وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Faculté des Sciences

BADJI MOKHTAR –ANNABA

UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de magister

PROBLÈME MAL POSÉ POUR L'OPÉRATEUR DE BESSEL, APPLICATION D'UNE MÉTHODE DE RÉGULARISATION

Par
Toumi Habiba

Devant le jury

Hocine Sissaoui	**PRESIDENT**	Prof.	U.B.M. ANNABA
Nouar Ahmed	**RAPPORTEUR**	M.C.A.	U. SKIKDA
Faouzia Rebbani	**EXAMINATEUR**	Prof.	U.B.M. ANNABA
Brahim Khodja	**EXAMINATEUR**	Prof.	U.B.M. ANNABA

***Année* 2010**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Mèmoire de Magister

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES
Département De Mathématiques

Option **: Systèmes Dynamiques et Calcul Stochastique**

Présenté Par :
TOUMI HABIBA

PROBLÈME MAL POSÉ POUR L'OPÉRATEUR DE BESSEL, APPLICATION D'UNE MÉTHODE DE RÉGULARISATION

Soutenu le :..../...../2010

Devant le Jury :

H. SISSAOUI	**Président**	**Prof.**	**U.B.M ANNABA**
A. NOUAR	**Rapporteur**	**M.C.A**	**U.SKIKDA**
F. REBBANI	**Examinateur**	**Prof.**	**U.B.M ANNABA**
B. KHODJA	**Examinateur**	**Prof.**	**U.B.M ANNABA**

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la stabilisation d'un problème mal posé engendré par

une équation différentielle du premier ordre dont, le coefficient est un opérateur non borné.

Nous exposons quelques méthodes de régularisation, avec des résultats sur la convergence et les estimations d'erreur.

Nous appliquons ensuite l'une des méthodes exposée à la résolution d'un problème mal posé pour l'opérateur de Bessel.

ABSTRACT

In this work, we study the stabilizations of the ill-posed problem which is created by the differential equation of first order; the coefficient is the unbounded operator in a Hilbert space.

We expose some methods of regulation with the results about the convergence and the estimation of error.

Then; we apply one of the exposed methods to the resolution of the ill-problem posed for the Bessel operator.

ملخص

يتضمن هذا العمل دراسة تسوية مسألة تراجعية مطروحة بشكل سيئ

والمتمثلة في معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بمؤثر خطي غير محدود, لداك نقترح بعض الطرق للمعالجة, وهده الأخيرة تعطينا بعض النتائج التقريبية مع تقدير الخطى

وفي النهاية نقوم بتطبيق إحدى هذه الطرق من أجل تسوية مسألة مطروحة بشكل سيء متعلقة بمؤثر بسال.

Dédicaces

Louange est à Allâh, nous le louons, demandons son aide et son pardon. Nous nous mettons sous sa protection contre le mal de nos âmes et les méfaits de nos actions. Celui qu'Allâh guide, nul ne peut l'égarer celui qu'Allâh égare, il n'a point de guide.

Et j'atteste qu'il n'y a de divinité qu'Allâh seul, sans associé & que Mohamed est son serviteur et son Messager, que la prière et la paix d'Allâh soient sur lui ainsi que sur sa famille et ses compagnons et ceux qui les suivent de bonne foi jusqu'an jour de la résurrection.

Et j'invoque Allâh, qu'il soit glorifié. Le Garant et le Tout-Puissant, par ses plus Beaux Noms et Attributs qu'il fasse que ce travail lui soit voué exclusivement. Et que cela me soit bénéfique dans ma vie & après ma mort. Qu' il le soit aussi pour tous ceux qui l'étudient, l'enrichissent et participent à son amélioration et développement.

D'un coeur plein d'affection et de tendresse, je dédie ce travail à :

Mes très chers parents qui représentent pour moi l'exemple de sacrifice, de dévouement et d'honnêteté.
Mon mari pour son précieux soutien et qui m'a toujours encouragé et aidé à surmonter les difficultés.
Mon fils qui m'a toujours laissé travaillér et que j'aime beaucoup.
Mes soeurs & frères pour leur profond amour et affection.
Toute la famille.
Tous mes amis.
Et à ceux que j'aime et qui m'aiment et me veulent du bien.

H. TOUMI

Remerciments

Ce mémoire est le résultat de plusieurs années de travail entêté, dans des conditions parfois très difficiles qui demande beaucoup de sacrifices, de courage et de régularité.

Je saisi cette occasion pour témoigner ma grande reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Je tiens, tout particulièrement, à adresser mes premiers remerciements à Monsieur Ahmed Nouar, pour la confiance et le soutien apportés tout au long de ce mémoire, pour ses compétences et sa disponibilité dont il a fait preuve en dirigeant ce travail. J'ai pu découvrir un homme aux grandes qualités humaines et scientifiques. Merci de m'avoir aiguillé, transmis votre passion de la recherche, pour votre motivation, votre soutien sans faille, votre disponibilité. Ses apports ont permis la concrétisation de ce travail.

Je remercie, également, Monsieur le professeur Hocine Sissaoui qui m'a accueilli et qui a bien voulu m'encourager par ses conseils et ses aides et pour avoir accepté de présider le jury d'examen de soutenance.

Je tiens, également, à exprimer toute ma gratitude à Madame Faouzia Rebbani et Monsieur Brahim Khodja. Qu'ils trouvent, ici ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'ils m'ont témoigné et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être examinateurs de mon travail.

Je ne pourrais en aucun cas oublier mes remerciements les plus dévoués qui s'adressent directement à mes enseignants de post graduation, Monsieur H. Sissaoui, Monsieur A. Makklouf, Madame N. Djellab, Monsieur H. Boutabia, et Madame Z. Ben hamadi, ainsi qu'à Madame Z. Ben mostfa.

H.TOUMI

Table des matières

Introduction **1**

1 OPÉRATEURS LINÉAIRES ET SEMI GROUPES **3**

1.1 Opérateur fermé-fermeture 4

1.2 Opérateur Adjoint 5

1.3 Opérateur Auto-Adjoint 5

1.4 Spectre d'un opérateur linéaire 6

1.5 Décomposition spectrale d'un opérateur Auto-Adjoint 6

1.5.1 Décomposition spectrale d'un opérateur borné 6

1.5.2 Décomposition spectrale d'un opérateur non borné 7

1.6 L'intégrale de Bochner 8

1.7 Rappel sur la théorie des semi-groupes 9

1.7.1 Semi-groupe fortement continu 9

1.8 Problème de Cauchy 13

1.8.1 Problème homogène ($f = 0$) 13

1.8.2 Problème non homogène ($f \neq 0$) 14

1.9 Opérateurs intégraux et équations intégrales 14

2 PROBLÈMES MAL POSÉS ET MÉTHODES DE RESOLUTION **16**

2.1 Problèmes mal posés 16

2.1.1 Les problèmes inverses 18
2.2 Méthodes de résolution 20
2.2.1 Méthode de Quasi-Réversibilité(Q.R) 21
2.2.2 La méthode de Quasi-Réversibilité Modifiée 25
2.2.3 Méthode des conditions non locales 30

3 RÈGULARISATION D'UN PROBLÈME MAL POSÉ POUR L'OPÉRATEUR DE BESSEL 44

3.1 Position du problème 44
3.2 Régularisation du problème 47

Conclusion et perspectives 49

Bibliographie 50

Introduction

Dans la vie nous avons besoin des moyens scientifiques et techniques pour améliorer les conditions de notre existence et pour connaître la nature et ses secrets. L'utilisation efficace de ces moyens est liée à la résolution de problèmes mathématiques. Parfois nous sommes amenés, dans certaines applications, à traiter de problèmes dont les données ne sont définies que de manière approchée et il est alors important, en plus de l'existence et l'unicité, que la solution soit dépendante de manière continue de ces données. Les problèmes dans lesquels cette condition n'est pas vérifiée étaient considérés comme sans intérêt pratique et Hadamard a défini au début du 20^e siècle les critères mathématiques pour un problème d'être bien posé par la réalisation des trois condition suivantes :

- La solution existe ;
- Cette solution est unique ;
- Elle dépend continûment des données du problème.

Si l'une au moins de ces conditions n'est pas vérifiée le problème est dit mal posé. Une classe importante de problèmes mal posés est constituée des problèmes inverses où il s'agit de remonter à l'état initial d'un système à partir de la connaissance de son état final. Les progrès technologiques du 20^e siècle ont mis en avant l'importance pratique de cette classe de problèmes dans différents domaines comme la gravimétrie, l'imagerie médicale, l'ingénierie pétrolière, l'hydrogéologie, la chimie, le radar, l'acoustique sous-marine, la mécanique quantique, le traitement d'image. Les multiples possibilités d'application ont relancé l'intérêt

théorique pour la notion de problème mal posé. Les recherches autour de ce thème ont donné naissance à plusieurs méthodes de régularisation parmi lesquelles :

1) **La méthode de Quasi – solution** (**Q**.**S**) **de Tikhonov**.

2) **Convexité logarithmique de L**.**E Payne**, **K**.**Miller et A**.**S**.**Carraso**.

3) **Les procédures itératives de V**.**A**.**Kozlovet V**.**G Maz′ya**.

4) **La technique des C semi – groupes régularisées de I**.**V**.**Mel′nikova**, **Q**.**Zheng et J**.**Zheng**.

5) **La méthode de Valeurs quasi – limites**(**Q**.**B**.**V**.**P**) **de G**.**W**.**Clark et S**.**F**.**Oppenheimer**.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons des notions et des résultats de la théorie des opérateurs linéaires et de la théorie des semi-groupes. Dans le deuxième chapitre nous présentons la notion de problème mal posé, avec quelques exemples, et après on présente trois méthodes de régularisation qui sont :

1) La méthode de Quasi-réversibilité de R.Lattès et L.J.Lions.

2) La méthode de Quasi réversibilité modifiée de F.Rebbani. et N.Boussetila.

3) La méthode des conditions non locales qui est présentée par M. Denche et K.Bessila .

Dans le troisième chapitre nous étudions un problème mal posé pour l'opérateur de Bessel, et appliquons la dernière méthode ci-dessus pour sa régularisation.

Chapitre 1

OPÉRATEURS LINÉAIRES ET SEMI GROUPES

►Soit $\mathfrak{X}$ un espace vectoriel normé, on note par $\|.\|$ la norme dans cet espace.

