

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR- ANNABA

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIORAT

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



جامعة باجي مختار- عنابة  
كلية علوم الهندسة  
قسم الإلكترونيك

## THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

**Doctorat en Sciences**

Thème

**Diagnostic des systèmes non linéaires  
à base d'observateurs**

Option

Automatique

Par

**DJEDDI Abdelghani**

**Soutenue le 16/02/2017**

**Devant le jury**

Président	: ABBASSI H.Ahmed	Pr.	Université Badji Mokhtar Annaba
Rapporteur	: HARKAT Med Faouzi	Pr.	Université Badji Mokhtar Annaba
Examineur	: RAMDANI Messaoud	Pr.	Université Badji Mokhtar Annaba
Examineur	: LACHOURI Abderrazak	Pr.	Université 20 août 1955 Skikda
Examineur	: AOUAOUDA Sabrina	MCA	Université M. C. M. Souk Ahras
Examineur	: KOUADRI Abdelmalek	MCA	Université M. B. Boumerdes



# Remerciements

Louange à Allah le tout puissant qui m'a accordé la foi, le courage et la patience pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement le Professeur Harkat Mohamed Faouzi, pour la confiance qu'il m'a témoigné en acceptant la direction scientifique de mes travaux. Je lui suis reconnaissant de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme et de son efficacité certain que je n'oublierai jamais. Soyez assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude.

Je suis très honoré à remercier de la présence à mon jury de thèse et je tiens à remercier :

Professeur ABBASSI Hadj Ahmed, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être le président de mon jury de thèse. Je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Monsieur RAMDANI Messaoud, professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail.

Monsieur LACHOURI Abderrazak, professeur à l'université 20 août 1955 Skikda, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail.

Madame AOUAOUDA Sabrina, maître de conférences classe (A) à l'université Mohamed Cherif Messaadia Souk Ahras, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail.

Monsieur KOUADRI Abdelmalek, maître de conférences classe (A) à l'université M'hamed Bougara Boumerdes, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail.

Monsieur SOUFI Youcef, maître de conférences classe (A) à l'université l'université de Tébessa, pour l'intérêt qu'il a manifesté en participant en qualité de membre invité à ce jury.

Mes remerciements vont aussi à toute ma famille et à tous mes amis pour leur aide et leur soutien.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte et état de l'art sur le Diagnostic des systèmes</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Terminologie propre au diagnostic . . . . .	6
1.3	Structures des défauts . . . . .	8
1.3.1	Différents types des défauts . . . . .	8
1.3.2	Nature des défauts . . . . .	9
1.3.3	Evolution des défauts . . . . .	10
1.4	Redondance et diagnostic . . . . .	11
1.4.1	Redondance d'information . . . . .	11
1.4.2	Redondance physique . . . . .	11
1.4.3	Redondance analytique . . . . .	12
1.5	Différentes approches de diagnostic . . . . .	12
1.5.1	Méthodes de diagnostic sans modèles . . . . .	13
1.5.2	Méthodes de diagnostic avec modèle . . . . .	15
1.6	Génération de résidus et diagnostic . . . . .	18
1.6.1	Méthodes d'évaluation des résidus . . . . .	18
1.6.2	Méthodes de localisation de défauts . . . . .	21
1.6.3	Méthodes d'identification de défauts . . . . .	24
1.7	Critères de performance d'un système de diagnostic . . . . .	25
1.8	Conclusion . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Estimation d'état des systèmes non linéaires</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	28
2.2	Généralités sur les observateurs non linéaires . . . . .	29
2.3	Observabilité des systèmes non linéaires . . . . .	30
2.4	Conception d'observateurs d'état des systèmes non linéaires . . . . .	32
2.4.1	Observateur à entrées inconnues . . . . .	32
2.4.2	Observateur de Luenberger étendu . . . . .	32
2.4.3	Filtre de Kalman Etendu (EKF) . . . . .	32
2.4.4	Observateurs basés sur les fonctions de Lyapunov : observateurs de Thau . . . . .	33
2.4.5	Observateur grand gain . . . . .	34
2.4.6	Observateur à mode glissant . . . . .	35
2.4.7	Observateur adaptatif . . . . .	35
2.5	Représentation multi-modèle . . . . .	36
2.5.1	Modèle flou de type Takagi-Sugeno . . . . .	38

2.5.2	Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS) . . . . .	42
2.5.3	Fonctions de Lyapunov . . . . .	56
2.6	Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno . . . . .	58
2.7	Observabilité des modèles TS . . . . .	59
2.8	Reconstruction d'état des systèmes de Takagi-Sugeno . . . . .	59
2.8.1	Variables de décision mesurables (VDM) . . . . .	60
2.8.2	Variables de décision non mesurables (VDNM) . . . . .	62
2.9	Conclusion . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Augmentation du système TS et estimation d'état</b> . . . . .	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Natures des incertitudes . . . . .	67
3.2.1	Incertaines structurées . . . . .	67
3.2.2	Incertaines non structurées . . . . .	68
3.3	Estimation d'état du système TS à VDM incertain en présence d'entrées inconnues . . . . .	68
3.4	Estimation d'état du système TS à VDNM incertain en présence d'entrées inconnues . . . . .	75
3.5	Principe d'augmentation d'état et synthèse d'observateur à entrées inconnues	80
3.6	Augmentation du système à VDM et estimation d'état . . . . .	84
3.7	Augmentation partielle du système et synthèse d'observateur à entrées in- connues . . . . .	87
3.7.1	Augmentation partielle du système à VDM et estimation d'état . . . . .	87
3.7.2	Augmentation partielle du système TS à VDNM et estimation d'état . . . . .	91
3.7.3	Construction de l'observateur par l'approche $L_2$ . . . . .	94
3.8	Estimation des entrées inconnues . . . . .	96
3.9	Augmentation du système TS et synthèse d'observateurs PI . . . . .	99
3.9.1	Variables de décision mesurables . . . . .	99
3.9.2	Variables de décision non mesurables VDNM . . . . .	103
3.10	Conclusion . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Diagnostic de défauts du système hydraulique à trois cuves</b> . . . . .	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	116
4.2	Diagnostic de défauts du système TS par observateur à entrées inconnues à VDNM . . . . .	116
4.2.1	Différentes étapes de diagnostic du système TS . . . . .	117
4.2.2	Défauts actionneurs . . . . .	118
4.2.3	Défauts capteurs . . . . .	119
4.3	Diagnostic de défauts du système TS par observateur PI à entrées inconnues à VDNM . . . . .	125
4.4	Description du système hydraulique à trois cuves . . . . .	126
4.5	Obtention de la représentation Multi-modèle du système à trois cuves . . . . .	127
4.5.1	Ecriture du système sous forme Q-LPV . . . . .	127
4.5.2	Identification des non-linéarités . . . . .	128
4.5.3	Construction des fonctions de pondération . . . . .	128
4.5.4	Définition des fonctions d'appartenance . . . . .	129
4.5.5	Réécriture du système sous forme de Multi-modèle de TS . . . . .	129

---

4.6	Diagnostic de défauts capteurs du système à trois cuves par la reconstruction	130
4.7	Diagnostic des défauts du système à trois cuves par observateur PI à entrées inconnues à VDNM . . . . .	133
4.7.1	Défauts actionneurs . . . . .	133
4.7.2	Défauts capteurs . . . . .	136
4.8	Conclusion . . . . .	139
<b>A</b>	<b>Etude de la stabilité</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Transformations matricielles</b>	<b>145</b>



# Table des figures

1.1	Défauts d'un processus physique . . . . .	8
1.2	Nature des défauts . . . . .	9
1.3	Evolution temporelle des défauts . . . . .	10
1.4	Architecteur de redondance matérielle et analytique . . . . .	12
1.5	Représentation schématique du processus de détection de défaut à base de modèle . . . . .	15
1.6	Schéma de principe de générateur de résidu à base de l'espace de parité . .	16
1.7	Schéma de principe de générateur de résidu à base de l'estimation paramétrique . . . . .	17
1.8	Schéma de principe de générateur de résidus à base d'observateur . . . . .	18
1.9	Evaluation des résidus . . . . .	19
1.10	Observateurs GOS pour la détection des défauts actionneurs . . . . .	22
1.11	Observateurs GOS pour la détection des défauts capteurs . . . . .	22
1.12	Observateurs DOS pour la détection des défauts actionneurs . . . . .	23
1.13	Observateurs DOS pour la détection des défauts capteurs. . . . .	24
2.1	Secteur de non linéarité global . . . . .	44
2.2	Secteur de non linéarité local . . . . .	45
2.3	Fonctions d'appartenance . . . . .	48
2.4	Fonctions d'appartenance . . . . .	48
2.5	Etats système non linéaire et états système TS . . . . .	55
2.6	Fonctions d'activation du système TS . . . . .	55
2.7	Région du plan complexe . . . . .	61
3.1	Système à trois cuves . . . . .	73
3.2	erreur d'estimation des états . . . . .	75
3.3	États du système et leurs estimés . . . . .	98
3.4	Erreurs d'estimation d'état . . . . .	99
3.5	Fonctions d'activation . . . . .	99
3.6	Fonctions d'activation . . . . .	112
3.7	États du système et leurs estimés . . . . .	112
3.8	Evolution de l'erreur d'estimation d'état . . . . .	113
4.1	Erreurs d'estimation des états du système à trois cuves . . . . .	130
4.2	Evolution des résidus et des résidus $SPE$ et $\overline{SPE}$ . . . . .	131
4.3	Evolution des résidus et des résidus filtrés avec leurs $SPE$ et $\overline{SPE}$ en présence de défauts . . . . .	132

4.4	Evolution du $SPE$ après reconstruction des variables . . . . .	132
4.5	Résidus en présence des défauts actionneurs . . . . .	135
4.6	Entrées estimées sans défaut . . . . .	135
4.7	Résidus en présence des défauts capteurs . . . . .	138

# Liste des tableaux

1.1	Signatures théoriques des défauts (Résidus généralisés) . . . . .	23
1.2	Signatures théoriques des défauts (Résidus dédiés) . . . . .	24
4.1	Signatures des défauts Capteurs . . . . .	125
4.2	Matrice expérimentale de signature de défauts capteurs . . . . .	133
4.3	Matrice expérimentale de signature de défauts actionneurs . . . . .	135
4.4	Matrice expérimentale de signature de défauts capteurs . . . . .	138



# Notations et Abréviations

## Acronymes

LMI(s)	Inégalité(s) matricielle(s) linéaire(s) (Linear Matrix Inequality)
LPV	Linéaires à paramètres variants
Q-LPV	Quasi-linéaire à paramètres variables
LTI	Linéaire à temps invariant
TPC	Transformation polytopique convexe
IO	Entrée/Sortie (Input/Output)
MM(s)	Multimodèle(s)
TS à VDM	Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables
TS à VDNM	Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables
UIO	Observateur à entrées inconnues (Unknown Input Observer)
PI	Proportionnel Intégral
PMI	Proportionnel Multi Intégral
EKF	Filtre de Kalman Etendu (Extended Kalman Filter)
SPE	Erreur quadratique d'estimation (squared prediction error)
EWMA	Moyenne glissante pondérée de manière exponentielle (Exponentially Weighted Moving Average)
SS	Représentation d'état (state space)
SWE	(Squared Weighted Error)
DOS	Structure d'observateur dédié (Dedicated Observer Scheme)
GOS	Structure d'observateur Généralisé (Generalized Observer Scheme)
FDI	Détection et isolation de défaut (Faultdetection and Isolation)

## Ensembles

$R$	Ensemble de nombre réels
$R^+$	Ensemble de nombre réels positifs
$R^n$	Espace réel Euclidien de dimension $n$

### Vecteurs et matrices

$I_n$	Matrice identité de dimension $n$
$Q > 0$	Matrice symétrique, définie positive
$Q^T$	Transposée de $Q$
$Q^{-1}$	Inverse de $Q$
$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole (*) représente $M_{12}^T$
$diag(M_1, \dots, M_l)$	Matrice bloc diagonale = $\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_l \end{bmatrix}$

# Introduction générale

Les systèmes de contrôle modernes sont devenus de plus en plus complexes et les algorithmes de contrôle de plus en plus sophistiqués. Par conséquent, la demande de meilleures performances, de qualité, de disponibilité, de coût, d'efficacité, de fiabilité, de sécurité d'exploitation et de protection de l'environnement sont d'une importance majeure. Ces questions ne sont pas seulement importantes pour les systèmes de sécurité critiques comme le nucléaire, l'aéronautique ou le spatiale, mais aussi pour la majorité des autres systèmes industriels.

Le cas des systèmes critiques de sécurité, le diagnostic de défaut a reçu plus d'attention. Un défaut doit être diagnostiqué le plus tôt possible afin d'empêcher le système de fonctionner avec un niveau de dégradation des performances.

Avec la demande croissante pour de meilleures performances, de sécurité et de fiabilité des systèmes dynamiques, le diagnostic de défaut a reçu de plus en plus d'attention. La stratégie basée sur l'observateur est l'une des domaines de recherche actifs, qui est largement utilisée pour construire des systèmes de détection de défaut à base de modèles pour les processus techniques qui peuvent être bien modélisés comme des systèmes linéaires invariant. Le diagnostic des défauts pour le système non linéaire est aussi un domaine de recherche actif.

Dans la procédure de surveillance des systèmes, l'estimation de l'état permet de générer la redondance analytique. Elle sert à produire des résidus qui donnent une image sur la défaillance du système à partir d'un test de cohérence entre des signaux extraits du système qui informent sur son comportement réel et des signaux estimés qui traduisent le comportement attendu. Tout écart non désiré entre ces signaux signifie la présence éventuelle de défauts affectant le fonctionnement du système.

La détection de défaut à base d'observateur comprend deux étapes, la génération et l'évaluation des résidus. Les problèmes de génération et d'évaluation de résidus des systèmes avec la présence de perturbations ont été largement étudiés séparément.

La stratégie d'estimation d'état proposée dans cette thèse est basée sur une technique de modélisation par approche multi-modèle de Takagi-Sugeno à variable de décision non mesurable (VDNM). Son principe s'appuie sur la transformation de la représentation du système par le fractionnement de son espace de fonctionnement en un nombre fini de zones de fonctionnement.

Récemment, des résultats fructueux de l'application des techniques de modélisation floue de Takagi-Sugeno (T-S) pour résoudre les problèmes de détection et d'isolation de défaut des systèmes non-linéaires ont été atteints.

Avec le modèle TS, un système dynamique non linéaire peut être linéarisé autour d'un certain nombre de points de fonctionnement. Chaque modèle linéaire représente le comportement du système local autour d'un point de fonctionnement. Le comportement global du système est décrit par des règles floues IF-THEN qui représentent des relations linéaires d'entrée/sortie locales du système non linéaire.

La technique de détection et de localisation de défauts à base des modèles flous de T-S des systèmes non linéaires est une zone active de la recherche.

Avec le développement des méthodes de modélisation des systèmes physiques non linéaires, beaucoup d'attention a été portée au passage d'une représentation entrée/sortie (IO) vers une représentation d'état et vice versa dans le cadre des structures multi-modèles de Takagi-Sugeno [Toth 2008], [Toth 2009a], [Toth 2009b].

Dans un objectif de simplifier l'estimation d'état, les modèles augmentés ont été développés afin d'être utile pour la résolution des problèmes de contrôle automatique [Urban 2010], [Johnson 1970], [Senthilkumar 2010], [Tanaka 2001a]. Nous définissons généralement le processus de modèle d'augmentation en ajoutant une dynamique supplémentaire au modèle existant du système considéré, augmentant ainsi la dimension du vecteur d'état. Les modèles augmentés fournissent une méthode simple pour estimer les états des systèmes.

### **Problématique**

La synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires de T-S à variable de décision non mesurable pour l'estimation d'état et l'estimation de défauts, afin de construire une procédure de diagnostic de défaut d'une manière anticipée, pour empêcher le système de tomber dans des états dangereux.

Dans cette thèse, le diagnostic de défauts sera étudié sur la base de l'estimation d'état et les problèmes suivants seront examinés :

1. Synthèse d'observateurs pour l'estimation d'état et de défauts affectant les systèmes non linéaires représentés par multi-modèles de Takagi-Sugeno.
2. Diagnostic de défauts capteurs et actionneurs et estimation des entrées inconnues.

Pour traiter le premier point, la présentation du système non linéaire par modèles de Takagi-Sugeno à variable de décision non mesurable est une étape principale.

Le deuxième point est la reconstruction du vecteur d'état, dont on va utiliser l'observateur à entrées inconnues à découplage avant d'arriver à la synthèse de l'observateur proportionnel Intégral (PI) à entrées inconnues qui offre la possibilité d'estimer les états

et les entrées inconnues du système en même temps. Les deux types d'observateurs vont être modélisés dans le cas des variables de décision mesurables et non mesurables.

Pour la simplicité des développements, le processus d'augmentation d'état du modèle va être utilisé. Nous allons présenter l'utilité de l'augmentation des modèles comme outil puissant dans de nombreuses applications pratiques. On va explorer l'augmentation partielle des états qui va être utilisée pour le diagnostic.

Pour le diagnostic de défauts, on va rappeler la méthode de diagnostic de défauts actionneurs et capteurs à base d'observateurs à entrées inconnues. Une nouvelle approche de diagnostic de défauts capteurs va être présentée, cette approche est basée sur l'utilisation du principe de la reconstruction, ce qui permettra de localiser le défaut capteurs et d'estimer la variable en défaut. Les observateurs PI à entrées inconnues développés vont être utilisés pour la conception d'une nouvelle procédure de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs et pour estimer les défauts des systèmes T-S à variables de décision non mesurables.

### **Présentation des chapitres**

Ce mémoire de thèse contient quatre chapitres, comme suit :

**Chapitre 1 :** présente les concepts de base en matière de détection et localisation de défauts (FDI). Les concepts fondamentaux, tels que les défauts, les défaillances, les pannes, la détection de défaut, la localisation de défaut, etc., sont définis.

**Chapitre 2 :** présente, d'une part, un ensemble de définitions relatives à l'observabilité des systèmes dynamiques non linéaires, avec le déploiement de certains types d'observateurs d'une façon non exhaustive, leur classification n'est pas unique. D'autre part, nous présentons les différentes techniques d'obtention des multi-modèles de Takagi-Sugeno, avec la vulgarisation de la méthode de Transformation polytopique Convexe (TPC).

**Chapitre 3 :** présente le développement des systèmes augmentés pour la synthèse des observateurs pour les systèmes de Takagi-Sugeno à variable de décision mesurable et à variable de décision non mesurable en présence d'entrées inconnues. On va utiliser l'augmentation d'état du modèle pour la synthèse des observateurs à entrées inconnues et les observateurs Proportionnels Intégrals (PI) à entrées inconnues.

**Chapitre 4 :** dans ce chapitre on s'intéresse à une question pratique associée à la conception de méthodes de diagnostic pour les systèmes Takagi-Sugeno : la génération de résidus structurés pour le diagnostic de défaut actionneurs et capteurs, en utilisant des bancs d'observateurs à entrées inconnues, le diagnostic de défaut des capteurs en utilisant l'approche basée sur le principe de la reconstruction. Finalement une structure de diagnostic intégrant l'estimation d'état et des défauts affectant le système à variables de décisions non mesurables (VDNM) basée sur l'utilisation de l'observateur PI à entrées inconnues est proposée et illustrée par une application sur un système hydraulique à trois cuves.



# Chapitre 1

## Contexte et état de l'art sur le Diagnostic des systèmes

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Terminologie propre au diagnostic</b>	<b>6</b>
<b>1.3</b>	<b>Structures des défauts</b>	<b>8</b>
1.3.1	Différents types des défauts	8
1.3.2	Nature des défauts	9
1.3.3	Evolution des défauts	10
<b>1.4</b>	<b>Redondance et diagnostic</b>	<b>11</b>
1.4.1	Redondance d'information	11
1.4.2	Redondance physique	11
1.4.3	Redondance analytique	12
<b>1.5</b>	<b>Différentes approches de diagnostic</b>	<b>12</b>
1.5.1	Méthodes de diagnostic sans modèles	13
1.5.2	Méthodes de diagnostic avec modèle	15
<b>1.6</b>	<b>Génération de résidus et diagnostic</b>	<b>18</b>
1.6.1	Méthodes d'évaluation des résidus	18
1.6.2	Méthodes de localisation de défauts	21
1.6.3	Méthodes d'identification de défauts	24
<b>1.7</b>	<b>Critères de performance d'un système de diagnostic</b>	<b>25</b>
<b>1.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>26</b>

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre présente les concepts de base en matière de détection et localisation de défauts (FDI). Les concepts fondamentaux, tels que les défauts, les défaillances, les pannes, la détection de défaut, la localisation de défaut, etc., sont définis. Différents types de défauts et leurs effets sur les performances des procédés sont expliqués. Plusieurs méthodes de détection de défauts existent dans la littérature ; Une classification de ces méthodes est présentée avec une attention particulière sur les techniques de détection de défauts à base de modèles. La détection de défaut à base d'observateur dans les systèmes non linéaires a un grand intérêt dans cette thèse. Les fonctions d'évaluation les plus couramment utilisés et les approches de sélection de seuil sont décrites.

## 1.2 Terminologie propre au diagnostic

Nous avons retenu, dans cette thèse, des définitions issues de sources bibliographiques diverses. La plupart d'entre elles ont été discutées au sein du comité technique SAFEPROCESS (*Symposium Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*) de l'IFAC (*International Federation of Automatic Control*) [Zwingelstein 1995, Isermann 1997, Isermann 2000, Chen 1999], qui ont essayé de standardiser ces définitions. Par exemple :

### Définition 1

***Perturbation***

*Une perturbation est un signal d'entrée non contrôlé dont la présence est non souhaitable mais considérée comme normale [Kourd 2012].*

### Définition 2

***Défaut (fault)***

*Un défaut est généralement défini comme une déviation non-autorisée d'au moins une propriété caractéristique ou d'une variable ou d'un écart du comportement du système lui-même, des capteurs, des actionneurs, ou de tout autre équipement. Il peut être modélisé comme une entrée externe, ou sous forme d'écart de paramètre qui modifie les caractéristiques du système. Les incertitudes et les perturbations sont modélisées de manière assez similaire aux défauts comme une déviation paramétrique, ou une entrée externe.*

### Définition 3

***Défaillance (failure)***

*Elle peut être une conséquence d'un défaut. Une défaillance correspond à une interruption permanente de la capacité d'un système à effectuer les fonctions attendues dans les conditions de fonctionnement nominales.*

**Définition 4****Panne (break-down)**

Elle représente les conséquences d'une défaillance dans la réalisation d'un fonctionnement nominal d'un processus. En d'autres termes, c'est l'inaptitude permanente de la capacité du système à remplir sa fonction requise dans des conditions d'opérations spécifiées [Kourd 2012].

**Définition 5****Résidu (Residual)**

Indicateur de présence ou non d'un défaut. C'est la différence entre le comportement du système observé et le comportement attendu à l'aide d'un modèle de référence.

**Définition 6****Seuil (Threshold)**

C'est la valeur limite de l'écart d'un résidu avec le zéro, ainsi s'il est dépassé, un défaut est déclaré comme détecté [Sallem 2013].

**Définition 7****Symptôme (Symptom)**

Événement ou ensemble de données au travers duquel le système de détection identifie le passage du procédé dans un fonctionnement anormal [Hamdi 2012].

**Définition 8****Détection de défaut (fault detection)**

Cette fonction détermine la présence ou non d'un défaut ainsi que l'instant de l'apparition [Graton 2005].

**Définition 9****Localisation de défauts**

il s'agit de localiser le sous-système affecté par le défaut détecté, responsable de la défaillance du système. La localisation consiste, en effet, à remonter les symptômes pour retrouver l'ensemble des éléments défaillants. [Zemouri 2003].

**Définition 10****Identification de défaut (fault identification)**

Cette fonction estime l'amplitude et l'évolution temporelle du défaut afin d'expliquer au mieux le comportement du système. Fonction qui suit la localisation [Graton 2005].

**Définition 11****Diagnostic de défauts (fault diagnosis)**

De manière générale, une procédure de diagnostic détermine le type, l'amplitude, la localisation et l'instant de détection du défaut. La fonction de diagnostic succède la détection des défauts et inclut les phases localisation et identification des défauts [Graton 2005].

Pour la définition du terme "diagnostic des défauts", une autre définition existe dans la littérature et est donnée par [Gertler 1991] en précisant que le diagnostic de défauts inclut

également la détection de défauts. C'est également la définition adoptée dans cette thèse. Si la détection de défaut est exclue du terme de diagnostic, comme le propose le Comité Technique SAFEPROCESS, aucune expression ne permet de décrire le secteur entier. Ceci est en partie résolu en adoptant l'abréviation FDI (Fault Detection and Isolation), commune à beaucoup de journaux et de revues [Graton 2005].

## 1.3 Structures des défauts

Lorsque l'on conçoit un système de diagnostic, la première question que l'on se pose, est de savoir ce que l'on veut détecter, c'est-à-dire de définir le type de dysfonctionnement que l'on veut diagnostiquer. Les défauts peuvent être classés selon leur type, nature et évolution.

### 1.3.1 Différents types des défauts

Généralement dans la littérature, les défauts sont classés en fonction de leur emplacement, définissant alors des types de défauts. Comme le montre la figure 1.1, on distingue trois types de défauts : défaut capteur, défaut actionneur et défaut système (ou défaut composant).

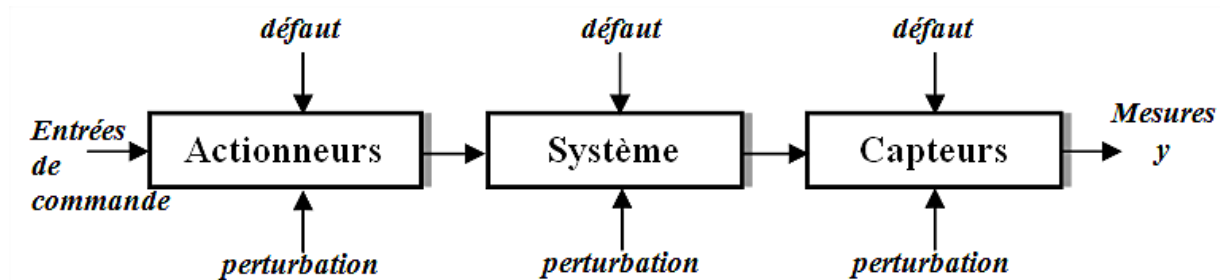


FIGURE 1.1: Défauts d'un processus physique

#### 1.3.1.1 Défauts capteurs

Ce sont les changements anormaux qui sont produits dans la mesure du processus en raison du mauvais fonctionnement des capteurs. Les capteurs sont essentiellement l'interface de sortie d'un système au monde extérieur, ils transmettent des informations sur le comportement d'un système et de ses états internes. Par conséquent, les défauts capteurs peuvent entraîner une dégradation importante des performances d'un système. Ces défauts peuvent causer des effets graves, en particulier lorsque les mesures des capteurs sont utilisés à des fins de commande [Rodrigues 2005].

### 1.3.1.2 Défauts actionneurs

Ils peuvent être considérés comme des changements anormaux dans les actionneurs. Dans de nombreux systèmes techniques, la sortie d'un système de commande ne peut pas être directement appliquée à un processus. Les actionneurs transforment le signal de commande en un signal approprié pour un système particulier, par exemple, le couple, la force, etc. Les défauts dans les actionneurs affectent non seulement les performances du système, mais parfois peuvent conduire à une rupture complète du système [Rodrigues 2005].

### 1.3.1.3 Défauts composants

Ce type de défauts provient du système lui-même. Les défauts de composants altèrent les paramètres physiques du système qui, à son tour, se traduit par le changement de ses propriétés dynamiques. L'usure, le vieillissement d'un des composants sont les principales causes de ces défauts. Quelques exemples de défauts de composants sont des fuites dans les réservoirs, les ruptures ou des fissures dans le système de boîte de vitesses, changement de friction en raison de la détérioration du lubrifiant, etc. les défauts composants peuvent entraîner une instabilité du processus, par conséquent, il est extrêmement important de détecter ces défauts [Abid 2010].

La représentation mathématique des défauts composants est souvent difficile à déterminer et demande des essais expérimentaux extensifs. En général, ils se traduisent par un changement dans l'équation d'états. Ce changement peut être soit paramétrique soit structurel/fonctionnel. Ces défauts induisent une instabilité de système [Methnani 2012].

## 1.3.2 Nature des défauts

Les défauts peuvent être classés en défauts de nature multiplicative ou de nature additive (figure 1.2), selon leurs effets sur les performances du système.

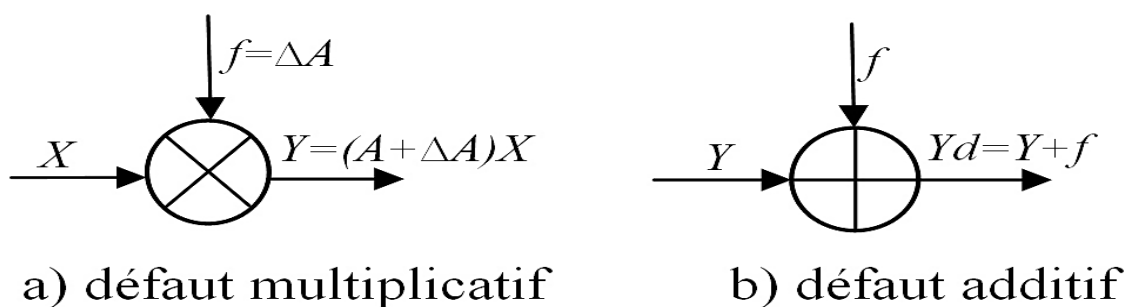


FIGURE 1.2: Nature des défauts

### 1.3.2.1 Défauts multiplicatifs

Les défauts au niveau de la dynamique du procédé sont modélisés par des défauts multiplicatifs. Ils correspondent aux modifications paramétriques du modèle représentant le système. Ces derniers induisent des changements sur la corrélation du signal de sortie du système, ainsi que des changements dans la dynamique du système [Sallem 2013].

### 1.3.2.2 Défauts additifs

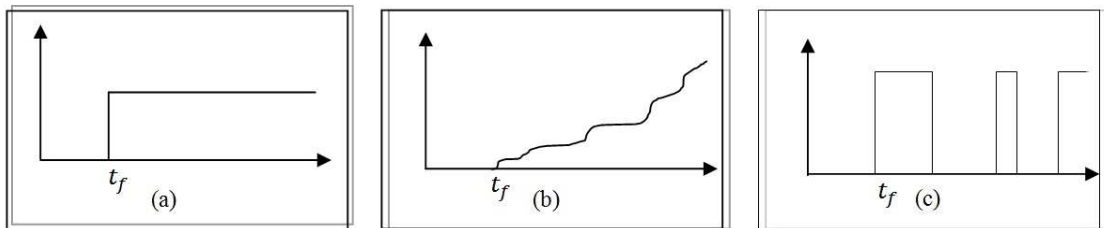
Ces défauts sont modélisés sous forme de termes additifs dans le modèle du système. Ils influent sur son état ou sur sa sortie. Cette modélisation est habituellement attribuée aux défauts de capteurs et d'actionneurs [Sallem 2013].

Les défauts Actionneurs et Capteurs sont plus facilement modélisés comme des défauts d'additifs, alors que les défauts de composants sont modélisés comme des défauts multiplicatifs [Abid 2010].

### 1.3.3 Evolution des défauts

Les défauts peuvent également être classés en fonction de leur forme et de leur comportement dans le temps. Lorsque l'apparence qui les définit est connue, ils sont dits déterministes. Par contre, les défauts se manifestant par intermittence sont dits stochastiques car ils ne peuvent être caractérisés que par des évolutions aléatoires [Methnani 2012].

Les défauts peuvent être différenciés selon leur forme et leur comportement dans le temps (figure 1.3).



a) Défaut brusque ou abrupt    b) Défaut à dérive lente ou graduel    c) Défaut intermittent

FIGURE 1.3: Evolution temporelle des défauts

Généralement on distingue dans la littérature trois types de défauts selon leurs évolutions temporelles.

#### 1.3.3.1 Défaut brusque ou abrupt

Ce type de défaut se caractérise par un comportement temporel discontinu, il correspond à une panne brutale : dysfonctionnement total ou partiel [Sallem 2013]. Une représentation mathématique de ce défaut est donnée par [Methnani 2012] :

$$f(t - t_f) = \begin{cases} \delta & t > t_f \\ 0 & t < t_f \end{cases} \quad (1.1)$$

Où  $f(t - t_f)$  est le comportement temporel du défaut et  $\delta$  est un seuil constant.

### 1.3.3.2 Défaut intermittent

C'est un défaut caractéristique de faux contact ou de panne intermittente des capteurs. Ce type de défaut est un cas particulier de défaut abrupt avec la propriété particulière qu'il revient de façon aléatoire à sa valeur normale [Methnani 2012].

### 1.3.3.3 Défaut graduel

C'est un défaut caractéristique d'une usure, d'une pièce, ou d'un encrassement. Il est très difficile à être détecté à cause de son évolution temporelle qui peut être confondue à une modification paramétrique lente représentant la non stationnarité du procédé [Methnani 2012].

Son évolution au cours du temps peut être exprimée par cette relation [Methnani 2012] :

$$f(t - t_f) = \begin{cases} \delta(1 - e^{-\alpha f}) & t \geq t_f \\ 0 & t < t_f \end{cases} \quad (1.2)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  deux constants positives.

## 1.4 Redondance et diagnostic

Le principe de base du diagnostic de défauts repose sur la vérification de la cohérence des diverses informations disponibles sur le processus. Ceci n'est possible que s'il existe un certain degré de redondance entre ces informations.

### 1.4.1 Redondance d'information

La redondance de l'information peut être obtenue par la multiplication des actionneurs et des capteurs et l'utilisation de modèles du processus par des techniques telles que la redondance analytique, ce qui permet de fournir au processus plusieurs informations différentes sur une même variable. Des tests vont alors permettre de vérifier la cohérence de ces informations [Sallem 2013, Fellouah 2007]. Nous pouvons distinguer deux approches :

### 1.4.2 Redondance physique

La redondance matérielle ou physique qui consiste à ajouter des capteurs pour obtenir des informations supplémentaires sur l'état du processus le mesurant simultanément. La redondance physique souffre d'un désavantage majeur : doubler ou tripler le nombre de capteurs revient à augmenter considérablement son coût et à affronter des problèmes d'encombrement liés à l'installation et à la maintenance de ces capteurs. L'ajout de capteurs supplémentaires permettra aussi d'avoir des informations additionnelles à mettre au profit dans le cadre de la redondance analytique (figure 1.4).

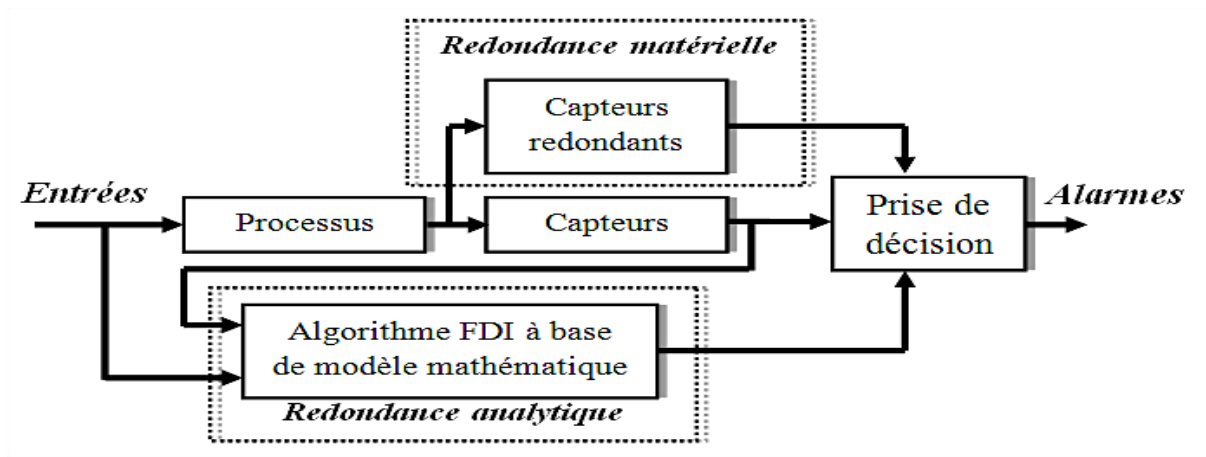


FIGURE 1.4: Architecteur de redondance matérielle et analytique

### 1.4.3 Redondance analytique

L'approche dite redondance analytique [Chow 1984, Kiupel 1997], complément à la redondance matérielle utilise les mesures disponibles sur le processus pour développer des algorithmes de détection et d'isolation des défauts sous forme de relations analytiques d'entrée-sortie ou de sortie-sortie liant les variables connues. Ces relations sont appelées relations de redondances analytiques [Sallem 2013]. Cette redondance fait appel à des modèles analytiques représentatifs des relations de causalité et aux autres contraintes existantes entre les signaux présents dans le processus. Les mesures obtenues des différents capteurs occultant le processus peuvent alors être reliées par ces modèles [Fellouah 2007]. Les modèles analytiques étant une représentation mathématique des lois d'évolution des variables physiques du processus (figure 1.4). Les procédés ainsi modélisés ne suivent pas toujours une telle représentation idéale ceci est dû à la présence d'incertitudes sur les paramètres du modèle, des modifications structurelles du processus, des non-linéarités et finalement l'effet des perturbations et des bruits de mesure.

## 1.5 Différentes approches de diagnostic

La diversité des approches qui ont été développées pour le diagnostic des processus dynamiques semble être le résultat de contextes différents. Ces contextes sont associés à la nature des applications visées et aux caractéristiques propres du cahier des charges qui en résultent. Ainsi, la nature des informations disponibles sur le processus ou le type de défaut à détecter conduisent à la mise en œuvre de stratégies spécifiques. Dans ce cadre, les travaux sur la détection et l'isolation de défauts et ceux dédiés au diagnostic [Beard 1971, Carlsson 1988, Fagarasan 2004, White 1987] montrent une grande variété à la fois dans les points de vues et dans les méthodes utilisées [Sallem 2013].

Ainsi, elles sont principalement basées sur deux approches que nous pouvons classer en méthodes avec ou sans modèles. Dans le premier cas, nous utilisons des redondances d'informations et la connaissance fournie par le modèle mathématique pour définir le mode de fonctionnement et décider si l'état du processus est normal ou anormal [Sallem 2013].

Ces modèles peuvent être de type quantitatif, exprimés sous forme d'équations mathématiques ou bien de type qualitatif, exprimés par exemple sous forme de relations logiques.

Par contre, le deuxième cas est basé sur l'analyse des données fournies par le processus qui permet de décider de son état en s'appuyant soit sur des mesures disponibles de signaux issus du procédé, soit sur des connaissances à priori concernant son comportement. Nous pouvons citer par exemple, l'approche par la logique floue [Kiupel 1997], l'approche par les réseaux de neurones artificiels (RNA) [Koppen-Seliger 1996] et l'analyse stochastique des signaux [Sallem 2013, Basseville 1994].

### 1.5.1 Méthodes de diagnostic sans modèles

Dans certaines applications industrielles, il est difficile, voire impossible, d'obtenir le modèle du processus. Cette difficulté est justifiée par la complexité accrue ou à de nombreuses reconfigurations intervenants durant le processus de production. En effet, seules les méthodes de surveillance sans modèles sont opérationnelles pour ce type d'applications industrielles. Ces méthodes de diagnostic se basent sur des informations issues d'une expérience préalable, sur des règles heuristiques ou encore sur des exemples de résolution. Parmi ces méthodes, on trouve :

#### 1.5.1.1 Détection par outils statistiques

Les outils statistiques de détection de défaillances consistent à supposer que les signaux fournis par des capteurs possèdent certaines propriétés statistiques. On effectue alors quelques tests qui permettent de vérifier si ces propriétés sont présentes dans un échantillon des signaux mesurés de taille  $n$  (appelé fenêtre d'observation glissante) [Belkherchi 2011]. Parmi ces tests on distingue :

##### a. Test de franchissement de seuil

Le test le plus simple est de comparer ponctuellement les signaux avec des seuils préétablis. Le franchissement de ce seuil par un des signaux capteurs génère une alarme. Il existe deux types de seuils dans l'industrie : le premier type est le seuil de pré-alarme qui permet d'entreprendre une action de maintenance préventive, le second type, dit seuil d'alarme, impose l'arrêt de la production et l'engagement d'une action de maintenance corrective. Ce type de méthode est très simple à mettre en œuvre mais ne permet pas d'établir un diagnostic des défaillances [Belkherchi 2011, Zemouri 2003]. Cette méthode est aussi très sensible aux fausses alarmes.

##### b. Test de la moyenne

Contrairement à la méthode précédente, le test de comparaison est effectué sur la moyenne  $\bar{y}$  contenue dans la fenêtre de  $n$  valeurs plutôt que sur une valeur ponctuelle [Belkherchi 2011, Patton 1993] :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^t y_i \quad (1.3)$$

### c. Test de variance

On peut également calculer la variance d'un signal. Tant que la valeur de cette variance est dans une bande située autour de sa valeur nominale, l'évolution est supposée normale. La variance de l'échantillon est définie par [Belkherchi 2011] :

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^t (y_i - \bar{y}_i)^2 \quad (1.4)$$

#### 1.5.1.2 Diagnostic par reconnaissance de formes

La reconnaissance de formes consiste à déterminer à quelles formes un objet observé est similaire, ou autrement dit, à quelle classe d'objectifs connus il peut être associé. Reconnaître des formes est donc un processus qui peut être considéré comme similaire à celui du diagnostic pour lequel la classe correspond à la cause de la défaillance du processus et où la forme représente l'ensemble des observations, ou symptômes, donné par le processus [Belkherchi 2011, Bernauer 1996]. Parmi les techniques développées dans cette approche on peut citer :

##### a. Reconnaissance des formes par outils statistiques

L'approche par reconnaissance de formes statistique pour le diagnostic se base sur la connaissance d'un ensemble de mesures effectuées sur le processus et des états de fonctionnement associés et de prendre une décision concernant ces mesures en utilisant les lois de probabilité. Pour plus de détails voir [Zemouri 2003]. Ces techniques supposent la connaissance a priori de tous les états de fonctionnement (normal et en fautes), et ne prennent pas en compte l'évolution du processus.

##### b. Reconnaissance des formes par l'approche floue

En reconnaissance des formes par approche floue, les classes sont représentées par des sous-ensembles flous. Une fonction d'appartenance  $\lambda(x)$  quantifie le degré d'appartenance de chaque vecteur  $x$  à la classe  $\alpha_i$ . Généralement, on donne pour chaque vecteur  $x$  l'ensemble des degrés d'appartenance à toutes les classes  $(\lambda_1(x), \dots, \lambda_M(x))$ . La mise en œuvre d'une méthode de classification floue implique deux étapes : la construction des fonctions d'appartenance et la définition des règles de décision [Belkherchi 2011].

##### c. Reconnaissance des formes par réseaux de neurones

Les architectures basées sur les réseaux de neurones les plus utilisées en diagnostic, sont le Perceptron Multi-Couches (*PMC*) et les Réseaux à Fonctions de base Radiales (*RFR*) [Belkherchi 2011]. L'expert humain joue un rôle très important dans ce type d'application. Toute la phase d'apprentissage supervisée du réseau de neurones dépend de son analyse des modes de fonctionnement du processus. Chaque mode est caractérisé par un ensemble de données recueillies sur le processus. A chaque mode, on associe une expertise faite par l'expert. Cette association (ensemble de données - modes de fonctionnement) sera apprise par le réseau de neurones. Après cette phase d'apprentissage, le réseau de neurones associera les classes représentant les modes de fonctionnement aux formes d'entrée caractérisées par les données du processus [Belkherchi 2011, Zemouri 2003, Bernauer 1996].

### 1.5.2 Méthodes de diagnostic avec modèle

Le principe de fonctionnement des méthodes de détection de défaut à base de modèle est de comparer le comportement réel du processus à celui du modèle nominal du processus sans défaut conduit par la même entrée. Les approches à base de modèle sont plus puissantes que les approches fondées sur le traitement de signal [Frank 1996b, Frank 1994a], parce que ces derniers utilisent plus d'informations sur le processus. La figure 1.5 montre la représentation schématique d'un mécanisme de détection de défaut à base de modèle. Il se compose de deux étapes principales ; la génération et l'évaluation du résidu. L'objectif de la génération de résidus est de produire un signal, appelé signal résiduel, en comparant les mesures avec leurs estimations, et le but de l'évaluation du résidu est de vérifier la présence ou non de défauts en analysant le signal du résidu.

Sur la base du modèle utilisé pour la génération de résidus, les démarches de détection de défaut à base de modèles peuvent en outre être divisées en deux catégories. Le modèle peut être analytique représenté par l'ensemble des équations différentielles, ou il peut être un modèle de connaissance représenté, par exemple, par les réseaux de neurones, réseaux de Petri, processus experts, règles floues, etc. Les approches à base de modèle de connaissance n'a pas besoin d'une modélisation analytique complète, donc, ils sont plus appropriés pour les processus d'information limités ou dans des situations où le modèle mathématique du processus est difficile à obtenir ou est trop complexe. Tel est le cas, par exemple, dans des procédés chimiques qui sont difficiles à modéliser de manière analytique [Frank 1996b, Guglielmi 1995, Patton 2000, Frank 1997, Patan 2008, Chiang 2001]. Récemment, des approches hybrides qui utilisent à la fois des réseaux neuronaux et des modèles mathématiques ont également été proposé [Sobhani-Tehrani 2009].

Dans les approches basées sur des modèles analytiques, un signal de résidu est généré en utilisant le modèle mathématique du processus.

Les approches basées sur des modèles analytiques les plus couramment utilisés pour la génération de résidus comprennent :

- i) approche de l'espace de parité,
- ii) approche basée sur l'estimation des paramètres, ceux-ci sont décrites ci-dessous,
- iii) approche à base d'observateur.

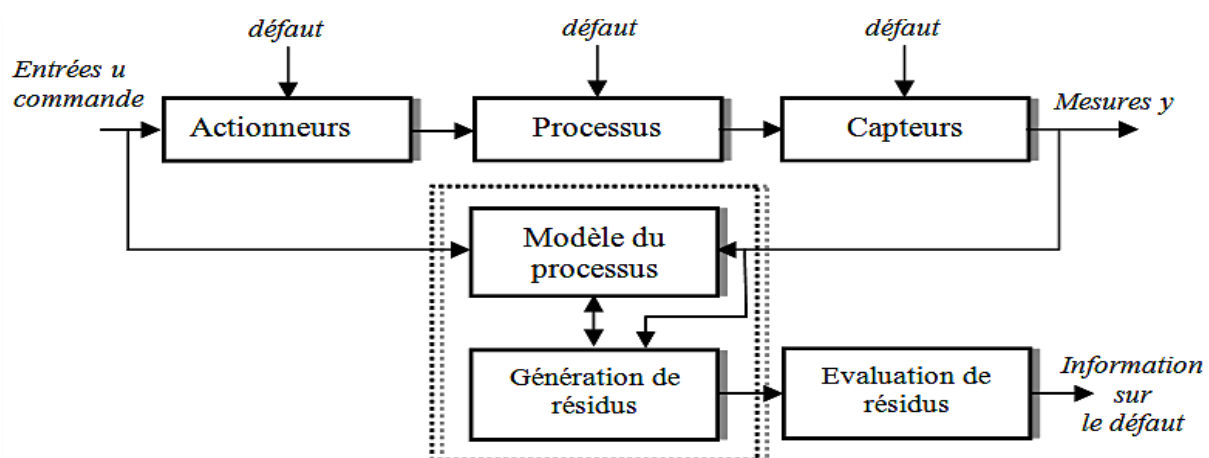


FIGURE 1.5: Représentation schématique du processus de détection de défaut à base de modèle

### 1.5.2.1 Approche de l'espace de parité

Cette approche utilise la vérification de la parité des équations mathématiques du processus en utilisant les mesures. Chow et Willsky [Chow 1984] ont proposé des équations de parité pour le modèle d'espace d'état du processus (figure 1.6).

L'approche géométrique de l'espace de parité a été largement développée dans la littérature pour les processus linéaires. Dans [Fellouah 2007], la méthode a été appliquée pour la détection de défauts de capteurs et d'actionneurs où un modèle linéaire identifié en ligne est utilisé pour la génération de résidus.

L'approche géométrique peut être étendue aux processus bilinéaires [Comtet-Varga 1997]. Dans le cas non-linéaire, le problème se pose dans les mêmes termes que dans le cas linéaire et bilinéaire : Eliminer les variables inconnues d'un processus correspond également à projeter l'ensemble de ses solutions dans un sous espace de dimension inférieure. Toutefois, la définition de cette projection n'est pas aussi simple que dans le cas linéaire. En général, cette approche de projection trouve ses limites quand elle est appliquée aux processus non-linéaires [Fellouah 2007].

