libre

4.1 le cas stationnaire

4.1.1 Le problème continu

Soit les fonctions $a_{ij}^m(x)$ dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $a_i^m(x)$, $a_0^m(x)$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ tel que :

$$\sum_{i,j} a_{ij}^m(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2; \quad (x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^N, \gamma > 0) \quad (4.1)$$

$$a_0^m(x) \geq \beta > 0 \quad (4.2)$$

Nous définissons les formes bilinéaires pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$.

$$a^m(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k} a_{ij}^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_j a_i^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0^m(x) uv \right) dx \quad (4.3)$$

Donnons aussi les seconds membres $f^m(\cdot)$ tel que :

$$f^m \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ et } f^m \geq 0; \forall m = 1, \dots, M \quad (4.4)$$

Posons l'espace $(L^\infty(\Omega))^M = \{W = (w^1, \dots, w^m, \dots, w^M) \text{ tel que } w^m \in L^\infty(\Omega)\}$,

menu de la norme suivante :

$$\|W\|_\infty = \max_{1 \leq m \leq M} \|w^m\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (4.5)$$

Reprenons le problème stationnaire (0.2), associé au système parabolique (1.30)

Trouver $U = (u^1, \dots, u^m, \dots, u^M) \in (H_0^1(\Omega))^M$, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m(u^m, v - u^m) - (f^m, v - u^m) \geq 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u^m \leq k + u^{m+1} \\ v \leq k + u^{m+1} \\ u^{M+1} = u^1 \end{array} \right. , \forall 1 \leq m \leq M \quad (4.6)$$

Théorème 27 (cf. [13,14]) : *Sous les hypoyhèses (4.1) à (4.5) la solution u^m du problème (4.6) existe, elle est unique et appartient à $C(\bar{\Omega}) \cap W^{2,p}(\Omega)$; $\forall 2 \leq p < \infty$.*

4.1.2 Le problème discret

Sous les notations (2.1) à (2.4) et sous le principe de maximum discret ([25]), le problème discret analogue au selui continu se pose comme suit : Trouver $U_h = (u_h^1, \dots, u_h^m, \dots, u_h^M) \in (V_h)^M$ Sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_h^m (u_h^m, v_h - u_h^m) - (f^m, v_h - u_h^m) \geq 0, \forall v_h \in V_h \\ u_h^m \leq k + u_h^{m+1} \\ v_h \leq k + u_h^{m+1} \\ u_h^{M+1} = u_h^1 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Théorème 28 (cf. [13,14]) : *Le système (4.7), admet une seule solution.*

Dans [13] une évaluation de l'erreur optimale est établie de la combinaison de la convergence géométrique des deux schemas iteratives continu et discret de type Benssousan-Lions, avec l'erreur connue des inéquations variationnelles elliptiques.

Théorème 29 (cf. [19]) : *Soit U la solution du problème continu (4.6), et soit U_h la solution du problème discret (4.7), alors on a l'estimation de l'erreur suivante :*

$$\|U - U_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (4.8)$$

4.1.3 Approximation de la zone de contact

Dans l'application c'est important de localiser la partie où les contraintes sont saturées et la partie où le système est vérifié, alors suivant [31], nous définissons la frontière libre continue comme suit :

$$S^m = \partial \{x \in \Omega, \text{ such that } u^m(x) < k + u^{m+1}(x)\} \cap \Omega \quad (4.9)$$

et l'autre l'approximative comme suit :

$$S_h^m = \partial \{x \in \Omega, \text{ such that } u_h^m(x) < r_h (k + u^{m+1}(x)) + Ch^2 |\log h|^2\} \cap \Omega \quad (4.10)$$

Pour reprendre la démonstration de [31], il suffit de considérer la fonction $w^m = (k + u^{m+1}) - u^m$, et le problème translaté correspondant avec terme non-homogène $\tilde{f}^m = (k + A^m u^{m+1}) - f^m$ est le suivant :

$$\begin{cases} A^m w^m \geq \tilde{f}^m \\ w^m \geq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

L'hypothèse (4.4) entraîne, que la fonction u^m solution de (4.6) à toutes les dérivées secondes bornées dans Ω , c'est-à-dire :

$$w^m \in C^{1,1}(\Omega) \quad (4.12)$$

Soit K un compact de Ω , nous assumons la propriété de non-dégénérescence de la solution continue u^m ([31]) :

$$(\{0 < w^m < \varepsilon^\alpha\} \cap K) \subset \mathcal{L}_\varepsilon(S^m \cap K) \quad (4.13)$$

où

$$\mathcal{L}_\varepsilon(S^m \cap K) = \{x \in \Omega_0 : d(x, S^m \cap K) < C_K \varepsilon\} \quad (4.14)$$

$d(x, S^m \cap K)$ est la distance entre x et S^m , et C_K une constante dépendante de K .