Définition 1.0.1 *Un opérateur linéaire A de $\mathfrak{X}$ est une application linéaire définie sur une variété linéaire de $\mathfrak{X}$ notée par $D(A)$.*

$$A : D(A) \subset \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}.$$

Définition 1.0.2 *On dit que l'opérateur A est continu en $x_0 \in \mathfrak{X}$, si :*

$$\lim_{x \to x_0} Ax = Ax_0.$$

Définition 1.0.3 *L'opérateur A est dit continu dans $\mathfrak{X}$ si, et seulement si A est continu en chaque point de $\mathfrak{X}$.*

Définition 1.0.4 *L'opérateur A est dit borné, s'il transforme tout ensemble borné de $\mathfrak{X}$ en un ensemble borné de $\mathfrak{X}$.*

Proposition 1.0.1 *Si l'opérateur A est borné alors :*

$$\exists c \succ 0 \quad tel\ que :\ \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in D(A).$$

Proposition 1.0.2 *L'opérateur linéaire A est borné si, et seulement si il est continu.*

On note par $L(\mathfrak{X})$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus sur $\mathfrak{X}$.

▶ Dans tout ce qui suit, nous désignons par H un espace de Hilbert séparable, on note par $|.|$ la norme dans cet espace, et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire correspondant.

Théorème 1.0.1 *(Théorème de représentation de Riesz − Fréchet) −Étant donné* $\varphi \in \mathrm{H}'$ *(* H' *l'espace dual de* H *) il existe* $f \in \mathrm{H}$ *unique, tel que :*

$$\varphi(y) = (\varphi, y) = \langle f, y \rangle, \forall y \in H.$$

De plus on a :

$$|f| = |\varphi|_{\mathrm{H}'}.$$

1.1 Opérateur fermé-fermeture

Définition 1.1.1 *Soit A un opérateur linéaire dans H, on dit que cet opérateur est fermé : si* $\forall \{x_n\} \in D(A)$

$$(x_n \longrightarrow x \text{ et } y_n \longrightarrow y) \Longrightarrow (x \in D(A) \text{ et } y = Ax).$$

Proposition 1.1.1 *Tout opérateur borné, par tout défini est fermé.*

Proposition 1.1.2 *Soit A et B deux opérateurs linéaires, si A est fermé et B est borné, alors $A + B$ est un opérateur fermé.*

Définition 1.1.2 *On dit que l'opérateur A' est l'extension de l'opérateur A qui est défini sur H si :*

1) $D(A) \subset D(A')$;

2)$\forall x \in D(A)$, $Ax = A'x$.

Définition 1.1.3 *On dit que l'opérateur linéaire A défini dans H est fermable, s'il possède une extension fermée.*

Définition 1.1.4 *La plus petite extension fermée d'un opérateur A est appelée fermeture de A et notée par $\bar{A}$.*

1.2 Opérateur Adjoint

Soit A un opérateur linéaire continu tel que $\overline{D(A)} = H$.

Soit $x \in H$. On considère la forme linéaire $l_x(y) = \langle x, Ay \rangle$ alors $l_x \in H', \forall x \in H$.

On note $l_x = A^* x$.

L'opérateur linéaire A^* défini par

$$\langle A^* x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle .$$

est appelé adjoint de A et est défini et continu sur $D(A^*)$, où

$$D(A^*) = \{ y \in H, \forall x \in D(A), \exists A^* y = y^* \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \} .$$

Proposition 1.2.1 *Tout opérateur linéaire à domaine dense dans H, admet un opérateur adjoint fermé.*

1.3 Opérateur Auto-Adjoint

Définition 1.3.1 *L'opérateur A est dit auto-adjoint si $A = A^*$;c-a-d :*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle , \forall x, y \in D(A) .$$

Théorème 1.3.1 *Un opérateur linéaire A défini sur H est auto-adjoint, s'il satisfait les conditions suivantes :*

1) *$D(A)$ est dense dans H;*
2) $D(A^*) \subset D(A)$;

3)$\forall x, y \in D(A), \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

Définition 1.3.2 *On dit qu'un opérateur auto-adjoint A est positivement défini si :*

$$\forall x \in H, \langle Ax, x \rangle \geqslant \sigma |x|^2 , \text{ où } \sigma \rangle 0.$$

1.4 Spectre d'un opérateur linéaire

Soit A un opérateur linéaire défini sur l'espace de Hilbert H, fermé et de domaine $D(A)$ dense dans H. Considérons l'opérateur linéaire $(A-\lambda I)$ défini sur H, où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité sur H.

Définition 1.4.1 *Le nombre complexe λ est appelé valeur régulière de l'opérateur linéaire A, si l'opérateur $(A-\lambda I)$ admet un opérateur inverse borné. Cet opérateur inverse est noté par $R(\lambda)$.*

L'ensemble des valeurs régulières de l'opérateur A est appelé ensemble résolvant de A et noté par $\rho(A)$. Son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est appelé spectre de A et noté par $\sigma(A)$.
Soit λ un nombre complexe appartenant au spectre de A, nous avons alors plusieurs possibilités :
1) *L'opérateur $R(\lambda)$ n'existe pas et λ est alors appelé valeur propre de l'opérateur A.*
2) *L'opérateur $R(\lambda)$ existe, son domaine de définition est dense dans H, avec $\overline{D(R(\lambda))} = H$.*
Dans ce cas, on dit que λ appartient au spectre continu.
3) *L'opérateur $R(\lambda)$ existe mais $\overline{D(R(\lambda))} \neq H$.*
Dans ce cas, on dit que λ appartient au spectre résiduel.
L 'éventualité (3) *ne peut se réaliser dans le cas d'un opérateur auto-adjoint A, car pour tout λ qui n'est pas valeur propre de A :*

$$\overline{D(R(\lambda))} = H.$$

1.5 Décomposition spectrale d'un opérateur Auto-Adjoint

1.5.1 Décomposition spectrale d'un opérateur borné

Définition 1.5.1 *Soit A un opérateur auto-adjoint borné sur un espace de Hilbert H séparable, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une fonction opératorielle définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :*

1) $\forall\lambda, E_\lambda$ *est une projection orthogonale.*

2) $E_\lambda = 0$ *si* $\lambda \prec m$.

3) $E_\lambda = I_H$ *si* $\lambda \succ M$.

Avec : $m = \inf_{|x|=1} \langle Ax, x\rangle$ *et* $M = \sup_{|x|=1} \langle Ax, x\rangle$.

4) E_λ *est non décroissante*

$$\lambda < \mu \Rightarrow E_\lambda \leq E_\mu.$$

5) E_λ *est continue à droite*

$$\forall x \in H : \lim_{\mu \to \lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x.$$

E_λ *est alors appelée fonction spectrale de* A. *On remarque que cette fonction est une mesure, c'est pourquoi on peut écrire* $Ax = \int_m^M \lambda dE_\lambda x$ *et on note symboliquement* $A = \int_m^M \lambda dE_\lambda$

1.5.2 Décomposition spectrale d'un opérateur non borné

Définition 1.5.2 *Soit* A *un opérateur auto adjoint non borné, on dit que* E_λ *est une fonction spectrale de l'opérateur* A, *si :*

1)$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, E_λ *est un projection orthogonale.*

2)$\forall x \in H \lim_{\lambda \longrightarrow -\infty} E_\lambda x = 0$ et $\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} (E_\lambda x - x) = 0$.

3) E_λ *est non décroissante.*

4) E_λ *est continue à droite.*

5)$\forall x \in D(A), \forall y \in H : \langle Ax, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\langle E_\lambda x, y\rangle$, *avec*

$$D(A) = \left\{ x \in H; |Ax|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle \ \ existe \right\}.$$

Dans ce cas la décomposition spectrale de l'opérateur A *et donnée, par :* $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$.

Remarque 1.5.1 *Si l'opérateur A est positivement défini ; on a :* $A = \int_{\sigma}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}$, *où* $\sigma \rangle 0$.

Définition 1.5.3 *Soit A un opérateur auto adjoint borné et soit*

$$m = \inf_{|x|=1} \langle Ax, x \rangle ,$$

et

$$M = \sup_{|x|=1} \langle Ax, x \rangle ,$$

si g est une fonction définie continue sur $[a, b]$ et $[m, M] \subset [a, b]$ on définit la fonction opératorielle $g(A)$ par :

$$g(A) = \int_{m}^{M} g(\lambda)\, dE_{\lambda}.$$

Théorème 1.5.1 *Chaque opérateur adjoint (borné ou non) possède une fonction spectrale unique.*

1.6 L'intégrale de Bochner

►Soit $\mathfrak{B}$ un espace de Banach, muni de la norme $\|.\|_{\mathfrak{B}}$, f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans l'espace $\mathfrak{B}$, $\mathcal{M}$ une mesure définie sur le même intervalle.

Définition 1.6.1 *On dit que f est une fonction simple si elle prend sur $[a, b]$ un nombre fini de valeurs x_i sur D_i avec $D_i \subset [a, b]$ et $\cup D_i \subset [a, b]$.*

Définition 1.6.2 *On dit que la fonction f est intégrable au sens de Bochner s'il existe une suite des fonctions simples f_n, tel que :*

$$\int_{a}^{b} \|f_n(t) - f(t)\|_{\mathfrak{B}}\, d\mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

On pose alors :

$$\int_{a}^{b} f(t)\, d\mathcal{M} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{a}^{b} f_n(t)\, d\mathcal{M}.$$

1.7 Rappel sur la théorie des semi-groupes

1.7.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.7.1 *On dit qu' une famille d'opérateurs linéaires bornés*

$$S(t) : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B},$$

dépendants du paramètre $t \geqslant 0$, *forme un semi-groupe si :*

$1) S(0) = I_{\mathfrak{B}}$;
$2) S(t_1 + t_2) = S(t_1) S(t_2)\ \forall t_1, t_2 \geqslant 0.$

Définition 1.7.2 *Un semi groupe* $(S(t))_{t \geqslant 0}$ *est dit fortement continu à l'origine si :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|S(t) x - x\|_{\mathfrak{B}} = 0,\ \forall x \in \mathfrak{B}.$$

On dit aussi qu'il est de classe $\mathcal{C}_0$.

Définition 1.7.3 *On dit que* $S(t)$ *est fortement continu si :* $\forall x \in \mathfrak{B}$ *l'application*

$$t \longrightarrow S(t) x,$$

est continue.

Théorème 1.7.1 $(de\ la\ croissance\ exponentielle\ du\ semi - groupe) - Soite\ (S(t))_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe fortement continu, alors :*

$$\exists M \geqslant 1\ et\ \omega \in \mathbb{R}\ tel\ que \|S(t)\|_{\mathfrak{B}} \leqslant M \exp(\omega t) \quad \forall t \geqslant o. \qquad (*)$$

Remarque 1.7.1 *Si* $(S(t))_{t \geqslant 0}$ *est un semi-groupe fortement continu à l'origine vérifiant* $(*)$, *alors il est fortement continu.*

Définition 1.7.4 *On dit que le semi-groupe* $S(t)$ *est borné, si il existe* $M \rangle\ 0$, *tel que*

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{B}} \leqslant M, \forall t \geqslant 0.$$

Si $M \leqslant 1$, *on dit que* $S(t)$ *est un semi groupe de contraction*.