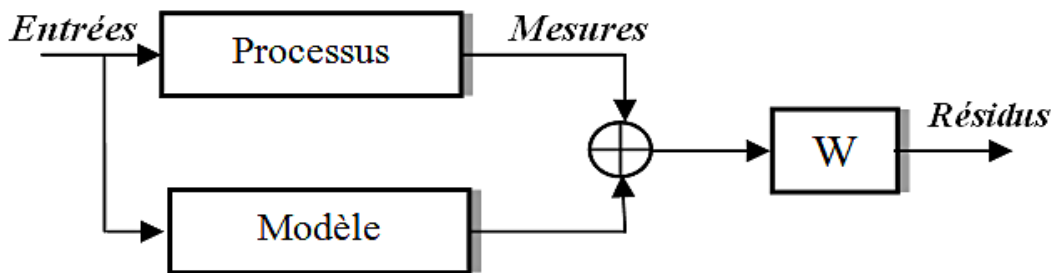


FIGURE 1.6: Schéma de principe de générateur de résidu à base de l'espace de parité

### 1.5.2.2 Approche de l'estimation paramétrique

La détection de défauts à base de la méthode de l'estimation paramétrique a été d'abord proposée dans [Bakiotis 1979, Isermann 1982, Isermann 1984] et basée sur l'hypothèse que les défauts sont reflétés dans les paramètres physiques des processus. Avec cette hypothèse, les paramètres du processus sont estimés en ligne de manière répétée, en cas de différence dans les paramètres estimés et les paramètres réels, on aura une indication de défauts.

Un avantage de la méthode d'estimation des paramètres est que, avec une seule entrée et une seule sortie, plusieurs paramètres peuvent être estimés ce qui donnent une image détaillée sur les quantités de processus internes [Isermann 2006]. Un autre avantage de la méthode est qu'elle donne la taille des écarts qui est important pour l'analyse des défauts [Frank 1996b].

L'approche de l'estimation paramétrique (1.7) est utile pour la détection de défauts composants, mais elle peut aussi détecter les défauts des capteurs et des actionneurs. Un inconvénient est que l'excitation est toujours nécessaire afin d'estimer les paramètres, ce qui pourrait entraîner des problèmes si le processus fonctionne à un des points stationnaire [Frank 1996b].

Il existe plusieurs techniques d'estimation de paramètres, parmi eux les méthodes de moindres carrés (LS), moindres carrés récursifs (RLS), moindres carrés étendus (ELS), etc. Les techniques d'estimation des paramètres ont également été appliquée à la détection de défauts dans les processus non linéaires, l'étude de la détection de défaut à base de l'estimation de paramètres dans les processus non linéaires peut être trouvée dans [Isermann 2006] et une application sur un modèle non linéaire de satellite [Jiang 2008]. Il existe une relation étroite entre la détection de défaut à base de l'identification paramétrique et l'approche de détection de défaut à base d'observateur comme démontré dans [Garcia 1996, Magni 1995].

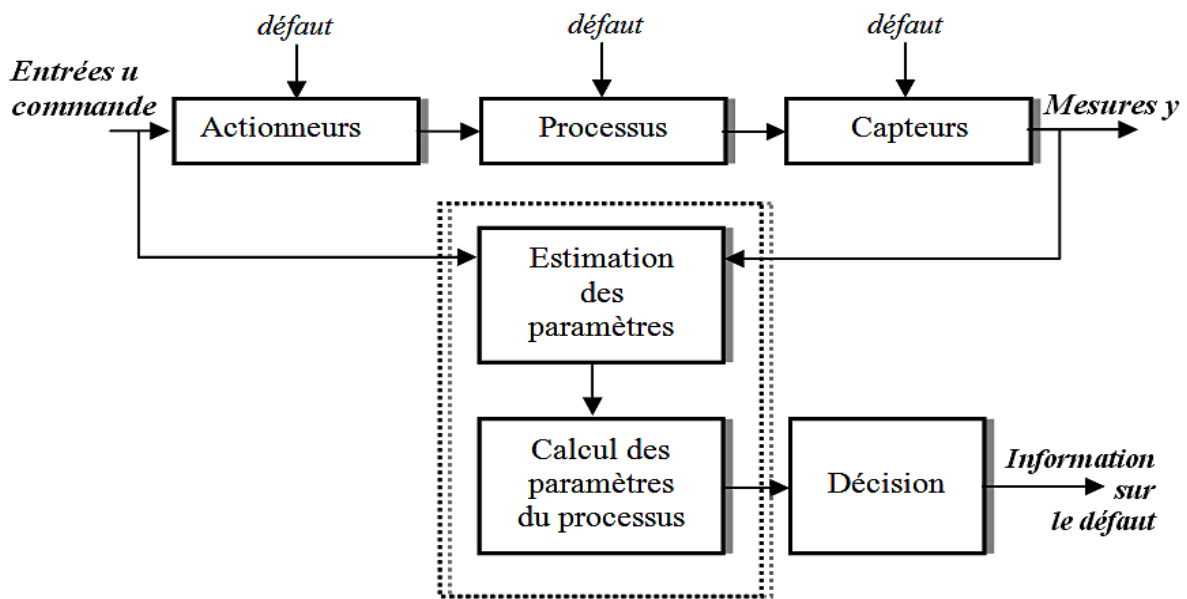


FIGURE 1.7: Schéma de principe de générateur de résidu à base de l'estimation paramétrique

### 1.5.2.3 Approche à base d'observateur

Un observateur est un système dynamique prenant pour entrées les signaux connus du système sur lequel il est implanté et dont les sorties convergent vers une estimation des variables d'état (ou d'une partie des variables d'état). Contrairement à la commande, ou les observateurs sont utilisés uniquement pour estimer le vecteur d'état (ou une partie du vecteur d'état), les observateurs utilisés pour la surveillance estiment les sorties (ou une fonction des sorties) du système et les variables d'état. Les observateurs d'état permettent l'estimation de la sortie d'un système à partir des connaissances de la commande ou parfois une partie de la commande et des mesures de sortie ou une partie de ces mesures. Cette estimation est comparée à la valeur mesurée de la sortie dans le but de générer des résidus. Ces résidus doivent servir d'indicateurs fiables du comportement du processus. Ils sont donc nuls en l'absence de défauts et dépendants des défauts en leur présence [Akh04]. Les résidus générés doivent être :

1. robuste aux incertitudes de modèle, aux perturbations et aux bruits de mesures ;
2. sensible aux défauts

La figure 1.8 montre le schéma d'un processus de génération de résidus à base d'observateur.

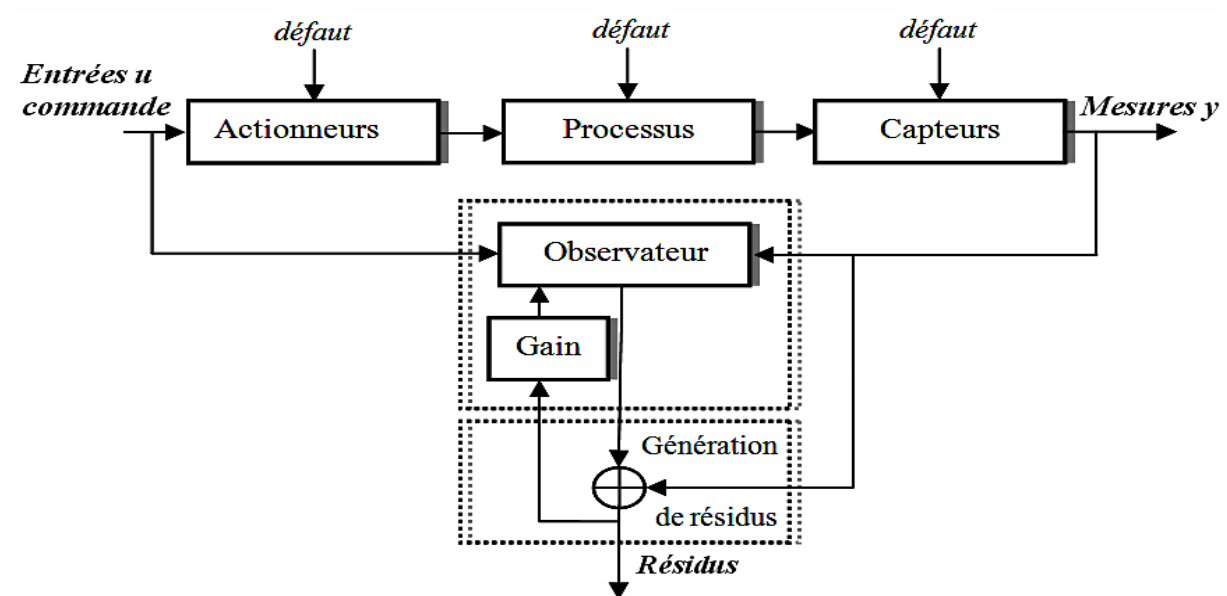


FIGURE 1.8: Schéma de principe de générateur de résidus à base d'observateur

## 1.6 Génération de résidus et diagnostic

Cette première phase consiste à générer un signal qui reflète la distance entre les variables mesurées du système et les variables observées au cours du temps, qui va être utilisé par la suite pour le diagnostic de défauts.

### 1.6.1 Méthodes d'évaluation des résidus

Après génération de résidus, la deuxième étape dans la démarche de détection de défaut à base de modèle est l'évaluation des résidus. Dans cette étape, le signal de résidus est évalué pour indiquer l'occurrence de défauts. Dans les situations idéales quand il n'y a pas de perturbations ou leur effet sur le signal de résidus est complètement éliminé, il n'y a pas d'incertitudes de modélisation et les conditions initiales de l'observateur sont les mêmes que celle du processus, le signal de résidus est égal à zéro dans le cas sans défaut. Dans ce cas, tout écart des résidus de zéro indique la présence de défauts. Toutefois, ces situations idéales ne sont jamais atteintes, et il y a toujours des erreurs de modélisation, les conditions initiales de l'observateur peuvent être différentes de celle du processus. Cela provoque la déviation du résidu de zéro, même en l'absence de défauts. Le but de l'évaluation des résidus est de décider s'il y a ou non la présence de défauts, même en présence de perturbations et des incertitudes.

L'évaluation des résidus se compose de trois phases (figure 1.9) ; ce sont le traitement des résidus, la sélection du seuil et la prise de décision.

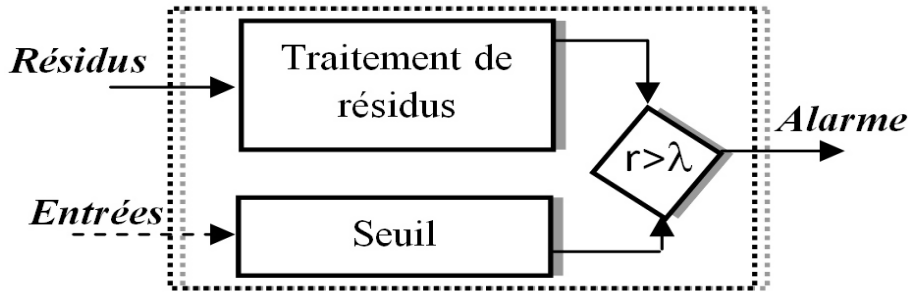


FIGURE 1.9: Evaluation des résidus

### 1.6.1.1 Traitement des résidus

En fonction du type du processus surveillé, deux stratégies de traitement des résidus peuvent être utilisées. Pour les processus déterministes, la stratégie de traitement des résidus basée sur la norme est préférée et pour les processus stochastiques, les méthodes statistiques sont adoptées. Plusieurs différentes fonctions d'évaluation ont été proposées dans la littérature. Une étude détaillée peut être trouvée dans [Ding 2008]. Pour les paramètres déterministes, la norme  $L_2$  est la fonction d'évaluation la plus couramment utilisée et elle est définie comme suit :

$$\|r\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} r^T r dt} \quad (1.5)$$

La mise en œuvre de la norme  $L_2$  est impossible, puisque la valeur de  $\|r\|_2$  n'est pas connue jusqu'à  $t = \infty$ . Par conséquent, elle est effectivement mise en œuvre sur une fenêtre de temps.

$$\|r\|_{2,[t-\tau,t]} = \sqrt{\int_{t-\tau}^t r^T r dt} \quad (1.6)$$

Les méthodes de détection de défaut sont conçues sur la base de  $\|r\|_2$  et réalisées sur la base de  $\|r\|_{2,[t-\tau,t]}$ , cela se traduit par une perte de l'optimalité du processus de détection de défaut. L'influence de l'utilisation de  $\|r\|_{2,[t-\tau,t]}$  au lieu de  $\|r\|_2$  sur la performance du processus de détection de défaut a été étudiée dans [Ye 2002]. Dans certains cas, la valeur efficace du signal résidu est utilisée comme fonction d'évaluation.

$$\|r\|_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} r^T r dt} \quad (1.7)$$

Une autre fonction d'évaluation proposée dans [Johansson 2006] est décrite comme suit :

$$\varphi_{\nu} r \cong \int_0^{\tau} \nu(t-\tau) |r| dt \quad (1.8)$$

où  $\nu$  est une fonction de pondération pour augmenter l'influence des données les plus récentes. Une version généralisée de la fonction d'évaluation ci-dessus est donnée par :

$$\varphi_{\nu}^p r \cong \left( \int_0^{\tau} \nu(t - \tau) |r|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.9)$$

Autres fonctions d'évaluation couramment utilisées pour les processus déterministes à savoir, la valeur absolue, la valeur de crête, la valeur moyenne, ou bien la moyenne mobile, etc. Dans les paramètres stochastiques, les fonctions d'évaluation fréquemment utilisées sont : la moyenne, la variance, le rapport de vraisemblance, le rapport de vraisemblance généralisé (Generalized Likelihood Ratio-GLR), etc.

### 1.6.1.2 Choix du seuil

La sélection du seuil est importante pour un processus de détection de défaut. Si le seuil est choisi trop faible, il se traduira par de fausses alarmes, à savoir certaines des perturbations provoquera le franchissement du seuil par le résidu et se traduira par une alarme. Si le seuil est choisi trop élevé, les petits défauts ne seront pas détectés.

Une étude détaillée des différentes méthodes de sélection de seuil et leurs détails de calcul pour les processus linéaires peut être trouvée dans [Ding 2008], et pour les processus non linéaires dans [Khan 2009, Seliger 1993, Seliger 2000]. Dans les paramètres déterministes, le seuil est habituellement choisie légèrement supérieur à la valeur de borne supérieure du résidu évalué dans le cas sans défaut.

La problématique est donc de trouver un seuil optimal qui constituera le compromis idéal entre un taux de non-détection et un taux de fausse alarme minimum. Il existe deux types de seuil : seuil fixe et seuil adaptatif.

#### a. Seuil fixe

Concernant le seuillage, les premiers travaux ont porté sur l'élaboration des seuils fixes, indépendants du temps et des entrées du processus. La méthode consiste à détecter l'instant pour lequel les résidus sortent d'une zone délimitée par des seuils autour d'une valeur objective. Par exemple, [Walker 1979] l'ont défini à l'aide de la théorie de Markov [Methnani 2012]. Une incertitude ou une perturbation extérieure peut rendre inadaptée la détection par rapport à un seuil de valeur constante prédéfini.

#### b. Seuil adaptatif

Cette méthode permet d'être robuste contre les incertitudes du modèle et de bruit. L'idée consiste à définir des bornes inférieures et supérieures pour le résidu en fonction des bornes des incertitudes des paramètres et des bruits de mesures [Methnani 2012, Ding 1991]. De nombreuses contributions existent dans ce domaine.

### 1.6.1.3 Logique de décision

La troisième étape de l'évaluation de résidus est la logique de décision. La logique de décision la plus simple consiste à comparer le signal de résidu évalué avec le seuil, si le résidu évalué dépasse le seuil, l'alarme de défaut est déclenchée. Il y a aussi des approches qui utilisent la logique floue ou des réseaux neuronaux pour l'évaluation de résidus, voir par

exemple [Frank 1996b, Frank 1996a] pour une étude préliminaire. Ces approches peuvent être utilisées pour effectuer soit l'ensemble des trois étapes d'évaluation de résidus ou une seule de ces étapes.

## 1.6.2 Méthodes de localisation de défauts

L'objectif de la localisation est de remonter à l'origine du défaut. Elle est nommée encore isolation de défaut. Pour détecter un défaut, un seul résidu est à la limite nécessaire, cependant plusieurs résidus (ou vecteur de résidus) sont souvent requis pour l'isolation des défauts [Methnani 2012]. Pour pouvoir localiser efficacement un ou plusieurs défauts, le vecteur résidu doit avoir un certain nombre de propriétés permettant de caractériser de manière unique chaque défaut. Deux types de résidus peuvent se présenter [Patton 1994] : les résidus directionnels et les résidus structurés.

### 1.6.2.1 Résidus directionnels :

L'idée de cette méthode est de générer un résidu sous la forme d'un vecteur de sorte qu'en cas de présence d'un défaut sur le processus, ce vecteur s'oriente suivant une direction privilégiée. L'étape de localisation de défauts consiste alors à déterminer, parmi les différentes directions prédéfinies, laquelle est la plus proche de celle engendrée par le vecteur de résidu [Issury 2011]. Ainsi, l'objectif est de prédéfinir des directions de défauts les plus distinctes possibles afin d'obtenir de bonnes performances de localisation [Methnani 2012, Gertler 1998]. La localisation de défaut se réduit à la détermination de la signature la plus proche de la signature réelle obtenue par le calcul des vecteurs de résidus.

### 1.6.2.2 Résidus structurés :

Cette approche est largement utilisée à cause de sa simplicité et son principe de généralité (elle s'applique aux processus linéaires et non-linéaires). Le principe de l'approche consiste à avoir un ensemble de résidus dans lequel chaque résidu est sensible à un sous-ensemble de différents défauts et robuste par rapport aux défauts restants. Ainsi, un seul sous-ensemble de résidus réagit, lorsqu'un défaut  $f_i$  apparaît.

Les informations de sensibilité et de robustesse des différents résidus sont représentées dans une matrice binaire ou booléenne, appelée matrice de signatures [Issury 2011]. Les dimensions de la table de signature sont déterminées à partir du nombre de capteurs ou actionneurs et du nombre de résidus engendré par la méthode choisie [Abid 2010].

De façon générique, on peut distinguer deux grandes stratégies : la stratégie DOS pour *Dedicated Observer Scheme* et la stratégie GOS pour *Generalized Observer Scheme* (terminologies inspirées des structures dédiées à base d'observateurs)[Issury 2011].

Dans un schéma d'observateur dédié (DOS), le  $i^{me}$  observateur est piloté par la  $i^{me}$  entrée et toutes les sorties ; les  $m - 1$  autres entrées restantes sont considérées comme inconnues et la sortie de cet  $i^{me}$  observateur est insensible aux défauts des entrées non utilisées [Methnani 2012].

La figure 1.10 représente un schéma d'observateurs généralisés (GOS). Elle est relative à une structure où le  $i^{me}$  observateur est piloté par toutes les entrées sauf la  $k^{me}$  et toutes

les sorties. La sortie de cet observateur est donc sensible aux défauts de toutes les entrées sauf ceux de l'entrée  $u_k$ .

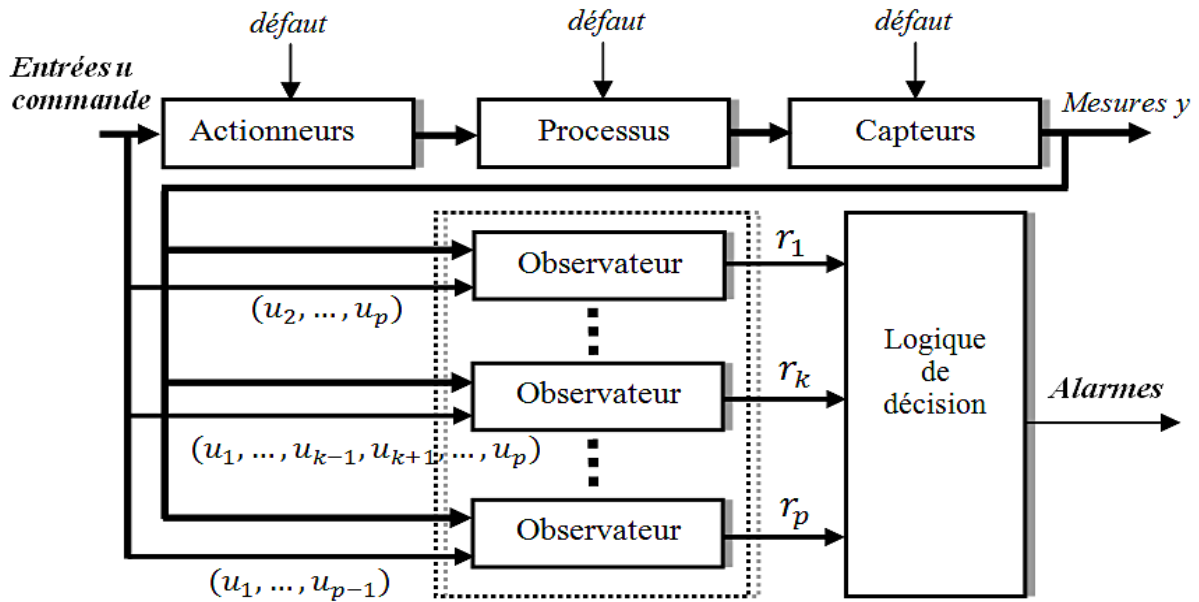


FIGURE 1.10: Observateurs GOS pour la détection des défauts actionneurs

La figure 1.11 représente un schéma d'observateurs généralisés (GOS). Elle est relative à une structure où le  $i^{me}$  observateur est piloté par toutes les sorties sauf la  $k^{me}$  et toutes les entrées. La sortie de cet observateur est donc sensible aux défauts de toutes les sorties sauf ceux de la sortie  $y_k$ .

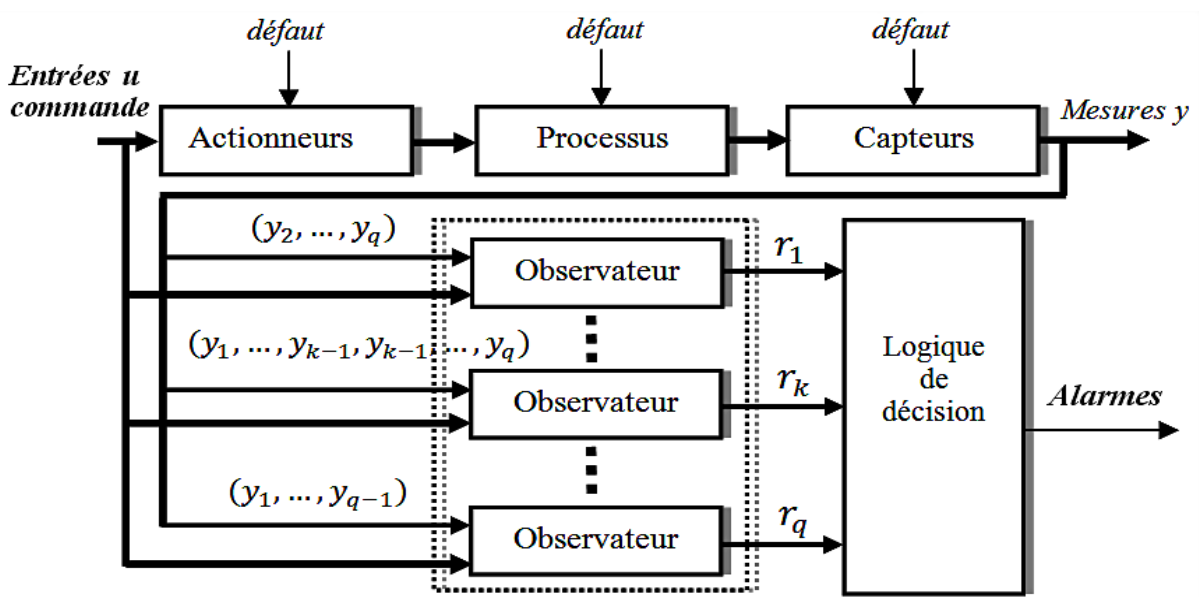


FIGURE 1.11: Observateurs GOS pour la détection des défauts capteurs

Le tableau 1.1 montre la matrice des signature théoriques des défauts pour la structure GOS.

Résidus	Défauts				
	$f_1$	$f_2$	...	$f_{p-1}$	$f_p$
$r_1$	0	1	...	1	1
$r_2$	1	0	...	1	1
...	...	...	...	...	...
$r_{p-1}$	1	1	...	0	1
$r_p$	1	1	...	1	0

TABLE 1.1: Signatures théoriques des défauts (Résidus généralisés)

La figure 1.12 représente un schéma d'observateurs dédiés (DOS). Elle est relative à une structure où le  $k^{me}$  observateur est piloté par l'entrée  $u_k$  et toutes les sorties. La sortie de cet observateur est donc sensible aux défauts de l'entrée  $u_k$ .

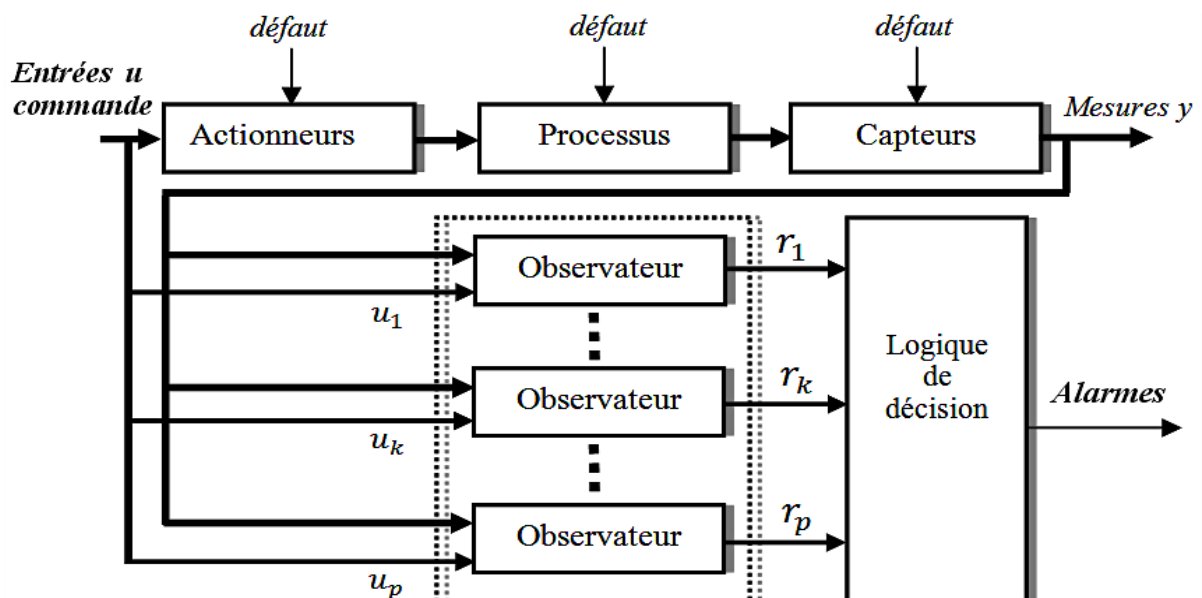


FIGURE 1.12: Observateurs DOS pour la détection des défauts actionneurs

La figure 1.13 représente un schéma d'observateurs dédiés (DOS). Elle est relative à une structure où le  $k^{me}$  observateur est piloté par la sortie  $y_k$  et toutes les entrées. La sortie de cet observateur est donc sensible aux défauts de la sortie  $y_k$ .

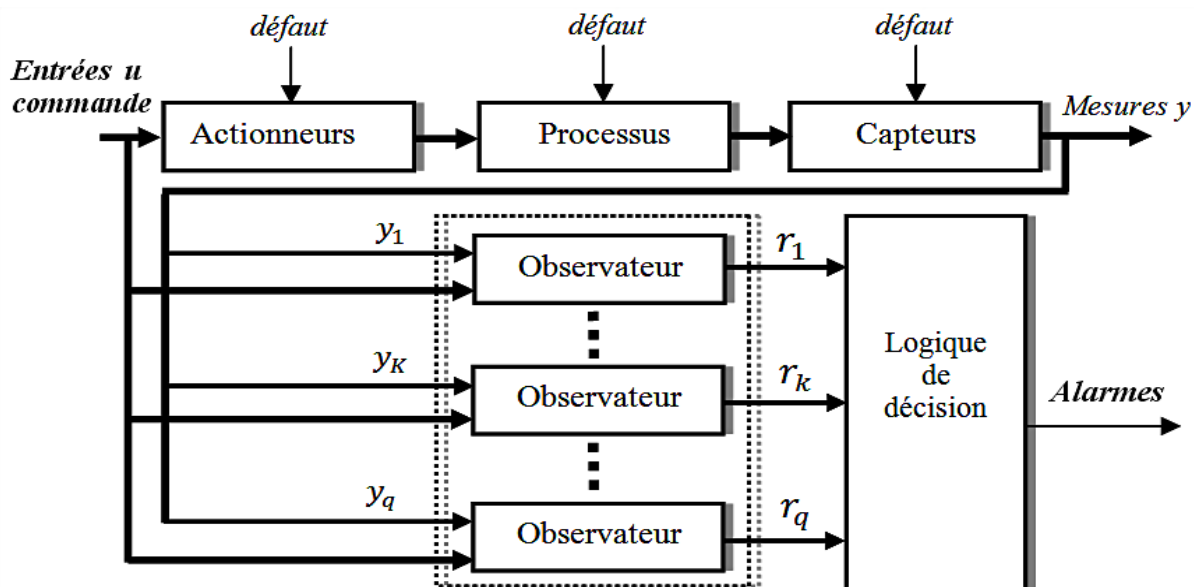


FIGURE 1.13: Observateurs DOS pour la détection des défauts capteurs.

Le tableau 1.2 montre la matrice des signature théoriques des défauts pour la structure GOS.

Résidus	Défauts				
	$f_1$	$f_2$	...	$f_{p-1}$	$f_p$
$r_1$	1	0	...	0	0
$r_2$	0	1	...	0	0
...	...	...	...	...	...
$r_{p-1}$	0	0	...	1	0
$r_p$	0	0	...	0	1

TABLE 1.2: Signatures théoriques des défauts (Résidus dédiés)

### 1.6.3 Méthodes d'identification de défauts

Bien qu'elle soit très importante dans un schéma de diagnostic, l'identification ou l'estimation du défaut a reçu moins d'intérêt dans les recherches scientifiques et spécialement pour les processus non-linéaires.

L'objectif de cette procédure consiste à déterminer (identifier) la caractéristique précise de la défaillance. L'identification ou l'estimation du défaut est une tâche plus délicate qui nécessite l'utilisation d'un modèle de comportement du processus de niveau élevé de connaissance sur les défaillances (le graphe du défaut, sa structure, sa dynamique)[Methnani 2012].

Obtenir une estimation du défaut permet bien entendu de donner une image beaucoup plus précise de l'état du processus et de mettre en œuvre des procédures de commande à savoir des procédures tolérantes aux défaillances.

## 1.7 Critères de performance d'un système de diagnostic

Pour l'évaluation des performances d'un processus de diagnostic il est nécessaire de prendre en considération un nombre de critères.

De manière générale, on relève : la détectabilité, l'isolabilité, la sensibilité, la robustesse, le coût économique et la durée de développement [Fellouah 2007].

- **La détectabilité** : est l'aptitude du processus de diagnostic à pouvoir détecter la présence d'une défaillance sur le procédé.  
Ce critère est fortement lié à la notion d'indicateurs de défauts (résidus), le générateur de résidu doit être généré de manière à détecter l'apparition du défaut le plus rapidement possible.  
Il faudra en fait se fixer un compromis entre le taux de fausses alarmes et celui de non-détection [Fellouah 2007].
- **L'isolabilité** : consiste en l'aptitude du processus de diagnostic à remonter directement à l'origine du défaut.  
Une défaillance engendre souvent une cascade d'alarmes et il peut être difficile de remonter à l'organe défaillant.  
Le degré d'isolabilité des défaillances est lié à la structure des résidus et à la procédure de détection elle-même [Fellouah 2007].
- **La sensibilité** : caractérise la capacité du processus de diagnostic à détecter des défauts.  
Ces défauts sont généralement caractérisés par une certaine amplitude, elle dépend non seulement de la structure des résidus mais aussi du rapport entre le bruit de mesure et le défaut [Comtet-Varga 1997].
- **La robustesse** : détermine la capacité du processus à détecter des défauts indépendamment des erreurs de modélisation (sensibilité du résidu aux défauts et insensibilité vis-à-vis des perturbations) [Fellouah 2007].  
Généralement, la robustesse est définie par rapport à toutes les entrées inconnues [Hamdi 2012]. Ceci se traduit par la génération de résidus dits robustes, c'est-à-dire, sensibles aux défauts tout en rejetant les perturbations et les signaux de commande.

Il existe cependant, d'autres critères qu'il est nécessaire de prendre en compte en pratique, tels que : Les aspects temps réel, la rapidité de détection, le coût et les contraintes ergonomiques et économiques.

## 1.8 Conclusion

Ce chapitre introduit les concepts fondamentaux en matière de détection de défaut en mettant l'accent sur la détection des défauts des processus non linéaires. Définitions de la nomenclature élémentaire tel que le défaut, la défaillance, la détection de défauts, l'identification et l'isolation de défaut ont été fournis.

La différence entre les défauts et les perturbations a été expliquée. Une classification des méthodes de détection de défaut a été présentée avec l'élaboration des principales caractéristiques de chaque approche.

Une attention particulière a été accordée aux approches de détection de défauts à base d'observateurs, et plusieurs approches solides développées dans le passé pour la génération de résidus ont été introduites.

# Chapitre 2

## Estimation d'état des systèmes non linéaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>28</b>
<b>2.2</b>	<b>Généralités sur les observateurs non linéaires</b>	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Observabilité des systèmes non linéaires</b>	<b>30</b>
<b>2.4</b>	<b>Conception d'observateurs d'état des systèmes non linéaires</b>	<b>32</b>
2.4.1	Observateur à entrées inconnues	32
2.4.2	Observateur de Luenberger étendu	32
2.4.3	Filtre de Kalman Etendu (EKF)	32
2.4.4	Observateurs basés sur les fonctions de Lyapunov : observateurs de Thau	33
2.4.5	Observateur grand gain	34
2.4.6	Observateur à mode glissant	35
2.4.7	Observateur adaptatif	35
<b>2.5</b>	<b>Représentation multi-modèle</b>	<b>36</b>
2.5.1	Modèle flou de type Takagi-Sugeno	38
2.5.2	Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS)	42
2.5.3	Fonctions de Lyapunov	56
<b>2.6</b>	<b>Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno</b>	<b>58</b>
<b>2.7</b>	<b>Observabilité des modèles TS</b>	<b>59</b>
<b>2.8</b>	<b>Reconstruction d'état des systèmes de Takagi-Sugeno</b>	<b>59</b>
2.8.1	Variables de décision mesurables (VDM)	60
2.8.2	Variables de décision non mesurables (VDNM)	62
<b>2.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>

---

## 2.1 Introduction

Les premiers articles traitants la synthèse d'observateurs ont été publiés au début des années 60 par Kalman [Kalman 1960] et par la suite par Luenberger [Luenberger 1971]. Ils portent sur la synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps dans un contexte déterministe ou stochastique. L'extension directe de ces résultats au cas non linéaire est obtenue à l'aide d'une linéarisation locale à l'ordre un de la dynamique du système : c'est la philosophie du filtre de Kalman étendu [Kalman 1961]. Toutefois, la stabilité globale de cet observateur en présence de fortes non-linéarités n'a pas été prouvée et ses performances ont été régulièrement mises en défaut en pratique.

La conception des observateurs non linéaires a débuté dans les années 70 [Slotine 1986, Gauthier 1992, Bornard 1991, Busawon 1998, Gauthier 1994]. Les premiers observateurs à apparaître consistaient en une synthèse pour une classe de systèmes dont les non linéarités sont linéarisables par injection de sortie, ou à l'aide de transformations d'état qui les rendent dépendantes uniquement des entrées et des sorties disponibles [Krener 1983, Krener 1985]. Le défaut majeur de cette approche réside dans le fait que ces transformations ne sont pas toujours réalisables et que structurellement la non-linéarité peut dépendre de l'état du système indépendamment de la base choisie. Leur application est donc réservée à une classe réduite de systèmes non linéaires [Fall 2015].

Plusieurs approches ont par la suite été explorées pour étendre la classe de systèmes considérée. Parmi celles-ci, citons tout d'abord les observateurs à mode glissant qui ont été largement étudiés et appliqués. Leurs difficultés de mise en oeuvre ont justifié d'une part l'apparition de différentes variantes concernant le choix de la fonction mathématique utilisée et d'autre part une extension aux ordres supérieurs. L'observateur grand gain continu a été initié par [Gauthier 1992] pour la classe des systèmes pouvant se mettre sous la forme canonique de Brunovski. Contrairement à l'approche proposée dans [Krener 1983], la non-linéarité peut maintenant dépendre de l'état du système, mais doit présenter une structure triangulaire inférieure. L'observateur assure une estimation précise des états avec une synthèse accessible à des non-automaticiens [Dabroom 2001, Farza 2004, Farza 2005, Nadri 2001]. L'implémentation est similaire à celle d'un observateur linéaire et le réglage du terme correctif est assuré par un seul paramètre de synthèse [Fall 2015].

Récemment, le passage d'une représentation d'état (SS) vers une représentation entrée/sortie (IO) -et inversement- dans le cadre des structures MMs a suscité un certain nombre de développements [Toth 2008, Toth 2009a, Toth 2009b]. Ces travaux s'inscrivent dans une procédure d'obtention des systèmes LPV (linéaires à paramètres variants) et nécessitent la sélection d'une structure du modèle (SS, IO, etc.). Dans ces études, la structure MM est utilisée pour l'obtention des paramètres de la représentation souhaitée à travers le passage équivalent.

Il est donc utile de donner en introduction un état de l'art sur la synthèse d'observateur pour les MMs, en rappelant toutefois quelques travaux réalisés dans le contrôle des systèmes non linéaires [Isidori 1995, Isidori 2000, Tanaka 2001b, Guerra 2006].

Dans ce qui suit, nous présentons les principaux travaux réalisés concernant la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires afin de justifier notre choix d'utiliser la structure MM.

Ce chapitre présente, d'une part, un ensemble de définitions relatives à l'observabilité des

systèmes dynamiques non linéaires. Contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires est liée aux entrées et aux conditions initiales. Nous rappelons ici la définition basée sur le concept d'indistinguabilité des états. Nous présentons aussi quelques algorithmes d'observation d'une façon non exhaustive, leur classification n'est pas unique. D'autre part, nous présentons les différentes techniques d'obtention des multimodèles, qui vont servir par la suite à la construction de multiobservateurs pour les systèmes non linéaires.

## 2.2 Généralités sur les observateurs non linéaires

Il convient de noter que la conception des observateurs utilisés à des fins de diagnostic est différente de celle des fins de contrôle. Les observateurs nécessaires pour le contrôle sont des observateurs de l'état qui sont utilisés pour estimer les états non mesurés. En revanche, les observateurs nécessaires à la FDI (Les observateurs de diagnostic) sont des observateurs des sorties, ils estiment les états mesurés. Les observateurs de l'état d'ordre plein comme le filtre de détection de défauts sont également largement utilisés pour la génération des résidus, la simplicité dans la conception permet l'isolation de défauts, des entrées inconnues, découplage etc.

Pour réaliser la tâche de reconstruction des variables non disponibles, des solutions théoriques performantes ont été développées, généralement basées sur un modèle mathématique représentant le comportement du système réel en fonctionnement sain.

Un système dynamique peut être représenté par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (2.2)$$

où  $x(t) \in R^n$  représente le vecteur d'état,  $u(t) \in R^{n_u}$  est l'entrée du système et  $y(t) \in R^{n_y}$  représente la sortie du système. Les fonctions  $g$  et  $h$  sont généralement non linéaires. Un observateur d'état est un système ayant pour entrées l'entrée du système  $u(t)$  et sa sortie  $y(t)$ , et ayant pour sortie le vecteur d'état estimé  $\hat{x}(t)$  :

$$\dot{z}(t) = F(z(t), u(t), y(t)) \quad (2.3)$$

$$\hat{x}(t) = G(z(t), u(t), y(t)) \quad (2.4)$$

tel que l'erreur d'estimation d'état  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  tende asymptotiquement vers zéro :

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

quelles que soient les conditions initiales  $x(0)$  du système non linéaire et de l'observateur  $z(0)$ .

L'objectif dans la conception d'un observateur est de déterminer les fonctions  $F$  et  $G$  afin d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro. Dans la pratique, la forme de l'observateur se résume souvent à une forme similaire à celle du système, à laquelle est rajouté un terme de correction basé sur l'écart entre la sortie mesurée et la sortie du système. Donc, un observateur correspond en général à un système d'ordre supérieur ou égal à celui du système observé.

## 2.3 Observabilité des systèmes non linéaires

Pour les systèmes non linéaires, contrairement aux systèmes linéaires, il n'existe pas de définition universelle pour l'observabilité [Oueder 2012]. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie.

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales [Zemouche 2007]. Dans ce qui suit, les différentes définitions d'observabilité seront données en considérant le système non linéaire décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \quad (2.6)$$

avec  $f : R^n \times R^m \rightarrow R^n$  et  $g : R^n \times R^m \rightarrow R^P$  continue.

### Définition 12

*Le système (17) est dit observable sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , si toute condition initiale  $x(t_0) = x_0$  est uniquement déterminée par l'entrée  $u(t)$  et  $y(t)$  la sortie correspondantes au système pour  $t \in [t_0, t_f]$  [Ellouze 2010].*

Pour mieux définir cette notion d'observabilité, il convient d'abord de définir la notion d'indistinguabilité (ou d'indiscernabilité).

### Définition 13

*Indistinguabilité Les deux états initiaux  $x_{01}$  et  $x_{02}$  sont indistinguables Si les deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée  $u(t), t \geq 0$  au système (17), respectivement.  $y_{01}(t)$  et  $y_{02}(t)$  sont identiques pour tout entrée  $u(t)$ .*

*Dans le cas contraire, on dit que  $x_{01}$  et  $x_{02}$  sont distinguables [Gauthier 81, Utkin 1977].*

### Définition 14

*Observabilité*

*Le système (17) est dit observable en  $x_0$  si  $x_0$  est distinguable de tout  $x \in R^n$ . Le système (17) est observable si  $\forall x_0 \in R^n, x_0$  est distinguable [Utkin 1977, Zemouche 2007].*

Si nous supposons que  $u$  et  $y$  sont connus, les dérivées de  $u$  et  $y$  peuvent être évaluées. Dans ce cas, le concept d'observabilité peut être interprété de manière claire. Pour un système SISO, nous définissons :

$$y^* = [ y \quad \dot{y} \quad \ddot{y} \quad \cdots \quad y^{(n-1)} ]^T \quad (2.7)$$

et

$$u^* = [ u \quad \dot{u} \quad \ddot{u} \quad \cdots \quad u^{(n-1)} ]^T \quad (2.8)$$

Chaque dérivée de la sortie peut être exprimée en fonction de l'état  $x$  et de  $\bar{u}$ , ce qui permet de poser :

$$y^{(i)} = \psi_i(x, u^*) \quad (2.9)$$

La dérivée de  $y^{(i)}$  est alors donnée par

$$y^{(i+1)} = \left( \frac{\partial \psi_i(x, u^*)}{\partial x} \right) f(x, u) + \left( \frac{\partial \psi_i(x, u^*)}{\partial u^*} \right) \frac{du^*}{dt} \quad (2.10)$$

En définissant l'opérateur linéaire  $M_g$  par :

$$(M_f \psi)(x, u^*) = \left( \frac{\partial \psi(x, u^*)}{\partial x} \right) f(x, u) + \left( \frac{\partial \psi(x, u^*)}{\partial u^*} \right) \frac{du^*}{dt} \quad (2.11)$$

alors les dérivées par rapport au temps de  $y^*$  s'écrivent :

$$y^* = \theta(x, u^*), \quad (2.12)$$

Où :

$$\theta(x, u^*) = \begin{bmatrix} g(x, u) \\ (M_f g)(x, u) \\ \vdots \\ (M_f^{n-1} g)(x, u) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Si la matrice d'observabilité  $\theta(x, u^*)$  est inversible, il existe  $\theta^{-1}$  telle que [Zemouche 2007] :

$$x = \theta^{-1}(y^*, u^*), \quad (2.14)$$

alors le système correspondant est observable. En plus, si la Jacobienne de la matrice d'observabilité,

$$J(y^*, u^*) = \frac{\partial \theta(x, u^*)}{\partial x} \quad (2.15)$$

est inversible en  $x_0$ , alors il existe un voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$  sur lequel  $\theta(x, u^*)$  est inversible. Dans ce cas, le système correspondant est localement observable, ce qui signifie que  $x_0$  est distinguable de tous les points de  $V_{x_0}$ .

Pour les systèmes multi-entrées, multi-sorties, l'étude s'effectue d'une manière similaire.

## 2.4 Conception d'observateurs d'état des systèmes non linéaires

Cette section présente quelques approches très étudiées dans la littérature ces dernières années, relatives au développement des observateurs pour des systèmes non linéaires.

### 2.4.1 Observateur à entrées inconnues

Les observateurs à entrées inconnues qui découplent les résidus des perturbations inconnues ont été introduits par les travaux pionniers de [Chen 2011, Wuennenberg 1986], puis un apport considérable a été fait dans [Ge 1989, Frank 1989, Frank 1994b].

L'inconvénient de cette approche est les conditions d'existence difficiles et la réduction de la détectabilité de défauts.

Afin de faire un meilleur compromis entre la robustesse et la sensibilité, au lieu de découpler complètement les entrées inconnues, beaucoup d'attention a été accordée à la conception des observateurs qui atténuent l'effet des entrées inconnues en fonction de  $H_2$  ou de l'indice  $H_\infty$  [Ding 1993, Qiu 1993].

### 2.4.2 Observateur de Luenberger étendu

Ce type d'observateur [Zeitz 1987] intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par l'intermédiaire d'un changement de coordonnées avec un gain qui dépend de l'état à estimer. L'idée pour le premier cas est basée sur la linéarisation du modèle et l'utilisation de la théorie de placement de pôles pour le calcul du gain, sous la condition que l'état reste toujours au voisinage de l'état d'équilibre.

Cet observateur peut provoquer des instabilités qui se manifestent en s'éloignant du point de fonctionnement. Les approches de changement de coordonnées ne peuvent être appliquées que pour une classe particulière des systèmes non linéaires. En effet, plusieurs méthodes proposent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui augmente la difficulté de la tâche de construction de l'observateur [Sallem 2013].

### 2.4.3 Filtre de Kalman Étendu (EKF)

Il est possible d'étendre quelques techniques d'observation utilisées dans les cas linéaires à des systèmes non linéaires. C'est le cas de l'observateur appelé Filtre de Kalman Étendu (Extended Kalman Filter" en anglais, EKF) [Oumayma 2012, Jazwinski 1970]. Cette approche permet le traitement du cas des bruits même si le caractère optimal est perdu par la linéarisation. Sa conception est basée sur une linéarisation locale du modèle du système autour de la trajectoire estimée par le filtre [Sallem 2013].

Le filtre de Kalman étendu est donc une extension du filtre de Kalman linéaire au cas où le système est décrit dans l'espace d'état par une équation différentielle non linéaire.

Cependant, quelques inconvénients peuvent être évoqués : le manque de preuve de convergence du filtre, la vitesse de reconstruction n'est pas garantie, le caractère local de l'approche valable autour d'une trajectoire nominale, le grand nombre de calculs en ligne dû à la mise à jour des estimations d'état et des matrices de covariance [Nagy Kiss 2010].

#### 2.4.4 Observateurs basés sur les fonctions de Lyapunov : observateurs de Thau

Ce type d'observateur est proposé par Thau [Thau 1973]. C'est une approche qui utilise des concepts du type Lyapunov pour construire des observateurs pour les systèmes non linéaires. Une application de cet observateur a été proposée par [Schreier 1997].

La formulation des systèmes non linéaires de Lipschitz a été largement utilisée dans l'élaboration des techniques FDI non linéaires, étant donné que dans certaines conditions, les systèmes non linéaires plus généraux peuvent être transformés en système non linéaire de Lipschitz comme décrit dans [Rajamani 1998]. La dynamique des systèmes non linéaires Lipschitz contiennent une partie linéaire et une partie non linéaire qui remplit la condition de Lipschitz. Sur la base des inégalités matricielles linéaires (LMI). La convergence est assurée si le gain associé à la partie linéaire est assez grand. Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $A \in R^{n \times n}$  et  $C \in R^{l \times n}$  tel que la paire  $(A; C)$  est supposée observable.  $f : R^n \rightarrow R^n$  est une fonction non linéaire, elle est supposée localement Lipschitz de constante positive  $\gamma$  dans un voisinage  $\nu$  de l'origine, c'est-à-dire :

$$\|f(x, u) - f(\hat{x}, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\|, \forall x, \hat{x} \in \nu \quad (2.17)$$

Le principe est de construire un observateur pour la partie linéaire et de montrer que la convergence s'étend au système avec la partie non linéaire sous certaines conditions. En supposant que la paire  $(A; C)$  est complètement observable, nous pouvons trouver une matrice de gain  $L \in R^{l \times n}$  et l'observateur est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + g(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

avec le gain de l'observateur  $L = P^{-1}C^{-1}$ , où  $P$  est la solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$A^T P + PA - C^T C + \omega P = 0 \quad (2.19)$$

tel que  $\omega$  est une constante positive choisie pour vérifier l'équation de Lyapunov ci-dessus.

