وزارة التـعليـم العـــالــي والبـــحث الـعلمـــي
Ministère de l'enseignement supérieur
et la recherche scientifique

Université Badji Mokhtar
– Annaba –

Badji Mokhtar University
– Annaba –

جامعة باجي مختار
– عنابة –

Année 2007

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat d'état

ETUDE DE CERTAINES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ABSTRAITES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES NON LOCALES

Option
Equations différentielles et Théorie Spectrale

Présentée par **Zouyed Fairouz**

DIRECTEUR DE THÈSE : Rebbani Faouzia PROF. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	Khodja Brahim	PROF.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Mazouzi Said	PROF.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Aibeche Aissa	PROF.	U. SETIF
EXAMINATEUR :	Morsli Mohamed	MC(A).	U. TIZI-OUZOU

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

T H È S E

En vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat d'état en Mathématiques

Présentée par
Zouyed Fairouz

Etude de certaines équations différentielles abstraites avec conditions aux limites non locales

Option : Equations différentielles et théorie spectrale

Directeur de Thèse :	Prof. Rebbani Faouzia		U. Annaba

Jury :

Président :	Khodja Brahim	Prof.	U. Annaba
Examinateur :	Mazouzi Said	Prof.	U. Annaba
Examinateur :	Aibeche Aissa	Prof.	U. Sétif
Examinateur :	Morsli Mohamed	MCA.	U. Tizi-Ouzou

Année 2007

ملخص

في هذه الدراسة نقوم بدراسة قسمين من المسائل، في القسم الأول تقوم بدراسة مسألة حدية ذات شروط غير محلية. بالاعتماد على متراجحات الطاقة نبين وجود و وحدانية الحل و كذا استقراره بالنسبة للمعطيات.

أما في القسم الثاني نتناول بالدراسة مسألة سيئة الطرح باستعمال طرق تسوية لتحقيق الاستقرار.

الكلمات المفتاحية: متراجحات الطاقة، مسألة سيئة الطرح، مسألة عكسية ، الاستقرار، التسوية.

Abstract

In this work we study certain classes of evolution problems. In the first class, we study two non-local problems, we establish the existence and uniqueness of the strong solution and its continue dependence on the data. The proofs are based on energy inequalities and on the density of the range of the operator generated by the considered problem. In the second class, we investigate an ill-posed problem by using the modified quasi-reversibility method.

Key words : *a priori estimate , ultra-hyperbolic equation, nonlocal conditions, ill-posed problem, regularization, quasi-solution, quasi-reversibility method.*

Résumé

Dans le présent travail on étudie certaines classes de problèmes d'évolution. La première classe est consacrée à l'étude de deux problèmes aux limites avec des conditions non locales. On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution forte et sa dépendance continue par rapport aux données, grâce à la méthode des inégalités énergétiques. La deuxième partie est consacrée à l'étude d'un problème mal posé en utilisant la méthode de quasi réversibilité modifiée.

Mots clés : *inégalité énergétique, équation ultra-hyperbolique, conditions non locales, problème mal posé, régularisation, méthode de quasi-réversibilité.*

Table des matières

Introduction

0.1 Problématique

Beaucoup de problèmes de la physique-mathématique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles. Par "modèle" nous entendons une équation qui, jointe à des conditions aux limites s'exprimant sur la frontière du domaine, où le phénomène évolue. Ce type de modélisation est aujourd'hui l'un des thèmes les plus importants de la compréhension scientifique, il constitue en effet, la première étape d'une démarche qui est composée en général de trois ; la deuxième est constituée par l'analyse théorique du problème, l'étape finale consistant en l'implémentation numérique.

0.1.1 Equations d'évolution multi-temporelles

Les modèles mathématiques pour un certain nombre de phénomènes naturels peuvent être formulés en termes d'équations multi-temporelles (existence des temps multiples). La théorie de ce type d'équations est apparue et a commencé à se développer dans les années cinquante dans les travaux fondamentaux de V.P. Mikhailov [63, 64]. Elles interviennent, par exemple dans la théorie du mouvement Brownien [18], la théorie du transport [4], la biologie [49], ainsi que dans d'autres phénomènes physiques.
Des résultats nouveaux sur l'existence et l'unicité de solution de quelques problèmes ultra-paraboliques (les problèmes paraboliques dans le cas multi-temporel) on été établis par A. Friedmann [35][35], N.S. Gencev [39][39], S.G. Pyatkov [71][71], D.R. Akhemetov et al. [5][5] et d'autres auteurs.
Pour le cas ultra-hyperbolique (les problèmes hyperboliques dans le cas multi-temporel) avec des conditions classiques, les principaux résultats ont été établis dans la série des

travaux de N.I Brish et N.I. Yurchuk [15, 16, 17] et H.O. Fattorini [37][37]. Des problèmes à conditions non locales associées aux équations ultra-hyperboliques ont été étudiées par F. Rebbani et al. [43, 73, 74][43, 73, 74].
Le cas ultra-parabolique d'ordre supérieur est traité par G.A. Anastassiou [6][6].
Il est important de noter qu'il n'existe pas encore, pour ce type d'équations, une théorie générale. Ceci est dû à la relative nouveauté de cette démarche et à la complexité des questions qu'elle soulève. Chaque problème nécessite donc un traitement spécifique. Ce qui souligne l'actualité du sujet que nous traitons dans notre thèse.

0.1.2 Problèmes bien et mal posés et problèmes inverses

Le mathématicien confronté à une équation différentielle se pose d'abord la question de l'existence et l'unicité des solutions, après ce sont les questions de stabilité qui apparaissent.
Dans les mathématiques modernes tous les problèmes peuvent être classés en deux catégories problèmes bien posés (ou correctement posés) et problèmes mal posés.
Considérons l'équation opérationnelle suivante :

$$Au = z, \qquad u \in U, \quad z \in Z, \tag{E}$$

où U et Z sont des espaces métriques.
On dit que le problème (E) est bien posé au sens d'*Hadamard* si pour tout $z \in Z$ la solution existe ; elle est unique ; et elle dépend continûment du second membre, i.e l'opérateur A^{-1} est défini sur tout Z et il est continu. Si une de ces trois conditions n'est pas satisfaite le problème est dit mal posé.
Cette définition à été introduite dans l'ouvrage célèbre d' Hadamard [46][46] dès 1923. Bien entendu ces notions doivent être précisées par le choix des espaces dans lesquels les données et la solution sont considérées.
Dans les dernières années, des progrès considérables ont été établis dans l'analyse des problèmes mal posés vu l'intérêt que soulève ce type de problèmes. Par exemple dans le domaine de la physique atmosphérique, la prospection pétrolière, l'imagerie médicale et autres.

Quant aux problèmes inverses dont la définition nous est donnée par J.B. Keller [56][56] "deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause", on les retrouve dans plusieurs situations, par exemple en reconstituant l'état initial d'un système à partir de son état final, ou d'une évolution partielle, et également en cherchant la source d'un phénomène donné et d'autres.
Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer les causes connaissant les effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

0.1.3 Conditions non locales

Durant les dernières années, parmis les problèmes aux limites non classiques pour les équations différentielles aux dérivées partielles une place importante est occupée par les problèmes avec des conditions non locales, en particulier les conditions qui relient les valeurs des solutions et leurs dérivées en deux ou plusieurs points intérieurs ou frontières du domaine considéré. Une définition générale de ces conditions et leur classification ont été données, en particulier, par Nakhushev dans [66][66].
Dans [29][29] Dezin a montré pour la première fois que pour certaines équations aux dérivées partielles dans certains domaines, le problème aux limites n'est correctement posé que seulement si les conditions utilisées sont non locales. Ce type de conditions non standard reflète une grande réalité dans la modélisation mathématique de quelques problèmes naturels dans plusieurs domaines comme la biotechnologie [75][75] et la biologie [67][67].
Ces conditions ont été associées à des problèmes paraboliques et hyperboliques [10, 11, 20, 25, 26][10, 11, 20, 25, 26] et ont été étudiées par plusieurs auteurs. Les principaux résultats dans l'étude des problèmes non locaux de type :

$$L(\frac{\partial}{\partial t}, D_x) = \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(D_x,t)\frac{\partial^{n-j} u(x,t)}{\partial t^{n-j}} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

$$A(D_x)\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} + B(D_x)\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, ..., n-1, \quad x \in \Omega,$$

ont été établis par B.I. Ptashnyk [50, 69, 70][50, 69,70], L.V. Fardigola [14, 33, 34][14, 33, 34], A. Ashyralyev [10, 11][10, 11], V.I. Chesalin [25, 25][25, 26]. Quant aux problèmes engendrés par des équations multi-temporelles à conditions aux limites non locales, ils ont été traités une partie par F. Rebbani et al. [43, 73, 74, 87][43, 73, 74, 87].

0.2 Contenu de la thèse

Le but de la présente thèse est d'étudier certains problèmes aux limites pour des équations opérationnelles de second ordre, elle est composée d'une introduction et de trois chapitres.

Dans l'introduction, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle ainsi que les outils mathématiques nécessaires pour l'étude des problèmes posés.

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites avec des conditions non locales. L'étude est basée sur ce qu'on appelle la méthode des inégalités énergétiques. On considère dans D=$]0, T_1[\times]0, T_2[$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign(1-|\mu_2|^2)\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign(1-|\mu_1|^2)\frac{\partial u}{\partial t_2} \\ +sign[(1-|\mu_1|^2)(1-|\mu_2|^2)]Au = f(t), \end{aligned} \tag{1}$$

avec les conditions non locales :

$$l_{\mu_1}u = u|_{t_1=0} - \mu_1 u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \quad l_{\mu_2}u = u|_{t_2=0} - \mu_2 u|_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \tag{2}$$

où A est un opérateur non-borné, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ est un paramètre complexe.
Pour ce problème, on établit des théorèmes d'existence, d'unicité de la solution forte, sa dépendance continue par rapport aux données (f, φ, ψ) ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres μ_1 et μ_2.
Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des estimations a priori (méthode des inégalités énergétiques) qui est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique. Elle résulte des idées introduites par J. Leray [60][60] et L. Garding [38][38] et de celles développées dans les travaux de N.I. Yurchuk [84, 85, 86][84, 85, 86].
Elle est caractérisée de la manière suivante :

le problème posé est reécrit sous la forme opérationnelle :

$$Lu = (\mathcal{L}u, l_{\mu 1}u, l_{\mu 2}u) = F.$$

Pour l'opérateur L agissant d'un espace de Banach $\mathbb{B}$ dans un espace de Hilbert $\mathbb{E}$, on établit une estimation a priori de la forme :

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leq c\|Lu\|_{\mathbb{E}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L). \tag{3}$$

Cette inégalité est obtenue en général par une étude détaillée de la forme obtenue en multipliant scalairement l'équation (1) par u ou ses dérivées et une certaine fonction poids.

On montre ensuite que l'opérateur L admet une fermeture $\overline{L}$. La solution de l'équation :

$$\overline{L}u = F, \tag{4}$$

est appelée solution forte du problème considéré.

Par passage à la limite, on prolonge l'estimation (3) aux solutions fortes :

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leq c\|\overline{L}u\|_{\mathbb{E}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L}). \tag{5}$$

A partir de (5) on déduit :

$\imath$) L'unicité de la solution forte et sa dépendance continue des données quand elle existe ;

$\imath\imath$) l'ensemble des images de l'opérateur $\overline{L}$, noté $\mathcal{R}(\overline{L})$ est égal à $\overline{\mathcal{R}(L)}$.

La dernière étape consiste à démontrer l'existence de la solution forte et donc établir la densité de $\mathcal{R}(L)$ dans $\mathbb{E}$.

Dans le deuxième chapitre on étudie dans le domaine $D =]0, T_1[\, \times\,]0, T_2[$, le problème ultra-hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)\left(u + \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f(t), \\ l_{1\mu}u = B_1(\mu)\, u|_{t_1=0} - B_2(\mu)\ \ u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ l_{2\mu}u = B_1(\mu)\, u|_{t_2=0} - B_2(\mu)\, u|_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \end{cases}$$

où $A(t)$ est un opérateur non-borné dépendant de t, d'où la complexité de l'étude qui nous oblige à faire appel aux opérateurs de régularisation.

En utilisant la même démarche, qui se base sur le choix des multiplicateurs, on établit des résultats d'existence, d'unicité de la solution forte et sa dépendance continue par rapport aux données.

Le chapitre trois est consacré à l'étude d'une classe de problèmes mal posés. Cette étude est un prolongement des travaux traités par E.M. Aksen dans [2, 3][2, 3].
Soient H un espace de Hilbert et u la solution du problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv \partial^2_{t_1t_2}u(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1}u(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2}u(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in D, \\ u(t_1, 0) = \psi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1], \\ u(0, t_2) = \varphi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_1$}$$

où f est une fonction de variable $t \in D$ et à valeurs dans H. ψ et ξ sont des fonctions définies de $[0, T_1]$ et $[0, T_2]$ respectivement, à valeurs dans H et vérifient la condition :

$$\psi(0) = \varphi(0).$$

A est un opérateur linéaire dans H, non-borné, auto-adjoint, défini positif. $A_1(t_1)$ et $A_2(t_1)$ sont deux familles d'opérateurs bornés dans H. Pour $\chi \in L_2((0, T_2); H)$ on considère le problème de minimisation suivant :
Pour $\varepsilon > 0$ donné, déterminer la fonction χ telle que :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^{T_2} |u(T_1, t_2) - \chi(t_2)|^2 \, dt_2 \leq \varepsilon.$$

La solution la plus évidente est de choisir $u(T_1, t_2) = \chi(t_2)$, i.e. $\mathcal{F}(\varphi) = 0$. Ce qui nous conduit à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv \partial^2_{t_1t_2}u(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1}u(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2}u(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in D, \\ u(t_1, 0) = \psi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1], \\ u(T_1, t_2) = \chi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2]. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_2$}$$

et prendre $u(0, t_2) = \varphi(t_2)$.
Un tel problème n'est pas bien posé au sens d'*Hadamard*. Plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter ce type de problèmes, on retrouve la méthode de *quasi-réversibilité* ($M.Q.R$) proposée par Lions et Lattes [61][61], la méthode de la valeur aux limites

auxiliaire (*Q.B.V method*) dans les travaux de SHOWALTER [76][76] et G.W. CLARK [27][27], la procédure iterative introduite par V.A. KOZLOV et V.G. MAZ'YA [57][57] et la méthode de quasi-solution (*Q.S.-method*) de TIKHONOV [78][78].

Dans la méthode de quasi-réversibilité, l'idée principale consiste à remplacer l'opérateur A dans $(\mathcal{P}_2)$ par $A_\varepsilon = g_\varepsilon(A)$. LATTÈS et LIONS ont proposé $g_\varepsilon(A) = A - \varepsilon A^2$, ce qui leur a permis de construire une régularisation et de neutraliser le caractère mal posé du problème. On remarque ici que le terme correcteur εA^2 est d'ordre deux, ce qui induit une difficulté sérieuse pour l'implémentation numérique.

Dans notre travail, on propose une perturbation basée sur l'approximation de *Yosida* $g_\varepsilon(A) = A(I + \varepsilon A)^{-1}$, l'avantage de cette perturbation est qu'elle nous permet de passer à un problème où le coefficient opératoriel est borné, ce qui facilite l'étude de problème perturbé, et donne de meilleurs résultats de convergence par rapport à ceux de LATTÈS et LIONS.

0.3 Rappels

0.3.1 Opérateurs linéaires

On désigne par :

E et F des espaces de Banach.

$\mathscr{L}(E,F)$ espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de E dans F, muni de la norme $\|A\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}$.

$\mathscr{L}(E)$ espace vectoriel des opérateurs linéaires continus dans E .

H : espace de Hilbert.

Opérateurs bornés

Théorème 0.3.1 [Banach-Steinhaus].
Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que

$$\sup_{i\in I}\|A_i x\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty, \qquad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I}\|A_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty.$$

Théorème 0.3.2 *Soit A un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F. Alors A^{-1} est continu de F dans E.*

Théorème 0.3.3 *Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F. A^{-1} existe et est continu si et seulement si il existe une constante $m > 0$ tel que :*

$$\|Ax\| \geq m\,\|x\|\,, \qquad \forall x \in E$$

Théorème 0.3.4 [Théorème du graphe fermé] *Soit A un opérateur linéaire de E dans F. Supposons que le graphe de A est fermé dans $E \times F$. Alors A est continu.*

Opérateurs linéaires non-bornés.

Définition 0.3.1 *On appelle opérateur linéaire non-borné de E dans F toute application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$, à valeurs dans F. $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de A.*

Définition 0.3.2 *On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.*

Remarque L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe dans E.

Théorème 0.3.5 *Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace E, alors il est borné.*

Définition 0.3.3 *On dit que A est fermable s'il admet un prolongement fermé. Autrement dit A est fermable si l'adhérence $\overline{G(A)}$ de son graphe est un graphe. L'opérateur fermé $\overline{A}$ dont le graphe $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ est appelé fermeture de A.*

Définition 0.3.4 *Soit A un opérateur non-borné à domaine dense. On va définir un opérateur non-borné $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset E^* \to F^{\ *}$ comme suit. On pose*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in F^*;\ \exists c \geq 0 \ \textit{tel que}\ |\langle v, Au\rangle| \leq c\,\|u\| \ \ \forall u \in \mathcal{D}(A)\}\,.$$

Etant donné $v \in \mathcal{D}(A^*)$, on considère l'application $g : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(u) = \langle v, Au\rangle\,,\ u \in \mathcal{D}(A).$$

La fonctionnelle g peut être prolongée de façon unique en une application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$|f(u)| \leq c\,\|u\|\,,\ \forall u \in E.$$

Par suite $f \in E^*$. On pose : $A^*v = f$.

L'opérateur A^* est appelé l'adjoint de A. La relation qui lie A et son adjoint A^* est donnée par :

$$\langle v, Au\rangle_{F^*,F} = \langle A^*v, u\rangle_{E^*,E}\,,\quad \forall u \in \mathcal{D}(A),\ \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Proposition 0.3.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné à domaine dense. Alors A^* est fermé i.e. $G(A^*)$ est fermé dans $F^* \times E^*$.*

Théorème 0.3.6 *Soit A un opérateur fermé de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans E. Si A admet un inverse $A^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$, alors $(A^*)^{-1}$ existe et est borné de plus :*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Corollaire 0.3.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{D}(A) = E$

(ii) *A est borné*

(iii) $\mathcal{D}(A^*) = F^*$

(iv) *A^* est borné.*

Dans ces conditions on a :

$$\|A\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathscr{L}(F^*,E^*)}$$

Théorème 0.3.7 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathcal{R}(A)$ est fermé,*

(ii) *$\mathcal{R}(A^*)$ est fermé,*

(iii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^{\perp}$,

(iv) $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$.

Théorème 0.3.8 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est surjectif,*

(ii) *il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|v\| \leq C \|A^*v\|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

(iii) *$\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathcal{R}(A^*)$ est fermé.*

Théorème 0.3.9 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A^* est surjectif,*

(ii) *il existe une constante $C' > 0$ telle que :*

$$\|u\| \leq C' \|Au\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

(iii) *$\mathcal{N}(A) = \{0\}$ et $\mathcal{R}(A)$ est fermé.*

Corollaire 0.3.2 *Soit A un opérateur non-borné dans E, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur E si et seulement s'il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que :*

$$\|u\| \leq k_1 \|Au\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$\|u\| \leq k_2 \|A^* u\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^*).$$

Opérateurs auto-adjoints

Définition 0.3.5 *Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur dans H de domaine dense $\mathcal{D}(A)$. On dit que A est auto-adjoint si $A^* = A$ .i.e. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $(v, Au) = (Av, u), \forall u, v \in \mathcal{D}(A)$.*

Proposition 0.3.2 *Un opérateur auto-adjoint est fermé.*

Proposition 0.3.3 *Soit A un opérateur auto-adjoint inversible. Alors A^{-1} est auto-adjoint.*

0.3.2 Opérateurs dépendant d'un paramètre

Définition 0.3.6 *La fonction $t \to A(t) \in \mathscr{L}(E, F)$ est simplement continue en $t_0 \in [0, T]$ si, pour tout $x \in H$ la fonction $y(t) = A(t)x$ est continue en t_0 i.e. $\forall x \in H$, la fonction $\|y(t) - y(t_0)\|_F = \|A(t)x - A(t_0)x\|_F \to 0$, quand $t \to t_0$. Et simplement continue sur $[0, T]$ si elle l'est en tout point de $[0, T]$.*

Définition 0.3.7 *La fonction $t \to A(t) \in \mathscr{L}(E, F)$ est fortement continue en $t_0 \in [0, T]$ si, $\|A(t) - A(t_0)\|_{\mathscr{L}(E,F)} \to 0$, quand $t \to t_0$. Et fortement continue sur $[0, T]$ si elle est en tout point de $[0, T]$.*

Lemme 0.3.1 *Si l'opérateur $A(t) \in \mathscr{L}(E, F)$ est simplement continu sur $[0, T]$. Alors il est uniformément borné par rapport à t.*

Définition 0.3.8 *L'opérateur $A(t) \in \mathscr{L}(E, F)$ est simplement dérivable en t_0 si, pour tout $x \in E$ la fonction $y(t) = A(t)x \in F$ est dérivable en t_0 et simplement dérivable sur $[0, T]$, si elle est en tout point de $[0, T]$.*

Lemme 0.3.2 *Soit $A(t)$ un opérateur non-borné. On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}(A(t))$, et $B(t)$ est un opérateur linéaire borné, simplement continûment dérivable. Alors l'opérateur $C(t) = B(t)A(t)$ défini sur $\mathcal{D}(A(t))$ est simplement continûment dérivable, et on a :*

$$C'(t)u = B'(t)A(t)u + B(t)A'(t)u, \quad u \in \mathcal{D}(A(t)),\ t \in [0, T]$$

Lemme 0.3.3 *Soit $A(t)$ un opérateur non-borné. On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}(A(t))$, et admet un inverse $A^{-1}(t)$ borné. Alors*

$$\left(A^{-1}(t)\right)' = -A(t)^{-1}A(t)'A(t)^{-1}.$$

Lemme 0.3.4 *Soit $A(t)$ un opérateur auto-adjoint défini positif, à domaine de définition $\mathcal{D}(A(t))$ indépendant de t et simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}(A(t))$. Alors l'opérateur $A^{\alpha}(t)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}(A(t))$.*

Pour plus de détails sur les opérateurs dépendants d'un paramètre, voir S.G. V.P. Krein [55].

0.3.3 Opérateurs de régularisation

Les opérateurs de régularisation sont un outil qui permet de faire correspondre à un élément d'un espace fonctionnel donné sa régularisée qui est un élément qui possède des propriétés de régularité plus importante et qui lui est en même temps "proche" par rapport à la norme considérée.

Soit $A(t)$un opérateur non-borné, fermé dans H, à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ indépendant de t, dense dans H. Pour cet opérateur on définit la famille d'opérateurs $(R_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) l'opérateur $R_\varepsilon(t)$ est fortement continu en t, et uniformément borné en ε,

(ii) l'opérateur $R_\varepsilon(t)$ commute avec A, quand $\varepsilon \to 0$,

(ii) l'opérateur $R_\varepsilon(t)$ applique H dans $\mathcal{D}(A)$,

(iv) l'opérateur $R_\varepsilon(t)$ converge fortement vers I, quand $\varepsilon \to 0$.

Méthode de prolongement par rapport au paramètre

Théorème 0.3.10 *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces de Banach et* L_0, L_1 *deux opérateurs linéaires bornés de* E_1 *dans* E_2. *Pour tout* $r \in [0,1]$, *on pose :*

$$L_r = (1-r)L_0 + rL_1.$$

On suppose qu'il existe $k > 0$ *telle que :*

$$\|u\|_{E_1} \leq k \|L_r u\|_{E_2},$$

où $r \in [0,1]$. *Alors* L_1 *est un isomorphisme entre* E_1 *et* E_2 *si et seulement si* L_0 *est un isomorhisme entre* E_1 *et* E_2.

D'autres notions et inégalités seront utilisées telle que l'ε inégalité :

$$2|\mathrm{Re}(x,y)| \leq \varepsilon |x|^2 + \varepsilon^{-1} |y|^2, \qquad \varepsilon > 0.$$

Chapitre 1

Problème aux limites pour une équation différentielle abstraite avec conditions aux limites non locales

1.1 Position du problème

Soit $D =]0, T_1[\times]0, T_2[$ un rectangle borné $\mathbb{R}^2$ de variable $t = (t_1, t_2)$ et soit H un espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont respectivement notés par $|.|$ et $(.,.)$.
On considère dans H l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign(1 - |\mu_2|^2)\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign(1 - |\mu_1|^2)\frac{\partial u}{\partial t_2} \\ +sign[(1 - |\mu_1|^2)(1 - |\mu_2|^2)]Au = f(t),\end{aligned} \tag{1.1}$$

où u et f sont des fonctions de variables $t = (t_1, t_2) \in D$ et à valeurs dans H, μ_1 et μ_2 sont des paramètres complexes, avec $|\mu_i| \neq 1$, $(i = 1, 2)$.
A est un opérateur linéaire, non-borné dans H et à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ partout dense dans H. De plus A est auto-adjoint et vérifie la condition :
Condition $(\mathcal{A})$:

$$(Av, v) \geq c_0|v|^2, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A), \forall t \in \overline{D},$$

où c_0 est une constante positive indépendante de u.
A l'équation (1.1) on associe les conditions aux limites non locales suivantes :

$$\begin{cases} l_{\mu_1}u = u|_{t_1=0} - \mu_1 u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ l_{\mu_2}u = u|_{t_2=0} - \mu_2 u|_{t_2=T_2} = \psi(t_1). \end{cases} \tag{1.2}$$

La fonction ψ (resp. φ) est définie de $[0, T_1]$ (resp. $[0, T_2]$) à valeurs dans H.

Les fonctions φ et ψ vérifient la condition de compatibilité suivante :

$$\varphi(0) - \mu_2 \varphi(T_2) = \varphi(0) - \mu_1 \psi(T_1). \tag{1.3}$$

1.2 Espaces fonctionnels

Introduisons tout d'abord certains espaces fonctionnels nécessaires pour l'étude du problème considéré.

On définit dans l'espace vectoriel $\mathcal{D}(A)$ la norme

$$|u|_1 = |Au|,$$

on obtient l'espace de Hilbert W^1.

De manière analogue, on définit dans l'espace $\mathcal{D}(A^{1/2})$ la norme

$$|u|_{1/2} = |A^{1/2}u|,$$

on obtient ainsi l'espace de Hilbert $W^{1/2}$.

Remarques

Les opérateurs A et $A^{1/2}$ sont bornés de W^1 et $W^{1/2}$ respectivement dans H.

D'après les propriétés de l'opérateur A on a les inclusions topologiques suivantes :

$$W^1 \subset W^{1/2} \subset H.$$

W^1 est partout dense dans $W^{1/2}$ et dans H.

De plus, on a les inclusions suivantes :

$$L_2(D; W^1) \subset L_2(D; W^{1/2}) \subset L_2(D; H).$$

On note par $H^{1,1}(D; W^1)$ l'espace obtenu en complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{D}; W^1\right)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{1,1}^2 = \int_D \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|_1^2 + |u|_1^2 \right] dt.$$

Soit $H^1([0,\, T_1]\,;W^{1/2})$ l'espace obtenu par complétion de l'espace $\mathcal{C}^\infty([0,\, T_1]\ ;W^{1/2}\ )$ par rapport à la norme

$$\parallel \psi \parallel_1^2 = \int_0^{T_1} \left(\left| \psi' \right|^2 + |\psi|_{1/2}^2 \right) dt_1.$$

De manière analogue on construit l'espace $H^1([0,\, T_2]\,;W^{1/2})$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_0^{T_2} \left(\left| \varphi' \right|^2 + |\varphi|_{1/2}^2 \right) dt_2.$$

En complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty \left(\overline{D}; W^1\right)$ par rapport à la norme

$$\| |u| \|_1^2 = (\beta\,(\mu))^2 \sup_{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in D} \left[\|u\,(\tau_1,.)\|_1^2 + \|u\,(.,\tau_2)\|_1^2 \right],$$

où $\beta\,(\mu) = \dfrac{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|, \left|1-|\mu_2|^2\right| \right)}{\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)}$, on obtient l'espace $\mathbb{E}_\mu^1$.