Définition 1.7.5 *Le générateur infinitésimal du semi groupe* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *est défini par :*

$$Ax = \lim_{\zeta \longrightarrow 0^+} \frac{S(\zeta)x - x}{\zeta}, \forall x \in D(A),$$

où

$$D(A) = \left\{ x \in \mathfrak{B},\ tel\ que \lim_{\zeta \longrightarrow 0^+} \frac{S(\zeta)x - x}{\zeta}\ est\ finie \right\}.$$

Théorème 1.7.2 *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu sur* $\mathfrak{B}$ *et soit son générateur infinitésimal. Alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $D(A)$ *est dense dans* $\mathfrak{B}$ *et* A *est un opérateur fermé.*

(2) *Pour tout* $x \in \mathfrak{B}$ *et* $t \geq 0$, *on a :*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} S(s)xds = S(t)x.$$

(3) *Pour tout* $x \in \mathfrak{B}$ *et* $t \geq 0$, *on a :*

$$\int_0^t S(s)xds \in D(A),$$

et

$$A\int_0^t S(s)xds = S(t)x - x.$$

(4) *Pour tout* $x \in D(A)$ *et* $t \geq 0, S(t)x \in D(A)$, *donc* $S(t)x$ *est dérivable et, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(t)x &= AS(t)x \\ &= S(t)Ax.\end{aligned}$$

(5) *Pour tout* $x \in D(A)$ *et* $t \geq 0, s \geq 0$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\varsigma)Axd\varsigma = \int_s^t AS(\varsigma)xd\varsigma.$$

Théorème 1.7.3 *Soient* $(T(t))_{t\geq 0}$*et* $(S(t))_{t\geq 0}$ *deux semi-groupes fortement continus de même générateur infinitésimal* A*. Alors* $S(t) = T(t)$ *pour tout* $t \geq 0$.

Soit λ est une valeur régulière de l'opérateur linéaire A .

On a :

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)xdt.$$

Théorème 1.7.4 (*Hille Yosida*) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur fermé* A*, à domaine* $D(A)$*dense dans* $\mathfrak{B}$*, soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe* $\mathcal{C}_0$ *est qu'il existe deux nombre réels* M *et* ω*, tel que*

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$$

et

$$\|R(\lambda)^n\|_{\mathfrak{B}} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où

$$R(\lambda)^n = (\lambda I - A)^{-n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-\lambda t}S(t)dt.$$

Exemple : Soit $\mathfrak{B} = L^2(\mathbb{R}^n)$ et Δ l'opérateur de Laplace de domaine

$$D(\Delta) = \left\{V : \ V \in L^2(\mathbb{R}^n), \ \ \Delta V \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

Δ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe C_0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $D(\Delta)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et Δ est fermé.

Remarque 1.7.2 *Si A est un opérateur qui admet un système orthonormé complet de fonctions propres (φ_{n_i}) associées aux valeurs propres (λ_n), λ_n étant de multiplicité r_n, alors le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est engendré par A s'exprime, pour tout y dans l'espace de Hilbert H, par :*

$$S(t)\, y = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n t) \sum_{i=1}^{r_n} \langle y, \varphi_{n_i}\rangle \varphi_{n_i}.$$

Remarque 1.7.3 *L'adjoint A^* de A engendre le semi-groupe $(S^*(t))_{t\geq 0}$ qui est l'adjoint de $(S(t))_{t\geq 0}$ et est également fortement continu sur le dual H' de H.*

Définition 1.7.6 *Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur l'espace de Banach $\mathfrak{B}$ est dit semi-groupe analytique, si pour $t \geq 0$, les opérateurs $S(t)$ sont linéaires continus et vérifient :*

(1) $S(0) = I_{\mathfrak{B}}$, *pour tout* $t, \tau \geq 0$, $S(t+\tau) = S(t)\, S(\tau)$;
(2) $\forall x \in \mathfrak{B}$, $\lim_{t\to 0^+} S(t)\, x = x$;
(3) $\forall x \in \mathfrak{B}$, *l'application :* $t \longmapsto S(t)\, x$ *est analytique sur* $]0, \infty[$.

Proposition 1.7.1 *Pour qu'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ soit analytique sur $\mathfrak{B}$, il suffit qu'il soit différentiable et que sa dérivée vérifie*

$$\forall t \in]0, T] \ , \|D_t S(t)\, u\|_{\mathfrak{B}} \leq c\frac{\|u\|_{\mathfrak{B}}}{t},$$

pour un certain $T > 0$.

Définition 1.7.7 *Un semi-groupe $S(t)$ de classe $\mathcal{C}_0$ sur $\mathfrak{B}$ est dit compact si l'opérateur $S(t) : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est compact, $(S(t))_{t>0}$ est dit compact si $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$.*

Remarque 1.7.4 *Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est compact, alors en particulier $I_{\mathfrak{B}}$ est compact et $\mathfrak{B}$ est de dimension finie.*

Théorème 1.7.5 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$ semi-groupe. Si $S(t)$ est compact pour tout $t > t_0$, alors $S(t) \in L(\mathfrak{B})$ pour tout $t > t_0$.*

1.8 Problème de Cauchy

Soit le problème suivant :

$$(p)\begin{cases} (1)\ \dfrac{du}{dt} = Au + f \quad pour\ t > 0, \\ \\ (2)\quad u(0) = u_0, \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire, fermé dans l'espace de Banach $\mathfrak{B}$, de domaine $D(A)$, tel que $\overline{D(A)} = \mathfrak{B}$, u_0 et f connus.

Définition 1.8.1 *On dit que la fonction* $u : [0, +\infty[\longrightarrow \mathfrak{B}$ *est solution classique du problème* (p) *si :*

1) u *est une fonction continue de* $[0, +\infty[$ *dans* $\mathfrak{B}$;

2) u *est continûment dérivable sur* $]0, +\infty[$;

3) u *vèrifie le problème* (P) *et* $u(t) \in D(A)$ *pour tout* $t \in]0, +\infty[$.

1.8.1 Problème homogène $(f = 0)$

Théorème 1.8.1 *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$ *semi-groupe engendré par l'opérateur* A *défini sur l'espace de Banach* $\mathfrak{B}$.

Pour tout $u \in D(A)$, *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{du}{dt} = Au\ pour\ t > 0, \\ \\ (2)\quad u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow D(A)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$, *défini par* $u(t) = S(t)u_0$.

1.8.2 Problème non homogène $(f \neq 0)$

Théorème 1.8.2 *si* $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[\ ,\mathfrak{B})$ *(où* $f \in \mathcal{C}\ ([0,+\infty[\,,D(A))$*)*

et $u_0 \in D(A)$ .Alors ;

$$u(t) = S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds,$$

est une solution du problème (p) .

Théorème 1.8.3 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$ *semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$.

(1) *Si* f *est continûment différentiable sur* $[0,+\infty]$, *alors le problème* (p) *possède une solution unique* u *sur* $[0,+\infty]$, *pour chaque* $u_0 \in D(A)$.

(2) *Si* $f \in L^1(]0,+\infty[\,;\mathfrak{B})$, f *est continue sur* $]0,+\infty[$, $f(s) \in D(A)$ *pour chaque* $s \in]0,+\infty[$ *et* $Af \in L^1(]0,+\infty[\,;\mathfrak{B})$, *alors pour chaque* $u_0 \in D(A)$ *le problème* (P) *a une solution classique* u *et une seule sur* $]0,+\infty[$.

1.9 Opérateurs intégraux et équations intégrales

Définition 1.9.1 *L'opérateur* A *qui associe à toute fonction* $u \in L^2[a,b]$ *la fonction* $\int_a^b \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds$ *de* $L^2[c,d]$ *est appelé opérateur intégral de noyau* $\mathcal{K}$ *qui est une fonction définie sur l'espace* $L^2([a,b]\times[c,d])$.

Proposition 1.9.1 *Soit* A *est un opérateur intégral de noyau* $\mathcal{K}$, *alors* A^* *est l'opérateur de noyau* $\mathcal{K}^*$, *où*

$$\mathcal{K}^*(t,s) = \mathcal{K}(s,t)\,.$$

Corollaire 1.9.1 *L'opérateur intégral* A *de noyau* $\mathcal{K}$ *est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau* $\mathcal{K}$ *est symétrique :*

$$\mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}^*(t,s) = \mathcal{K}(s,t)\,,\ \ \forall\,(t,s) \in [a,b]\times[c,d]\,.$$

Définition 1.9.2 *Si A est un opérateur intégral, l'équation $Au = f$, où $f \in L^2(c,d)$est appelée équation intégrale de première espèce.*

Définition 1.9.3 *Si A est un opérateur intégral, l'équation $u - Au = f$, où $f \in L^2(c,d)$ est appelée équation intégrale de deuxième espèce.*

Remarque 1.9.1 *Les équations intégrales de première espèce, qui nous donnent des exemples de problèmes mal posés.*

Définition 1.9.4 *On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est un nombre caractéristique de l'équation de première espèce, s'il existe $\phi(t) \in L^2[a,b]$, telle que*

$$\int_a^b \mathcal{K}(t,s)\,\varphi(s)\,ds = \frac{1}{\lambda}\phi(t).$$

$\phi(t)$ est dite fonction propre associée à λ.

Définition 1.9.5 *On dit que le noyau $\mathcal{K}(t,s)$ de l'équation intégrale de première espèce est fermé si, les fonctions propres de l'équation forment un système orthogonal complet dans $L^2[a,b]$.*

Théorème 1.9.1 (*théorème de Picard*) *L'équation intégrale de première espèce*

$$\int_a^b \mathcal{K}(t,s)\,\varphi(s)\,ds = f(t),$$

dans la quelle $f(t) \in L^2[a,b]$ et $\mathcal{K}$ est symétrique et fermé, admet une solution si, et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 f_n^2$ converge, où λ_n sont les valeurs caractéristiques de l'équation, et f_n les coefficients de Fourier de f par rapport au système des fonctions propres.

Chapitre 2

PROBLÈMES MAL POSÉS ET MÉTHODES DE RESOLUTION

2.1 Problèmes mal posés

Le mathématicien Jacques Hadamard a défini la notion de problème bien posé pour les besoins des problèmes physiques afin de déterminer quelles conditions aux limites sont les plus naturelles pour les problèmes mathématiques qui traitent des modèles physiques réels. Ces problèmes sont posés sous la forme :

$$Az = u. \tag{2.1}$$

Où A est un opérateur défini sur un espace métrique $\mathfrak{M}_1$ à valeurs dans un autre espace métrique $\mathfrak{M}_2$, et d'ensemble de définition $D(A)$.