Ce type d'observateur a l'avantage de la simplicité de la mise en œuvre quand une matrice de gain garantissant la stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation existe. Un des inconvénients réside dans la structure particulière du système non linéaire. Le choix du gain  $L$  résulte d'un processus d'essai qui peut devenir difficile, voire impossible, à réaliser pour des systèmes d'ordre élevé [Nagy Kiss 2010].

### 2.4.5 Observateur grand gain

Proposé dans [Gauthier 1992, Guerra 2005], l'observateur grand gain est développé pour les systèmes non linéaires à entrée affine basé sur une transformation non linéaire décrite dans [Gauthier 1992]. Sur la base du modèle du système transformé, un observateur non linéaire peut être conçu dont le gain est obtenu en résolvant une équation algébrique linéaire. Pour de tels systèmes, sous des hypothèses du type Lipschitz sur les non linéarités, Gauthier et al. Dans [Gauthier 1992, Grandvalet 2001] proposent un observateur dit "à grand gain". Considérons les systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + h(x(t))u(t), x \in R^n, u \in R^m \\ y(t) = g(x(t)), y \in R^l \end{cases} \quad (2.20)$$

pour lesquels est défini un difféomorphisme  $\Phi = [ h(x) \quad L_f g(x) \quad \cdots \quad L_f^{n-1} g(x) ]$  qui transforme le système (2.20) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ \varphi(x(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(x_1(t)) \\ h_2(\bar{x}_2(t)) \\ \vdots \\ h_{n-1}(\bar{x}_{n-1}(t)) \\ h_n(\bar{x}_n(t)) \end{bmatrix} u(t) \\ = F(x(t)) + G(x(t))u(t) \\ y(t) = C(x(t)) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $C = [ 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 ]$ ,  $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$ , les fonctions  $h_i (i = 1, \dots, n)$  sont globalement Lipschitz et  $\varphi$  est une fonction globalement Lipschitz de classe  $C^\infty$  sur  $R^n$ . Dans [Gauthier 1992], il est supposé que le système (2.21) est uniformément observable et un observateur de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) - S_\infty^{-1}C^T(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (2.22)$$

où  $S_\infty$  est la solution de l'équation :

$$-\omega_c S_\infty - A^T S_\infty - S_\infty A + C^T C = 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
- C &= [ 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 ] \in R^l \\
- A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} \in R^{n \times n}
\end{aligned}$$

- Le paramètre  $\omega_c$  permet d'ajuster la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation vers zéro. Le gain de l'observateur est seulement basé sur la partie linéaire du système et l'effet de la non-linéarité est rendu négligeable en choisissant une valeur suffisamment importante pour  $\omega_c$ , d'où le nom d'observateur "à grand gain".

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq K(\omega_c) \exp\left(-\frac{\omega_c}{3}t\right) \|\hat{x}_0 - x_0\| \quad (2.24)$$

avec  $K(\omega_c) \geq 0$

Cet observateur donne une réponse exponentielle aussi rapide que souhaitée en augmentant  $\omega_c$ ; cette technique est très utilisée et permet d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel.

Cependant, parfois il est difficile d'aboutir à la construction d'une structure triangulaire, en plus, nous pouvons avoir une sensibilité au bruit de mesure dans le cas d'un choix de gain trop grand.

L'algorithme de détection de défauts utilisant ce genre d'observateur à grand gain a été développé dans le travail de [Hammouri 1999].

### 2.4.6 Observateur à mode glissant

La propriété inhérente de l'observateur à mode glissant est sa robustesse aux incertitudes et perturbations [Yan 2007b, Yan 2007a, Yan 2008]. Il peut être appliqué à des systèmes non linéaires dont la dynamique comprend une partie linéaire et une partie non linéaire qui est Lipschitz par rapport aux états du système, les incertitudes et les perturbations sont supposées être bornées par une fonction non linéaire Lipschitz connue.

La conception de l'observateur à mode glissant consiste en deux étapes : la construction d'une surface de glissement et la conception d'une loi de contre-réaction qui commande les trajectoires du système à la surface de glissement en temps fini. Étant donné que les trajectoires atteignent la surface de glissement, l'estimation devient insensible aux perturbations extérieures.

La limitation de cette approche est l'exigence de mesures suffisantes et le phénomène de broutement causé par la rétroaction non linéaire dans l'observateur.

### 2.4.7 Observateur adaptatif

Parfois les paramètres du système varient au cours du temps ou bien ils sont inconnus. Nous avons donc besoin d'estimer simultanément les paramètres inconnus et l'état. L'idée est de combiner la connaissance du système physique avec des données expérimentales mesurables [Raghavan 1994, Rajamani 1998, Tsiniias 1989] ce qui permet de concevoir des observateurs adaptatifs.

Les premiers travaux concernant ce type d'observateur pour des systèmes linéaires à temps invariant ont été proposés dans [Kreisselmeier 1977, Luders 1973]. Ensuite, un tel observateur pour des systèmes non linéaires mono-entrée et mono-sortie, basé sur une transformation sous une forme canonique a été conçu dans [Bastin 1988]. Des observateurs adaptatifs utilisant la forme canonique d'observabilité qui fournissent une convergence asymptotique [Marino 1992], exponentielle [Marino 1995] ou qui prennent en compte de façon explicite des perturbations [Marino 2001] ont été synthétisés.

Cependant, tous ces résultats sont limités aux systèmes non linéaires dont la dynamique peut être linéarisée par un changement de coordonnées avec injection de sortie.

Un résultat qui traite une classe de systèmes qui ne peuvent pas être linéarisés par changement de coordonnées et injection de sortie est présenté dans [Zhang 2001]. La méthode proposée par l'auteur se base sur l'observateur adaptatif linéaire et les observateurs à grand gain. Le travail présenté dans [Bastin 1988] a proposé un observateur adaptatif non linéaire pour des systèmes mono-entrée/mono-sortie en se basant sur les concepts développés dans [Lüders 1974]. Il s'agit des systèmes qui peuvent être transformés dans une forme canonique observable. Tous ces travaux traitent le cas des systèmes linéairement paramétrés. Toutefois, la plupart des systèmes réels sont représentés par des modèles dont les paramètres connus et/ou inconnus interviennent de façon non linéaire. Des observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires multi-entrées multi-sorties uniformément observables et avec paramétrisation non linéaire ont été proposés plus récemment dans [Sallem 2013, Farza 2009].

Les avantages sont liés à l'estimation simultanée des états et des paramètres, ce type d'observateur offrant une robustesse vis-à-vis des variations paramétriques par rapport à un observateur d'état qui utilise des valeurs fixes des paramètres. Les inconvénients sont similaires à ceux pour les observateurs canoniques.

L'état de l'art des techniques existantes de synthèse d'observateurs a permis de donner des éléments d'appréciation des avantages et des inconvénients de chaque approche. En conclusion, certaines approches sont très liées à une structure particulière du système non linéaire, comme les observateurs à grand gain et ceux basés sur les techniques de Lyapunov. D'autres ne prennent pas en compte les incertitudes et les erreurs de modélisation, comme le filtre de Kalman étendu, les observateurs par linéarisation étendue, à grand gain ou ceux sous forme canonique. Enfin, certaines approches, comme par exemple celles basées sur l'optimisation, à modes glissants ou les observateurs adaptatifs, nécessitent un nombre de calculs très élevé.

## 2.5 Représentation multi-modèle

L'approche MM [Murray-Smith 1997, Leith 1999] est basée sur la décomposition du comportement dynamique du système en plusieurs zones de fonctionnement, chaque zone étant caractérisée par un sous-système. En fonction de la zone où le système évolue, chaque sous-système contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système [Nagy Kiss 2010].

L'idée principale s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles de structures simples (fréquemment linéaires) où chaque sous-modèle contribue de manière variable dans le temps au comportement global du système.

La contribution de chaque sous-modèle au modèle global, qui est une combinaison convexe des sous-systèmes, est définie par une fonction d'activation, en général non linéaire mais vérifiant la propriété de somme convexe [Bezzaoucha 2013]. Dans la littérature sont utilisées plusieurs terminologies équivalentes pour définir ce type de modèles : multi-modèle [Murray-Smith 1997] modèle flou de Takagi-Sugeno [Takagi 1985] modèle linéaire polytopique (PLM) [Angelis 2001] Parmi les premières publications offrant une présentation complète et générale des approches MMs on peut citer le livre de [Murray-Smith 1997]. Dans le contrôle des systèmes non linéaires, l'approche multi-modèle a également reçu une certaine attention [Tanaka 2001b, Boulkroune 2008, Boulkroune 2010] L'approche TS permet ainsi de réécrire un système non linéaire d'une manière plus facile à étudier en le décomposant en unités plus simples et maîtrisables. L'intérêt de réaliser une décomposition du système en utilisant ce type de modèles est que, grâce à la propriété de somme convexe, l'étude de stabilité, la synthèse de correcteurs et d'observateurs qui ont été largement étudiés dans le cas linéaire peuvent s'étendre au cas non linéaire avec des outils similaires.

On peut ainsi citer [Tanaka 2003, Tanaka 2007, Tuan 2001, Kruszewski 2006, Guerra 2006] où l'étude de la stabilité est inspirée des outils utilisés pour les systèmes linéaires. On peut aussi citer [Akhenak 2007, Patton 1998, Marx 2007, Ichalal 2009] pour leur travaux portant sur la synthèse d'observateurs et la détection de défauts [Bezzaoucha 2013]. La représentation Multi-modèle d'un système non linéaire peut être obtenue à partir de différentes structures. Une représentation d'état des sous-modèles permet de les mettre facilement en évidence. Cette représentation d'état du Multi-modèle revêt l'avantage d'être compacte, simple et plus générale qu'une présentation sous la forme d'une équation de régression entrée/sortie. De surcroît, la synthèse d'une loi de commande ou la construction d'observateurs non linéaires requièrent souvent une telle description du système [Oudghiri 2008a]. Les Multi-modèle constituent un outil efficace, particulièrement bien adapté à la modélisation des systèmes non linéaires sur une large plage de fonctionnement. Ils permettent d'obtenir un modèle doté d'une structure mathématiquement attractive et capable d'appréhender avec précision la complexité du système. En effet, une large classe de systèmes peut être approchée avec une précision imposée en augmentant le nombre des sous-modèles et en optimisant les fonctions de pondération. Les Multi-modèle offrent ainsi un excellent compromis entre complexité, précision, généralité et flexibilité.

Définissons quelques notions utiles dans la description d'un MM :

#### Définition 15

***Un espace de fonctionnement***

*est un espace vectoriel à l'intérieur duquel les variables d'un système évoluent (tenant éventuellement compte des bornes sur les variables) [Nagy Kiss 2010].*

#### Définition 16

***Une zone de fonctionnement***

*est un domaine issu du partitionnement de l'espace de fonctionnement du système [Nagy Kiss 2010].*

**Définition 17****Un sous-modèle (ou sous-système)**

est un modèle généralement simple de structure quelconque, mais souvent linéaire et/ou affine, qui représente le comportement du système non linéaire dans une zone de fonctionnement spécifique [Nagy Kiss 2010].

Une autre notion liée à ces fonctions est la notion de :

**Définition 18****variable de prémisse (ou décision)**

Ce nom est attribué à la variable  $z(t)$  intervenant dans les fonctions de pondération  $h_i(z(t))$ . Cette variable peut englober une ou plusieurs variables internes ou externes du système. Ces variables peuvent être soit accessibles à la mesure en temps réel (des signaux d'entrée du système ou même des variables d'état mesurables), soit inaccessibles à la mesure (des variables d'état non-mesurables). Retenons que la variable de prémisse  $z$  est une variable vectorielle :  $z \in R^p$ .

**Définition 19****Une fonction de pondération**

est une fonction, notée en général  $h_i(z(t)) : R^p \mapsto R$ , qui dépend des variables internes et/ou externes du système non-linéaire (variables de prémisse) [Nagy Kiss 2010].

Ces fonctions peuvent être construites de différentes façons :

- en utilisant des fonctions de type booléen,
- des fonctions à dérivées discontinues (fonctions triangulaires)
- ou des fonctions à dérivés continues (fonctions gaussiennes).
- Dans le cas continu la loi exponentielle est souvent utilisée, et s'applique aux différentes variables de prémisse, en effectuant une normalisation afin de respecter la propriété de somme convexe [Nagy Kiss 2010].
- En utilisant les bornes des variables de prémisse si celle-ci sont disponibles [Tanaka 2001b].

**2.5.1 Modèle flou de type Takagi-Sugeno**

Le modèle flou Takagi et Sugeno (*Fuzzy TS model*) [Takagi 1985] est défini par des règles "si-alors" qui représentent des modèles LTI. Ainsi, tout modèle flou TS d'un système non linéaire est composé d'un ensemble fini de modèles linéaires interconnectés grâce à des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe. Il est prouvé que les modèles flous de TS sont des approximateurs universels [Buckley 1992, Castro 1995, Oudghiri 2008a].

Un modèle flou de type TS utilise des règles comme suit :

Règle  $i$  :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } T_{i1} \text{ et, } \dots, \text{ et } z_p(t) \text{ est } T_{ip} \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

Où  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $i = 1, \dots, M$ ,  $M$  est le nombre de règles,  $F_{ij}$  sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous,  $j = 1, \dots, p$ ,  $u(t) \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in R^q$  est le vecteur de sortie,  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$  et  $C_i \in R^{q \times n}$ .

$z_1(t), \dots, z_p(t)$  sont les variables des prémisses qui peuvent être des fonctions des variables d'état, des entrées ou une combinaison des deux. A chaque règle est attribué un poids  $h_i(z(t))$  qui dépend du vecteur  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)] \in R^{n \times n}$  et du choix de l'opérateur logique [Oudghiri 2008a]. L'opérateur "et" est souvent choisi comme étant le produit, d'où :

$$h_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p T_{ij}(z_j(t)), \quad i = 1, \dots, M \text{ avec } h_i(z(t)) \geq 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (2.26)$$

Pour un triplet donné  $[x(t), u(t), z(t)]$ , la sortie finale du système flou est déduite à l'aide du centre de la méthode du gravité de défuzzification :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^M h_i(z(t))} = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.27)$$

où

$$h_i(z(t)) = \frac{h_i(z(t))}{\sum_{i=1}^M h_i(z(t))} \quad (2.28)$$

La fonction  $h_i(z(t))$  dite d'activation détermine le degré d'activation du  $i^{me}$  modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global. Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions dépendent généralement du vecteur d'état  $x(t)$ . Elles peuvent être de forme triangulaire, sigmoïdale ou gaussienne, et satisfont la propriété de somme convexe [Oudghiri 2008a].

Le signal de sortie est obtenu par la même technique.

$$y(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \quad (2.29)$$

La formulation mathématique des modèles TS [Takagi 1985] est donnée par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (2.30)$$

Les fonctions d'activation  $h_i(z(t))$  sont des fonctions non linéaires dépendant du paramètre  $z(t)$  pouvant être mesurable (par exemple l'entrée  $u(t)$  ou la sortie  $y(t)$  du système) ou non mesurable (l'état  $x(t)$  du système). Ces fonctions satisfont la propriété de somme convexe :

$$\begin{cases} 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) = 1 \end{cases}, \forall i = 1, \dots, M \quad (2.31)$$

La particularité d'un modèle TS est que les ensembles flous sont seulement utilisés dans la partie prémisse des règles. La partie conclusion est décrite par des modèles numériques. Cette particularité rend un modèle flou TS équivalent à un Multi-modèle. Les modèles flous TS peuvent être des modèles flous continus ou des modèles flous discrets [Tanaka 1995, Gasso 2000, Chadli 2002a]. Dans la suite de ce mémoire, seul le modèle continu est utilisé.

Les fonctions d'activation dépendent des variables dites de décision ou de prémisse. Ces variables peuvent être :

- Variables de décision mesurables (VDM) (entrées/sorties du système),
- Variables de décision non mesurables (VDNM) (état du système,..) c'est la classe la plus utilisée. Le modèle TS est obtenu généralement par la transformation en secteurs non linéaires, qui dans la majorité des cas, fait apparaître une partie ou la totalité des variables d'état dans les fonctions d'activation ([Yoneyama 2008, Bergsten 2000, Ichalal 2012]).

Les modèles TS peuvent être regroupés en trois formes distinctes :

**a) Modèles TS à états couplés ou homogènes**

L'état global  $x$  couple tous les états par le mélange des équations dynamiques des sous-modèles. Cette forme est facilement déduite de manière systématique, sans aucune perte d'information en utilisant la transformation par secteurs non linéaires à partir de l'expression analytique du système non linéaire dynamique.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

## b) Modèles découplés ou hétérogènes

Chaque sous-modèle possède un espace d'état propre dans lequel il évolue indépendamment. Un modèle découplé peut facilement s'écrire sous la forme d'un modèle couplé (en concaténant les états locaux  $x_i$ ). Les modèles découplés, sont surtout intéressants pour l'identification où les dimensions différentes des sous-modèles peuvent éviter une sur-paramétrisation dans certaines zones de fonctionnement [Ourjuela 2013].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) y_i \end{cases} \quad (2.33)$$

## c) La troisième famille de Multi-modèle TS à structure hiérarchique

(*HFS - hierarchical fuzzy system*) [Kikuchi 1988, Wang 1998] est un MM ayant une structure pyramidale et qui est constitué d'autres structures MMs. Cette structure a été créée pour faire face au nombre important de règles d'un modèle flou de Takagi-Sugeno, qui augmente de façon exponentielle avec le nombre des variables d'entrée [Liu 2005]. Dans la structure hiérarchique, le nombre de règles augmente linéairement avec le nombre des entrées. Cependant, [Kikuchi 1988] montre qu'il est impossible d'utiliser ce type de structure pour construire une expression exacte d'une fonction non linéaire quelconque. De plus, [Wang 1998] montre l'approximation arbitrairement proche d'une fonction par le MM hiérarchique.

Pour les Modèles TS à états couplés, la représentation d'un système non linéaire sous forme de modèle TS est obtenue par trois approches largement développées dans la littérature.

- Approche par identification de type boîte noire lorsque le système non linéaire n'a pas de forme analytique [Oudghiri 2008a].

Si l'on dispose par exemple des mesures d'entrées/sorties du système, il faut procéder par identification [Plamen 2004, Kukolj 2004, Johansen 1993, Abonyi 2001, Gasso 2002] en imposant une structure Multi-modèle [Johansson 1998]. Dans le cas des deux premières méthodes, les paramètres du Multi-modèle (paramètres des modèles locaux et des fonctions d'activation) sont obtenus en utilisant des algorithmes d'optimisation numériques en choisissant la structure du Multi-modèle ainsi que les fonctions d'activation.

Pour des systèmes représentés sous forme Multi-modèle, la commande multi-contrôleur a été largement étudiée [Wang 1996, Tanaka 1998, Guerra 2001, Chadli 2002a, Chadli 2005, Oudghiri 2008b]. L'approche de type PDC est souvent la plus utilisée [Oudghiri 2008a].

- Approche par linéarisation du système autour de plusieurs points de fonctionnement lorsqu'on dispose d'un modèle mathématique.
- Approche basée sur des transformations mathématiques lorsqu'un modèle analytique est disponible.

## 2.5.2 Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS)

Comme il a été déjà énoncé dans la section précédente, il existe trois approches permettant le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle TS. Ces approches visent à représenter les systèmes non linéaires sur un large domaine de fonctionnement.

### 2.5.2.1 Multi-modèle par identification

La structure du modèle ainsi que les fonctions d'activation sont tout d'abord choisies a priori [Ichalal 2009]. Elle est considérée dans le cas où l'expression analytique du modèle non linéaire n'est pas disponible et repose sur des techniques d'identification en utilisant des jeux de données entrées-sorties du système réel à identifier [Gasso 2000, Bezzaoucha 2013].

Pour l'identification des systèmes non linéaires par une approche Multi-modèle, il n'y a pas de méthodologie spécifique capable de conduire à une représentation unique d'un système.

Une première stratégie d'identification partitionne l'espace de fonctionnement du système à l'aide d'algorithmes de classification floue (*fuzzy clustering algorithms*) ou de *clustering* tels que : l'algorithme de *C-means*, l'algorithme de *C-varieties*, l'algorithme de *Gath-Geva*, l'algorithme de *Gustafson-Kessel* [Babuska 1998, Foulloy 2003, Ourjuela 2008]. Les classes obtenues représentent des zones homogènes de fonctionnement du système souvent caractérisables au moyen d'un sous-modèle linéaire. Par la suite, l'identification paramétrique des différents sous-modèles est accomplie.

Une deuxième stratégie de modélisation plus élaborée vise à automatiser la résolution des trois problèmes. L'idée est d'améliorer, au cours de la procédure d'identification, la précision du Multi-modèle à travers la minimisation d'un critère de performances basée sur une procédure itérative d'optimisation non linéaire [Ourjuela 2008]. Ces techniques de modélisation ont été largement développées afin d'identifier des systèmes non linéaires au moyen d'un Multi-modèle de TS. Le lecteur peut consulter le premier chapitre de l'ouvrage de référence édité par [Murray-Smith 1997] qui propose un état de l'art sur la question avant 1997 [Ourjuela 2008].

### 2.5.2.2 Multi-modèle par linéarisation

Elle consiste en la linéarisation du modèle non linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement. Des sous-modèles linéaires sont alors obtenus pour chaque zone de fonctionnement [Ichalal 2009]. En utilisant des techniques d'optimisation afin de minimiser l'erreur quadratique de sortie, les fonctions d'activation peuvent être générées [Akhenak 2004].

Dans ce cas, on dispose de la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour de différents points de fonctionnement judicieusement choisis [Abonyi 2001]. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $(f, g) \in R^{2n}$  sont des fonctions non linéaires continues,  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état et  $u(t) \in R^m$  est le vecteur d'entrée. Par la suite, nous représenterons le système non linéaire (2.34) par un Multi-modèle composé de plusieurs modèles locaux linéaires ou affines, tel que chaque modèle local est obtenu en linéarisant le système non linéaire autour d'un point de fonctionnement arbitraire  $(x_i, u_i) \in R^{n+m}$  [Johansen 1993, Murray-Smith 1997, Gasso 2000].

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + M_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (C_i x_m(t) + D_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (2.35)$$

avec :

$$A_i = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \left| \begin{array}{l} x = x_i \\ u = u_i \end{array} \right. , B_i = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \left| \begin{array}{l} x = x_i \\ u = u_i \end{array} \right. , M_i = f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i$$

$$C_i = \frac{\partial g(x,u)}{\partial x} \left| \begin{array}{l} x = x_i \\ u = u_i \end{array} \right. , D_i = \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \left| \begin{array}{l} x = x_i \\ u = u_i \end{array} \right. , N_i = g(x_i, u_i) - C_i x_i - D_i u_i$$

Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux (M) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation, ces dernières devant satisfaire les propriétés (2.31) [Akhenak 2004].

### 2.5.2.3 Multi-modèle des systèmes sous forme quasi-linéaire à paramètres variables

Une façon de résoudre le problème de la complexité des systèmes dynamiques non linéaires une procédure systématique de transformation d'un système non-linéaire en le réécrivant sous une forme Multi-modèle. Cette méthode est réalisée sans perte d'information, le choix de différents points de fonctionnement n'est plus nécessaire, le choix des variables de prémisse est réalisé d'une façon systématique.

En partant d'une forme générale du système non-linéaire, une représentation d'état quasi-linéaire à paramètres variables (quasi-LPV) est réalisée. En général, un nombre important de formes quasi-LPV peuvent être associées au système non-linéaire initial; chaque forme est associée à un ensemble particulier de variables de prémisse.

Choisir la forme quasi-LPV est équivalent à choisir l'ensemble des variables de prémisse. Cette représentation quasi-LPV constitue une forme polytopique, car les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à

coefficients constants calculées à partir des sommets du polytope [Nagy Kiss 2010].

Ceux-ci sont obtenus en utilisant la transformation polytopique convexe [Wang 1996]. Chaque sommet du polytope définit un sous-modèle linéaire, la non-linéarité du système global étant rejetée dans les fonctions de pondération des sous-modèles [Nagy Kiss 2010].

Cette méthode est plus générale que celle par secteur non linéaire, utilisée quand on fait référence aux modèles de type Takagi-Sugeno [Ohtake 2001, Tanaka 2001b]. Cette méthode est de donner une procédure systématique pour choisir la forme quasi-LPV, et par conséquent l'ensemble des variables de prémisse, la plus adaptée, tenant compte de l'objectif de l'étude (analyse de stabilité et performance, synthèse d'un contrôleur/observateur) [Nagy Kiss 2010].

### a) Multi-modèle par secteurs non linéaires

L'idée d'utiliser l'approche par secteur de non-linéarité dans la construction des modèles flous est apparue en [Tanaka 2001a]. Cette approche est basée sur l'idée suivante. Considérons un système non linéaire simple  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , où  $f(0) = 0$ . Le but est de trouver un secteur global de telle sorte que  $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1, a_2]x(t)$  [Bouarar 2009]. La figure 2.1 illustre l'approche par secteur de non-linéarité. Cette approche garantit une construction de modèle flou exact.

Cependant, il est parfois difficile de trouver des secteurs globaux pour les systèmes non linéaires généraux. Dans ce cas, on peut considérer la non-linéarité du secteur local. Cela est raisonnable en tant que variables de systèmes physiques sont toujours limitées.

La figure 2.2 montre la non-linéarité du secteur local, où deux lignes deviennent les secteurs locaux sous  $-d < x(t) < d$ . Le modèle flou représente exactement le système non linéaire dans la "région" "local", qui est,  $-d < x(t) < d$ . Les deux exemples suivants illustrent les étapes concrètes pour construire les modèles flous [Bouarar 2009].

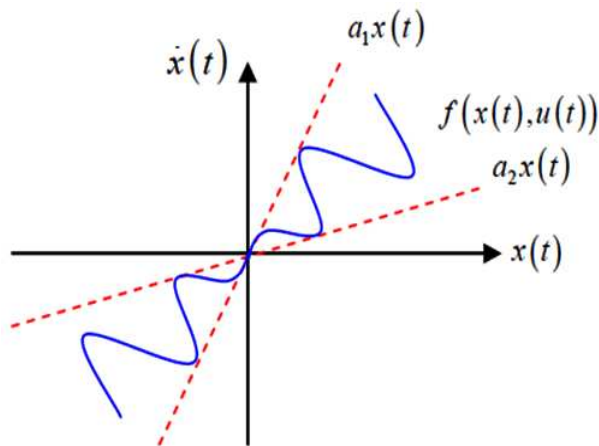


FIGURE 2.1: Secteur de non linéarité global

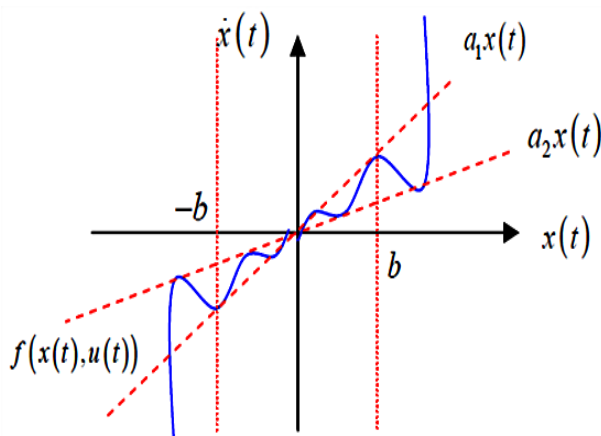


FIGURE 2.2: Secteur de non linéarité local

Cette dernière a été initiée par [Kawamoto 1992] et étendue par [Tanaka 2001b, Morère 2001]. Elle est basée directement sur la connaissance analytique du modèle non linéaire. Cette approche est connue sous le nom de transformation par *secteurs non linéaires*, [Ichalal 2009] elle permet de proposer une écriture systématique pour décrire les non-linéarités en tenant compte de l'objectif de l'étude (analyse de stabilité et synthèse de contrôleur, d'observateur,...) [Bezzaoucha 2013].

L'avantage de cette méthode est de ne pas engendrer d'erreur d'approximation et de minimiser le nombre de modèles locaux. Cette méthode est basée sur la bornitude des fonctions continues.

L'approche par secteurs non-linéaires inclue les étapes suivantes :

### 1. Écriture du système sous forme linéaire à paramètres variants (LPV) [Nagy Kiss 2010]

Considérons le modèle non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.36)$$

où les non linéarités sont exprimées par les fonctions  $f(x(t), u(t)) \in R^n$  et  $g(x(t), u(t)) \in R^l$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\xi(x, u))x(t) + B(\xi(x, u))u(t) \\ y(t) = C(\xi(x, u))x(t) + D(\xi(x, u))u(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

avec  $x(t) \in R^{n_x}$  l'état du système,  $u(t) \in R^{n_u}$  la commande et  $y(t) \in R^m$  la sortie.

## 2. Identification des non-linéarités

$z_j(\xi(t)) \in [z_{j,1}, z_{j,2}]$  où  $j = 1, \dots, k$  est l'ensemble des entrées non constantes dépendant de l'état dans les fonctions  $A(\xi(x, u))$ ,  $B(\xi(x, u))$ ,  $C(\xi(x, u))$ ,  $D(\xi(x, u))$  pour (2.37),  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  sont les bornes minimale et maximale de  $z_j(\xi(t))$ , respectivement, dans un ensemble compact prédéfinie qui contient l'origine.

Les non-linéarités  $z_j(\xi(t))$  peuvent alors s'écrire de la manière suivante [Morère 2001] :

$$z_j(\xi(t)) = z_{j,1}T_{j,1}(z_j(\xi(t))) + z_{j,2}T_{j,2}(z_j(\xi(t))) \quad (2.38)$$

où :

$$\begin{cases} z_{j,1} = \min_{x,u} \{z_j(\xi(t))\} \\ z_{j,2} = \max_{x,u} \{z_j(\xi(t))\} \end{cases} \quad (2.39)$$

## 3. Construction des fonctions de pondération

$$\begin{cases} T_{j,1}(z_j(\xi(t))) = \frac{z_{j,1} - z_j(\xi(t))}{z_{j,1} - z_{j,2}} \\ T_{j,2}(z_j(\xi(t))) = \frac{z_j(\xi(t)) - z_{j,1}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \end{cases}, \quad (2.40)$$

avec :

$$T_{j,2}(z_j) = 1 - T_{j,1}(z_j), \quad j \in \{1, \dots, k\}$$

## 4. Définition des fonctions d'appartenance

$$h_i(\cdot) = \prod_{j=1}^k T_{j,i_j}(z_j(\xi(t))), \quad i \in \{1, \dots, M\}, \quad i_j \in \{1, 2\} \quad (2.41)$$

## 5. Obtention des matrices au sommet de polytope

$$A_i = A(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1}, \quad B_i = B(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1}$$

$$C_i = C(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1}, \quad D_i = D(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1}$$

où :  $i \in \{1, \dots, M\}$  avec  $M = 2^k \in N$

**Les fonctions d'appartenance** satisfont la propriété de somme convexe dans  $C_x$  en raison de la façon dont ils sont construites, à savoir  $\sum_{i=1}^M h_i(\cdot) = 1$  et  $h_i(\cdot) \geq 0$

## 6. Réécriture du système sous forme de Multi-modèle de TS

Sur la base des étapes précédentes, le modèle non linéaire (2.37) peut être représenté exactement dans  $C_x$  par le modèle TS à temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i x(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i x(t)) \end{cases} \quad (2.42)$$

L'exemple suivant montre comment l'approche par secteurs non-linéaires est utilisée pour obtenir une représentation TS d'un modèle non linéaire.

### Exemple 1

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + x_2^2(t)\sqrt{x_1(t)} \\ x_1^2(t)\cos(x_2(t)) - x_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

#### 1. Écriture du système sous forme linéaire à paramètres variants (LPV)

Pour simplifier, nous supposons que  $x_1(t) \in [0, 4]$  et  $x_2(t) \in [-2\pi, 2\pi]$ . Bien sûr, nous ne pouvons assumer aucune plage pour  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  de construire un modèle flou. L'équation (2.43) peut-être écrite comme

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & x_2(t)\sqrt{x_1(t)} \\ x_1(t)\cos(x_2(t)) & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad (2.44)$$

où  $x(t) \in [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$ .

#### 2. Identification des non-linéarités

Les termes non linéaires sont les suivants :  $x_2(t)\sqrt{x_1(t)}$  et  $x_1(t)\cos(x_2(t))$

On peut définir  $z_1(t) = x_2(t)\sqrt{x_1(t)}$  et  $z_2(t) = x_1(t)\cos(x_2(t))$ . On obtient :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & z_1(t) \\ z_2(t) & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad (2.45)$$

Ensuite, le calcul des valeurs minimales et maximales de  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  sous  $x_1(t) \in [0, 4]$  et  $x_2(t) \in [-2\pi, 2\pi]$ . Ils sont obtenus comme suit :

$$\max_{x_1(t), x_2(t)} z_1(t) = 4\pi, \quad \min_{x_1(t), x_2(t)} z_1(t) = 0, \quad \max_{x_1(t), x_2(t)} z_2(t) = 4, \quad \min_{x_1(t), x_2(t)} z_2(t) = 0,$$

À partir des valeurs maximales et minimales,  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  peuvent être représentées par :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_2(t) \sqrt{x_1(t)} = z_{1,1}(z_1(t)) \cdot 4\pi + z_{1,2}(z_1(t)) \cdot 0, \\ z_2(t) &= x_1(t) \cos(x_2(t)) = z_{2,1}(z_2(t)) \cdot 4 + z_{2,2}(z_2(t)) \cdot 0, \end{aligned}$$

### 3. Construction des fonctions de pondération

$$\begin{aligned} z_{1,1}(z_1(t)) &= \frac{z_1(t)}{4\pi}, & z_{1,2}(z_1(t)) &= \frac{4\pi - z_1(t)}{4\pi}, \\ z_{2,1}(z_2(t)) &= \frac{z_2(t)}{4}, & z_{2,2}(z_2(t)) &= \frac{4 - z_2(t)}{4}, \end{aligned}$$

### 4. Définition des fonctions d'appartenance

$$\begin{aligned} h_1(z(t)) &= T_{1,1}(z_1(t)) \times T_{2,1}(z_2(t)), & h_2(z(t)) &= T_{1,1}(z_1(t)) \times T_{2,2}(z_2(t)), \\ h_3(z(t)) &= T_{1,2}(z_1(t)) \times T_{2,1}(z_2(t)), & h_4(z(t)) &= T_{1,2}(z_1(t)) \times T_{2,2}(z_2(t)), \end{aligned}$$

Nous appelons les fonctions d'appartenance " Positive, " " Négative, " " Grande " et " Petite ", respectivement. Ensuite, le système non linéaire (2.43) est représenté par le modèle flou suivant. Les figures 2.3 et 2.4 représentent les fonctions d'appartenance.

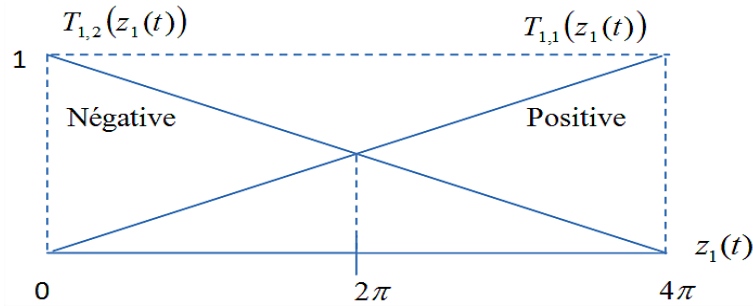


FIGURE 2.3: Fonctions d'appartenance

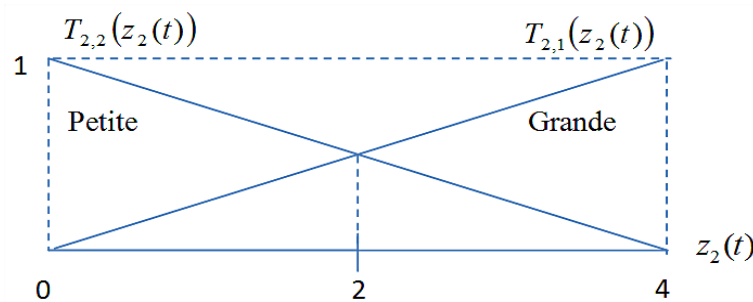


FIGURE 2.4: Fonctions d'appartenance

### 5. Obtention des matrices au sommet de polytope $h_i(\cdot) = 1$

#### Règle 1 du Modèle

**SI**  $z_1(t)$  est " positive " et  $z_2(t)$  est " grande, " **ALORS**  $\dot{x}(t) = A_1 x(t)$ .

**Règle 2 du Modèle**

**SI**  $z_1(t)$  est "positive" et  $z_2(t)$  est "petite," **ALORS**  $\dot{x}(t) = A_2x(t)$ .

**Règle 3 du Modèle**

**SI**  $z_1(t)$  est "négative" et  $z_2(t)$  est "grande," **ALORS**  $\dot{x}(t) = A_3x(t)$ .

**Règle 4 du Modèle**

**SI**  $z_1(t)$  est "négative" et  $z_2(t)$  est "petite," **ALORS**  $\dot{x}(t) = A_4x(t)$ .

On aura,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4\pi \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4\pi \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**6. Réécriture du système sous forme de Multi-modèle de TS**

La défuzzification est réalisée comme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.46)$$

Ce modèle flou représente exactement le système non linéaire dans la région  $[0, 4] \times [-2\pi, 2\pi]$  sur l'espace  $(x_1, x_2)$ .

Cette méthode peut être généralisée en utilisant la transformation polytopique convexe (TPC) [Nagy Kiss 2010].

**b) Multi-modèle par Transformation polytopique convexe (TPV)**

Le modèle non linéaire sous une forme d'état initial (2.36) peut être transformé en un modèle "quasi-linéaire à paramètres variables" dit "quasi-LPV". Cette forme représente une forme affine en l'état et en l'entrée du système non linéaire (2.36) [Nagy Kiss 2010].

L'approche par Transformation polytopique convexe inclue les étapes suivantes :

**1. Ecriture du système sous forme Q-LPV**

Le modèle non linéaire sous une forme d'état initial (2.36) peut être transformé en un modèle "quasi-linéaire à paramètres variables" dit "quasi-LPV". Cette forme représente une forme affine en l'état et en l'entrée du système non linéaire (2.36) et elle est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\xi(x(t), u(t))) x(t) + B(\xi(x(t), u(t))) u(t) \\ y(t) = C(\xi(x(t), u(t))) x(t) + D(\xi(x(t), u(t))) u(t) \end{cases} \quad (2.47)$$

où  $A(\xi(x(t), u(t))) \in R^{n \times n}$ ,  $B(\xi(x(t), u(t))) \in R^{n \times m}$ ,  $C(\xi(x(t), u(t))) \in R^{\ell \times n}$  et  $D(\xi(x(t), u(t))) \in R^{\ell \times m}$ . Le vecteur  $\xi(x(t), u(t)) \in C_x(R^{n_1+m_1})$ , avec  $n_1 +$

$m_1 \leq n + m$ , est une fonction de composantes d'état et d'entrée. La forme quasi-LPV du vecteur des paramètres  $\xi$  dépend des variables d'état  $x$  et d'entrée  $u$ , comme présenté dans [Huang 1999] :

$$\xi = \xi(x(t), u(t)) \quad (2.48)$$

## 2. Identification des non-linéarités

Soit  $k$  le nombre de fonctions non linéaires présentes dans le système. On les note  $z_i$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Supposons qu'il existe un compact  $C_x$  des variables  $\xi(x(t), u(t)) \in C_x(\mathbb{R}^{n_1+m_1})$  avec  $n_1 + m_1 \leq n + m$ , où les non-linéarités sont bornées :

On génère les  $2^k$  sous modèles d'un Multi-modèle caractérisé par les  $k$  variables de prémisses qui sont partitionnées en deux, à l'aide de la transformation polytopique convexe [Nagy Kiss 2010].

$z_j(\xi(t)) \in [z_{j,1}, z_{j,2}]$  où  $j = 1, \dots, k$  est l'ensemble des entrées non constantes dépendant de l'état dans les fonctions  $A(\xi(x, u))$ ,  $B(\xi(x, u))$ ,  $C(\xi(x, u))$ ,  $D(\xi(x, u))$ ,  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  sont les bornes minimale et maximale de  $z_j(\xi(t))$ , respectivement, dans un ensemble compact  $C_x$  prédéfinie qui contient l'origine.

Les scalaires  $\xi_{j,1}$  et  $\xi_{j,2}$  sont définis comme dans (2.49), pour tout  $j = 1, \dots, k$  : Les non-linéarités  $z_j(\xi(t))$  peuvent alors s'écrire de la manière suivante :

$$z_j(\xi(t)) = z_{j,1}T_{j,1}(z_j(\xi(t))) + z_{j,2}T_{j,2}(z_j(\xi(t))) \quad (2.49)$$

où :

$$\begin{cases} z_{j,1} \leq \min_{x,u} \{z_j(\xi(x, u))\} \\ z_{j,2} \geq \max_{x,u} \{z_j(\xi(x, u))\} \end{cases} \quad (2.50)$$

En particulier, on peut choisir :

$$\begin{cases} z_{j,1} \leq \min_{x,u} \{z_j(\xi(x, u))\} \\ z_{j,2} \geq \max_{x,u} \{z_j(\xi(x, u))\} \end{cases} \quad (2.51)$$

## 3. Construction des fonctions de pondération

En multipliant les fonctions qui décrivent ces partitions, on obtient la fonction de pondération  $h_i(z)$  correspondant au sous-modèle  $i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) :

$$\begin{cases} T_{j,1}(z_j(\xi(t))) = \frac{z_{j,2} - z_j(\xi(t))}{z_{j,1} - z_{j,2}} \\ T_{j,2}(z_j(\xi(t))) = \frac{z_j(\xi(t)) - z_{j,1}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \end{cases}, T_{j,2}(z_j) = 1 - T_{j,1}(z_j), j \in \{1, \dots, k\} \quad (2.52)$$

#### 4. Définition des fonctions d'appartenance

En multipliant les fonctions qui décrivent ces partitions, on obtient la fonction de pondération  $h_i(z)$  correspondant au sous-modèle  $i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) :

$$h_i(z) = \prod_{j=1}^k T_{j, \sigma_i^j}(z_j(\xi(x, u))) \quad (2.53)$$

Le nombre de sous-modèles  $M$  est égal à  $2^k$ .

Le vecteur d'indices  $\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^k)$ , les indices  $\sigma_i^j$  ( $i = 1, \dots, 2^k$  et  $j = 1, \dots, k$ ) sont égaux à 1 ou à 2 et indiquent quelle partition du sous-modèle  $i$  ( $T_{j,1}$  ou  $T_{j,2}$ ) est utilisée pour définir le sous-modèle  $j$ . La relation entre le numéro du sous-modèle  $i$  et les indices  $\sigma_i^j$  est donnée par l'équation suivante [Nagy Kiss 2010] :

$$i = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} ((\sigma_i^{k-j} - 1) \cdot 2^j) \quad (2.54)$$

#### 5. Obtention des matrices au sommet de polytope

$$\begin{aligned} A_i &= A(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1}, B_i = B(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1} \\ C_i &= C(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1}, D_i = D(z(\cdot)) \Big|_{h_i(\cdot) = 1} \end{aligned}$$

où :  $i \in \{1, \dots, M\}$ ,  $M = 2^k \in N$

Les fonctions d'appartenance satisfont la propriété somme convexe dans  $C_x$  en raison de la façon dont ils sont construits, à savoir :

$$\sum_{i=1}^M h_i(\cdot) = 1, h_i(\cdot) \geq 0$$

#### 6. Réécriture du système sous forme de Multi-modèle de TS

Sur la base des étapes précédentes, le modèle non linéaire peut être représenté exactement dans  $C_x$  par le modèle TS à temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i x(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i x(t)) \end{cases} \quad (2.55)$$

**Remarque 1**

Notez que la représentation TS d'un système non linéaire en utilisant la transformation polytopique convexe n'est pas unique, et elle est basée sur la sélection des variables de prémisses. En outre, le nombre de modèles linéaires augmente en fonction du nombre de non-linéarités  $k$  de façon exponentielle ; d'où l'importance de choisir un nombre minimal de non-linéarités comme variables de prémisses telle qu'une représentation TS reste numériquement utile à des fins de conception qui pourrait impliquer des conditions non optimales.

**Remarque 2**

En général, un modèle TS est une représentation locale du système non linéaire dans l'ensemble compact de l'espace d'état  $C_x = \{x : |x| \leq c\}$ . Cependant, un modèle global peut être obtenu si l'ensemble compact représente tout l'espace d'état :  $C_x \in R^{n_x}$ . L'exemple suivant montre comment l'approche par secteurs non-linéaires est utilisée pour obtenir une représentation TS d'un modèle non linéaire. Par ailleurs, une autre représentation du même modèle est présentée.

**Exemple 2**

Soit le système non linéaire donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1)^2 x_2 + \cos(x_2) x_2 \\ \dot{x}_2 = \cos(x_1) x_1 + \sin(x_2)^2 x_1 + (\cos(x_1) + \sin(x_2)) u \end{cases} \quad (2.56)$$

**1. Ecriture du système sous forme Q-LPV**

La première étape consiste en la représentation du système (2.56) sous forme quasi-LPV :

$$\dot{x}_1 = A(\xi(x, u)) x + B(\xi(x, u)) u \quad (2.57)$$

où  $\xi(x, u) \in C^1(R^{n+m})$  est formé d'une partie des états et des entrées.

En effectuant la transformation on peut facilement obtenir la forme suivante :

$$A(\xi(x, u)) = \begin{bmatrix} 0 & (\sin(x_1)^2 + \cos(x_2)) \\ \cos(x_1) + \sin(x_2)^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(\xi(x, u)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x_1) + \sin(x_2) \end{bmatrix}$$

**2. Identification des non-linéarités**

On construit l'ensemble de variables  $V_z = \{z_1, z_2, z_3\}$  :

$$z_1(x) = \sin(x_1)^2 + \cos(x_2), \quad z_2(x) = \cos(x_1) + \sin(x_2)^2, \quad z_3(x) = \cos(x_1) + \sin(x_2)$$

Le choix de ces variables  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ , appelées variables de prémisse, est lié directement à la forme quasi-LPV choisie.

Dans une deuxième étape, on applique la transformation polytopique convexe à chaque variable de prémisse  $z_j(x(t))$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) pour  $x_1 \in [-2\pi; 2\pi]$  et  $x_2 \in [-2\pi; 2\pi]$ .

On réalise alors pour chaque variable de prémisse une partition en deux zones et on obtient :

$$z_i(\xi(x, u)) = \sum_{j=1}^2 z_{i,j} T_{i,j}(z_i(\xi(x, u))), \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.58)$$

où :

$$\begin{cases} z_{j,1} = \min_x \{z_j(x)\} \\ z_{j,2} = \max_x \{z_j(x)\} \end{cases} \quad (2.59)$$

### 3. Construction des fonctions de pondération

Compte tenu des définitions (2.52), on a :

$$\begin{aligned} T_{1,2}(z_1(x)) &= \frac{(x_1^2 + x_2) - z_{1,1}}{z_{1,2} - z_{1,1}}, & T_{1,1}(z_1(x)) &= \frac{z_{1,2} - (x_1^2 + x_2)}{z_{1,2} - z_{1,1}} \\ T_{2,2}(z_2(x)) &= \frac{-x_1 x_2^2 - z_{2,1}}{z_{2,2} - z_{2,1}}, & T_{2,1}(z_2(x)) &= \frac{z_{2,2} + x_1 x_2^2}{z_{2,2} - z_{2,1}} \\ T_{3,2}(z_3(x)) &= \frac{x_1 \sin(x_2) - z_{3,1}}{z_{3,2} - z_{3,1}}, & T_{3,1}(z_3(x)) &= \frac{z_{3,2} - x_1 \sin(x_2)}{z_{3,2} - z_{3,1}} \end{aligned}$$

Les deux partitions  $T_{j,1}(z_j(x))$  et  $T_{j,2}(z_j(x))$  de chaque variable de prémisse  $z_j(x)$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) vont contribuer, à leur tour, à la construction de chaque fonction de pondération correspondante à un des sous-systèmes du Multi-modèle :

Il faut noter que  $A(\xi(x, u))$  fait intervenir les variables de prémisse  $z_1(x)$  et  $z_3(x)$ , alors que  $B(\xi(x, u))$  fait intervenir la variable de prémisse  $z_2(x)$ ; ainsi, on va évaluer les matrices  $A$  et  $B$  à partir des matrices sommets du polytope défini par les partitions des variables de prémisse intervenant dans ces matrices. Pour des raisons de clarté, on va écrire  $T_{j,1}(x)$  et  $T_{j,2}(x)$  au lieu de  $T_{j,1}(z_j(x))$  et  $T_{j,2}(z_j(x))$ .