Corollaire 30 *Sous l'hypothèse (4.13), $S_h^m \cap K$ satisfaire :*

$$S_h^m \cap K \subseteq \mathcal{L}_{(3Ch^2|\log h|^3)^{\frac{1}{\alpha}}}(S^m \cap K)$$

Preuve. Selon le théorème (4.3), nous reprenons la démonstration de [31] :

Soit $x \in S_h^m \cap k$, alors

$$u_h^m(x, t) = r_h(k + u^{m+1}(x, t)) + Ch^2 |\log h|^3$$

utilisant l'estimation (4.8), nous obtenons :

$$-u^m(x) < Ch^2 |\log h|^3 - u_h^m$$

$$-u^m(x) + (k + u^{m+1}(x)) \leq (k + u^{m+1}(x)) - r_h(k + u^{m+1}(x))$$

$$0 < w^m < Ch^2 |\log h|^3$$

ce qui prouve le théorème si on prend $\varepsilon = (Ch^2 |\log h|^3)^{\frac{1}{\alpha}}$.

$$S_h^m \cap K \subseteq \mathcal{L}_{(Ch^2 |\log h|^2)^{\frac{1}{\alpha}}} (S^m \cap K)$$

■

4.2 Comportement asymptotique de la frontière libre (Extension)

Considérons maintenant le cas particulier que les A^m sont seulement le Laplacien. Compte tenu de l'estimation (3.14), on peut dire que la solution $u^m(x, t)$ du système de l'I.Q.V parabolique (1.30) converge, lorsque $t \rightarrow \infty$, vers $u^{m, \infty} \equiv u^m$; la solution du problème stationnaire (4.6).

En effet, il suffit comme le cas stationnaire de considérer les fonctions :

$$w^{m, \infty} = (k + u^{m+1, \infty}) - u^{m, \infty}$$

$$\tilde{w}^m(x, t) = (k + u^{m+1}(x, t)) - u^m(x, t)$$

et le problème translaté correspondant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{w}^m}{\partial t} + A^m \tilde{w}^m \geq \hat{f}^m \\ w^m \geq 0 \end{cases}$$

avec le terme totalement homogène :

$$\hat{f}^m = f^{m+1} - f^m$$

Supposons aussi que :

$$f^m(t) \rightarrow f^{m,\infty}, \quad f_t^m(t) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^\infty(\Omega_0), \quad \forall 1 \leq m \leq M \quad (4.15)$$

et

$$f^{m,\infty}(x) \in C^{1,\mu}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \mu \leq 1, \quad \forall 1 \leq m \leq M \quad (4.16)$$

$$f^{m,\infty} \leq -\nu < 0 \quad (4.17)$$

Posons

$$E(t) = \{x \in \bar{\Omega} : u^m(x, t) = k + u^{m+1}(x, t)\} \quad (4.18)$$

$$E_\infty = \{x \in \bar{\Omega} : u^{m,\infty}(x) = k + u^{m+1,\infty}(x)\} \quad (4.19)$$

et considérons les respectives frontières libres :

$$\mathcal{L}(t) = \partial E(t) \cap \Omega; \quad \mathcal{L}_\infty = \partial E_\infty \cap \Omega \quad (4.20)$$

Pour exclure le cas trivial on suppose qu'il existe t_1 tel que $\mathcal{L}(t) \neq \emptyset$ pour $t \geq t_1$.