Le problème (2.1) est dit bien posé (ou correctement posé) sur le couple d'espaces métriques $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ si les conditions suivantes sont réalisées :

1) pour tout élément $u \in \mathfrak{M}_2$ il existe une solution z appartenant à l'espace $\mathfrak{M}_1$;

2) la solution est définie de façon unique ;

3) le problème est stable sur les espaces $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$; c-à-d : une petite perturbation du second membre u n'engendre qu'une petite variation de z.

On dit que le problème (2.1) est mal posé (ou incorrectement posé) si il ne vérifie pas les trois conditions simultanément.

Exemples 1 : Soit à étudier un système d'équations algébriques linéaires de la forme :

$$Az = u,$$

où A=$\{a_{ij}\}$ est une matrice carrée d'éléments a_{ij}, z un vecteur inconnu et u est un vecteur connu.

Pour résoudre ce système on étudie son déterminant.

Si $\det A = 0$ alors le système est dégénéré et dans ce cas il n'admet aucune solution ou bien la solution n'est pas unique. Pour n assez grand le calcul du déterminant nécessite un nombre encore plus grand d'opérations de calcul. L'accumulation des imprécisions peut conduire à un résultat très éloigné de la valeur exacte du déterminant.

Exemple 2 : (Problème de recherche du prolongement analytique d'une fonction)

Soit D un domaine borné et E une courbe appartenant à D et dont la distance à la frontière de D est égale à $d \rangle 0$. z_0 un point de cette frontière. Si f_1 est une fonction analytique sur D et $\epsilon \succ 0$ est fixé, alors la fonction f_2 définie par

$$f_2 = f_1 + \frac{\epsilon}{z - z_0},$$

est aussi analytique sur D. Sur l'ensemble E nous avons

$$f_1(z) - f_2(z) = \frac{\epsilon}{z - z_0},$$

et donc

$$|f_1(z) - f_2(z)| \leq \frac{\epsilon}{d}.$$

Nous avons alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} |f_1(z) - f_2(z)| = 0,$$

uniformément par rapport à z sur E. Mais sur D la quantité $f_1(z) - f_2(z)$ n'est pas bornée, car : nous avons :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\epsilon}{z - z_0} = \infty.$$

Si nous notons par A l'opérateur qui prolonge la fonction f définie sur E, au domaine D alors le problème

$$Af = g,$$

est mal posé, alors qu'il possède une solution unique en vertu du théorème d'unicité des fonctions analytiques.

2.1.1 Les problèmes inverses

La notion de problème inverse est relative puisque un problème est dit inverse par rapport au problème direct qui est considèré comme plus naturel. La connaissance de l'état initial d'un système à partir de son état à l'instant T est un problème inverse par rapport au problème direct qui est de prévoir l'évolution d'un système à partir de données initiales. Plus généralement dans un problème inverse on veut retrouver les causes à partir des effets. Ces derniers sont en général connus par l'observation et la mesure et donc ne sont détermines que de manière approchée d'où l'importance de la dépendance continue pour avoir des solution fiables.

Les problèmes inverses ont beaucoup d'applications dans les sciences de l'ingénier et en médecine.

Exemple 3 : Le problème de la propagation de la chaleur qui est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad x \in [0,1], t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x,T) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq 1. \tag{3}$$

Le problème est de trouver la température initiale $u(x,0)$, avec $u(x,t)$ une fonction qui satisfait ce problème.

Pour résoudre le problème ci-dessus, nous appliquons la méthode de séparation des variables.

Soit $u(x,t) = X(x)\,Y(t)$.

Si on remplace $u(x,t) = X(x)\,Y(t)$ dans le problème précédent, il vient :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(t)}{Y(t)} = -\lambda^2.$$

Alors

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x),$$

et

$$Y(t) = b_1 \exp\left(-\lambda^2 t\right).$$

.

D'après les conditions aux limites on trouve :

$$X_n(x) = c_n \sin(n\lambda x),$$

et

$$Y_n(t) = b_1 \exp\left(-\lambda^2 t\right).$$

D'où

$$u(x,t) = \sum_{n\geqslant 0} f_n \exp\left(n^2\pi^2 (T-t)\right) \sin(n\pi x).$$

D'après la condition (3) ; on a :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} f_n(x) \sin(n\pi x),$$

d'où

$$f_n(x) = 2\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)\, dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\geqslant 0} f_n \exp\left(-n^2\pi^2 t\right) \sin(n\pi x) \\ &= 2\int_0^1 \sum_{n\geqslant 0} \exp\left(-n^2\pi^2 t\right) \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) f(y)\, dy \\ &= \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy \\ &= \mathcal{T} f. \end{aligned}$$

Avec $\mathcal{T}$ est un opérateur défini dans $L^2([0.1])$.

Ceci la formule du problème inverse comme intégrale de premier espèce.

Comme $\mathcal{T}$ a coefficients de $\exp -n^2\pi^2$ qui est décroissant, ceci implique que ce problème inverse est mal posé.

Exemple 4 : Les problèmes inverses ont une large utilisation dans les sciences médicales, et leur résolution est à la base des technologies qui rendent un grand service à l'humanité dans le domaine de la santé. La plus connue des techniques faisant appel à la notion de problème inverse est la tomographie par rayons X utilisée dans les scanners.

Le domaine d'étude représente une section transversale bidimensionnelle du patient, balayée par un tube à rayons X, et paramétrisée par le vecteur normal u $\in \mathbb{R}^2$, et la distance s.
La modélisation du problème mène à l'équation :

$$\Delta I\left(\mathrm{su}+\mathrm{t}\hat{\mathrm{u}}\right)=-I\left(\mathrm{su}+\mathrm{t}\hat{\mathrm{u}}\right)f\left(\mathrm{su}+\mathrm{t}\hat{\mathrm{u}}\right)\Delta\mathrm{t},$$

dans laquelle û est un vecteur unitaire orthogonal à u et f le coefficient d'atténuation.
en faisant tendre Δt vers 0 nous obtenons l'équation différentielle :

$$\frac{d}{d\mathrm{t}}I\left(\mathrm{su}+\mathrm{t}\hat{\mathrm{u}}\right)=-I\left(\mathrm{su}+\mathrm{t}\hat{\mathrm{u}}\right)f\left(\mathrm{su}+\mathrm{t}\hat{\mathrm{u}}\right).$$

Si on note I_0 et I_1 les intensités des rayons X à l'émetteur et au récepteur respectivement, l'intégration de cette équation différentielle nous donne :

$$-\frac{I_1\left(\mathrm{s},\mathrm{u}\right)}{I_0\left(\mathrm{s},\mathrm{u}\right)}=\int_{\mathrm{R}}f\left(\mathrm{su}+\mathrm{t}\hat{\mathrm{u}}\right)d\mathrm{t}.$$

L'intérêt médical dans ce problème est de déterminer le coefficient d'atténuation f connaissant les deux intensités I_0 et I_1. Mathématiquement nous avons affaire à un opérateur intégral, qui engendre un problème mal posé. Des petites erreurs dans la mesure des intensités I_0 et I_1 peuvent donc donner un coefficient d'atténuation loin de la réalité et fausser alors le diagnostic.

2.2 Méthodes de résolution

Dans cette section, nous présentons quelques méthodes pour régulariser les problèmes de la forme :

$$\begin{cases} u'\left(t\right)+Au\left(t\right)=0, & 0\left\langle t\right\langle T \\ u\left(T\right)=f. \end{cases} \qquad (FVP)$$

Où A est un opérateur linéaire, non borné, auto adjoint et positivement défini dans un espace de Hilbert H, et $f \in H$.
Le problème est de trouver $u(0)=g$ tel que la fonction $u:[0,T]\longrightarrow H$ vérifie le problème présenté ci-dessus.

Si nous appliquons les méthodes classiques pour résoudre le problème (FVP), nous trouvons

$$u(0) = g = \exp(At)u(T).$$

Cette formule montre qu'une petite erreur dans les mesures de la valeur finale donne une valeur initiale très loin de la réalité donc même si la solution existe et est unique ce problème est mal posé.

2.2.1 Méthode de Quasi-Réversibilité(Q.R)

Cette méthode a été introduite par R.Lattés et J.Lions (1967), l'opérateur A dans le problème (FVP) est remplacé par $A_\alpha = g_\alpha(A) = A - \alpha A^2$.
Apres la perturbation, le problème inverse (FVP) devient comme suit :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + A_\alpha u_\alpha(t) = 0 & 0 \langle t \langle T \\ u_\alpha(T) = f. \end{cases} \qquad (\mathrm{P}_{\alpha_1})$$

Le problème est de trouver la valeur initiale $u_\alpha(0)$.
On pose alors $u_\alpha(0) = \xi$, et on résout le problème direct

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\alpha}{dt} + Av_\alpha = 0 \\ v_\alpha(0) = u_\alpha(0) = \xi. \end{cases} \qquad (\mathrm{P}_1)$$

Si v_α est la solution du problème (P_1), alors on étudie la convergence $|v_\alpha(T) - f|$. Sous certaines conditions $v_\alpha(T) \to f$ quand $\alpha \to 0$, ceci nous permet, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, de choisir α de telle sorte que $|v_\alpha(T) - f| < \varepsilon$.

La fonction $v_\alpha(t)$ sera alors considérée sous certaines conditions comme solution du problème (FVP).

Fondements théoriques

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle , \rangle$ et la norme associée $|.|$, V un autre espace de Hilbert dense dans H, et V' son dual, après identification de H et H'(H' le dual de H) on a le schéma :

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

On peut alors construire une telle forme bilinéaire $a(u,v)$ uniformément continue sur $V \times V$; c-a-d : $\exists M \rangle 0$, telle que, $\forall u, v \in V$;

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V . \tag{1.1}$$

Et qui vérifie la propriété de coercivité élargie :

$\exists \lambda > 0, \alpha > 0$ telle que :

$$a(v,v) + \lambda \|v\|_V^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \ . \tag{1.2}$$

On va montrer qu'il existe un opérateur A qui est défini par la forme bilinéaire $a(u,v)$ de la manière suivante :

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v).$$

Soit $u \in H$.

On définit ρ_u application de H dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rho_u : H &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ v &\longrightarrow \rho_u(v) = a(u,v) \end{aligned}$$

On remarque que $\rho_u \in H'$.

Car : pour $v_1, v_2 \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \rho_u(\alpha v_1 + \beta v_2) &= a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) \\ &= \alpha \rho_u(v_1) + \beta \rho_u(v_2) . \end{aligned}$$

D'où ρ_u est linéaire.

Et pour $v \in H$

$$\begin{aligned} |\rho_u(v)| &= |a(u,v)| \\ &\leq M \|u\|_V \|v\|_V \\ &\leq C \|v\|_V . \end{aligned}$$

D'où ρ_u est continue.