### 4. Définition des fonctions d'appartenance

L'expression de  $A(\xi(x, u))$  est donnée par :

$$A(z_1(x), z_2(x)) = \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_2(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

En utilisant (2.49), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
A(z_1(x), z_2(x)) = & \\
& T_{1,1}(x)T_{2,1}(x)T_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1}(x) \\ z_{2,1}(x) & 0 \end{bmatrix} + T_{1,1}(x)T_{2,1}(x)T_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1}(x) \\ z_{2,1}(x) & 0 \end{bmatrix} \\
& + T_{1,1}(x)T_{2,2}(x)T_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1}(x) \\ z_{2,2}(x) & 0 \end{bmatrix} + T_{1,1}(x)T_{2,2}(x)T_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1}(x) \\ z_{2,2}(x) & 0 \end{bmatrix} \\
& + T_{1,2}(x)T_{2,1}(x)T_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2}(x) \\ z_{2,1}(x) & 0 \end{bmatrix} + T_{1,2}(x)T_{2,1}(x)T_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2}(x) \\ z_{2,1}(x) & 0 \end{bmatrix} \\
& + T_{1,2}(x)T_{2,2}(x)T_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2}(x) \\ z_{2,2}(x) & 0 \end{bmatrix} + T_{1,2}(x)T_{2,2}(x)T_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2}(x) \\ z_{2,2}(x) & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On procède d'une façon semblable, pour la matrice des entrées  $B(z_3(x))$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
B(z_3(x)) &= \begin{bmatrix} z_3(x) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= [T_{1,1}(x) + T_{1,2}(x)] [T_{2,1}(x) + T_{2,2}(x)] \left\{ T_{3,1}(x) \begin{bmatrix} z_{3,1} \\ 0 \end{bmatrix} + T_{3,2}(x) \begin{bmatrix} z_{3,2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Il résulte alors :

$$A(z_1(x), z_3(x)) = \sum_{i=1}^8 h_i(x) A_i \quad (2.61)$$

$$B(z_2(x)) = \sum_{i=1}^8 h_i(x) B_i \quad (2.62)$$

où les fonctions de pondération  $h_i(x)$  sont des combinaisons de fonctions  $T_{j,k}(x)$  ( $j = 1, 2, 3$  et  $k = 1, 2$ ) et où les matrices constantes  $A_i$  et  $B_i$  sont données par :

### 5. Obtention des matrices au sommet de polytope

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{2,1} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{2,2} & 0 \end{bmatrix} \\
A_5 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{2,1} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_7 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{2,2} & 0 \end{bmatrix} \\
B_1 = B_3 = B_5 = B_7 &= \begin{bmatrix} z_{3,1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_4 = B_6 = B_8 = \begin{bmatrix} z_{3,2} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 6. Réécriture du système sous forme de Multi-modèle de TS

La défuzzification est réalisée comme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.63)$$

Ce modèle flou représente exactement le système non linéaire dans la région  $[-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$  sur l'espace  $(x_1, x_2)$ .

Les figures 2.5 et 2.6 présentent la représentation des états du système non linéaire par un modèle de TS, et leurs fonctions d'activation respectivement.

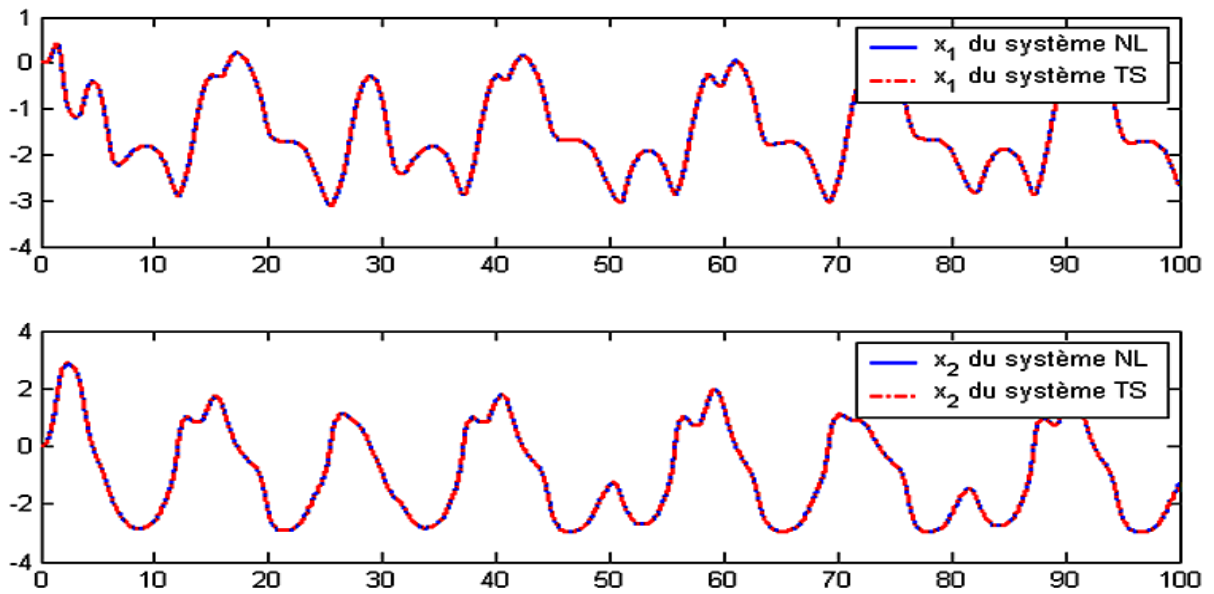


FIGURE 2.5: États système non linéaire et états système TS

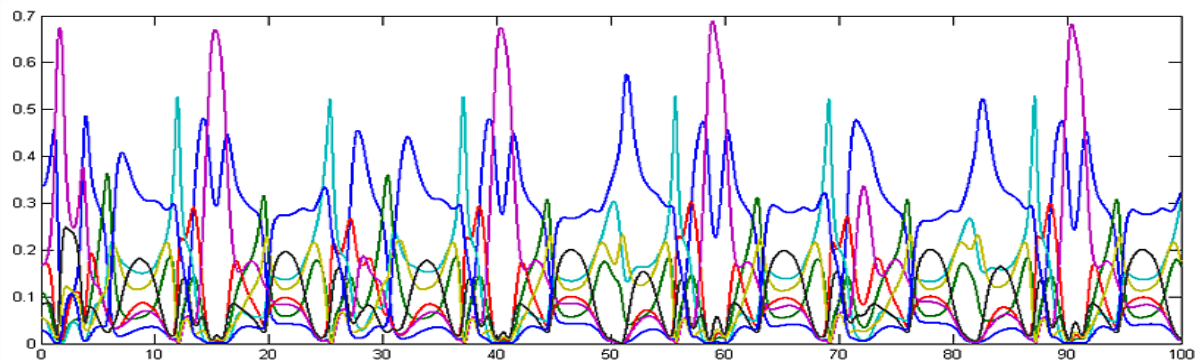


FIGURE 2.6: Fonctions d'activation du système TS

### 2.5.3 Fonctions de Lyapunov

La stabilité des systèmes non linéaires représentés par des modèles TS a fait l'objet de nombreux développements. La structure particulière de ce type de modèle a permis l'extension de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires pour le cas des systèmes non linéaires.

#### 2.5.3.1 Méthode directe de Lyapunov

Pour réaliser la connaissance des trajectoires, nous utilisons la méthode directe de Lyapunov. L'idée est d'étudier la variation d'une fonction scalaire définie positive pour conclure au sujet de la stabilité du système. Cette méthode est liée à la notion d'énergie : "Si l'énergie d'un système, étant linéaire ou non linéaire, est continuellement dissipée, alors ce système, appelé dissipative dans ce cas, peut tendre vers un point d'équilibre". On peut se référer à [Borne 1993, Khalil 1960, Zaidi 2015]. Ainsi, les théorèmes suivants précisent les conditions dans lesquelles un point d'équilibre d'un système est stable, selon la méthode directe de Lyapunov.

#### Théorème 1

*Stabilité locale ([Zaidi 2015])*

*S'il existe, dans la boîte  $B(\beta) = \{x, \|x\| \leq \beta\}$ , une fonction scalaire  $V(x)$  dont les premiers dérivées partielles sont continus, de telle sorte que :*

- $V(x(t))$  est définie positive.*
- $\dot{V}(x(t))$  est semi-définie négative.*

*Ensuite, le point d'équilibre est stable. Si  $\dot{V}(x)$  est définie négative en  $B(\beta)$ , puis, le point d'équilibre est asymptotiquement stable.*

#### Théorème 2

*Stabilité globale ([Zaidi 2015])*

*S'il existe une fonction scalaire  $V(x)$  dont les premières dérivées partielles sont continus, de telle sorte que :*

- $V(x)$  est définie positive.*
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x(t)) \rightarrow \infty$*
- $\dot{V}(x(t))$  est définie négative.*

*Ensuite, le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.*

La définition générale de la fonction de Lyapunov ne permet pas de trouver toutes les formes qu'ils peuvent prendre. Le choix de ce type de fonction et la structure du système étudié jouent un rôle important dans l'évolution des conditions de stabilité. Plusieurs fonctions qui correspondent à la définition des fonctions de Lyapunov ont été utilisées pour étudier la stabilité des systèmes. Ces fonctions dépendent de la structure du système étudié et le problème des résultats conservatisme est souvent en raison du choix de ces fonctions.

Dans le cas général, il n'existe pas une méthode pour trouver tous les fonctions candidates de Lyapunov. Par conséquent, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions de stabilité suffisantes lorsque le pessimisme dépend de la forme particulière de la fonction donnée  $V(x(t))$  et la structure du système. Cependant, nous utilisons souvent des fonctions bien connues de Lyapunov, selon la nature du système étudié : les systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes non linéaires, des systèmes incertains, des systèmes à retards, etc.

#### – Fonction quadratique

Lorsque nous nous concentrons sur les fonctions de Lyapunov, le premier type qui vient tout d'abord à l'esprit est la fonction quadratique ; c'est la forme la plus classique donnée par :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad P > 0 \quad (2.64)$$

où :

$$V(x(t)) = x(t)^T P^{-1} x(t), \quad P > 0 \quad (2.65)$$

où  $P \in R^{n_x \times n_x}$  est une matrice symétrique définie positive.

L'étude de la stabilité en utilisant ce type de fonctions a été la théorie de base de plusieurs ouvrages. On peut citer par exemple [Garcia 1997, Boyd 1994]. Afin d'améliorer le pessimisme de la stabilité quadratique, il est nécessaire d'utiliser d'autres fonctions de Lyapunov candidates telle que les fonctions poly-quadratiques.

#### – Fonction Poly-Quadratique

$$V(x(t), z(t)) = x(t)^T \left( \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) P_i \right) x(t) \quad (2.66)$$

où

$$V(x(t), z(t)) = x(t)^T \left( \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x(t) \quad (2.67)$$

avec  $P_i > 0, h_i(z(t)) > 0, \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) = 1$ . Il permet de relaxer les contraintes qui sont imposées par la méthode quadratique, dans le cas de l'approche Multi-modèle. Ce type est un cas général des fonctions quadratiques quand  $P_i = P, i = 1, \dots, M$ . On notera également que, contrairement aux fonctions du second degré, ce type de fonction présente l'avantage de prendre la vitesse de variation des variables de décision du Multi-modèle continu en compte. Cela peut conduire à des conditions de stabilité moins conservatrices [Jadbabaie 1999, Chadli 2000, Morere 2000, Blanco 2001, Tanaka 2001b].

### – Fonction Paramétrique affine

Cette fonction est de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x(t)^T P(\theta)x(t) \quad (2.68)$$

où  $P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \dots + \theta_k P_k > 0$ . Ce type de fonctions est généralement utilisé pour les systèmes linéaires avec des paramètres variables dans le temps incertains :  $\dot{x}(t) = A(\theta)x(t)$  avec  $A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_k A_k$  où les paramètres  $\theta_i$  et leurs variations sont bornés. L'expression (2.68) généralise les fonctions de Lyapunov quadratiques correspondant à  $P_1 = \dots = P_k = 0$ . Ils sont moins conservatrices que des fonctions quadratiques, car ils prennent les variations des paramètres en compte [Gahinet 1996, Bara 2001].

## 2.6 Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno

La stabilité des systèmes non linéaires représentés par des modèles TS a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. La structure particulière de ce type de modèle a permis l'extension de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires pour le cas des systèmes non linéaires. Soit un système de Takagi-Sugeno autonome, représenté par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) A_i x(t) \quad (2.69)$$

La stabilité d'un Multi-modèle de TS est assurée si les conditions, sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires [Boyd 1994], des théorèmes suivants sont satisfaites [Tanaka 1998].

### **Théorème 3**

([Chadli 2002a]) *Le Multi-modèle de TS (2.32) à temps continu est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $R$  telle que les LMI suivantes soient vérifiées :*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (2.70)$$

Ce théorème est obtenu grâce à la seconde méthode de Lyapunov sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique de la forme  $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$  où  $P = P^T > 0$ . D'après ces théorèmes, la stabilité du Multi-modèle est liée, d'une part, à la stabilité de tous les sous-modèles et, d'autre part, à l'existence d'une matrice de Lyapunov  $P$  commune à tous les sous-modèles [Ourjuela 2008].

[Tanaka 1998] ont montré que si le nombre  $M$  de sous-modèles est important, il est difficile de trouver une matrice commune  $P$  satisfaisant simultanément les LMIs.

**Théorème 4**

([Chadli 2002a]) Supposons qu'il existe des matrices symétriques et définies positives  $P_i$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  et des scalaires positifs  $\tau_{ijk}$ , vérifiant les inégalités suivantes :

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^M \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0 \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (2.71)$$

alors le Multi-modèle (2.69) est globalement asymptotiquement stable [Akhenak 2004].

Ce théorème est basé sur une approche qui consiste à chercher des matrices  $P_i$  au lieu d'une seule matrice commune  $P$  [Tanaka 2003, Chadli 2002b] ce qui relaxe les contraintes de stabilité du théorème 1. Par la suite, une fonction de Lyapunov non quadratique a été introduite exploitant l'idée de fonction continue par morceaux. Elle est définie par :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_M(x(t))) \quad (2.72)$$

où :

$$V_i(x(t)) = x^T(t) P_i x(t), \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (2.73)$$

Ce type de fonctions a été utilisé dans le cadre des systèmes LPV dans [Boyd 1994] et dans le cadre des systèmes de Takagi-Sugeno dans [Chadli 2002a, Johansson 1999].

## 2.7 Observabilité des modèles TS

Pour les modèles non linéaire TS, une condition nécessaire d'observabilité peut être donnée par la contrainte d'observabilité des modèles locaux, i.e. de chaque paire  $(A_i, C_i)$  des sous-modèles du système, ou au moins leur détectabilité [Ichalal 2009, Kamidi 2000, Angelis 2001, Bezzaoucha 2013].

La construction d'un observateur exige la propriété d'observabilité, initialement formalisée par [Herman 1977]. Cette propriété se traduit par la capacité de reconstruire l'état à partir des entrées et des sorties du système. Cette propriété peut être définie d'une façon générale en se basant sur la notion d'indistinguabilité (ou d'indiscernabilité) d'une paire d'états, qui est présentée en détail dans [Herman 1977], ou plus récemment dans d'autres publications qui portent sur l'observabilité des systèmes non linéaires, comme par exemple dans [Besançon 2007]. Une synthèse élaborée sur l'observabilité des systèmes non linéaires est donnée dans [Bornard 1993].

## 2.8 Reconstruction d'état des systèmes de Takagi-Sugeno

Dans les applications pratiques, l'état d'un système est ne souvent pas facilement disponibles. Dans de telles circonstances, la question se pose de savoir s'il est possible de déterminer l'état de la réponse du système à une certaine entrée sur une certaine période de temps. Pour les systèmes linéaires, un observateur linéaire fournit une réponse affirmative si le système est observable.

Considérons le modèle TS donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.74)$$

où  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in R^m$  est le vecteur d'entrées et  $y(t) \in R^p$  représente le vecteur de sortie. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C$  sont de dimensions appropriées.  $h_i(\xi(t))$  sont les fonctions d'activation des modèles locaux et  $\xi(t)$  représente le vecteur de variables de décision qui peuvent dépendre de l'état, des sorties ou des entrées [Akhenak 2004]. L'estimation de l'évolution des variables d'état du système est réalisée à l'aide d'un observateur. Il reconstruit l'état du système à partir des entrées, des sorties et du Multi-modèle du système.

L'observateur le plus largement développé dans la littérature est une extension de celui de Luenberger proposé dans [Luenberger 1971] pour les systèmes linéaires :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.75)$$

Afin de déterminer les gains  $L_i$  de l'observateur (2.75), la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état est étudiée, cette dernière étant définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.76)$$

Sa dynamique est régie par une équation différentielle qui dépend de la connaissance ou non des variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation. On définit alors deux cas selon que les variables de décision sont mesurables ou non mesurables [Ichalal 2009].

### 2.8.1 Variables de décision mesurables (VDM)

La majorité des travaux sur la conception des observateurs d'état pour les systèmes TS est basée sur l'hypothèse que les variables de décision sont disponibles.

Par conséquent, l'observateur utilise les mêmes variables de décision que ceux du modèle du système, ce qui permet une factorisation par les fonctions d'activation lorsque nous faisons l'évaluation de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état. Plus précisément, il est écrit comme suit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) (A_i - L_i C_i) e(t) \quad (2.77)$$

Les gains  $L_i$  de l'observateur sont déterminés par analyse de la stabilité du système TS (2.77). Dans [Patton 1998], l'analyse de la stabilité via une fonction de Lyapunov quadratique a permis l'obtention de conditions LMIs pour la synthèse de l'observateur [Bezzaoucha 2013].

**Théorème 5**

([Patton 1998]) L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice  $P = P^T > 0 \in R^{n \times n}$  et des matrices  $K_i \in R^{n \times n_y}$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$PA_i + A_i^T P - K_i C - C^T K_i^T < 0, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.78)$$

Les gains de l'observateur sont obtenus à partir de l'équation :

$$L_i = P^{-1} K_i \quad (2.79)$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur l'étude de la stabilité par la théorie de Lyapunov en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique. L'importante propriété de somme convexe des fonctions d'activation a permis l'obtention de conditions suffisantes de stabilité du système (2.77) générant l'erreur d'estimation d'état. Afin d'obtenir des inégalités linéaires, le changement de variable  $K_i = PL_i$  est utilisé.

Dans le cas où la sortie dépend d'une seule matrice  $C$  (2.74), les mêmes relaxations qu'en analyse de stabilité peuvent être faites. Pour une sortie polytopique ( $y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t)$ ), le conservatisme de l'étude de stabilité d'un système défini par une double somme peut être réduit [Tuan 2001, Sala 2007, Bezzaoucha 2013]. Pour assurer la vitesse de la convergence de l'erreur d'estimation d'état du multiobservateur (2.75), il est nécessaire d'affecter toutes les valeurs propres des observateur locaux, dans une région spécifique  $S(\alpha, \beta)$  (figure 2.7), qui est l'intersection entre un cercle, de centre  $(0, 0)$ , de rayon  $\beta$  et du demi-plan gauche limité par une droite d'abscisse égale à  $(-\alpha)$ .

**Corollaire 1**

Les observateurs locaux d'un multiobservateur ont des valeurs propres dans la région  $S(\alpha, \beta)$ , s'il existe une matrice  $P$  définie positive telle que pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\beta P & (A_i - L_i C)^T P \\ P(A_i - L_i C) & -\beta P \end{bmatrix} < 0 \\ (A_i - L_i C)^T P + P(A_i - L_i C) + 2\alpha P < 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

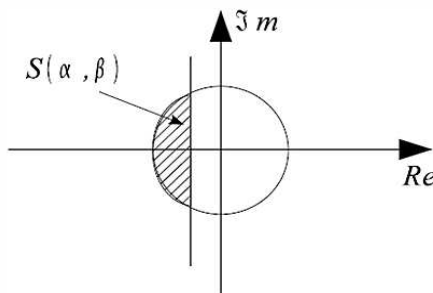


FIGURE 2.7: Région du plan complexe

Si les valeurs propres de toutes les matrices d'état des observateurs locaux  $(A_i - L_i C)$

pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  sont dans la région  $S(\alpha, \beta)$ , les pôles de la dynamique de l'erreur du multiobservateur sont dans la région  $S(\alpha, \beta)$  [Akhenak 2004].

## 2.8.2 Variables de décision non mesurables (VDNM)

Dans le cas où les variables de décision ne sont pas connues, leur factorisation n'est plus possible et l'équation d'évolution de l'état s'écrit alors sous la forme [Bezzaoucha 2013] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M (h_i(\hat{z}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + (h_i(z(t)) - h_i(\hat{z}(t))) (A_i x(t) + B_i u(t))) \quad (2.81)$$

L'observateur le plus commun pour ce type de systèmes consiste en une extension TS de l'observateur de Luenberger [Luenberger 1971]. Il est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{z}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.82)$$

En utilisant les équations (2.81) et (2.82), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est ainsi donnée par [Bezzaoucha 2013] :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \left( \mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i - G_i C) e(t) + \Delta A(t) x(t) + \Delta B(t) u(t) \right) \quad (2.83)$$

où  $\Delta A(t)$  et  $\Delta B(t)$  jouent le rôle d'incertitudes et sont définies comme suit [Bezzaoucha 2013] :

$$\begin{cases} \Delta A(t) = \sum_{i=1}^M \left( \mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t)) \right) A_i = M_A F_A I_A \\ \Delta B(t) = \sum_{i=1}^M \left( \mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t)) \right) B_i = M_B F_B I_B \end{cases} \quad (2.84)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_A &= [A_1 \cdots A_n], F_A = \text{diag}(\delta_1(t) I_{n_x}, \dots, \delta_n(t) I_{n_x}), I_A = [I_{n_x} \cdots I_{n_x}]^T, \\ M_B &= [B_1 \cdots B_n], F_B = \text{diag}(\delta_1(t) I_{n_u}, \dots, \delta_n(t) I_{n_u}), I_B = [I_{n_u} \cdots I_{n_u}]^T, \\ \delta_i(t) &= \mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t)) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Les gains de l'observateur sont ainsi donnés par le théorème suivant [Bezzaoucha 2013] :

**Théorème 6**

([Ichalal 2010]) Le système (2.83) assurant la convergence de l'état de l'observateur (2.82) vers l'état du système (2.81) est stable et le gain  $L_2$  du transfert de la paire  $u(t)$ ,  $x(t)$  vers l'erreur d'estimation est borné par  $\gamma$ , s'il existe deux matrices symétriques et définies positives  $P_1 \in R^{n_x \times n_x}$  et  $P_2 \in R^{n_x \times n_x}$ , des matrices  $K_i \in R^{n_x \times m}$  et des scalaires positifs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\bar{\gamma}$  tels que les LMIs suivantes soient vérifiées pour  $i, j = 1, \dots, n$  :

$$\begin{pmatrix} S(P_1 A_1 - K_i C) + I_{n_x} & 0 & 0 & P_1 M_A & P_1 M_B \\ * & S(P_2 A_j) + \lambda_1 I_A^T I_A & P_2 B_j & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{\gamma} I_{n_u} + \lambda_2 I_B^T I_B & 0 & 0 \\ * & * & * & -\lambda_1 I & 0 \\ * & * & * & 0 & -\lambda_1 I \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Les gains de l'observateur et le taux d'atténuation  $\gamma$  du transfert des incertitudes vers l'erreur d'estimation sont donnés par :

$$L_i = P_1^{-1} K_i \quad (2.87)$$

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \quad (2.88)$$

**2.9 Conclusion**

Ce chapitre a permis de présenter, un état de l'art non exhaustif sur les différents types d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Les concepts de base relatifs aux modèles TS ainsi que des conditions suffisantes de stabilité ont été explorés.

La méthode utilisant la transformation par Transformation polytopique convexe (TPC) a fait l'objet d'un rappel détaillé.

Les multi-modèle développés ont été utilisés pour l'estimation d'état du système non linéaires à variables de décision mesurable et à variable de décision non mesurable.



# Chapitre 3

## Augmentation du système TS et estimation d'état

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>66</b>
<b>3.2</b>	<b>Natures des incertitudes</b>	<b>67</b>
3.2.1	Incertitudes structurées	67
3.2.2	Incertitudes non structurées	68
<b>3.3</b>	<b>Estimation d'état du système TS à VDM incertain en présence d'entrées inconnues</b>	<b>68</b>
<b>3.4</b>	<b>Estimation d'état du système TS à VDNM incertain en présence d'entrées inconnues</b>	<b>75</b>
<b>3.5</b>	<b>Principe d'augmentation d'état et synthèse d'observateur à entrées inconnues</b>	<b>80</b>
<b>3.6</b>	<b>Augmentation du système à VDM et estimation d'état</b>	<b>84</b>
<b>3.7</b>	<b>Augmentation partielle du système et synthèse d'observateur à entrées inconnues</b>	<b>87</b>
3.7.1	Augmentation partielle du système à VDM et estimation d'état	87
3.7.2	Augmentation partielle du système TS à VDNM et estimation d'état	91
3.7.3	Construction de l'observateur par l'approche $L_2$	94
<b>3.8</b>	<b>Estimation des entrées inconnues</b>	<b>96</b>
<b>3.9</b>	<b>Augmentation du système TS et synthèse d'observateurs PI</b>	<b>99</b>
3.9.1	Variables de décision mesurables	99
3.9.2	Variables de décision non mesurables VDNM	103
<b>3.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans tous les systèmes de contrôle ou de diagnostic basés sur des modèles, la performance du système est directement liée à la précision du modèle. Le diagnostic des systèmes non linéaires à base d'observateur a connu un grand intérêt dans les travaux de recherche, ce qui a engendré le développement de plusieurs approches pour la synthèse de nombreuses formes d'observateurs. En outre, la modélisation et l'estimation des états consomment du temps et même si beaucoup de temps est consacré, il y aura toujours des erreurs de modélisation. Cela est particulièrement vrai s'il y a des contraintes sur la complexité du modèle, comme cela est le cas dans la plupart des applications en temps réel. Un autre cas est que le modèle développé dans un but, par exemple de contrôle, existe mais il doit être amélioré avant qu'il puisse être utilisé à d'autres fins, par exemple pour le diagnostic. Autrement dit, il existe un grand nombre de modèles, sur lesquels beaucoup de temps de modélisation est passé, qui doit être améliorés avant de pouvoir les utiliser dans une application. Ci-après, ces modèles déjà disponibles seront appelés modèles de référence. Il existe un désir d'avoir une méthode systématique pour améliorer ces modèles de référence sans impliquer davantage le système ou les efforts de modélisation des composants pour pouvoir estimer les états des systèmes en présence d'entrées inconnues.

Une entrée inconnue peut être interprétée par toute cause possible pouvant affecter le système (bruit de mesure, défaut, incertitude de modélisation...).

Pour améliorer la qualité de l'estimation, il est important d'étudier les problèmes d'estimation d'état en présence d'entrées inconnues et d'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues.

Fondamentalement, l'idée est d'augmenter le modèle de référence avec les états des entrées inconnues pour compenser les erreurs. Ensuite, le modèle augmenté peut être utilisé dans toute conception d'un estimateur approprié pour obtenir un estimateur qui permettra de réduire les erreurs par rapport à l'utilisation directe du modèle de référence. Plusieurs travaux ont traité l'estimation d'état moyennant l'augmentation d'état du modèle pour les systèmes linéaire et non linéaires [Maeder 2010, Ichalal 2009, Jamel 2010, Tanaka 2001b, Senthilkumar 2010].

L'objectif de ce chapitre est de développer des méthodes systématiques pour réduire les erreurs d'estimation d'état, cela sans impliquer de nouveaux efforts de modélisation. En plus de la restriction naturel, que le modèle augmenté est observable, il est également souhaitable de ne pas introduire plus d'états d'entrées inconnues que nécessaire. Il est donc souhaitable de trouver un vecteur d'entrées inconnues avec la faible dimension possible qui réussit à réduire le biais dans l'estimation des états du système. L'augmentation partielle du système moyennant la réduction du nombre d'états augmentés va être utilisée par la suite pour le diagnostic de défauts capteurs, moyennant la construction d'un observateur à entrées inconnues avec uniquement les sorties supposées en défauts.

Ce chapitre présente dans une première section un rappel sur les concepts de base des incertitudes et explore une méthode d'estimation d'état d'un système de TS en présence d'incertitudes, suivie d'une section sur le principe d'augmentation d'état pour la synthèse d'observateur à entrées inconnues.

Les deux sections suivantes présentent des méthodes pour l'augmentation d'état du sys-

tème à VDNM, et l'augmentation partielle d'état du système TS à VDNM, qui va être utilisée par la suite pour le diagnostic de défauts capteurs.

La dernière section présente la synthèse d'un observateur PI à entrées inconnues, pour estimer les états et les entrées inconnues du système TS à VDNM.

## 3.2 Natures des incertitudes

L'hypothèse de base de la disponibilité de modèle précis du processus n'est presque jamais validée. Il y a presque toujours des incohérences entre le modèle et le processus réel appelées les incertitudes de modèle.

Le terme "incertain" se réfère à la différence ou les erreurs entre les modèles et les processus réels. En raison de la simplification mathématique dans les processus de modélisation et de l'erreur de mesure inévitable impliqué dans la pratique de l'ingénierie, il est important pour la conception de l'analyse d'un système de contrôle d'intégrer des incertitudes dans les modèles des systèmes étudiés.

Il y a trois principales origines d'incertitudes du modèle [Gopal 1963, Gloria 2015] :

1. Les incertitudes de modèles se produisent en raison d'une connaissance incomplète du système.
2. L'utilisation d'un modèle avec une précision insuffisante à celle requise par la performance à atteindre.
3. Le modèle est basé sur l'étude de certains phénomènes physiques supposés pour représenter les principales caractéristiques du système.

Dans tous les cas, le modèle à la main donne simplement une approximation des performances du système d'origine. Pour l'analyse d'un système de contrôle, les incertitudes sont classées en incertitudes structurées et non structurées [Aberkane 2008].

### 3.2.1 Incertitudes structurées

Ce type d'incertitudes découle de la linéarisation d'un système non linéaire autour d'un point de fonctionnement fixe. Ils pourraient être sous-classifiés en dans deux classes :

#### **Incertitude bornée en norme**

Les incertitudes des paramètres admissibles sont modélisées comme [Gloria 2015] :

$$\Delta A(t) = M_A F(t)_A N_A \quad (3.1)$$

où  $M_A$  et  $N_A$  sont des matrices réel constantes connues et  $F_A(t)$  est une matrice à valeur réelle inconnue variant dans le temps, en satisfaisant à la condition :

$$F_A^T(t) F_A(t) \leq I, \forall t \geq 0 \quad (3.2)$$

### Incertitude en combinaison linéaire

Cette forme d'incertitude structurée est modélisée comme suit :

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^r N_i \alpha_i(t) \quad (3.3)$$

où  $N_i$  sont des matrices connues et  $\alpha_i(t)$  représente des paramètres incertains bornés, à savoir [Gloria 2015] :

$$|\alpha_i(t)| \leq \bar{\alpha}_i, \forall i \in [1, \dots, r] \quad (3.4)$$

où  $\bar{\alpha}_i$  sont des scalaires positives donnés. La matrice  $N_i$  peut être écrite comme :

$$N_i = p_i(t) q_i(t)^T \quad (3.5)$$

Où  $p_i(t)$  et  $q_i(t)$  sont des matrices de dimensions appropriées.

### 3.2.2 Incertitudes non structurées

Les incertitudes non structurées sont associées aux dynamiques non modélisées, ou la non-linéarité du système.

Ces incertitudes de paramètres sont modélisées comme [Gloria 2015] :

$$|\Delta A_i| \leq M_i, \quad M_i = [m_{ij}]_k ; \quad m_{ij} \geq 0 \quad (3.6)$$

où  $|\cdot|$  représente le module d'entrées de la matrice correspondante, et  $M_i$  est une matrice constante connue avec tous les éléments positifs.

Le qualificatif non structure est justifié par le fait que certains paramètres des matrices  $A_i$  varient (dans un intervalle) et que l'on ne dispose que d'une information globale sur ces variations.

Ces incertitudes permettent de prendre en compte des dynamiques et des non-linéarités négligées dans le modèle [Akhenak 2004].

## 3.3 Estimation d'état du système TS à VDM incertain en présence d'entrées inconnues

Pour la représentation du système TS à variables de décision non mesurable, nous avons besoin d'étudier l'estimation d'état du système TS incertain à variable de décision mesurables.

On considère le système incertain sous forme Multi-modèle et en présence d'entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) ((A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + (R_i + \Delta R_i)q(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

la prise en compte d'incertitudes sur les matrices  $C$  et  $D$  pouvant également être considérée.

où  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in R^m$  est le vecteur des entrées connues,  $q(t) \in R^q$ ,  $q < n$  est le vecteur des entrées inconnues, qui sont supposées bornées de telle sorte que  $\|q(t)\| < \delta$ , où  $\delta$  est un scalaire positif et  $y \in R^p$  représente le vecteur des sorties mesurables.

Pour le  $i^{me}$  modèle local,  $A_i \in R^{n \times n}$  est la matrice d'état,  $B_i \in R^{n \times m}$  est la matrice d'entrée connue,  $C \in R^{p \times n}$  est la matrice de sortie et  $R_i \in R^{n \times q}$  sont les matrices de transmission des entrées inconnues.

Enfin,  $z(t)$  représente le vecteur de décision dépendant des entrées connues ou des variables d'état mesurées.

$\Delta A_i$  représentent les erreurs de modélisation,  $\Delta B_i$  représentent les incertitudes des entrées connues et  $\Delta R_i$  représentent les incertitudes des entrées inconnues du système.

Notons que  $\Delta A_i \in R^{n \times n}$ ,  $\Delta B_i \in R^{n \times m}$ ,  $\Delta R_i \in R^{n \times q}$  sont également supposées être bornées, à savoir,  $\|\Delta A_i(t)\| < \lambda_{1i}$ ,  $\|\Delta B_i(t)\| < \lambda_{2i}$ ,  $\|\Delta R_i(t)\| < \lambda_{3i}$  où  $\lambda_{ji}$  est un scalaire positif.

où  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne.

Pour la conception de l'observateur, on suppose que les modèles locaux sont localement observable c'est à dire, toutes les paires  $(A_i, C)$  sont observables [Akhenak 2004].

L'observateur proposé pour le Multi-modèle (3.7) est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) + R_i \epsilon_i(t) + \sigma_i(t)] \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $\hat{x}(t) \in R^n$  est l'estimation d'état,  $\hat{y}(t) \in R^p$  est la sortie du multiobservateur.  $L_i \in R^{n \times m}$  est le gain du  $i^{me}$  observateur local,  $\sigma_i \in R^n$  représentent des termes ajoutés à la structure de chaque observateur local afin de compenser les incertitudes. Les gains  $L_i$ ,  $\epsilon_i$ , et  $\sigma_i$  doivent être déterminés pour forcer l'erreur d'estimation d'état à converger vers zéro.

Si les paires  $(A_i, C)$  sont observables et s'ils existent des matrices  $L_i \in R^{n \times p}$ , tel que  $\bar{A}_i = A_i - L_i C$  qui ont des valeurs propres stables et qu'il existe des paires  $(P, Q_i)$  de Lyapunov et matrices respectant les contraintes structurelles suivantes :

$$\begin{cases} \bar{A}_i P + P \bar{A}_i = -Q_i & i \in 1, \dots, M \\ C^T F_i^T = P R_i \end{cases} \quad (3.9)$$

L'erreur d'estimation d'état est de la forme :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.10)$$

L'erreur de sortie :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) = C(x(t) - \hat{x}(t)) = Ce(t) \quad (3.11)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) [(A_i - L_i C) e(t) + \Delta A_i x(t) + \Delta B_i u(t) + \Delta R_i q(t) - \sigma_i(t)] \quad (3.12)$$

### Théorème 7

Supposons qu'il existe une matrice  $P$  symétrique et définie positive et des matrices  $L_i$  telles que :

$$\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i + (\alpha_1^{-1} + \alpha_3^{-1} + \alpha_4^{-1}) P^2 + \alpha_1 (1 + \alpha_2^{-1}) \lambda_{1i}^2 I < 0, \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.13)$$

où  $\bar{A}_i = A_i - L_i C$ , alors l'erreur d'estimation d'état du multiobservateur (3.8) converge asymptotiquement vers zéro si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} sir \neq 0 \\ sir = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i = \delta \frac{F_i r}{\|F_i r\|} \\ \sigma_i = (\alpha_1 (1 + \alpha_2) \lambda_{1i}^2 \hat{x}^T \hat{x} + \alpha_3 \lambda_{2i}^2 \|u\|^2 + \alpha_4 \lambda_{3i}^2 \|q\|^2) \frac{P^{-1} C^T r}{2r^T r} \\ \varepsilon_i = 0 \\ \sigma_i = 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

**Démonstration :** Nous pouvons utiliser le complément de Schur [Boyd 1994] (voir annexe B) pour démontrer la convergence asymptotique de l'observateur multiple (3.8)

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e(t)^T P e(t) \quad (3.15)$$

Où  $P$  désigne une matrice symétrique définie positive. Sa dynamique peut être exprimée comme suit :

$$\dot{V}(t) = \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) \quad (3.16)$$

Substituant (3.12) dans (3.16), on obtient :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^M h_i(z) [e^T (\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i) e + 2e^T P (\Delta A_i x + \Delta B_i u + \Delta R_i q) + 2e^T P (R_i q - R_i \varepsilon_i - \sigma_i)] \quad (3.17)$$

Quand  $r \neq 0$  en remplaçant  $\varepsilon_i$  (3.14) par leur expression, et en utilisant le complément de Schur [Boyd 1994] (voir annexe B), et la deuxième équation de (3.9) on remarque que :

$$\begin{aligned} 2e^T P \Delta A_i x &= x^T \Delta A_i P e + e^T P \Delta A_i x \\ &\leq \alpha_1 x^T \Delta A_i^T \Delta A_i x + \alpha_1^{-1} e^T P^2 e \\ &\leq \alpha_1 \lambda_{1_i}^2 (\hat{x}^T \hat{x} + e^T e) + \alpha_1 \lambda_{1_i}^2 (\hat{x}^T e + e^T \hat{x}) + \alpha_1^{-1} e^T P^2 e \\ &\leq \alpha_1 (1 + \alpha_2) \lambda_{1_i}^2 \hat{x}^T \hat{x} + e^T \alpha_1 (1 + \alpha_2^{-1}) \lambda_{1_i}^2 e + \alpha_1^{-1} e^T P^2 e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^T P \Delta B_i u &= u^T \Delta B_i P e + e^T P \Delta B_i u \\ &\leq \alpha_3 u^T \Delta B_i^T \Delta B_i u + \alpha_3^{-1} e^T P^2 e + \\ &\leq \alpha_3 \lambda_{2_i}^2 \|u\|^2 + \alpha_3^{-1} e^T P^2 e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^T P \Delta R_i q &= e^T P \Delta R_i q + q^T \Delta R_i P e \\ &\leq \alpha_4^{-1} e^T P^2 e + \alpha_4 q^T \Delta R_i^T \Delta R_i q \\ &\leq \alpha_4 \lambda_{3_i}^2 \|q\|^2 + \alpha_4^{-1} e^T P^2 e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^T P (R_i q - R_i \varepsilon_i) &= 2e^T C^T F_i^T q - 2e^T C^T F_i^T \varepsilon_i \\ &= 2r^T F_i^T q - 2\delta r^T F_i^T \frac{F_i r}{\|F_i r\|} \\ &= 2r^T F_i^T q - 2\delta \|F_i r\| \\ &\leq 2 \|q\| \|F_i r\| - 2\delta \|F_i r\| < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^T P \sigma_i &= 2 \left( \alpha_1 (1 + \alpha_2) \lambda_{1_i}^2 \hat{x}^T \hat{x} + \alpha_3 \lambda_{2_i}^2 \|u\|^2 + \alpha_4 \lambda_{3_i}^2 \|q\|^2 \right) \frac{P^{-1} C^T r}{2r^T r} \\ &= \alpha_1 (1 + \alpha_2) \lambda_{1_i}^2 \hat{x}^T \hat{x} + \alpha_3 \lambda_{2_i}^2 \|u\|^2 + \alpha_4 \lambda_{3_i}^2 \|q\|^2 \end{aligned}$$

avec :

$$\alpha_5 = \alpha_1 (1 + \alpha_2), \alpha_6 = \alpha_1 (1 + \alpha_2^{-1}) \quad (3.18)$$

Après simplification, on obtient :

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^M \mu_i(z) [e^T (\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i + \alpha_7 P^2 + \alpha_6 \lambda_{1_i}^2 I) e] \quad (3.19)$$

Lorsque  $r = 0$  on obtient le même résultat. ■

On remarque que la convergence asymptotique du multiobservateur est garantie dans la mesure où la partie droite de l'inégalité (3.19) est négative. Ensuite, l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro si les conditions (3.14) et les inégalités (3.13) sont vérifiées.

Nous remarquons que les inégalités (3.13) dépendent des deux matrices inconnues  $P$  et  $L_i$  à la formulation LMI peuvent donc être utilisés seulement après linéarisation de ces inégalités [Akhenak 2004], où la technique de changement de variable est utilisée.

Considérons le changement de variable suivant :

$$W_i = PL_i \quad (3.20)$$

Remplaçant (3.20) dans (3.19) on obtient :

$$\begin{cases} A_i^T P + PA_i - C^T W_i^T - W_i C + \alpha_7 P^2 + \alpha_6 \lambda_{1i}^2 I < 0 \\ C^T F_i^T = PR_i \quad i \in 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.21)$$

En utilisant le complément de Schur [Boyd 1994] (Voir annexe B), on obtient à partir de (3.21) la formulation suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i - C^T W_i^T - W_i C + \alpha_6 \lambda_{1i}^2 I & P \\ P & -\alpha_7^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \\ C^T F_i^T = PR_i \quad i \in 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.22)$$

La solution de ces contraintes  $P$  et  $L_i$  permet de calculer les gains d'observateurs  $L_i = P^{-1}W_i$ . Notons que, dans le cas où toutes les entrées sont connues et si la matrice  $D = 0$ , le système (3.7) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) ((A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

### Exemple 3

#### **Application sur un système hydraulique à trois cuves**

Dans cette section, l'approche proposée pour l'estimation de l'état du modèle est appliquée au benchmark des 3 cuves [Zolghadri 1996, Theilliol 2003, Rodrigues 2005, Akhenak 2004]. Le système à trois cuves est un système MIMO avec deux entrées et trois sorties. Il est composé de trois cylindres  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  avec des sections identiques  $A$ . Les cuves sont couplées par deux tuyaux cylindriques avec une section  $S_n$ . La sortie d'évacuation est localisée sur la cuve 2, et a de même une section  $S_n$ . Deux pompes sont commandées par des moteurs à courant continu pour les deux pompes 1 et 2. Les débits  $q_1$  et  $q_2$  avec ces pompes sont définis par le calcul du flux par rotation et le vecteur d'entrée est  $u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t)]^T$ . Les 3 cuves sont équipées de capteurs de type capacitif pour mesurer le niveau des liquides  $(x_1, x_2, x_3)$ .

La sortie nominale située à la sortie de la cuve  $T_2$ , il garantit de vider le réservoir rempli par les flux de la pompe 1 et 2 avec des taux  $Q_1(t)$  et  $Q_2(t)$  respectifs.

Les tuyaux de communication entre les cuves sont équipés de vannes à billes réglables manuellement, qui permettent à la pompe correspondante d'être soit fermée ou ouverte. Les débits  $Q_{f1}\bar{u}$ ,  $Q_{f2}\bar{u}$  et  $Q_{f3}\bar{u}$  représentant des débits de fuite éventuelle au niveau des cuves. Le vecteur constitue l'entrée inconnue et  $g$  la constante de gravité.

Les trois niveaux sont régis par la contrainte  $x_1 > x_2 > x_3$ .

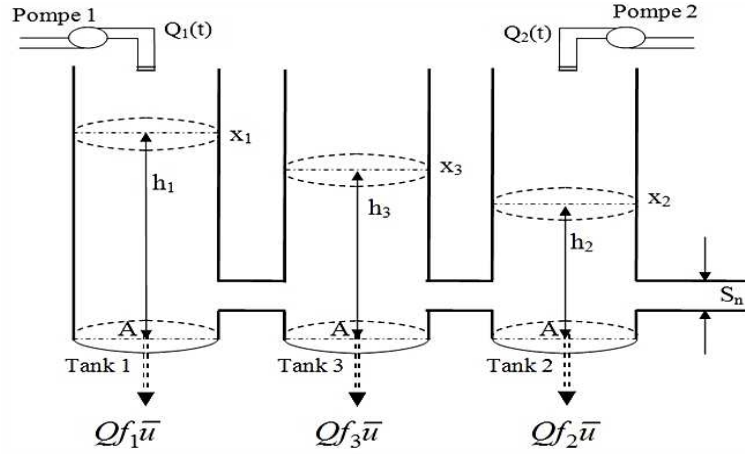


FIGURE 3.1: Système à trois cuves

Ce système est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{Q_1 - c_1 S_n \sqrt{2g(x_1 - x_3)} + Q f_1 \bar{u}}{A} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{Q_2 + c_3 S_n \sqrt{2g(x_3 - x_2)} - c_2 S_n \sqrt{2gx_2} + Q f_2 \bar{u}}{A} \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{c_1 S_n \sqrt{2g(x_1 - x_3)} - c_3 S_n \sqrt{2g(x_3 - x_2)} + Q f_3 \bar{u}}{A} \end{cases} \quad (3.24)$$

En utilisant les débits d'entrée  $Q_1(t)$  et  $Q_2(t)$ , les niveaux  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont contrôlables, ce qui nous permet de garantir que les trois cuves ne seront jamais simultanément vides. Dans ce cas, les niveaux dans les trois cuves sont bornées :  $x \in \mathbb{R}_+^3$ .

Pour l'application numérique, on donne :  $Q f_i = 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \forall i \in \{1, 2, 3\}$  et  $t \in [0, \text{inf}[$ ,  $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $A = 0.0154 \text{ m}^2$ ,  $S_n = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ,  $c_1 = 0.9$ ,  $c_2 = 0.6$ ,  $c_3 = 0.8$ .

Le Multi-modèle proposé dans [Akhenak 2004], qui se rapproche du système non linéaire (3.24), est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) [A_i x + B_i u + R_i \bar{u} + D_i] \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.25)$$

Où les valeurs numériques des matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $R_i$ ,  $C$  et  $D_i$  sont les suivantes :

$$A_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -18.5 & 0 & 18.5 \\ 0 & -20.9 & 15.0 \\ 18.5 & 15.0 & -33.5 \end{bmatrix}, A_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -22.1 & 0 & 22.1 \\ 0 & -23.3 & 17.6 \\ 22.1 & 17.6 & -39.5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.57 \\ -0.46 \\ -0.52 \end{bmatrix}, R_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.57 \\ -0.50 \\ -0.54 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.225 \\ -0.089 \\ 0.005 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -0.182 \\ -0.141 \\ 0.003 \end{bmatrix}$$

Afin de démontrer la performance de l'approche proposée, supposons que les paramètres du Multi-modèle (3.25) seront affectés par des incertitudes bornées comme indiqué par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi) [(A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u + (R_i + \Delta R_i)\bar{u}] \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.26)$$

Les incertitudes du modèle sont telles que  $\|\Delta A_i\| < \lambda_1$ ,  $\|\Delta B_i\| < \lambda_2$  et  $\|\Delta R_i\| < \lambda_3$  avec  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.2$ .

Les résultats de simulation sont effectués avec  $\|r(t)\| < \epsilon$  et  $\epsilon = 10^{-3}$

Le multiobservateur proposé, qui estime le vecteur d'état du Multi-modèle (3.26) est décrite par,

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi) [A_i \hat{x} + B_i u + L_i (y - \hat{y}) + R_i \varepsilon_i + \sigma_i] \\ \hat{y} = C \hat{x} \end{cases} \quad (3.27)$$

avec :

$$\begin{cases} (A_i - L_i C)^T \psi + \psi (A_i - L_i C) + \alpha_7 \psi^2 + \alpha_6 \lambda_{1i}^2 I < 0 \\ C^T F_i^T = \psi R_i, i \in 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.28)$$

### Remarque 3

Lorsque l'erreur d'estimation de sortie  $r(t)$  se rapproche de zéro  $\|r\| < \epsilon$ , pour éviter l'augmentation sans limite de l'amplitude de  $\sigma_i(t)$  et  $\varepsilon_i(t)$ , les termes  $\sigma_i(t)$  et  $\varepsilon_i(t)$  sont fixés à zéro. Dans ce cas, l'erreur d'estimation de sortie converge vers un petit voisinage de zéro en fonction du choix de  $\epsilon$ .

Les matrices  $L_1$  et  $L_2$  sont obtenues par la résolution de (3.28) :

$$L_1 = \begin{vmatrix} 0.0445 & 0.0462 & 0.0017 \\ 0.0158 & 0.0360 & 0.0202 \\ -0.0170 & 0.0328 & 0.0498 \end{vmatrix}, L_2 = \begin{vmatrix} 0.0506 & 0.0546 & 0.0040 \\ 0.0163 & 0.0417 & 0.0254 \\ -0.0173 & 0.0391 & 0.0565 \end{vmatrix}$$

La figure 3.2 montre la convergence des états estimés ( $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  et  $\hat{x}_3$ ) aux états du système ( $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ ) respectivement, sauf au voisinage de l'origine; cela est dû au choix des conditions initiales.