Notons par $\mathbb{E}$ l'espace de Hilbert

$$\mathbb{E} = L_2\,(D;H) \times \hat{H}^1\left([0,T_2]\,;W^{1/2}\right) \times \hat{H}^1\left([0,T_1]\,;W^{1/2}\right)$$

composé des éléments $F = (f,\varphi,\psi)$ tels que la norme

$$\| |F| \|^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_2^2$$

est finie.

$L_2(D;H)$ est l'espace des fonctions définies de D à valeurs dans H et à carré intégrable, muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle = \int_D (.,.)dt$ et de la norme correspondante notée par $\|.\|$.

$\hat{H}^1\left([0,T_2]\,;W^{1/2}\right) \times \hat{H}^1\left([0,T_1]\,;W^{1/2}\right)$ est le sous-espace fermé de $H^1\left([0,T_2]\,;W^{1/2}\right) \times H^1\left([0,T_1]\,;W^{1/2}\right)$ composé des éléments (φ,ψ), vérifiant (1.3).

1.3 Estimation a priori

Soit $L_\mu = (\mathcal{L}, l_{1\mu}, l_{2\mu})$ l'opérateur engendré par l'équation (1.1) et les conditions aux limites (1.2), agissant de $\mathbb{E}_\mu^1$ dans $\mathbb{E}$ et à domaine de définition $\mathcal{D}(L_\mu) = H^{1,1}\,(D;W^1)$.

Pour l'opérateur L_μ on établit le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Pour tout élément $u \in H^{1,1}(D;W^1)$, on a l'inégalité :*

$$\left|\left|\left| u \right|\right|\right|_1^2 \leq C \left|\left|\left| L_\mu u \right|\right|\right|^2, \tag{1.4}$$

où C est une constante positive indépendante de u et de μ.

Pour démontrer le théorème 1.3.1 on introduit le lemme suivant :

Lemme 1.3.1 *Soient $|.|$ la norme de H (ou de W^1 ou de $W^{1/2}$), g une fonction de variable $t \in [0,T]$ à valeurs dans H, μ est un nombre complexe de module $|\mu| \neq 1$ et soit h tel que :*

$$h = g(0) - \mu g(T). \tag{1.5}$$

Alors pour $|\mu| < 1$, on a l'inégalité :

$$|g(0)|^2 - \frac{1}{2}\left(1+|\mu|^2\right)|g(T)|^2 \leq \frac{(1+|\mu|^2)}{(1-|\mu|^2)}|h|^2, \tag{1.6}$$

et pour $|\mu| > 1$, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(1+|\mu|^2)|g(T)|^2 - |g(0)|^2 \leq \frac{(1+|\mu|^2)}{(|\mu|^2-1)}|h|^2. \tag{1.7}$$

Preuve.

Si $|\mu| < 1$, de (1.5) on a l'inégalité :

$$|g(0)|^2 \leq |\mu|^2 (1+\varepsilon)|g(T)|^2 + (1+\varepsilon^{-1})|h|^2,$$

en prenant $\varepsilon = \dfrac{1-|\mu|^2}{2|\mu|^2}$, on obtient l'inégalité (1.6).

Si $|\mu| > 1$, de (1.5) on a l'inégalité :

$$|\mu|^2 |g(T)|^2 \leq (1+\varepsilon)|g(0)|^2 + (1+\varepsilon^{-1})|h|^2,$$

en prenant $\varepsilon = \dfrac{|\mu|^2-1}{|\mu|^2+1}$, on obtient l'inégalité (1.7). □

Démonstration du théorème 1.3.1.

Multipliant scalairement dans H l'équation (1.1) par l'expression

$$Mu = sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign\left(1-|\mu_1|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_2},$$

on obtient :

$$sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right)+sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right)$$
$$=2\mathrm{Re}(\mathcal{L}u,Mu)-2\left|Mu\right|^2 \tag{1.8}$$

Intégrant l'inégalité (1.8) dans les rectangles $]0,\tau_1[\times]0,\tau_2[$, $]\tau_1,T_1[\times]\tau_2,T_2[$, $]0,\tau_1[\times]\tau_2,T_2[$ et $]\tau_1,T_1[\times]0,\tau_2[$ respectivement, $(0<\tau_1<T_1,\quad 0<\tau_2<T_2)$, on obtient les égalités :

$$\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_1=2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u,Mu)dt$$
$$+\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,0)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(0,t_2)\,dt_2-2\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left|Mu\right|^2dt, \tag{1.9}$$

$$-\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2=2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u,Mu)dt$$
$$-\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,T_2)\,dt_1-\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(T_1,t_2)\,dt_2-2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left|Mu\right|^2dt, \tag{1.10}$$

$$-\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2=2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u,Mu)dt$$
$$-\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,T_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(0,t_2)\,dt_2-2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}\left|Mu\right|^2dt, \tag{1.11}$$

$$\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\int_0^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2=2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u,Mu)dt$$
$$+\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,0)\,dt_1-\int_0^{\tau_2}F_2(T_1,t_2)\,dt_2-2\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left|Mu\right|^2dt, \tag{1.12}$$

où $F_i(t)=sign\left(1-|\mu_{3-i}|^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+|u|^2_{1/2}\right),\ \ (i=1,2)\,.$

On multiplie l'égalité (1.10) par $\frac{1}{4}(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)$, (1.11) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)$ et (1.12) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)$ puis, on somme les trois égalités obtenues avec l'égalité (1.9), on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right)\left[\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right)\left[\int\limits_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt+\frac{1}{4}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)\mathrm{Re}\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\mathrm{Re}\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{L}u,\ Mu)dt$$

$$+\int\limits_0^{\tau_1}\left[F_1(t_1,0)-\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)F_1(t_1,T_2)\right]dt_1$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left[F_1(t_1,0)-\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)(F_1(t_1,T_2)\right]dt_1$$

$$+\int\limits_0^{\tau_2}\left[F_2(0,t_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\left[F_2(0,t_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2.$$

$$-\left[2\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right.$$

$$\left.+(1+|\mu_1|^2)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt+\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right]. \qquad (1.13)$$

On pose

$$\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right)\left(\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)dt_1+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)dt_1\right),$$

$$\mathscr{I}_2(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right)\left(F_2(\tau_1,t_2)dt_2+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)dt_2\right),$$

$$\mathscr{I}_3(\tau_1,\tau_2)=2\mathrm{Re}\left(\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt+\frac{1}{4}\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{\tau_1}\int_{\tau_2}^{T_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\int_0^{\tau_2}(\mathcal{L}u,Mu)\,dt,$$

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2)=\int_0^{\tau_2}\left[F_2(0,t_2)-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}\left[F_2(0,t_2)-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)F_2(T_1,t_2)\right]dt_2,$$

$$\mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2) = \int_0^{\tau_1}\left[F_1(t_1,0) - \frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)F_1(t_1,T_2)\right]dt_1 +$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\left[F_1(t_1,0) - \frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)F_1(t_1,T_2)\right]dt_1,$$
$$\mathscr{I}_6(\tau_1,\tau_2) = \left[2\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt + \frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right.$$
$$\left.+(1+|\mu_1|^2)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1}|Mu|^2\,dt + \left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|Mu|^2\,dt\right].$$

L'égalité (1.13) peut être écrite sous la forme :

$$\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{I}_2(\tau_1,\tau_2) = \mathscr{I}_3(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2) - \mathscr{I}_6(\tau_1,\tau_2), \tag{1.14}$$

comme $\mathscr{I}_6$ est positif, (1.14) devient :

$$\mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 \leq \mathscr{I}_3 + \mathscr{I}_4 + \mathscr{I}_5, \tag{1.15}$$

On minore le membre gauche et on majore le membre droit de (1.15), en utilisant des estimations élémentaires ainsi que le lemme 1.3.1, on a :

$$\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2) =$$
$$\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right)sign\left(1-|\mu_1|^2\right)\left\{\int_0^{\tau_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1}dt_2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1}dt_2\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right)sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\left\{\int_0^{\tau_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right\},$$

d'où

$$\mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{I}_1(\tau_1,\tau_2) =$$
$$\frac{1}{2}\left|1-|\mu_1|^2\right|\left\{\int_0^{\tau_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2_{1/2}\right]_{t_1=\tau_1}dt_2\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{\tau_2}^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{2}\left|1-|\mu_2|^2\right|\left\{\int_0^{\tau_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right\}.$$

Comme $\frac{1}{2}\left(1+|\mu_i|^2\right)\geq\frac{1}{2}$, $(i=1,2)$ il résulte :

$$\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_2\geq\frac{1}{4}\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2\right.$$

$$\left.+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right). \qquad (1.16)$$

Revenant au membre droit.

on a :

$$\mathscr{I}_3\leq\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}2\left|(\mathcal{L}u,Mu)\right|dt. \qquad (1.17)$$

Pour majorer les termes $\mathscr{I}_4$ et $\mathscr{I}_5$, considèrons les deux cas suivants :

(i) $|\mu_2|<1$,

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_4 \;=\; &\int_0^{\tau_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Bigg|_{t_2=0}-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Bigg|_{t_2=T_2}\right.\\ &+\left.|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=0}-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=T_2}\right)dt_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\int_{\tau_1}^{T_1}&\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Bigg|_{t_2=0}-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Bigg|_{t_2=T_2}\right.\\ &+\left.|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=0}-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)|u|_{1/2}^2\Big|_{t_2=T_2}\right)dt_1.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.6) du lemme 1.3.1, il vient :

$$\mathscr{I}_4\leq\frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\int_0^{\tau_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=0}-\mu_2\,\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=T_2}\right|^2+\left|u|_{t_2=0}-\mu_2\,u|_{t_2=T_2}\right|_{1/2}^2\right)dt_1$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=0}-\mu_2\,\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=T_2}\right|^2+\left|u|_{t_2=0}-\mu_2\,u|_{t_2=T_2}\right|_{1/2}^2\right)dt_1,$$

d'après les conditions (1.2) on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_4 &\leq \left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\left[\int_0^{\tau_1}\left(|\psi'|^2+|\psi|_{1/2}^2\right)dt_2+\int_{\tau_1}^{T_1}\left(|\psi'|^2+|\psi|_{1/2}^2\right)dt_2\right] \quad (1.18)\\ &\leq \left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{1-|\mu_2|^2}\|\psi\|_1^2.\end{aligned}$$

(ii) $|\mu_2|>1$.

En utilisant l'inégalité (1.7) du lemme 1.3.1, on obtient :

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2)\leq\left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{|\mu_2|^2-1}\|\psi\|_1^2. \tag{1.19}$$

De (1.18) et (1.19) il en résulte que pour $|\mu_2|\neq 1$,

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2)\leq\left(1+|\mu_1|^2\right)\frac{1+|\mu_2|^2}{\left|1-|\mu_2|^2\right|}\|\psi\|_1^2. \tag{1.20}$$

D'une manière similaire, on obtient la majoration :

$$\mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2)\leq\left(1+|\mu_2|^2\right)\frac{1+|\mu_1|^2}{\left|1-|\mu_1|^2\right|}\|\varphi\|_2^2. \tag{1.21}$$

En sommant les inégalités (1.20) et (1.21) membre à membre on obtient :

$$\mathscr{I}_4(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{I}_5(\tau_1,\tau_2)\leq\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\frac{\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}. \tag{1.22}$$

En combinant les inégalités (1.16), (1.17) et (1.22), il résulte :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right)\\ &\leq\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|(\mathcal{L}u,Mu)|dt\\ &+\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

En utilisant l'ε-inégalité on obtient :

$$\frac{1}{4}\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right)$$

$$\leq \left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}|\mathcal{L}u|^2\,dt$$
$$+\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\left(\varepsilon_1^{-1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 dt+\varepsilon_2^{-1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 dt\right)$$
$$+\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}. \tag{1.24}$$

Divisant l'inégalité (1.24) par $\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)$, et choisissant :

$$\varepsilon_i=\frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)T_{3-i}}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)},\qquad (i=1,2)\,,$$

on obtient :

$$\frac{\beta(\mu)}{4}\left(\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1+\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2\right)$$
$$\leq \frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}|\mathcal{L}u|^2\,dt$$
$$+\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 dt$$
$$+\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}. \tag{1.25}$$

Pour majorer le terme

$$\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 dt,$$

on intègre l'inégalité (1.25) par rapport à τ_i de 0 à T_i, $(i=1,2)$ puis, on divise par T_1T_2 on obtient :

$$\frac{\beta(\mu)}{4T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 dt+\frac{\beta(\mu)}{4T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 dt$$
$$\leq \frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|\mathcal{L}u|^2\,dt\right.$$
$$+\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 dt$$

$$+\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}, \tag{1.26}$$

d'où, il vient :

$$\frac{\beta(\mu)}{8T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 dt+\frac{\beta(\mu)}{8T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 dt$$
$$\leq \frac{8\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|\pounds u|^2\,dt\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}\right). \tag{1.27}$$

En utilisant l'inégalité (1.27), l'estimation (1.25) devient :

$$\frac{\beta(\mu)}{4}\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right)$$
$$\leq \frac{16\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)(T_1+T_2)}{\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}|\mathcal{L}u|^2\,dt\right.$$
$$\left.+\frac{2\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right)}{\min(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|)}\right). \tag{1.28}$$

Multipliant (1.28) par

$$\frac{4\min\left(\left|1-|\mu_1|^2\right|,\left|1-|\mu_2|^2\right|\right)}{\left(1+|\mu_1|^2\right)\left(1+|\mu_2|^2\right)},$$

on obtient :

$$\beta(\mu)^2\left(\int_0^{T_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_1=\tau_1}dt_2+\int_0^{T_1}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+|u|_{1/2}^2\right]_{t_2=\tau_2}dt_1\right)$$
$$\leq 64(T_1+T_2)\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}|\mathcal{L}u|^2\,dt+8\left(\|l_{\mu_1}u\|_1^2+\|l_{\mu_2}u\|_2^2\right). \tag{1.29}$$

Le membre droit de (1.29) ne dépend pas de τ, donc en passant au sup sur $\tau\in D$, on obtient ainsi l'inégalité (1.4), où $C=64(T_1+T_2+1)$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.3.1.

1.3.1 Fermeture de l'opérateur L_μ

Proposition 1.3.1 *L'opérateur L_μ admet une fermeture de domaine de définition $\mathcal{D}(\overline{L_\mu}) = \overline{\mathcal{D}(L_\mu)}$.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(L_\mu)$ telle que :

$$u_n \to 0 \text{ dans } \mathbb{E}_\mu^1 \text{ et } \ L_\mu u_n \to F = (v_1, \varphi_1, \psi_1) \text{ dans } \mathbb{E}, \text{ quand } n \to \infty.$$

On montre que $F = (0,0,0)$.

Comme les opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont continus, on a alors :

$$l_{1\mu}u_n \to 0 \text{ et } l_{2\mu}u_n \to 0, \text{ quand n} \to \infty,$$

ce qui entraine que $\varphi_1 = \psi_1 = 0$.

Il reste à montrer que $v_1 = 0$.

Soit w un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(D; W^1)$, on a :

$$\langle v_1, w\rangle = \int\limits_D (v_1, w)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} (\mathcal{L}u_n, w)dt =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \left(u_n, \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} - Mw + sign\left[\left(1-|\mu_2|^2\right)\left(1-|\mu_1|^2\right)\right] Aw\right) dt = 0,$$

où $Mw = sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + sign\left(1-|\mu_1|^2\right)\dfrac{\partial w}{\partial t_2}$.

Donc $\langle v_1, w\rangle = 0$, pour tout $w \in C_0^\infty(D; W^1)$, qui est dense dans $L_2(D; H)$, ce qui implique que $v_1 = 0$.

D'où l'opérateur L_μ est fermable, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.3.1.

□

Comme les fonctions $u \in \mathcal{D}(\overline{L_\mu})$ sont des limites des fonctions $u_n \in \mathcal{D}(L_\mu)$, alors on peut prolonger l'inégalité (1.4) aux solutions fortes par passage à la limite, soit

$$|||\, u\, |||_1^2 \le C \left\|\overline{L_\mu}\ u\right\|^2; \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{L_\mu}). \tag{$\mathcal{K}$}$$

D'où on déduit :

Corollaire 1.3.1 *La solution forte du problème* (1.1)-(1.2) *quand elle existe est unique et dépend continûment du second membre* $F \in \mathbb{E}$.

Preuve. L'unicité de la solution est dûe à l'inégalité ($\mathcal{K}$).

Pour la dépendance continue de la solution forte des $F \in \mathbb{E}$, on suppose qu'il existe une solution forte $u = \left(\overline{L_\mu}\right)^{-1} F$ du problème $\overline{L_\mu} u = F$ et si de plus $\widetilde{u} = \left(\overline{L_\mu}\right)^{-1} \widetilde{F}$ est une autre solution du même problème, avec second membre $\widetilde{F}$, on a :

$$|||\, u - \widetilde{u}\, |||_1^2 \leq C \left|\left|\left|\overline{L_\mu}\ \ (u - \widetilde{u})\right|\right|\right|^2 = C \left|\left|\left|F - \widetilde{F}\right|\right|\right|^2,$$

ce qui signifie qu'une faible variation du second membre F n'entraîne qu'une faible variation de la solution. □

Corollaire 1.3.2 *L'opérateur* $\overline{L_\mu}$ *admet un inverse borné sur son image* $\mathcal{R}(\overline{L_\mu})$.

Corollaire 1.3.3 *L'ensemble* $\mathcal{R}(\overline{L_\mu})$ *est fermé dans* $\mathbb{E}$ *et* $\mathcal{R}(\overline{L_\mu}) = \overline{\mathcal{R}(L_\mu)}$.

Preuve. D'après la définition de $\overline{L_\mu}$, on a $\mathcal{R}(\overline{L_\mu}) \subset \overline{\mathcal{R}(L_\mu)}$.

On établit l'inclusion inverse.

Soit $F \in \overline{\mathcal{R}(L_\mu)}$, alors il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{E}_\mu^1$ telle que :

$$|||L_\mu u_n - F||| \to 0,\ \text{quand } n \to \infty.$$

On a :

$$|||u_p - u_q|||_1 \leq \sqrt{C}\, |||L_\mu u_p - L_\mu u_q)|||\,,\ \text{quand}\ \ p \text{ et }\ \ q \to \infty.$$

Ainsi u_n converge vers un élément $u \in \mathbb{E}_\mu^1$ et $\overline{L_\mu}\ u = F$. □

Ce corollaire nous permet d'affirmer que pour établir l'existence de la solution forte du problème (1.1)-(1.2), il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_\mu)$ dans $\mathbb{E}$.

1.4 Existence de la solution forte

Théorème 1.4.1 *L'ensemble $\mathcal{R}(L_\mu)$ est dense dans $\mathbb{E}$.*

Preuve. Soit $V = (v, \varphi_1, \psi_1)$ un élément orthogonal à $\mathcal{R}(L_\mu)$, alors pour tout $u \in H^{1,1}(D; W^1)$ on a :

$$\langle L_\mu u, V\rangle_E = \langle \mathcal{L}u, v\rangle + \langle l_{\mu_1} u, \varphi_1\rangle_1 + \langle l_{\mu_2} u, \psi_1\rangle_1 = 0.$$

On démontre que $V = (0,0,0)$.
Comme $l_{\mu_1},\ l_{\mu_2}$ sont indépendants et les ensembles des images de ces opérateurs sont partout denses dans les espaces correspondants, alors pour démontrer que $V = (0,0,0)$, il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.4.1 *Si pour tout $v \in L_2(D; H)$, on a*

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D; W) = \left\{u \in H^{1,1}(D; W^1) : l_{\mu_1} u = 0,\ l_{\mu_2} u = 0\right\}.$$

Alors $v = 0$.

Preuve. on a

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + Mu + sign\left[\left(1 - |\mu_2|^2\right)\left(1 - |\mu_1|^2\right)\right] Au, v\right\rangle = 0, \tag{1.30}$$

on pose $\delta_i = \left(1 - |\mu_i|^2\right)$, $(i = 1, 2)$ et

$$v = A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 Ah}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad Ah = w,$$

où h peut être considéré comme une fonction arbitraire de $\widetilde{H}_0^{1,1}(D; W^1)$ avec

$$\widetilde{H}_0^{1,1}(D; W^1) = \left\{u \in H^{1,1}(D; W^1) : \widetilde{l_{\mu_1}} u = 0,\ \widetilde{l_{\mu_2}} u = 0\right\}$$

et w est la solution du problème :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} = v, \tag{1.31}$$

$$\begin{cases} \widetilde{l_{\mu_1}} w = \overline{\mu_1}\ w|_{t_1=0} - w|_{t_1=T_1} = 0, \\ \widetilde{l_{\mu_2}} w = \overline{\mu_2}\ w|_{t_2=0} - w|_{t_2=0} = 0. \end{cases} \tag{1.32}$$

En remplaçant v par $A\dfrac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}$ dans (1.30), on a :

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign\,(\delta_2)\,\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign\,(\delta_1)\,\frac{\partial u}{\partial t_2} + sign\,(\delta_1\delta_2)\,Au, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} \right\rangle = 0,\ \forall u \in H_0^{1,1}(D;W^1). \tag{1.33}$$

D'après les égalités :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = \left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right), \tag{1.34}$$

$$\left(sign(\delta_2)\frac{\partial u}{\partial t_1}, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_2)A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right), \tag{1.35}$$

$$\left(sign(\delta_1)\frac{\partial u}{\partial t_{21}}, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1)A\frac{\partial h}{\partial t_2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_1)A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right), \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}\left(sign(\delta_1\delta_2)Au, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial t_2}\left(Au, sign(\delta_1\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\\ -\frac{\partial}{\partial t_1}\left(A\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right) &+ \left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right),\end{aligned} \tag{1.37}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sign\,(\delta_2)\,\frac{\partial u}{\partial t_1} + sign\,(\delta_1)\,\frac{\partial u}{\partial t_2} + sign\,(\delta_1\delta_2)\,Au, A\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} \right\rangle\\
&= \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right)dt +\\
&+\int_0^{T_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1 + \int_0^{T_1}\left(Au, sign(\delta_1\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1\\
&+\int_0^{T_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1)A\frac{\partial h}{\partial t_2}\right)\Bigg|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 - \int_0^{T_2}\left(A\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_2\\
&-\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_2)\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right)dt - \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_1)\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right)dt\\
&+\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right)dt = 0.\end{aligned} \tag{1.38}$$

Comme $u \in H_0^{1,1}(D;W^1)$ et $h \in \widetilde{H}_0^{1,1}(D;W^1)$, alors on a :

$$u\big|_{t_1=0} = \mu_1\, u\big|_{t_1=T_1}, \quad u\big|_{t_2=0} = \mu_2\, u\big|_{t_2=T_2}$$

$$\overline{\mu_1}\, h\big|_{t_1=0} = h\big|_{t_1=T_1}, \quad \overline{\mu_2}\, h\big|_{t_2=0} = h\big|_{t_2=T_2},$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\mu_2\, \frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=T_2}, sign(\delta_2)A\, \frac{\partial h}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=0}\right)\Bigg| \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=T_2}, sign(\delta_2)\overline{\mu_2}A\, \frac{\partial h}{\partial t_1}\Bigg|_{t_2=0}\right)\Bigg| \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=T_2},
\end{aligned}$$

il résulte :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, sign(\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0. \tag{1.39}$$

Par un calcul similaire on obtient :

$$\left(Au, sign(\delta_1\delta_2)A\frac{\partial h}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0, \tag{1.40}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1)A\frac{\partial h}{\partial t_2}\right)\Bigg|_{t_1=0}^{t_1=T_1} = 0, \tag{1.41}$$

$$\left(A\frac{\partial u}{\partial t_2}, sign(\delta_1\delta_2)Ah\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0. \tag{1.42}$$

Alors de (1.38)-(1.42) il vient :

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}, \frac{\partial^2 h}{\partial t_1\partial t_2} - sign(\delta_2)\frac{\partial h}{\partial t_1} - sign(\delta_1)\frac{\partial h}{\partial t_2} + sign(\delta_1\delta_2)Ah\right) = 0.\ \forall u \in H_0^{1,1}(D;W^1) \tag{1.43}$$

Comme $u \in H^{1,1}(D;W^1)$ alors l'ensemble $\left\{A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right\}$ est dense dans $L_2(D;H)$, ce qui nous permet de déduire à partir de (1.43) :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t_1\partial t_2} - sign(\delta_2)\frac{\partial h}{\partial t_1} - sign(\delta_1)\frac{\partial h}{\partial t_2} + sign(\delta_1\delta_2)Ah = 0 \tag{1.44}$$

Soit $\widetilde{L}_\mu$ l'opérateur engendré par l'équation

$$\widetilde{\mathcal{L}}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - sign(\delta_2)\frac{\partial u}{\partial t_1} - sign(\delta_1)\frac{\partial u}{\partial t_2} + sign(\delta_1\delta_2)Au, \tag{1.45}$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \widetilde{l_{\mu_1}}u &= \overline{\mu_1}\ u|_{t_1=0} - u|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ \widetilde{l_{\mu_2}}u &= \overline{\mu_2}\ u|_{t_2=0} - u|_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \end{aligned} \tag{1.46}$$

et $\mathbb{E}_1$ est l'espace de Hilbert

$$\mathbb{E}_1 = L_2(D,H) \times \widetilde{H^1}([0,T_1],W^1) \times \widetilde{H^1}([0,T_1],W^1)$$

où $\widetilde{H^1}([0,T_1],W^1) \times \widetilde{H^1}([0,T_1],W^1)$ est le sous-espace fermé de $H^1([0,T_1],W^1) \times H^1([0,T_1],W^1)$ composé des éléments (φ,ψ) vérifiant la condition :

$$\overline{\mu_2}\varphi(0) - \varphi(T_2) = \overline{\mu_1}\psi(0) - \psi(T_1).$$

Pour l'opérateur $\widetilde{L}_\mu = (\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{l_{\mu_1}}, \widetilde{l_{\mu_2}})$ de domaine de définition $\mathcal{D}(\widetilde{L}_\mu) = H^{1,1}(D;W^1)$ agissant de $\mathbb{E}^1_\mu$ dans $\mathbb{E}_1$, on établit le lemme suivant :

Lemme 1.4.2 *Pour tout élément $u \in H^{1,1}(D;W^1)$ on a l'estimation :*

$$|||u|||_1 \leq C_1 \left|\left|\left|\widetilde{L}_\mu u\right|\right|\right|, \quad \forall\ u \in H^{1,1}(D;W^1), \tag{1.47}$$

où C_1 est une constante positive indépendante de u et de μ.