D'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet :

$$\exists! y \in H : \rho_u(v) = (y, v), \forall v \in H.$$

On définit l'opérateur A de H dans H tel que :

$$\begin{aligned} A : H &\longrightarrow H \\ u &\longrightarrow Au = y \end{aligned}$$

A est linéaire et continu. Donc :

$$\exists! Au \in H : \rho_u(v) = \langle Au, v\rangle = a(u, v).$$

Si on résout le problème (P_{α_1}) qui est le problème (FVP) avec perturbation à paramètre α $\rangle$ 0, et pour chaque valeur de α on a une solution approximative $u_\alpha(t, \xi)$ (avec ξ la valeur initiale associée), pour cela il faut poser des conditions sur A_α pour le choix d'une bonne valeur initiale ξ.
Soit la fonction $J(\xi) = |u_\alpha(T, \xi) - f|^2$
La valeur initiale reflète la réalité si la solution qui lui correspond est convergente vers l'état final, quand $t \longrightarrow T$; c-a-d : $J(\xi) = 0$.

Théorème 2.2.1 *Si les conditions (1.1)–(1.2) sont vérifiées, alors* $\inf_{\xi \in H} J(\xi) = 0$.

Théorème 2.2.2 *Si les condition (1.1)–(1.2) sont vérifiées alors le problème* (P_1) *admet une solution unique.*

Preuve : Soit l'opérateur

$$\pi(u, v) = \langle Au, v\rangle - \alpha \langle Au, Av\rangle .$$

On a

$$\begin{aligned}
|\pi(u,v)| &= |\langle Au, v\rangle - \alpha \langle Au, Av\rangle| \\
&= \left|a(u,v) - \alpha \left\langle A^2u, v\right\rangle\right| \\
&= |a(u,v) - \alpha a \langle Au, v\rangle| \\
&\leq |a(u,v)| + \alpha |a \langle Au, v\rangle| \\
&\leq N_1 \|u\|_V \|v\|_V + N_2 \|u\|_V \|v\|_V . \\
&\leq N_3 \|u\|_V \|v\|_V
\end{aligned}$$

Donc $|\pi(u,v)| \leq N_3 \|u\|_V \|v\|_V$, qui implique que $\pi(u,v)$ est uniformément continue sur $V \times V$.

D'autre part ;

$$\begin{aligned}
\pi(u,u) &= \langle Au, u\rangle - \alpha \langle Au, Au\rangle \\
&= a(u,u) - \alpha a(Au, u) \\
&\geqslant -\lambda \|u\|_V^2 + \beta \|u\|_V^2 - \alpha k \|u\|_V^2 \\
&\geqslant -(\lambda + \alpha k) \|u\|_V^2 + \beta \|u\|_V^2 .
\end{aligned}$$

D'où $\pi(u,u) + \lambda' \|u\|_V^2 \geqslant \beta \|u\|_V^2$,qui implique que π est coercive élargie.

D'aprè le théorème de représentation de Riesz-Fréchet il'existe un opérateur A_α, où $\langle A_\alpha u, v\rangle = \pi(u,v)$, si nous appliquons cet opérateur d'après le théorème 2.2.1 on a

$\inf_{\xi \in H} J(\xi) = 0$, qui implique que la solution est unique. ■

Théorème 2.2.3 *Si v_α est solution du problème (P_1) alors $v_\alpha(T) \to f$, quand $\alpha \to 0$.*

Si on applique cette méthode on trouve une difficulté sérieuse pour l'application numérique à cause du terme correcteur qui est un opérateur d'ordre deux, et aussi le coefficient d'erreur résultant d'une petite perturbation de la donnée. Ceci incite à chercher une méthode plus efficace pour la régularisation. Dans la méthode de Y.Huang et Q.Zheng (2005) l'opérateur A est remplacé par $A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1}$. Cette perturbation donne un problème bien posé et sa solution approximative est convergente vers la solution du problème mal posé (FVP). Les résultats de convergence sont meilleurs et avec des conditions plus faibles que celles proposées dans la première approche.

2.2.2 La méthode de Quasi-Réversibilité Modifiée

La méthode de Quasi-Réversibilité Modifiée est présentée par F.Rebbani et N.Boustila, Elle consiste à faire une combinaison de la méthode de Quasi-Reversibilité (l'approximation de Y.Huang et Q.Zheng) avec la méthode des Valeurs Quasi-Limites présentée par Gordon W. Clark et Seth F. Oppenheimer, pour, donner une méthode optimale pour régulariser le problème inverse (FVP) qui est présente ci dessus. L'idée de cette dernière est de remplacer l'opérateur A par $A_\alpha = A\left(I-\alpha A\right)^{-1}$, et la condition finale par la condition non locale $\beta u\left(0\right)+u\left(T\right)=f$, où $\alpha \succ 0, \beta \succ 0$, après cela nous trouvons une position correcte du problème perturbé dans les deux directions du temps, et le deuxième avantage réside dans la possibilité d'établir des résultats meilleurs par rapport aux résultats obtenus précédemment.

Présentation de la méthode

Après la perturbation on trouve le problème approché suivant :

$$\begin{cases} v'_\sigma\left(t\right)+A_\alpha v_\sigma\left(t\right)=0, \quad 0<t<T \\ \\ \beta v_\sigma\left(0\right)+v_\sigma\left(T\right)=f, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\sigma=\left(\alpha,\beta\right)$.

A partir de ce problème, nous avons le problème direct :

$$\begin{cases} u'_\sigma\left(t\right)+Au_\sigma\left(t\right)=0, \quad 0<t\leq T, \\ \\ u_\sigma\left(0\right)=v_\sigma\left(0\right)=\left(\beta+S_\alpha\left(T\right)\right)^{-1}f=g_\sigma. \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans ce qui suit, nous allons essayer de montrer que la fonction $u_\sigma\left(T\right)$ est convergente vers f, $u_\sigma\left(0\right)$ est convergente vers $u\left(0\right)$ et $u_\sigma\left(t\right)$ converge uniformément vers $u\left(t\right)$, quand $|\sigma| \longrightarrow 0$.

Définition 2.2.1 *On appelle solution du problème (FVP) dans $[0,T]$ une fonction $u \in C\left([0,T];H\right)\cap C^1\left((0,T);H\right)$, telle que pour tout $t\in(0,T)$, $u\left(t\right)\in D\left(A\right)$ et (FVP) est vérifié.*

Il est nécessaire de connaître l'ensemble admissible où (FVP) admet une solution. Le résultat suivant répond à cette question.

Lemme 2.2.1 *Le problème (FVP) admet une solution si, et seulement si $f \in \mathcal{C}_1(A)$, et son unique solution est représentée par*

$$u(t) = e^{(T-t)A} f.$$

où

$$\mathcal{C}_\theta(A) = \left\{ h \in H : |h|_{C_\theta}^2 = \left| e^{\theta T A} h \right|^2 = \int_\gamma^{+\infty} e^{2T\theta\lambda} d\left|E_\lambda h\right|^2 < +\infty \right\}, \theta \geq 0.$$

Théorème 2.2.4 *Pour toute $f \in H$, le problème (2.1) admet la fonction*

$$v_\sigma = S_\alpha(t)\left(\beta + S_\alpha(T)\right)^{-1} f \ ,$$

comme une solution unique. Cette solution dépend continûment de f.

Preuve : Soit le problème

$$y'_\sigma(t) + A_\alpha y_\sigma(t) = 0, \qquad 0 < t \leq T \tag{2.3}$$

$$y_\sigma(0) = \left(\beta + S_\alpha(T)\right)^{-1} f, \tag{2.4}$$

qui est le problème de cauchy. Ce problème admet une solution unique, qui est

$$y_\sigma(t) = S_\alpha(t)\left(\beta + S_\alpha(T)\right)^{-1} f. \tag{2.5}$$

Comme ; on a :

$$\beta y_\sigma(0) + y_\sigma(T) = f. \tag{2.6}$$

On déduit que le problème (2.1) admet une unique solution v_σ. Pour la dépendance continue de v_σ de f, on calcule

$$|v_\sigma(t)| = \left| S_\alpha(t)\left(\beta + S_\alpha(T)\right)^{-1} f \right| \leq \left(\beta + e^{\frac{-T}{\alpha}}\right)^{-1} |f|.$$

Nous obtenons le résultat. ■

Théorème 2.2.5 *Le problème (2.2) est bien posé, et sa solution est représentée par*

$$u_\sigma(t) = S(t)g_\sigma = S(t)\left(\beta + S_\alpha(T)\right)^{-1} f. \tag{2.7}$$

De plus

$$|u_\sigma(t)| \leq \left(\frac{1}{\beta + e^{\frac{-T}{\alpha}}}\right)^{\frac{T-t}{T}} |f|. \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.6 *Pour toute $f \in H$; $|u_\sigma(T) - f| \longrightarrow 0$, quand $|\sigma| \longrightarrow 0$.*

Preuve : Pour montrer que $u_\sigma(T)$ converge vers f, quand $|\sigma| \longrightarrow 0$, il suffit de calculer $|u_\sigma(T) - f|^2$, et après l'estimation on trouve le résultat. ■

Théorème 2.2.7 *Si $f \in \mathcal{C}_\theta(A), 0 < \theta < 1$, alors on a*

$$|u_\sigma(T) - f|^2 \leq 2\left(c_1^2(\theta)\beta^{2\theta} + c_2^2(\theta, T)\alpha^2\right)|f|^2_{C_0}. \tag{2.9}$$

de plus, si $\theta \geq 1$; on a :

$$|u_\sigma(T) - f|^2 \leq 2\left(\beta^2 + c_2^2(\theta, T)\alpha^2\right)|f|^2_{C_0}, \tag{2.10}$$

où $c_1(\theta) = (1-\theta)^{1-\theta}\theta^\theta \leq 1$ et $c_2(\theta, T) = T^{-1}\theta^{-2}$.

Preuve : On calcule la norme de la différence entre $u_\sigma(T)$ et f, et l'estimation, nous obtenons le résultat désiré. ■

Théorème 2.2.8 *Pour toute $f \in H$; (FVP) admet une solution u si, et seulement si la fonction F est continue en $(0,0)$. De plus on a $u_\sigma(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ quand $|\sigma| \to 0$,*

où

$$F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to H,\ \sigma = (\alpha, \beta) \longmapsto F(\sigma) = \begin{cases} u_\sigma(0) = g_\sigma, \sigma \neq (0,0). \\ u(0) = f_0, \sigma = (0,0). \end{cases}$$

Preuve : On suppose que la fonction F est continue en $(0,0)$, $|f_0| < +\infty$, et

$$w(t) = S(t)f_0.$$

Après les calculs de $|w(t) - u_\sigma(t)|$, on trouve que

$$|w(t) - u_\sigma(t)| \leq |f_0 - g_\sigma|.$$

Comme F est continue en $(0,0)$, d'où $|f_0 - g_\sigma| \to 0$, quand $|\sigma| \to 0$.