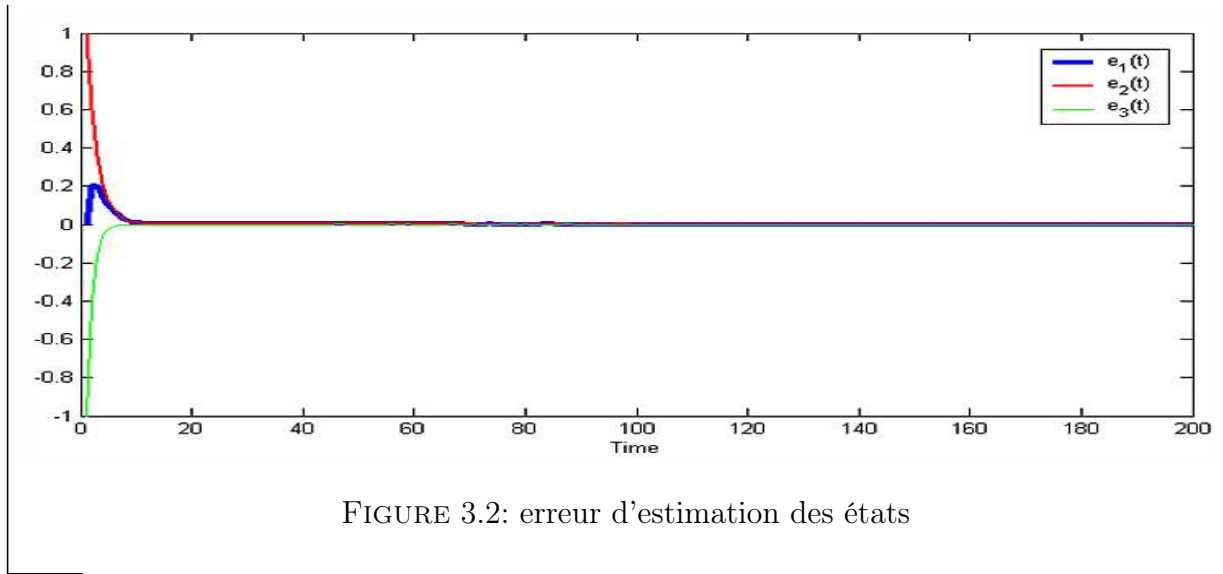


FIGURE 3.2: erreur d'estimation des états

### 3.4 Estimation d'état du système TS à VDNM incertain en présence d'entrées inconnues

Cette section traite de l'estimation d'état robuste des systèmes TS à VDNM incertains. Les incertitudes considérées sont bornées et varient dans le temps, le système (3.29) est supposé stable.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + (R_i + \Delta R_i(t))\bar{u}(t)] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

où :

$$\Delta A_i(t) = M_A^i F_A(t) I_A^i \quad (3.30)$$

$$\Delta B_i(t) = M_B^i F_B(t) I_B^i \quad (3.31)$$

$$\Delta R_i(t) = M_R^i F_R(t) I_R^i \quad (3.32)$$

avec :

$$F_A^T(t) F_A(t) \leq I, \forall t \quad (3.33)$$

$$F_B^T(t) F_B(t) \leq I, \forall t \quad (3.34)$$

$$F_R^T(t) F_R(t) \leq I, \forall t \quad (3.35)$$

### Hypothèse 1

Nous considérons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

**H1.** la stabilité entrée-état du système est vérifiée.

**H2.** l'entrée du système est bornée :  $|u(t)| < \rho$

**H3.** les perturbations sont bornées.

Le système (3.29) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{x}(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + (R_i + \Delta R_i(t))\bar{u}(t) + \omega(t)] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.36)$$

où

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^M (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})) [(A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u + (R_i + \Delta R_i)\bar{u}] \quad (3.37)$$

L'observateur proposé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{x}(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - y(t))] \\ y(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.38)$$

L'erreur d'estimation d'état entre (3.36) et (3.38) est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.39)$$

Sa dynamique est :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{x}) ((A_i - L_i C) e(t) + \Delta A_i x(t) + \Delta B_i u(t) + \Delta R_i \bar{u}(t) + \omega(t)) \quad (3.40)$$

qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{x}) (\bar{A}_i e(t) + \bar{R}_i \bar{\omega}(t)) \quad (3.41)$$

où :

$$\bar{A}_i = A_i - L_i C, \quad \bar{\omega}(t) = [ \omega(t)^T \quad x(t)^T \quad u(t)^T \quad \bar{u}(t)^T ]^T, \quad \bar{R}_i = [ I \quad \Delta A_i(t) \quad \Delta B_i(t) \quad \Delta R_i(t) ] \quad (3.42)$$

A partir des hypothèses *H1*, *H2* et *H3*, le vecteur d'état  $x(t)$  et le terme  $\bar{\omega}(t)$  sont bornés.

**Théorème 8**

L'erreur d'estimation d'état, entre l'observateur (3.38) et le système TS à VDNM incertain (3.36), converge asymptotiquement vers zéro, et le gain  $L_2$  du transfert de  $\bar{\omega}(t)$  vers  $e(t)$  est borné par  $\bar{\gamma}$ , s'il existe des matrices  $X = X^T > 0$ ,  $K_i$ , et des scalaires positifs  $\bar{\gamma}$ ,  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  solution du problème d'optimisation (3.43) sous les contraintes LMIs (3.44) pour  $i \in 1, \dots, M$ .

$$\min_{X, K_i, \epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\gamma}} \bar{\gamma} \quad (3.43)$$

sous les contraintes suivantes pour  $i \in \{1, \dots, M\}$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1i} & X & 0 & 0 & 0 & XM_A & XM_B & XM_R \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{3i} & 0 & 0 & 0 \\ M_A^T X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 I & 0 & 0 \\ M_B^T X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 I & 0 \\ M_R^T X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

où

$$\varphi_1 = A_i^T X + X A_i - C^T L_i^T X - X L_i C + I \quad (3.45)$$

$$\phi_{1i} = -\gamma^2 I + \lambda_3 I_A^T I_A \quad (3.46)$$

$$\phi_{2i} = -\gamma^2 I + \lambda_4 I_B^T I_B \quad (3.47)$$

$$\phi_{3i} = -\gamma^2 I + \lambda_5 I_R^T I_R \quad (3.48)$$

Les gains de l'observateur et le taux d'atténuation  $\gamma$  du transfert des incertitudes vers l'erreur d'estimation sont donnés par :

$$L_i = X^{-1} K_i \quad (3.49)$$

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \quad (3.50)$$

**Démonstration :** L'objectif est de minimiser l'effet de  $\bar{\omega}(t)$  sur l'erreur d'estimation d'état.

En utilisant le lemme borné réel [Boyd 1994], on obtient :

La preuve du théorème 8 est établie en utilisant la fonction quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(e(t)) = e(t)^T X e(t), X = X^T > 0 \quad (3.51)$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}(t)^T X e(t) + e(t)^T X \dot{e}(t) \quad (3.52)$$

En utilisant la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (3.41), on obtient :

$$\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (e^T \bar{A}_i^T X e + e^T X \bar{A}_i e + \bar{\omega}^T \bar{R}_i^T X e + e^T X \bar{R}_i \bar{\omega}) \quad (3.53)$$

L'erreur d'estimation d'état converge vers zéro et le gain  $L_2$  du transfert de  $\bar{\omega}(t)$  vers  $e(t)$  est borné par  $\gamma$  si la condition suivante est vérifiée :

$$\dot{V}(e(t)) + e(t)^T e(t) - \gamma^2 \bar{\omega}(t)^T \bar{\omega}(t) < 0 \quad (3.54)$$

En substituant  $\dot{V}(e(t))$  (3.53) dans (3.54), on obtient :

$$\sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (e^T \bar{A}_i^T X e + e^T X \bar{A}_i e + \bar{\omega}^T \bar{R}_i^T X e + e^T X \bar{R}_i \bar{\omega} + e^T e - \gamma^2 \bar{\omega}^T \bar{\omega}) \quad (3.55)$$

La mise sous forme matricielle de l'inégalité (3.55) donne :

$$\sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) \begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i + I & X \bar{R}_i \\ \bar{R}_i^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Compte tenu de la propriété des fonctions d'activation  $h_i$ , l'inégalité (3.56) est négative si :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i + I & X \bar{R}_i \\ \bar{R}_i^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.57)$$

En remplaçant  $\bar{A}_i = A_i - L_i C$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1i} & X \bar{R}_i \\ \bar{R}_i^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.58)$$

Où :

$$\varphi_{1i} = A_i^T X + X A_i - C^T L_i^T X - X L_i^T C + I \quad (3.59)$$

En utilisant les définitions des matrices  $\bar{R}_i$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1i} & X & X \Delta A_i(t) & X \Delta B_i(t) & X \Delta R_i(t) \\ X & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ \Delta A_i(t)^T X & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ \Delta B_i(t)^T X & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ \Delta R_i(t)^T X & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0A \quad (3.60)$$

Pour résoudre l'inégalité matricielle (3.58) on effectue une transformation de l'inégalité (3.60) pour séparer les termes constants des termes variables dans le temps. En utilisant le lemme 1 (voir annexe B), On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1i} & X & 0 & 0 & 0 \\ X & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + Q(t)^T + Q(t) < 0 \quad (3.61)$$

Où

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X\Delta A_i(t) & X\Delta B_i(t) & X\Delta R_i(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Compte tenu de la définition de  $\Delta A_i(t)$ ,  $\Delta B_i(t)$  et  $\Delta R_i(t)$ , la matrice  $Q(t)$  s'écrit :

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & XM_A & XM_B & XM_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_A(t)I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_B(t)I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_R(t)I_R \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

En utilisant le lemme 1 (voir annexe B), et en choisissant la matrice  $Q(t)$  sous la forme suivante :

$$\Sigma = \text{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \lambda_3 I, \lambda_4 I, \lambda_5 I), \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 5 \quad (3.64)$$

on obtient :

$$Q(t)^T + Q(t) < \begin{bmatrix} 0 & 0 & XM_A & XM_B & XM_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A^T X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_B^T X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_R^T X & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_A^T F_A^T(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_B^T F_B^T(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_R^T F_R^T(t) \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_A(t)I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_B(t)I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_R(t)I_R \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Après calculs et utilisation des propriétés des termes  $F_A(t)$ ,  $F_B(t)$  et  $F_R(t)$ , on obtient :

$$Q(t)^T + Q(t) < \begin{bmatrix} \varphi_{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I_A^T I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 I_B^T I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 I_R^T I_R \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Où

$$\varphi_{2i} = \lambda_3^{-1} XM_A M_A^T X + \lambda_4^{-1} XM_B M_B^T X + \lambda_5^{-1} XM_E M_E^T X \quad (3.67)$$

En substituant (3.65) dans (3.61), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1i} & X & 0 & 0 & 0 & XM_A & XM_B & XM_R \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{3i} & 0 & 0 & 0 \\ M_A^T X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 I & 0 & 0 \\ M_B^T X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 I & 0 \\ M_R^T X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.68)$$

où :

$$\varphi_1 = A_i^T X + X A_i - C^T L_i^T X - X L_i C + I \quad (3.69)$$

$$\phi_{1i} = -\gamma^2 I + \lambda_3 I_A^T I_A \quad (3.70)$$

$$\phi_{2i} = -\gamma^2 I + \lambda_4 I_B^T I_B \quad (3.71)$$

$$\phi_{3i} = -\gamma^2 I + \lambda_5 I_R^T I_R \quad (3.72)$$

Pour résoudre l'inégalité (3.68) avec les logiciels de résolution LMIs existants, il faut utiliser les changements de variables suivants :

$$K_i = X L_i \quad (3.73)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma^2 \quad (3.74) \quad \blacksquare$$

### 3.5 Principe d'augmentation d'état et synthèse d'observateur à entrées inconnues

Un système est souvent piloté simultanément par des entrées connues qui représentent les signaux de commande du système et par des entrées inconnues qui peuvent être des perturbations, des bruits de mesure, des erreurs de modélisation ou des défauts. Par conséquent, concevoir un observateur d'état ne tenant pas compte de ces entrées inconnues mène à une estimation dégradée ou même erronée des états du système. Dans ce cas, la conception de lois de commande ou de générateurs de résidus pour le diagnostic sur la base de ces états estimés conduit alors à des performances dégradées du système [Ichalal 2009].

Pour réduire le biais d'estimation des estimateurs sans impliquer de nouveaux efforts de modélisation, il faut concevoir des observateurs capables de fournir une estimation des états du système en présence d'entrées inconnues, il est indispensable de les prendre en compte dans la phase de modélisation.

En effet, l'intégration de toutes les causes possibles pouvant affecter le système (bruits de mesure, défauts, incertitudes de modélisation...) dans le modèle du système permet d'améliorer la qualité de l'estimation.

Le modèle donné, appelé le modèle de référence, et les entrées et les sorties mesurées du vrai système sont utilisées pour estimer un modèle augmenté approprié. Le point de départ est un modèle existant, appelé le modèle de référence qui est fourni sous forme d'espace d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.75)$$

où  $x$  est le vecteur d'état,  $u$  les entrées de commande connues,  $y$  le vecteur de mesure, et qui sont des fonctions non-linéaires  $f$  et  $h$ .

L'objectif est de trouver un moyen systématique pour concevoir un observateur qui donne une estimation non biaisée de l'état. Cela devrait être fait même si le modèle de référence est affecté par la présence d'entrées inconnues.

Une approche directe pour avoir une estimation des état non biaisés malgré la présence d'entrées inconnues, est d'augmenter le modèle de référence avec les entrées inconnues comme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \hat{f}(x, u, q) \\ y = \hat{h}(x, q) \end{cases} \quad (3.76)$$

et la conception de l'observateur en utilisant ce modèle augmenté. Si l'augmentation capture les entrées inconnues et le système augmenté est observable, les estimations seront non biaisées. Une question évidente est alors de savoir comment introduire les entrées inconnues  $q(t)$  dans les équations du modèle. Une façon pourrait être par la connaissance des processus.

Considérons le modèle linéaire affecté par entrées inconnues décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R_1q_1(t) + E_1d_1(t) \\ y(t) = Cx(t) + R_2q_2(t) + E_2d_2(t) \end{cases} \quad (3.77)$$

où  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in R^{n_u}$  est le vecteur des entrées connues,  $q_1(t) \in R^{n_{q1}}$  et  $q_2(t) \in R^{n_{q2}}$  représentent les entrées inconnues,  $d_1(t) \in R^{n_{d1}}$  et  $d_2(t) \in R^{n_{d2}}$  représentent les incertitudes,  $y(t) \in R^{n_y}$  représente le vecteur des sorties mesurables.  $A \in R^{n \times n}$  est la matrice d'état du système linéaire,  $B \in R^{n \times n_u}$  est la matrice d'entrée,  $R_1 \in R^{n \times n_{q1}}$  et  $R_2 \in R^{n \times n_{q2}}$  sont les matrices d'influence des entrées inconnues,  $E_1 \in R^{n \times n_{d1}}$  et  $E_2 \in R^{n \times n_{d2}}$  sont les matrices d'influence des incertitudes et  $C \in R^{p \times n}$  est la matrice de sortie.

Le système (3.76) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_1\eta_1(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_2\eta_2(t) \end{cases} \quad (3.78)$$

où :

$$F_1 = \begin{bmatrix} R_1 & E_1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} R_2 & E_2 \end{bmatrix}, \eta_1(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ d_1(t) \end{bmatrix}, \eta_2(t) = \begin{bmatrix} q_2(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

On suppose que la matrice  $F_2$  est de plein rang colonne et que la paire  $(A, C)$  est observable. Considérons un nouvel état  $g_f(t)$  [Alwi 2011, Alwi 2012], qui est une version filtrée  $y(t)$  :

$$\dot{g}_f(t) = -A_f g_f(t) + A_f y(t) A \quad (3.80)$$

Où  $-A_f$  est une matrice stable,  $A_f \in R^{P \times P}$

En utilisant (3.78) et (3.79), on obtient :

$$\dot{g}_f(t) = -A_f g_f(t) + A_f C x(t) + A_f F_2 \eta_2(t) \quad (3.81)$$

Désignons :

$$x_a(t) = [ x(t)^T \quad g_f(t)^T ]^T \quad (3.82)$$

Le système augmenté est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + F_a \eta(t) \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.83)$$

où

$$A_a \in R^{(n+p) \times (n+p)}, B_a \in R^{(n+p) \times m}, F_a \in R^{(n+p) \times r} \text{ et } C_a \in R^{p \times (n+p)}$$

Ces matrices sont décrites comme suit :

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_f C & -A_f \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C_a = [ C \quad 0 ], F_a = \begin{bmatrix} F_1 \\ A_f F_2 \end{bmatrix}, \text{ et } \eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$$

La structure de l'observateur choisi est décrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_a z(t) + G u(t) + L y_a(t) \\ \hat{x}_a(t) = z(t) - H y_a(t) \end{cases} \quad (3.84)$$

où  $z(t) \in R^n$  et  $\hat{x}_a(t) \in R^n$  est l'estimation du vecteur d'état augmentée  $x_a(t)$ ,  $y_a(t)$  est la sortie estimée.  $L$  est le gain de l'observateur local et  $H$  est une matrice de transformation.

L'erreur d'estimation d'état est :

$$e(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (3.85)$$

L'équation de la dynamique d'évolution de cette erreur s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}_a(t) - \dot{\hat{x}}_a(t) = (I + H C_a) \dot{x}_a(t) - \dot{z}(t) \\ &= (I + H C_a) (A_a x_a(t) + B_a u(t) + F_a \eta(t)) - (N \hat{x}_a(t) + G u(t) + (L + N H) C_a x_a(t)) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Posons :

$$P = I + H C_a \quad (3.87)$$

On obtient alors :

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (PB_a - G)\eta(t) + PF_a\eta(t) + (PA_a - NP - LC_a)x_a(t) \quad (3.88)$$

Posons  $K = NH + L$ , on obtient alors :

$$PF_a = 0 \quad (3.89)$$

$$P = I + HC_a \quad (3.90)$$

$$N = PA_a + KC_a \quad (3.91)$$

$$L = K - NH \quad (3.92)$$

$$G = PB_a \quad (3.93)$$

$$N \text{ est stable} \quad (3.94)$$

La convergence de l'erreur d'estimation d'état asymptotique vers zéro est garantie s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , telle que :

$$N^T X + XN < 0 \quad (3.95)$$

En s'appuyant sur l'équation (3.95), on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 9**

*Les erreurs d'estimation d'état, entre l'observateur à entrées inconnues (3.84) et le système (3.77), convergent asymptotiquement vers zéro si la paire  $(A_a, C_a)$  est observable et si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$N^T X + XN < 0 \quad (3.96)$$

$$PF_a = 0 \quad (3.97)$$

$$P = I + HC_a \quad (3.98)$$

$$N = PA_a - KC_a \quad (3.99)$$

$$L = K - NH \quad (3.100)$$

$$G = PB_a \quad (3.101)$$

où  $P = I + HC_a$  et  $X \in R^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive.

Comme  $N = PA_a - KC_a$ , l'inégalité (3.96) devient :

$$(PA_a - KC_a)^T X + X(PA_a - KC_a) < 0 \quad (3.102)$$

La solution est donnée en remplaçant :

$$W = XK \quad (3.103)$$

L'inégalité obtenue après ce changement de variables s'écrit de la manière suivante :

$$(PA_a)^T X + X(PA_a) - (C_a^T W^T + WC_a) < 0 \quad (3.104)$$

On déduit ensuite la valeur du gain  $k$  par la formule :

$$K = X^{-1}W \quad (3.105)$$

La résolution des contraintes (3.96)-(3.101) s'effectue, comme indiqué précédemment en trois étapes :

1. Si la matrice  $(C_a F_a)$  est de plein rang ligne, les relations (3.97)-(3.98) déterminent complètement la matrice  $H$  de l'observateur :

$$H = -F_a (C_a F_a)^T \left( (C_a F_a) (C_a F_a)^T \right)^{-1} \quad (3.106)$$

On en déduit alors la valeur de la matrice  $P = I + HC_a$

2. La résolution de l'inégalité matricielle (3.96) laquelle a été réécrite sous la forme (3.104). Puis on calcule le gain  $K = X^{-1}W$ .
3. Les autres matrices sont déduites par (3.99), (3.100) et (3.101).

### 3.6 Augmentation du système à VDM et estimation d'état

Considérons le système TS incertain à VDNM avec entrées inconnues suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_1 q(t) + E_1 d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + R_2 q(t) + E_2 d(t) \end{cases} \quad (3.107)$$

où  $M$  représente le nombre des sous-modèles,  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in R^m$  est le vecteur des entrées connues et  $y(t) \in R^p$  désigne le vecteur de sortie.  $q(t) \in R^r$  représentent les entrées inconnues (Bruit, défaut, ..etc) et  $d(t) \in R_d^n$  représente les incertitudes.  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $R_1 \in R^{n \times n_q}$ ,  $R_2 \in R^{n \times n_q}$ ,  $E_1 \in R^{n \times n_q}$  et  $E_2 \in R^{n \times n_q}$  sont des matrices réelles connues avec des dimensions appropriées.

$h_i(x(t))$  représentent les variables de prémisse mesurables sur le système TS qui satisfont les propriétés de la somme convexe.

$$\begin{cases} 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M h_i(z(t)) = 1 \end{cases}, \forall i = 1, \dots, M \quad (3.108)$$

Le système (3.107) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + F_1 \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F_2 \bar{u}(t) \end{cases} \quad (3.109)$$

où

$$F_1 = \begin{bmatrix} R_1 & E_1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} R_2 & E_2 \end{bmatrix}, \text{ et } \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

En utilisant la propriété donnée par (3.108), l'état  $g_f(t)$  donné par (3.80) peut être réécrit comme suit :

$$\dot{g}_f(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) (-A_f g_f(t) + A_f C x(t) + A_f F_2 \bar{u}(t)) \quad (3.111)$$

où  $A_f \in R^{p \times p}$  est une matrice stable.

Désignons :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ g_f(t) \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Le système augmenté est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) (A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + F_a \bar{u}(t)) \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.113)$$

où

$A_a \in R^{(n+p) \times (n+p)}$ ,  $B_a \in R^{(n+p) \times m}$ ,  $F_a \in R^{(n+p) \times r}$  et  $C_a \in R^{p \times (n+p)}$

Ces matrices sont décrites comme suit :

$$A_{ai} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_f C & -A_f \end{bmatrix}, B_{ai} = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, C_a = [ C \quad 0 ], \text{ et } F_a = \begin{bmatrix} F_1 \\ A_f F_2 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Nous supposons également que les matrices  $C_a$  et  $F_a$  sont de plein rang ligne et colonne respectivement.

La structure de l'observateur choisi est décrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) (N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y_a(t)) \\ \hat{x}_a(t) = z(t) - H y_a(t) \end{cases} \quad (3.115)$$

où  $z(t) \in R^n$  et  $\hat{x}(t) \in R^n$  est l'estimation du vecteur d'état  $x_a(t)$ ,  $y_a(t)$  est la sortie estimée.  $N_i \in R^{n \times n}$ ,  $G_i \in R^{n \times m}$ ,  $L_i \in R^{n \times p}$  est le gain du  $i^{me}$  observateur local, et  $H$  est une matrice de transformation.

L'expression de l'erreur devient :

$$e(t) = (I + H C_a) x_a(t) - z(t) \quad (3.116)$$

La dynamique de l'erreur devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) (P(A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + F_a \bar{u}(t)) - (N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y_a(t))) \quad (3.117)$$

où :  $P = I + H C_a$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) (N_i e(t) + (PA_{ai} - N_i - K_i C_a)x_a(t) + (PB_{ai} - G_i)u(t) + PF_a \bar{u}(t)) \quad (3.118)$$

posons  $K_i = N_i F_a + L_i$

L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro si et seulement si :

$$PF_a = 0 \quad (3.119)$$

$$P = I + HC_a \quad (3.120)$$

$$N_i = PA_{ai} - K_i C_a \quad (3.121)$$

$$L_i = K_i C_a - N_i H \quad (3.122)$$

$$G_i = PB_{ai} \quad (3.123)$$

$$\sum_{i=1}^M h_i(\xi(t)) N_i \text{ est stable} \quad (3.124)$$

L'équation dynamique (3.124) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , telle que :

$$N_i^T X + X N_i < 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.125)$$

En s'appuyant sur l'équation (3.124), d'une manière similaire à la démonstration du théorème 9 on peut énoncer le théorème suivant :

### **Théorème 10**

*Les erreurs d'estimation d'état, entre l'observateur à entrées inconnues (3.115) et le système TS à VDM (3.109), convergent asymptotiquement vers zéro si toutes les paires  $(A_{ai}, C_a)$  sont observables et si les conditions suivantes sont vérifiées  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  :*

$$N_i^T X + X N_i < 0, \forall i \in 1, \dots, M \quad (3.126)$$

$$PF_a = 0 \quad (3.127)$$

$$P = I + HC_a \quad (3.128)$$

$$N_i = PA_{ai} - K_i C_a \quad (3.129)$$

$$L_i = K_i C_a - N_i H \quad (3.130)$$

$$G_i = PB_{ai} \quad (3.131)$$

où  $X \in R^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive.

Comme  $N_i = PA_{ai} - K_i C_a$ , l'inégalité (3.126) devient :

$$(PA_{ai} - K_i C_a)^T X + X (PA_{ai} - K_i C_a) < 0 \quad (3.132)$$

La solution est donnée en remplaçant :

$$W_i = XK_i \quad (3.133)$$

L'inégalité obtenue après ce changement de variables s'écrit de la manière suivante :

$$(PA_{ai})^T X + X(PA_{ai}) - (C_a^T W_i^T + W_i C) < 0 \quad (3.134)$$

On déduit ensuite la valeur des gains  $K_i$  par la formule :

$$K_i = X^{-1}W_i \quad (3.135)$$

La résolution des contraintes (3.126)-(3.131) s'effectue, comme indiqué précédemment en trois étapes :

1. Si la matrice  $(C_a F_a)$  est de plein rang ligne, les relations (3.127) et (3.128) déterminent complètement la matrice  $H$  de l'observateur :

$$H = -F_a (C_a F_a)^T \left( (C_a F_a) (C_a F_a)^T \right)^{-1} \quad (3.136)$$

On en déduit alors la valeur de la matrice  $P = I + HC_a$

2. La résolution des inégalités matricielles (3.126) laquelle a été réécrite sous la forme (3.134). Puis on calcule le gain  $K_i = X^{-1}W_i$ .
3. Les autres matrices sont déduites par (3.129), (3.130) et (3.131).

## 3.7 Augmentation partielle du système et synthèse d'observateur à entrées inconnues

Pour le diagnostic de défauts affectant les capteurs à base d'observateurs à entrées inconnues, il est intéressant de présenter l'augmentation partielle du système TS, ce qui facilite la construction des bancs d'observateurs DOS et GOS.

### 3.7.1 Augmentation partielle du système à VDM et estimation d'état

Considérons le système TS incertain à VDM avec entrées inconnues suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_1 q(t) + E d(t)) \\ y(t) = C x(t) + R_2 q(t) \end{cases} \quad (3.137)$$

où  $M$  représente le nombre des sous-modèles,  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in R^m$  est le vecteur des entrées et  $y(t)$  désigne le vecteur de sortie.  $q(t) \in R^p$  représente les entrées inconnues.

$A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$  et  $R_1 \in R^{n \times r}$ ,  $R_2 \in R^{p \times q}$  et  $E \in R^{n \times k}$  sont des matrices réelles connues avec des dimensions appropriées.

Les variables de prémisses mesurables satisfont les propriétés de la somme convexe.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(x(t)) \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, M\} \end{cases} \quad (3.138)$$

En permutant l'ordre des sorties, sans perte de généralité, on peut supposer que la représentation du système est sous la forme

$$\begin{aligned} y^p(t) &= \begin{bmatrix} y^{p,1}(t) \\ y^{p,2}(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} C^{p,1} \\ C^{p,2} \end{bmatrix}}_{C^p} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ R_2^{q,2} \end{bmatrix}}_{R_2^p} q(t) \end{aligned} \quad (3.139)$$

Où  $C^{p,1} \in R^{(p-q) \times n}$  et  $C^{p,2} \in R^{q \times n}$

D'abord faire un filtrage des sorties affectées par entrées inconnues  $y^{p,2}(t) \in R^q$  pour créer l'état  $g_f(t) \in R^q$  selon

$$\dot{g}_f(t) = -A_f g_f(t) + A_f y^{p,2}(t) \quad (3.140)$$

où  $-A_f \in R^{q \times q}$  est une matrice stable. Substituer  $y^{p,2}(t)$  de (3.139) dans (3.140) donne :

$$\dot{g}_f(t) = -A_f g_f(t) + A_f C^{p,2} x(t) + A_f R_2^{q,2} q(t) \quad (3.141)$$

L'augmentation d'état des sous-systèmes (3.137) et (3.141) donne un système d'ordre  $(n + q)$  de la forme :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{g}_f \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M h_i(x) \left( \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_f C^{p,2} & -A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} R_1 \\ A_f R_2^{q,2} \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} d \right) \\ \begin{bmatrix} y^{p,1} \\ g_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{p,1} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g_f \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.142)$$

On peut réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) [A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + R_a q(t) + E_a d(t)] \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.143)$$

avec :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix}, y_a(t) = \begin{bmatrix} y^{p,1}(t) \\ g_f(t) \end{bmatrix}, A_{ai} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_f C^{p,2} & -A_f \end{bmatrix}, \\ B_{ai} &= \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, C_a = \begin{bmatrix} C^{p,1} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}, R_a = \begin{bmatrix} R_1 \\ A_f R_2^{q,2} \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.144)$$

Le Multi-modèle à variables de décision mesurables en présence d'entrées inconnues peut être construit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) [A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + F_a\bar{u}(t)] \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.145)$$

avec :

$$F_a = [ R_a \quad E_a ], \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

Nous supposons que les matrices  $C_a$  et  $F_a$  sont de plein rang ligne et colonne respectivement.

La forme du multiobservateurs capable d'estimer les vecteurs d'état et de sortie du Multi-modèle (3.145) est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y_a(t)] \\ \hat{x}_a(t) = z(t) - H y_a(t) \end{cases} \quad (3.147)$$

$N_i(t) \in R^{n \times n}$ ,  $G_i(t) \in R^{n \times m}$ ,  $L_i(t) \in R^{n \times p}$  est le gain du  $i^{me}$  observateur local, et  $H$  est une matrice de transformation.

L'erreur d'estimation d'état est définie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} e(t) &= x_a(t) - \hat{x}_a(t) \\ &= (I + H C_a) x_a(t) - z(t) \end{aligned} \quad (3.148)$$

Sa dérivée par rapport au temps s'explícite :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) (P(A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + F_a\bar{u}(t)) - N_i z(t) - G_i u(t) - L_i y_a(t)) \quad (3.149)$$

avec :

$$P = I + H C_a \quad (3.150)$$

L'expression (3.149) peut également être écrite de la manière suivante :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) (N_i e(t) + (P A_{ai} - N_i - K_i C_a) x(t) + (P B_{ai} - G_i) u(t) + P F_a \bar{u}(t)) \quad (3.151)$$

avec  $K_i = N_i H + L_i$ . Si l'on impose les conditions suivantes :

$$P F_a = 0 \quad (3.152)$$

$$P = I + H C_a \quad (3.153)$$

$$N_i = P A_{ai} - K_i C_a \quad (3.154)$$

$$L_i = K_i - N_i H \quad (3.155)$$

$$G_i = PB_{ai} \quad (3.156)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t))N_i \text{ est stable} \quad (3.157)$$

L'erreur de reconstruction d'état tend asymptotiquement vers zéro et (3.151) se réduit à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t))N_i e(t) \quad (3.158)$$

L'équation dynamique (3.158) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , telle que :

$$N_i^T X + XN_i < 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.159)$$

En s'appuyant sur l'équation (3.159), on peut énoncer le théorème suivant :

### **Théorème 11**

*L'erreur d'estimation d'état entre le système TS à VDM (3.137) et l'observateur à entrées inconnues (3.147) converge asymptotiquement vers zéro, si toutes les paires  $(A_i, C)$  sont observables et si les conditions suivantes sont vérifiées  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  :*

$$N_a^T X + XN_a \leq 0 \quad (3.160)$$

$$PF_a = 0 \quad (3.161)$$

$$P = I + HC_a \quad (3.162)$$

$$N_i = PA_{ai} - KC_a \quad (3.163)$$

$$L_i = K_i - N_i H \quad (3.164)$$

$$G_i = PB_{ai} \quad (3.165)$$

où  $X \in R^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive.

Pour linéariser les inégalités (3.160), nous considérons le changement de variable suivant :

$$W_i = XK_i \quad (3.166)$$

En remplaçant par leurs valeurs issues de (3.163), les inégalités (3.160) peuvent alors être réécrites,  $\forall i \in 1, \dots, M$  :

$$(PA_{ai})^T X + X(PA_{ai}) - W_i C_a - C_a^T W_i^T < 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.167)$$

Ces dernières inégalités matricielles sont linéaires par rapport aux variables inconnues  $X$  et  $W_i$ . Par conséquent, des outils LMI peuvent être utilisés pour résoudre (3.167).

Ayant résolu ce problème et obtenu des solutions  $X$  et  $W_i$  vérifiant (3.167), on en déduit les gain  $K_i$  :

$$K_i = X^{-1}W_i \quad (3.168)$$

### 3.7.2 Augmentation partielle du système TS à VDNM et estimation d'état

Le Multi-modèle à variables de décision non mesurables (3.145) peut se ramener à un Multi-modèle perturbé à variables de décision mesurables comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) [A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + F_a\bar{u}(t) + \omega(t)] \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.169)$$

où

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^M (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))(A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + F_a\bar{u}(t)) \quad (3.170)$$

L'observateur est pris sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y_a(t)] \\ \hat{x}_a(t) = z(t) - H y_a(t) \end{cases} \quad (3.171)$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} e(t) &= x_a(t) - \hat{x}_a(t) \\ &= x_a(t) - z(t) + H C_a x_a(t) \\ &= P x_a(t) - z(t) \end{aligned} \quad (3.172)$$

où :

$$P = I + H C_a \quad (3.173)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= P \dot{x}_a(t) - \dot{z}(t) + H G \dot{q}(t) \\ &= \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (P A_{ai} x_a(t) + P B_{ai} u(t) + P F_a \bar{u}(t) \\ &\quad + P \omega(t) - N_i z(t) - G_i u(t) - L_i y_a(t)) \end{aligned} \quad (3.174)$$

Après réorganisation des termes de la partie droite de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état et en utilisant les définitions de  $y_a(t)$  et de  $z(t)$  on obtient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (P A_{ai} - N_i - K_i C_a) x_a(t) + (P B_{ai} - G_i) u(t) + P F_a \bar{u}(t) + P \omega(t) + N_i e(t) \quad (3.175)$$

avec  $K_i = N_i H + L_i$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$N_i = P A_{ai} + K_i C_a \quad (3.176)$$

$$P B_{ai} = G_i \quad (3.177)$$

$$P F_a = 0 \quad (3.178)$$

$$L_i = K_i - N_i H \quad (3.179)$$

alors, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t))(N_i e(t) + P\omega(t)) \quad (3.180)$$

### Approche par condition de Lipschitz

#### Hypothèse 2

Nous considérons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

**H1.** la stabilité entrée-état du système est vérifiée.

**H2.** l'entrée du système et les perturbations sont bornées.

**H3.** les fonctions d'activations sont Lipschitziennes.

**H4.** On suppose que :  $\frac{\|e(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} < \gamma, \quad \gamma > 0$

L'erreur d'estimation d'état est perturbée par  $\omega(t)$ . On suppose que le terme défini en (3.170) satisfait la condition suivante :

$$|\omega(t)| \leq \gamma |e(t)|, \quad \gamma > 0 \quad (3.181)$$

Soit la fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(t) = e(t)^T X e(t), \quad X = X^T > 0 \quad (3.182)$$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (e(t)^T (N_i X + X N_i) e(t) + \omega(t)^T P^T X e(t) + e(t)^T X P \omega(t)) \quad (3.183)$$

En utilisant (3.181) et le lemme 1 (voir annexe B), on aboutit à :

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) e(t)^T (N_i^T X + X N_i + \lambda \gamma^2 I + \lambda^{-1} X P P^T X) e(t), \quad \lambda > 0 \quad (3.184)$$

Les fonctions d'activation vérifient la condition de somme convexe, donc la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative si :

$$N_i^T X + X N_i + \lambda \gamma^2 I + \lambda^{-1} X P P^T X < 0, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.185)$$

D'après (3.176), l'inégalité (3.185) s'écrit :

$$(P A_{ai} - K_i C_a)^T X + X (P A_{ai} - K_i C_a) + \lambda \gamma^2 I + \lambda^{-1} X P P^T X < 0, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.186)$$

La résolution de l'inégalité matricielle (3.186) n'est pas linéaire en les inconnues  $K_i, x$  et  $\lambda$ . Pour résoudre ce problème on procède comme suit :

$$S = XH \quad (3.187)$$

$$M_i = XK_i \quad (3.188)$$

et en utilisant le complément de Schur [Boyd 1994], on obtient les inégalités matricielles linéaires :

$$\begin{bmatrix} A_{ai}^T P^T X + X P A_{ai} - C_a^T M_i^T - M_i C_a + \lambda \gamma^2 I & X P \\ P^T X & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.189)$$

Avec (3.173) et (3.187), on a  $XP = X + SC_a$   
et (3.189) devient :

$$\begin{bmatrix} A_{ai}^T (X + C_a^T S^T) + (X + SC_a) A_{ai} - C_a^T M_i^T - M_i C_a + \lambda \gamma^2 I & (X + SC_a) \\ (X + SC_a)^T & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.190)$$

L'équation (3.178) devient :

$$(X + SC_a)F_a = 0 \quad (3.191)$$

Les gains  $N_i$ ,  $L_i$  et  $G_i$  sont alors obtenus par :

$$N_i = (I + HC_a)A_{ai} - K_i C_a \quad (3.192)$$

$$L_i = K_i - N_i H \quad (3.193)$$

$$G_i = (I + HC_a)B_{ai} \quad (3.194)$$

On s'appuyant sur les équations (3.190), (3.191) on peut énoncer le théorème suivant :

### **Théorème 12**

*L'erreur d'estimation d'état entre l'observateur à entrées inconnues (3.171) et le système TS à VDNM (3.169) converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X \in R^{n \times n}$ , des matrices  $M_i \in R^{n \times n_y}$  et  $S \in R^{n \times n_y}$  et un scalaire positif  $\lambda$  tels que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $i = 1, \dots, M$  :*

$$\begin{bmatrix} \psi_i & (X + SC_a) \\ (X + SC_a)^T & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.195)$$

$$(X + SC_a)F_a = 0 \quad (3.196)$$

où

$$\psi_i = A_{ai}^T (X + C_a^T S^T) + (X + SC_a) A_{ai} - C_a^T M_i^T - M_i C_a + \lambda \gamma^2 I \quad (3.197)$$

Les matrices de l'observateur sont déterminées par :

$$H = X^{-1}S \quad (3.198)$$

$$K_i = X^{-1}M_i \quad (3.199)$$

$$N_i = (I + HC_a)A_{ai} - K_iC_a \quad (3.200)$$

$$L_i = K_i - N_iH \quad (3.201)$$

$$G_i = (I + HC_a)B_{ai} \quad (3.202)$$

### 3.7.3 Construction de l'observateur par l'approche $L_2$

Dans le cas où la constante de Lipschitz donnée par (3.181) ne permet pas d'avoir une solution pour les LMIs (3.195) du théorème 12, on peut utiliser l'approche par  $L_2$ .

#### Hypothèse 3

Nous considérons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

**H1.** la stabilité entrée-état du système est vérifiée.

**H2.** l'entrée du système et les perturbations sont bornées.

**H3.** On suppose que :  $\frac{\|e(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} < \gamma$ ,  $\gamma > 0$

#### Approche par perturbation

#### Théorème 13

Le système (3.180) assurant la convergence de l'état de l'observateur (3.171) vers l'état du système (3.169) est stable, et le gain  $L_2$  de transfert de  $\omega(t)$  vers  $e(t)$  est borné s'il existe des matrices symétrique et définies positives  $X = X^T > 0$ , des matrices  $M_i \in R^{n \times n_y}$  et  $S \in R^{n \times n_y}$  et un taux d'atténuation  $\bar{\gamma}$  est obtenu en résolvant le problème d'optimisation :

$$\min_{X, M_i, S, \bar{\gamma}} \bar{\gamma} \quad (3.203)$$

sous les contraintes suivantes pour  $i \in 1, \dots, M$

$$\begin{bmatrix} \psi_i & (X + SC_a) \\ (X + SC_a)^T & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.204)$$

$$(X + SC_a)F_a = 0 \quad (3.205)$$

où :

$$\psi_i = A_{ai}^T(X + C_a^T S^T) + (X + SC_a)A_{ai} - C_a^T M_i^T - M_i C_a + I \quad (3.206)$$

Les matrices de l'observateur sont déterminées par :

$$H = X^{-1}S \quad (3.207)$$

$$K_i = X^{-1}M_i \quad (3.208)$$

$$N_i = (I + HC_a)A_{ai} - K_iC_a \quad (3.209)$$

$$L_i = K_i - N_iH \quad (3.210)$$

$$G_i = (I + HC_a)B_{ai} \quad (3.211)$$

Le taux d'atténuation est obtenu par  $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$

**Démonstration :** La preuve du théorème 13 est établie en utilisant la fonction quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(e(t)) = e(t)^T X e(t), X = X^T > 0 \quad (3.212)$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}(t)^T X e(t) + e(t)^T X \dot{e}(t) \quad (3.213)$$

En utilisant la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (3.180), on obtient :

$$\dot{V}(e_a(t)) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M h_i(\hat{x}(t)) h_j(x(t)) (\tilde{e}_a^T A_{ij}^T X \tilde{e}_a + \tilde{e}_a^T X A_{ij} \tilde{e}_a + \bar{u}^T R_{ij}^T X \tilde{e}_a + \tilde{e}_a^T X R_{ij} \bar{u}) \quad (3.214)$$

L'erreur d'estimation d'état converge vers zéro et le gain  $L_2$  du transfert de  $\omega(t)$  vers  $e(t)$  est borné par  $\gamma$  si la condition suivante est vérifiée :

$$\dot{V}(e(t)) + e(t)^T e(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) < 0 \quad (3.215)$$

En substituant  $\dot{V}(e(t))$  (3.214) dans (3.215), on obtient :

$$\sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (e^T N_i^T X e + e^T X N_i e + \omega^T P^T X e + e^T X P \omega + e^T e - \gamma^2 \omega^T \omega) < 0 \quad (3.216)$$

La mise sous forme matricielle de l'inégalité (3.216) donne :

$$\sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_i^T X + X N_i + I & X P \\ P^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.217)$$

La propriété de somme convexe des fonctions d'activation permet d'écrire la condition suffisante suivante :

$$\begin{bmatrix} N_i^T X + XN_i + I & XP \\ P^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, M \quad (3.218)$$

En utilisant l'expression (3.176) de  $N_i$  et les changements de variables  $M_i = XK_i$  et  $\bar{\gamma} = \gamma^2$  (3.218) devient :

$$\begin{bmatrix} A_{ai}^T P^T X + XPA_{ai} - C_a^T M_i^T - M_i C_a + I & XP \\ P^T X & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \forall i = 1, \dots, M \quad (3.219)$$

La suite de la démonstration est similaire à celle du théorème 12. ■

### 3.8 Estimation des entrées inconnues

Considérons le système TS à entrées inconnues suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) [A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + E_{ai}q(t)] \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.220)$$

Pour l'estimation des entrées inconnues  $q(t)$ . Connaissant les matrices  $A_{ai}$ ,  $B_{ai}$ ,  $E_{ai}$  et la matrice de sortie  $C_a$  définissant le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) (A_{aj}\bar{x}_a(t) + B_{aj}u(t)) \\ \bar{y}_a(t) = C_a \bar{x}_a(t) \end{cases} \quad (3.221)$$

En régime permanent, l'erreur d'estimation d'état tend vers zéro ; en remplaçant  $x(t)$  par  $\hat{x}(t)$ , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) (A_{aj}\hat{x}_a(t) + B_{aj}u(t) + E_{aj}\hat{q}(t)) \\ \hat{y}_a(t) = C_a \hat{x}_a(t) \end{cases} \quad (3.222)$$

ou  $\hat{q}(t)$  représente une estimation des entrées inconnues  $q(t)$ .

L'équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) (A_{aj}\hat{x}_a(t) + B_{aj}u(t) + E_{aj}\hat{q}(t)) \\ \hat{y}_a(t) = C_a \hat{x}_a(t) \end{cases} \quad (3.223)$$

Si la matrice  $\sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t))E_{aj}$  est de plein rang colonne, l'estimation de l'entrée inconnue  $\hat{q}(t)$  peut alors se calculer de la façon suivante :

$$\hat{q}(t) = \left( \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) E_{aj} \right)^{-} \left( \left( \hat{x}(t) - \bar{x}(t) \right) - \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) A_{aj} (\hat{x}_a(t) - \bar{x}(t)) \right) \quad (3.224)$$

avec :

$$\left( \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) E_{aj} \right)^{-} = \left( \left( \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) E_{aj} \right)^T \left( \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) E_{aj} \right) \right)^{-} \left( \sum_{j=1}^M h_j(\hat{x}(t)) E_{aj} \right)^T \quad (3.225)$$

#### Remarque 4

La convergence asymptotique de  $\hat{x}_a(t)$  vers  $x_a(t)$  entraîne la convergence asymptotique de  $\hat{q}(t)$  vers  $x(t)$ .

#### Exemple 4

##### Synthèse d'un observateur à entrées inconnues

Pour la synthèse d'un observateur à entrées inconnues (VDNM) en se basant sur l'approche  $L_2$  par perturbation, on va considérer l'exemple suivant :

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont comme suit :

$$\begin{cases} h_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2} \\ h_2(x) = 1 - h_1(x) \end{cases}$$

La résolution des LMIs (3.204)-(3.205), donne les résultats suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 0.3882 & -0.6118 & -0.3294 & 0 \\ -0.3059 & 0.6941 & -0.1647 & 0 \\ -0.1529 & -0.1529 & 0.9176 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -0.2824 & -0.3294 & 0 \\ -0.1412 & -0.1647 & 0 \\ -0.0706 & -0.0824 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -0.6706 \\ 1.1647 \\ -0.9176 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} -1.6118 \\ 1.6941 \\ -0.1529 \\ 0 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} -1.7143 & 2.2269 & -4.0232 & -0.7280 \\ 0.2364 & -3.2930 & 5.4192 & 0.5117 \\ 3.4969 & 2.7322 & -5.9266 & 0.0336 \\ 25.2331 & 25.2331 & 0.4176 & -25.7849 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -9.0075 & 0.8866 & -8.3769 & -5.3108 \\ 9.5424 & -1.0106 & 7.7847 & 3.9205 \\ 2.3324 & 3.5560 & -4.5653 & 0.2300 \\ 26.5076 & 26.5076 & 0.0965 & -25.5885 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -7.1744 & 5.8587 & 0.7280 \\ 5.4613 & -4.7551 & -0.5117 \\ -0.8217 & 1.3816 & -0.0336 \\ 10.9010 & 12.0849 & 0.7849 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -8.8612 & 6.9600 & 5.3108 \\ 5.6023 & -4.1196 & -3.9205 \\ -1.9300 & 1.5669 & -0.2300 \\ 9.8225 & 13.0093 & 0.5885 \end{bmatrix}$$

La figure (3.3) montre que l'observateur à entrées inconnues estime les états du système.

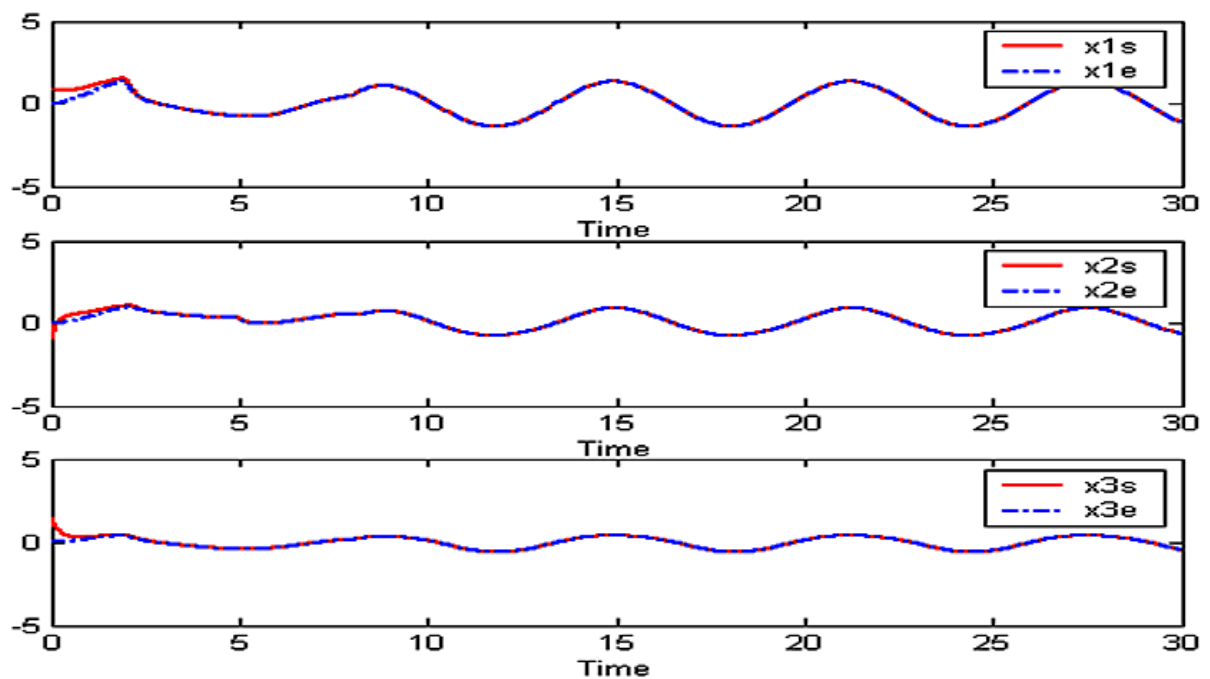


FIGURE 3.3: États du système et leurs estimés

La figure (3.4) montre que les erreurs d'estimation d'état entrée l'observateur à entrées inconnues et le système TS converge vers zéro.