Preuve. Multipliant scalairement dans H l'équation (1.45) par l'expression

$$M_1 u = -sign\left(1-|\mu_2|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_1} - sign\left(1-|\mu_1|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t_2},$$

Puis intégrant l'égalité obtenue dans les rectangles $]0,\tau_1[\times]0,\tau_2[$, $]\tau_1,T_1[\times]\tau_2,T_2[$, $]0,\tau_1[\times]\tau_2,T_2[$ et $]\tau_1,T_1[\times]0,\tau_2[$ respectivement, on obtient les quatre égalités suivantes

$$\begin{aligned} -\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1 - \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_1 &= 2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\widetilde{\mathcal{L}}u, M_1u)dt \\ -\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,0)\,dt_1 - \int_0^{\tau_2} F_2(0,t_2)\,dt_2 &- 2\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}|M_1u|^2\,dt, \end{aligned} \tag{1.48}$$

$$+\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2=2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt$$

$$+\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,0)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,t_2)\,dt_2-2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|^2\,dt, \tag{1.49}$$

$$+\int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2=2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt$$

$$+\int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,T_2)\,dt_1-\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,t_2)\,dt_2-2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1}|M_1u|^2\,dt, \tag{1.50}$$

$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{0}^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2=2\mathrm{Re}\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt$$

$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,0)\,dt_1\;+\int_{0}^{\tau_2} F_2(T_1,t_2)\,dt_2-2\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|^2\,dt, \tag{1.51}$$

Multipliant (1.48) par $\frac{1}{4}(1+|\mu_1|^2)(1+|\mu_2|^2)$, (1.50) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)$ et (1.51) par $\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)$, en sommant les quatre égalités obtenues, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(1-|\mu_2|^2\right)\left[\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-|\mu_1|^2\right)\left[\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int_{0}^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2+\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int_{0}^{\tau_2}\int_{0}^{\tau_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt+2\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt$$

$$+(1+|\mu_1|^2)\mathrm{Re}\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt+\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(\widetilde{\mathcal{L}}u,M_1u)dt$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int_{0}^{\tau_1}\left[(F_1(t_1,T_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)(F_1(t_1,0)\right]dt_1$$

$$+\int_{\tau_1}^{T_1}\left[(F_1(t_1,T_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)(F_1(t_1,0)\right]dt_1$$

$$+\frac{1}{2}(1+|\mu_2|^2)\int_{0}^{\tau_2}\left[F_2(T_1,t_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(0,t_2)\right]dt_2$$

$$+\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\left[F_2(T_1,t_2)-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)F_2(0,t_2)\right]dt_2.$$

$$-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\left(1+|\mu_2|^2\right)\mathrm{Re}\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_0^{\tau_1}|M_1u|\,dt-\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|\,dt$$

$$-\frac{1}{2}(1+|\mu_1|^2)\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1}|M_1u|\,dt-\frac{1}{2}\left(1+|\mu_2|^2\right)\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|M_1u|\,dt.$$

Puis, en utilisant des techniques analogues à celles utilisées pour démontrer le théorème 1.3.1 on établit l'inégalité (1.47).

On revient à (1.44), de (1.47) on déduit que $h=0$ d'où $v=0$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.4.1. □

D'où le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.1 *Pour tout élément $F=(f,\varphi,\psi)\in\mathbb{E}$, il existe une seule solution forte du problème* (1.1)-(1.2) *et est vérifié l'inégalité suivante :*

$$|\|u\||_1\le C\,|\|L_\mu u\||\,,\ \forall u\in H^{1,1}(D;W^1), \tag{1.52}$$

où C est une constante positive indépendante de u et de μ.

1.5 Continuité de la solution par rapport aux paramètres

Soit $\mu_n = (\mu_{1n}, \mu_{2n})$ une suite convergente vers $\overset{0}{\mu} = \left(\overset{0}{\mu}_1, \overset{0}{\mu}_2\right)$ avec $|\mu_{in}| \neq 1$, pour tout n et $\left|\overset{0}{\mu}_i\right| \neq 1$, (i=1,2).
Soit $\mathbb{E}^1$ l'espace obtenu en complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{D}; W^1)$ par rapport à la norme

$$|||u|||^2_{\mathbb{E}^1} = \sup_{\tau \in D} \left[\int_0^{T_1} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + |u|^2_{1/2} \right)_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + |u|^2_{1/2} \right)_{t_1=\tau_1} dt_2 \right].$$

Théorème 1.5.1 *Soit* $(\mu_{1n}, \mu_{2n}) \underset{n\to\infty}{\to} \left(\overset{0}{\mu}_1, \overset{0}{\mu}_2\right)$*, alors* $\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} \to \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}$ *au sens de la convergence simple.*

Preuve. Pour démontrer ce théorème, il suffit d'établir les propriétés suivantes :
i)

$$\sup \left\| (L_{\mu_n})^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{E}^1)} < \infty$$

ii)

$$\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} \to \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} \text{ dans un espace } \mathscr{M} \text{ dense dans } \mathbb{E}.$$

D'après l'inégalité $(\mathcal{K})$ pour l'opérateur L_{μ_n} on a l'estimation : :

$$|||u|||^2_1 \leq C \left|\left|\left| \overline{L_{\mu_n}} u \right|\right|\right|^2, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\mu_n}}). \tag{1.53}$$

Comme la constante C ne dépend pas de μ_n et la norme de $\mathbb{E}^1_{\mu_n}$ est minorée par la norme de $\mathbb{E}^1$ avec une constante qui ne dépend pas de μ_n, alors à partir de (1.53) on obtient :

$$|||u|||^2_{E^1} \leq C' \left|\left|\left| \overline{L_{\mu_n}} u \right|\right|\right|^2, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\mu_n}}), \tag{1.54}$$

où C' est une constante positive indépendante de u et de μ_n.
Posant $\mathscr{M} = \mathcal{R}(L_{\overset{0}{\mu}})$. Pour $F \in \mathscr{M}$, on a :

$$\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \in \mathcal{D}(\overline{L_{\mu_n}})$$

De l'inégalité (1.54) on déduit :

$$\left|\left|\left| \left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \right|\right|\right|^2_{E^1} \leq C' \left|\left|\left| F - \overline{L_{\mu_n}} \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \right|\right|\right|^2, \tag{1.55}$$

Posant $\left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F = h$. Alors pour n suffisamment grand, on a :

$$\left\|\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F\right\|_{E^1}^2 \leq C' \left\|\overline{L_{\overset{0}{\mu}}} h - \overline{L_{\mu_n}} h\right\|_{E^1}^2$$

$$\leq C'[\left|\overset{0}{\mu}_1 - \mu_{1n}\right|^2 \|h\|_1^2|_{t_1=T_1} + \left|\overset{0}{\mu}_2 - \mu_{2n}\right|^2 \|h\|_1^2|_{t_2=T_2}]. \tag{1.56}$$

De l'inégalité (1.56) on déduit :

$$\left\|\left(\overline{L_{\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F\right\|_{E^1}^2 \to 0 \text{ quand } \mu_{1n} \to \overset{0}{\mu}_1 \text{ et } \mu_{2n} \to \overset{0}{\mu}_2 \ \forall F \in \mathscr{M}.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.5.1. □

Chapitre 2

Etude d'une classe d'équations d'évolution multi-temporelles avec conditions aux limites non locales

2.1 Position du problème

Soit $D =]0, T_1[\times]0, T_2[$ un rectangle borné $\mathbb{R}^2$ de variable $t = (t_1, t_2)$ et soit H un espace de Hilbert, où la norme et le produit scalaire sont respectivement notés par $|.|$ et $(.,.)$.
On considère dans H le problème aux limites suivant :

$$\mathcal{L}_\lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)\left(u + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f(t), \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} l_{1\mu} u = B_1(\mu) u \mid_{t_1=0} - B_2(\mu) u \mid_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2], \\ l_{2\mu} u = B_1(\mu) u \mid_{t_2=0} - B_2(\mu) u \mid_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1], \end{cases} \tag{2.2}$$

où u et f sont des fonctions de variable $t = (t_1, t_2) \in D$ et à valeurs dans H, λ est un paramètre réel positif.
$A(t)$ est un opérateur linéaire dans H, non-borné, à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ indépendant de t partout dense dans H. De plus, l'opérateur $A(t)$ et auto-adjoint et vérifie la condition :
Condition $(\mathcal{A}_1)$

$$(A(t)u, u) \geq c_0 |u|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \in \overline{D},$$

où c_0 est une constante positive indépendante de u et de t.

$B_1(\mu)$ et $B_2(\mu)$ sont deux familles d'opérateurs bornés dans H, dépendant d'un paramètre complexe μ. $\mathcal{D}(A)$ est invariant par ses opérateurs i.e. $B_i(\mu)(\mathcal{D}(A)) \subseteq \mathcal{D}(A)$. De plus les opérateurs $B_i(\mu)\,(i=1,2)$ vérifient une des conditions suivantes :

Condition $(\mathcal{B}_1)$ L'opérateur $B_1(\mu)$ admet un inverse borné $B_1^{-1}(\mu)$ dans H, tel que :

$$\alpha_1 = \|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H)} \exp(3C(T_1+T_2)) < 1,$$

Condition $(\mathcal{B}_2)$ L'opérateur $B_2(\mu)$ admet un inverse borné $B_2^{-1}(\mu)$ dans H, tel que :

$$\alpha_2 = \|B_2^{-1}(\mu)B_1(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H} \exp(3C(T_1+T_2)) < 1,$$

où C est une constante positive dépendante de $A(t)$ et de ces dérivées.

φ et ψ sont des fonctions définies de $[0,T_2]$ et $[0,T_1]$ respectivement, à valeurs dans H et vérifient la condition :

$$B_1(\mu)\varphi(0) - B_2(\mu)\varphi(T_2) = B_1(\mu)\psi(0) - B_2(\mu)\psi(T_1). \tag{2.3}$$

2.2 Espaces fonctionnels

Pour l'étude du problème considéré, on introduit les espaces fonctionnels suivants :

On définit sur l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ la norme :

$$|u|_1 = |A(0)u|,$$

on obtient ainsi l'espace de Hilbert W^1.

De manière analogue, on définit sur $\mathcal{D}(A^{1/2})$ la norme

$$|u|_{1/2} = |A^{1/2}(0)u|,$$

on obtient l'espace de Hilbert $W^{1/2}$.

Remarques.

Les opérateurs $A(0)$ et $A(t)$ (resp. $A^{1/2}(0)$ et $A^{1/2}(t)$) sont bornés de W^1 (resp. $W^{1/2}$) dans H. i.e. $A(0)$ et $A(t) \in \mathcal{L}(W^1;H)$ (resp. $A^{1/2}(0)$ et $A^{1/2}(t) \in \mathcal{L}(W^{1/2};H)$).

D'après les propriétés de l'opérateur $A(t)$ on a les inclutions topologiques suivantes :

$$W^1 \subset W^{1/2} \subset H.$$

De plus W^1 est partout dense dans $W^{1/2}$ et dans H.

On note par $H^{1,1}(D;W^1)$ l'espace obtenu en complétant $\mathcal{C}^\infty(\overline{D},W^1)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{1,1}^2 = \int\limits_D \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|_1^2 + |u|_1^2 \right) dt.$$

Soit $H^{1,1}(D;H)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{C}^\infty(\overline{D};H)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{1,1}^2 = \int\limits_D \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + |u|^2 \right) dt.$$

Soit $H^1([0,T_1];W^{1/2})$ l'espace obtenu en complétant $\mathcal{C}^\infty([0,T_1];W^{1/2})$, par rapport à la norme

$$\|\psi\|_1^2 = \int\limits_0^{T_1} \left(\left|\psi'\right|^2 + |\psi|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda \left|\psi'\right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda \left|\psi\right|_1^2 + \lambda^2 \left|\psi'\right|_1^2 \right) dt_1.$$

De manière analogue on construit l'espace $H^1([0,T_2];W^{1/2})$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_2^2 = \int\limits_0^{T_2} \left(\left|\varphi'\right|^2 + |\varphi|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda \left|\varphi'\right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda \left|\varphi\right|_1^2 + \lambda^2 \left|\varphi'\right|_1^2 \right) dt_2.$$

En complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{D};W^1)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned} |||u|||_1^2 \;&=\; \frac{\theta_i(\mu)}{\lambda+1} \left[\int\limits_D \left(\lambda \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \lambda^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda^3 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 \right) dt \right. \\ &\qquad \left. + \sup_{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in D} \left(\|u(\tau_1,.)\|_2^2 + \|u(.,\tau_2)\|_1^2 \right) \right], \end{aligned}$$

où $\theta_i(\mu) = \dfrac{(\alpha_i(1-\alpha_i))^2}{(1+\alpha_i)^4(1+\|B_i^{-1}(\mu)\|_{\mathscr{L}(H)}^2)}$, (i=1, 2), selon que soit satisfaite la condition $(\mathcal{B}_1)$ ou $(\mathcal{B}_2)$, on obtient l'espace $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}$.

On note par $\mathbb{E}$ l'espace de Hilbert :

$$L_2(D;H) \times \widetilde{H}^1([0,T_2];W^{1/2}) \times \widetilde{H}^1([0,T_1];W^{1/2})$$

composé des éléments $\mathcal{F} = (f,\varphi,\psi)$ tels que la norme

$$|||\mathcal{F}|||^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_2^2$$

est finie, où le symbole $\|.\|$ désigne la norme de $L_2(D;H)$.

$\widetilde{H}^1([0,T_2];W^{1/2}) \times \widetilde{H}^1([0,T_1];W^{1/2})$ est le sous-espace fermé de $H^1([0,T_2];W^{1/2}) \times H^1([0,T_1];W^{1/2})$ composé des éléments (φ,ψ) vérifiant (2.3).

Proposition 2.2.1 [17] *Si la fonction* $\overline{D} \ni t \longmapsto A(t) \in \mathcal{L}(W^1; H)$ *est continue par rapport à la topologie de la convergence simple dans* $\mathcal{L}(W^1; H)$*, alors il existe des constantes positives* c_1 *et* c_2 *telles que :*

$$c_1|u|_1 \quad \leq |A(t)u| \leq \quad c_2|u|_1, \quad \forall u \in W^1, \tag{2.4}$$

$$\sqrt{c_1}\,|u|_{1/2} \quad \leq |A^{1/2}(t)u| \leq \quad \sqrt{c_2}\,|u|_{1/2}, \quad \forall u \in W^{1/2}. \tag{2.5}$$

Proposition 2.2.2 *Si la fonction* $\overline{D} \ni t \longmapsto A(t) \in \mathcal{L}(W^1; H)$ *possède des dérivées bornées par rapport à* t_1 *et* t_2 *au sens de la topologie de la convergence simple dans* $\mathcal{L}(W^1; H)$*, alors on a les estimations :*

$$\left\| \frac{\partial A(t)^{1/2}}{\partial t_i} A(t)^{-1/2} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq \delta \left\| \frac{\partial A(t)}{\partial t_i} A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)}, \ (i = 1, 2), \tag{2.6}$$

où $\delta = \int_0^\infty \dfrac{\sqrt{s}}{(1+s)^2} ds.$

De plus, les opérateurs $\dfrac{\partial A(t)}{\partial t_i} A(t)^{-1}$ *et* $\dfrac{\partial A(t)^{1/2}}{\partial t_i} A(t)^{-1/2}$ *sont uniformément bornés.*

Preuve. Pour la démonstration de (2.6) voir ([55], Lemme 1.9, page 186).
On démontre que $\dfrac{\partial A(t)}{\partial t_i} A(t)^{-1}$ est uniformément borné.
D'après le principe de la borne uniforme on a :

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \frac{\partial A(t)}{\partial t_i} \right\|_{\mathcal{L}(W^1, H)} \leq c'_i, \qquad (i = 1, 2), \tag{2.7}$$

de (2.4) et (2.7) on obtient :

$$\left\| \frac{\partial A(t)}{\partial t_i} A^{-1}(t) \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq c'_i c_1^{-1}, \qquad \forall t \in \overline{D}, \qquad (i = 1, 2), \tag{2.8}$$

d'où

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \frac{\partial A(t)}{\partial t_i} A^{-1}(t) \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq c'_i c_1^{-1} < \infty, \qquad (i = 1, 2). \tag{2.9}$$

Montrons que la fonction $D \ni t \to A^{1/2}(t) \in \mathcal{L}(W^{1/2}, H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2.

En effet :

$$\left| \frac{\partial A(t)^{1/2}}{\partial t_i} A(t)^{-1/2} v \right| \leq \quad \delta \ \left\| \frac{\partial A(t)}{\partial\, t_i} A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} |v|\,, \qquad (i = 1, 2). \tag{2.10}$$

On pose $v = A(t)^{1/2}u$, on obtient :

$$\left|\frac{\partial A(t)^{1/2}}{\partial t_i}u\right| \leq \quad \delta\ c_i' c_1^{-1}\left|A(t)^{1/2}u\right|, \qquad (i=1,2), \quad \forall \in u \in W^{1/2}, \tag{2.11}$$

de (2.5) on a :

$$\left|\frac{\partial A(t)^{1/2}}{\partial t_i}u\right| \leq \quad \delta\ c_i' c_1^{-1} c_2^{1/2}\left|u\right|_{1/2}, \quad \forall u \in W^{1/2}, \qquad (i=1,2), \tag{2.12}$$

de l'inégalité (2.12) on obtient :

$$\left\|\frac{\partial A^{1/2}(t)}{\partial t_i}\right\|_{\mathcal{L}(W^{1/2},H)} \leq b_i, \qquad (i=1,2),\ b_i = \delta\ '_i c_1^{-1} c_2^{1/2}, \tag{2.13}$$

d'où

$$\sup_{\overline{D}}\left\|\frac{\partial A^{1/2}(t)}{\partial t_i}\right\|_{\mathcal{L}(W^{1/2},H)} \leq b_i < \infty, \qquad (i=1,2). \tag{2.14}$$

De (2.9) et (2.6), on déduit que :

$$\sup_{\overline{D}}\left\|\frac{\partial A^{1/2}(t)}{\partial t_i}A^{-1/2}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)} < \infty.$$

□

2.3 Estimation a priori

Pour établir l'estimation a priori recherchée, on introduit la condition suivante :

Condition $(\mathcal{A}_2)$

$$\begin{cases} (1) \quad A(t_1,T_2) = A(t_1,0), \quad t_1 \in [0,T_1]; \\ (2) \quad A(T_1,t_2) = A(0,t_2), \quad t_2 \in [0,T_2]; \\ (3) \quad \dfrac{\partial^k A(t_1,0)}{\partial t_1^k}B_i(\mu)u = B_i(\mu)\dfrac{\partial^k A(t_1,0)}{\partial t_1^k}u, \quad (i=1,2),(k=0,1),\ u \in \mathcal{D}(A); \\ (4) \quad \dfrac{\partial^k A(0,t_2)}{\partial t_2^k}B_i(\mu)u = B_i(\mu)\dfrac{\partial^k A(0,t_2)}{\partial t_2^k}u, \quad (i=1,2),(k=0,1),\ u \in \mathcal{D}(A); \\ (5) \quad B_j(\mu)B_{3-j}(\mu)u = B_{3-j}(\mu)B_j(\mu)u, \qquad (j=1,\ 2),\ u \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

Pour l'opérateur $L_{\lambda,\mu} = (\mathcal{L}_\lambda, l_{1\mu}, l_{2\mu})$ engendré par l'équation (2.1) et les conditions aux limites (2.2), agissant de $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}$ dans $\mathbb{E}$ et à domaine de définition $\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu}) = H^{1,1}(D;W^1) \subset \mathbb{E}_{\lambda,\mu}$, on établit le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *On suppose que la fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathcal{L}(W^1; H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2 au sens de la topologie de la convergence simple de $\mathcal{L}(W^1; H)$ et soient réalisées les conditions $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ et $(\mathcal{B}_1)$ ou $(\mathcal{B}_2)$. Alors on a l'estimation :*

$$|||u|||_1^2 \leq S|||L_{\lambda,\mu}u|||^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D; W^1), \tag{2.15}$$

où S est une constante positive independante de λ, μ et de u.

Pour démontrer le théorème 2.3.1, on introduit les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 [Lemme de Gronwall].

$(P1)$ *Soient $v(t)$ et $F(t)$ deux fonctions non negatives, intégrables sur $]0, T[$, telles que la fonction $F(t)$ est non-décroissante. Alors de l'inégalité :*

$$v(t) \leq c_3 \int_0^t v(\tau)d\tau + F(t), \qquad c_3 > 0, \tag{$I1$}$$

découle l'estimation :

$$v(t) \leq \exp(c_3 t)F(t), \quad \forall t \in]0, T[.$$

$(P2)$ *Soient $w(t)$ et $G(t)$ deux fonctions non negatives, intégrables sur $]0, T[$, telles que la fonction $G(t)$ est non-décroissante. Alors de l'inégalité :*

$$w(t) \leq c_3 \int_t^T w(\tau)d\tau + G(t), \tag{$I2$}$$

on déduit :

$$w(t) \leq \exp(c_3(T - t))G(t), \quad \forall t \in]0, T[.$$

Lemme 2.3.2 [Lemme de Gronwall généralisé].

$(\mathcal{H}1)$ *Soient $v(t_1, t_2)$ et $F(t_1, t_2)$ deux fonctions non négatives, intégrables sur D, telles que la fonction $F(t_1, t_2)$ est non décroissante par rapport aux variables t_1 et t_2. Alors de l'inégalité :*

$$v(t_1, t_2) \leq c_3 \left\{ \int_0^{t_1} v(\tau_1, t_2)\, d\tau_1 + \int_0^{t_2} v(t_1, \tau_2)\, d\tau_2 \right\} + F(t_1, t_2), \quad (c_3 \geq 0), \tag{2.16}$$

se déduit l'estimation :

$$v(t_1, t_2) \leq \exp\Big(2c_3(t_1 + t_2)\Big)F(t_1, t_2), \quad \forall (t_1, t_2) \in D. \tag{2.17}$$

($\mathcal{H}2$) *Soient $w(t_1,t_2)$ et $G(t_1,t_2)$ deux fonctions non négatives, intégrables sur D, telles que la fonction $G(t_1,t_2)$ est non décroissante par rapport aux variables t_1 et t_2. Alors de l'inégalité*

$$w(t_1,t_2) \leq c_3 \left\{ \int\limits_{t_1}^{T_1} w(\tau_1,t_2)\,d\tau_1 + \int\limits_{t_2}^{T_2} w(t_1,\tau_2)\,d\tau_2 \right\} + G\left(t_1,t_2\right), \quad (c_3 \geq 0), \tag{2.18}$$

découle l'estimation :

$$w(t_1,t_2) \leq \exp\Big(2c_3(T_1+T_2-t_1-t_2)\Big) G(t_1,t_2), \quad \forall (t_1,t_2) \in D. \tag{2.19}$$

Preuve. Démontrons ($\mathcal{H}1$) et d'une manière analogue nous établissons ($\mathcal{H}2$).
Réecrivons l'inégalité (2.16) sous la forme :

$$v \leq c_3 J v + F, \tag{2.20}$$

où J est l'opérateur intégral

$$J(v)(t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_1} v(\tau_1,t_2)\,d\tau_1 + \int\limits_0^{t_2} v(t_1,\tau_2)\,d\tau_2.$$

En appliquant l'opérateur J à l'inégalité (2.20) et en multipliant le résultat obtenu par c_3, on obtient :

$$c_3 J v \leq c_3^2 J^2 v + c_3 J F,$$

ce qui donne :

$$v \leq c_3^2 J^2 v + c_3 J F + F. \tag{2.21}$$

En réitérant cette opération n fois, on obtient :

$$v \leq c_3^{n+1} J^{n+1} v + \sum_{k=0}^{k=n} c_3^k J^k F. \tag{2.22}$$

La fonction $F(t_1,t_2)$ est non négative et non décroissante par rapport aux variables t_1 et t_2, ce qui nous permet d'avoir l'estimation :

$$\sum_{k=0}^{k=n} c_3^k J^k(F)(t_1,t_2) \leq \sum_{k=0}^{k=n} \frac{c_3^k (t_1+t_2)^k F(t_1,t_2)}{n!}. \tag{2.23}$$

On a :

$$c_3^{n+1} J^{n+1}(v)(t_1,t_2) \leq \frac{c_3^{n+1} 2^{n+1} (t_1+t_2)^{n+1} |v|_\infty}{(n+1)!}. \tag{2.24}$$

En combinant (2.22)-(2.24) on obtient l'inégalité :

$$v(t_1,t_2) \leq \sum_{k=0}^{k=n} \frac{c_3^k (t_1+t_2)^k F(t_1,t_2)}{n!} + \frac{c_3^{n+1} 2^{n+1} (t_1+t_2)^{n+1} |v|_\infty}{(n+1)!}. \tag{2.25}$$

On a :

$$\frac{c_3^{n+1} 2^{n+1} (t_1+t_2)^{n+1} |v|_\infty}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

et

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{c_3^k (t_1+t_2)^k F(t_1,t_2)}{n!} \longrightarrow \exp\Big(c_3(t_1+t_2)\Big) F(t_1,t_2) \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

par passage à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ dans (2.25), on obtient l'inégalité (2.17). □

Lemme 2.3.3 [25] *Soit $|.|$ la norme dans H ou dans W^s, $(s = (1, \frac{1}{2}))$, soit g une fonction de la variable $t \in [0,T]$ à valeurs dans H et soit*

$$h = B_1(\mu) g(0) - B_2(\mu) g(T).$$

Alors si la condition $(\mathcal{B}_1)$ est réalisée, on a :

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_1)|g(0)|^2 - \|B_1^{-1}(\mu) B_2(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H)} |g(T)|^2 \leq \frac{(1+\alpha_1)\|B_1^{-1}(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H)}}{(1-\alpha_1)} |h|^2, \tag{2.26}$$

et si la condition $(\mathcal{B}_2)$ est satisfaite on a :

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_2)|g(T)|^2 - \|B_2^{-1}(\mu) B_1(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H)} |g(0)|^2 \leq \frac{(1+\alpha_2)\|B_2^{-1}(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H)}}{(1-\alpha_2)} |h|^2. \tag{2.27}$$

Démonstration du théorème 2.3.1. Multipliant scalairement dans H l'équation (2.1) par l'expression :

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + \lambda A(t)(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}),$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(F_2(t_1,t_2)) + \frac{\partial}{\partial t_2}(F_2(t_1,t_2)) = g(t), \tag{2.28}$$

où

$$F_1(t_1,t_2) = \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|A^{1/2} u\right|^2 + 2\lambda \left|A^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \lambda\,|A\,u|^2 + \lambda^2 \left|A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2,$$

$$F_2(t_1,t_2) = \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + \left|A^{1/2} u\right|^2 + 2\lambda \left|A^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + \lambda\,|A\,u|^2 + \lambda^2 \left|A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2,$$

$$g(t) = 2Re\,(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu) + 2Re(\frac{\partial A^{1/2}}{\partial t_1}u,\ A^{1/2}u) + 2\lambda Re(\frac{\partial A}{\partial t_1}u,\ Au)$$
$$+4\lambda Re(\frac{\partial A^{1/2}}{\partial t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}, A^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t_1}) + 2\lambda^2\, Re(\frac{\partial A}{\partial t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\ A\frac{\partial u}{\partial t_1})$$
$$+2Re(\frac{\partial A^{1/2}}{\partial t_2}u,\ A^{1/2}u) + 2\lambda Re(\frac{\partial A}{\partial t_2}u,\ Au)$$
$$+4\lambda Re(\frac{\partial A^{1/2}}{\partial t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}, A^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t_2}) + 2\lambda^2\, Re(\frac{\partial A}{\partial t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\ A\frac{\partial\, u}{\partial t_2})\,).$$

En intégrant l'identité (2.28) dans le rectangle $D_\tau =]0,\ \tau_1[\ \times\ ]0,\ \tau_2[\ \subset D$ on obtient :

$$\int_0^{\tau_1} F_1(\tau_1, t_2)\, dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1, t_2)\, dt_1 = \int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} g(t)dt + \int_0^{\tau_1} F_1(t_1, 0)\, dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(0, t_2)\, dt_2. \quad (2.29)$$

En utilisant les estimations (2.6) ainsi que quelques inégalités élémentaires, on obtient :

$$\int_0^{\tau_1} F_1(t_1, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1, t_2)\, dt_1 \le 2\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} |(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)|\, dt$$
$$+C\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} (F_1(t_1, t_2)\ + F_2(t_1, t_2))\, dt + \int_0^{\tau_1} F_1(t_1, 0)\, dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(0, t_2)\, dt_2, \quad (2.30)$$

où $C = \max(q_1, q_2)$, $\quad q_i = 2(\delta + 1)\left\|\dfrac{\partial A(t)}{\partial t_i}A^{-1}(t)\right\|_{\mathscr{L}(H)}$, $(i = 1, 2)$.