D'après le théorème 2.2.6, et comme on a

$$\lim_{|\sigma|\to 0} u_\sigma(T) = w(T),$$

alors

$$w(T) = f,$$

il en résulte que le problème (FVP) admet une solution.

D'un autre côté, on pose que $u(t)$ est une solution du (FVP), après les calculs et l'estimation de l'expression $|u_{\sigma_1}(0) - u_{\sigma_2}(0)|^2$, nous trouvons que $g_\sigma \longrightarrow f_0$, quand $|\sigma| \to 0$.Ce qui montre la continuité de la fonction F en $(0,0)$. ■

Remarque 2.2.1 *Si on suppose que* $f \in \mathcal{C}_1(A)$, *alors par l'égalité*

$$|u_\sigma(0) - u(0)|^2 = |u_\sigma(T) - f|^2_{\mathcal{C}_1}$$

et le théorème 2.2.6, *on a*

$$|u_\sigma(0) - u(0)|^2 \to 0, \text{ quand } |\sigma| \to 0.$$

Théorème 2.2.9 *Supposons que* $f \in D(A)$, *soit* $\alpha = \dfrac{T}{(1-r)\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}, 0 < r < 1$, *l'expression* $|u_\sigma(T) - f|^2$ *peut être estimée comme suit*

$$|u_\sigma(T) - f|^2 \leq \beta^{2r}|f|^2 + \frac{4T}{(1-r)\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}|Af|^2.$$

Preuve : On a

$$v'_\sigma(t) + Av_\sigma(t) = (A - A_\alpha)v_\sigma(t) = \alpha J_\alpha A^2 v_\sigma(t), \tag{2.11}$$

Si on pose $x_\sigma(t) = v_\sigma(t) - u_\sigma(t)$, alors $x_\sigma(t)$ vérifie l'équation

$$x'_\sigma(t) + Ax_\sigma(t) = \alpha J_\alpha A^2 u(t). \tag{2.12}$$

Appliquons l'opérateur $M(t) = e^{(t-T)A}$ à $(2.11) - (2.12)$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\left(M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right)\right)=\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right), \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\left(t\right)x_{\sigma}\left(t\right)\right)=\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right). \tag{2.14}$$

Multiplions (*2.14*) par $M\left(t\right)x_{\sigma}$ et intégrons le résultat dans $(0,\tau)$, nous obtenons après les calculs

$$\int_{0}^{\tau}\frac{d}{dt}\left|M\left(t\right)x_{\sigma}\left(t\right)\right|^{2}\quad\leq 2T\int_{0}^{T}\left|\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right)\right|dt+\frac{1}{2}\sup_{0\leq t\leq T}\left|M\left(t\right)x_{\sigma}\left(\tau\right)\right|^{2}.$$

Ce qui implique

$$\frac{1}{2}\sup_{0\leq t\leq T}\left|M\left(t\right)x_{\sigma}\left(t\right)\right|^{2}\leq 2T\int_{0}^{T}\left|\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right)\right|^{2}dt.$$

Pour $t=T$ on a

$$\left|M\left(T\right)x_{\sigma}\left(T\right)\right|^{2}=\left|u_{\sigma}\left(T\right)-v_{\sigma}\left(T\right)\right|^{2}\leq 4T\int_{0}^{T}\left|\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right)\right|^{2}dt.$$

Cette inégalité implique

$$\left|u_{\sigma}\left(T\right)-f\right|^{2}\leq 8T\int_{0}^{T}\left|\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right)\right|^{2}dt+2\left|\beta v_{\sigma}\left(0\right)\right|^{2}. \tag{2.15}$$

Donc on prend le produit scalaire de (2.13) avec $\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right)$, et en intégrant sur $(0,T)$ on obtient après l'estimation que

$$\int_{0}^{T}\left|\alpha J_{\alpha}A^{2}M\left(t\right)v_{\sigma}\left(t\right)\right|^{2}dt\leq\frac{1}{2}\left(\left|\alpha J_{\alpha}Av_{\sigma}\left(T\right)\right|^{2}+\left|\alpha^{2}J_{\alpha}A^{\frac{3}{2}}v_{\sigma}\left(T\right)\right|^{2}\right)\leq\frac{1}{2}\alpha\left|Af\right|^{2}.$$

Combinons cette inégalité avec (*2.15*), pour

$$\alpha=\frac{T}{\left(1-r\right)\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)},0<r<1.$$

Nous obtenons le résultat. ■

Théorème 2.2.10 *Supposons que $f\in D\left(A\right)$ et $\gamma\geq 1$, alors $\left|u_{\sigma}\left(T\right)-f\right|^{2}$ peut être estimée comme suit*

$$\left|u_{\sigma}\left(T\right)-f\right|^{2}\leq 2\left(\left(\frac{T}{1+\ln\left(\frac{\gamma T}{\beta}\right)}\right)^{2}+T\alpha\right)\left|Af\right|^{2}.$$

Preuve : pour montrer ce théorème, il suffit d'effectuer des calculs et des estimations. ■

Théorème 2.2.11 *Supposons que* $|Au(0)|^2 = \int_\gamma^{+\infty} \lambda^2 e^{2T\lambda} d|E_\lambda f|^2 < \infty$, *i-e ;* $u(0) \in D(A)$, *et que* $\gamma \geq 1$. *Alors* $|u_\sigma(0) - u(0)|^2$ *peut être estimée comme suit*

$$|u_\sigma(0) - u(0)|^2 \leq 2\left(\left(\frac{T}{1+\ln\left(\frac{\gamma T}{\beta}\right)}\right)^2 + T\alpha\right)|Au(0)|^2.$$

Preuve : Pour obtenir le résultat, il suffit d'estimer l'expression $|u_\sigma(0) - u(0)|^2$. ■

2.2.3 Méthode des conditions non locales

Cette méthode est présentée par M. Denche et K.Bessila, et est une variante de la méthode des Valeurs Quasi Limites qui a la même idée de perturbation. Dans cette dernière Gordon W. Clark et Seth F. Oppenheimer on fait une perturbation selon un petit paramètre α, dans le problème inverse (FVP), en ajoutant le terme $\alpha u(0)$ dans la valeur finale.

Dans la suite, nous désignons par A l'opérateur déjà défini ci-dessus sur l'espace de Hilbert H, nous supposons que cet opérateur admet une base orthonormale $\{\varnothing_i\}_{i\geqslant 1}$ dans H associée aux valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$ tel que $0 \langle \lambda_1 \langle \lambda_2 \langle \lambda_3 \langle$.....,et $\lim_{i\longrightarrow+\infty} \lambda_i = +\infty$.

Dans cette méthode, nous perturbons la valeur finale dans le problème inverse (FVP) pour former un problème non local approximatif selon un petit paramètre α, nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(T) - \alpha u'(0) = f \end{cases} \qquad (p_{\alpha_2})$$

Nous allons montrer dans ce qui suit que ce dernier problème est bien posé et sa solution est convergente dans $\mathcal{C}^1([0,T],H)$, si, et seulement si le problème original (FVP) à une solution classique.

On a $f \in H$ donc $f = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \varnothing_i$, avec $b_i = \langle f, \varnothing_i \rangle, \forall i \geqslant 1$.

Le problème original (FVP) admet une solution u donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \exp(\lambda_i(T-t))\varnothing_i, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1)$$

Et le problème (p_{α_2}) admet une solution sous la forme :

$$u_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

Théorème 2.2.12 *Pour chaque $f \in H$, la fonction u_α définie par* (3.2) *est une solution classique de problème* (p_{α_2}), *et ;on a :*

$$|u_\alpha(t)| \leq \frac{T}{\alpha\left(1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} |f|, \ \forall t \in [0,T].$$

Preuve : Pour montrer que la fonction u_α est une solution classique du problème (p_{α_2}) il faut montrer que :

- $u_\alpha(t)$*est une fonction continue de* $[0,T]$ *dans* H;
- $u_\alpha(t)$*vérifie le problème* (P_{α_2}) *et* $u(t) \in D(A)$ *pour tout* $t \in [0,T]$;
- $u_\alpha(t)$*est continûment dérivable sur* $]0,T[$.

On a

$$u_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i,$$

qui est une somme de fonctions continues, donc $u_\alpha(t)$ est continue de $[0,T]$ *dans* H.

Nous montrons que $u_\alpha(t)$ est continûment dérivable sur $]0,T[$ et

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right)' = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right)'.$$

Pour cela il faut de montrer que $u_\alpha(0)$ est convergente,et la série :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right)',$$

est uniformément convergente.

Soit

$$u_{\alpha_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i.$$

$$u_{\alpha_n}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i.$$

D'où

$$|u_{\alpha_n}(0)| = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\left|\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_{\alpha_n}(0)\right| = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i^2}{\left(\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme ; on a :

$$\frac{1}{\left(\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)\right)^2} \langle \left(\frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}\right)^2.$$

D'où

$$\left|\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_{\alpha_n}(0)\right| \leq \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \langle \ +\infty.$$

Car : H est un espace de Hilbert (espace Euclidien de dimension infinie) et $\{\varnothing_i\}_{i\geqslant 1}$ est une base orthonormale, pour chaque f dans H, les nombres $b_i = \langle f, \varnothing_i\rangle$ sont les coefficients de Fourier donc $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2$ est convergente.

Donc la série $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)}\varnothing_i$ est convergente.

Soit

$$v(t) = -\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i b_i \exp\left(-\lambda_i t\right)}{\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)}\varnothing_i.$$

On a :

$$\frac{\lambda_i^2 b_i^2 \exp\left(-2\lambda_i t\right)}{\left(\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)\right)^2} \leq \frac{b_i^2}{\alpha^2}, \ \forall i \geqslant 1.$$

Car :

$$\lambda_i^2 b_i^2 \exp\left(-2\lambda_i t\right) \langle \lambda_i^2 b_i^2,$$

et

$$\left(\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)\right)^2 \rangle \alpha^2\lambda_i^2.$$

D'où

$$\frac{\lambda_i^2 b_i^2 \exp\left(-2\lambda_i t\right)}{\left(\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)\right)^2} \leq \frac{\lambda_i^2 b_i^2}{\alpha^2\lambda_i^2}.$$

Donc

$$\frac{\lambda_i^2 b_i^2 \exp\left(-2\lambda_i t\right)}{\left(\alpha\lambda_i + \exp\left(-\lambda_i T\right)\right)^2} \leq \frac{b_i^2}{\alpha^2}.$$

Comme ; on a : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \ \langle \ +\infty,$

qui implique que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i$, est uniformément convergente en t.
Donc $u_\alpha \in \mathcal{C}^1([0,T], H)$, et

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) &= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right)' = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right)' \\ &= -\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i. \end{aligned}$$

Comme ; on a :

$$Au_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i,$$

ce qui nous donne que $|Au_\alpha(t)| \prec \infty$, qui implique que $u_\alpha(t) \in D(A)$.