Théorème 31 *Sous les hypothèses précédentes en particulier (4.16), on a :*

$$E(t) \rightarrow E_\infty, \mathcal{L}(t) \rightarrow \mathcal{L}_\infty \quad \text{au sens de Hausdorff, lorsque } t \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Chapitre 5

Expérimentation numérique

Exemple 32 (*L'équation de transport*)

Considérer l'équation HJB correspondente aux équations du transport

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \max(f_-(x) u_x, f_+(x) u_x) = 0 \quad t \geq 0, x \in (x \min, x \max) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

Quand la fonction croit, c'est le transport avec la vitesse maximale $f_+(x)$, et dans les zones où la fonction décroît, c'est le transport avec la vitesse minimale $f_-(x)$ (voir [21]), après le système à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial t} + f_-(x) u_x^1 \leq 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} + f_+(x) u_x^2 \leq 0 \\ u^1 \leq k + u^2 \\ u^2 \leq k + u^1 \\ u^1(x, 0) = u^2(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in (x \min, x \max) \end{array} \right.$$

On prend $f_- = f_+ = -1$, $(x \min, x \max) = (-2, +2)$, $k = 0.1$ avec la condition initiale

$u_0(x)$ définit comme suit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.64 & \text{si } x \in [0.2, 0.6] \\ \max(1 - x^2, 0) & \text{otherwise} \end{cases}$$

La solution est périodique avec la période égale à 4 et elle coïncide avec la condition initiale quand $t = 12$ (3 périodes).

Dans la figure (5.1), nous proposons une comparaison entre la solution exacte u , et la solution approximative u_h où $t = 12$, $h = 1/5$, $\theta = 1$, et $\Delta t = 1/100$. La figure (5.2) montre la convergence des trois types de θ -schéma.

REFERENCES

- [1] **A Bensoussan et J. L. Lions**, *Application des inéquations variationnelles en controle stochastique*, DUNOD , Paris, (1978).
- [2] **A Bensoussan et J. L. Lions**, *Controle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles d'évolution*, .C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276 , Série A- 1333.(14 mai 1973)
- [3] **B. Désprès and F. Lagoutière**, *Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics*. J.Sci. Comput., 16 :479-524, 2001.
- [4] **C. W. Shu and S. Osher**, *Ecient implementation of essentially non oscillatory shock capturing schemes*. Journal of computational physics, 77 :439-471, (1988).
- [5] **C. W. Shu and S. Osher**, *Ecient implementation of essentially non oscillatory shock capturing schemes*, ii. Journal of computational physics, 83 :32-78, (1989).
- [6] **F. Lagoutière**, *Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes fluides compressibles a plusieurs constituants*. Thèse de doctorat, Université Paris 6. (2000).
- [7] **F. Mignot et J. P. Puel**, *Solution maximum de certaines inéquations d'évolution paraboliques, et inéquations quasi variationnelles parabolique*.C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280 , Série A- 259, (3 février 1975).
- [8] **G. Chen and Z. Dai**, *Modified domain decomposition method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. 31(12), 1585–1592 DOI 10.1007/s10483-010-1386-8, (2010).

- [9] **H. PHAM**, *Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman*, Laboratoire de Probabilités et Modèle Aléatoires, CNRS, UMR 7599, Université Paris 7, 2007.
- [10] **J. A. Sethian**, *Level Set Methods and Fast Marching Methods. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science*. Cambridge university press, (1999).
- [11] **L. C. Evans and A. Friedman**, *Optimal stochastic switching and the dirichlet problem for the bellman equation*, American Mathematical society, Volume 253, September (1979).
- [12] **M. Boulbrachene**, *Sur Questions d'Approximations de Problèmes a Frontière Libre de Sous-Domaines et d'Erreurs d'Arrondi*, Thèse de Doctora, université de Franche-comté, (1987).
- [13] **M. Boulbrachene and M. Haiour**, *The finite element approximation of Hamilton Jacobi Bellman equations*. Computers and Mathematics with application 41, 993-1007, (2001)
- [14] **M. Boulbrachene, M. Haiour and B. Chentouf**, *On a noncoercive system of quasi-variational inequalities related to sthochastic control problem*. JIPAM, vol 3, Issue 2, Article 30, (2002).
- [15] **M. Falcone**, *A numerical approach to the infnite horizon problem of deterministic control theory*. Applied Mathematics and Optimization, 15 :1-13, (1987).
- [16] **M. Falcone and R. Ferretti**, *Semi-Lagrangian schemes for Hamilton-Jacobi equations, discrete representation formulae and Godunov methods*. Journal of Computational Physics, 175 :559-575, (2002).
- [17] **M. Falcone and T. Giorgi**, *An approximation scheme for evolutive Ha-*

milton Jacobi equations. Stochastic analysis, Control, Optimization and applications, pages 289-303, (1999).