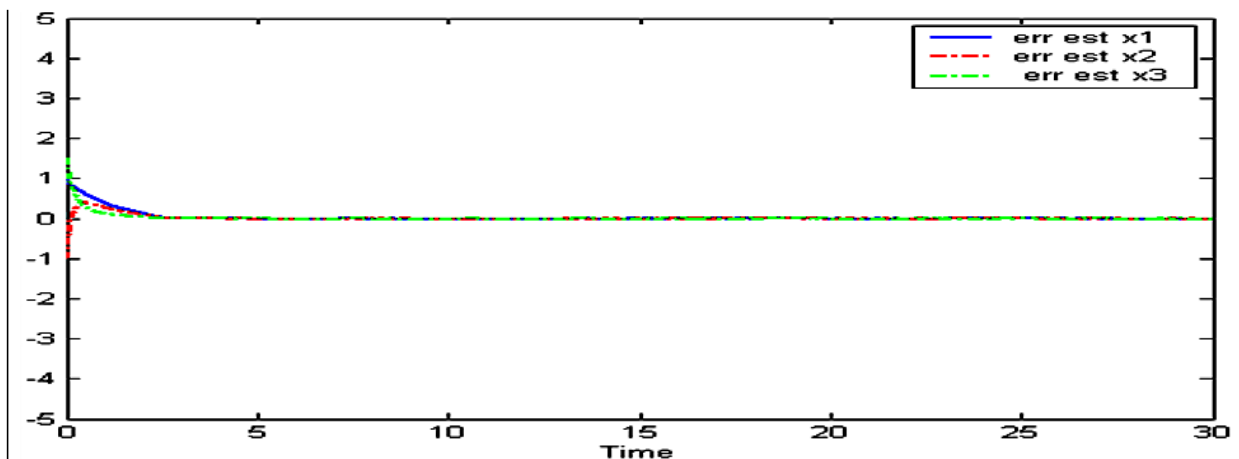


FIGURE 3.4: Erreurs d'estimation d'état

La figure (3.5) présente les fonctions d'activation.

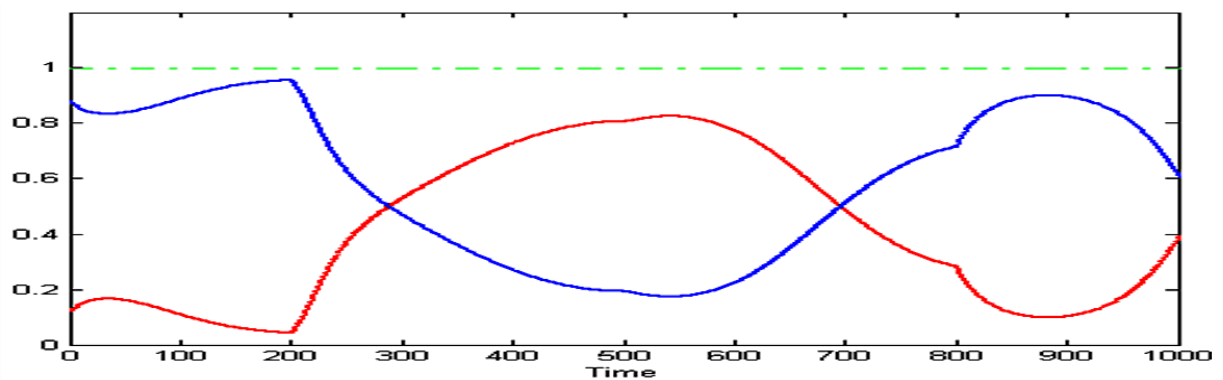


FIGURE 3.5: Fonctions d'activation

## 3.9 Augmentation du système TS et synthèse d'observateurs PI

Dans cette section la synthèse de l'observateur PI à entrées inconnues sera développée lorsque les variables de décision sont mesurables et non mesurables. Les entrées inconnues sont supposées constantes.

### 3.9.1 Variables de décision mesurables

Considérons le système TS ayant des variables de décision mesurables, avec matrices d'influence des entrées inconnues différentes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i q_1(t)) \\ y(t) = Cx(t) + E q_2(t) \end{cases} \quad (3.226)$$

On peut réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i q_1(t)) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C^{p,1} \\ C^{p,2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ E^{q,2} \end{bmatrix} q_2(t) \end{cases} \quad (3.227)$$

Où  $C^{p,1} \in R^{(p-q) \times n}$  et  $C^{p,2} \in R^{q \times n}$

Le système augmenté est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) [A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + E_{ai} q(t)] \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.228)$$

avec :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ g_f(t) \end{bmatrix}, q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A_{ai} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_{fi} C^{p,2} & -A_{fi} \end{bmatrix}, B_{ai} = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, C_a = [C^{p,1} \quad 0], E_{ai} = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ 0 & A_{fi} E^{q,2} \end{bmatrix}$$

L'observateur PI à entrées inconnues proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + F_i \hat{q}(t) + L_i^P y(t)] \\ \hat{x}_a(t) = z(t) + H y(t) \\ \dot{\hat{q}}(t) = - \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) L_i^I [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C_a \hat{x}_a(t) \end{cases} \quad (3.229)$$

$N_i(t) \in R^{n \times n}$ ,  $G_i(t) \in R^{n \times m}$ ,  $L_i(t) \in R^{n \times p}$  est le gain du  $i^{me}$  observateur local, et  $H$  est une matrice de transformation.  $L_i^P$  représentent les gains proportionnels et  $L_i^I$  les gains intégraux de l'observateur (3.229).  $\tilde{q}(t)$  représente l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue définie par  $\tilde{q}(t) = q(t) - \hat{q}(t)$ .

L'erreur d'estimation d'état est définie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} e(t) &= x_a(t) - \hat{x}_a(t) \\ &= (I - H C_a) x_a(t) - z(t) \end{aligned} \quad (3.230)$$

Sa dérivée par rapport au temps s'explique :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) (P(A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + E_{ai} q(t)) - N_i z(t) - G_i u(t) - F_i \hat{q}(t) - L_i^P y(t)) \quad (3.231)$$

avec :

$$P = I - HC_a \quad (3.232)$$

L'expression (3.231) peut également être écrite de la manière suivante :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) (N_i e(t) + (PA_{ai} - N_i - K_i C_a)x(t) + (PB_{ai} - G_i)u(t) + (PE_{ai} - F_i)q(t) + F_i \tilde{q}(t)) \quad (3.233)$$

avec  $K_i = L_i^P - N_i H$ .

Si l'on impose les conditions suivantes :

$$P = I - HC_a \quad (3.234)$$

$$N_i = PA_{ai} - K_i C_a \quad (3.235)$$

$$L_i^P = K_i + N_i H \quad (3.236)$$

$$G_i = PB_{ai} \quad (3.237)$$

$$F_i = PE_{ai} \quad (3.238)$$

L'erreur de reconstruction d'état tend asymptotiquement vers zéro et (3.233) se réduit à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) (N_i e(t) + F_i \tilde{q}(t)) \quad (3.239)$$

L'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue est donnée par :

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \dot{q}(t) - \hat{\dot{q}}(t) = - \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) L_i^I C_a e(t) \quad (3.240)$$

Le système augmenté de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état et de l'entrée inconnue peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) \begin{bmatrix} N_i & F_i \\ -L_i^I C_a & 0 \end{bmatrix} e_a(t) \quad (3.241)$$

Où :  $e_a(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{q}(t) \end{bmatrix}$

En utilisant (3.235), l'équation (3.241) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) (\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) e_a(t) \quad (3.242)$$

avec :

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} PA_{ai} & F_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_i = \begin{bmatrix} K_i \\ L_i^T \end{bmatrix}, \quad \text{et } \bar{C}_a = [C_a \quad 0] \quad (3.243)$$

Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état et d'entrées inconnues sont obtenues en utilisant la fonction quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(e(t)) = e_a(t)^T X e_a(t), \quad X = X^T > 0 \quad (3.244)$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}_a(t)^T X e_a(t) + e_a(t)^T X \dot{e}_a(t) \quad (3.245)$$

En utilisant la relation (3.243),  $\dot{V}(t)$  devient :

$$\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) (e_a(t)^T (\bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i - \bar{C}^T \bar{K}_i^T X - X \bar{K}_i \bar{C})) e_a(t) \quad (3.246)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est négative si :

$$\bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i - \bar{C}^T \bar{K}_i^T X - X \bar{K}_i \bar{C} < 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.247)$$

Afin d'avoir un problème de type LMI, posons le changement de variable suivant :

$$W_i = X \bar{K}_i \quad (3.248)$$

En utilisant le changement de variable (3.248) l'inégalité (3.247) devient :

$$\bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} < 0 \quad (3.249)$$

Les gains du multiobservateur se déduisent alors à l'aide de l'équation :

$$\bar{K}_i = X^{-1} W_i \quad (3.250)$$

En s'appuyant sur l'équation (3.249), on peut énoncer le théorème suivant :

#### **Théorème 14**

*L'erreur d'estimation d'état et d'entrées inconnues entre l'observateur à entrées inconnues (3.229) et le système TS à VDM (3.226) convergent asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice de Lyapunov symétrique et définie positive, des matrices  $W_i$  tels que pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  :*

$$\bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} < 0, i = 1, \dots, M \quad (3.251)$$

*Les gains du multiobservateur se déduisent alors à l'aide de l'équation :*

$$\bar{K}_i = X^{-1} W_i \quad (3.252)$$

Pour améliorer les performances du multiobservateur (3.229), la dynamique du multiobservateur est choisie de telle manière qu'elle soit sensiblement plus rapide que celle du Multi-modèle (3.226). Les valeurs propres des modèles linéaires élémentaires doivent être fixées dans une région  $S(\alpha, \beta)$  définie dans le plan complexe comme l'intersection du demi-plan gauche limité par une droite d'abscisse  $(-\alpha)$  et un disque, de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $\beta$ . L'inégalité (3.249) de la démarche précédente est remplacée par la résolution des inégalités suivantes [Akhenak 2004] :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\beta X & \bar{A}_i^T X - \bar{C}^T W_i^T \\ X \bar{A}_i - W_i \bar{C} & -\beta X \end{bmatrix} < 0 \\ \bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} + 2\alpha X < 0 \end{cases} \quad (3.253)$$

La résolution des contraintes (3.234)-(3.236) s'effectue, comme indiqué précédemment en trois étapes :

1. A partir de la relation (3.234), on calcul la matrice  $H$  comme suit :

$$[ P \quad H ] = \begin{bmatrix} I_p \\ C_a \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} I_p \\ C_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ C_a \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \quad (3.254)$$

Où  $I_p$  est une matrice identité de plein rang.

2. Après la résolution de l'inégalité (3.251), les gains sont déterminés par l'équation :

$$\bar{K}_i = X^{-1} W_i \quad (3.255)$$

3. A partir des équations (3.235) et (3.236) on peut calculer :

$$G_i = P B_{ai} \quad (3.256)$$

$$F_i = P E_{ai} \quad (3.257)$$

$$N_i = P A_{ai} - K_i C_a \quad (3.258)$$

$$L_i^P = K_i + N_i H \quad (3.259)$$

### 3.9.2 Variables de décision non mesurables VDNM

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les fonctions d'activation du système dépendent de variables non mesurables (par exemple l'état du système). La structure du système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) [A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + E_{ai} q(t)] \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.260)$$

La forme équivalente du système (3.260) représentée par le système TS(VDNM) où les fonctions d'activation dépendent de l'état estimé est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t)) (A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + E_{ai}q(t) + \omega(t)) \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (3.261)$$

L'observateur PI à entrées inconnues proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + F_i \hat{q}(t) + L_i^P y(t)] \\ \hat{x}_a(t) = z(t) + H y(t) \\ \dot{\hat{q}}(t) = - \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) L_i^I [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C_a \hat{x}_a(t) \end{cases} \quad (3.262)$$

$N_i(t) \in R^{n \times n}$ ,  $G_i(t) \in R^{n \times m}$ ,  $L_i(t) \in R^{n \times p}$  est le gain du  $i^{me}$  observateur local, et  $H$  est une matrice de transformation.  $L_i^P$  représentent les gains proportionnels et  $L_i^I$  les gains intégraux de l'observateur (3.262).

$\tilde{q}(t)$  représente l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue définie par  $\tilde{q}(t) = q(t) - \hat{q}(t)$ .

L'erreur d'estimation d'état est définie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} e(t) &= x_a(t) - \hat{x}_a(t) \\ &= (I - HC_a)x_a(t) - z(t) \end{aligned} \quad (3.263)$$

Sa dérivée par rapport au temps s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (P(A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + E_{ai}q(t) + \omega(t)) \\ &\quad - N_i z(t) - G_i u(t) - F_i \hat{q}(t) - L_i^P y(t)) \end{aligned} \quad (3.264)$$

avec :

$$P = I - HC_a \quad (3.265)$$

L'expression (3.264) peut également être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (N_i e(t) + (PA_{ai} - N_i - K_i C_a)x(t) \\ &\quad + (PB_{ai} - G_i)u(t) + (PE_{ai} - F_i)q(t) + F_i \tilde{q}(t) + P\omega(t)) \end{aligned} \quad (3.266)$$

avec  $K_i = L_i^P - N_i H$ .

Si l'on impose les conditions suivantes :

$$P = I - HC_a \quad (3.267)$$

$$N_i = PA_{ai} - K_i C_a \quad (3.268)$$

$$L_i^P = K_i + N_i H \quad (3.269)$$

$$G_i = P B_{ai} \quad (3.270)$$

$$F_i = P E_{ai} \quad (3.271)$$

L'erreur de reconstruction d'état tend asymptotiquement vers zéro et (3.266) se réduit a :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (N_i e(t) + F_i \tilde{q}(t) + P \omega(t)) \quad (3.272)$$

L'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue est donnée par :

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \dot{q}(t) - \dot{\hat{q}}(t) = - \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) L_i^I C_a e(t) \quad (3.273)$$

Le système augmenté de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état et de l'entrée inconnue peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) \left( \begin{bmatrix} N_i & F_i \\ -L_i^I C_a & 0 \end{bmatrix} e_a(t) + \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \omega(t) \right) \quad (3.274)$$

Où :

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{q}(t) \end{bmatrix} \quad (3.275)$$

avec :

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} P A_{ai} & F_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_i = \begin{bmatrix} K_i \\ L_i^I \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_a = [ C_a \quad 0 ], \quad \text{et} \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.276)$$

En remplaçant  $\omega(t)$  par sa valeur,

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) ((\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) e_a(t) + \bar{P} \omega(t)) \quad (3.277)$$

On peut écrire  $\omega(t)$  sous la forme :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^M (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))) (A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + E_{ai} q(t)) \quad (3.278)$$

$$= \Delta A(t) x_a(t) + \Delta B u(t) + \Delta E q(t) \quad (3.279)$$

$$= \Delta A(t) x_a(t) + \Delta \tilde{B} \tilde{q}(t) \quad (3.280)$$

$\tilde{q}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$ , et  $\Delta E(t)$  et  $\Delta \tilde{B}$  sont données par :

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^M (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))A_{ai} = M_A F_A I_A \quad (3.281)$$

$$\Delta B(t) = \sum_{i=1}^M (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))B_i = M_B F_B I_B \quad (3.282)$$

$$\Delta E(t) = \sum_{i=1}^M (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))E_{ai} = M_E F_E I_E \quad (3.283)$$

$$\Delta \tilde{B}(t) = \sum_{i=1}^M (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))\tilde{B}_i = M_{\tilde{B}} F_{\tilde{B}} I_{\tilde{B}} \quad (3.284)$$

Où :

$$M_A = [ A_1 \quad \cdots \quad A_M ], F_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_M I_n \end{bmatrix}, I_A = [ I_n \quad \cdots \quad I_n ]^T \quad (3.285)$$

$$M_B = [ B_1 \quad \cdots \quad B_M ], F_B(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_M I_m \end{bmatrix}, I_B = [ I_m \quad \cdots \quad I_m ]^T \quad (3.286)$$

$$M_E = [ E_1 \quad \cdots \quad E_M ], F_E(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_{n_q} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_M I_{n_q} \end{bmatrix}, I_E = [ I_{n_q} \quad \cdots \quad I_{n_q} ]^T \quad (3.287)$$

$$\tilde{B} = [ M_B \quad M_E ], F_{\tilde{B}}(t) = \begin{bmatrix} F_B(t) & 0 \\ 0 & F_E(t) \end{bmatrix}, I_{\tilde{B}} = [ I_B \quad I_E ]^T \quad (3.288)$$

où  $\delta_i(t) = h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))$

Les fonctions d'activation vérifient la propriété de convexité, on peut donc écrire :

$$-1 \leq F_i(t) \leq 1 \quad (3.289)$$

d'où :

$$F_A(t)^T F_A(t) \leq I \quad (3.290)$$

En utilisant l'écriture (3.278) de  $\omega(t)$ , l'erreur d'estimation d'état (3.277) devient :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) \left( \Phi_i e_a(t) + \bar{P} \Delta A(t) x(t) + \bar{P} \Delta \tilde{B}(t) \tilde{q}(t) \right) \quad (3.291)$$

Où :  $\Phi_i = \bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}$

On définit l'état augmenté  $\tilde{e}_a(t) = \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$  et on obtient :

$$\dot{\tilde{e}}_a(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M h_i(\hat{x}(t)) h_j(x(t)) (A_{ij} \tilde{e}_a(t) + R_{ij}(t) \bar{u}(t)) \quad (3.292)$$

où :

$$A_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \Phi_i & \bar{P} \Delta A(t) \\ 0 & A_j \end{pmatrix}, R_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \bar{P} \Delta B(t) & \bar{P} \Delta E(t) \\ B_j & E_j \end{pmatrix}, \bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \quad (3.293)$$

$$\dot{\tilde{e}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{x}(t)) h_j(x(t)) (A_{ii} \tilde{e}_a(t) + R_{ij} \bar{u}(t)) \quad (3.294)$$

où :

$$A_{ij}(t) = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C} & \Delta \bar{A}(t) \\ 0 & A_j \end{bmatrix}, R_{ij}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{B}(t) & \Delta \bar{E}(t) \\ B_j & E_j \end{bmatrix} \text{ et } \bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \quad (3.295)$$

avec :

$$\Delta \bar{A}(t) = \bar{P} \Delta A(t), \quad \Delta \bar{B}(t) = \bar{P} \Delta B(t) \quad \text{et} \quad \Delta \bar{E}(t) = \bar{P} \Delta E(t) \quad (3.296)$$

La recherche des gains  $\bar{L}_i$  garantissant la stabilité du système (3.294) et l'atténuation  $L_2$  du transfert de  $\omega(t)$  vers l'erreur  $e_a(t)$  permet l'obtention des gains de l'observateur (3.262), dont la solution est donnée dans le théorème 15.

On suppose que les hypothèses  $H1$ ,  $H2$  et  $H3$  sont vérifiées, donc  $\omega(t)$  est bornée.

### **Théorème 15**

*Le système (3.294) assurant la convergence de l'état de l'observateur (3.262) vers l'état du système (3.261) est stable, et le gain  $L_2$  de transfert de  $\omega(t)$  vers  $e_a(t)$  est borné s'il existe des matrices symétrique et définis positives  $P_1 \in R^{(n+n_q) \times (n+n_q)}$  et  $P_2 \in R^{(n+n)}$  et des matrices  $G_i \in R^{n+n_q \times n_y}$  ainsi que des scalaires positifs  $\bar{\gamma}$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  solutions de la minimisation de  $\bar{\gamma}$  sous les contraintes :*

$$\begin{bmatrix} \psi_i & 0 & 0 & 0 & X_1 \bar{P} M_A & X_1 \bar{P} M_B & X_1 \bar{P} M_E \\ 0 & \psi_{j1} & X_2 B_j & X_2 E_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_j^T X_2 & \psi_{j2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_j^T X_2 & 0 & \psi_{j3} & 0 & 0 & 0 \\ M_A^T \bar{P}^T X_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ M_B^T \bar{P}^T X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ M_E^T \bar{P}^T X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.297)$$

où

$$\psi_i = \bar{A}_i^T P_1 + P_1 \bar{A}_i - G_i \bar{C} - \bar{C}^T G_i^T + I \quad (3.298)$$

$$\psi_{j1} = A_j^T P_2 + P_2 A_j + \lambda_1 I_A^T I_A \quad (3.299)$$

$$\psi_{j2} = -\bar{\gamma}I + \lambda_2 I_B^T I_B \quad (3.300)$$

$$\psi_{j3} = -\bar{\gamma}I + \lambda_3 I_E^T I_E \quad (3.301)$$

Les gains de l'observateur et le taux d'atténuation du transfert de  $\omega(t)$  vers  $e_a(t)$  sont obtenus par les équations :

$$\bar{L}_i = P_1^{-1} G_i \quad (3.302)$$

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \quad (3.303)$$

**Démonstration :** La preuve du théorème 15 est établie en utilisant la fonction quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(e_a(t)) = \tilde{e}_a(t)^T X \tilde{e}_a(t), X = X^T > 0 \quad (3.304)$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(e_a(t)) = \dot{\tilde{e}}_a(t)^T X \tilde{e}_a(t) + \tilde{e}_a(t)^T X \dot{\tilde{e}}_a(t) \quad (3.305)$$

$$\dot{V}(e_a(t)) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M h_i(\hat{x}(t)) h_j(x(t)) (\tilde{e}_a^T A_{ij}^T X \tilde{e}_a + \tilde{e}_a^T X A_{ij} \tilde{e}_a + \bar{u}^T R_{ij}^T X \tilde{e}_a + \tilde{e}_a^T X R_{ij} \bar{u}) \quad (3.306)$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e_a(t) = H \tilde{e}_a(t) \quad (3.307)$$

où :

$$H = [ I \quad 0 ] \quad (3.308)$$

L'erreur d'estimation d'état converge vers zéro et le gain  $L_2$  du transfert de  $\bar{u}(t)$  vers  $\tilde{e}_a(t)$  est borné par  $\gamma$  si la condition suivante est vérifiée :

$$\dot{V}(e_a(t)) + \tilde{e}_a(t)^T \tilde{e}_a(t) - \gamma^2 \bar{u}(t)^T \bar{u}(t) < 0 \quad (3.309)$$

En substituant  $\dot{V}(e_a(t))$  (3.306) et  $e_a(t)$  (3.307) dans (3.309), on obtient :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M h_i(\hat{x}(t)) h_j(x(t)) (\tilde{e}_a^T A_{ij}^T X \tilde{e}_a + \tilde{e}_a^T X A_{ij} \tilde{e}_a + \bar{u}^T R_{ij}^T X \tilde{e}_a + \tilde{e}_a^T X R_{ij} \bar{u} + \tilde{e}_a^T H^T H \tilde{e}_a - \gamma^2 \bar{u}^T \bar{u}) < 0 \quad (3.310)$$

La mise sous forme matricielle de l'inégalité (3.310) donne :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M h_i(\hat{x}(t)) h_j(x(t)) \begin{bmatrix} \tilde{e}_a(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{ij}^T X + X A_{ij} + H^T H & X R_{ij} \\ R_{ij}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_a(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.311)$$

Compte tenu de la propriété des fonctions d'activation  $h_i$ , l'inégalité (3.311) est négative si :

$$\begin{bmatrix} A_{ij}^T X + X A_{ij} + H^T H & X R_{ij} \\ R_{ij}^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.312)$$

Choisissons une matrice  $x$  définie comme suit :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \quad (3.313)$$

où  $X_1 \in R^{n \times n}$ ,  $X_2 \in R^{n \times n}$  sont deux matrices symétriques et définies positives. En remplaçant les matrices  $A_{ij}$ ,  $R_{ij}$  (3.296),  $H$  (3.308) et  $x$   $X$  (3.313), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_i^T X_1 + X_1 \Phi_i + I & X_1 \Delta \bar{A}(t) & X_1 \Delta \bar{B}(t) & X_1 \Delta \bar{E}(t) \\ \Delta \bar{A}(t)^T X_1 & A_j^T X_2 + X_2 A_j & X_2 B_j & X_2 E_j \\ \Delta \bar{B}(t)^T X_1 & B_j^T X_2 & -\gamma^2 I & 0 \\ \Delta \bar{E}(t)^T X_1 & E_j^T X_2 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.314)$$

Pour résoudre l'inégalité matricielle (3.312) on effectue une transformation de l'inégalité (3.314) pour séparer les termes constants des termes variables dans le temps. En utilisant le lemme 1 (voir annexe B), On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \Phi_i^T X_1 + X_1 \Phi_i + I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_j^T X_2 + X_2 A_j & X_2 B_j & X_2 E_j \\ 0 & B_j^T X_2 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & E_j^T X_2 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + Q(t)^T + Q(t) < 0 \quad (3.315)$$

où

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & X_1 \Delta \bar{A}(t) & X_1 \Delta \bar{B}(t) & X_1 \Delta \bar{E}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.316)$$

Compte tenu de la définition de  $\Delta \bar{A}(t)$ ,  $\Delta \bar{B}(t)$  et  $\Delta \bar{E}(t)$ , la matrice  $Q(t)$  s'écrit :

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & X_1 \bar{P} M_A & X_1 \bar{P} M_B & X_1 \bar{P} M_E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_A I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_B I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_E I_E \end{bmatrix} \quad (3.317)$$

En utilisant le lemme 1 (voir annexe B), et en choisissant la matrice  $\Sigma$  sous la forme suivante :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 I \end{bmatrix} \quad (3.318)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
Q(t)^T + Q(t) &< \begin{bmatrix} 0 & X_1 \bar{P} M_A & X_1 \bar{P} M_B & X_1 \bar{P} M_E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A^T \bar{P}^T X_1 & 0 & 0 & 0 \\ M_B^T \bar{P}^T X_1 & 0 & 0 & 0 \\ M_E^T \bar{P}^T X_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_A^T F_A^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_B^T F_B^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_E^T F_E^T \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_A I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_B I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_E I_E \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.319}$$

Après calculs et utilisation des propriétés des termes  $F_A(t)$  et  $F_B(t)$ , on obtient :

$$Q(t)^T + Q(t) < \begin{bmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_A^T I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I_B^T I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 I_E^T I_E \end{bmatrix} \tag{3.320}$$

Où :

$$\varphi = \lambda_2^{-1} X_1 \bar{P} M_A M_A^T \bar{P}^T X_1 + \lambda_3^{-1} X_1 \bar{P} M_B M_B^T \bar{P}^T X_1 + \lambda_4^{-1} X_1 \bar{P} M_E M_E^T \bar{P}^T X_1 \tag{3.321}$$

En substituant (3.320) dans (3.315), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_j^T X_2 + X_2 A_j + \lambda_2 I_A^T I_A & X_2 B_j & X_2 E_j \\ 0 & B_j^T X_2 & -\gamma^2 I + \lambda_3 I_B^T I_B & 0 \\ 0 & E_j^T X_2 & 0 & -\gamma^2 I + \lambda_4 I_E^T I_E \end{bmatrix} < 0 \tag{3.322}$$

où :

$$\Theta = \varphi + (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C})^T X_1 + X_1 (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}) + I \tag{3.323}$$

L'inégalité (3.322) n'est pas linéaire par rapport aux variables  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $\bar{L}_i$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  et  $\gamma$ . Pour pouvoir la résoudre avec les logiciels de résolution LMIs existants, il faut donc la linéariser. En utilisant le complément de Schur ainsi que les changements de variables suivants :

$$G_i = X_1 \bar{L}_i \tag{3.324}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma^2 \tag{3.325}$$

On obtient alors les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers 0 sous forme LMI données dans le théorème 15.

■

**Exemple 5****Synthèse d'un observateur PI à entrées inconnues**

Dans le but de présenter la capacité de l'observateur PI à entrées inconnues dans l'estimation d'état du système représenté par un modèle de Takagi-Sugeno, on va considérer l'exemple suivant :

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont comme suit :

$$\begin{cases} h_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2} \\ h_2(x) = 1 - h_1(x) \end{cases}$$

La résolution des LMIs (3.297), donne les matrices suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6250 & -0.1250 & -0.3750 \\ -0.1250 & 0.6250 & -0.1250 \\ -0.3750 & -0.1250 & 0.6250 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.1250 & 0.2500 \\ 0.3750 & -0.2500 \\ 0.1250 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -0.0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.4375 \\ 1.3125 \\ -1.0625 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 1.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -42.3049 & 5.1623 & -36.5549 \\ 16.4609 & -20.2092 & 16.7109 \\ -8.3305 & 4.5211 & -15.5805 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -20.4732 & -72.5353 & -17.3482 \\ 18.8228 & -20.5360 & 16.1978 \\ -11.2185 & 12.0238 & -14.0935 \end{bmatrix}$$

$$L_1^P = \begin{bmatrix} -12.4589 & 23.7117 \\ 14.6522 & -20.5748 \\ -5.1895 & 6.9935 \end{bmatrix}, L_2^P = \begin{bmatrix} 41.4819 & -47.1337 \\ 14.8375 & -19.7196 \\ -9.8039 & 14.1583 \end{bmatrix}$$

$$L_1^I = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0342 & -0.0268 \end{bmatrix}, L_2^I = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0400 & -0.0334 \end{bmatrix}$$

La figure (3.6) présente les fonctions d'activation.

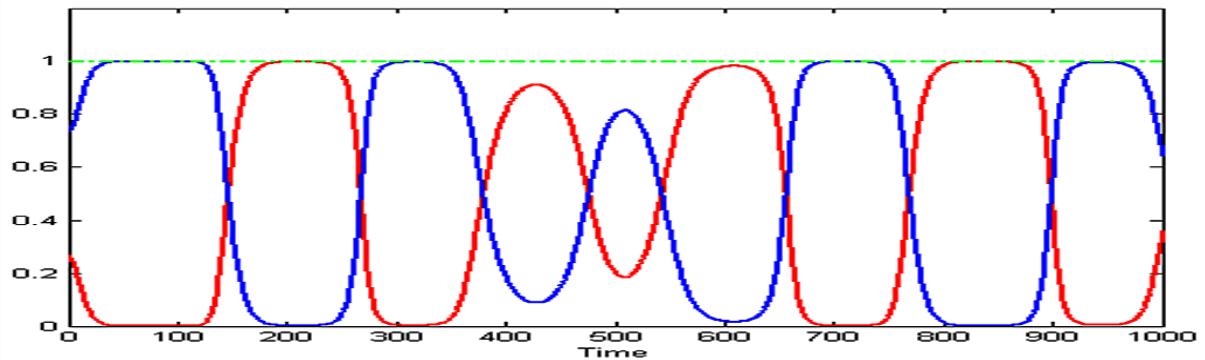


FIGURE 3.6: Fonctions d'activation

La figure (3.7) montre que l'observateur PI estime les états du système.

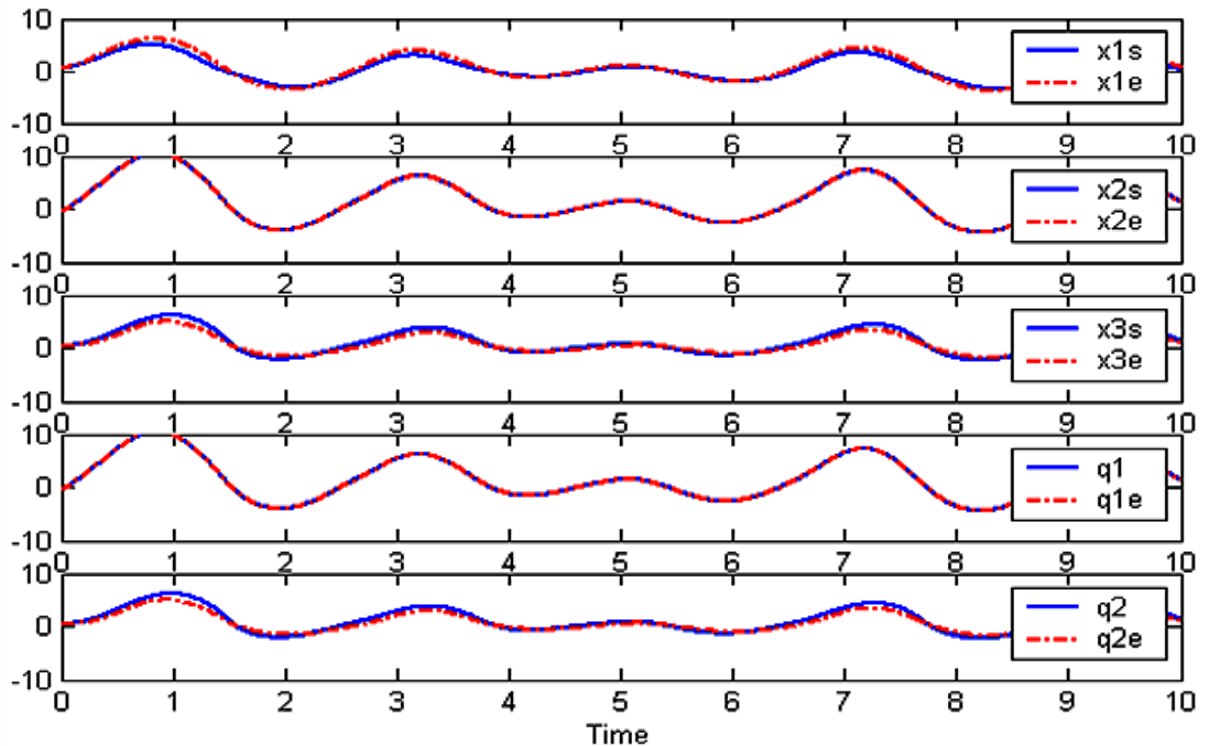


FIGURE 3.7: États du système et leurs estimés

La figure (3.8) présente les erreur d'estimation d'états entre l'observateur développé et le système TS.

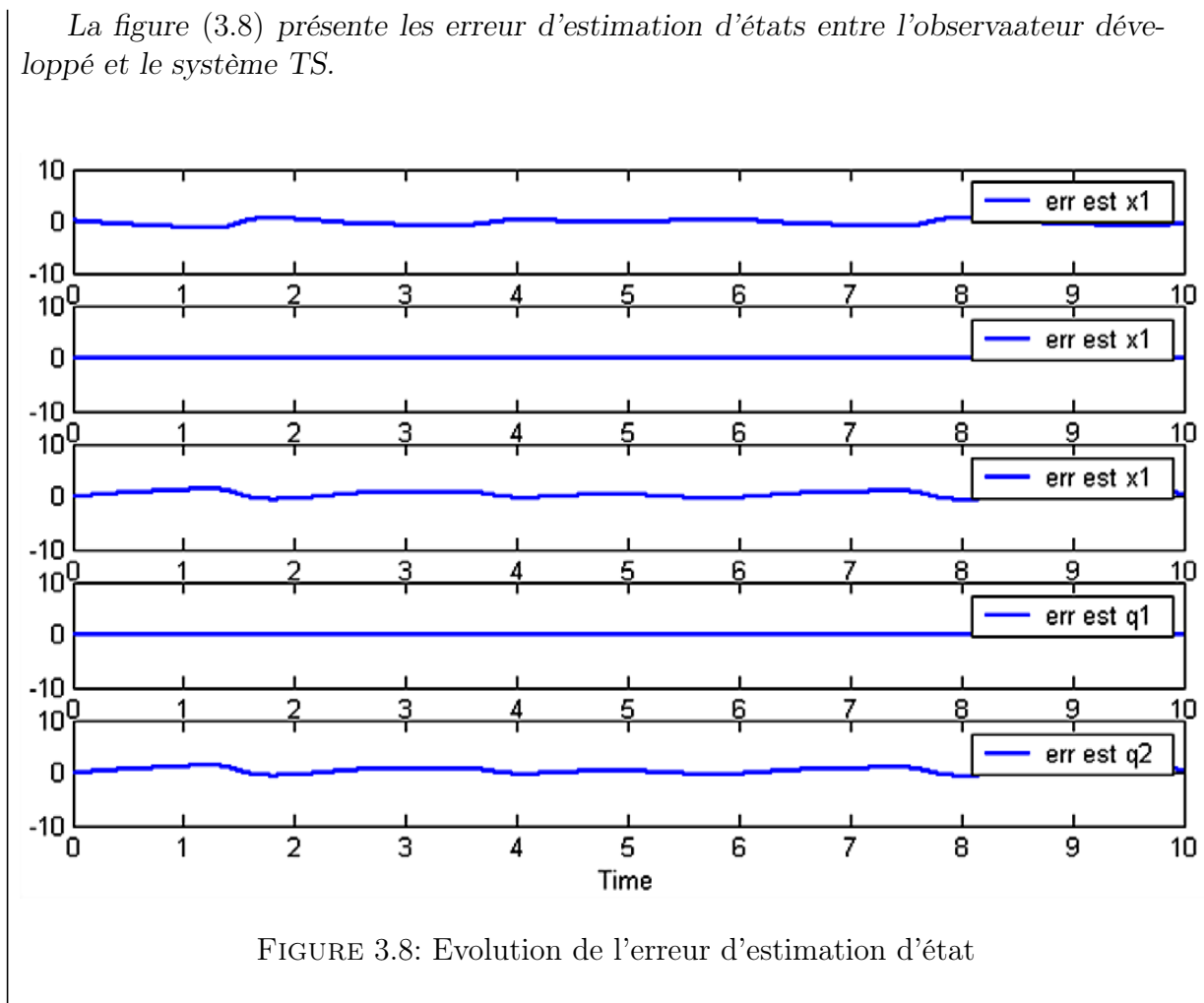


FIGURE 3.8: Evolution de l'erreur d'estimation d'état

L'observateur PI à entrées inconnues donne une estimation satisfaisante des états du système. On peut améliorer la qualité de l'estimation d'état en utilisant la technique de placement de pôles. On constate qu'en pratique on peut augmenter les gains de l'observateur afin d'estimer les entrées inconnues ayant des dynamiques négligées. Cela engendre une sensibilité supplémentaire aux bruits, on doit alors satisfaire un compromis entre les performances de l'observateur et la robustesse [Koenig 2002, Ichalal 2009].

## 3.10 Conclusion

Sur la base du principe d'augmentation des systèmes, il a été présenté dans ce chapitre des méthodes pour l'estimation d'état des systèmes TS à VDM et à VDNM. Nous avons commencer par un rappel sur les incertitudes du modèle, avant de passer à la présentation du modèle TS à VDNM. La synthèse d'observateur à entrées inconnues à VDNM a été étudiée, pour arriver à la reconstruction des observateurs PI à entrées inconnues, qui vont être utilisés dans le chapitre suivant pour l'estimation d'état et des entrées inconnues des systèmes TS à VDNM. La convergence des observateurs construits a été analysée par la résolution d'un problème des LMIs, dont la résolution numérique est possible.



# Chapitre 4

## Diagnostic de défauts du système hydraulique à trois cuves

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>116</b>
<b>4.2</b>	<b>Diagnostic de défauts du système TS par observateur à entrées inconnues à VDNM</b>	<b>116</b>
4.2.1	Différentes étapes de diagnostic du système TS	117
4.2.2	Défauts actionneurs	118
4.2.3	Défauts capteurs	119
<b>4.3</b>	<b>Diagnostic de défauts du système TS par observateur PI à entrées inconnues à VDNM</b>	<b>125</b>
<b>4.4</b>	<b>Description du système hydraulique à trois cuves</b>	<b>126</b>
<b>4.5</b>	<b>Obtention de la représentation Multi-modèle du système à trois cuves</b>	<b>127</b>
4.5.1	Ecriture du système sous forme Q-LPV	127
4.5.2	Identification des non-linéarités	128
4.5.3	Construction des fonctions de pondération	128
4.5.4	Définition des fonctions d'appartenance	129
4.5.5	Réécriture du système sous forme de Multi-modèle de TS	129
<b>4.6</b>	<b>Diagnostic de défauts capteurs du système à trois cuves par la reconstruction</b>	<b>130</b>
<b>4.7</b>	<b>Diagnostic des défauts du système à trois cuves par observateur PI à entrées inconnues à VDNM</b>	<b>133</b>
4.7.1	Défauts actionneurs	133
4.7.2	Défauts capteurs	136
<b>4.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>

---

## 4.1 Introduction

Différentes méthodes ont été proposées pour le diagnostic de défauts affectants les systèmes non linéaires. La tâche principale du diagnostic est de générer des résidus qui doivent être sensibles aux défauts eux-mêmes.

Pour détecter un défaut particulier, le résidu doit être sensible à ce défaut.

Dans de nombreuses publications sur les observateurs non linéaires pour la conception de méthodes FDI, les résidus sont basés sur l'erreur d'estimation d'état [Willsky 1975, Frank 1987, Frank 1977, Gertler 1993, Chen 1999, Akhenak 2004, Xu 2012, Ichalal 2009]. L'observateur à entrées inconnues a été introduit dans la détection de défauts au milieu des années 80 [Baikheche 2007]. Des travaux concernant les observateurs pour des systèmes dont certaines entrées sont inconnues sont initiés par [Wang 1975] et les premiers travaux publiés utilisant un observateur à entrées inconnues pour la détection et la localisation de défaut sont dus à [Viswanadham 1987]. L'observateur à entrées inconnues est aussi utilisé pour le cas des entrées toutes connues mais dont une partie seulement est utilisée afin de ne pas être affectés par d'éventuels défauts sur les entrées ignorées [Baikheche 2007]. On trouve aussi des travaux qui présentent l'utilisation des observateurs PI et PMI pour système de Takagi-Sugeno [Ichalal 2010] pour le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs en utilisant les observateurs PI à entrées inconnues qui sont capables d'estimer les états et les défauts détectés. Les méthodes développées utilisent les observateurs présentés dans le chapitre 3 afin de concevoir des générateurs de résidus sensibles aux défauts.

Ce chapitre présente trois méthodes de diagnostic, la première méthode est basée sur l'utilisation de l'observateur à entrées inconnues pour le diagnostic de défauts du système non linéaire décrit par un modèle TS à VDNM.

La deuxième méthode est basée sur le principe de la reconstruction pour le diagnostic de défauts capteurs du système TS à VDM, avec l'utilisation d'un filtrage pour améliorer la sensibilité aux défauts de faibles amplitudes.

La troisième méthode est basée sur l'utilisation des observateurs PI à entrées inconnues pour l'estimation de défaut capteurs et actionneurs. Les techniques des bancs d'observateurs sont utilisées dans l'objectif de générer des résidus structurés pour localiser les défauts.

Les deux dernières méthodes proposées ont été appliquées sur le système hydraulique à trois cuves.

## 4.2 Diagnostic de défauts du système TS par observateur à entrées inconnues à VDNM

La représentation du système à VDNM avec la présence de défauts possibles affectants les capteurs et les actionneurs peut être décrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_a f_a(t) + \omega(t)) \\ y = Cx(t) + E_s f_s(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées obtenues au moyen des procédés de modélisation présentées dans le chapitre 2.

Les vecteurs  $f_a(t) \in R^{u_a}$  indique la présence de défauts actionneurs et  $f_s(t) \in R^{u_s}$  désigne les défauts capteurs. Pour générer un résidu robuste (dans le sens de couplage de la perturbation), un UIO est nécessaire.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t))(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Hy(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $\hat{x} \in R^n$  est le vecteur d'état estimé et  $z \in R^n$  est l'état de cet observateur d'ordre plein, et  $F$ ,  $T$ ,  $K$ ,  $H$  sont des matrices à déterminer pour assurer le découplage des entrées inconnues et d'autres exigences de conception.

### 4.2.1 Différentes étapes de diagnostic du système TS

Lorsque l'observateur (4.2) est appliqué sur le système (4.1), l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est régie par l'équation suivante :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (4.3)$$

Pour la détection de défauts on va utiliser deux bancs d'observateurs de structure DOS. Le premier pour la détection des défauts affectants les actionneurs et le deuxième pour la détection des défauts affectants les capteurs.

#### 4.2.1.1 Analyse des résidus

Pour l'analyse de chaque résidu  $r_{ij}(t)$ , on peut calculer une tolérance  $T_{ij}$  qui doit indiquer les limites de son domaine d'évolution en l'absence de défauts. La fixation des valeurs des tolérances est effectuée en fonction des caractéristiques statistiques de chacun des résidus en fonctionnement normal. La valeur de la tolérance  $T_{ij}$  peut, par exemple, être déterminée à partir de l'expression suivante [Akhenak 2004] :

$$T_{ij} = \alpha \sqrt{Var(r_{ij}(t))} \quad (4.4)$$

où  $r_{ij}(t)$  est la  $i$ ème composante du vecteur de résidu généré par le  $j^{me}$  multiobservateur,  $\alpha$  est un paramètre de réglage de la sensibilité de détection et  $Var(r_{ij}(t))$  la variance du résidu  $r_{ij}(t)$  en fonctionnement normal.

#### 4.2.1.2 Évaluation des résidus

L'évaluation de résidus consiste à la génération de la matrice de signatures expérimentales. Pour remplir cette matrice, on doit associer à chaque résidu la valeur 0 ou 1 selon qu'il est affecté ou non par défaut. De manière simplifiée, la détection de défauts au niveau d'un résidu, s'apparente au test logique suivant :

Le résidu robuste peut être utilisé pour détecter les défauts selon une logique de seuil simple :

$$\begin{cases} \|r_{ij}(t)\| < T_{ij} & \text{Absence de défaut} \\ \|r_{ij}(t)\| \geq T_{ij} & \text{Présence de défaut} \end{cases} \quad (4.5)$$

Les résultats des tests effectués sur chacun des résidus  $r_{ij}(t)$ , on peut définir une signature binaire expérimentale notée  $z_{ij}$ , elle est générée à chaque instant  $t$ , de la manière suivante :

$$z_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \|r_{ij}(t)\| < T_{ij} \\ 1 & \text{si } \|r_{ij}(t)\| \geq T_{ij} \end{cases} \quad (4.6)$$

#### 4.2.1.3 Localisation des défauts du système TS

Le problème de localisation de défaut consiste à déterminer dans quel capteur (ou actionneur) le défaut est survenu. La localisation des défauts est basée sur la comparaison, à chaque instant, de la signature de défaut expérimentale avec les différentes signatures théoriques.

#### Remarque 5

*Les Structures de localisation de défaut présentées dans cette section peuvent seulement isoler un seul défaut soit un capteur ou un actionneur, au même moment. Ceci est basé sur le fait que la probabilité pour que deux ou plusieurs défauts de se produire au même moment est très faible dans une situation réelle.*

*Si des défauts simultanés doivent être isolés, la structure de localisation de défaut doit être modifiée sur la base d'un groupement de défauts [Chen 1995]. Chaque résidu sera conçu pour être sensible à un groupe de défauts et insensible à un autre groupe de défauts. Frank et Winnenberg ont étudié ce problème [Frank 1989]. Le moyen de regroupement de défauts dépend du système et des défauts à isoler.*

### 4.2.2 Défauts actionneurs

En permutant l'ordre des entrées, sans perte de généralité, on peut supposer que la représentation du système est sous la forme :

$$\begin{aligned}
 B_i u(t) &= [ B_i^N \quad \bar{B}_i ] \begin{bmatrix} u_N(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{entrées connues} \\ \text{entrées inconnues} \end{array} \right\} \\
 &= B_i^N u_N(t) + \bar{B}_i \bar{u}(t)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

On obtient alors la structure équivalente du modèle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i^N u_N(t) + \bar{B}_i \bar{u}(t) + \omega(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{4.8}$$

Cette structure est obtenue en regroupant les entrées de commande qu'on considère comme entrées connues dans le vecteur  $u_N(t)$  et les entrées qu'on considère inconnues dans le vecteur  $\bar{u}(t)$ .

Afin de construire les bancs d'observateurs cités ci-dessus, les observateurs à entrées inconnues par découplage sont utilisés. Leur structure est rappelée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} z(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t))(N_i z(t) + G_i u_N(t) + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Hy(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

En utilisant chaque observateur du banc, on génère des résidus formés par l'erreur de sortie entre chaque observateur et la sortie mesurée du système :

$$r^j(t) = y^j(t) - \hat{y}^j(t) \tag{4.10}$$

où  $\hat{y}^j(t)$  représente la sortie estimée par l'observateur  $j, j = 1, \dots, n_u$ .

### 4.2.3 Défauts capteurs

Pour le diagnostic de défauts affectant les capteurs, on peut utiliser l'approche à base d'observateur à entrées inconnues, l'approche par observateur de Luenberger pour le modèle TS, l'approche qui utilise le principe de la reconstruction, ou l'approche à base de l'observateur PI à entrées inconnue.