Ceci implique que $u_\alpha(t)$ vérifie le problème (p_{α_2}) ; car :

$$-\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i + \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i T)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i - \alpha \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i T) - \alpha\lambda_i b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \varnothing_i \\ &= f. \end{aligned}$$

Donc $u_\alpha$est une solution classique du problème (p_{α_2}).

Soit la fonction u_α une solution classique du problème (p_{α_2})

$$\begin{aligned} |u_\alpha(t)|^2 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i^2 \exp(-2\lambda_i t)}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i^2}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2}, \text{ car } \exp(-2\lambda_i t) \langle 1. \end{aligned}$$

Soit

$$h(\lambda) = (\alpha\lambda + \exp(-\lambda T))^{-1}.$$

On a :

$$\sup_{\lambda \rangle 0} h(\lambda) = h\left(\frac{\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}{T}\right).$$

et :

$$h'(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}{T},$$

De plus

$$h(\lambda) - h\left(\frac{\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}{T}\right) = \frac{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right) - T\alpha\lambda - T\exp(-\lambda T)}{\alpha\left(\alpha\lambda+\exp(-\lambda T)\right)\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \langle\ 0, \text{ pour } \alpha\langle T \times e.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|u_\alpha(t)|^2 &\leq \left(h\left(\frac{\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}{T}\right)\right)^2 \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{T}\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right) + \exp\left(-\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)\right)^{-2} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \\
&\leq \left(\alpha\left(\frac{\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)+1}{T}\right)\right)^{-2} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \\
&\leq \left(\frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}\right)^2 \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.2.13 *Pour chaque $f \in H, |u_\alpha(T) - f| \longrightarrow 0$; quand $\alpha \longrightarrow 0$; c-a-d : $u_\alpha(T)$ converge vers f dans H.*

Preuve : Soit $\epsilon \rangle\ 0$ on choisit un certain N tel que $\sum_{i=N+1}^{+\infty} b_i^2 \langle\ \frac{\epsilon}{2}$.

On a

$$\begin{aligned}
u_\alpha(T) - f &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i T)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \varnothing_i \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-\alpha b_i \lambda_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|u_\alpha(T) - f|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-\alpha b_i \lambda_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 b_i^2 \lambda_i^2}{\left(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)\right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 b_i^2 \lambda_i^2}{\left(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)\right)^2} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 b_i^2 \lambda_i^2}{\left(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)\right)^2}
\end{aligned}$$

Comme ; on a

$$\alpha^2\lambda_i^2\langle\left(\alpha\lambda_i+\exp\left(-\lambda_iT\right)\right)^2,$$

et

$$\exp\left(-2\lambda_iT\right)\ \langle\ \left(\alpha\lambda_i+\exp\left(-\lambda_iT\right)\right)^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}\left|u_\alpha\left(T\right)-f\right|^2 &\leq \sum_{i=1}^{N}\alpha^2b_i^2\lambda_i^2\exp\left(2\lambda_iT\right)+\sum_{i=N+1}^{+\infty}b_i^2\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\alpha^2b_i^2\lambda_i^2\exp\left(2\lambda_iT\right)+\frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

On prenant α avec

$$\alpha^2\langle\epsilon\left(2\sum_{i=1}^{N}b_i^2\lambda_i^2\exp\left(2\lambda_iT\right)\right)^{-1},$$

on obtient

$$\left|u_\alpha\left(T\right)-f\right|^2\leq\epsilon$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.2.14 *Pour chaque $f\in H$, le problème (FVP) admet une solution classique qui est donnée par $(3-1)$, si, et seulement si la série $u'_\alpha(0)$ converge dons H fortement, et u_α converge vers u quand $\alpha\longrightarrow 0$, dans $\mathcal{C}^1\left([0,T],H\right)$.*

Preuve : Soit $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}u'_\alpha(0)=v_1$et $v_1\in H$,
d'où $v_1=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i\varnothing_i$ avec $a_i=\langle v_1,\varnothing_i\rangle$, $\forall i\geqslant 1$.
Soit v_0 un élément dans H, tel que $\langle v_0,\varnothing_i\rangle=d_i=-\frac{a_i}{\lambda_i}$, $\forall i\geqslant 1$.
Soit $v\left(t\right)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}d_i\exp\left(-\lambda_it\right)\varnothing_i$, $\forall t\in[0,T]$.
De la même manière que le preuve de théorème 2.2.12 on peut facilement démontrer que la fonction $v\left(t\right)$ est une solution du problème :

$$\begin{cases}u'\left(t\right)+Au\left(t\right)=0 & 0\leqslant t\leqslant T\\ \\ u\left(0\right)=v_0\end{cases}\qquad(p_2)$$

Pour $t \in [0,T]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|u_\alpha(t) - v(t)|^2 &= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} d_i \exp(-\lambda_i T)\, \varnothing_i \right|^2 \\
&= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \left(d_i - \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \right) \exp(-\lambda_i t)\, \varnothing_i \right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(d_i - \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \right)^2 \exp(-2\lambda_i t) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(-\frac{a_i}{\lambda_i} - \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \right)^2 \exp(-2\lambda_i t) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(a_i + \frac{b_i\lambda_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \right)^2 \exp(-2\lambda_i t).
\end{aligned}$$

Aussi :

$$u'_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-\lambda_i b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i,$$

et

$$v'(t) = -\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i d_i \exp(-\lambda_i T)\, \varnothing_i.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|u'_\alpha(t) - v'(t)|^2 &= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-\lambda_i b_i \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} -\lambda_i d_i \exp(-\lambda_i T)\, \varnothing_i \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \left(\frac{-b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} + d_i \right) \exp(-\lambda_i t)\, \varnothing_i \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \left(\frac{-b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} - \frac{a_i}{\lambda_i} \right) \exp(-\lambda_i t)\, \varnothing_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(a_i + \frac{b_i\lambda_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \right)^2 \exp(-2\lambda_i t).
\end{aligned}$$

On a, aussi :

$$|u_\alpha(t) - v(t)| = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(a_i + \frac{b_i\lambda_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \right)^2 \exp(-2\lambda_i t).$$

Comme la suite $\left(\lambda_i^{-2}\right)_{i \geqslant 1}$est convergente, il existe $M \rangle 0$, tel que $\lambda_i^{-2} \langle M$, $\forall i \geqslant 1$,

d'où

$$|u_\alpha(t) - v(t)|^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} M\left(a_i + \frac{b_i\lambda_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)}\right)^2 \exp(-2\lambda_i t).$$

Ce qui implique que

$$|u_\alpha(t) - v(t)|^2 \leq M\,|u'_\alpha(t) - v'(t)|^2.$$

On a

$$\begin{aligned}
|u'_\alpha(0) - v_1|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-\lambda_i b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)}\varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} a_i\varnothing_i\right|^2 \\
&= \left|\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{-\lambda_i b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} - a_i\right)\varnothing_i\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_i b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} + a_i\right)^2.
\end{aligned}$$

Comme $\exp(-\lambda_i t) \langle 1$, pour $t \in [0,T]$, et $\lambda_i \rangle 0$.

Alors

$$|u'_\alpha(t) - v'(t)|^2 \leq |u'_\alpha(0) - v_1|^2.$$

Ce qui nous donne

$$M\,|u'_\alpha(t) - v'(t)|^2 \leq M\,|u'_\alpha(0) - v_1|^2.$$

Donc

$$|u_\alpha(t) - v(t)|^2 \leq M\,|u'_\alpha(t) - v'(t)|^2 \leq M\,|u'_\alpha(0) - v_1|^2. \tag{3.3}$$

Ce qui implique que $u_\alpha(t)$ converge uniformément vers $v(t)$; car : $\lim_{\alpha\longrightarrow 0} u'_\alpha(0) = v_1$

On a donc d'après le théorème 2.2.13

$$v(T) = f \Longrightarrow a_i = -\lambda_i b_i \exp(\lambda_i T)$$

D'où

$$\begin{aligned}
v(t) &= \sum_{i=1}^{+\infty} -\frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i}\exp(\lambda_i T) \times \exp(-\lambda_i t)\varnothing_i \qquad (3.4)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} -b_i \exp(\lambda_i(T-t))\varnothing_i \\
&= u(t),\ \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Donc $u(t)$ est une solution classique de problème (FVP).

Supposons maintenant que la fonction $u(t)$ qui est donnée par (3.1) est une solution du problème (FVP).

On a

$$\begin{aligned}
|u'_\alpha(0) - u'(0)|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-\lambda_i b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} -\lambda_i b_i \exp(\lambda_i T)\, \varnothing_i\right|^2 \\
&= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{-\lambda_i b_i + \alpha\lambda_i^2 b_i \exp(\lambda_i T) + \lambda_i b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right|^2 \\
&= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha\lambda_i^2 b_i \exp(\lambda_i T)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_i^4 b_i^2 \exp(2\lambda_i T)}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2\lambda_i^4 b_i^2 \exp(2\lambda_i T)}{\exp(-2\lambda_i T)} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_i^4 b_i^2 \exp(2\lambda_i T)}{\alpha^2\lambda_i^2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha^2\lambda_i^4 b_i^2 \exp(4\lambda_i T) + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \lambda_i^2 b_i^2 \exp(2\lambda_i T)
\end{aligned}$$

Comme $u(t)$ est une solution du problème (FVP) alors $u'(t)$ est uniformément convergente $\forall t \in [0,T]$, ce qui implique pour un certain N ;on a :

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} \lambda_i^2 b_i^2 \exp(2\lambda_i T) \ \langle \ \frac{\epsilon}{2}.$$

D'où

$$|u'_\alpha(0) - u'(0)|^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha^2\lambda_i^4 b_i^2 \exp(4\lambda_i T) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit α avec

$$\alpha^2 \langle \epsilon \left(2\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \lambda_i^4 \exp(4\lambda_i T)\right)^{-1},$$

nous avons alors

$$|u'_\alpha(0) - u'(0)|^2 \leq \epsilon.$$

Donc $u'_\alpha(0)$ converge fortement vers $u'(0)$, et en utilisant $(3.3) - (3.4)$, nous obtenons que

$$|u_\alpha(t) - u(t)|^2 \leq \epsilon.$$

Ce qui implique que $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ dans $\mathcal{C}^1([0,T], H)$. ■

Théorème 2.2.15 *Si la fonction $u(t)$ donnée par (3.1) est une solution classique du problème (FVP), et $u_\alpha^\delta(t)$ est une solution du problème (p_{α_2}) pour $f = f_\delta$ avec $|f - f_\delta| \langle \delta$, alors :*

$$\left|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| \leq C\left(1 + \ln\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)^{-1},$$

où $C = T\left(1 + |Au(0)|\right)$.