[18] **N. Megdich**, *Méthodes Anti-dissipatives pour les Equations Hamilton Jacobi Bellman*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, (2008).

[19] **N. Yahia-Boughiout**, *Approximation par éléments finis d'un système d'inéquations-quasi- variationnelles elliptique*, Thèse de Mgister Annaba (2006).

[20] **O. Bokanowski and H. Zidani**, *Anti-dissipative schemes for advection and application to Hamilton Jacobi Bellman equations*. J. Sci. Comp., 30(1) :1-33, (2007).

[21] **O. Bokanowski, N. Forcadel et H. Zidani**, *L1-error estimates for numerical approximations of Hamilton-Jacobi-Bellman equations in dimension 1*, inria-00267644, version 1 - 28 Mar (2008).

[22] **P.A.Raviat et J.M.Thomas**, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, DUNOD (1993).

[23] **P. C. Dumont**, *Sur les inéquations variationnelles a opérateur non coercif*, M²AN. vol. 19, n°2,p. 195 à 212, (1985)

[24] **P. C. Dumont**, *Sur l'analyse numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman*, Math. Meth. in Appl. Sci., (1987).

[25] **P. G. Ciarlet and P. A. Raviat**, *Maximum principle and uniform convergence for the finite element method*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 2, 1-20, (1973).

[26] **P. L. Lions**, *Résolution des problèmes généraux de Bellman-Dirichlet*. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 287, série A, p. 747-750; (1978)

[27] **P. L. Lions et B. Mercier**, *Approximation numérique des équations de*

Hamilton-Jacobi-Bellman, R.A.I.R.O. Analyse numérique, vol. 14, n°4, p. 369-393, (1980).

[28] **P. Oliver**, *Numerical Simulation of American Options*, Diplomarbeit in Wirtschaftsmathematik, Universität Ulm, Sciendo. Docendo. Curando. (2004).

[29] **P. K. Sweby**, *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 21(5) :995-1011, (1984).

[30] **R. Glowinski** et **J-L-Lions** et **R-Trémolières**, *Analyse numérique des équations variationnelles*, DUNOD , Paris.

[31] **R. H. Nochetto**, *A note on the approximation of free boundaries by finite element methods*, RAIRA - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, n°25, p. 355-368, (1986).

[32] **S. A. Belbas** and **I. D. Mayergoz**, *Application des méthodes du point fixe aux équation de Hamilton Jacobi Bellman discrète et des inéquations quasi-variationnelles discrète*, C. R. Acad. Sc. Paris, Serie 17, (1984).