#### 4.2.3.1 Approche par augmentation d'état et synthèse d'observateur à entrées inconnues

Dans le cas de la présence d'un défaut capteur (Absence de défauts actionneurs), le système (4.1) se présente comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \omega(t)) \\ y = Cx(t) + E_s f_s(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

En permutant l'ordre des sorties, sans perte de généralité, on peut supposer que la représentation du système est sous la forme :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_N(t) \\ \bar{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_N \\ \bar{C} \end{bmatrix} x(t) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} y_N(t) \\ \bar{y}(t) \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \text{ sans défaut} \\ \} \text{ avec défaut} \end{array} \right\} \quad (4.13) \\ &= \begin{bmatrix} C_N \\ \bar{C} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{E}_s \end{bmatrix} f_s(t) \end{aligned}$$

D'abord faire un filtrage de la sortie en défaut  $y_2(t)$  pour créer l'état  $z_f(t) \in R^q$  selon :

$$\dot{z}_f(t) = -A_f z_f(t) + B_f \bar{y}(t) \quad (4.14)$$

où  $-A_f$  est une matrice stable de dimension  $R^{q \times q}$ . Substituer  $\bar{y}(t)$  de (4.13) dans (4.12) donne :

$$\dot{z}_f(t) = -A_f z_f(t) + B_f \bar{y}(t) \quad (4.15)$$

L'augmentation d'état des sous-systèmes (4.11) et (4.15) donne un système d'ordre  $(n + q)$  de la forme :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}_f(t) \\ y_N(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M h_i(x(t)) \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & -A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \bar{C} \end{bmatrix} f_s(t) + \omega(t) \\ \begin{bmatrix} y_N(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_N & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.16)$$

Les résidus générés sont alors donnés comme suit :

$$r_{ij}(t) = y^j(t) - \hat{y}^j(t) \quad (4.17)$$

Les générateur de résidus conçus doivent être sensibles aux défauts affectant les sorties et insensibles à toutes les autres.

#### 4.2.3.2 Approche par observateur de Luenberger pour modèle TS

Dans cette section, une seconde approche de localisation de défauts de capteurs est présentée [Djeddi 2016]. On construit des observateurs (voir chapitre 3) utilisant les sorties  $y^{p,2}(t)$  de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t))(A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + L_i(y(t) - \hat{y}_N(t))) \\ \hat{y}_N(t) = C_N\hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

Les résidus générés sont alors donnés par :

$$r_{ij}(t) = y^j(t) - \hat{y}^j(t) \quad (4.19)$$

On peut construire un banc d'observateur de Luenberger pour le modèle de TS pour localiser les défauts capteurs.

### 4.2.3.3 Approche par reconstruction

Une troisième approche pour le diagnostic défauts des capteurs basée sur le principe de reconstruction peut être utilisée. L'approche proposée utilise un observateur d'ordre complet. Pour les défauts capteurs, le seul observateur dans cette approche utilise toutes les entrées et toutes les sorties mesurables, ce qui fournit une redondance simple et permet d'isoler les défauts des capteurs. Il permet d'isoler les défauts comme un banc d'observateur. L'idée principale est basée sur deux étapes :

La première étape : consiste à détecter la présence de défaut, dont on peut utiliser, par exemple, la statistique *SPE* (*Squared Prediction Error*) appelée aussi *Q*. Pour améliorer la qualité de la détection et réduire le taux des fausses alarmes, le filtre *EWMA* (*exponentially weighted moving average*) peut être appliqué aux résidus. La deuxième étape : La reconstruction des sorties et le calcul de l'indice *SPE* filtré pour identifier la variable en défaut.

Pour présenter la méthode de localisation de défauts à base de reconstruction [Dunia 1996], on considère le système non linéaire à VDM modélisé par les équations suivantes :

$$X(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))[A_iX(t) + B_iU(t)] \quad (4.20)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.21)$$

L'observateur de l'état pour le système TS (4.20), (4.21) peut être écrit comme suit :

$$\hat{X}(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))[A_i\hat{X}(t) + B_iU(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))] \quad (4.22)$$

$$\hat{Y}(t) = C\hat{X}(t) \quad (4.23)$$

A partir des équations (4.22) et (4.23), on peut écrire :

$$\hat{X}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))[A_i\hat{X}(t-1) + B_iU(t-1) + L_i(y(t-1) - \hat{y}(t-1))] \quad (4.24)$$

et :

$$Y(t) = C \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) [A_i \hat{X}(t-1) + B_i U(t-1) + L_i (y(t-1) - \hat{y}(t-1))] \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) montre que  $\hat{Y}(t)$  ne dépend que des variables mesurées en temps  $(t-1)$ . Si un défaut affecte un capteur au temps  $k$  ( $i^{me}$  composante de  $Y(t)$  par exemple), il est clair que son estimation  $\hat{Y}(t)$  ne sera pas affectée par ce défaut, car il ne dépend que des variables mesurées au temps  $(t-1)$ .

Donc, si nous essayons de reconstruire la variable en défaut  $y_i(t)$  (affectée par défaut), on va remplacer  $y_i(t)$  à l'entrée de l'observateur par son estimation  $\hat{y}_i(t)$  (sans défaut), alors le défaut est éliminé.

Il est également clair que si l'on remplace  $y_j(t)$  (une autre composante du vecteur  $Y(t)$ ) par son estimation  $\hat{y}_j(t)$  le défaut ne sera pas éliminé.

Pour éviter la propagation de défaut au temps  $(t+1)$ , le vecteur  $Y(t)$  qui est utilisé pour estimer  $\hat{Y}(t+1)$  sera composé de tous ses composants, sauf la  $i^{me}$  composant qui sera remplacée par  $\hat{y}_i(t)$  (la valeur reconstruite au moment  $t$ )

En examinant les résidus résultants avant et après la reconstruction, nous pouvons déterminer la variable en défaut. La localisation est effectuée en comparant l'indice de détection avant et après la reconstruction. La variable en défaut est identifiée comme étant la variable pour laquelle l'indice de détection calculé après reconstitution, est inférieur au seuil de détection (le défaut est éliminé).

Considérons  $\overline{SPE}_j(t)$  l'indice  $\overline{SPE}(t)$  calculé après la reconstruction de la  $j^{me}$  variable. Ce calcul doit être effectué successivement pour toutes les variables ( $j = 1, \dots, p$ ). Par conséquent, si la  $i^{me}$  variable en défaut est reconstruite ( $j = i$ ), l'indice est au-dessous du seuil de détection, car le défaut est éliminé par la reconstruction. Si la variable reconstruite est saine, l'indice  $\overline{SPE}_j$  reste affecté par le défaut, et il dépasse le seuil de détection.

En résumé, dans le cas de détection de défaut, tous les indices  $\overline{SPE}_j$  sont calculés et, si  $\overline{SPE}_j$  est inférieur au seuil de détection, le  $j^{me}$  variable est considéré en défaut.

### Analyse des résidus

Pour la détection de défaut on peut utiliser aussi la statistique  $SPE$ , également connu sous le nom de la statistique  $Q$ , c'est un indice obtenu à partir de l'erreur d'estimation des sorties, elle dépend de toutes les variables à surveiller.

L'indice  $SPE(t)$  est donné par :

$$SPE(t) = r(t)^T r(t) \quad (4.26)$$

Le système est considéré en fonctionnement anormal au moment  $t$  si :

$$SPE(t) > \xi_\alpha^2 \quad (4.27)$$

Avec  $\xi_\alpha^2$  est le seuil de détection. Pour un niveau de confiance  $\alpha$ ,  $\xi_\alpha^2$  est déterminée théoriquement par [Box 1954].

$$\xi_\alpha^2 \approx g \chi_{h,\alpha}^2, \quad g = \nu/2m, \quad h = 2m^2/\nu \quad (4.28)$$

où  $m$  et  $\nu$  sont la moyenne et la variance estimées respectivement à partir de  $SPE$  [Box 1954]. Cette distribution d'approximation se trouve bien fonctionner même dans les cas où les erreurs ne sont pas normalement distribués [Van-Sprang 2002].

Pour améliorer la détection de défaut en réduisant le taux de fausses alarmes (à cause du bruit), on va introduire la filtrage  $EWMA$ , ce filtre peut être appliqué aux résidus [Harkat 2003, Dunia 1996]. L'expression des résidus  $\bar{r}(t)$  filtrés est donnée par :

$$\bar{r}(t) = (I - \beta)\bar{r}(t - 1) + \beta r(t) \quad (4.29)$$

où  $\beta$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les facteurs d'oubli pour les résidus,  $I$  est une matrice identité et  $\bar{r}(t) = 0$ .  $\beta$  peut être ajusté en fonction du type de défauts à détecter :  $\beta$  proche de la matrice identité favorise la détection des changements lents, tandis que  $\beta$  proche de zéro est plus sensible aux changements brusques. La matrice  $\beta$  peut être donnée par l'équation suivante [Harkat 2003] :

$$\beta = \eta I \quad (4.30)$$

Où  $0 < \eta < 1$  est le facteur d'oubli.

Le  $SPE(t)$  filtré est donné par :

$$\overline{SPE}(t) = \bar{r}(t)^T \bar{r}(t) \quad (4.31)$$

$\bar{r}(t)$  et  $\overline{SPE}(t)$  définir, respectivement, le résidu filtré et le  $SPE$  filtré.

Le processus est censé être défectueux lorsque :

$$\overline{SPE}(t) > \bar{\xi}_\alpha^2 \quad (4.32)$$

Où  $\bar{\xi}_\alpha^2$  est le seuil de détection du  $\overline{SPE}(t)$ . [Qin 1999] ont montré que  $\bar{\xi}_\alpha^2$  suit la règle  $\chi^2$  et est liée au seuil de détection non-filtré  $\xi_\alpha^2$  par l'équation suivante :

$$\bar{\xi}_\alpha^2 = \frac{\eta}{2 - \eta} \xi_\alpha^2 \quad (4.33)$$

### Localisation des défauts par la reconstruction

Nous considérons que le vecteur des sorties  $Y = [y_1, \dots, y_i, \dots, y_p]^T$  du système (4.20), (4.21), où  $y_i$  représente la variable à reconstruire  $i = 1, \dots, p$ . L'équation (4.22) et (4.23) peuvent être réécrites comme :

$$\dot{\hat{X}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{X}(t) + B_i U(t) + L_i \begin{bmatrix} y_1(t) - \hat{y}_1(t) \\ \vdots \\ y_i(t) - \hat{y}_i(t) \\ \vdots \\ y_p(t) - \hat{y}_p(t) \end{bmatrix} + \sigma_i \right) \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{y}_i(t) \\ \vdots \\ \hat{y}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix} \hat{X}(t) \quad (4.35)$$

Où  $y_i$  est la variable à reconstruire et  $C_i$  sa ligne correspondante de la matrice  $C$ .

$$r(t) = Y(t) - \hat{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) - \hat{y}_1(t) \\ \vdots \\ y_i(t) - \hat{y}_i(t) \\ \vdots \\ y_p(t) - \hat{y}_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

L'idée principale de la reconstruction consiste en le remplacement de la variable à reconstruire  $y_i(t)$  par sa valeur estimée  $\hat{y}_i(t)$ , donnée par l'observateur pour  $i = 1, \dots, p$  [Dunia 1996]. Considérons la variable en défaut ( $y_1(t) + f_s(t)$ ), et le défaut du capteur  $f_s(t)$ . Le résidu 1<sup>re</sup> avant la reconstruction est donné par :

$$r_i^{av}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) + f_s(t) - \hat{y}_1(t) \\ \vdots \\ y_i(t) - \hat{y}_i(t) \\ \vdots \\ y_p(t) - \hat{y}_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Ensuite, si l'on reconstruit cette variable, nous allons remplacer ( $y_1(t) + f_s(t)$ ) par son estimation  $\hat{y}_1(t)$  ( $i = 1$ ). Le résidu  $r_i^{ap}(t)$  après la reconstruction de  $y_1(t)$  est donnée par l'estimation :

$$r_i^{ap}(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(t) - \hat{y}_1(t) \\ y_2(t) - \hat{y}_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) - \hat{y}_p(t) \end{bmatrix}, \text{ for } i = 1 \quad (4.38)$$

L'effet de défaut est éliminé à la reconstruction de la variable en défaut.

$$r_i(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2(t) - \hat{y}_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) - \hat{y}_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

A partir de l'équation (4.32), l'équation (4.27) et (4.28) pour  $y_i(t)$  ( $i = 1$ ) la reconstruction peut être réécrite comme :

$$\dot{\hat{X}}_i(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{X}(t) + B_i U(t) + L_i \begin{bmatrix} 0 \\ y_2(t) - \hat{y}_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) - \hat{y}_p(t) \end{bmatrix} + \sigma_i \right) \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(t) \\ \hat{y}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{y}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix} \hat{X}(t) \quad (4.41)$$

A partir de l'expression de l'erreur d'estimation, le défaut de la variable reconstruite a été éliminé. Cette opération de reconstruction peut être utilisée pour les autres variables dans le vecteur de sortie  $Y(t)$ , et plusieurs erreurs d'estimation peuvent être générées. Chaque vecteur d'erreur d'estimation est insensible à sa variable reconstruite correspondante. Cette propriété est très utile pour localiser le défaut.

Dans le tableau 1, les signatures de capteur théoriques sont illustrées par défaut :

	Défauts			
Résidus	$f_1$	$f_2$	...	$f_p$
$\overline{SPE}_1$	0	1	...	1
$\overline{SPE}_2$	1	0	...	1
...	...	...	...	...
$\overline{SPE}_p$	1	1	...	0

TABLE 4.1: Signatures des défauts Capteurs

Le tableau (4.1) montre que, l'approche proposée donne les mêmes résultats que l'approche Generalised Observer Scheme (GOS).

### 4.3 Diagnostic de défauts du système TS par observateur PI à entrées inconnues à VDNM

Nous avons présenté dans le chapitre 3 l'estimation d'état en utilisant l'observateur PI à entrées inconnues. L'observateur PI à entrées inconnues offre la possibilité d'estimer le défaut actionneur et/ou capteur, qui peut être utilisé par la suite pour résoudre les problèmes de tolérance aux défauts, à travers l'usage de l'information sur le défaut pour corriger la loi de commande.

Considérons le système TS avec défauts actionneurs et capteurs :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i q_1(t)) \\ y(t) = Cx(t) + E q_2(t) \end{cases} \quad (4.42)$$

Le système TS (VDNM) où les fonctions d'activation dépendent de l'état estimé est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t)) (A_{ai}x_a(t) + B_{ai}u(t) + E_{ai}q(t) + \omega(t)) \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (4.43)$$

L'observateur PI à entrées inconnues proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + F_i \hat{q}(t) + L_i^P y(t)] \\ \hat{x}_a(t) = z(t) + H y(t) \\ \dot{\hat{q}}(t) = - \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) L_i^I [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C_a \hat{x}_a(t) \end{cases} \quad (4.44)$$

$\tilde{q}(t)$  représente l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue définie par  $\tilde{q}(t) = q(t) - \hat{q}(t)$ .

Parmi les avantages de l'observateur PI à entrées inconnues est la possibilité de réaliser la détection, la localisation et l'estimation des états du système et l'estimation aussi des défauts en utilisant un seul observateur.

Les résidus sont donnés par l'équation suivante :

$$r^j(t) = \hat{q}^j(t) \quad (4.45)$$

Pour le diagnostic des défauts par observateur PI à entrées inconnues, on suit les étapes suivantes :

1. Construction d'un observateur PI à entrées inconnues pour chaque défaut par minimisation de  $\bar{\gamma}_i$ , et calcul des gains et des autres matrices de l'observateur.
2. Calcul et évaluation des résidus : Pour l'évaluation des résidus, on utilise le test logique suivant :

$$\begin{cases} |r_{ij}(t)| \leq J_{th} & \text{Cas absence de défaut} \\ |r_{ij}(t)| > J_{th} & \text{Cas présence de défaut} \end{cases} \quad (4.46)$$

Où la valeur de la tolérance  $T_{ij}$  peut, être déterminée à partir de l'expression (4.4)

## 4.4 Description du système hydraulique à trois cuves

Pour illustrer la méthode, On va prendre un système à trois cuves similaire à celui traité dans le chapitre 3.

Le système est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{-c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A} + \frac{Q_1}{A} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{-c_2 S_n \sqrt{2gx_2}}{A} + \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}}{A} + \frac{Q_2}{A} \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A} - \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}}{A} \end{cases} \quad (4.47)$$

$$A = 0.0154 \text{ m}^2, \quad g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad S_n = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2, \quad c_1 = 0.9, \quad c_2 = 0.6, \quad c_3 = 0.8.$$

Sous l'hypothèse qu'en l'absence ou en présence de défaut la propriété  $x_2 < x_3 < x_1$  on pose :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 1/A * \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

On peut écrire le système (4.47) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{-c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A(x_1+x_3)}(x_1+x_3) + \frac{Q_1}{A} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{-c_2 S_n \sqrt{2g}}{A\sqrt{x_2}}x_2 + \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}(x_2+x_3)}{A(x_2+x_3)} + \frac{Q_2}{A} \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A(x_1+x_3)}(x_1+x_3) - \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}(x_2+x_3)}{A(x_2+x_3)} \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{-c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A(x_1+x_3)}x_1 - \frac{c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A(x_1+x_3)}x_3 + u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \left( \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}}{A(x_2+x_3)} - \frac{c_2 S_n \sqrt{2g}}{A\sqrt{x_2}} \right) x_2 + \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}}{A(x_2+x_3)}x_3 + u_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A(x_1+x_3)}x_1 - \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}}{A(x_2+x_3)}x_2 + \left( \frac{c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A(x_1+x_3)} - \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}}{A(x_2+x_3)} \right) x_3 \end{cases} \quad (4.50)$$

On peut mettre :

$$\begin{cases} z_1(x) = \frac{-c_1 S_n \sqrt{2g(x_1-x_3)}}{A(x_1+x_3)} \\ z_2(x) = \frac{c_2 S_n \sqrt{2g}}{A\sqrt{x_2}} \\ z_3(x) = \frac{c_3 S_n \sqrt{2g(x_3-x_2)}}{A(x_2+x_3)} \end{cases} \quad (4.51)$$

## 4.5 Obtention de la représentation Multi-modèle du système à trois cuves

On va utiliser la méthode de la transformation polytopique convexe présentée dans le chapitre 2 pour la réécriture du système hydraulique à trois cuves sous forme de multi-modèle de TS.

### 4.5.1 Ecriture du système sous forme Q-LPV

Pour écrire le système à trois cuves sous forme Multi-modèle équivalente; Il y a plusieurs formes quasi-LPV qui permettent d'obtenir plusieurs formes Multi-modèles.

Définissons les variables :

$$A(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} z_1(x) & 0 & -z_1(x) \\ 0 & (z_3(x) - z_2(x)) & z_3 \\ z_1(x) & -z_3(x) & (z_1(x) - z_3(x)) \end{bmatrix}$$

$$B(\xi) = \begin{bmatrix} 1/S & 0 \\ 0 & 1/S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système (4.43) prend la forme quasi-LPV :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(z_1, z_2, z_3)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.52)$$

### 4.5.2 Identification des non-linéarités

Dans une deuxième étape, on applique la transformation polytopique convexe à chaque variable de prémisse  $z_j(x(t))$  ( $j = 1, \dots, 3$ ). On réalise alors pour chaque variable de prémisse une partition en deux zones et on obtient :

$$z_1(\xi(x, u)) = \sum_{j=1}^2 z_{1,j} T_{1,j}(z_1(\xi(x, u))) \quad (4.53)$$

$$z_2(\xi(x, u)) = \sum_{j=1}^2 z_{2,j} T_{2,j}(z_2(\xi(x, u))) \quad (4.54)$$

$$z_3(\xi(x, u)) = \sum_{j=1}^2 z_{3,j} T_{3,j}(z_3(\xi(x, u))) \quad (4.55)$$

où :

$$\begin{cases} z_{j,1} = \max_x \{z_j(x)\} \\ z_{j,2} = \min_x \{z_j(x)\} \end{cases} \quad (4.56)$$

### 4.5.3 Construction des fonctions de pondération

On a :

$$T_{1,1}(z_1(x)) = \frac{z_1 - z_{1,2}}{z_{1,1} - z_{1,2}}, T_{1,2}(z_1(x)) = \frac{z_{1,1} - z_1}{z_{1,1} - z_{1,2}} \quad (4.57)$$

$$T_{2,1}(z_2(x)) = \frac{z_2 - z_{2,2}}{z_{2,1} - z_{2,2}}, T_{2,2}(z_2(x)) = \frac{z_{2,1} - z_2}{z_{2,1} - z_{2,2}} \quad (4.58)$$

$$T_{3,1}(z_3(x)) = \frac{z_3 - z_{3,2}}{z_{3,1} - z_{3,2}}, T_{3,2}(z_3(x)) = \frac{z_{3,1} - z_3}{z_{3,1} - z_{3,2}} \quad (4.59)$$

Les deux partitions  $T_{j,1}(z_j(x))$  et  $T_{j,2}(z_j(x))$  de chaque variable de prémisse  $z_j(x)$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) vont contribuer, à leur tour, à la construction de chaque fonction de pondération correspondant à un des sous-systèmes du Multi-modèle :

Il faut noter que  $A(\xi(x, u))$  fait intervenir les variables de prémisse  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$  et  $z_3(x)$  ; ainsi, on va évaluer la matrice  $A$  à partir des matrices sommets du polytope défini par les partitions des variables de prémisse intervenant dans ces matrices. Pour des raisons de clarté, on va écrire  $T_{j,1}(x)$  et  $T_{j,2}(x)$  au lieu de  $T_{j,1}(z_j(x))$  et  $T_{j,2}(z_j(x))$ .

#### 4.5.4 Définition des fonctions d'appartenance

Nous avons des fonctions  $z_j(x)$  :

$$A(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} z_{1,1}(x) & 0 & -z_{1,1}(x) \\ 0 & (z_3(x) - z_2(x)) & z_3 \\ z_{1,1}(x) & -z_3(x) & (z_{1,1}(x) - z_3(x)) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

En utilisant  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$  et  $z_3(x)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} A(z_1, z_2, z_3) = & \\ & T_{1,1}T_{2,1}T_{3,1} \begin{bmatrix} z_{1,1} & 0 & -z_{1,1} \\ 0 & (z_{3,1} - z_{2,1}) & z_{3,1} \\ z_{1,1} & -z_{3,1} & (z_{1,1} - z_{3,1}) \end{bmatrix} + T_{1,1}T_{2,1}T_{3,2} \begin{bmatrix} z_{1,1} & 0 & -z_{1,1} \\ 0 & (z_{3,2} - z_{2,1}) & z_{3,2} \\ z_{1,1} & -z_{3,2} & (z_{1,1} - z_{3,2}) \end{bmatrix} \\ & + T_{1,1}T_{2,2}T_{3,1} \begin{bmatrix} z_{1,1} & 0 & -z_{1,1} \\ 0 & (z_{3,1} - z_{2,2}) & z_{3,1} \\ z_{1,1} & -z_{3,1} & (z_{1,1} - z_{3,1}) \end{bmatrix} + T_{1,1}T_{2,2}T_{3,2} \begin{bmatrix} z_{1,1} & 0 & -z_{1,1} \\ 0 & (z_{3,2} - z_{2,2}) & z_{3,2} \\ z_{1,1} & -z_{3,2} & (z_{1,1} - z_{3,2}) \end{bmatrix} \\ & + T_{1,2}T_{2,1}T_{3,1} \begin{bmatrix} z_{1,2} & 0 & -z_{1,2} \\ 0 & (z_{3,1} - z_{2,1}) & z_{3,1} \\ z_{1,2} & -z_{3,1} & (z_{1,2} - z_{3,1}) \end{bmatrix} + T_{1,2}T_{2,1}T_{3,2} \begin{bmatrix} z_{1,2} & 0 & -z_{1,2} \\ 0 & (z_{3,2} - z_{2,1}) & z_{3,2} \\ z_{1,2} & -z_{3,2} & (z_{1,2} - z_{3,2}) \end{bmatrix} \\ & + T_{1,2}T_{2,2}T_{3,1} \begin{bmatrix} z_{1,2} & 0 & -z_{1,2} \\ 0 & (z_{3,1} - z_{2,2}) & z_{3,1} \\ z_{1,2} & -z_{3,1} & (z_{1,2} - z_{3,1}) \end{bmatrix} + T_{1,2}T_{2,2}T_{3,2} \begin{bmatrix} z_{1,2} & 0 & -z_{1,2} \\ 0 & (z_{3,2} - z_{2,2}) & z_{3,2} \\ z_{1,2} & -z_{3,2} & (z_{1,2} - z_{3,2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il résulte alors :

$$A(z_1(x), z_3(x)) = \sum_{i=1}^8 h_i(x) A_i \quad (4.61)$$

Les fonctions de pondération  $h_i(x)$  sont des combinaisons de fonctions  $T_{j,k}(x)$  ( $j = 1, 2, 3$  et  $k = 1, 2$ ).

#### 4.5.5 Réécriture du système sous forme de Multi-modèle de TS

La défuzzification est réalisée comme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 h_i(x(t))(A_i)x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.62)$$

Ce modèle flou représente exactement le modèle non linéaire du système hydraulique à trois cuves sur l'espace  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Les matrices du multi-modèle sont comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -111.6 & 0 & -111.6 \\ 0 & -548.8 & -313.6 \\ 111.6 & -313.6 & -202 \end{bmatrix}, & A_2 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -111.6 & 0 & -111.6 \\ 0 & -855.2 & 7.3 \\ 111.6 & -7.3 & 104.3 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -111.6 & 0 & -111.6 \\ 0 & 308.1 & -313.6 \\ 111.6 & -313.6 & -202 \end{bmatrix}, & A_4 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -111.6 & 0 & -111.6 \\ 0 & 1.8 & 7.3 \\ 111.6 & -7.3 & 104.3 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -4.1 & 0 & -4.1 \\ 0 & -548.8 & 313.6 \\ 4.1 & -313.6 & -309.5 \end{bmatrix}, & A_6 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -4.1 & 0 & -4.1 \\ 0 & -855.2 & 7.3 \\ 4.1 & -7.3 & -3.1 \end{bmatrix} \\
 A_7 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -4.1 & 0 & -4.1 \\ 0 & 308.1 & 313.6 \\ 4.1 & -313.6 & -309.5 \end{bmatrix}, & A_8 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -4.1 & 0 & -4.1 \\ 0 & 1.8 & 7.3 \\ 4.1 & -7.3 & -3.1 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ 0 & 64.9351 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La figure 4.1 montre que le modèle TS développé estime les états du système non linéaire à trois cuves.

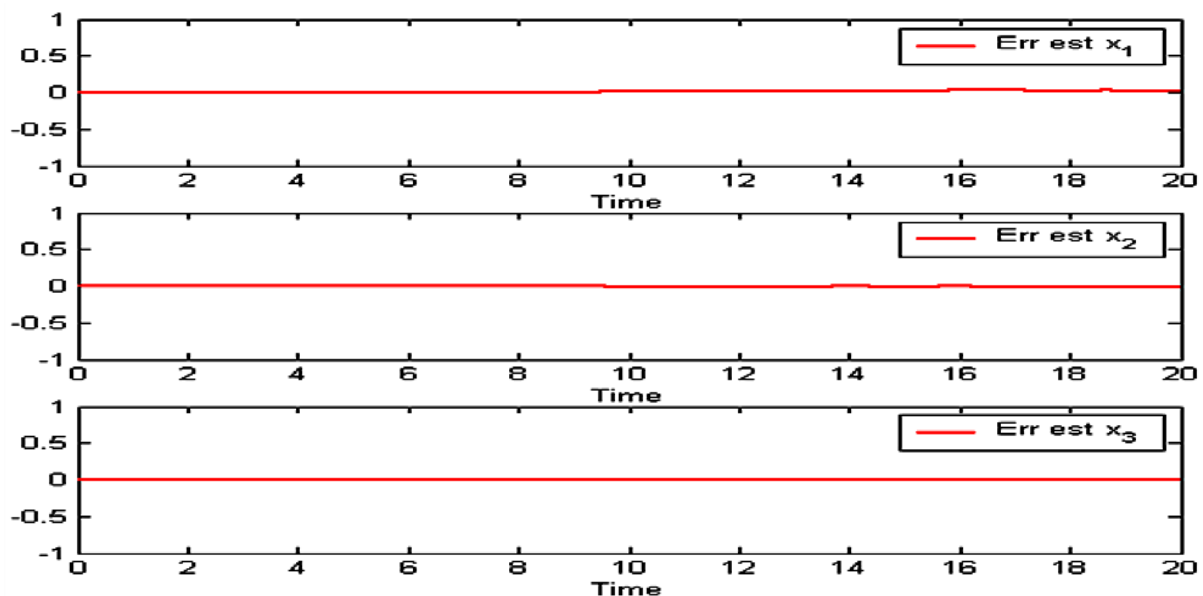


FIGURE 4.1: Erreurs d'estimation des états du système à trois cuves

## 4.6 Diagnostic de défauts capteurs du système à trois cuves par la reconstruction

Dans l'exemple, on suppose que les défauts sur les capteurs sont définis comme suit :

$$f_{s1}(t) = \begin{cases} 0.4 & 200 < t < 400 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.63)$$

et

$$f_{s2}(t) = \begin{cases} 0.4 & 600 < t < 800 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.64)$$

Le résidu est construit à partir de la comparaison entre les sorties réelles et les sorties estimées par l'observateur :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (4.65)$$

L'expression des résidus  $\bar{r}(t)$  filtrés est donnée par :

$$\bar{r}(t) = (I - \beta)\bar{r}(t - 1) + \beta r(t) \quad (4.66)$$

Pour pouvoir détecter et localiser le capteur en défaut, les seuils de détection sont fixés empiriquement à 0.06 pour le  $SPE$  et 0.015 pour le  $\overline{SPE}$ .

La figure 4.1 montre les résidus et le  $SPE$  correspondant en absence de défaut. On peut améliorer la détection de défaut de faible amplitude moyennant l'application du filtre  $EWMA$ . Lorsqu'on applique le filtrage on calcule les résidus filtrés et la statistique  $\overline{SPE}$ . Les seuils de détection sont sélectionnés en absence de défaut.

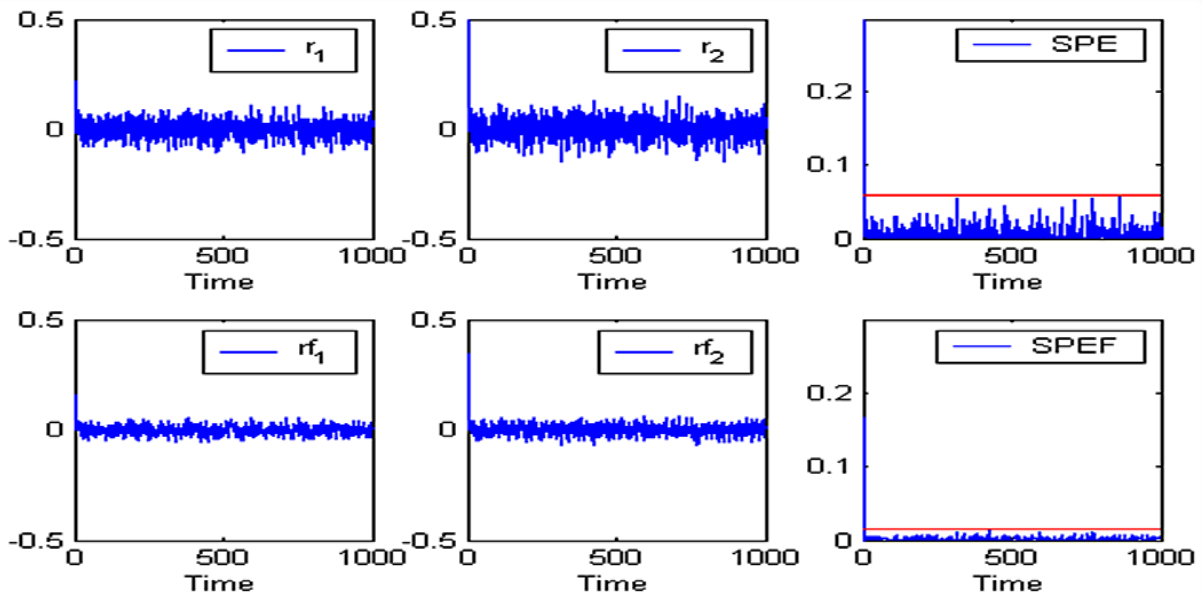


FIGURE 4.2: Evolution des résidus et des résidus  $SPE$  et  $\overline{SPE}$

La figure ?? présente l'évolution des résidus,  $SPE$ , les résidus filtrés et des  $\overline{SPE}$  lorsqu'on applique les mêmes défauts affectant les deux capteurs. On constate le dépassement du seuil pour les deux défauts.

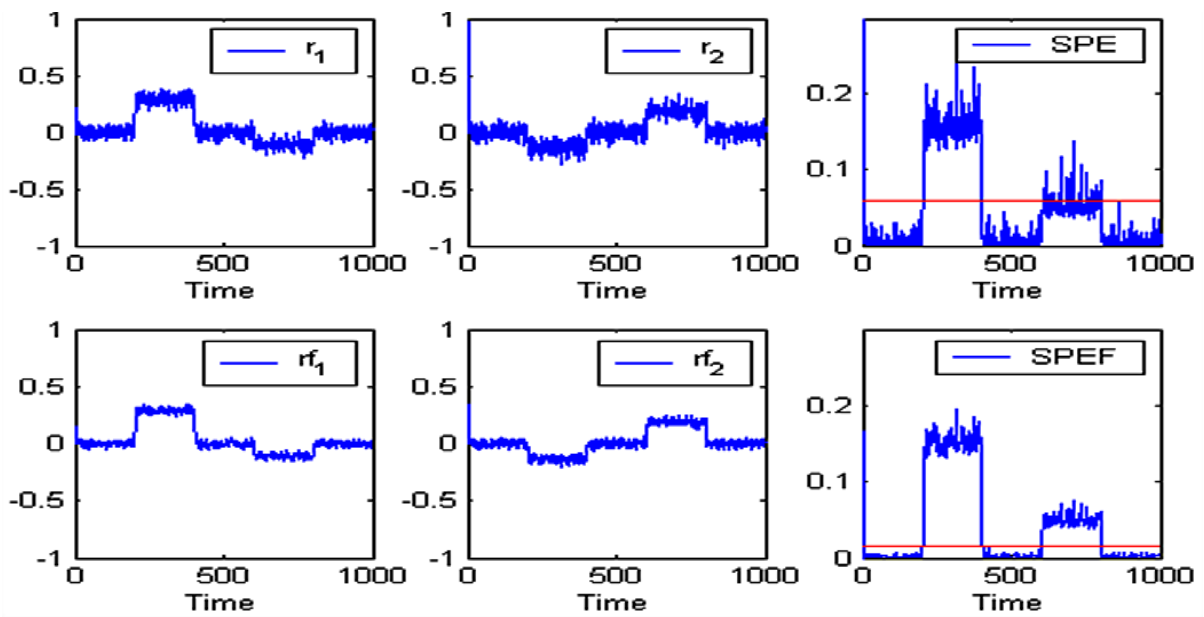


FIGURE 4.3: Evolution des résidus et des résidus filtrés avec leurs  $SPE$  et  $\overline{SPE}$  en présence de défauts

La figure ?? montre que la reconstruction de la première variable pendant la période de persistance des deux défauts engendre l'élimination du défaut affectant la variable reconstruite et la persistance du défaut affectant la variable non reconstruite.

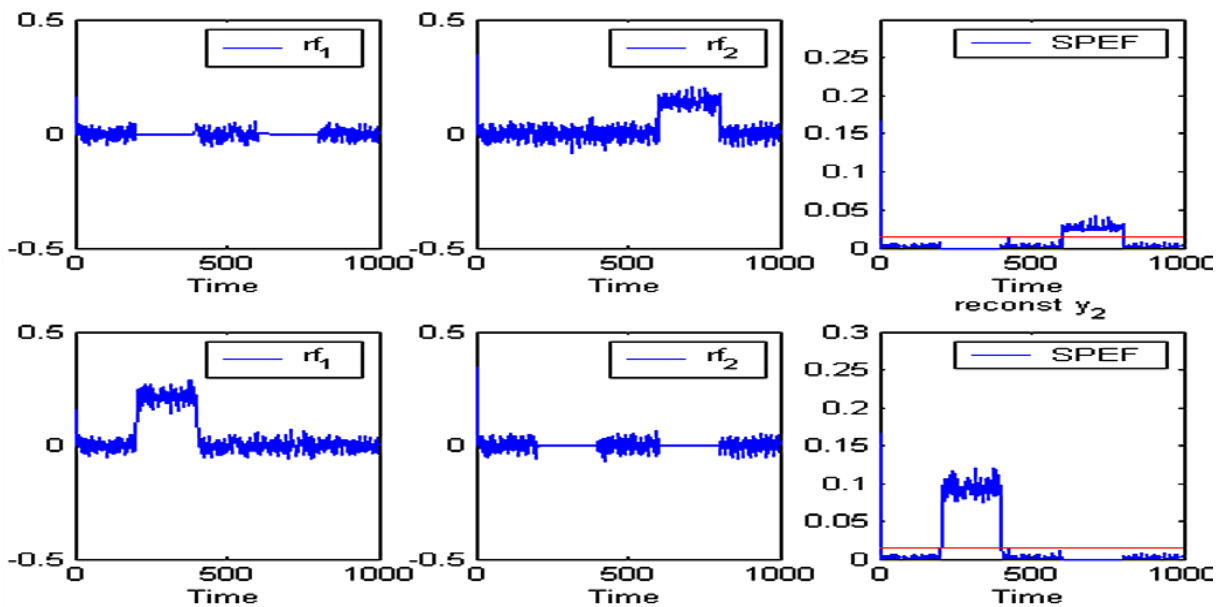


FIGURE 4.4: Evolution du  $SPE$  après reconstruction des variables

Le tableau 4.2 présente les signatures instrumentales des capteurs par la reconstruction.

Ce tableau montre la similitude entre les résultats de l'approche proposée et ceux de la structure GOS (*Generalised Observer Scheme*).

Résidus	$f_1$	$f_2$
$\overline{SPE}_1$	0	1
$\overline{SPE}_2$	1	0

TABLE 4.2: Matrice expérimentale de signature de défauts capteurs

## 4.7 Diagnostic des défauts du système à trois cuves par observateur PI à entrées inconnues à VDNM

Dans cette section, nous allons présenter le diagnostic de défauts actionneurs et capteurs à base de l'observateur PI à entrées inconnues dans le cas des variables de décision ne sont pas mesurables.

### 4.7.1 Défauts actionneurs

Pour le diagnostic des défauts actionneur à base de l'utilisation des observateurs PI à entrées inconnues, on peut utiliser trois stratégies :

1. Un banc d'observateur PI à entrées inconnues de structure DOS,
2. Un banc d'observateur PI à entrées inconnues de structure GOS,
3. Un seul observateur PI à entrées inconnues qui estime les états et les défauts affectant les actionneurs,

**La première stratégie :** est basée sur la construction d'un banc d'observateur DOS. Le nombre des combinaisons possibles est égales à  $(2^{n_u} - 1)$ . Pour l'exemple d'application, nous avons deux entrées ; on construit alors un banc d'observateur de trois éléments :

- Le premier observateur utilise la première entrée et toutes les sorties.
- Le deuxième observateur utilise la deuxième entrée et toutes les sorties.
- Le troisième observateur utilise toutes les entrées et toutes les sorties, ce dernier peut être utilisé pour faire la comparaison des résultats obtenus.

Le système peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i^1 u_1(t) + B_i^2 u_2(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.67)$$

Les résidus  $r_{ij}(t)$  générés sont donnés par la différence entre les sortie mesurées et les sorties estimées.

- Le premier observateur PI à entrées inconnues utilise l'entrée  $u_1(t)$  considérée comme entrée connue et  $u_2(t)$  considérée comme entrée inconnue à estimer, donc il est sensible aux défauts de  $u_1(t)$ .
- Le deuxième observateur PI à entrées inconnues utilise l'entrée  $u_2(t)$  considérée comme entrée connue et  $u_1(t)$  considérée comme entrée inconnue à estimer, donc il est sensible aux défauts de  $u_2(t)$ .

**La deuxième stratégie :** est basée sur la construction d'un banc d'observateur selon la structure GOS, nous avons deux entrées uniquement, les résultats de cette stratégie se rassemblent aux résultats de la première stratégie.

**La troisième stratégie :** est basée sur l'utilisation d'un seul observateur PI à entrées inconnues attaqué par toutes les entrées et toutes les sorties en même temps. L'observateur utilisé estime les deux défauts affectant les deux entrées.

Le système peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_a f_a(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.68)$$

On peut ajouter des contraintes supplémentaires qui concernent le placement de pôles afin d'améliorer la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation.

Pour le diagnostic du système à trois cuves, on va utiliser la première stratégie (structure DOS). On suppose que les défauts affectant les actionneurs sont définis comme suit :

$$f_{a1}(t) = \begin{cases} 0.5u_1 & 3 < t < 7 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.69)$$

et

$$f_{a2}(t) = \begin{cases} 0.5u_2 & 14 < t < 18 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.70)$$

En se basant sur l'analyse des résidus obtenus en fonctionnement sain, les seuils de détection sont fixés empiriquement à  $T_s = 0.15$ .

Le tableau 4.3 présente les signatures théoriques des défauts actionneurs (structure DOS) :

Les figures 4.5 et 4.6 montrent que le premier observateur est sensible au défaut affectant la première entrée (supposée connue), cet observateur estime la deuxième entrée. Le deuxième observateur est sensible aux défauts affectant la deuxième entrée (supposée connue), cet observateur estime la première entrée.

Défauts	Obs 1		Obs 2	
	$r_{11}$	$r_{12}$	$r_{21}$	$r_{22}$
$f_{a1}$	1	1	0	0
$f_{a2}$	0	0	1	1

TABLE 4.3: Matrice expérimentale de signature de défauts actionneurs

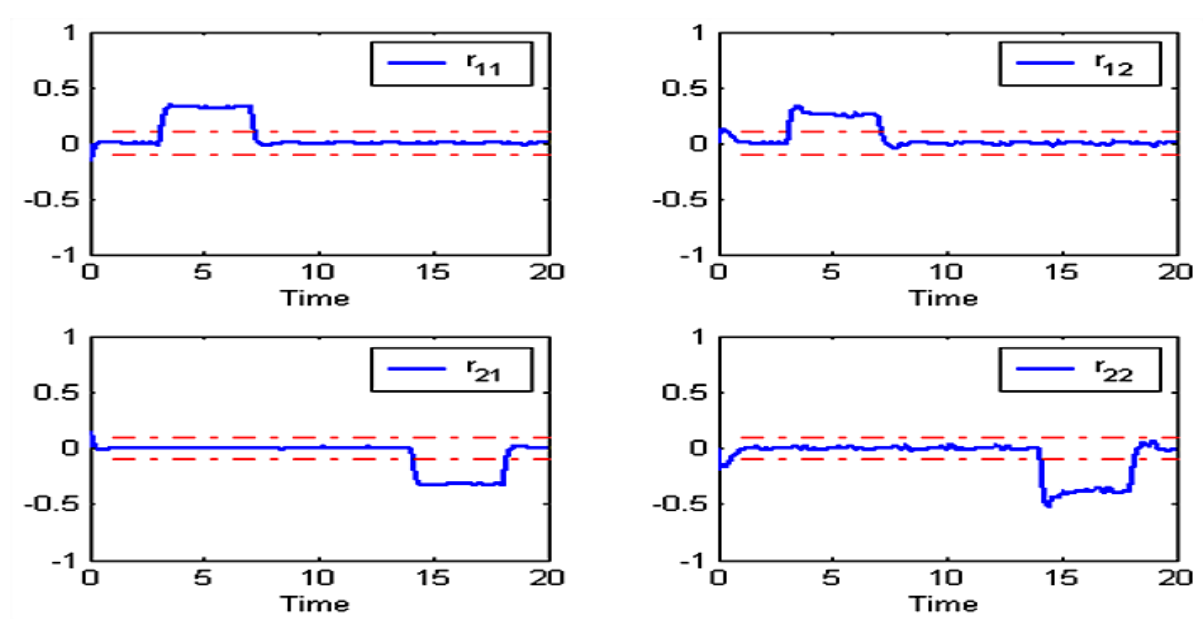


FIGURE 4.5: Résidus en présence des défauts actionneurs

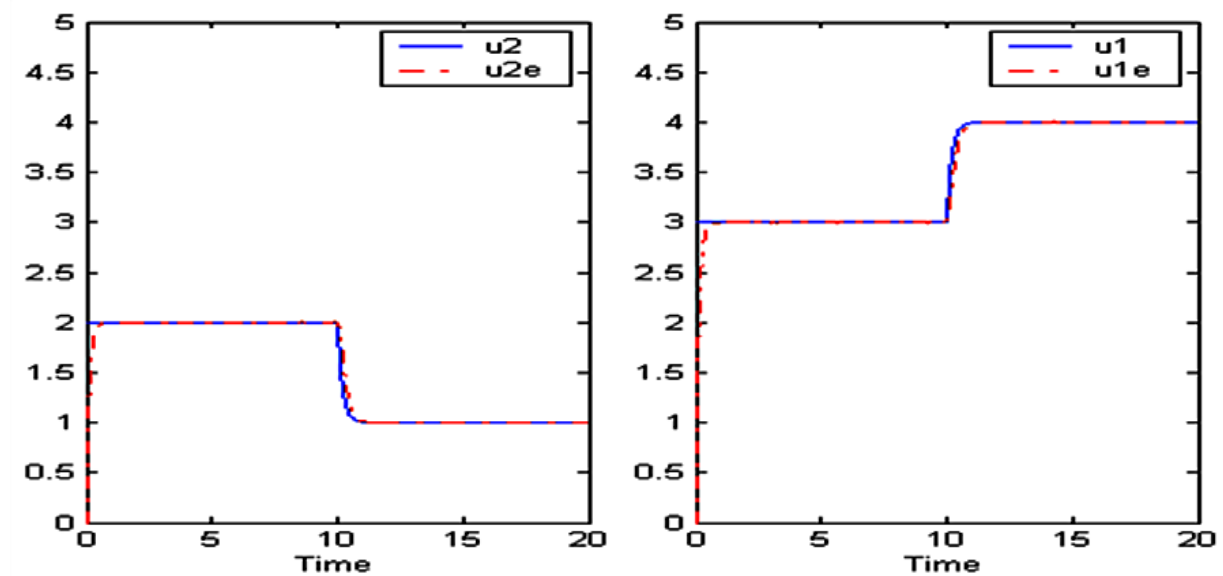


FIGURE 4.6: Entrées estimées sans défaut

### 4.7.2 Défauts capteurs

Pour le diagnostic des défauts de capteurs du système à trois cuves, qui a deux sorties, on peut utiliser une des trois stratégies déjà discutées, à savoir :

1. Un banc d'observateur PI à entrées inconnues de structure DOS,
2. Un banc d'observateur PI à entrées inconnues de structure GOS,
3. Un seul observateur PI à entrées inconnues qui estime les états et les défauts affectant les capteurs.

**La première stratégie :** est basée sur la construction d'un banc d'observateur DOS. Le nombre des combinaisons possibles est égales à  $(2^{n_y} - 1)$ . Pour l'exemple d'application, nous avons deux sorties ; on construit alors un banc d'observateur de trois éléments :

- Le premier observateur utilise la première sortie et toutes les entrées.
- Le deuxième observateur utilise la deuxième sortie et toutes les entrées.
- Le troisième observateur utilise toutes les sorties et toutes les entrées, ce dernier peut être utilisé pour faire la comparaison des résultats obtenus.

Pour le système considéré, on peut construire un banc d'observateurs PI à entrées inconnues composé de trois observateurs élémentaires, selon l'architecture choisie DOS.

Le système est réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + E_s f_s(t) \end{cases} \quad (4.71)$$

Pour la création du banc d'observateurs PI à entrées inconnues de structure DOS on peut faire l'augmentation partielle du système présentée dans le chapitre 3, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^M h_i(\hat{x}(t)) (A_{ai} x_a(t) + B_{ai} x_a(t) + E_{sa} f_s(t)) \\ y_N = C_N x(t) \\ \bar{y} = \bar{C} x(t) \end{cases} \quad (4.72)$$

Les deux défauts ont été transformés comme entrées inconnues pour le système augmentés (4.72).

Le banc d'observateur PI à entrées inconnues est construit comme suit :

- Le premier observateur utilise la première sortie et toutes les entrées, il estime le défaut affectant la première sortie.

- Le deuxième observateur utilise la deuxième sortie et toutes les entrées, il estime le défaut affectant la deuxième sortie.
- Le troisième observateur utilise les sorties et toutes les entrées, il peut estimer les défauts affectants la première et la deuxième sortie en même temps.

**La deuxième stratégie :** est basée sur la construction d'un banc d'observateur selon la structure (GOS), nous avons deux sorties uniquement, les résultats de cette stratégie se rassemblent aux résultats de la première stratégie.

**La troisième stratégie :** on utilise un seul observateur PI à entrées inconnues attaqué par toutes les sorties et toutes les entrées en même temps. L'observateur utilisé estime les deux défauts affectant les deux sorties.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + E_s f_s(t) \end{cases} \quad (4.73)$$

Le système TS peut être augmenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t)) (A_{ai} x_a(t) + B_{ai} u(t) + E_{sa} f_s(t)) \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (4.74)$$

Pour le diagnostic du système considéré, on va utiliser la première stratégie (structure DOS). On suppose que les défauts affectant les capteurs sont définis comme suit :

$$f_{s1}(t) = \begin{cases} 0.4 & 3 < t < 7 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.75)$$

et

$$f_{s2}(t) = \begin{cases} 0.4 & 14 < t < 18 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.76)$$

On détermine les seuils de détection en fonctionnement normal du système.