En répétant les mêmes opérations dans les rectangles : $]\tau_1, T_1[\ \times\ ]\tau_2, T_2[$, $]0, \tau_1[\ \times\ ]\tau_2, T_2[$ et $]\tau_1, T_1[\ \times\ ]0, \tau_2[$ respectivement, on obtient les trois inégalités suivantes :

$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1, \tau_2)\, dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1, t_2)\, dt_2 \le 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} |(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)|\, dt$$
$$+C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} (F_1(t_1, t_2)\ + F_2(t_1, t_2))\, dt - \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1, T_2)\, dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1, t_2)\, dt_2, \quad (2.31)$$

$$\int_0^{\tau_1} F_1(t_1, T_2)\, dt_1 + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1, t_2)\, dt_2 \le 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1} |(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)|\, dt$$

$$+C\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{\tau_1}(F_1(t_1,t_2)\ +F_2(t_1,t_2))\,dt+\int\limits_{0}^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int\limits_{\tau_2}^{T_2}F_2(0,t_2)\,dt_2, \tag{2.32}$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int\limits_{0}^{\tau_2}F_2(T_1,t_2)\,dt_2\leq 2\int\limits_{0}^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}|(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)|\,dt$$
$$+C\int\limits_{0}^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,t_2)\ +F_2(t_1,t_2))\,dt+\int\limits_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,0)\,dt_1+\int\limits_{0}^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2. \tag{2.33}$$

Dans ce qui suit, on suppose que la condition ($\mathcal{B}_1$) est réalisée, (le cas où $\mathcal{B}_2$ est réalisée est traité par la même méthodologie).

Appliquant ($\mathcal{H}1$) du lemme 2.3.2 à l'inégalité (2.30) on obtient :

$$\int\limits_{0}^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int\limits_{0}^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_1\leq\exp(2C(T_1+T_2))\left[\int\limits_{0}^{\tau_1}\int\limits_{0}^{\tau_2}2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)|\,dt\right.$$
$$\left.+\int\limits_{0}^{\tau_1}F_1(t_1,0)\,dt_1+\int\limits_{0}^{\tau_2}F_2(0,t_2)\,dt_2\right]. \tag{2.34}$$

On revient à l'inégalité (2.32). On fixe la variable τ_2 et on considère le membre gauche (2.32) comme étant une fonction d'une seule variable τ_1. Après l'application du lemme de Gronwall, on obtient :

$$-\exp(CT_1)\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\leq$$
$$\exp(CT_1)\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}2\,|(\ell_\lambda u,\ Mu)|\,dt+C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1}(F_1(t_1,t_2))\,dt\right.$$
$$\left.+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(0,t_2)\,dt_2\right]-\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,T_2)\,dt_1. \tag{2.35}$$

De manière analogue, en appliquant le lemme de Gronwall à l'inégalité (2.33), on obtient :

$$\int\limits_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\exp(CT_2)\int\limits_{0}^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\leq$$
$$\exp(CT_2)\left[\int\limits_{0}^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)|\,dt\ +C\int\limits_{0}^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}F_2(t_1,t_2)dt\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,0)\,dt_1\right]-\int\limits_{0}^{\tau_2}F_2(T_1,t_2)\,dt_2. \tag{2.36}$$

Multipliant (2.34) par $\frac{1}{4}(1+\alpha_1)^2 \exp C(T_1+T_2)$, (2.35) par $\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\alpha_1(\exp CT_2)$, (2.36) par $\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\alpha_1 \exp(CT_1)$ et (2.31) par α_1^2 puis, sommant les quatre inégalités obtenues. Après l'application de quelques estimations élémentaires, on trouve :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(1+\alpha_1)(1-\alpha_1)\exp(C(T_1+T_2))\left[\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right] \\
&+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\left[\exp(C(T_1))\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\exp(C(T_2))\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right] \\
&-\alpha_1^2\left[\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]\le \\
&\frac{1}{4}(1+\alpha_1)^2\exp(3C(T_1+T_2))\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)\right| dt \\
&+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)C\exp(C(T_1+T_2))\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,t_2)dt+\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t_1,t_2)dt\right] \\
&+\alpha_1^2 C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,t_2)+F_2(t_1,t_2))dt \\
&+\frac{1}{4}(1+\alpha_1)^2\exp(3C(T_1+T_2))\int_0^{\tau_1}(F_1(t_1,0)dt_1-\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(CT_2)\int_0^{\tau_1}(F_1(t_1,T_2)dt_1 \\
&+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(C(T_1+T_2))\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,0)dt_1-\alpha_1^2\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,T_2)dt_1 \\
&+\frac{1}{4}(1+\alpha_1)^2\exp(3C(T_1+T_2))\int_0^{\tau_2}(F_2(0,t_2)dt_2-\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(CT_1)\int_0^{\tau_2}(F_2(T_1,t_2)dt_2 \\
&+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(C(T_1+T_2))\int_{\tau_2}^{T_2}(F_2(0,t_2)dt_2-\alpha_1^2\int_{\tau_2}^{T_2}(F_1(T_1,t_2)dt_2. \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

On pose

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2)=&\frac{1}{4}(1+\alpha_1)(1-\alpha_1)\exp(C(T_1+T_2))\left[\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right] \\
&+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\left[\exp(C(T_1))\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\exp(C(T_2))\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right] \\
&-\alpha_1^2\left[\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right], \\
\mathscr{E}_2=&\frac{1}{4}(1+\alpha_1)^2\exp(3C(T_1+T_2))\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\ Mu)\right| dt, \\
\mathscr{E}_3(\tau_1,\tau_2)=&\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)C\exp(C(T_1+T_2))\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,t_2)dt+\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t_1,t_2)dt\right] \\
&+\alpha_1^2 C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,t_2)+F_2(t_1,t_2))dt,
\end{aligned}
$$

$$\mathscr{E}_4(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{4}(1+\alpha_1)^2\exp(3C(T_1+T_2))\int_0^{\tau_1}(F_1(t_1,0)dt_1-\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(CT_2)\int_0^{\tau_1}(F_1(t_1,T_2)dt_1$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(C(T_1+T_2))\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,0)dt_1-\alpha_1^2\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,T_2)dt_1,$$

et

$$\mathscr{E}_5(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{4}(1+\alpha_1)^2\exp(3C(T_1+T_2))\int_0^{\tau_2}(F_2(0,t_2)dt_2-\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(CT_1)\int_0^{\tau_2}(F_2(T_1,t_2)dt_2$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)\exp(C(T_1+T_2))\int_{\tau_2}^{T_2}(F_2(0,t_2)dt_2-\alpha_1^2\int_{\tau_2}^{T_2}(F_1(T_1,t_2)dt_2.$$

Alors, l'inégalité (2.37) devient :

$$\mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2)\le\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3(\tau_1,\tau_2)$$
$$+\mathscr{E}_4(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{E}_5(\tau_1,\tau_2). \qquad (\mathscr{E})$$

On minore le membre gauche de l'inégalité ($\mathscr{E}$) et on majore le membre droit en utilisant les lemmes 2.3.2 et 2.3.3 et en tenant compte de :

$$\exp C(T_1+T_2)>1,\exp C(T_1)>1,\exp C(T_1)>1$$
$$\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)-\alpha_1^2=\frac{1}{2}\alpha_1(1-\alpha_1),\quad \frac{1}{2}(1-\alpha_1)>\alpha_1,$$

on obtient :

$$\mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2)\ge\frac{1}{4}\,(1+\alpha_1)\,(1-\alpha_1)\left[\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right].$$

D'où

$$\mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2)\ge\frac{1}{2}\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_0^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right] \tag{2.38}$$

Revenant au membre droit de l'inégalité ($\mathscr{E}$), on a :

$$\mathscr{E}_3(\tau_1,\tau_2)\le\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)C\exp(C(T_1+T_2))\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1}F_1(t_1,t_2)dt+\int_0^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}F_2(t_1,t_2)dt\right] \tag{2.39}$$

$$\mathscr{E}_4(\tau_1,\tau_2)\le\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\left[\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\exp(3C(T_1+T_2))\int_0^{\tau_1}(F_1(t_1,0)dt_1-\alpha_1\int_0^{\tau_1}(F_1(t_1,T_2)dt_1\right]$$
$$+\alpha_1\left[\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\exp(3C(T_1+T_2))\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,0)dt_1-\alpha_1\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,T_2)dt_1\right]. \tag{2.40}$$

En utilisant quelques inégalités élémentaires, la condition ($\mathcal{A}2$), ainsi que l'inégalité (2.26) du lemme 2.3.3, on obtient :

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\left[\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\exp(3C(T_1+T_2))(F_1(t_1,0)-\alpha_1(F_1(t_1,T_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\exp(3C(T_1+T_2))\left[\frac{1}{2}(1+\alpha_1)(F_1(t_1,0)-\|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H)}(F_1(t_1,T_2)\right]$$

$$\leq \exp(3C(T_1+T_2))\frac{(1+\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)}\Gamma(\psi), \tag{2.41}$$

et

$$\alpha_1\left[\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\exp(3C(T_1+T_2))(F_1(t_1,0)-\alpha_1(F_1(t_1,T_2)\right].$$

$$=\alpha_1\exp(3C(T_1+T_2))\left[\frac{1}{2}(1+\alpha_1)(F_1(t_1,0)-\|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)\|^2_{\mathscr{L}(H)}(F_1(t_1,T_2)\right].$$

$$\leq 2\exp(3C(T_1+T_2))\alpha_1\frac{(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)}\Gamma(\psi). \tag{2.42}$$

De (2.41) et (2.42), on a :

$$\mathscr{E}_4(\tau_1,\tau_2)\leq \exp(3C(T_1+T_2))\frac{(1+\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)}\int_0^{\tau_1}\Gamma(\psi)dt_1$$

$$+2\exp(3C(T_1+T_2))\alpha_1\frac{(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)}\int_{\tau_1}^{T_1}\Gamma(\psi)dt_1. \tag{2.43}$$

De manière analogue on obtient la majoration :

$$\mathscr{E}_5(\tau_1,\tau_2)\leq \exp(3C(T_1+T_2))\frac{(1+\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathcal{L}(H)}\int_0^{\tau_2}\Gamma(\varphi)dt_2$$

$$+2\exp(3C(T_1+T_2))\alpha_1\frac{(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)}\int_{\tau_2}^{T_2}\Gamma(\varphi)dt_2, \tag{2.44}$$

où

$$\Gamma(\psi)=\left|\psi'\right|^2+\left|A(0,t_2)^{1/2}\psi\right|^2+\lambda\left|A(0,t_2)^{1/2}\psi'\right|^2+\lambda\left|A(0,t_2)\psi\right|^2+\lambda^2\left|A(0,t_2)\psi'\right|^2,$$

$$\Gamma(\varphi)=\left|\varphi'\right|^2+\left|A(0,t_2)^{1/2}\varphi\right|^2+\lambda\left|A(0,t_2)^{1/2}\varphi'\right|^2+\lambda\left|A(0,t_2)\varphi\right|^2+\lambda^2\left|A(0,t_2)\varphi'\right|^2.$$

En combinant les inégalités (2.38), (2.39), (2.43) et (2.44) on obtient :

$$\frac{1}{2}\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_0^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]\leq\frac{1}{4}\left(1+\alpha_1\right)^2\eta\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt$$

$$+\frac{(1+\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)}\eta(\int_0^{T_1}\Gamma(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}\Gamma(\varphi)dt_2)$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)C\eta\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1}F_1(t_1,t_2)dt+\int_0^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}F_2(t_1,t_2)dt\right], \tag{2.45}$$

où $\eta = \exp 3C(T_1+T_2)$.

Pour majorer le terme :

$$+\frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)C\eta\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1}F_1(t_1,t_2)dt+\int_0^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}F_2(t_1,t_2)dt\right],$$

on considère tout d'abord le cas :

$$0<\alpha_1<1\text{i.e.,}\quad \frac{1}{2}(1+\alpha_1)<(1-\alpha_1).$$

Alors, de l'inégalité (2.45) on a :

$$\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_0^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]\leq\frac{1}{2}\left(1+\alpha_1\right)^2\eta\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt$$

$$+2\frac{(1+\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{(H)}^2\eta\left(\int_0^{T_1}\Gamma(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}\Gamma(\varphi)dt_2\right)$$

$$+2C\eta\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1}F_1(t_1,t_2)dt+\int_0^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}F_2(t_1,t_2)dt\right]. \tag{2.46}$$

On remarque que l'inégalité (2.46) vérifie la condition ($\mathcal{H}2$) du lemme 2.3.2, avec

$$w(\tau_1,\tau_2)=\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_0^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]$$

et

$$G(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left(1+\alpha_1\right)^2\eta\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt,$$

$$+2\frac{(1+\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{(H)}^2\eta\left(\int_0^{T_1}\Gamma(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}\Gamma(\varphi)dt_2\right),$$

d'où, par application du lemme 2.3.2, on obtient :

$$\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_0^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]\leq\nu\left[\frac{1}{2}\left(1+\alpha_1\right)^2\eta\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\right.$$

$$\left.+2\frac{(1+\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)}\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{(H)}^2\eta\left(\int_0^{T_1}\Gamma(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}\Gamma(\varphi)dt_2\right)\right], \tag{2.47}$$

où $\nu=\exp(4C\eta(T_1+T_2))$.

En appliquant à (2.47) l'ε-inégalité, on obtient :

$$\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_0^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\right]$$

$$\leq \nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta\left[\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2+\varepsilon_1 \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_1(t) dt+\varepsilon_2 \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_2(t) dt\right]$$

$$+2\nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta \frac{\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{\mathscr{L}(H)}^2}{\left(1-\alpha_1\right)}\left(\int_0^{T_1} \Gamma(\psi) dt_1+\int_0^{T_2} \Gamma(\varphi) dt_2\right). \quad (2.48)$$

Intégrant l'inégalité (2.48) par rapport à τ_i de 0 à T_i, et choisissons $\varepsilon_i = \dfrac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{2\nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta T_{3-i}}$, $(i=1,2)$ puis, divisant par $T_1 T_2$, on obtient :

$$\frac{1}{T_2} \alpha_1(1-\alpha_1) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_1(t) dt+\frac{1}{T_1} \alpha_1(1-\alpha_1) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_2(t) dt$$

$$\leq \nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta \frac{2\nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta(T_1+T_2)}{\alpha_1(1-\alpha_1)}\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2$$

$$+\frac{1}{2T_2} \alpha_1(1-\alpha_1) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_1(t) dt+\frac{1}{2T_1} \alpha_1(1-\alpha_1) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_2(t) dt$$

$$+2\nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta \frac{\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{(H)}^2}{\left(1-\alpha_1\right)}\left(\int_0^{T_1} \Gamma(\psi) dt_1+\int_0^{T_2} \Gamma(\varphi) dt_2\right).$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2T_2} \alpha_1(1-\alpha_1) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_1(t) dt+\frac{1}{2T_1} \alpha_1(1-\alpha_1) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} F_2(t) dt$$

$$\leq \nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta \frac{2\nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta(T_1+T_2)}{\alpha_1(1-\alpha_1)}\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2$$

$$+2\nu\left(1+\alpha_1\right)^2 \eta \frac{\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{\mathscr{L}(H)}^2}{\left(1-\alpha_1\right)}\left(\int_0^{T_1} \Gamma(\psi) dt_1+\int_0^{T_2} \Gamma(\varphi) dt_2)\right). \quad (2.49)$$

En utilisant l'estimation (2.49), (2.48) devient :

$$\alpha_1(1-\alpha_1)\left[\int_0^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\, dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\, dt_2\right]$$

$$\leq 4\nu^2\eta^2 \frac{\left(1+\alpha_1\right)^4}{\alpha_1(1-\alpha_1)}(T_1+T_2)\left(1+\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{\mathscr{L}(H)}^2\right)\times$$

$$\left[\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2+\int_0^{T_1} \Gamma(\psi) dt_1+\int_0^{T_2} \Gamma(\varphi) dt_2\right]. \quad (2.50)$$

En vertu de (2.4) et (2.5) on a :

$$\min(1,c_1^2)\left(\|u(.,\tau_2)\|_1^2+\|u(\tau_1,.)\|_1^2\right) \leq \int_0^{T_1} F_1(t_1,\tau_2)\, dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,t_2)\, dt_2, \quad (2.51)$$

$$\int_0^{T_1}\Gamma(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}\Gamma(\varphi)dt_2\leq \max(1,c_2^2)(\|l_{1\mu}u\|_1^2+\|l_{2\mu}u\|_1^2). \tag{2.52}$$

D'après (2.51) et (2.52), (2.50) devient :

$$\frac{\alpha_1^2(1-\alpha_1)^2}{(1+\alpha_1)^4\,(1+\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{(H)}^2)}\left(\|u(.,\tau_2)\|_1^2+\|u(\tau_1,.)\|_1^2\right)$$

$$\leq S_1\left[\|\mathcal{L}_\lambda u\|^2+\|l_{1\mu}u\|_1^2+\|l_{2\mu}u\|_1^2\right], \tag{2.53}$$

où $S_1=4\nu^2\eta^2(T_1+T_2)\dfrac{\max(1,c_2^2)}{\min(1,c_1^2)}$.

Multipliant à présent l'équation (2.1) par $\sqrt{\lambda}$, d'après les propriétés de la norme, on a :

$$\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|^2+\lambda^2\left|A^{1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|^2+\lambda^3\left|A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|^2\leq 2\lambda\left(|Au|^2+|\mathcal{L}_\lambda u|^2\right).$$

En utilisant les estimations (2.4) et (2.5) on obtient :

$$\min(1,c_1^2)\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left(\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|^2+\lambda^2\left|A^{1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_{1/2}^2+\lambda^3\left|A\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_1^2\right)dt$$

$$\leq 2\lambda\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left(|Au|^2+|\mathcal{L}_\lambda u|^2\right)dt. \tag{2.54}$$

Majorant le premier terme du second membre de l'inégalité (2.54) grâce au second membre de l'inégalité (2.49), on obtient :

$$\frac{\alpha_1^2(1-\alpha_1)^2}{(1+\alpha_1)^4\,(1+\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|_{\mathcal{L}(H)}^2)(\lambda+1)}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left(\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|^2+\lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_{1/2}^2+\lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_1^2\right)dt.$$

$$\leq 4\theta^2\nu^2(T_1+T_2+1)\frac{\max(1,c_2^2)}{\min(1,c_1^2)}\left[\|\mathcal{L}_\lambda u\|^2+\|l_{1\mu}u\|_1^2+\|l_{2\mu}u\|_1^2\right]. \tag{2.55}$$

En combinant les inégalités (2.53) et (2.55) on obtient :

$$\frac{\theta_1(\mu)}{(1+\lambda)}\{\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}[\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|^2+\lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_{1/2}^2+\lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_1^2]dt$$

$$+\|u(.,\tau_2)\|_1^2+\|u(\tau_1,.)\|_1^2\Big)\}\leq S_2\left[\|\mathcal{L}_\lambda u\|^2+\|l_{1\mu}u\|_1^2+\|l_{2\mu}u\|_1^2\right], \tag{2.56}$$

où $S_2=8\nu^2\eta^2(T_1+T_2)^2\dfrac{\max(1,c_2^2)}{\min(1,c_1^2)}$.

En passant au sup par rapport à $\tau \in D$, on obtient l'estimation a priori (2.15).

On considère à présent le cas $\left(\frac{1}{3} < \alpha < 1\right)$. En utilisant le changement de variables $\beta = \frac{(1-\alpha)}{2}$, le fait que $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ implique que $0 < \beta < \frac{1}{3}$, ce qui entraîne que $\forall \alpha : 0 < \alpha < 1$ on a :

$$|||u|||_1^2 \leq S|||L_{\lambda,\mu}u|||^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D; W^1),$$

où $S = 32\nu^2\eta^2(T_1 + T_2)^2 \dfrac{\max(1, c_2^2)}{\min(1, c_1^2)}$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.3.1. $\square$

2.3.1 Fermeture de l'opérateur $L_{\lambda,\mu}$

L'opérateur $L_{\lambda,\mu}$ admet une fermeture de domaine de définition $\mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \overline{\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})}$. Comme les fonctions $u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}})$ sont des limites des fonctions $u_n \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$, alors on peut prolonger l'inégalité (2.15) aux solutions fortes par passage à la limite, soit

$$|||\, u \,|||_1^2 \leq S \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda,\mu}}\, u\right|\right|\right|^2; \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}}). \tag{$\mathscr{S}$}$$

D'où on déduit :

Corollaire 2.3.1 *La solution forte du problème (2.1)-(2.2) quand elle existe est unique et dépend continûment du second membre $F \in \mathbb{E}$.*

Corollaire 2.3.2 *L'opérateur $\overline{L_{\lambda,\mu}}$ admet un inverse borné sur son image $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}})$.*

Corollaire 2.3.3 *L'ensemble $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}})$ est fermé dans $\mathbb{E}$ et $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \overline{\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})}$.*

Ce corollaire nous permet d'affirmer que pour établir l'existence de la solution forte du problème (2.1)-(2.2), il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})$ dans $\mathbb{E}$.

2.4 Résolubilité du problème

Pour établir la densité de $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})$ dans $\mathbb{E}$, on introduit les opérateurs de régularisation suivants :

On pose $A_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A(t))$. Dans la proprosition suivante, on cite quelques propriétés de $A_\varepsilon(t)$:

Proposition 2.4.1 [19]

$\mathcal{P}$1) $(A_\varepsilon(t)u, u) \geq (1 + \varepsilon c_0)\,|u|^2\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \in \overline{D};$

$\mathcal{P}$2) $\lim A_\varepsilon(t)v = v, \quad$ *quand* $\varepsilon \to 0, \forall v \in H;$

$\mathcal{P}$3) $\|A_\varepsilon^{-1}(t)\| \leq 1;$

$\mathcal{P}$4) $\|\varepsilon A A_\varepsilon^{-1} v\| = \|(I - A_\varepsilon^{-1})v\| \to 0, \quad$ *quand* $\varepsilon \to 0, \quad \forall v \in H;$

$\mathcal{P}$5) $A_\varepsilon^{-1}(t)$ *est auto-adjoint et commute avec* $A(t)$.

On introduit aussi la condition :

Condition $(\mathcal{A}3)$ $\quad D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathcal{L}(W^1; H)$ admet des dérivées mixtes

$$\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t_1 \partial t_2} \text{ et } \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t_2 \partial t_1} \quad \text{telles que : } \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t_1 \partial t_2} A^{-1}(t) \text{ et } \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t_2 \partial t_1} A^{-1}(t) \in L_2(D; \mathcal{L}(H)).$$

Théorème 2.4.1 *Sous les conditions du théorème 2.3.1 et la condition* $(\mathcal{A}3)$*, l'ensemble* $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})$ *est dense dans* $\mathbb{E}$.

Preuve. Soit $V = (v, \xi, \chi)$ un élément orthogonal à $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})$, alors on a :

$$\langle L_{\lambda,\mu} u, V \rangle_{\mathbb{E}} = \langle \mathcal{L}_\lambda u, v \rangle + \langle l_{1\mu} u, \xi \rangle + \langle l_{2\mu} u, \chi \rangle = 0, \quad \forall u \in H^{1,1}(D, W^1).$$

On démontre que $V = (0, 0, 0)$.

Comme les opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont indépendants et leurs ensembles d'images sont denses dans les espaces correspondants, alors, il suffit de démontrer que si pour tout élément $v \in L_2(D; H)$ on a :

$$\langle \mathcal{L}_\lambda u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D; W^1),$$

alors $v = 0$, où $H_0^{1,1}(D; W^1) = \Big\{ u \in H^{1,1}(D; W^1) \,:\, l_{1\mu} u = 0,\ l_{2\mu} u = 0 \Big\}$.

On Commençe par traiter le cas $\lambda = 0$, puis, on établit la densité dans le cas général.

Première étape $\lambda = \mathbf{0}$.

Soit $\mathcal{L}_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)$ l'opérateur correpondant à la valeur $\lambda = 0$ et soit $v \in L_2(D; H)$, tel qu'on ait :

$$\langle \mathcal{L}_0 u, v\rangle = \langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)u, v\rangle = 0, \;\forall u \in H_0^{1,1}(D; W^1), \tag{2.57}$$

On pose $w = A_\varepsilon^{-1} v$ et $h = A_\varepsilon u$. Après substitution dans (2.57), on obtient :

$$\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}(B_{1\varepsilon}^* h) - \frac{\partial}{\partial t_2}(B_{2\varepsilon}^* h), w\rangle = -\langle h, (AA_\varepsilon^{-1} + B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1})v\rangle, \tag{2.58}$$

avec

$$B_{i\varepsilon}^*(t) = \varepsilon \frac{\partial A(t)}{\partial t_{3-i}} A_\varepsilon^{-1}(t), \quad (i = 1, 2), \qquad B_{0\varepsilon}^*(t) = \varepsilon \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t_1 \partial t_2} A_\varepsilon^{-1}(t).$$

"*" désigne le symbole de l'adjoint et h peut être considéré comme une fonction arbitraire de $H_0^{1,1}(D; H)$, où

$$H_0^{1,1}(D; H) = \Big\{ u \in H^{1,1}(D; H) \;:\; B_1(\mu)u\,|_{t_1=0} - B_2(\mu)u\,|_{t_1=T_1} = 0, \\ B_1(\mu)u\,|_{t_2=0} - B_2(\mu)u\,|_{t_2=T_2} = 0 \Big\}.$$

Remarque

Les opérateurs $B_{i\varepsilon}(t) \in \mathscr{L}(H), \quad (i = 1, 2)$. En effet :

$$\|B_{i\varepsilon}^*\|_{\mathscr{L}(H)} = \|B_{i\varepsilon}\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\| \varepsilon \frac{\partial A}{\partial t_{3-i}} A_\varepsilon^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\| \frac{\partial A}{\partial t_{3-i}} A^{-1} (I - A_\varepsilon^{-1}) \right\|_{\mathscr{L}(H)}$$

$$\leq \left\| \frac{\partial A}{\partial t_{3-i}} A^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \left\| (I - A_\varepsilon^{-1}) \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C, \quad (i = 1, 2). \tag{2.59}$$

L'équation (2.58) nous conduit à l'étude des opérateurs $\widetilde{\mathcal{L}}$ et $\widetilde{\mathcal{L}'}$ définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}'}) = H_0^{1,1}(D; H), \\ \widetilde{\mathcal{L}'} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \dfrac{\partial}{\partial t_1}(B_{1\varepsilon}^* u) - \dfrac{\partial}{\partial t_2}(B_{2\varepsilon}^* u). \end{cases} \tag{2.60}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \widetilde{H}_0^{1,1}(D;H) = \Big\{ u \in H^{1,1}(D;H) \ : \ B_1^*(\mu)u\mid_{t_1=0} - B_2^*(\mu)u\mid_{t_1=T_1} = 0, \\ \qquad\qquad B_1^*(\mu)u\mid_{t_2=0} - B_2^*(\mu)u\mid_{t_2=T_2} = 0 \Big\}., \\ \widetilde{\mathcal{L}}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \end{cases} \tag{2.61}$$

On montre que :

$$\langle \widetilde{\mathcal{L}'} v, u \rangle = \langle v, \widetilde{\mathcal{L}} u \rangle, \quad \forall u \in \widetilde{H}_0^{1,1}(D;H), \ \forall v \in H_0^{1,1}(D;H). \tag{2.62}$$

En effet, pour tout $v \in H_0^{1,1}(D,H)$ et $u \in \widetilde{H}_0^{1,1}(D,H)$, on a :

$$\langle \widetilde{\mathcal{L}'} v, u \rangle = \langle v, \widetilde{\mathcal{L}} u \rangle + \int_0^{T_2} \left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v, u)\right|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 - \int_0^{T_1} \left(v, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} u)\right|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1, \tag{2.63}$$

d'après la définition de $\widetilde{H}_0^{1,1}(D,H)$ et $H_0^{1,1}(D,H)$, on a :

$$\begin{aligned} &B_2^*(\mu)\, u\mid_{t_1=0} = B_1^*(\mu)\, u\mid_{t_1=T_1}, \qquad B_2^*(\mu)\, u\mid_{t_2=0} = B_1^*(\mu)\, u\mid_{t_2=T_2}, \\ &B_1(\mu)\, v\mid_{t_1=0} = B_2(\mu)\, v\mid_{t_1=T_1}, \qquad B_1(\mu)\, v\mid_{t_2=0} = B_2(\mu)\, v\mid_{t_2=T_2}\ . \end{aligned} \tag{2.64}$$

En tenant compte de (2.64), on a :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v, u\right)\Big|_{t_1=T_1} = \\ &= \left(\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v\right)\Big|_{t_1=T_1}, (B_1^*(\mu))^{-1} B_2^*(\mu)\, u|_{t_1=0} \right) \\ &= \left(B_2(\mu)\, B_1^{-1}(\mu) \left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v\right)\Big|_{t_1=T_1}, u|_{t_1=0} \right), \end{aligned}$$

d'après la condition($\mathcal{A}2$) et (2.64), on obtient :

$$B_2(\mu)\, B_1^{-1}(\mu) \left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v\right)\Big|_{t_1=T_1} = \left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v\right)\Big|_{t_1=0},$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v, u\right)\Big|_{t_1=T_1} = \left(\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v\right)\Big|_{t_1=0}, u|_{t_1=0} \right), \tag{2.65}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v, u\right)\Big|_{t_1=0}^{t_1=T_1} = 0.$$

Par un calcul similaire, on montre que :

$$\left(v, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} u\right)\Bigg|_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0. \tag{2.66}$$

A partir de (2.65) et (2.66), on déduit l'égalité (2.62).