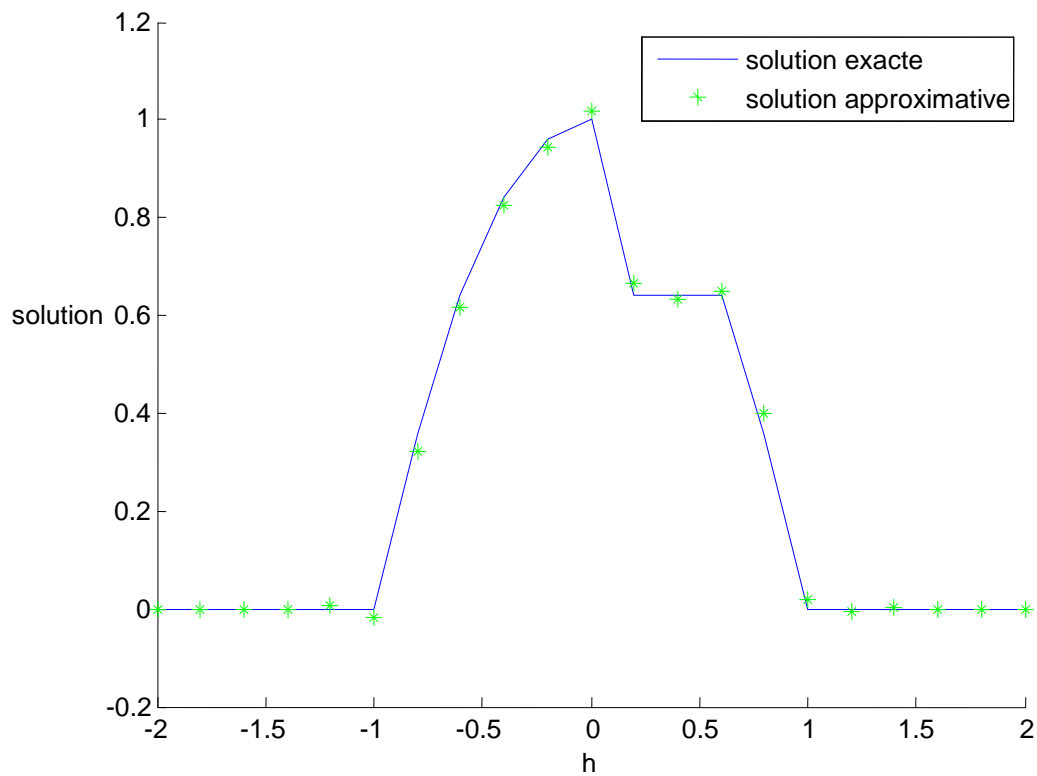


Figure 5.1 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approximative

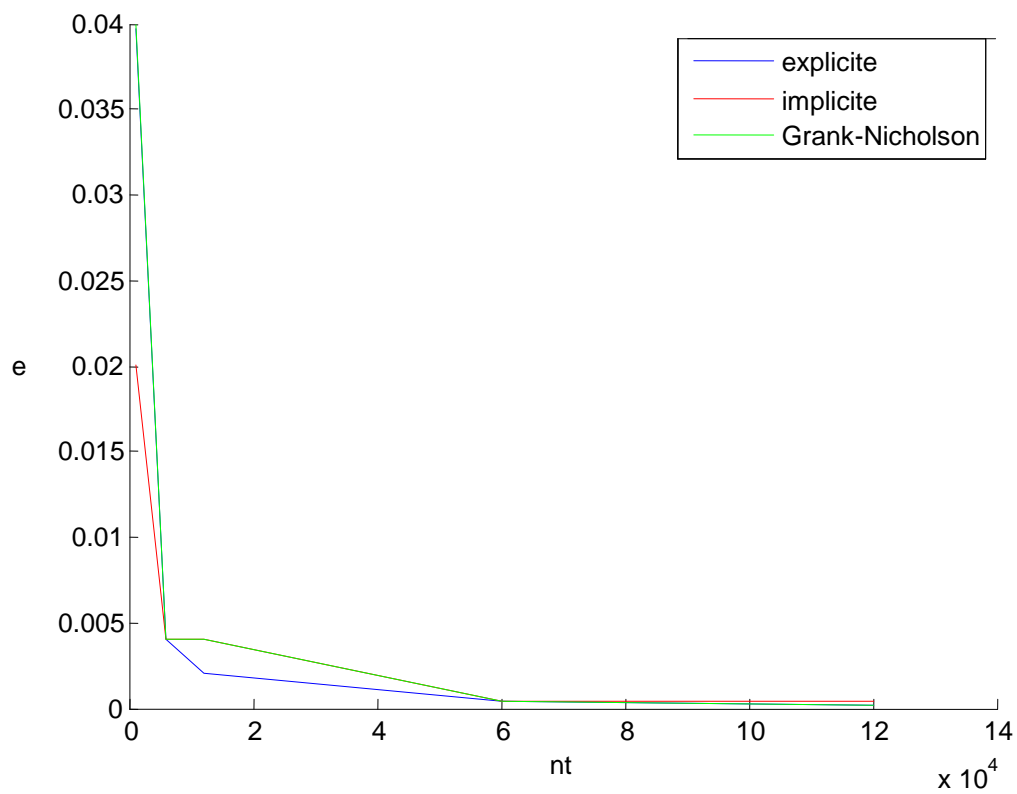


Figure 5.2 : Evaluation de l'erreur des différents schémas