En se basant sur l'analyse des résidus obtenus en fonctionnement sain, les seuils de détection sont fixés empiriquement à  $T_s = 0.1$ .

Le tableau 4.4 présente les signatures théoriques des défauts capteurs.

Défauts	Obs 1	Obs 2	Obs 3	
	$r_1$	$r_2$	$r_{31}$	$r_{32}$
$f_{s1}$	1	0	1	0
$f_{s2}$	0	1	0	1

TABLE 4.4: Matrice expérimentale de signature de défauts capteurs

La figure 4.2 montre les résultats suivants :

- Le résidu du premier observateur attaqué par la première sortie donne une estimation sur le défaut  $f_{s1}$ .
- Le résidu donné par le deuxième observateur représente l'estimation du défaut affectant la deuxième sortie  $f_{s2}$
- Les résidus du troisième observateur estiment les deux défauts  $f_{s2}$  t  $f_{s2}$  en même temps.

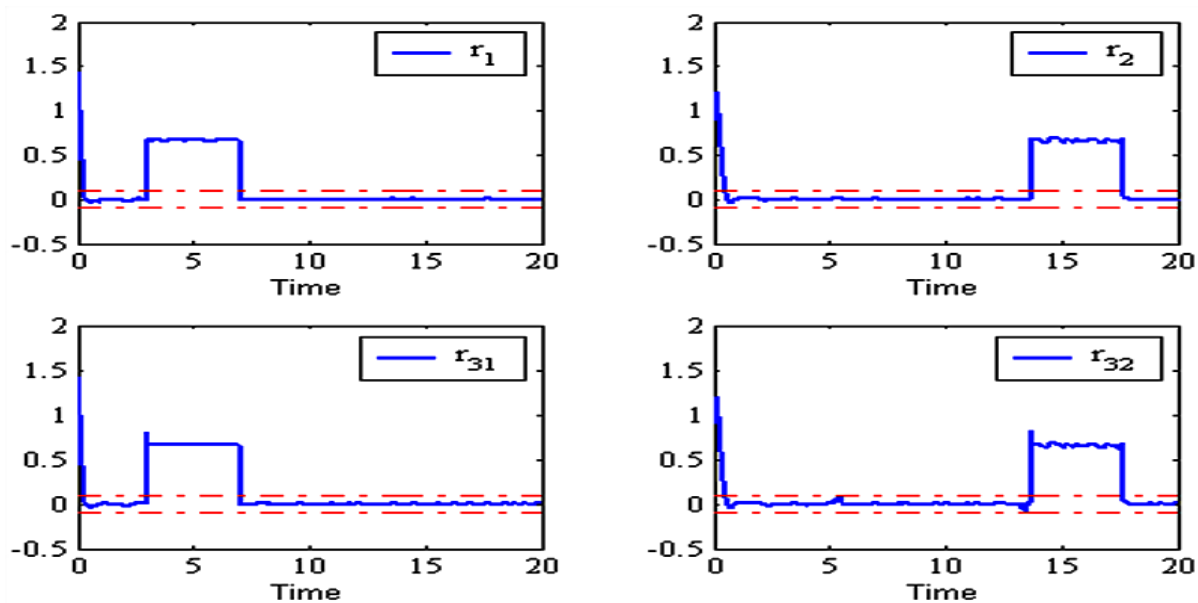


FIGURE 4.7: Résidus en présence des défauts capteurs

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, Nous avons présenté trois méthodes de diagnostic de défauts à base de modèle analytique, pour la détection, la localisation et éventuellement l'identification de défaut. Les méthodes développées utilisent les observateurs synthétisés dans le chapitre 3. La construction des bancs d'observateurs DOS ou GOS est nécessaire pour la localisation de défauts.

La première méthode est basée sur l'utilisation de l'observateur à entrées inconnues, qui serve à produire des résidus structurés qui peuvent être utilisés par la suite à la détection et à la localisation de défauts.

La deuxième approche présentée dans ce chapitre est basée sur l'utilisation du principe de la reconstruction pour le diagnostic de défauts capteur et la reconstruction de la sortie en défaut. Comme cette méthode utilise initialement l'indice  $SPE$ . La procédure de localisation proposée permet de localiser des défauts simples affectants les capteurs.

La troisième approche est basée sur l'observateur PI à entrées inconnues pour estimer les états et les défauts en même temps. Ce type d'observateur offre la possibilité d'utiliser le défaut estimé pour d'autres applications comme la commande tolérante aux défauts. Outre, il est possible de réduire le nombre d'éléments du banc d'observateurs utilisés pour le diagnostic.



# Conclusion générale et perspectives

Cette thèse s'inscrit dans les travaux de recherche menés sur les problèmes d'estimation d'état et de diagnostic des systèmes non linéaires, ces derniers étant représentés à l'aide d'un modèle de Takagi-Sugeno.

Les travaux présentés apportent sur trois contributions principales : L'augmentation d'état des modèles de T-S à variables de décision mesurables et des modèles T-S à variables de décision non mesurables, dans un optique de simplifier la synthèse des estimateurs d'états, en présence d'entrées inconnues. La plus grande partie des travaux développés porte sur les systèmes non linéaires décrits par un modèle T-S à VDNM.

La deuxième contribution concerne la proposition d'une nouvelle stratégie pour le diagnostic de défaut capteurs à base de l'utilisation du principe de la reconstruction. Cette approche a été conçue en utilisant la statistique *SPE*, et pour améliorer la sensibilité des résidus aux défauts, nous avons utilisé le filtre *EWMA* afin d'améliorer d'avantage la détection de défauts de faibles amplitude et de minimiser les fausses alarmes.

Une troisième contribution concerne le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs à base d'observateurs PI à entrées inconnues à variables de décision non mesurables.

Les différentes méthodes de génération de résidus indicateurs de défauts exposées dans le premier chapitre s'appuient exclusivement sur l'analyse de la cohérence des signaux d'entrées et de sorties du système réel en les comparant à ceux issus d'un modèle de fonctionnement sain.

Les concepts élémentaires du diagnostic de défauts, et les différentes méthodes à base de modèle de génération de résidus et la méthodologie à suivre pour réaliser la détection et la localisation de défauts des systèmes non linéaires.

Le deuxième chapitre présente quelques définitions relatives à l'observabilité des systèmes non linéaires, et déploie les structures des observateurs des systèmes non linéaires les plus utilisés dans la littérature. La motivation pour étudier la synthèse de multiobservateurs pour les systèmes non linéaires de T-S découle du fait qu'il est souvent possible de passer d'une représentation entrée/sortie du système vers une représentation dans l'espace d'état et vice versa. La Transformation polytopique convexe a été présentée afin de transformer les systèmes non linéaires sous forme linéaires à paramètres variants vers la représentation multimodèle. La stabilité et la synthèse d'observateur pour le système de Takagi-Sugeno ont été étudiées.

Dans le contexte, nous avons étudié une méthode de synthèse d'observateurs de type T-S incertain et à entrées inconnues, et nous avons étudié l'augmentés des états des systèmes T-S pour alléger le développement des observateurs à entrées inconnues à variables de décision non mesurable. A la fin de ce chapitre, nous avons présenté une méthode pour la synthèse d'observateurs PI à entrées inconnues.

Le quatrième chapitre décrit le problème de détection et d'isolation de défauts provenant des capteurs et des actionneurs. Nous avons proposé une nouvelle approche pour le diagnostic de défauts capteurs basée sur le principe de reconstruction avec l'utilisation de la statistique *SPE*, dont nous avons amélioré la sensibilité des résidus aux défauts avec l'introduction du filtrage *EWMA*. Nous avons proposé aussi une méthode basée sur l'utilisation de l'observateur PI à entrées inconnues pour le diagnostic de défauts du système TS à VDNM. Les deux méthodes de diagnostic ont été appliquées sur un système hydraulique à trois cuves.

Les résultats proposés dans cette thèse ouvrent un certain nombre de perspectives :

- Chercher des conditions de stabilité globale les moins conservatives moyennant l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique.
- Les travaux de diagnostic menés dans ce mémoire de thèse, traite le problème du diagnostic en boucle ouverte, il serait intéressant d'envisager une extension aux systèmes non linéaires sous forme Takagi-Sugeno en boucle fermée, car la commande masque les défauts d'où l'impossibilité de les détecter.
- L'utilisation de l'observateur Proportionnel Multi Intégral (PMI) à entrées inconnues pour l'estimation d'état et de défauts ayant le  $n^{ime}$  dérivée nulle.
- Le diagnostic de défauts des actionneurs à base de la reconstruction

# Annexe A

## Etude de la stabilité

Soit le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{A.1}$$

D'après la théorie de Lyapunov, le système (A.1) est stable s'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x(t))$  telle que  $\forall x \neq 0, V(x(t)) > 0$  et  $\dot{V}(x(t)) < 0$ . En choisissant  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$  où  $P$  est une matrice symétrique à déterminer, on obtient :

$$\forall x(t) \neq 0, \begin{cases} V(x(t)) > 0 \\ \dot{V}(x(t)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + P A < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -(A^T P + P A) \end{bmatrix} > 0, \tag{A.2}$$



# Annexe B

## Transformations matricielles

### Complément de Schure [Boyd 1994]

Soient trois matrices  $R(x) < R^T(x)$ ,  $Q(x) < Q^T(x)$  et  $S(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ . Les LMI suivantes sont équivalentes :

Si  $R$  est inversible alors Les LMI suivantes sont équivalentes :

1.  $\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0$ ,
2.  $R(x) > 0, Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0$ ,
3.  $Q(x) > 0, R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0$ .

### Lemme 1

Soient  $M(x)$  et  $N(x)$  deux matrices de dimensions appropriées, l'inégalité suivante est vérifiée s'il existe  $Q > 0$  ou  $\lambda > 0$  tels que :

$$M(x)N(x)^T + N(x)M^T(x) \leq \lambda M(x)M(x)^T + \lambda^{-1}N(x)N(x)^T \quad (\text{B.1})$$

$$M(x)N(x)^T + N(x)M^T(x) \leq M(x)QM(x)^T + N(x)Q^{-1}N(x)^T \quad (\text{B.2})$$

Le but des propriétés (B.1) et (B.2) est de pouvoir éliminer les termes anti-diagonaux dans une matrice symétrique et de les ramener dans les blocs diagonaux. Cette transformation permet de réécrire certains problèmes non convexes en termes de LMI. L'exemple suivant permet d'illustrer le principe de cette transformation [Aouaouda 2012].



# Bibliographie

- [Aberkane 2008] S. Aberkane, D. Sauter et J. C. Ponsart. *Output feedback robust H1 control of uncertain active fault control systems via convex analysis*. International Journal of Control, vol. 81, pages 252–263, 2008.
- [Abid 2010] M. Abid. *Fault detection in nonlinear systems : An observerbased approach*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Duisburg-Essen, Juillet, 2010.
- [Abonyi 2001] J. Abonyi, R. Babuska et F. Szeifert. *Fuzzy modeling with multivariate membership functions : Gray-box identification and control design*. In Conference on Systems, Man and Cybernetics, 31, 2001.
- [Akhenak 2004] A. Akhenak. *Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèles : application au diagnostic*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2004.
- [Akhenak 2007] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin. *Design of sliding mode unknown input observer for uncertain Takagi-Sugeno model*. In In 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, Athens, Greece, 2007.
- [Alwi 2011] H. Alwi, C. Edwards et C.P. Tan. *Fault detection and fault-tolerant control control using sliding modes*. advances in industrial control, Springer, London, 2011.
- [Alwi 2012] H. Alwi et C. Edwards. *Second order sliding mode observers for the ADD-SAFE benchmark Problem*. 8th IFAC Symposium on Fault Detection, Mexico City, Mexico, August 29-31, 2012.
- [Angelis 2001] G. Z. Angelis. *System Analysis, Modeling and Control with Polytopic Linear Models*. PhD thesis, PhD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Pays Bas, 2001.
- [Aouaouda 2012] S. Aouaouda. *Modélisation multimodèle et commande prédictive d'une station d'épuration*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2012.
- [Babuska 1998] R. Babuska. *Fuzzy modeling for control*. Kluwer Academic Publishers, London, 1998.
- [Baikeche 2007] H. Baikeche. *Diagnostic des systèmes linéaires en boucle fermée*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2007.

- [Bakiotis 1979] C. Bakiotis, J. Raymond et A. Rault. *A parameter and discriminant analysis for jet engine mechanical state diagnosis*. In In Proc. IEEE Conf, Decision Contr, IEEE, 1979.
- [Bara 2001] G. I. Bara. *Estimation d'État des systèmes à paramètres variants*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2001.
- [Basseville 1994] M. Basseville et I. V. Nikiforov. *Statistical change detection*. Prentice Hall, 1994.
- [Bastin 1988] G. Bastin et M. R. Gevers. *Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33, page 650–658, 1988.
- [Beard 1971] R. V. Beard. *Failure accommodation in linear systems through self-reorganization*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Aeronautics and Astronautics, 1971.
- [Belkherchi 2011] N. Belkherchi. *Contribution à l'étude du diagnostic et de la commande tolérante aux fautes par l'approche structurelle : application aux procédés biologiques*. PhD thesis, Thèse de doctorat, université de Toulouse, 5 avril 2011.
- [Bergsten 2000] P. Bergsten et R. Palm. *Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems*. In In 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, San Antonio, Texas, USA, 2000.
- [Bernauer 1996] E. Bernauer. *Les réseaux de neurones et l'aide au diagnostic : un modèle de neurones boucles pour l'apprentissage de séquences temporelles*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, LAAS Toulouse, 1996.
- [Besançon 2007] G. Besançon. *Nonlinear observers and Applications*. Springer, Berlin, 2007.
- [Bezzaoucha 2013] S. Bezzaoucha. *Fault tolerant control for Takagi-Sugeno nonlinear systems*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2013.
- [Blanco 2001] Y. Blanco, W. Perruquetti et P. Borne. *Stability and stabilizability of nonlinear systems and T-S fuzzy models*. In Mathematical Problems in Engineering, vol. 7, pages 221–240, 2001.
- [Bornard 1991] G. Bornard et H. Hammouri. *A high gain observer for a class of uniformly observable systems*. In Proc. of the 30th IEEE CDC, 1494–1496, 1991.
- [Bornard 1993] G. Bornard, F. Celle-Couenne et G. Gilles. *Systèmes non linéaires, tome 1, chapitre observabilité et observateurs*. 1993.
- [Borne 1993] P. Borne et N. E. Richard J. P. and Radhy. *Stability, stabilization, regulation : approche par les normes vectorielles*. 1993.
- [Bouarar 2009] T. Bouarar. *Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés*. PhD thesis, PhD Thesis, Université de Reims Champagne Ardenne, Reims, France, 2009.

- [Boukroune 2008] A. Boukroune, M. Tadjine, M. MŠSaad et M. Farza. *How to design a fuzzy adaptive controller based on observers for uncertain affine nonlinear systems*. Fuzzy Sets and Systems, Theme : Fuzzy and Non-Linear Control, vol. 159(8), page 926–948, 2008.
- [Boukroune 2010] A. Boukroune, M. MŠSaad et M. Farza. *Adaptive fuzzy controller for multivariable nonlinear state time-varying delay systems subject to input nonlinearities*. Fuzzy Sets and Systems, In Press, 2010.
- [Box 1954] G. E. P. Box. *Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems I effect of inequality of variance in the one-way classification*. Annals of Mathematics and Statistics, vol. 25, pages 290–302, 1954.
- [Boyd 1994] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. 1994.
- [Buckley 1992] J. J. Buckley. *Universal fuzzy controllers*. Automatica, vol. 28, 1992.
- [Busawon 1998] K. Busawon, M. Farza et H. Hammouri. *A simple observer for a class of nonlinear systems*. Applied Mathematics Letters, vol. 11(3), page 27–31, 1998.
- [Carlsson 1988] B. Carlsson, M. Salgado et G.C. Goodwin. *A new method for fault detection and diagnosis, Technical report EE8842*. Rapport technique, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Newcastle, Australia, 1988.
- [Castro 1995] J. Castro. *Fuzzy Logic controllers are universal approximator*. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-part C, vol. 25, pages 629–635, 1995.
- [Chadli 2000] M. Chadli, D. Maquin. et J. Ragot. *Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems*. In Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and cybernetics, Nashville, USA, pages 3514–3519, 2000.
- [Chadli 2002a] M. Chadli. *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2002.
- [Chadli 2002b] M. Chadli, D. Maquin et J. Ragot. *Non quadratic stability analysis of Takagi-Sugeno systems*. In In IEEE Conference on Decision and Control, CDCS2002, Las Vegas, Nevada, USA, 2002.
- [Chadli 2005] M. Chadli et A. El-Hajjaji. *Output robust stabilisation of uncertain takagi-sugeno model*. In 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC, Seville, Spain, 2005.
- [Chen 1995] J. Chen. *Robust residual generation for model-based fault diagnosis of dynamic systems*. PhD thesis, PhD thesis, University of York, 1995.
- [Chen 1999] J. Chen et R. J. Patton. *Robust model based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-8411-3, 1999.

- [Chen 2011] W. Chen. *Fault detection and isolation in nonlinear systems : observer and energy-balance based approaches*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Duisburg-Essen, 24 octobre, 2011.
- [Chiang 2001] L. H. Chiang, E. L. Russell et R. D. Braatz. *Fault detection and diagnosis in industrial systems*. Springer, 2001.
- [Chow 1984] E. Y. Chow et A. S. Willsky. *Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems*. IEEE Trans. Autom. Control, vol. 29(7), page 603–614, 1984.
- [Comtet-Varga 1997] G. Comtet-Varga. *Surveillance des systèmes non linéaires : Application aux machines asynchrones*. PhD thesis, Thèse de doctorat, université des sciences et technologies de Lille, France, 1997.
- [Dabroom 2001] A. Dabroom et H. Khalil. *Output feedback sampled data control of nonlinear systems using high-gain observers*. Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 46(11), page 1712–1725, Nov 2001.
- [Ding 1991] X. Ding et P.M. Frank. *Frequency domain approach and threshold selector for robust model-based fault detection and isolation*. In Proceedings of IFAC Symposium SAFEPROCESS'91, Germany, vol. 1, pages 307–312, 1991.
- [Ding 1993] S. X. Ding, L. Guo et P. M. Frank. *A frequency domain approach to fault detection of uncertain dynamic systems*. in Proceedings of the 32th IEEE Conference on Decision and Control, page 1722–1727, 1993.
- [Ding 2008] S. X. Ding. *Model-based fault diagnosis techniques - design schemes, algorithms and tools*. Springer, 2008.
- [Djeddi 2016] A. Djeddi, M. F. Harkat et Y. Soufi. *A New Approach for State Estimation of Uncertain Multiple model with Unknown Inputs. Application to Sensor Fault Diagnosis*. The Mediterranean Journal of Measurement and Control, vol. (12)1, 2016.
- [Dunia 1996] R. Dunia, S. J. Qin, T. F. Edgar et T. J. McAvoy. *Identification of faulty sensors using principal component analysis*. AIChE.J., vol. 42, page 2797–2812, 1996.
- [Ellouze 2010] I. Ellouze. *Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz, Décembre 2010.
- [Fagarasan 2004] I. Fagarasan, S. Ploix et S. Gentil. *Causal fault detection and isolation based on a set-membership approach*. Automatica, vol. 40, pages 2099–2110, 2004.
- [Fall 2015] M. L. Fall. *Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires – Application à la commande et au diagnostic des bioréacteurs*. Automatique / Robotique. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Caen, 2015.

- [Farza 2004] M. Farza, M. MŠSaad et L. Rossignol. *Observer design for a class of mimo nonlinear systems*. Automatica, vol. 40(1), page 135 :143, 2004.
- [Farza 2005] M. Farza, M. MŠSaad et M. Sekher. *A set of observers for a class of nonlinear systems*. In In Proc. of the IFACWorld Congress, Prague, Czech Republic, 2005.
- [Farza 2009] M. Farza, M. MŠSaad, T. Maatoug et M. Kamoun. *Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems*. Automatica, vol. 45(10), page 2292 :2299, 2009.
- [Fellouah 2007] R. Fellouah. *Contribution au Diagnostic de Pannes pour les Systèmes Différentiellement Plats*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Toulouse, décembre 2007.
- [Foulloy 2003] L. Foulloy, S. Galichet et A. Titli. *Commande Floue*. Hermes Science, Paris, vol. 2, 2003.
- [Frank 1977] P. M. Frank et X. Ding. *Survey of robust residual generating and evaluation methods in observer-based fault detection systems*. Journal of Process Control, vol. 7(6), page 403 :424, 1977.
- [Frank 1987] P. M. Frank. *Fault detection and isolation schemes using nonlinear and robust observers*. Presented at 10th IFACWorld Congress, Munich, pages 27–31, 1987.
- [Frank 1989] P. M. Frank et J. Wuennenberg. *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Application, ch. Robust fault diagnosis using unknown input schemes*. Prentice Hall, page 47–98, 1989.
- [Frank 1994a] P. M. Frank. *On-line fault detection in uncertain nonlinear systems using diagnostic observers : a survey*. Int. J. Systems Sci, vol. 25(12), page 2129–2154, 1994.
- [Frank 1994b] P. M. Frank et X. Ding. *Frequency domain approach to optimally robust residual generation and evaluation for model-based fault diagnosis*. Automatica, vol. 30, page 789–804, 1994.
- [Frank 1996a] P. M. Frank. *Advances in observer-based fault diagnosis in dynamic systems*. Engineering Simulation, vol. 13, page 717–760, 1996.
- [Frank 1996b] P. M. Frank. *Analytical and qualitative model-based fault diagnosis - a survey and some new results*. Eur. J. Control, vol. 2, page 6–28, 1996.
- [Frank 1997] P. M. Frank et B. Klöpen-Seliger. *New developments using ai in fault diagnosis*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, vol. 10, page 3–14, 1997.
- [Gahinet 1996] P. Gahinet, P. Apkarian et M. Chilali. *Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41(3), pages 436–442, 1996.

- [Garcia 1996] E. A. Garcia et P. M. Frank. *On the relationship between observer and parameter identification based approaches to fault detection*. In Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA, page 25–29, 1996.
- [Garcia 1997] G. Garcia. *Contribution à la synthèse de lois de commande robuste par l'approche quadratique*. PhD thesis, HDR, Université Paul Sabatier, Rapport LASS, no. 97543, 1997.
- [Gasso 2000] K. Gasso. *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèles*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'INPL, 2000.
- [Gasso 2002] K. Gasso et J. Mourot G. et Ragot. *Structure identification of multiple models with output error local models*. In In Proc. of the 15th Triennial World Congress, IFAC, Spain, 2002.
- [Gauthier 1992] J. P. Gauthier, H. Hammouri et S. Othman. *A simple observer for nonlinear systems application to bioreactors*. IEEE Trans. Automat. Contr, vol. 37(6), page 875–880, 1992.
- [Gauthier 1994] J. P. Gauthier et A. K. Kupka. *Observability and observers for nonlinear systems*. SIAM J. Control Optim, vol. 32(4), page 975–994, juillet 1994.
- [Gauthier 81] J. P. Gauthier et G. Bornard. *Observability for any  $u(t)$  of a Class of Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, page 922–926, 81.
- [Ge 1989] W. Ge et C. Z. Fang. *Extended robust observation approach for failure isolation*. Int. J. Control, vol. (49)5, page 1537–1553, 1989.
- [Gertler 1991] J. J. Gertler. *Analytical redundancy methods in fault detection and isolation ; survey and synthesis*. In IFAC Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, 9-2, 1991.
- [Gertler 1993] J. J. Gertler. *Residual generation in model based fault diagnosis*. Control Theory and Advanced Technology, vol. (9)1, page 259–285, 1993.
- [Gertler 1998] J. J. Gertler. *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. In New York : Marcel Dekker, 1998.
- [Gloria 2015] L. O. G. Gloria. *Observateurs des systèmes singuliers incertains : Application au contrôle et au diagnostic*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 16 Juillet 2015.
- [Gopal 1963] R. Gopal et F. Vancil. *Control systems*. McGraw-Hill, 1963.
- [Grandvalet 2001] Y. Grandvalet et M. H. Masson. *Traité ic2, diagnostic : Intelligence artificielle et reconnaissance des formes, chapitre Chapitre : Réseaux de neurones pour le diagnostic*, pages 179–218. Hermès, 2001.
- [Graton 2005] G. Graton. *Diagnostic des systèmes à l'aide d'observateurs à mémoire finie. Application au Common Rail*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 14 décembre 2005.

- [Guerra 2001] T. M. Guerra et L. Vermeirn. *Control laws for takagi-sugeno fuzzy models*, *Fuzzy Set and Systems*. vol. 33, 2001.
- [Guerra 2005] R. M. Guerra, R. Garrido et A. O. Miron. *The fault detection problem in nonlinear systems using residual generators*. *IMA J. Math. Contr. Infor.*, vol. 22, page 119 :136, 2005.
- [Guerra 2006] T. M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren et H. Tirmant. *Conditions of output stabilization for nonlinear models in the takagi-sugeno's form*, *Fuzzy Sets and Systems*. *Fuzzy Concepts Applied to Food Control Quality Control*, vol. 157(9), page 1248 :1259, 2006.
- [Guglielmi 1995] G. Guglielmi, T. Parisini et G. Rossi. *Keynote paper : fault diagnosis and neural networks : a power plant application*. *Control Eng. Practice*, vol. 3(5), page 601-620, 1995.
- [Hamdi 2012] H. Hamdi. *Multi-Model Approach for State Observation and Fault Diagnosis dedicated to Nonlinear Descriptor Systems*. PhD thesis, Thèse de doctorat, École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis, 24 novembre 2012.
- [Hammouri 1999] H. Hammouri, M. Kinnaert et E. H. El Yaagoubi. *Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pages 1879-1884, 1999.
- [Harkat 2003] M. F. Harkat. *Détection et localisation de défauts par analyse en composantes principales*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2003.
- [Herman 1977] R. Herman et A. J. Krener. *Nonlinear controllability and observability*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, page 728 :740, 1977.
- [Huang 1999] Y. Huang et A. Jadbabaie. *Nonlinear  $H^{\infty}$  control : An enhanced quasi-LPV approach*. In *IFAC World Congress, Beijing, Chine*, page 85 :90, 1999.
- [Ichalal 2009] D. Ichalal. *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009.
- [Ichalal 2010] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot et D. Maquin. *State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables*. *IET Control Theory & Applications*, vol. 4(5), page 897-908, 2010.
- [Ichalal 2012] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot et D. Maquin. *Advances in observer design for Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables*. In *20th Mediterranean Conference on Control and Automation, Barcelona, Spain*, 2012.
- [Isermann 1982] R. Isermann. *Parameter-adaptive control algorithms - a tutorial*. *Automatica*, vol. 18(5), page 513-528, 1982.
- [Isermann 1984] R. Isermann. *Process fault detection on modeling and estimation methods - a survey*. *Automatica*, vol. 20(4), page 387 :404, 1984.

- [Isermann 1997] R. Isermann et P. Balle. *Trends in the Application of Model-Based Fault Detection and Diagnosis of Technical Processes*. Control Engineering Practice, vol. 5(5), page 709 :719, 1997.
- [Isermann 2000] R. Isermann et P. Phalle. *Applied terminology of fault detection, supervision and safety for technical processes*. In IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process, 2000.
- [Isermann 2006] R. Isermann. *Fault-diagnosis systems : an introduction form fault detection to fault tolerance*. Springer, 2006.
- [Isidori 1995] A. Isidori. Nonlinear control systems. 1995.
- [Isidori 2000] A. Isidori. Nonlinear control systems ii. 2000.
- [Issury 2011] I. Issury. *Contribution au développement d'une stratégie de diagnostic global en fonction des diagnostiqueurs locaux : Application à une mission spatiale*. PhD thesis, Thèse de doctorat,, 2011.
- [Jadbabaie 1999] A. Jadbabaie. *A reduction in conservatism in stability and L2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities*. In Proceedings of the IFAC, China, pages 285–289, 1999.
- [Jamel 2010] W. Jamel, N. Bouguila, A. Khedher et K. Ben-Othman. *Observer design for nonlinear systems represented by Takagi-Sugeno models*. WSEAS Transactions on Systems, vol. 9(7) , nř 1109-2777, pages 804–813, 2010.
- [Jazwinski 1970] A. H. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 64, 1970.
- [Jiang 2008] T. Jiang, K. Khorasani et S. Tafazoli. *Parameter estimation-based fault detection, isolation and recovery for nonlinear satellite models*. IEEE Trans. Control Syst. Technol, vol. 16(4), page 799–808, 2008.
- [Johansen 1993] T. A. Johansen et A. B. Foss. *Constructing narmax using armax*. International Journal of Control, vol. 58, 1993.
- [Johansson 1998] M. Johansson, A. Rantzer et K. Arzen. *Piecewise quadratic stability for affine sugeno systems*. IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, vol. 1, page 55 :60, 1998.
- [Johansson 1999] M. Johansson. *Piecewise linear control systems*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1999.
- [Johansson 2006] A. Johansson, M. Bask et T. Norlander. *Dynamic threshold generators for robust fault detection in linear systems with parameter uncertainty*. Automatica, vol. 42(7), page 1095–1106, 2006.
- [Johnson 1970] C. Johnson. *Further study of the linear regulator with disturbances—the case of vector disturbances satisfying a linear differential equation*. Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 15(2), page 222–228, 1970.

- [Kalman 1960] R. E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Transactions of the ASME *Journal of Basic Engineering*, vol. 82(Series D), page 35 :45, 1960.
- [Kalman 1961] R. E. Kalman et R. S. Bucy. *New results in linear filtering and prediction theory*. Transactions of the ASME *Journal of Basic Engineering*, vol. 83, page 95 :108, 1961.
- [Kamidi 2000] R. Kamidi. *Controllability and observability of polytopic linear models*. PhD thesis, Phd Thesis., Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2000.
- [Kawamoto 1992] S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame et T. Taniguchi. *An approach to stability analysis of second order fuzzy systems*. In In IEEE International Conference on Fuzzy Systems, San Diego, California, USA, 1992.
- [Khalil 1960] H. Khalil. *Nonlinear systems*. 1960.
- [Khan 2009] A. Q. Khan et S. X. Ding. *Threshold computation for robust fault detection in a class of continuous-time nonlinear systems*. In In Proc. European Contr. Conf., Budapest, Hungary, pages 3088-3093, August 2009.
- [Kikuchi 1988] H. Kikuchi, A. Otake et S. Nakanishi. *Functional completeness of hierarchical fuzzy modeling*. Information Sciences, vol. Information Sciences, page 51-61, 1988.
- [Kiupel 1997] N. Kiupel et P. M. Frank. *A Fuzzy FDI decision making system for the support of the human operator*. IFAC Safeprocess'97, Hull, UK, pages 731-736, August 26-28, 1997.
- [Koenig 2002] D. Koenig et S. Mammar. *Design of a proportional integral observer for unknown input descriptor systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, page 2057-2063, 2002.
- [Koppen-Seliger 1996] B. Koppen-Seliger et P. M. Frank. *Neural network in model-based fault Diagnosis*. 13th IFAC World Congress, San Francisco, California, USA, pages 67-72, 1996.
- [Kourd 2012] Y. Kourd. *Génération des résidus par les outils de l'Intelligence artificielle pour le diagnostic des systèmes complexes*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, 2012.
- [Kreisselmeier 1977] G. Kreisselmeier. *Adaptative observers with exponential rate of convergence*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, page 2-8, 1977.
- [Krener 1983] J. A. Krener et A. Isidori. *Linearization by output injection and nonlinear observers*, *Systems and Control letters*. vol. 3(1), page 47-52, 1983.
- [Krener 1985] J. A. Krener et W. Respondek. *Nonlinear observers with linearization error dynamics*. SIAM on Control and Optimization, vol. 23(2), page 197-216, 1985.

- [Kruszewski 2006] A. Kruszewski. *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, France, 2006.
- [Kukolj 2004] D. Kukolj et E. Levi. *Identification of complex systems based on neural and takagi-sugeno fuzzy model*. IEEE Trans, on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, vol. 34, 2004.
- [Lüders 1974] G. Lüders et K. S. Narendra. *A new canonical form for an adaptive observer*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 19, page 117–119, 1974.
- [Leith 1999] D. J. Leith et W. E. Leithead. *Analytic framework for blended multiple model systems using linear local models*. International Journal of Control, vol. 72(7), page 605–619, 1999.
- [Liu 2005] P. Liu et H. Li. *Hierarchical TS fuzzy system and its universal approximation*. Information Sciences, vol. 169, page 279–303, 2005.
- [Luders 1973] G. Luders et K. S. Narendra. *An adaptive observer and identifier for a linear system*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 18, page 496–499, 1973.
- [Luenberger 1971] G. D. Luenberger. *An introduction to observers*. IEEE Transactions on Automatic and Control, AC-16, page 596–602, 1971.
- [Maeder 2010] U. Maeder. *Augmented Models in Estimation and Control*. PhD thesis, Dissertation ETH Zurich, 2010.
- [Magni 1995] J. Magni. *On continuous-time parameter identification by using observers*. IEEE Trans. Autom, Control, vol. 40(10), page 1789–1792, 1995.
- [Marino 1992] R. Marino et P. Tomei. *Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, page 1239–1245, 1992.
- [Marino 1995] R. Marino et P. Tomei. *Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, page 1300–1304, 1995.
- [Marino 2001] R. Marino, L. Santosuosso et P. Tomei. *Robust adaptive for nonlinear systems with bounded disturbances*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, page 967–972, 2001.
- [Marx 2007] B. Marx, D. Koenig et J. Ragot. *Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis*. IET Control Theory and Applications, vol. 1(5), page 1487–1495, 2007.
- [Methnani 2012] S. Methnani. *Diagnostic, reconstruction et identification des défauts capteurs et actionneurs : application aux stations d'épurations des eaux usées*. PhD thesis, Thèse de doctorat, École Nationale d'Ingénieurs de Sfax, 2012.

- [Morere 2000] Y. Morere, T. M. Guerra et L. Vermeiren. *Stabilité et stabilisation non quadratique de modèles flous discrets*. CIFA, 69-93, Lille, France, 2000.
- [Morère 2001] Y. Morère. *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, France, 2001.
- [Murray-Smith 1997] R. Murray-Smith et T. A. Johansen. *Multiple model approaches to modeling and control*. Taylor & Francis, London, 1997.
- [Nadri 2001] M. Nadri. *Observation et commande des systèmes non linéaires et application aux bioprocédés*. PhD thesis, ANRT, Grenoble, 2001. Reproduction de Thèse de doctorat autom. indus Lyon 1, 2001.
- [Nagy Kiss 2010] A. M. Nagy Kiss. *Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Nancy, 26 novembre 2010.
- [Ohtake 2001] H. Ohtake, K. Tanaka et H. O. Wang. *Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept*. In In Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Vancouver, Canada, 2001.
- [Oudghiri 2008a] M. Oudghiri. *Commande Multimodèle tolérante aux défaut : Application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules Verne, Octobre 2008.
- [Oudghiri 2008b] M. Oudghiri, M. Chadli et A. El-Hajjaji. *Control and sensor fault-tolerance of vehicle lateral dynamics*. In 17th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress, Seoul, Korea, 2008.
- [Oueder 2012] M. Oueder. *Synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires, Automatique*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Caen, 2012.
- [Oumayma 2012] O. Oumayma. *Sur la résolution des problèmes inverses pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application à l'électrolocation, à l'estimation d'état et au diagnostic des éoliennes*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2012.
- [Ourjuela 2008] R. Ourjuela. *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*. PhD thesis, Thèse de l'Institut Nationale Polytechnique de Lorraine, Novembre 2008.
- [Ourjuela 2013] R. Ourjuela, B. Marx, J. Ragot et D. Maquin. *Nonlinear system identification using heterogeneous multiple models*. Applied Mathematics and Computer Science, vol. 23(1), page 103-115, 2013.
- [Patan 2008] K. Patan. *Artificial Neural Networks for the Modelling and Fault Diagnosis of Technical Processes*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2008.

- [Patton 1993] R. J. Patton. *Robustness issues in fault-tolerant control*. Fault Diagnosis and Control System Reconfiguration, IEE Colloquium, page 1–125, 26 May 1993.
- [Patton 1994] R. J. Patton. *Robust model-based fault diagnosis : the state of the art*. In In Proceedings of the IFAC SAFEPROCESS, Finland, pages : 1-24, 1994.
- [Patton 1998] R. Patton, J. Chen et C. Lopez-Toribio. *Fuzzy observers for nonlinear dynamic systems fault diagnosis*. In In 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, USA, 1998.
- [Patton 2000] R. J. Patton, F. J. Uppal et C. J. Lopez-Toribio. *Soft computing approaches to fault diagnosis for dynamic systems : A survey*. In Proc. IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, IFAC, page 198–211, 2000.
- [Plamen 2004] A. Plamen et D. P. Filev. *An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models*. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 34, 2004.
- [Qin 1999] S. J. Qin et L. Weihua. *Detection, identification and reconstruction of faulty sensors with maximized sensitivity*. American Institute of Chemical Engineers Journal, vol. 45(9), pages 1963–1976, 1999.
- [Qiu 1993] Z. Qiu et J. Gertler. *Robust FDI systems and h-infinity optimization*. in Proceedings of the American Control Conference, page pp. 1710–1715, 1993.
- [Raghavan 1994] S. Raghavan et K. Hedrick. *Design for a class of nonlinear systems*. International Journal of Control, vol. 59(2), pages 515–528, 1994.
- [Rajamani 1998] R. Rajamani. *Observers for Lipschitz Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. vol. 43, no. 3, page 397–401, 1998.
- [Rodrigues 2005] M. Rodrigues. *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale IAEM Lorraine, 6 décembre 2005.
- [Sala 2007] A. Sala et C. Arino. *Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya’s theorem*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 158(24), page 2671–2686, 2007.
- [Sallem 2013] F. Sallem. *Détection et Isolation de Défauts Actionneurs Basées sur un Modèle de l’Organe de Commande*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Toulouse III, 13 septembre 2013.
- [Schreier 1997] G. Schreier, J. Ragot, R. J. Patton et Frank. P. M. *Observer design for a class of nonlinear systems*. In Proc. IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, England, pages 498–503, 1997.
- [Seliger 1993] R. Seliger et P. M. Frank. *Robust residual evaluation by threshold selection and a performance index for nonlinear observer-based fault diagnosis*. In International Conference on Fault diagnosis, Toulouse, France, page 496–504, April 1993.

- [Seliger 2000] R. Seliger et P. M. Frank. *Robust observer-based fault diagnosis in non-linear uncertain systems*. In R. J. Patton, P. M. Frank, and R. N. Clark, editors, *Issues of fault diagnosis for dynamic systems*, Springer, page 145–187, 2000.
- [Senthilkumar 2010] D. Senthilkumar. *Design of robust fuzzy controllers for uncertain nonlinear systems*. PhD thesis, Doctorat thesis Indian Institute of Technology Guwahati, 2010.
- [Slotine 1986] J. J. Slotine, J. Hedrick et E. Misawa. *Nonlinear state estimation using sliding observers*. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, page 332–339, Dec 1986.
- [Sobhani-Tehrani 2009] E. Sobhani-Tehrani et K. Khorasani. *Fault Diagnosis of Nonlinear Systems Using a Hybrid Approach*. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 2009.
- [Takagi 1985] T. Takagi et M. Sugeno. *Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control*. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 15, page 166–172, 1985.
- [Tanaka 1995] K. Tanaka et M. Sano. *Trajectory stabilization of model car via fuzzy control*. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 70, pages 155–170, 1995.
- [Tanaka 1998] K. Tanaka, T. Ikeda et H. Wang. *Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and LMI-based designs*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6(2), page 250–265, 1998.
- [Tanaka 2001a] K. Tanaka et O. W. Hua. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [Tanaka 2001b] K. Tanaka et H. O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 2001.
- [Tanaka 2003] K. Tanaka, T. Hori et H. Wang. *A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11(4), page 582–589, 2003.
- [Tanaka 2007] K. Tanaka, H. Ohtake et H. Wang. *A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15(3), page 333–341, 2007.
- [Thau 1973] F. E. Thau. *Observing the state of non-linear dynamic systems*. *Int. J. Control*, vol. 17 (3), pages 471–479, 1973.
- [Theilliol 2003] D. Theilliol, Sauter D. et Ponsart J.C. *A multiple model based approach for Fault Tolerant Control in nonlinear systems*. In : *Proc. IFAC Symposium Safeprocess*, Washington .D.C, USA, CD-Rom, 2003.

- [Toth 2008] R. Toth. *Modeling and identification of linear parameter-varying systems. An Orthonormal Basis Function approach*. PhD thesis, PhD thesis, Technisch Universiteit Delft, Pays Bas, 2008.
- [Toth 2009a] R. Toth, P. S. C. Heuberger et P. M. J. Van der Hof. *Asymptotically optimal orthonormal basis functions for LPV systems*. *Automatica*, vol. 45, page 1359–1370, 2009.
- [Toth 2009b] R. Toth, M. Lovera, P. S. C. Heuberger et P. M. J. Van den Hof. *Discretization of linear fractional representations of LPV systems*. In 48th Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, China, 2009.
- [Tsiniias 1989] J. Tsiniias. *Observer design for nonlinear systems*. *Systems and Control Letters*. vol. 13(2), pages 135–142, 1989.
- [Tuan 2001] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo et Y. Yamamoto. *Parameterized Linear Matrix Inequality techniques in fuzzy control system design*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9(2), page 324–332, 2001.
- [Urban 2010] D. M. Urban. *Augmented Models in Estimation and Control*. PhD thesis, Dissertation ETH Zurich No. 19278, 2010.
- [Utkin 1977] V. I. Utkin. *Variable Structure Systems with Sliding Modes*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22, page 212–222, 1977.
- [Van-Sprang 2002] E. N. M. Van-Sprang, H. J. Ramaker, J. A. Westerhuis, S. P. Gurdun et A. K. Smilde. *Critical evaluation of approaches for on-line batch process monitoring*. *Chemical Engineering Science*, vol. 57, pages 3979–3991, 2002.
- [Viswanadham 1987] N. Viswanadham et R. Srichander. *Fault detection using unknown input observers*. *Control Theory and Advanced Technology*, vol. 3 (2), page 91–101, 1987.
- [Walker 1979] B.K. Walker et E. Gai. *Fault detection threshold determination techniques using Markov theory*. *Int. J Guidance, Control and Dynamics*, vol. 2, pages 313–319, 1979.
- [Wang 1975] E. J. Wang S., Davison et P. Dorato. *Observing the states of systems with unmeasurable disturbances*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 20(5), page 716–717, 1975.
- [Wang 1996] H. O. Wang, Tanaka K. et M. Griffin. *An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues*. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, 1996.
- [Wang 1998] L. X. Wang. *Universal approximation by hierarchical fuzzy systems*. *Fuzzy Sets Systems*, vol. 93, page 223–230, 1998.
- [White 1987] J. E. White et J. L. Speyer. *Detection filters design : Spectral theory and algorithms*. *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 32, pages 593–603, 1987.

- [Willsky 1975] A. S. Willsky. *Survey of design methods for failure detection in dynamic systems*, NASA. Rep., CR-145695, 1975.
- [Wuennenberg 1986] J. Wuennenberg et P. M. Frank. *Sensor fault detection via robust observers*, in *First European Workshop On Fault Diagnostics*. Reliability and Related Knowledge- Based Approaches, (Rhodes, Greece), 1986.
- [Xu 2012] D. Xu, B. Jiang et P. Shi. *Nonlinear Actuator Fault Estimation Observer : An Inverse System Approach via a T $\ddot{U}$ S Fuzzy Model*. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 22(1), pages 183–196, 2012.
- [Yan 2007a] X. G. Yan et C. Edwards. *Nonlinear robust fault reconstructive and estimation using a sliding mode observers*. Automatica, vol. 43(9), page 1605–1614, 2007.
- [Yan 2007b] X. G. Yan et C. Edwards. *Sensor fault detection and isolation for nonlinear systems based on sliding mode observer*. vol. 21, page 657–673, 2007.
- [Yan 2008] X. G. Yan et C. Edwards. *Robust sliding mode observer-based actuator fault detection and isolation for a class for nonlinear systems*. vol. 39, page 1605–1614, 2008.
- [Ye 2002] H. Ye, S. X. Ding et G. Wang. *Integrated design of fault detection systems in time-frequency domain*. IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47(2), page 384–390, 2002.
- [Yoneyama 2008] Y. Yoneyama. *H $\infty$  filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables : An uncertain system approach*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 39(10), page 1033–1040, 2008.
- [Zaidi 2015] I. Zaidi. *Robust Stabilization and Observation for Positive Takagi-Sugeno Systems*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Valladolid, 2015.
- [Zeitz 1987] M. Zeitz. *The extended luenberger observer for nonlinear systems*. Syst. Control Lett., vol. 9(2), pages 149–156, 1987.
- [Zemouche 2007] A. Zemouche. *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2007.
- [Zemouri 2003] M. R. Zemouri. *Contribution à la surveillance des systèmes de production à l'aide des réseaux de neurones dynamiques : Application à la e-maintenance*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, 2003.
- [Zhang 2001] Q. Zhang et A. Xu. *Global adaptive observers for a class of nonlinear systems*, In *40th Conference on Decision and Control*. In 40th Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, page 3360–3366, 2001.
- [Zolghadri 1996] A. Zolghadri, D. Henry et M. Monsion. *Design of nonlinear observers for fault diagnosis : a case study*. Control Engineering Practice, vol. 4(11), pages 1535–1544, 1996.

- [Zwingelstein 1995] G. Zwingelstein. Diagnostic des defaillances -theorie et pratique pour les systemes industriels. Traité des Nouvelles Technologies, série Diagnostic et Maintenance, 1995.



## ملخص:

تهتم هذه الدراسة بتقدير متغيرات الحالة و تشخيص الأعطاب التي يمكن أن تؤثر على حسن أداء الأنظمة الغير خطية. الأعمال المقدمة في هذه الأطروحة تعتمد على منهجية تأخذ بعين الاعتبار الصعوبات المعترضة، خاصة فيما تعلق بصياغة النظام الفيزيائي الغير خطي وفقا لنموذج متعدد الأنظمة لطاكاجي-سوجينو بمتغيرات الحالة غير قابلة للقياس. الحصول على الملاحظات يعتمد على استخدام مقارنة بشرط لبشيتز، و مقارنة لـ 2 بالاضطرابات و مقارنة بعدم الدقة المحدودة. أهم المساهمات التي تقدمها الأطروحة هي: استخلاص ملاحظ بمدخل مجهولة لمتعدد النماذج لطاكاجي-سوجينو المرفوع بمتغيرات الحالة غير قابلة للقياس، استخلاص ملاحظ نسبي تكاملي بمدخل مجهولة و متغيرات الحالة غير قابلة للقياس و بناء بنية بنك الملاحظات النسبية التكاملية بمدخل مجهولة من أجل تشخيص الأعطاب.

## الكلمات المفتاحية:

متعدد النماذج لطاكاجي-سوجينو، التحويل متعدد المواضع المحدب، ملاحظ نسبي تكاملي بمدخل مجهولة، متغيرات الحالة غير قابلة للقياس.

## Résumé :

Cette thèse porte sur l'estimation d'état et le diagnostic de défauts qui peuvent altérer le bon fonctionnement des systèmes non linéaires. Les travaux présentés s'appuient sur une démarche qui prend en considération les difficultés rencontrées, surtout en ce qui concerne la modélisation du système physique non linéaire par Multimodèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. La synthèse d'observateurs a été basée sur l'utilisation de l'approche par condition de Lipschitz, l'approche  $L_2$  par perturbation et l'approche par incertitudes bornées. Les principales contributions de cette thèse sont : La synthèse d'un observateur à entrées inconnues pour le multimodèle augmenté de Takagi-Sugeno à variables de décisions non mesurables ; la synthèse d'un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues pour le multimodèle de Takagi-Sugeno à variables de décisions non mesurables ; et la construction d'un banc d'observateur proportionnel intégral à entrées inconnues pour le diagnostic de défauts.

**Mots clés :** Multimodèle de Takagi-Sugeno, Transformation polytopique convexe, Observateur proportionnel intégral à entrées inconnues, variable de décision non mesurable.

## Abstract :

The present thesis deals with the state estimation and fault diagnosis of nonlinear systems. The target is to synthesize an observer for the state estimation, detection and diagnosis of faults that may occur and affect the proper monitoring of the systems which attracts and interests many researchers in last decades where many of them have conducted their studies was based on the proportional integral observer for Takagi-Sugeno systems when the decision variables are measurable or not measurable.

This thesis is based on an approach that takes into account the encountered difficulties, especially the modeling of nonlinear physical system by Takagi-Sugeno multiple models of non-measurable decision variables. The different methods for the synthesis of nonlinear observers are presented and analyzed in order to represent the nonlinear systems with Takagi-Sugeno. To overcome difficulties, it was proposed to use the approach Lipschitz condition, the approach  $L_2$  by perturbation and the approach using bounded uncertainties. The obtained results have been applied on a hydraulic physical system of three tanks.

**Keywords:** Multiple model of Takagi-Sugeno, Convex polytopic transformation, Proportional integral unknown input observer, unmeasurable decision variables.