On revient à (2.58), d'après (2.62) l'équation (2.58) signifie que pour tout $\varepsilon \neq 0$, w est la solution faible du problème

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}} w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon} \dfrac{\partial}{\partial t_1} w + B_{2\varepsilon} \dfrac{\partial}{\partial t_2} w = -(B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} + A A_\varepsilon^{-1}) v, \\ \widetilde{l}_{1\mu} w = B_2^*(\mu) w \mid_{t_1=0} - B_1^*(\mu) w \mid_{t_1=T_1} = 0, \\ \widetilde{l}_{2\mu} w = B_2^*(\mu) w \mid_{t_2=0} - B_1^*(\mu) w \mid_{t_2=T_2} = 0, \end{cases} \tag{2.67}$$

avec $v \in L_2(D; H)$.

2.4.1 Opérateurs $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L}'$

Soit $\mathbb{E}_0$ l'espace de Hilbert $L_2(D; H) \times H^1([0, T_2]; H) \times H^1([0, T_1]; H)$ composé des éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ tels que la norme

$$|||\mathcal{F}|||^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie,}$$

où $\widehat{H}^1([0, T_2]; H) \times \widehat{H}^1([0, T_1]; H)$ est le sous-espace fermé de $H^1([0, T_2]; H) \times H^1([0, T_1]; H)$ composé des éléments (φ, ψ) tels que :

$$B_2^*(\mu)\varphi(0) - B_1^*(\mu)\varphi(T_2) = B_2^*(\mu)\psi(0) - B_1^*(\mu)\psi(T_1),$$

et $H^1([0, T_1]; H)$ est l'espace obtenu par complétion de l'espace $\mathcal{C}^\infty([0, T_1]; H)$ par rapport à la norme

$$\|\psi\|_1^2 = \|\psi\|^2 + \|\psi'\|^2.$$

De manière analogue, on construit l'espace $H^1([0, T_2]; H)$.

Pour l'opérateur $\widetilde{L} = (\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{l}_{1\mu}, \widetilde{l}_{2\mu})$ agissant de $H^{1,1}(D; H)$ dans $\mathbb{E}_0$, on établit les résultats suivants :

Proposition 2.4.2 *Pour tout élément $u \in H^{1,1}(D; H)$ on a :*

$$(i) \left|\left|\left|\widetilde{L} u\right|\right|\right|^2 \leq K_1 \|u\|_{1,1}^2, \tag{2.68}$$

$$(ii)\ \|u\|_{1,1}^2 \leq K_2 \left\|\left|\widetilde{L}u\right|\right\|^2, \tag{2.69}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes positives indépendantes de u.

Preuve.

(i) D'après (2.59) et par une estimation de la norme de $\widetilde{\mathcal{L}}u$ dans H on a :

$$\left|\widetilde{\mathcal{L}}u\right|^2 = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 \leq \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \left|B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \left|B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right]^2$$
$$\leq 4\max(1, C^2)\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2\right],$$

ce qui donne

$$\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2 \leq 4\max(1, C^2)\,\|u\|_{1,1}^2\,, \quad \forall u \in H^{1,1}(D; H). \tag{2.70}$$

En vertu de l'inégalité (2.70) et de la continuité des opérateurs $\widetilde{l_{1\mu}}$ et $\widetilde{l_{2\mu}}$ de $H^{1,1}(D; H)$ dans $H^1([0, T_2]\,; H)$ et $H^1([0, T_1]\,; H)$ respectivement, on obtient l'estimation (2.68).

(ii) Pour démontrer l'inégalité (2.69), on multiplie scalairement l'équation $\widetilde{\mathcal{L}}u$ par $\dfrac{\partial u}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial t_2}$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + \frac{\partial}{\partial t_2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 = 2Re\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)$$
$$+2Re\left(-B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1} - B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)$$
$$+2Re\left(\widetilde{\mathcal{L}}u, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right). \tag{2.71}$$

En intégrant l'égalité (2.71) dans les rectangles $]0, \tau_1[\times]0, \tau_2[$, $]\tau_1, T_1[\times]\tau_2, T_2[$, $]0, \tau_1[\times]\tau_2, T_2[$ et $]\tau_1, T_1[\times]0, \tau_2[$ respectivement, et en appliquant la proposition 2.2.2 on obtient les inégalités :

$$\int_0^{\tau_1} F_1(t_1, \tau_2)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1, t_2)\,dt_1 \leq 2\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} |z(t)|\,dt$$
$$+C\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} \left(F_1(t_1, t_2)\ + F_2(t_1, t_2)\right)dt + \int_0^{\tau_1} F_1(t_1, 0)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(0, t_2)\,dt_2.$$

$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1, \tau_2)\,dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1, t_2)\,dt_2 \leq 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} |(z(t)|\,dt$$

$$+C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,t_2)\;+F_2(t_1,t_2))\,dt-\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,T_2)\,dt_1-\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(T_1,t_2)\,dt_2,$$

$$-\int_{0}^{\tau_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\le 2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1}|z(t)|\,dt$$

$$+C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1}(F_1(t_1,t_2)\;+F_2(t_1,t_2))\,dt-\int_{0}^{\tau_1}F_1(t_1,T_2)\,dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2}F_2(0,t_2)\,dt_2,$$

$$\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,\tau_2)\,dt_1-\int_{0}^{\tau_2}F_2(\tau_1,t_2)\,dt_2\le 2\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}|(z(t)|\,dt$$

$$+C\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}(F_1(t_1,t_2)\;+F_2(t_1,t_2))\,dt+\int_{\tau_1}^{T_1}F_1(t_1,0)\,dt_1\;-\int_{0}^{\tau_2}F_2(T_1,t_2)\,dt_2,$$

où $F_i(t)=\left|\dfrac{\partial u}{\partial t_i}\right|$, $(i=1,2)$ et $z(t)=\left(\widetilde{\mathcal{L}}u,\dfrac{\partial u}{\partial t_1}+\dfrac{\partial u}{\partial t_2}\right)$.
Ensuite, en utilisant des techniques analogues à celles utilisées pour avoir l'estimation (2.15), on obtient l'inégalité :

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2\le S_3\left\|\widetilde{L}u\right\|^2, \tag{2.72}$$

où $S_3=\dfrac{16\exp(16C\exp(3C(T_1+T_2))(T_1+T_2))(T_1+T_2)^2}{\theta_1(\mu)}$.
Par des techniques similaires, on établit l'inégalité :

$$\|u\|^2\le S_4\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2+\left\|\widetilde{l_{1\mu}u}\right\|_1^2+\left\|\widetilde{l_{2\mu}u}\right\|_1^2\right), \tag{2.73}$$

où $S_4=\dfrac{4(1+\left\|B_2(\mu)B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)})^4(1+\left\|B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathcal{L}(H)})(T_1+T_2)^2}{\left\|B_2(\mu)B_1^{-1}(\mu)\right\|^4_{\mathscr{L}(H)}(1-\left\|B_2(\mu)B_1^{-1}(\mu)\right\|^2_{\mathscr{L}(H)})^2}$.
En estimant la norme de $\widetilde{\mathcal{L}}u$ dans $L_2(D,H)$ on a :

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right\|^2\le 3\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2+3C^2\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2\right). \tag{2.74}$$

En combinant les inégalités (2.72)-(2.74), on obtient l'inégalité (2.69),

où $K_2=3(C^2+1)(S_3+1)(S_4+1)$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.4.2. □

Proposition 2.4.3 *L'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ dans $\mathbb{E}_0$.*

Preuve. D'après les inégalités (2.68) et (2.69), on déduit que l'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ dans le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\widetilde{L}) = \widetilde{L}\,(H^{1,1}(D;H))$. Il nous reste à montrer que $\mathcal{R}(\widetilde{L}) = \mathbb{E}_0$. Pour cela, on introduit la famille d'opérateurs $(\widetilde{L_\gamma})_{\gamma\in[0,\,1]} = (\widetilde{\mathcal{L}_\gamma}\,,\, \widetilde{l_{1\mu}}, \widetilde{l_{2\mu}})$ définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\widetilde{L_\gamma}) = H^{1,1}(D,\,H), \\ \widetilde{\mathcal{L}_\gamma} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + \gamma B u\,, \qquad \text{avec } Bu = B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \end{cases} \tag{2.75}$$

On considère tout d'abord le cas $\gamma = 0$, et on montre que $\mathcal{R}(\widetilde{L}_0) = \mathbb{E}_0$.

Par une procédure d'intégration simple, on montre que la solution du problème :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}_0} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = \widetilde{f}(t), \\ \widetilde{l_{1\mu}} u \equiv B_2^*(\mu) u \mid_{t_1=0} - B_1^*(\mu) u \mid_{t_1=T_1} = \widetilde{\varphi}\,(t_2)\,, \\ \widetilde{l_{2\mu}} u \equiv B_2^*(\mu) u \mid_{t_2=0} - B_1^*(\mu) u \mid_{t_2=T_2} = \widetilde{\psi}\,(t_1) \end{cases} \tag{2.76}$$

est donnée par l'expression :

$$u(t) = (B_2^*(\mu) - B_1^*(\mu))^{-1}\left(\widetilde{\varphi}(t_2) + \widetilde{\psi}(t_1) - B_2^*(\mu)\widetilde{\psi}(0) + B_1^*(\mu)\widetilde{\psi}(T_1)\right) + \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} \widetilde{f}(\tau)d\tau$$

$$+B_1^*(\mu)(B_2^*(\mu) - B_1^*(\mu))^{-1}\left(\int_0^{t_2}\int_0^{T_1} \widetilde{f}(\tau)d\tau + \int_0^{T_2}\int_0^{t_1} \widetilde{f}(\tau)d\tau + B_1^*(\mu)(B_2^*(\mu) - B_1^*(\mu))^{-1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \widetilde{f}(\tau)d\tau\right).$$

Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0}) = \mathbb{E}_0$. D'où, on en déduit que l'opérateur $\widetilde{L_0} = (\widetilde{\mathcal{L}_0}, \widetilde{l_{1\mu}}, \widetilde{l_{2\mu}})$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ dans $\mathbb{E}_0$.

Passant maintenant au cas général. On a :

$$\widetilde{L_\gamma} = \widetilde{L_{\gamma_0}} + (\gamma - \gamma_0)(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) \text{ avec } (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) = (B,\, \widetilde{l_{1\mu}}, \widetilde{l_{2\mu}}). \quad \gamma_0,\ \gamma \in [0,1]\,.$$

En vertu de la continuité des opérateurs B, $\widetilde{l_{1\mu}}$ et $\widetilde{l_{2\mu}}$, on a :

$$\left|\left|\left|(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u\right|\right|\right|^2 \leq K_3 \left\|u\right\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{2.77}$$

Pour continuer la démonstration, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *Pour tout élément $u \in H^{1,1}(D;H)$ on a :*

$$\left\|u\right\|_{1,1}^2 \leq K_4 \left|\left|\left|\widetilde{L_\gamma} u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H), \tag{2.78}$$

où K_4 est une constante positive indépendante de u et de γ.

Preuve. A partir de (2.69) on a :

$$\forall\gamma\in[0,1], \qquad \|u\|_{1,1}^{2}\leq K(\gamma)\left|\left\|\widetilde{L_\gamma}u\right\|\right|^{2}, \quad \forall u\in H^{1,1}(D;H). \tag{2.79}$$

On pose $h(\gamma)=\inf\limits_{u\in H^{1,1}(D;H)}\frac{\left|\left\|\widetilde{L_\gamma}u\right\|\right|}{\|u\|_{1,1}}$, et on montre que h est continue sur $[0,1]$.

Soit $\varepsilon>0$ et $\sigma=\frac{\varepsilon}{\sqrt{K_3}}$. Pour γ_0, $\gamma\in[0,1]$ tel que $|\gamma_0-\gamma|<\sigma$, on a :

$$\left|\left|\left\|\widetilde{L_\gamma}u\right\|\right|-\left|\left\|\widetilde{L_{\gamma_0}}u\right\|\right|\right|\leq\left|\left\|\widetilde{L_\gamma}u-\widetilde{L_{\gamma_0}}u\right\|\right|=|\gamma_0-\gamma|\left|\left\|\widetilde{L_1}u-\widetilde{L_0}u\right\|\right|$$

$$\leq\sigma\left|\left\|\widetilde{L_1}u-\widetilde{L_0}u\right\|\right|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{K_3}}\sqrt{K_3}\,\|u\|_{1,1}=\varepsilon\,\|u\|_{1,1},$$

ce qui implique :

$$\frac{\left|\left\|\widetilde{L_{\gamma_0}}u\right\|\right|}{\|u\|_{1,1}}-\varepsilon\leq\frac{\left|\left\|\widetilde{L_{\gamma_0}}u\right\|\right|}{\|u\|_{1,1}}\leq\frac{\left|\left\|\widetilde{L_{\gamma}}u\right\|\right|}{\|u\|_{1,1}}+\varepsilon. \tag{2.80}$$

Par passage à l'inf sur $H^{1,1}(D;H)$ dans (2.81), on obtient $|h(\gamma)-h(\gamma_0)|\leq\varepsilon$. Alors h est continue sur $[0,1]$, donc elle admet une borne inf, on désigne cette borne par $\frac{1}{\sqrt{K_4}}$, on trouve (2.79). □

On revient à l'équation

$$\widetilde{L_\gamma}u=F. \tag{$\mathfrak{F}$}$$

On suppose maintenant que $\mathcal{R}(\widetilde{L_{\gamma_0}})=\mathbb{E}_0$ et on montre que $\mathcal{R}(\widetilde{L_\gamma})=\mathbb{E}_0$ pour certains γ au voisinage de γ_0.

L'équation ($\mathfrak{F}$) peut être écrite sous la forme :

$$\widetilde{L_\gamma}u=\widetilde{L_{\gamma_0}}u+(\gamma-\gamma_0)(\widetilde{L_1}-\widetilde{L_0})u=F. \tag{2.81}$$

En appliquant l'opérateur $(\widetilde{L_{\gamma_0}})^{-1}$ aux deux membres de l'équation (2.82) on obtient :

$$u+(\gamma-\gamma_0)\left(\widetilde{L_{\gamma_0}}\right)^{-1}(\widetilde{L_1}-\widetilde{L_0})u=\left(\widetilde{L_{\gamma_0}}\right)^{-1}F. \tag{2.82}$$

De (2.79) et (2.78), on a :

$$\left\|\left(\widetilde{L_{\gamma_0}}\right)^{-1}F\right\|_{1,1}\leq\sqrt{K_4}\,|\|F\||,$$

$$\left\|\left(\widetilde{L_{\gamma_0}}\right)^{-1}(\widetilde{L_1}-\widetilde{L_0})u\right\|_{1,1}\leq\sqrt{K_4}\left|\left\|(\widetilde{L_1}-\widetilde{L_0})u\right\|\right|\leq\sqrt{K_4}\sqrt{K_3}\,\|u\|_{1,1}=K_5\,\|u\|_{1,1}. \tag{2.83}$$

on note par

$$\mathcal{T} = (\gamma - \gamma_0) \left(\widetilde{L_{\gamma_0}}\right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}), \quad \text{et} \;\; g = \left(\widetilde{L_{\gamma_0}}\right)^{-1} F,$$

alors l'équation (2.83) devient :

$$u + \mathcal{T}u = g. \tag{2.84}$$

Soit $\gamma \in [0,1]$ tel que $|\gamma_0 - \gamma| \leq \rho < \frac{1}{K_5}$, on a :

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{\|u\|_{1,1} \leq 1} \|\mathcal{T}u\|_{1,1} = |\gamma - \gamma_0| \left\| \left(\widetilde{L_{\gamma_0}}\right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u \right\|_{1,1} \leq |\gamma - \gamma_0| \, K_5 < 1,$$

d'où l'opérateur $(I + \mathcal{T})$ est inversible, et la solution de l'équation (2.85) est donnée par la série de Neumann :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{T}^n g. \tag{2.85}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_\gamma}) = \mathbb{E}_0, \;\; \forall \gamma : |\gamma_0 - \gamma| \leq \rho < \frac{1}{K_5}$.

On pose $\gamma_0 = 0$, comme on a déjà démontré que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0}) = \mathbb{E}_0$, on aura donc $\mathcal{R}(\widetilde{L_\gamma}) = \mathbb{E}_0, \quad \forall \gamma : 0 < \gamma \leq \rho$.

Prenant ensuite $\gamma_0 = \rho$ par la même procédure, on obtient $\mathcal{R}(\widetilde{L_\gamma}) = \mathbb{E}_0, \;\; \forall \gamma : 0 < \gamma \leq 2\rho$.

En avançant de cette manière et après un nombre fini de pas, on arrive à établir l'égalité $\mathcal{R}(\widetilde{L_\gamma}) = \mathbb{E}_0$ pour tout $\gamma \in [0,1]$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.4.3. □

Proposition 2.4.4 *L'opérateur $\widetilde{L} = \widetilde{\mathcal{L}}$ est fermé dans la topologie de $L_2(D;H)$.*

Preuve. Soit $(u_n) \subset \mathcal{D}(\widetilde{L}) = \widetilde{H}_0^{1,1}(D,H)$ telle que :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L_2(D;H), \quad \widetilde{L}u_n \longrightarrow f \text{ dans } L_2(D;H), \quad n \longrightarrow \infty.$$

De (2.69) on déduit que (u_n) est une suite de Cauchy dans $H^{1,1}(D;H)$, alors $u_n \longrightarrow v$ dans $H^{1,1}(D;H)$. Comme $\widetilde{H}_0^{1,1}(D;H)$ est un sous-espace fermé de $H^{1,1}(D,H)$, alors $v \in \widetilde{H}_0^{1,1}(D,H)$. La convergence de $u_n \longrightarrow u$ dans $H^{1,1}(D;H)$ entraine $u_n \longrightarrow v$ dans $L_2(D;H)$, comme on a la convergence $u_n \longrightarrow u$ dans $L_2(D;H)$, alors $u = v$, et le fait que l'operateur $\widetilde{L}$ est borné de $H^{1,1}(D,H)$ dans $L_2(D;H)$ entraine que $\widetilde{L}u = f$. □

Soit l'opérateur $\widetilde{L}' = \widetilde{\mathcal{L}}'$.

D'après les propositions précédentes il s'ensuit que l'opérateur $\widetilde{L}' = \widetilde{\mathcal{L}}'$ est continu de

$H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$.

De plus, d'après les propriétés des opérateurs à image fermée on a :

$$\begin{array}{l}\mathcal{N}(\widetilde{L}') = \overline{\mathcal{R}(\widetilde{L})}^{\perp} = L_2(D;H)^{\perp} = \{0\}\,, \\ \mathcal{R}(\widetilde{L}\,') = \overline{\mathcal{R}(\widetilde{L}\,')} = \mathcal{N}(\widetilde{L})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = L_2(D;H).\end{array}$$

D'où on en déduit que l'opérateur $\widetilde{L}'$ est un isomorphisme de $H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$.

Définition 2.4.1 *On note par $\hat{\mathcal{L}}$ le prolongement faible de l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}$ défini par :*

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'\,u,v\right\rangle = \left\langle u,\hat{\mathcal{L}}\,v\right\rangle = \langle u,f\,\rangle\,, \quad \forall u\in\; H_0^{1,1}(D,H)\;\; et\, \hat{\mathcal{L}}v = f\in\; L_2\,(D,H)\,. \qquad (2.86)$$

Proposition 2.4.5 *Le prolongement faible de l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ coincide avec le prolongement fort : $\left(\hat{\mathcal{L}}\right)' = \widetilde{\mathcal{L}}'$.*

Preuve. On montre que

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}) \text{ et } \widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u, \quad \forall u\in\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}).$$

Il est clair que $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) \subset \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$.

En vertu du théorème de Banach sur les opérateurs à image fermée, on déduit que l'opérateur $\left(\hat{\mathcal{L}}\right)^{-1}$ est défini sur le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp}$ et est continu.

On a :

$$\begin{array}{ll}(i) & \mathcal{N}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp} = \{0\}\,, \\ (ii) & \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}') = \{0\}\,.\end{array}$$

D'où $\mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = L_2\,(D,H)$. Alors pour tout $f\in L_2\,(D,H)$, il existe une solution de l'équation $\hat{\mathcal{L}}u = f$. Soit v la solution de l' équation $\widetilde{\mathcal{L}}u = f$ pour un élément f fixé, on montre que $u = v$.

A partir de (2.86) et (2.62), on a :

$$\left\langle z,\hat{\mathcal{L}}u\right\rangle = \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z,u\right\rangle = \langle z,f\rangle\,, \quad \forall z\in H_0^{1,1}(D;H),$$
$$\left\langle z,\widetilde{\mathcal{L}}v\right\rangle = \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z,v\right\rangle = \langle z,f\rangle\,, \quad \forall z\in H_0^{1,1}(D;H),$$

d'où on obtient $\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z,v-u\right\rangle = 0, \quad \forall z\in H_0^{1,1}(D;H)$, ce qui signifie que $w = v-u$ est la solution faible de l'équation homogène $\widetilde{L}u = 0$. D'après l'unicité de la solution faible on obtient $u = v$. Donc $u = v \in H_0^{1,1}(D; H)$ et $\widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u = f$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.4.5. □

Cette dernière proposition affirme que la solution du problème (2.67) coincide avec la solution forte. D'où $w \in H^{1,1}(D; H) \cap L_2(D, W^1)$ et vérifie (2.67) au sens fort, d'où

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \widetilde{H}_0^{1,1}(D; H), \\ \mathcal{L}w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + Aw = -B_{0\varepsilon}w = f. \end{cases} \tag{2.87}$$

En utilisant des techniques similaires à celles utilisées pour avoir l'estimation (2.15) on établit l'estimation :

$$\|A^{\frac{1}{2}}w\|^2 \leq K_6\|B_{0\varepsilon}w\|^2, \quad \forall w \in \widetilde{H}_0^{1,1}(D; H). \tag{2.88}$$

De (2.88) et $(\mathcal{A}_1)$, il vient :

$$\|w\|^2 \leq \frac{1}{c_0}\|A^{\frac{1}{2}}w\|^2 \leq \frac{K_6}{c_0}\|B_{0\varepsilon}w\|^2. \tag{2.89}$$

En remplaçant w par $A_\varepsilon^{-1}v$ dans (2.89) on obtient :

$$\|A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \leq \frac{K_6}{c_0}\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\|^2. \tag{2.90}$$

On a :

$$\|A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \ \to \|v\|^2 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

et

$$\begin{aligned} \left\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\right\| &= \left\|\left(\varepsilon\frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2}A_\varepsilon^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v\right\| = \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2}A^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v\right\| \\ &\leq \left\{\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial t_2}A^{-1}\right)^* \left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\|\right. \\ &\left. + \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t_2 \partial t_1}A^{-1}\right)^* v\right\|\right\} \longrightarrow 0, \quad \text{quand}\varepsilon \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Passant à la limite dans (2.90), quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient $v = 0$.

D'où $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu}) = \mathbb{E}$, pour $\lambda = 0$. □

Deuxième étape $\lambda \neq 0$.

On Considère maintenant le cas $\lambda \neq \mathbf{0}$. On commençe par introduire le lemme suivant :

Lemme 2.4.2 *Il existe une constante positive K indépendante de u, telle que :*

$$|||(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})u||| \leq k|||u|||_1, \tag{2.91}$$

La démonstration du lemme est basée sur la continuité des opérateurs $B \equiv A\dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}$, l_{1_μ} et l_{2_μ} de $D(\overline{L_{\lambda,\mu}})$ dans $L_2(D,H)$, $H^1([0,T_1],H)$, et$H^1([0,T_2],H)$ respectivement.

On suppose qu'on a montré que $\mathcal{R}(L_{\lambda_0,\mu}) = \mathbb{E}$ et on montre que $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu}) = \mathbb{E}$ pour les λ au voisinage de λ_0.

L'équation $\overline{L_{\lambda,\mu}}u = F$ peut être écrite :

$$\overline{L_{\lambda,\mu}} = (\overline{L_{\lambda_0,\mu}} + (\lambda - \lambda_0)\overline{(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})})u = F, \tag{2.92}$$

par application de l'opérateur $(\overline{L_{\lambda_0,\mu}})^{-1}$, on obtient :

$$u + (\lambda - \lambda_0)(\overline{L_{\lambda_0,\mu}})^{-1}\overline{(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})}u = (\overline{L_{\lambda_0,\mu}})^{-1}F. \tag{2.93}$$

De (2.15) et (2.91) on a :

$$|||(\overline{L_{\lambda_0,\mu}})^{-1}F|||_1 \leq \sqrt{S}|||F|||,$$

et

$$|||(\overline{L_{\lambda_0,\mu}})^{-1}\overline{(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})}u|||_1 \leq \sqrt{S}|||\overline{(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})}u||| \leq m|||u|||_1,$$

où $m = k\sqrt{S}$.

Soit $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho < \frac{1}{m}$. Posons $\zeta = (\lambda - \lambda_0)(\overline{L_{\lambda_0,\mu}})^{-1}\,\overline{(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})}$ et $\hbar = (\overline{L_{\lambda_0,\mu}})^{-1}F$, (2.93) devient

$$u + \zeta u = \hbar. \tag{2.94}$$

Comme $||\zeta|| = \sup\limits_{u \in D(\overline{L_{\zeta,\mu}})} \dfrac{|||\Lambda u|||_1}{|||u|||_1} < 1$, $(I + \zeta)$ est inversible est la série de Neumann $u = \sum_{n=0}^{\infty}(-\zeta)^n\hbar$ est donc la solution de l'équation (2.94).

D'où $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \mathbb{E}$ pour $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho < \dfrac{1}{m}$,

Ensuite on pose $\lambda = \rho$, on procède de la même manière, on obtient $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \mathbb{E}$ pour $0 \leq \lambda \leq 2\rho$. En avançant de cette manière et après un nombre fini de pas on arrive à établir l'égalité $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \mathbb{E}$ pour tout $\lambda \geq 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.4.1. □

D'où le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.1 *Pour tout élément* $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in \mathbb{E}$ *il existe une solution forte unique* $u = (\overline{L_{\lambda,\mu}})^{-1}\mathcal{F} = (\overline{L^{-1}_{\lambda,\mu}})\mathcal{F}$ *du problème* (2.1)-(2.2) *vérifiant l'estimation :*

$$|||u|||_1^2 \leq S|||\mathcal{F}|||^2,$$

où S *est une constante positive indépendante de* λ, μ *et* u.

2.5 Continuité de la solution par rapport aux paramètres

Soit E^1 l'espace obtenu en complétant l'espace $\mathcal{C}^\infty(D, W^1)$ par rapport à la norme

$$|||u|||_1^2 = \sup_{\tau \in D}\left[\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|_{1/2}^2\right)_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|_{1/2}^2\right)_{t_1=\tau_1} dt_2\right]$$

E est l'espace de Hilbert composé des éléments $F = (f, \varphi, \psi)$ tels que

$$|||F|||_E^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie},$$

où

$$\begin{aligned} \|\psi\|_1^2 &= \int_0^{T_1}\left(|\psi'|^2 + |\psi|^2\right) dt_1 \\ \|\varphi\|_2^2 &= \int_0^{T_2}\left(|\varphi'|^2 + |\varphi|^2\right) dt_2 \end{aligned}$$

Théorème 2.5.1 *Soit réalisée les conditions du théorème 2.4.1 et soit* $(\mu_n, \lambda_n) \to (\mu_0, \lambda_0)$.
Alors

$$(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})^{-1} \to (\overline{L_{\lambda_0,\mu_0}})^{-1},$$

au sens de la convergence simple.

Preuve. On montre que

i) $\sup_n \left\|(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E,E^1)} < \infty$,

ii) $(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})^{-1} \to (\overline{L_{\lambda_0,\mu_0}})^{-1}$ dans un sous-espace $\mathscr{Z}$ dense dans E.

D'après l'estimation ($\mathscr{S}$), on a :

$$|||u|||_1^2 \leq S \ \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}} u\right|\right|\right|^2, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}).$$

Comme la suite (μ_n, λ_n) converge vers (μ_0, λ_0) on peut choisir des constantes η_1 dépendantes de μ_0 et λ_0 et η_2 et η_3 qui dépendent de λ_0 telles que :

$$\eta_1 \, |||u|||_{E^1}^2 \leq |||u|||_1^2 \ , \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}).$$

$$\eta_2 \, |||F|||^2 \leq |||F|||_E^2 \leq \eta_3 \, |||F|||^2 \ , \quad \forall F \in E.$$

La constante S ne dépend pas de μ_n et de λ_n, alors, on obtient :

$$|||u|||_{E^1}^2 \leq \frac{S}{\eta_1\eta_2} \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}} u\right|\right|\right|_E^2, \ = S' \ \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}} u\right|\right|\right|_E^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}). \tag{2.95}$$

et donc $\sup\limits_n \left\|(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(E,E^1)}$ est fini.
On pose $\mathscr{Z} = \mathcal{R}(L_{\lambda_0,\mu_0})$ et soit $F \in \mathscr{Z}$, on a :

$$(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})^{-1}F - (\overline{L_{\lambda_0,\mu_0}})^{-1}F \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}),$$

de l'inégalité (2.95), on obtient :

$$\left|\left|\left|(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})^{-1}F - (\overline{L_{\lambda_0,\mu_0}})^{-1}F\right|\right|\right|_{E^1}^2 \leq S' \ \left|\left|\left|F - (\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})(\overline{L_{\lambda_0,\mu_0}})^{-1}F\right|\right|\right|_E^2, \tag{2.96}$$

On pose $(\overline{L_{\lambda_0,\mu_0}})^{-1}F = h$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda_0,\mu_0}}h - (\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}})h\right|\right|\right|_E^2 &\leq 2[|\lambda_n - \lambda_0|^2 \left\|\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right\|^2 \\ &+ \|B_1(\mu_n) - B_1(\mu_0)\|_{L(H)}^2 \left\| h|_{t_1=0}\right\|_1^2 + \|B_2(\mu_n) - B_2(\mu_0)\|_{\mathscr{L}(H)}^2 \left\| h|_{t_1=T_1}\right\|_1^2 \\ &+ \|B_1(\mu_n) - B_1(\mu_0)\|_{\mathscr{L}(H)}^2 \left\| h|_{t_2=0}\right\|_1^2 + \|B_2(\mu_n) - B_2(\mu_0)\|_{\mathscr{L}(H)}^2 \left\| h|_{t_2=T_2}\right\|_1^2] \end{aligned} \tag{2.97}$$

Pour tout $F \in \mathscr{Z}$, le membre droit de l'inégalité (2.97) tend vers zéro quand $n \to \infty, \forall F \in \mathscr{Z}$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.5.1. $\square$

Chapitre 3

Méthode de quasi-réversibilité pour un problème d'evolution mal posé

3.1 Position du problème

Soit $D = D_1 \times D_2$, $(D_i =]0, T_i[, \ (i = 1, 2))$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$ de variable $t = (t_1, t_2)$ et soit H un espace de Hilbert, où la norme et le produit scalaire sont respectivement notés par $|.|$ et $(.,.)$.

Soit u la solution du problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv \partial^2_{t_1 t_2} u(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1} u(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2} u(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in D, \\ u(t_1, 0) = \psi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1], \\ u(0, t_2) = \xi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \tag{IVP}$$

où f est une fonction de variable $t \in D$ et à valeurs dans H, ψ et ξ sont des fonctions définies de $[0, T_1]$ et $[0, T_2]$ respectivement, à valeurs dans H et vérifient la condition :

$$\psi(0) = \xi(0).$$

A est un opérateur linéaire dans H, non-borné, auto-adjoint, défini positif et à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ partout dense dans H.

$A_1(t_1)$ et $A_2(t_1)$ sont deux familles d'opérateurs bornés dans H, vérifiant :

Condition $(\mathscr{A}1)$ $\quad |A_1(t_1)x|^2 \leq \delta_1 |x|^2, \quad |A_2(t_1)x|^2 \leq \delta_2 |x|^2, \ \forall x \in H,$

où δ_1 et δ_2 sont des constantes positives indépendantes de t_1 et de x.

Soit la fonction $\chi; [0, T_2] \to H$, telle que $\chi(0) = \psi(T_1)$.

Considérons le problème de minimisation suivant :

pour tout $\varepsilon > 0$ trouver la fonction $\xi = \xi_\varepsilon$ telle que :

$$\mathcal{F}(\xi_\varepsilon) = \int_0^{T_2} |u(T_1, t_2) - \chi(t_2)|^2 \, dt_2 \leq \varepsilon. \tag{$\mathcal{F}$}$$

La solution evidente du problème $(\mathcal{F})$ est de prendre $u(T_1, t_2) = \chi(t_2)$ i.e. $\mathcal{F}(\xi) = 0$ et donc le problème de minimisation est résolu.

Ce choix nous conduit à l'étude du problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv \partial^2_{t_1 t_2} v(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1} v(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2} v(t) + Av(t) = f(t), \quad t \in D, \\ v(t_1, 0) = \psi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1], \\ v(T_1, t_2) = \chi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2]. \end{cases} \tag{FVP}$$

et prendre $v(0, t_2) = \xi(t_2)$.

Mais le problème (FVP) n'est pas bien posé au sens d'Hadamard. Pour vérifier que le problème (FVP) est mal posé , on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1 t_2} u(t) + Au(t) = f(t), \\ u(t_1, 0) = \psi(t_1), \\ u(0, t_2) = \xi(t_2), \end{cases} \tag{IVP'}$$

qui est un cas particulier du problème (IVP), avec $A_1(t_1)$ et $A_2(t_1)$ des opérateurs identiquement nuls. Ce problème est bien posé et sa solution est donnée par :

$$u(t_1, t_2) = J_0(2\sqrt{t_1 t_2 A})\psi(0) + \int_0^{t_1} J_0(2\sqrt{(t_1 - s_1)\, t_2 A})\psi'(s_1) ds_1$$

$$+ \int_0^{t_2} J_0(2\sqrt{t_1\,(t_2 - s_2)\,A})\xi'(s_2) ds_2 + \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} J_0(2\sqrt{(t_1 - s_1)\,(t_2 - s_2)\,A}) f(s_1, s_2) ds_1 ds_2,$$

où J_0 est la fonction de Bessel donnée par :

$$J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2},$$

Par un changement de variables, on peut montrer que la solution formelle du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1 t_2} v(t) + Av(t) = f(t), \\ v(t_1, 0) = \psi(t_1), \\ v(T_1, t_2) = \chi(t_2), \end{cases} \tag{FVP'}$$

est donnée par :

$$v(t_1,t_2) = J_0(2\sqrt{-(T_1-t_1)\,t_2 A})\psi(T_1) - \int_{t_1}^{T_1} J_0(2\sqrt{-(s_1-t_1)\,t_2 A})\psi'(s_1)ds_1$$

$$+\int_0^{t_2} J_0(2\sqrt{-(T_1-t_1)\,(t_2-s_2)\,A})\chi'(s_2)ds_2$$

$$-\int_0^{t_2}\int_{t_1}^{T_1} J_0(2\sqrt{-(s_1-t_1)\,(t_2-s_2)\,A})f(s_1,s_2)ds_1ds_2.$$

Remarquons que pour $0 \leq t_1 \leq s_1 \leq T_1, \quad 0 \leq s_2 \leq t_2 \leq T_2,$

$$J_0(2\sqrt{-(s_1-t_1)\,(t_2-s_2)\,A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n!)^2}\,(s_1-t_1)^n\,(t_2-s_2)^n \to \infty, \quad \text{quand } \lambda \to \infty.$$

Alors, l'opérateur $J_0(2\sqrt{-(s_1-t_1)\,(t_2-s_2)\,A})$ n'est pas borné. Ce qui implique que la solution du problème (FVP') n'existe que pour des données (f,ψ,χ) appartenant à une classe restreinte et on n'a pas la dépendance continue de la solution v par rapport aux données. D'où le problème (FVP') est mal posé, par conséquent, le problème (FVP) est aussi mal posé.

3.2 Méthode de quasi-réversibilité

Introduisons la méthode de quasi-réversiblité qui nous permet de construire une approximation de la solution du problème (FVP). Par approximation nous entendons une fonction u_ε vérifiant :

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1t_2}u_\varepsilon(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1}u_\varepsilon(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2}u_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) = f(t), \\ u_\varepsilon(t_1,0) = \psi(t_1), \\ \int\limits_0^{T_2} |u_\varepsilon(T_1,t_2) - \chi(t_2)|^2\,dt_2 \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \end{cases}$$

3.2.1 Description de la méthode

Soit v_ε la solution du problème

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1t_2}v_\varepsilon(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1}v_\varepsilon(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2}v_\varepsilon(t) + A_\varepsilon v_\varepsilon(t) = f(t), \quad t \in D, \\ v_\varepsilon(t_1,0) = \psi(t_1), \qquad t_1 \in [0,T_1], \\ v_\varepsilon(T_1,t_2) = \chi(t_2), \qquad t_2 \in [0,T_2], \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

où l'opérateur A est remplacé par la perturbation

$$A_\varepsilon = A(I+\varepsilon A)^{-1} = AJ_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Puis, on utilise $u_\varepsilon(0,t_2) = v_\varepsilon(0,t_2) = \xi_\varepsilon(t_2)$ comme condition initiale dans le problème :

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1 t_2} u_\varepsilon(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1} u_\varepsilon(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2} u_\varepsilon(t) + A u_\varepsilon(t) = f(t), \quad t \in D, \\ u_\varepsilon(t_1,0) = \psi(t_1), \quad t_1 \in [0,T_1], \\ u_\varepsilon(0,t_2) = \xi_\varepsilon(t_2), \quad t_2 \in [0,T_2], \end{cases} \tag{$\mathcal{Q}_\varepsilon$}$$

Finalement, on montre que :

$$\int_0^{T_2} |u_\varepsilon(T_1,t_2) - \chi(t_2)|^2 \, dt_2 \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Dans la proprosition suivante on cite quelques propriétés de A_ε :

Proposition 3.2.1 [19] *on a :*

$\mathcal{P}1)$ $J_\varepsilon,\ A_\varepsilon \in \mathscr{L}(H),\ \|J_\varepsilon\| \le 1,\ \|A_\varepsilon\| \le \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$ *;*

$\mathcal{P}2)$ $J_\varepsilon A u = A J_\varepsilon u, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)$;

$\mathcal{P}3)$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon u = u, \quad \forall u \in H$ *;*

$\mathcal{P}4)$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon u = Au, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)$.

3.3 Analyse de la méthode

Dans [17] est démontré que le problème (IVP) admet une solution unique et elle dépend continûment des données (f, ψ, ξ).

Grâce à la méthode des inégalités énergétiques on établit le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit la condition* $(\mathscr{A}1)$ *vérifiée et soient* $f \in L_2(D,H)$, ψ, $\psi' \in L_2(D_1,H)$, χ, $\chi' \in L_2(D_2,H)$ *et* $\psi(T_1) = \chi(0)$. *Alors le problème* (P_ε) *admet une solution unique et elle dépend continûment des données* (f, ψ, χ).

Pour établir les résultats de convergence, on introduit la condition :

$(\mathscr{A}_2)$ les opérateurs $A_1(\tau_1)$, $A_1(t_1)$, $A_2(s_1)$ et A commute pour tout τ_1, t_1, et s_1 dans D_1.

3.3.1 Opérateurs $\mathcal{R}(t_1, \tau_1)$ et $\mathcal{S}(t_1, \tau_1)$

Pour définir les opérateurs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, on adapte les techniques développées par Akcen dans [2, 3]. Soient les problèmes auxiliaires suivants :

Pour $h : [0, T_2] \to H$ et $x \in \mathfrak{D}(A)$, on considère dans $(\tau_1, T_1) \times (0, T_2)$, $(0 \leq \tau_1 \leq T_1)$ les problèmes bien posés suivants :

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1 t_2} U(t_1, t_2) + A_1(t_1)\partial_{t_1} U(t_1, t_2) + AU(t_1, t_2) = 0, \\ U(t_1, 0) = h(0), \\ U(\tau_1, t_2) = h(t_2), \end{cases} \tag{$\mathscr{R}$}$$

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1 t_2} V(t_1, t_2) + A_1(t_1)\partial_{t_1} V(t_1, t_2) + AV(t_1, t_2) = 0, \\ V(t_1, 0) = (t_1 - \tau_1)Ax, \\ V(\tau_1, t_2) = 0. \end{cases} \tag{$\mathscr{S}$}$$

On définit l'opérateur linéaire $\mathcal{R}(t_1, \tau_1)h(t_2) = U(t_1, t_2)$, (resp.$(\mathcal{S}(t_1, \tau_1)x = V(t_1, t_2))$ comme opérateur résolvant du problème $(\mathscr{R})$, (resp. $(\mathscr{S})$).

Ces opérateurs vérifient certaines conditions citées dans le lemme suivant :

Lemme 3.3.1 [3]

$\mathscr{P}1)$ $\mathcal{R}(t_1, \tau_1)h(0) = h(0),\ \ 0 \leq \tau_1 \leq T_1$;

$\mathscr{P}2)$ $\mathcal{R}(\tau_1, \tau_1)h(t_2) = h(t_2)$;

$\mathscr{P}3)$ $\mathcal{R}(t_1, s_1)\mathcal{R}(s_1, \tau_1)h(t_2) = \mathcal{R}(t_1, \tau_1)h(t_2),\ \ 0 \leq \tau_1 \leq s_1 \leq t_1 \leq T_1$;

$\mathscr{P}4)$ $\partial_{\tau_1}(\mathcal{R}(t_1, \tau_1)h(t_2)) = -\mathcal{R}(t_1, \tau_1)\partial_{s_1}\left(\mathcal{R}(s_1, \tau_1)h(t_2)\right)\big|_{s_1=\tau_1}$;

$\mathscr{P}5)$ $\partial_{t_2}(\mathcal{R}(t_1, \tau_1)h(t_2)) = \mathcal{R}(t_1, \tau_1)h'(t_2) - \mathcal{R}(t_1, \tau_1)h(0)$;

$\mathscr{P}6)$ $\int_0^{T_2} |\mathcal{R}(t_1, \tau_1)h(t_2)|^2\, dt_2 \leq \delta_3 \int_0^{T_2} |h(t_2)|^2\, dt_2$,
où $\delta_3 = \exp((4 + 2\delta_1)(T_1 + T_2))$;

$\mathscr{P}7)$ $\int_0^{T_2} |\mathcal{R}(t_1, \tau_1)x|^2\, dt_2 \leq 2\delta_3(t_1 - \tau_1)\left|A^{1/2}x\right|^2$.

Remarque Grâce à la condition $(\mathscr{A}2)$ on peut établir la commutativité des opérateurs $\mathcal{R}(T_1, t_1)$ et $A_1(t_1)$ (resp. $A_2(t_1)$) pour tout $t_1 \in D_1$.

Proposition 3.3.1 *Soit $y(t)$ la solution du problème :*

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1 t_2} y(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1} y(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2} y(t) + Ay(t) = f(t), \qquad t \in D, \\ y(t_1, 0) = \psi(t_1),\ \ t_1 \in D_1, \end{cases} \tag{$\mathscr{Y}$}$$

Alors, on a l'identité :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right) + A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right) + A_2(t_1)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right)$$
$$= \mathcal{R}(T_1,t_1)f - A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi - \mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'. \tag{3.1}$$

Preuve. Appliquant l'opérateur $\mathcal{R}(T_1,t_1)$ à l'équation du problème $(\mathscr{Y})$, on a :

$$\mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + \mathcal{R}(T_1,t_1)A_1(t_1)\frac{\partial y(t)}{\partial t_1} + \mathcal{R}(T_1,t_1)A_2(t_1)\frac{\partial y(t)}{\partial t_2}$$
$$+\mathcal{R}(T_1,t_1)Ay(t) = \mathcal{R}(T_1,t_1)f(t)$$

D'après les propriétés $(\mathscr{P}4)$ et $(\mathscr{P}5)$ du lemme 3.3.1, on obtient :

$$\mathcal{R}(T_1,t_1)A_1(t_1)\frac{\partial y(t)}{\partial t_1} = A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right) - A_1(t_1)\frac{\partial \mathcal{R}(T_1,t_1)}{\partial t_1}y(t)$$
$$= A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right) + \mathcal{R}(T_1,t_1)A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t)\right)\big|_{s_1=t_1}, \tag{3.2}$$
$$\mathcal{R}(T_1,t_1)A_2(t_1)\frac{\partial y(t)}{\partial t_2} = A_2(t_1)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right) + A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial y(t)}{\partial t_1}\right) + \mathcal{S}(T_1,t_1)\frac{\partial y(t_1,0)}{\partial t_1}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right) + \frac{\partial}{\partial t_2}(\mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t)\right)\big|_{\mathcal{S}_1=t_1}) + \mathcal{S}(T_1,t_1)\psi' \tag{3.4}$$

d'après l'identité $(\mathscr{P}5)$, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t_2}(\mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t)\right)\big|_{s_1=t_1}) = \mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial^2}{\partial t_2}\partial s_1((\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))\big|_{s_1=t_1})$$
$$-\mathcal{S}(T_1,t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}((\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))\big|_{\mathcal{R}_1=t_1,t_2=0}). \tag{3.5}$$

En substituant (3.5) dans (3.4), on obtient :

$$\mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)\right) + \mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial s_1}((\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))\big|_{s_1=t_1})$$
$$-\mathcal{S}(T_1,t_1)\frac{\partial}{s_1}((\mathcal{S}(s_1,t_1)y(t))\big|_{s_1=t_1,t_2=0}) + \mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'. \tag{3.6}$$

en tenant compte de

$$(\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))|_{t_2=0} = y(t_1,0), \qquad \frac{\partial}{\partial s_1}(\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))|_{t_2=0} = 0,$$

et de

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial t_2}((\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))|_{s_1=t_1}) = -A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\,(\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))|_{s_1=t_1} - Ay(t),$$

l'inégalité (3.6) devient :

$$\mathcal{R}(T_1,t_1)\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\,(\mathcal{R}(T_1,t_1)y(t)) - \mathcal{R}(T_1,t_1)A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\,(\mathcal{R}(s_1,t_1)y(t))|_{s_1=t_1}$$
$$-\mathcal{R}(T_1,t_1)Ay(t) + \mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'. \tag{3.7}$$

En combinant les inégalités (3.2), (3.3) et (3.7), on trouve l'identité (3.1). □

Etablissons maintenant les résultats de convergences.

Théorème 3.3.2 *Soient les conditions* $(\mathscr{A}1)$ *et* $(\mathscr{A}2)$) *vérifiées et soient :*

$$(\Im 1) \qquad \begin{array}{c} A^{1/2}f \in L_2(D;H), \quad A\psi,\ A\psi' \in L_2(D_1;H), \\ A\chi(t_2),\ A^{1/2}\chi' \in L_2(D_2;H) \ \text{et} \ \ \psi(T_1) = \chi(0), \end{array}$$

alors on a :

$$\|u'_\varepsilon(T_1,t_2) - \chi'(t_2)\|^2_{L_2(D_2;H)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \ \ \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{3.8}$$

De plus, si

$$(\Im 2) \qquad \begin{array}{c} Af \in L_2(D;H),\ A^{3/2}\psi,\ A^{3/2}\psi' \in L_2(D_1;H), \\ A^{3/2}\chi,\ A\chi' \in L_2(D_2;H) \ \text{et} \ \ \psi(T_1) = \chi(0), \end{array}$$

alors on a l'estimation :

$$\|u'_\varepsilon(T_1,t_2) - \chi'(t_2)\|^2_{L_2(D_2;H)} \le \varepsilon C \left\{ \|Af(t)\|^2_{L_2(D;H)} \right.$$
$$+ \left\|A^{3/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1;H)} + \|A\psi'\|^2_{L_2(D_1;H)} + \left\|A^{3/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1;H)}$$
$$\left. + \left\|A^{3/2}\chi\right\|^2_{L_2(D_2;H)} + \|A\chi'\|^2_{L_2(D_2;H)} \right\}. \tag{3.9}$$

Preuve. Appliquant l'opérateur $\mathcal{R}(T_1,t_1)$ respectivement aux équations :

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon(t)}{\partial t_1\partial t_2}+A_1(t_1)\frac{\partial v_\varepsilon(t)}{\partial t_1}+A_2(t_1)\frac{\partial v_\varepsilon(t)}{\partial t_2}+A_\varepsilon v_\varepsilon(t)=f(t),$$

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon(t)}{\partial t_1\partial t_2}+A_1(t_1)\frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t_1}+A_2(t_1)\frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t_2}+Au_\varepsilon(t)=f(t).$$

D'après l'dentité (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon\right)+A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon\right)+A_2(t_1)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon\right)\\&+\mathcal{R}(T_1,t_1)(A_\varepsilon-A)v_\varepsilon=\mathcal{R}(T_1,t_1)f-A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi-\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi',\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)+A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)+A_2(t_1)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right),\\&=\mathcal{R}(T_1,t_1)f-A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi-\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi',\end{aligned}\tag{3.11}$$

On substitue $A_\varepsilon-A=-\varepsilon J_\varepsilon A^2$ dans (3.10) puis, on pose $\omega_\varepsilon=\mathcal{R}(T_1,t_1)\left(v_\varepsilon-u_\varepsilon\right)$, on obtient :

$$\frac{\partial^2\omega_\varepsilon(t)}{\partial t_1\partial t_2}+A_1(t_1)\frac{\partial\omega_\varepsilon(t)}{\partial t_1}+A_2(t_1)\frac{\partial\omega_\varepsilon(t)}{\partial t_2}=\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)J_\varepsilon A^2v_\varepsilon.\tag{3.12}$$

Pour continuer la démonstration du théorème 3.3.2, on introduit le lemme suivant :

Lemme 3.3.2 *Sous les conditions du théorème 3.3.2, on a l'estimation :*

$$\begin{aligned}\left\|u'_\varepsilon(T_1,t_2)-\chi'(t_2)\right\|^2_{L_2(D_2;H)}&=\int_0^{T_2}\left|u'_\varepsilon(T_1,t_2)-\chi'(t_2)\right|^2dt_2\\&\leq C_1\left\|\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)J_\varepsilon A^2v_\varepsilon(t_1,t_2)\right\|^2_{L_2(D;H)}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Preuve. Multipliant scalairement dans H l'équation (3.12) par

$$M\omega_\varepsilon=\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_1}+\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_2},$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_1}\right|^2+\frac{\partial}{\partial t_1}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_2}\right|^2=$$

$$-2\mathrm{Re}\left(A_1(t_1)\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_1},\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_1}+\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_2}\right)-2\mathrm{Re}\left(A_2(t_1)\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_2},\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_1}+\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_2}\right)$$

$$+2\mathrm{Re}\left(\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)J_\varepsilon A^2 v_\varepsilon, \frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_1}+\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial t_2}\right). \tag{3.14}$$

Intégrant l'inégalité (3.14) dans le rectangle $(0,\tau_1)\times(0,\tau_2)$, $(0\leq\tau_1\leq T_1$ et $0\leq\tau_2\leq T_2)$, après l'utilisation de quelques estimations élémentaires ainsi que la condition $(\mathscr{A}1)$, on obtient :

$$\int_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,\tau_2)}{\partial t_1}\right|^2 dt_1+\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(\tau_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2 dt_2$$

$$-\int_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,0)}{\partial t_1}\right|^2 dt_1-\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(0,t_2)}{\partial t_2}\right|^2 dt_2$$

$$\leq\left((1+\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2})^2+2\right)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left(\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2\right)dt$$

$$+\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left|\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)A^2J_\varepsilon v_\varepsilon\right|^2 dt \tag{3.15}$$

D'après les égalités :

$$v_\varepsilon(t_1,0)=u_\varepsilon(t_1,0)=\psi\left(t_1\right),\qquad v_\varepsilon(0,t_2)=u_\varepsilon(0,t_2)=\xi_\varepsilon\left(t_2\right),$$

on obtient :

$$\omega_\varepsilon(t_1,0)=\mathcal{R}(T_1,t_1)\left(v_\varepsilon(t_1,t_2)-u_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\big|_{t_2=0}=0,$$

$$\omega_\varepsilon(0,t_2)=\mathcal{R}(T_1,t_1)\ \left(v_\varepsilon(t_1,t_2)-u_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\big|_{t_1=0}=0,$$

d'où, l'inégalité (3.15) devient :

$$\int_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,\tau_2)}{\partial t_1}\right|^2 dt_1+\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(\tau_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2 dt_2\leq\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left|\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)J_\varepsilon A^2 v_\varepsilon(t_1,t_2)\right|^2 dt$$

$$+\left((1+\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2})^2+2\right)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left(\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2\right)dt. \tag{3.16}$$

On pose

$$\vartheta(\tau_1,\tau_2)=\int_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,\tau_2)}{\partial t_1}\right|^2 dt_1+\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(\tau_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2,$$

l'inégalité (3.16) peut être écrite sous la forme :

$$\vartheta(\tau_1,\tau_2)\leq\delta\left(\int_0^{\tau_1}\vartheta(s_1,\tau_2)ds_1+\int_0^{\tau_2}\vartheta(\tau_1,s_2)ds_2\right)+G(\tau_1,\tau_2), \tag{3.17}$$

où $G(\tau_1,\tau_2)=\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\tau_2}\left|\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)J_\varepsilon A^2 v_\varepsilon(t_1,t_2)\right|^2 dt$ et $\delta=\left((1+\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2})^2+2\right)$.

Comme les fonctions ϑ et G vérifient les conditions du lemme de Gronwall (voir lemme 2.3.2), on obtient :

$$\int\limits_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(t_1,\tau_2)}{\partial t_1}\right|^2 dt_1+\int\limits_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(\tau_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2 dt_2\leq C_1\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\tau_2}\left|\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)A^2 J_\varepsilon v_\varepsilon(t_1,t_2)\right|^2 dt, \quad (3.18)$$

où $C_1=\exp(2\delta(T_1+T_2))$.

A partir de (3.18), on obtient :

$$\int\limits_0^{T_2}\left|\frac{\partial\omega_\varepsilon(\tau_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2 dt_2\leq C_1\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2}\left|\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)J_\varepsilon A^2 v_\varepsilon(t_1,t_2)\right|^2 dt, \quad (3.19)$$

Soit $\tau_1=T_1$, d'après la propriété ($\mathscr{P}2$) du lemme 3.3.1 on a :

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon(T_1,t_2) &= \mathcal{R}(T_1,T_1)\left(v_\varepsilon(T_1,t_2)-u_\varepsilon(T_1,t_2)\right)=v_\varepsilon(T_1,t_2)-u_\varepsilon(T_1,t_2)\\ &= \chi(t_2)-u_\varepsilon(T_1,t_2), \end{aligned} \quad (3.20)$$

en tenant compte de (3.20), on obtient :

$$\int\limits_0^{T_2}\left|u'_\varepsilon(T_1,t_2)-\chi'(t_2)\right|^2 dt_2\leq C_1\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2}\left|\varepsilon\mathcal{R}(T_1,t_1)J_\varepsilon A^2 v_\varepsilon(t_1,t_2)\right|^2 dt.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.3.2. □

D'après le lemme 3.3.2, on déduit que pour établir (3.8), il suffit d'estimer le côté droit de l'inégalité (3.13).

Pour cela, on multiplie scalairement dans H l'équation (3.10) par :

$$\varepsilon J_\varepsilon A^2\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon\right)-\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon\right)\right).$$

Posant $\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t)=w_\varepsilon(t)$, on a :

$$2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial t_1\partial t_2}-\varepsilon J_\varepsilon A^2 w_\varepsilon,\varepsilon J_\varepsilon A^2\left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}-\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right]\right)$$

$$=-2\mathrm{Re}\left(A_1(t_1)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}+A_2(t_1)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2},\varepsilon J_\varepsilon A^2\left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}-\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right]\right)$$

$$+2\mathrm{Re}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)f-A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi-\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi',\varepsilon J_\varepsilon A^2\left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}-\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right]\right). \quad (3.21)$$

Utilisant l'identité :

$$(x,\varepsilon A^2 J_\varepsilon y)=(\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon Ax,\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon Ay)+(\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}x,\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}y), \tag{3.22}$$

l'égalité (3.21) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_2}\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}\right|^2+\frac{\partial}{\partial t_2}\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}\right|^2\\
&-\frac{\partial}{\partial t_1}\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right|^2-\frac{\partial}{\partial t_1}\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right|^2\\
&-\frac{\partial}{\partial t_1}\left|\varepsilon J_\varepsilon A^2 w_\varepsilon\right|^2+\frac{\partial}{\partial t_2}\left|\varepsilon J_\varepsilon A^2 w_\varepsilon\right|^2\\
&=-2\mathrm{Re}\left(A_1(t_1)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}+A_2(t_1)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2},\varepsilon J_\varepsilon A^2[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}-\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}]\right)\\
&+2\mathrm{Re}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)f-A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi-\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi',\varepsilon J_\varepsilon A^2[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}-\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}]\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Intégrant l'égalité (3.23) dans $(\tau_1,T_1)\times\ (0,\tau_2)$, d'après les égalités :

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon(T_1,t_2) &= R(T_1,T_1)v_\varepsilon(T_1,t_2)=v_\varepsilon(T_1,t_2)=\chi(t_2),\\
w_\varepsilon(t_1,0) &= \left(R(T_1,t_1)v_\varepsilon(t)\right)\big|_{t_2=0}=\psi(t_1),
\end{aligned}$$

on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}_1(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{H}_2(\tau_1,\tau_2)=\mathscr{H}_1(\tau_1,0)+\mathscr{H}_2(T_1,\tau_2)\\
&\qquad+\mathscr{H}_3(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{H}_4(\tau_1,\tau_2),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

où

$$\mathscr{H}_1(\tau_1,\tau_2)=$$

$$=\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\frac{\partial}{\partial t_1}w_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\frac{\partial}{\partial t_1}w_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^2 w_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right|^2\right)dt_1$$

$$\mathscr{H}_2(\tau_1,\tau_2)=$$

$$=\int_{0}^{\tau_2}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}w_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right|^2+\left|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}w_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right|^2+\left|\varepsilon A^2 J_\varepsilon w_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right|^2\right)dt_2$$

$$\mathscr{H}_1(\tau_1,0)=\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon\psi'\right|^2+\left|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon\psi'\right|^2+\left|\varepsilon A^2 J_\varepsilon\psi\right|^2\right)dt_1$$

$$\mathscr{H}_2(T_1,\tau_2)=\int\limits_0^{\tau_2}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon\chi'\right|^2+\left|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon\chi'\right|^2+\left|\varepsilon A^2J_\varepsilon\chi\right|^2\right)dt_2.$$

$$\mathscr{H}_3(\tau_1,\tau_2)=2Re\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left(A_1(t_1)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}+A_2(t_1)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2},\varepsilon J_\varepsilon A^2[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}-\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}]\right)dt$$

$$\mathscr{H}_4(\tau_1,\tau_2)=2Re\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}(\mathcal{R}(T_1,t_1)f(t)-A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi(t_1)-\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'(t_1),$$

$$\left.\varepsilon J_\varepsilon A^2[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}-\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}]\right)dt.$$

Estimons le côté droit de l'égalité (3.24).

A partir de la condition ($\mathscr{A}1$) et de l'application de quelques inégalités élémentaires, on trouve :

$$\mathscr{H}_3(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{H}_4(\tau_1,\tau_2)\leq\delta\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}\right|^2\right)dt$$

$$+\delta\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right|^2\right)dt.$$

$$+3\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\mathcal{R}(T_1,t_1)f\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\mathcal{R}(T_1,t_1)f\right|^2\right)dt$$

$$+3\delta_2\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi\right|^2\right)dt$$

$$+3\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'\right|^2\right)dt, \tag{3.25}$$

en utilisant les propriétés ($\mathscr{P}6$) et ($\mathscr{P}7$) du lemme 3.3.1, on a :

$$\mathscr{H}_3(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{H}_4(\tau_1,\tau_2)\leq\mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2)+\mathscr{E}_2(\tau_1,\tau_2), \tag{3.26}$$

où

$$\mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2)=\delta\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_1}\right|^2\right)dt$$

$$+\delta\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon AA^{1/2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}A^{1/2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t_2}\right|^2\right)dt,$$

et

$$\mathscr{E}_2(\tau_1,\tau_2) = 3\delta_3 \int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1} \left(\left|\sqrt{\varepsilon} J_\varepsilon A f\right|^2 + \left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2} f\right|^2 \right) dt$$

$$+6\delta_2\delta_3 T_1 \int\limits_{\tau_1}^{T_1} \left(\left|\sqrt{\varepsilon} J_\varepsilon A A^{1/2})\psi\right|^2 + \left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2} A^{1/2})\psi\right|^2 \right) dt_1$$

$$+6\delta_3 T_1 \int\limits_{\tau_1}^{T_1} \left(\left|\sqrt{\varepsilon} J_\varepsilon A A^{1/2}\psi'\right|^2 + \left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2} A^{1/2}\psi'\right|^2 \right) dt_1.$$

En tenant compte de l'inégalité (3.26), (3.24) on obtient :

$$\mathscr{H}_1(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{H}_2(\tau_1,\tau_2) \leq \mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{E}_2(\tau_1,\tau_2)$$
$$+\mathscr{H}_1(\tau_1,0) + \mathscr{H}_2(T_1,\tau_2). \tag{3.27}$$

Comme on a :

$$\mathscr{E}_1(\tau_1,\tau_2) \leq \delta \left\{ \int\limits_0^{\tau_2} \{\mathscr{H}_1(\tau_1,t_2) + \mathscr{H}_2(\tau_1,t_2)\} dt_2 + \int\limits_{\tau_1}^{T_1} \{\mathscr{H}_2(t_1,\tau_2) + \mathscr{H}_2(t_1,\tau_2)\} dt_1 \right\},$$

et

$$\mathscr{E}_2(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{H}_1(\tau_1,0) + \mathscr{H}_4(T_1,\tau_2) \leq \mathscr{E}_2(0,\tau_2) + \mathscr{H}_1(0,0) + \mathscr{H}_4(T_1,T_2),$$

de (3.27) on obtient :

$$\mathscr{H}_1(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{H}_2(\tau_1,\tau_2)$$
$$\leq \delta \left\{ \int\limits_0^{\tau_2} \{\mathscr{H}_1(\tau_1,t_2) + \mathscr{H}_2(\tau_1,t_2)\} dt_2 + \int\limits_{\tau_1}^{T_1} \{\mathscr{H}_2(t_1,\tau_2) + \mathscr{H}_2(t_1,\tau_2)\} dt_1 \right\}$$
$$+\mathscr{E}_2(0,\tau_2) + \mathscr{H}_1(0,0) + \mathscr{H}_2(0,T_2), \tag{3.28}$$

appliquant le lemme de Gronwall à l'inégalité (3.28) ainsi que quelques estimations élémentaires, on obtient :

$$\mathscr{H}_1(\tau_1,\tau_2) + \mathscr{H}_2(\tau_1,\tau_2)$$
$$\leq C_1 \left\{ \mathscr{E}_2(0,\tau_2) + \mathscr{H}_1(0,0) + \mathscr{H}_2(T_1,T_2) \right\}. \tag{3.29}$$

En remplaçant τ_1 par 0, on obtient :

$$\mathscr{H}_1(0,\tau_2) + \mathscr{H}_2(0,\tau_2)$$

$$\leq C_1 \left\{ \mathscr{E}_2(0,T_2) + \mathscr{H}_1(0,0) + \mathscr{H}_2(T_1,T_2) \right\}. \tag{3.30}$$

On minore le membre gauche de l'inégalité (3.30) comme suit :

$$\mathscr{H}_1(0,\tau_2) + \mathscr{H}_2(0,\tau_2) \geq \int_0^{T_1} \left| \varepsilon A^2 J_\varepsilon w_\varepsilon(t_1,\tau_2) \right|^2 dt_1,$$

d'où, il vient :

$$\int_0^{T_1} \left| \varepsilon A^2 J_\varepsilon w_\varepsilon(t_1,\tau_2) \right|^2 dt_1 \leq$$

$$\leq C_1 \left\{ \mathscr{E}_2(0,T_2) + \mathscr{H}_1(0,0) + \mathscr{H}_2(T_1,T_2) \right\}. \tag{3.31}$$

On intègre l'inégalité (3.31) par rapport à τ_2 de 0 à T_2, on obtient :

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \left| \varepsilon A^2 J_\varepsilon w_\varepsilon(t_1,t_2) \right|^2 dt \leq$$

$$\leq T_2 C_1 \left\{ \mathscr{E}_2(0,T_2) + \mathscr{H}_1(0,0) + \mathscr{H}_2(T_1,T_2) \right\}, \tag{3.32}$$

où

$$\mathscr{E}_2(0,T_2) = 3\delta_3 \left\{ \left\| \sqrt{\varepsilon} A J_\varepsilon f \right\|^2_{L_2(D,H)} + \left\| \varepsilon A^{3/2} J_\varepsilon f \right\|^2_{L_2(D,H)} \right\}$$

$$+6\delta_2\delta_3 T_1 \left\{ \left\| \sqrt{\varepsilon} A^{3/2} J_\varepsilon \psi \right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\| \varepsilon A^2 J_\varepsilon \psi \right\|^2_{L_2(D_1,H)} \right\}$$

$$+6\delta_3 T_1 \left\{ \left\| \sqrt{\varepsilon} A^{3/2} J_\varepsilon \psi' \right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\| \varepsilon A^2 J_\varepsilon \psi' \right\|^2_{L_2(D_1,H)} \right\},$$

$$\mathscr{H}_1(0,0) = \left\{ \left\| \varepsilon A^2 J_\varepsilon \psi \right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\| \sqrt{\varepsilon} A J_\varepsilon \psi' \right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\| \varepsilon A^{3/2} J_\varepsilon \psi' \right\|^2_{L_2(D_1,H)} \right\},$$

$$\mathscr{H}_2(T_1,T_2) = \left\{ \left\| \varepsilon A^2 J_\varepsilon \chi \right\|^2_{L_2(D_2,H)} + \left\| \sqrt{\varepsilon} A J_\varepsilon \chi' \right\|^2_{L_2(D_2,H)} + \left\| \varepsilon A^{3/2} J_\varepsilon \chi' \right\|^2_{L_2(D_2,H)} \right\},$$

d'où, on a :

$$\left\| \varepsilon R(T_1,t_1) J_\varepsilon A^2 v_\varepsilon(t) \right\|^2_{L_2(D,H)} \leq 3C_1\delta_3 T_2 \left\{ \left\| \sqrt{\varepsilon} A J_\varepsilon f \right\|^2_{L_2(D,H)} + \left\| \varepsilon A^{3/2} J_\varepsilon f \right\|^2_{L_2(D,H)} \right\}$$

$$+6C_1\delta_2\delta_3 T_1 T_2 \left\{ \left\| \sqrt{\varepsilon} A^{3/2} J_\varepsilon \psi \right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\| \varepsilon A^2 J_\varepsilon \psi \right\|^2_{L_2(D_1,H)} \right\}$$

$$+6C_1\delta_3T_1T_2\left\{\left\|\sqrt{\varepsilon}A^{3/2}J_\varepsilon\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon A^2J_\varepsilon\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\right\}$$
$$+C_1T_2\left\{\left\|\varepsilon A^2J_\varepsilon\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\right\}$$
$$+C_1T_2\left\{\left\|\varepsilon A^2J_\varepsilon\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)}\right\}, \tag{3.33}$$

En combinant (3.13) et (3.33) et en utilisant quelques estimations élémentaires, on obtient :

$$\|u'_\varepsilon(T_1,t_2)-\chi'(t_2)\|^2_{L_2(D_2,H)}\leq$$
$$6C_1^2\delta_3T_2\max(1,2\delta_2T_1,2T_1)\left(\left\|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon Af\right\|^2_{L_2(D,H)}+\left\|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}f\right\|^2_{L_2(D,H)}\right.$$
$$+\left\|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A^{3/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon J_\varepsilon A^2\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}$$
$$+\left\|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A^{3/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon J_\varepsilon A^2\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}$$
$$+\left\|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}$$
$$\left.+\left\|\varepsilon J_\varepsilon A^2\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)}\right). \tag{3.34}$$

En utilisant l'identité

$$|A^sh|^2=|J_\varepsilon A^sh|^2+2\varepsilon\left|J_\varepsilon A^{s+\frac{1}{2}}h\right|^2+\varepsilon^2\left|J_\varepsilon A^{s+1}h\right|^2,\quad s=0,1/2,1, \tag{3.35}$$

d'après les propriétés de l'approximation de Yosida, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_1(\varepsilon) &= \left\|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon f\right\|^2_{L_2(D,H)}+\left\|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon f\right\|^2_{L_2(D,H)}\\ \leq\widetilde{\mathscr{K}_1} &= \left\|A^{1/2}f(t)\right\|^2_{L_2(D,H)}-\left\|J_\varepsilon A^{1/2}f(t)\right\|^2_{L_2(D,H)}\to 0,\quad \text{quand } \varepsilon\to 0,\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_2(\varepsilon) &= \left\|\sqrt{\varepsilon}A^{3/2}J_\varepsilon\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon A^2J_\varepsilon\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\\ \leq\widetilde{\mathscr{K}_2} &= \|A\psi(t_1)\|^2_{L_2(D_1,H)}-\|J_\varepsilon A\psi(t_1)\|^2_{L_2(D_1,H)}\to 0,\quad \text{quand } \varepsilon\to 0,\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_3(\varepsilon) &= \left\|\sqrt{\varepsilon}A^{3/2}J_\varepsilon\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon A^2J_\varepsilon\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\\ \leq\widetilde{\mathscr{K}_3} &= \|A\psi'\|^2_{L_2(D_1,H)}-\|J_\varepsilon A\psi'\|^2_{L_2(D_1,H)}\to 0,\quad \text{quand } \varepsilon\to 0,\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_4(\varepsilon) &= \left\|\sqrt{\varepsilon} A J_\varepsilon \psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\|\varepsilon A^{3/2} J_\varepsilon \psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)} \\ \leq \widetilde{\mathscr{K}_4} &= \left\|A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)} - \left\|J_\varepsilon A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)} \to 0, \quad \text{quand } \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_5(\varepsilon) &= \left\|\varepsilon A^2 J_\varepsilon \chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)} \\ \leq \widetilde{\mathscr{K}_5} &= \|A\chi\|^2_{L_2(D_2,H)} - \|J_\varepsilon A\chi\|^2_{L_2(D_2,H)} \to 0, \quad \text{quand } \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_6(\varepsilon) &= \left\|\sqrt{\varepsilon} A J_\varepsilon \chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)} + \left\|\varepsilon A^{3/2} J_\varepsilon \chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)} \leq \\ \widetilde{\mathscr{K}_6} &= \left\|A^{1/2}\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)} - \left\|J_\varepsilon A^{1/2}\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)} \to 0, \quad \text{quand } \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

En combinant (3.34) et (3.36)-(3.41), on peut conclure :

$$\begin{gathered}\|u'_\varepsilon(T_1,t_2) - \chi'(t_2)\|^2_{L_2(D_2,H)} \leq \\ 6C_1^2\delta_3 T_2 \max(1, 2\delta_2 T_1, 2T_1)(\widetilde{\mathscr{K}_1} + \widetilde{\mathscr{K}_2} + \widetilde{\mathscr{K}_3} + \widetilde{\mathscr{K}_4} + \widetilde{\mathscr{K}_5} + \widetilde{\mathscr{K}_6}) \to 0, \quad \text{quand } \varepsilon \to 0. \end{gathered} \tag{3.42}$$

On suppose que la condition ($\Im 2$) est satisfaite, à partir de l'identité (3.35), on obtient :

$$\mathscr{K}_1(\varepsilon) \leq \varepsilon \|Af\|^2_{L_2(D,H)} \tag{3.43}$$

$$\mathscr{K}_2(\varepsilon) \leq \varepsilon \left\|A^{3/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}, \tag{3.44}$$

$$\mathscr{K}_3(\varepsilon) + \mathscr{K}_4(\varepsilon) \leq \varepsilon \left\|A^{3/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \varepsilon \|A\psi'\|^2_{L_2(D_1,H)}, \tag{3.45}$$

$$\mathscr{K}_5(\varepsilon) + \mathscr{K}_6(\varepsilon) \leq \varepsilon \left\|A^{3/2}\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)} + \varepsilon \|A\chi'\|^2_{L_2(D_2,H)}. \tag{3.46}$$

En combinant (3.34) et (3.43)-(3.46), on obtient :

$$\begin{gathered}\|u'_\varepsilon(T_1,t_2) - \chi'(t_2)\|^2_{L_2(D_2,H)} \leq \varepsilon C \Big(\|Af(t)\|^2_{L_2(D,H)} \\ + \left\|A^{3/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \|A\psi'\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\|A^{3/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)} \\ + \left\|A^{3/2}\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)} + \|A\chi'\|^2_{L_2(D_2,H)}\Big), \end{gathered}$$

où $C = 6C_1^2\delta_3 T_2 \max(1, 2\delta_2 T_1, 2T_1)$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.3.2. □

Proposition 3.3.2 *Soit u_ε la solution du problème ($\mathcal{Q}_\varepsilon$), alors on a :*

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t_2}(T_1,t_2)\right\|^2_{L_2(D_2,H)} \leq C_1 \Big(\|f\|^2_{L_2(D,H)} + \left\|A^{1/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\|A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)} +$$

$$+\left\|\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|A^{1/2}\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\|\chi'\|^2_{L_2(D_2,H)}\Big), \tag{3.47}$$

Preuve. Multipliant scalairement dans H l'équation (3.11) par

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right)\right|^2+\frac{\partial}{\partial t_1}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\tau_1)u_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right)\right|^2\\
&=-2\mathrm{Re}\Bigg(A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)+A_2(t_1)\frac{\partial}{\partial t_2}(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon),\\
&\qquad\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)\right]\Bigg)\\
&=2\mathrm{Re}\Big(\mathcal{R}(T_1,t_1)f-A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi-\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'\ ,\\
&\qquad\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon\right)\right]\Big)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

En intégrant l'identité (3.48) dans $(0,\tau_1)\times(0,\tau_2)$ et en utilisant quelques estimations élémentaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right)\right|^2dt_1+\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\tau_1)u_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right)\right|^2dt_2\\
&\leq\delta\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\right|^2+\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\right|^2\right)dt\\
&\quad+3\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left(|\mathcal{R}(T_1,t_1)f|^2+|A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi|^2+|(\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'|^2\right)dt\\
&+\int_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,0)\right)\right|^2dt_1+\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,0)u_\varepsilon(0,t_2)\right)\right|^2dt_2,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

On pose

$$\mathscr{L}(\tau_1,\tau_2)=\int_0^{\tau_1}\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right)\right|^2dt_1+\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\tau_1)u_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right)\right|^2dt_2,$$

comme on a :

$$\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\right|^2+\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\right|^2\right)dt\leq$$

$$\int_0^{\tau_1}\mathscr{L}(t_1,\tau_2)dt_1+\int_0^{\tau_2}\mathscr{L}(\tau_1,t_2)dt_2,$$

de (3.49), il vient :

$$\mathscr{Z}(\tau_1, \tau_2) \leq$$
$$\delta \left\{ \int_0^{\tau_1} \mathscr{Z}(t_1, \tau_2) dt_1 + \int_0^{\tau_2} \mathscr{Z}(\tau_1, t_2) dt_2 \right\}$$
$$+3 \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \left(|\mathcal{R}(T_1, t_1) f|^2 + |A_2(t_1) \mathcal{S}(T_1, t_1) \psi|^2 + |(\mathcal{S}(T_1, t_1) \psi'|^2 \right) dt$$
$$+ \int_0^{\tau_1} \left| \frac{\partial}{\partial t_1} (\mathcal{R}(T_1, t_1) u_\varepsilon(t_1, 0)) \right|^2 dt_1 + \int_0^{\tau_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} (\mathcal{R}(T_1, 0) u_\varepsilon(0, t_2)) \right|^2 dt_2, \tag{3.50}$$

en appliquant le lemme de Gronwall à (3.50) ainsi que quelques inégalités élémentaires, on obtient :

$$\mathscr{Z}(\tau_1, \tau_2) \leq$$
$$+3C_1 \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \left(|\mathcal{R}(T_1, t_1) f|^2 + |A_2(t_1) \mathcal{S}(T_1, t_1) \psi|^2 + |(\mathcal{S}(T_1, t_1) \psi'|^2 \right) dt$$
$$+C_1 \left(\int_0^{T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t_1} (\mathcal{R}(T_1, t_1) u_\varepsilon(t_1, 0)) \right|^2 dt_1 + \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} (\mathcal{R}(T_1, 0) u_\varepsilon(0, t_2)) \right|^2 dt_2 \right). \tag{3.51}$$

En utilisant les propriétés ($\mathscr{P}6$) et ($\mathscr{P}7$) du lemme 3.3.1, il vient :

$$\int_0^{\tau_1} \left| \frac{\partial}{\partial t_1} (\mathcal{R}(T_1, t_1) u_\varepsilon(t_1, \tau_2)) \right|^2 dt_1 + \int_0^{\tau_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} (\mathcal{R}(T_1, \tau_1) u_\varepsilon(\tau_1, t_2)) \right|^2 dt_2$$
$$\leq 3C_1 \delta_3 \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} |f(t)|^2 dt + 6C_1 \delta_2 \delta_3 T_1 \int_0^{T_1} \left| A^{1/2} \psi \right|^2 dt_1 + 6C_1 \delta_3 T_1 \int_0^{T_1} \left| A^{1/2} \psi' \right|^2 dt_1$$
$$+C_1 \int_0^{T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t_1} (\mathcal{R}(T_1, t_1) u_\varepsilon(t_1, 0)) \right|^2 dt_1 + C_1 \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} (\mathcal{R}(T_1, 0) u_\varepsilon(0, t_2)) \right|^2 dt_2. \tag{3.52}$$

En remplaçant τ_1 par T_1 et τ_2 par T_2 et en minorant le côté droit de l'égalité (3.52) par

$$\int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} (\mathcal{R}(T_1, T_1) u_\varepsilon(T_1, t_2)) \right|^2 dt_2,$$

on obtient :

$$\int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} (\mathcal{R}(T_1, T_1) u_\varepsilon(T_1, t_2)) \right|^2 dt_2$$
$$\leq 3C_1 \delta_3 \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} |f(t)|^2 dt + 6C_1 \delta_2 \delta_3 T_1 \int_0^{T_1} \left| A^{1/2} \psi \right|^2 dt_1 + 6C_1 \delta_3 T_1 \int_0^{T_1} \left| A^{1/2} \psi' \right|^2 dt_1$$
$$+C_1 \int_0^{T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t_1} (\mathcal{R}(T_1, t_1) u_\varepsilon(t_1, 0)) \right|^2 dt_1 + C_1 \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} (\mathcal{R}(T_1, 0) u_\varepsilon(0, t_2)) \right|^2 dt_2. \tag{3.53}$$

En utilisant les égalités :

$$\mathcal{R}(T_1,T_1)u_\varepsilon(T_1,t_2)=u_\varepsilon(T_1,t_2),$$

$$\mathcal{R}(T_1,t_1)u_\varepsilon(t_1,0)=u_\varepsilon(t_1,0)=\psi(t_1),$$

$$\mathcal{R}(T_1,0)u_\varepsilon(0,t_2)=\mathcal{R}(T_1,0)v_\varepsilon(0,t_2),$$

il vient :

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon(T_1,t_2)}{\partial t_2}\right\|^2_{L_2(D_2,H)}\leq$$

$$3C_1\delta_3\left\|f\right\|^2_{L_2(D,H)}+6C_1\delta_2\delta_3T_1\left\|A^{1/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+6C_1\delta_3T_1\left\|A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}$$

$$+C_1\left\|\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+C_1\int_0^{T_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,0)v_\varepsilon(0,t_2)\right)\right|^2dt_2. \tag{3.54}$$

Pour continuer la démonstration, on doit estimer l'expression $\int_0^{T_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,0)v_\varepsilon(0,t_2)\right)\right|^2dt_2$.

Pour cela on multiplie scalairement dans H l'équation (3.10) par

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(R(T_1,t_1)v_\varepsilon\right)-\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon\right),$$

puis on intègre le résultat obtenu dans $(\tau_1,T_1)\times(0,T_2)$, on obtient :

$$\hbar_1(\tau_1,\tau_2)+\hbar_2(\tau_1,\tau_2)=\hbar_1(\tau_1,0)+\hbar_2(T_1,\tau_2)$$

$$\hbar_3(\tau_1,\tau_2)+\hbar_4(\tau_1,\tau_2)+\hbar_3(\tau_1,\tau_2), \tag{3.55}$$

où

$$\hbar_1(\tau_1,\tau_2)=\int_{\tau_1}^{T_1}\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right)\right|^2dt_1$$

$$+\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t_1,\tau_2)\right|^2\right)dt_1,$$

$$\hbar_2(\tau_1,\tau_2)=\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\tau_1)v_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right)\right|^2dt_2$$

$$+\int_0^{\tau_2}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right|^2+\left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right|^2\right)dt_2,$$

$$\hbar_3(\tau_1,\tau_2)=2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left(A_1(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t)\right)+A_2(t_1)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t)\right),\right.$$

$$, \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t)\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t)\right)\Big) dt,$$

$$\hbar_4(\tau_1,\tau_2) = 2\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)f - A_2(t_1)\mathcal{S}(T_1,t_1)\psi - \mathcal{S}(T_1,t_1)\psi'\right.,$$
$$\left., \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(R(T_1,t_1)v_\varepsilon\right)\right) dt.$$

D'après les égalités :

$$\mathcal{R}(T_1,T_1)v_\varepsilon(T_1,t_2) = v_\varepsilon(T_1,t_2) = \chi(t_2),$$

$$\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t_1,0) = v_\varepsilon(t_1,0) = \psi(t_1),$$

on obtient :

$$\hbar_1(\tau_1,0) = \int_{\tau_1}^{T_1}\left(|\psi'|^2 + \left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\psi\right|^2 + \left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\psi)\right|^2\right) dt_1,$$
$$\hbar_1(T_1,\tau_2) = \int_0^{\tau_2}\left(|\chi'|^2 + \left|\sqrt{\varepsilon}J_\varepsilon A\chi)\right|^2 + \left|\varepsilon J_\varepsilon A^{3/2}\chi\right|^2\right) dt_2.$$

On a :

$$\hbar_1(\tau_1,0) + \hbar_1(T_1,\tau_2) \leq \hbar_1(0,0) + \hbar_1(T_1,T_2). \tag{3.56}$$

En utilisant les propriétés ($\mathscr{P}6$) et ($\mathscr{P}7$) du lemme 3.3.1 et quelques estimations élémentaires, on obtient les inégalités :

$$|\hbar_3(\tau_1,\tau_2)| \leq \delta\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(t_1,t_2)\right)\right|^2\right) dt,$$

$$\leq \delta\left\{\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\hbar_1(t_1,\tau_2) + \hbar_2(t_1,\tau_2)\right) dt_1 + \int_0^{\tau_2}\left(\hbar_1(\tau_1,t_2) + \hbar_2(\tau_1,t_2)\right) dt_2\right\}, \tag{3.57}$$

$$|\hbar_4(\tau_1,\tau_2)| \leq \widetilde{\hbar_5} = 3\delta_3\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}|f|^2\, dt + 6C_1\delta_3 T_1\int_0^{T_1}\left(\delta_2\left|A^{1/2}\psi\right|^2 + \left|A^{1/2}\psi'\right|^2\right) dt_1, \tag{3.58}$$

à partir de (3.56), (3.57) et (3.58) on obtient :

$$\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right)\right|^2 dt_2 \leq \hbar_1(\tau_1,\tau_2) + \hbar_2(\tau_1,\tau_2) \leq$$

$$\delta\left\{\int_{\tau_1}^{T_1}\left(\hbar_1(t_1,\tau_2) + \hbar_2(t_1,\tau_2)\right) dt_1 + \int_0^{\tau_2}\left(\hbar_1(\tau_1,t_2) + \hbar_2(\tau_1,t_2)\right) dt_2\right\}$$

$$+\widetilde{\hbar_5}+\hbar_1(0,0)+\hbar_2(T_1,T_2), \tag{3.59}$$

en utilisant le lemme de Gronwall on obtient :

$$\int_0^{\tau_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,t_1)v_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right)\right|^2 dt_2 \leq \hbar_1(\tau_1,\tau_2)+\hbar_2(\tau_1,\tau_2)\leq$$

$$C_1\left(\widetilde{\hbar_5}+\hbar_1(0,0)+\hbar_2(T_1,T_2)\right), \tag{3.60}$$

ce qui implique

$$\sup_{0\leq\tau_1\leq T_1}\int_0^{T_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\tau_1)v_\varepsilon(\tau_1,t_2)\right)\right|^2 dt_2 \leq 3C_1\delta_3\left\|f\right\|^2_{L_2(D,H)}$$

$$+6C_1\delta_3T_1\left(\delta_2\left\|A^{1/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\right)$$
$$+C_1\left(\left\|\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\right)$$
$$+C_1\left(\left\|\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|\sqrt{\varepsilon}AJ_\varepsilon\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|\varepsilon A^{3/2}J_\varepsilon\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)}\right), \tag{3.61}$$

en utilisant l'identité (3.35), de (3.61) on tire

$$\int_0^{T_2}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,0)v_\varepsilon(0,t_2)\right)\right|^2 dt_2 \leq 3C_1\delta_3\left\|f\right\|^2_{L_2(D,H)}$$

$$+6C_1\delta_3T_1\left(\delta_2\left\|A^{1/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\right)$$
$$+C_1\left(\left\|\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|A^{1/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}\right)$$
$$+C_1\left(\left\|\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|A^{1/2}\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)}\right). \tag{3.62}$$

En combinant (3.54) et (3.62), on obtient :

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t_2}(T_1,t_2)\right\|^2_{L_2(D_2,H)} \leq 9C_1(C_1+1)\delta_3\max(1,2\delta_2T_1,2T_1)\left(\left\|f\right\|^2_{L_2(D,H)}+\right.$$
$$+\left\|A^{1/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}$$
$$\left.+\left\|\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}+\left\|A^{1/2}\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)}+\left\|\chi'\right\|^2_{L_2(D_2,H)}\right), \tag{3.63}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.3.2. . □

Théorème 3.3.3 *On suppose que les conditions* ($\mathscr{A}1$) *et* ($\mathscr{A}2$) *sont satisfaites et soient :*

$$(\Im 3) \qquad \begin{aligned} f \in L_2(D,H),\ A^{1/2}\psi, A^{1/2}\psi' \in L_2(D_1,H), \\ A^{1/2}\chi, \chi' \in L_2(D_2,H)\ \textit{et}\ \ \psi(T_1) = \chi(0), \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon(T_1,t_2)}{\partial t_2} - \chi'(t_2) \right\|^2_{L_2(D_2,H)} \longrightarrow 0, \quad \textit{quand}\ \varepsilon \longrightarrow 0 \tag{3.64}$$

Preuve. On considère l'espace $M \subset L_2(D,H) \times C([0,T_1],H) \times C([0,T_2],H)$ défini par

$$M = \left\{ F = (f,\psi,\chi) :\ f \in L_2(D,H),\ A^{1/2}\psi,\ A^{1/2}\psi' \in L_2(D_1,H),\ A^{1/2}\chi, \chi' \in L_2(D_2,H) \right\}.$$

muni de la norme

$$\|F\|^2_M = \|f\|^2_{L_2(D,H)} + \left\|A^{1/2}\psi\right\|^2_{L_2(D_1,H)} + \left\|A^{1/2}\psi'\right\|^2_{L_2(D_1,H)}$$
$$+ \left\|A^{1/2}\chi\right\|^2_{L_2(D_2,H)} + \|\chi'\|^2_{L_2(D_2,H)} \Big).$$

Soit $\mathscr{M}$ le sous-espace vectoriel de M défini par :

$$\mathscr{M} = \left\{ F = (f,\psi,\chi) : Af \in L_2(D;H),\ A^{3/2}\psi,\ A^{3/2}\psi' \in L_2(D_1;H),\ A^{3/2}\chi,\ A\chi' \in L_2(D_2;H) \right\}.$$

Soit l'opérateur linéaire G_ε défini de M dans $L_2(D;H)$ par :

$$G_\varepsilon : F = (f,\psi,\chi) \longrightarrow G_\varepsilon F = \frac{\partial u_\varepsilon(T_1,t_2)}{\partial t_2},$$

où u_ε est la solution du problème ($\mathcal{Q}_\alpha$). Alors à partir de l'inégalité (3.48) on a :

$$\|G_\varepsilon F\|^2_{L_2(D_2,H)} \leq C_2 \|F\|^2_M. \tag{3.65}$$

En vertu de (3.65), on déduit que l'opérateur G_ε est borné.

De (3.9), on déduit :

$$\|G_\varepsilon F - \chi'\|^2_{L_2(D_2,H)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

pour tout $F \in \mathscr{M}$. De la densité de l'espace $\mathscr{M}$ dans M, on obtient :

$$\|G_\varepsilon F - \chi'\|^2_{L_2(D_2,H)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

pour tout $F \in M$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.3.3. $\square$

On considère les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1t_2} v^*_\varepsilon(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1} v^*_\varepsilon(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2} v^*_\varepsilon(t) + A_\varepsilon v^*_\varepsilon(t) = f^*(t) \\ v^*_\varepsilon(t_1, 0) = 0, \\ v^*_\varepsilon(T_1, t_2) = \chi^*(t_2), \end{cases} \qquad (\mathcal{P}^*_\varepsilon)$$

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1t_2} u^*_\varepsilon(t) + A_1(t_1)\partial_{t_1} u^*_\varepsilon(t) + A_2(t_1)\partial_{t_2} u^*_\varepsilon(t) + A u^*_\varepsilon(t) = f^*(t), \\ u^*_\varepsilon(t_1, 0) = 0, \\ u^*_\varepsilon(0, t_2) = \xi^*_\varepsilon(t_2) = v^*_\varepsilon(0, t_2), \end{cases} \qquad (\mathcal{Q}^*_\varepsilon)$$

où

$$f^*(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \left(f(t_1, s_2) ds_2 + A_2(t_1)\psi(t_1) + \psi'(t_1)\right) ds_2 \text{ et } \chi^*(t_2) = \int_0^{t_2} \chi(s_2) ds_2.$$

$$v^*_\varepsilon(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} v_\varepsilon(t_1, s_2) ds_2 \text{ et } u^*_\varepsilon(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} u_\varepsilon(t_1, s_2) ds_2.$$

v_ε et u_ε sont les solutions des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et $(\mathcal{Q}_\varepsilon)$ respectivement.

Il est clair que v^*_ε, u^*_ε sont des solutions des problèmes $(\mathcal{P}^*_\varepsilon)$ et $(\mathcal{Q}^*_\varepsilon)$ respectivement, et que les problèmes $(\mathcal{P}^*_\varepsilon)$ et $(\mathcal{Q}^*_\varepsilon)$ sont des cas particuliers des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et $(\mathcal{Q}_\varepsilon)$ respectivement.

En vertu des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3 on déduit le résultat suivant :

Théorème 3.3.4 *On suppose que les conditions $(\mathscr{A}1)$ et $(\mathscr{A}1)$ sont vérifiées et soient :*

$$(\Im 4) \qquad \begin{array}{l} \int_0^{t_2} f(t_1, s_2) ds_2 \in L_2(D, H),\ \psi, \psi' \in L_2(D_1, H), \\ A^{1/2} \int_0^{t_2} \chi(s_2) ds_2,\ \chi \in L_2(D_2, H) \text{ et } \psi(T_1) = \chi(0). \end{array}$$

Alors, on a :

$$\left\| \frac{\partial u^*_\varepsilon}{\partial t_2}(T_1, t_2) - \frac{\partial \chi}{\partial t_2}^* \right\|^2_{L_2(D_2,H)} = \|u_\varepsilon(T_1, t_2) - \chi(t_2)\|^2_{L_2(D_2,H)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

De plus si :

$$(\Im 5) \qquad \begin{aligned} &A \textstyle\int_0^{t_2} f(t_1,s_2)ds_2 \in L_2(D,H),\ \ A\,\psi,\ \ A\psi' \in L_2(D_1,H),\\ &A^{3/2} \textstyle\int_0^{t_2} \chi(s_2)ds_2,\ A\chi \in L_2(D_2,H),\ \ \textit{et}\ \psi(T_1)=\chi(0), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial t_2}(T_1,t_2) - \frac{\partial \chi}{\partial t_2}^* \right\|^2_{L_2(D_2,H)} \leq\ & 6\varepsilon c_1^2 \delta_3 T_2 \max(1, 2\delta_2 T_1, 2T_1) \left(3 \left\| A \int_0^{t_2} f(t_1,s_2)ds_2 \right\|^2_{L_2(D,H)} \right.\\ & +3\delta_2 T_2 \left\| A\psi \right\|^2_{L_2(D_1,H)} + 3T_2 \left\| A\psi' \right\|^2_{L_2(D_1,H)} \\ & \left. \left\| A^{3/2} \int_0^{t_2} \chi(s_2)ds_2 \right\|^2_{L_2(D_2,H)} + \left\| A\chi \right\|^2_{L_2(D_2,H)} \right). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Conclusion et perspectives

• Dans la présente thèse, on a traité deux classes de problèmes bien et mal posés. Dans la première classe on a étudié deux problèmes non locaux, vu l'interêt de ce type de problèmes dans beaucoup de domaines.

Dans le premier problème l'opérateur A est indépendant de la variable t, par contre dans le deuxième travail l'opérateur A est dépendant de t et les conditions aux limites contiennent des opérateurs d'où la complexité de l'étude.

On a montré l'efficacité de la méthode des inégalités énergétiques dans l'étude de ces problèmes. Grâce aux estimations a priori établies on a pu démontrer des théorèmes d'existence, d'unicité et de stabilité.

Comme perspectives, on se propose d'étudier des problèmes d'ordre supérieur, toujours dans le cas non local, par exemple le problème :

$$\ell_\mu u = \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial^{2m+1} t_1} + \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial^{2m+1} t_2} + \delta_\mu \, A(t_1,t_2,\mu)\, u = f(t_1,t_2), \qquad t \in D = (0,T_1)\times(0,T_2),$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^k u}{\partial t_i^k}\right|_{t_i=0} = \left.\frac{\partial^k u}{\partial t_i^k}\right|_{t_i=T_i} = 0 \qquad 0 \leq k \leq m-1, \ \ (i=1,2), \\ l_{1\mu} u = B_1(\mu)\ \left.\frac{\partial^m u}{\partial t_1^m}\right|_{t_1=0} - B_2(\mu)\ \left.\frac{\partial^m u}{\partial t_1^m}\right|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \qquad t_2 \in [0,T_2], \\ l_{2\mu} u = B_1(\mu)\ \left.\frac{\partial^m u}{\partial t_2^m}\right|_{t_2=0} - B_2(\mu)\ \left.\frac{\partial^m u}{\partial t_2^m}\right|_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \qquad t_1 \in [0,T_1]. \end{cases}$$

où $A(t,\mu)$ est un opérateur linéaire dans H, non-borné, $B_1(\mu)$ et $B_2(\mu)$ sont des opérateurs dépendant d'un paramètre complexe μ.

Quant à la deuxième classe, elle comporte l'étude d'un problème mal posé. L'approche utilisée dans cette analyse repose sur la méthode de quasi-réversibilité qui nous a permis d'établir plusieurs résultats de convergence.

Notre deuxième objectif sera de déterminer des stratégies de régularisation pour stabiliser certains problèmes mal posés, par exemple le problème suivant :

Déterminer la source P sachant que $u(t)$ vérifie :

$$\begin{cases} \partial^2_{t_1 t_2} u(t) + Au(t) = P, \quad t \in D = (0, T_1) \times (0, T_2) \\ u(t_1, 0) = \psi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1] \\ u(0, t_2) = \xi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2] \\ \Gamma(u) = u(T_1, T_2) = \varphi. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), 121-139.

[2] È. M. Aksen, *The quasi-inversion method for some hyperbolic equations*, Diff. Uravn., **27** (1991), No. 6, 1089-1092, (Russian).

[3] È. M. Aksen, N.I. Yurchuk, *An a priori estimate for the quasi-inversion method.* Diff. Uravn., **29** (1993), No. 8, 1447-1450, (Russian). [Translation in Differential Equations **29** (1993), No. 8, 1254-1256].

[4] D.R. Akhmetov, M.M. Lavrentiev and Jr.R. Spigeler, *Existence and uniqueness of classical solutions to certain nonlinear integro-differential Fokker-Plank type equations*, E.J.D.E., **24** (2002), 1-17.

[5] D.R. Akhmetov, M.M. Lavrentiev and Jr.R. Spigeler, *Singular perturbations for certain partial differential equations without boundary-layers*, Asymptotic Analysis **35** (2003), 65-89.

[6] G.A. Anastassiou, G.R. Goldestein and J.A. Goldstein, *Uniqueness for evolution in multidimensional time*, Nonlinear Analysis, **64** (2006), 33-41.

[7] K. A. Ames, On the comparison of solutions of related properly and improperly posed Cauchy problems for first order operator equations. SIAM J. Math. Anal., 13 (1982), 594-606.

[8] K.A. Ames, L.E. Payne and J.C. Song, *On two classes of nonstandard parabolic problems*, J. Math. Anal. Appl, **311** (2005), 254-267.

[9] K.A. Ames, R.J. Hughes, *Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space*, Semigroup Forum, Vol. **70** (2005), No 1, 127-145.

[10] A. Ashyralyev, A. Hanalyev, P.E. Sobolevskii, *Coercive solvability of the nonlocal boundary value problem for parabolic differential equations.* Abstact and applied analysis, No. 6 : (2001) 53-61.

[11] A. Ashyralyev, I. Karatay, P.E. Sobolevskii, *On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations.* Hindawi publishing corporation. Discrete dynamics in nature and society, No. 2 (2004) 273-286.

[12] E.F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Springer-Verlag, (1961).

[13] A.V. Bitsadze, A.A. Samarskii, *On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 185, No. 4, 739-740 (1969).

[14] V. M. Borok, L.V. Fardigola, *Nonlocal well-posed boundary problems in a layer.* Translated from Ukrainskii mathematicheskii zhurnal, vol. 48, No. 1, pp. 20-25, (1990).

[15] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Some new boundary value problems for a class of partial differential equations. Part I*, Diff. Uravn., **4**, (1968), 1081-1101, (Russian). [English. transl-Diff. Equat., 770-775].

[16] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *A mixed problem for certain pluri-parabolic differential equations*, Diff. Uravn., **6** (1970), 1624-1630 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 1234-1239].

[17] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Goursat Problem for abstract linear differential equation of second order*, Diff. Urav., Vol. **7** (1971), No. **7**, 1001-1030 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 770-779].

[18] A. Bensoussan, P.L. Chow and J.-L. Lions, *Filtering theory for stochastic processes with two-dimensional time parameter*, Math. Comput. Simulation **22** (1980), No. 3, 213-221.

[19] H. Brezis, *Analyse fonctionelle, Théorie et application*, Masson (1993).

[20] L. Byszewski, V. Lakshmikantham, *Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space*, Appl. Anal., **40** No. 1 (1991), 11-19.

[21] J. Baumeister, A. Leitao, *On iterative methods for solving ill-posed problems modled by partial differential equations*, J. Inv. Ill-Posed Problems., Vol. **9.1** (2001), 1-17.

[22] A. Brenner, *The Mixed Problems For Multidimensional Time Polyparabolic Operators*, http ://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/95/95-322.ps.gz.

[23] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for ill-posed evolution problems with two-dimensional time*, Analytic Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE-2003), 15-23, Cambridge Scientific publishers (2005).

[24] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for a class of ill-posed Cauchy problems* (to appear in GMJ).

[25] V.I. Chesalin, *A problem with nonlocal boundary conditions for certain abstract hyperbolic equations*, Diff. Uravn., **15** (1979), No. 11, 2104-2106, (Russian).

[26] V.I. Chesalin, *A problem with nonlocal boundary conditions for abstract hyperbolic equations*, Vestn. Beloruss. Gos. Univ. Ser. **1** Fiz. Mat. Inform., (1998), No. 2, 57-60, (Russian).

[27] G.W. Clark, S.F. Oppenheimer, *Quasireversibility methods for non-well posed problems*, Elect. J. Diff. Eqns., **8** (1994), 1-9.

[28] W.A. Day, *Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories*, Moscow. Nauka, English trans, Springer Quart. Appl. Math., 21, 155-160.

[29] A.A. Dezin, *General questions in theory of boundary value problems*, Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag, (1980).

[30] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part **I***, Interscience, New-York, (1985).

[31] M. Denche, K. Bessila, *A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems*, J. Math. Anna. Appl., **301** (2005), 419-426.

[32] H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic, (2000).

[33] L.V. Fardigola, *On two-point nonlocal boundary-value problem in a layer for an equation with variable coefficients*, Sibirian Mathematical journal, vol. 38, No. 2, (1997).

[34] L.V. Fardigola, *Nonlocal two-point boundary-value problems in a layer with differential operators in the boundary condition.* Translated from Ukrainskii mathematicheskii zhurnal, vol. 47, N. 8, pp. 1122-1128, (1995).

[35] A. Friedmann, *The Cauchy problem in Several time variables*, Journ. of Math. and Mech., **11** (1962), 859-889.

[36] A. Friedmann, W. Littman, *Partially characteristic boundary problems for hyperbolic equations*, Journ. of Math. and Mech., **12** (1963), 213-224.

[37] H.O. Fattorini, *The abstract Goursat problem*, Pacific. J. Math., Vol. **37** (1971), No. 1, 51-83.

[38] L. Garding, *Cauchy's Problem for hyperbolic equations*, University of chicago, Lectures notes, (1957).

[39] N.S. Gencev, *On ultraparabolic equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR., **151**, No. 2 (1963), 265-268.

[40] S.G. Gindikin, *A generalization of parabolic differential operators to the case of multi-dimensional time*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., **173** (1967), 499-502, (Russian).

[41] C.W. Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, Wiesbaden, (1993).

[42] L. G. Gomboev, *An ill-posed problem for an equation of ultraparabolic type*, Some problems in differential equations and discrete mathematics, 44-51, Novosibirsk. Gos. Univ., Novosibirsk, 1986, (Russian).

[43] A. Guezane-Lakoud, F. Rebbani, *Strong solution for an abstract non local boundary value problem*, Int. J. Appl. Math., **4** (2000), No. 4, 469-478.

[44] A.V. Gulshak, Properties of solutions of equations containing powers of an unbounded operator, Diff. Eq., Vol. **39**, No. 10 (2003), 1428-1439.

[45] D. Gordeziani , G. Avalishvili and M. Avalishvili, *On nonclassical multi-time evolution equation in abstract spaces*, Bull. Georgian Acad. Sci., Vol. **172**, No. 3 (2005), 384-387.

[46] J. Hadamard, *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*,Yale Uni Press, New Haven, 1923.

[47] P. Hillion, *The Goursat problem for the homogenous wave equation.* J. Math. Phys, **31** (1990), 1939-1941.

[48] Y. Huang, Q. Zheng, *Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 3005-3012.

[49] M. Iannelli, *Mathematical theory of age-structured population dynamics*, Giardini Editori e Stampatori, Pisa, 1995.

[50] V.S. Il′kiv, B.I. Ptashnyk, *Problems for partial differential equations with non-local conditions. Metric approach to the problem of small denominators*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 12, (2006).

[51] A.M. Il′in, *On certain class of ultraparabolic equation*, Dok. Akad. Nauk SSSR., **159**, No. 6 (1964), 1214-1217.

[52] N. I. Ionkin, *Solution of the boundary value problem for the heat equation with nonclassical boundary condition.* Differential equartions, 13, 294-304 (1977).

[53] M. Ivanchov, *Inverse problem for equation of parabolic type.* VNTL, Lviv (2003).

[54] F. John, *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), 551-585.

[55] S.G. Krein. *Linear Differential Equations in Banach Space*, American Mathematical Society, Providence, RI (1971).

[56] J. B. Keller. *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, **83** : 107-118, (1976).

[57] V.A. Kozlov, V.G. Maz′ya, *On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations*, Leningrad Math. J., **1** (1990), No. 5, 1207-1228.

[58] S.K. Kulkarni, M. T. Nair, *Characterization of closed range operators*, Indian J. Pure and Appl. Math., **31** (4), 353-361, (2000).

[59] V.I. Korzyuk, *The method of enegy inequalities and molifying operators*, Vestnik Belgosuniversiteta. Ser. **1**. Fizika, Matematika, Informatika, **3** (1996), 55-71 (Russian).

[60] J. Leray, *Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients*, Priston, Just for Adv. Study., 1952.

[61] R. Lattès, J. L. Lions, *The Method of Quasireversibility, Applications to Partial Differential Equations*, Amer. Elsevier, New-York, (1969).

[62] L. Lorenzi, *An abstract ultraparabolic integrodifferential equation*, Le Mathematiche, Vol. **LIII** (1998), Fascicolo II.

[63] V.P. Mikhailov, *The analytic solutions of Goursat problem for the system of differential equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady **115** (1957), 450-453].

[64] V.P. Mikhailov, Non-analytical solutions of Goursat's problem for a system of differential equations in two independent variables, Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady **117** (1957), 759-762].

[65] I.V. Mel′nikova, *The method of quasi-reversibility for abstract parabolic equations in a Banach space*, Trudy Inst. Mat. i Meh. Ural. Naučn. Centr Akad. Nauk SSSR Vyp. **17** Metody Rešenija Uslovno-korrekt. Zadač., (1975), 27-38, (Russian).

[66] A.M. Nakhushev, *On non local problems with shift and their connection with loaded connection*, Differents. Uravn., 21, No. 1, 92-101. (1985).

[67] A.M. Nakhushev, *Equations of mathematical biology [in Russian]*, Vysshaya Shkola, Moscow (1995).

[68] L.E. Payne, *Improperely Posed Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, PA, (1975).

[69] B.I. Ptashnyk, P.I. Shtabalyuk *Multipoint problem for hyperbolic equations in a class of functions almost periodic with respect to spatial variables*, Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya, 35, 210-215 (1992).

[70] B.I. Ptashnyk, M.M. Symotyuk, *Multipoint problem for nonisotropic partial differential equations with constant coefficients*. Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 55, No. 2, (2003).

[71] S.G. Pyatkov, *Solvability of boundary value problems for an ultraparabolic equation : in Nonclassical Equations and Equations of Mixed Type*, Sbornik Nauchnikh Trudov, Institute of Mathematics, Novosibirsk, (1990), 182-197, (Russian).

[72] W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw-hill Inc., New-York, (1991).

[73] F. Rebbani, F. Zouyed, *Boundary value problem for an abstract differential equation with nonlocal boundary conditions*, Maghreb Math. Rev., Vol. **8** (1999), No. 1 & 2, 141-150.

[74] F. Rebbani, N. Boussetila and F. Zouyed, *Boundary value problem for a partial differential equation with nonlocal boundary conditions*, Proceeding of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Vol.**10** (2001), 122-125.

[75] K. Schugerl, *Bioreaction engineering. Reactions nvolving microorganisms and cells, in : Fundamentals, Thermodynamics, Formal Kinetics, Idealized reactors types and operation modes*, vol. 1, Wiley (1987).

[76] R.E. Showalter, *The final value problem for evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 563-572.

[77] R.E. Showalter, *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations*, Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier (1983).

[78] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solution of Ill-posed Problems*, Winston & Sons, Washington, DC, (1977).

[79] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelber, (1995).

[80] S.A. Tersenov, *Basic boundary value problems for one ultraparabolic equation*, Sebernian Mathematical journal, Vol. **42**, No. 6 (2001), 1173-1189.

[81] P.N. Vabishchevich, *Nonlocal parabolic problem and inverse heat problem*, P.N.. Differents. Uravn., 17, No. 7, 1193-1199 (1981)

[82] V.S. Vladimirov, Yu. N. Drozhzhinov, *Generalized Cauchy problem for an ultraparabolic equation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **31** (1967), 1341-1360, (Russian). [English transl : Math. USSR-Izvestija, **1**, 1285-1304].

[83] R. Volevič, S. G. Gindikin, *The Cauchy problem for ultraparabolic problems*, Diff. Eqs.**II**, MATH USSR SB., (1969), **7** (2), 205-226.

[84] N.I. Yurchuk, *The Goursat problem for second order hyperbolic equations of special kind*, Diff. Uravn., **4** (1968), (a), 1333-1345, (Russian). [English transl : Diff. Equat., 694-700].

[85] N.I. Yurchuk, *A partialy characteristic mixed boundary value problem with Goursat initial conditions for linear equations with two-dimensional time*, Diff. Uravn., **5** (1969), (b), 898-910, (Russian). [English Trans : Diff. Equat., 652-661].

[86] N.I. Yurchuk, *The method of energy inequalities in the study of operator-differential equations*, Dissertation, Moscow, (1981).

[87] F. Zouyed, F. Rebbani and N. Boussetila, *On a class of multitime evolution equations with nonlocal initial conditions.*Abstract and Applied Analysis. Volume 2007, Article ID 16938, 26 pages, doi :1155/2007/16938.