Preuve : Supposer que la fonction u est une solution classique du problème (FVP), u_α^δ est la solution du problème (p_{α_2}), avec $f = f_\delta$ avec $|f - f_\delta| \langle \delta$, et

$$u_\alpha^\delta(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i^\delta \exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i,$$

avec $b_i^\delta = \langle f_\delta, \varnothing_i \rangle, \forall i \geqslant 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \left|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| &= \left|u(0) - u_\alpha(0) + u_\alpha(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| \\ &\leq |u(0) - u_\alpha(0)| + \left|u_\alpha(0) - u_\alpha^\delta(0)\right|. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} |u(0) - u_\alpha(0)| &= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} b_i \exp(\lambda_i T)\varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)}\varnothing_i\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha\lambda_i b_i \exp(\lambda_i T)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)}\varnothing_i\right| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_i^2 b_i^2 \exp(2\lambda_i T)}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comme ; on a :

$$h(\lambda) = (\alpha\lambda + \exp(-\lambda T))^{-1},$$

et

$$\sup_{\lambda \rangle 0} h(\lambda) = \frac{T}{\alpha\left(1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} |u(0) - u_\alpha(0)| &\leq \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 \left(\frac{1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}{T} \right)^2} \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 b_i^2 \exp(2\lambda_i T) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} |Au(0)|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left|u_\alpha(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| &= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i^\delta}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i - b_i^\delta}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} \varnothing_i \right| \\ &\leq \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \times \left| \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \varnothing_i - \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^\delta \varnothing_i \right| \\ &\leq \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \times \left|f - f^\delta\right| \\ &\leq \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \times \delta. \end{aligned}$$

D'où

$$\left|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| \leq \frac{T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} |Au(0)| + \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \times \delta.$$

Pour $\alpha = \delta$, nous obtenons

$$\left|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| \leq \frac{T\ (|Au(0)|+1)}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 2.2.2 *on a d'après le théorème 2.2.15*

$$\left|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| \leq C \left(\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{-1}, \text{ pour } T \rangle e^{-1}$$

Car : si $T \rangle e^{-1}$ on a $\frac{T}{\delta} \rangle \frac{e^{-1}}{\delta} \Longrightarrow \ln\frac{T}{\delta} \rangle \ln\frac{e^{-1}}{\delta}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 1+\ln\tfrac{T}{\delta} \rangle 1+\ln\tfrac{e^{-1}}{\delta} \\ &\Longrightarrow 1+\ln\tfrac{T}{\delta} \rangle 1+ \ln e^{-1} + \ln\tfrac{1}{\delta} \\ &\Longrightarrow \left(1+\ln\tfrac{T}{\delta}\right)^{-1} \langle \left(\ln\tfrac{1}{\delta}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\right| \leq C \left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^{-1} \leq C \left(\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{-1}.$$

Théorème 2.2.16 *Si il existe* $\epsilon \in [0,2]$, *tel que* $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{\epsilon} b_i^2 \exp(\epsilon \lambda_i T)$ *est convergente, alors* $|u_\alpha(T) - f|$ *tend vers zéro avec l'ordre* $\alpha^{\epsilon}\epsilon^{-2}$.

Preuve : Soit $\epsilon \in [0,2]$, $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{\epsilon} b_i^2 \exp(\epsilon \lambda_i T)$ est convergente et $\beta \in [0,2]$.
Nous allons fixons le nombre entier i, et définissons la fonction

$$g_i(\alpha) = \frac{\alpha^{\beta}}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
|u_\alpha(T) - f|^2 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 b_i^2 \lambda_i^2}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2} \\
&= \alpha^{2-\beta+\beta} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i^2 \lambda_i^2}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2} \\
&= \alpha^{2-\beta} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{\beta} b_i^2 \lambda_i^2}{(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T))^2} \\
&= \alpha^{2-\beta} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \lambda_i^2 g_i(\alpha).
\end{aligned}$$

Soit $\alpha_0 = \frac{\beta \exp(-\lambda_i T)}{(2-\beta)\lambda_i}$, alors : $g_i(\alpha_0) \geqslant g_i(\alpha)$.
On a :

$$\begin{aligned}
g_i(\alpha_0) &= g_i\left(\frac{\beta \exp(-\lambda_i T)}{(2-\beta)\lambda_i}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{\beta \exp(-\lambda_i T)}{(2-\beta)\lambda_i}\right)^{\beta}}{\left(\frac{\beta \exp(-\lambda_i T)}{(2-\beta)\lambda_i}\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)\right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{\beta}{2-\beta}\right)^{\beta} \frac{\exp(-\beta\lambda_i T)}{\lambda_i^{\beta}}}{\frac{2^2 \exp(-2\lambda_i T)}{(2-\beta)^2}} \\
&= \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right)^{\beta} \lambda_i^{-\beta} \exp((2-\beta)\lambda_i T) \frac{(2-\beta)^2}{4},
\end{aligned}$$

comme $\frac{(2-\beta)^2}{4} \leq 1$ pour $\beta \in [0,2]$
d'où

$$g_i(\alpha_0) \leq \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right)^{\beta} \lambda_i^{-\beta} \exp((2-\beta)\lambda_i T).$$

Qui implique que

$$|u_\alpha(T) - f|^2 \leq \alpha^{2-\beta} \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \lambda_i^2 \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right)^\beta \lambda_i^{-\beta} \exp\left((2-\beta)\lambda_i T\right).$$

Donc

$$|u_\alpha(T) - f|^2 \leq \alpha^{2-\beta} \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right)^\beta \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{(2-\beta)} b_i^2 \exp\left((2-\beta)\lambda_i T\right).$$

Pour $\epsilon = 2-\beta$, on a $0 \langle 2-\epsilon \langle 2$, $\forall\, \epsilon \in [0,2]$, donc $0 \langle \left(\frac{2-\epsilon}{\epsilon}\right)^{2-\epsilon} \langle \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2$.

Donc

$$\begin{aligned} |u_\alpha(T) - f|^2 &\leq 4\epsilon^{-2}\alpha^\epsilon \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^\epsilon b_i^2 \exp(\epsilon\lambda_i T) \\ &\leq C_1 \alpha^\epsilon \epsilon^{-2}, \text{ tel que } C_1 = 4\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^\epsilon b_i^2 \exp(\epsilon\lambda_i T). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Si nous supposons que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{(\epsilon+2)} b_i^2 \exp\left((\epsilon+2)\lambda_i T\right)$ est convergente, $\forall \epsilon \in [0,2]$, alors la série $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 b_i^2 \exp(2\lambda_i T)$ est aussi convergente, donc d'après le théorème 2.2.14 la fonction $u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \exp\left(\lambda_i (T-t)\right) \varnothing_i$ est une solution classique du problème (FVP).

D'après la preuve du théorème 2.2.14, nous avons :

$$|u_\alpha(t) - u(t)|^2 \leq M\, |u'_\alpha(t) - u'(t)|^2 \leq M\, |u'_\alpha(0) - u'(0)|^2.$$

et comme

$$\begin{aligned} |u'_\alpha(0) - u'(0)|^2 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \lambda_i^4 b_i^2 \exp(2\lambda_i T)}{\left(\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)\right)^2} \\ &= \alpha^{2-\beta} \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^4 b_i^2 g_i(\alpha) \exp(2\lambda_i T), \end{aligned}$$

et d'après la preuve du théorème 2.2.16 ; on a :

$$|u'_\alpha(0) - u'(0)|^2 = \alpha^{2-\beta} \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right)^\beta \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{(4-\beta)} b_i^2 \exp\left((4-\beta)\lambda_i T\right).$$

Pour $\beta = 2 - \epsilon$; on a :

$$\begin{aligned} |u'_\alpha(0) - u'(0)|^2 &\leq \alpha^\epsilon \left(\frac{2-\epsilon}{\epsilon}\right)^{(2-\epsilon)} \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{(2-\epsilon)} b_i^2 \exp\left((2-\epsilon)\lambda_i T\right) \\ &\leq \alpha^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^2 4 \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{(2-\epsilon)} b_i^2 \exp\left((2-\epsilon)\lambda_i T\right) \\ &\leq C_2 \alpha^\epsilon \epsilon^{-2}, \text{ avec } C_2 = 4 \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{(2-\epsilon)} b_i^2 \exp\left((2-\epsilon)\lambda_i T\right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.2.1 *Si il existe* $\epsilon \rangle\ 0$, *avec* $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{(\epsilon+2)} b_i^2 \exp\left((\epsilon+2)\lambda_i T\right)$ *convergente alors* u_α *converge vers* u; *quand* $\alpha \longrightarrow 0$, *dans* $\mathcal{C}^1\left([0,T], H\right)$, *avec l'ordre* $\alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$.

Remarque 2.2.3 *Une variante de cette méthode est appliquée par M. Denche et S. Djezzar pour un problème mal posé dans le cas d'un opérateur à spectre continu. Des résultats analogues sont obtenus pour la régularisation et la convergence.*

► Nous avons vu que la régularisation d'un problème mal posé se fait par une perturbation soit dans l'opérateur A soit dans la valeur finale. La première apparaît dans la méthode d'approche Quasi-Réversibilité qui nous avons exposée de R.Lattés et J.Lions [10] et dans la méthode qui développée par F.Rebbani et N.Boussetila dans [23] où
$A_\alpha = -\frac{1}{pT} \ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right),\ \alpha \succ 0, p \geqslant 1$. La seconde approche est développée par G.W.Clark et S.F.Oppenheimer qui est appelée la méthode des Valeurs quasi-limites dans [9] et la méthode des conditions non locales de M. Denche et K.Bessila [16]. Une autre idée consiste a conbiner les deux techniques comme il est montré dans le travail de F.Rebbani et N.Boussetila dans la méthode de Quasi-Réversibilité Modifiée [21] et que nous avons exposé dans ce mémoire.

Chapitre 3

RÈGULARISATION D'UN PROBLÈME MAL POSÉ POUR L'OPÉRATEUR DE BESSEL

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode des conditions non locales à la régularisation d'un problème mal posé pour l'opérateur de Bessel.

3.1 Position du problème

Soit le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \langle x \langle 1 \\ u(1,t) = 0, \qquad 0 \langle t \langle T \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \\ u(x,T) = f(x). \end{cases} \tag{p_3}$$

Il consiste à trouver $u(x,0) = g(x)$ la température initiale. Soit $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ défini sur $H_x[0,1]$ avec $D(A) = \left\{ u \in H_x[0,1], u(1) = 0, \lim\limits_{x \to 0} xu'(x) = 0 \right\}$. La résolution du problème (p_3) par la méthode de séparation des variables nous conduit à rechercher $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} v_i(t)\,\phi_i(x)$$

Si, on remplace la fonction $u(x,t)$ dans le problème (p_3) par $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_i(t)\,\phi_i(x)$; nous obtenons les deux problèmes suivants :

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\lambda_i v_i(t),$$

$$\begin{cases} x\dfrac{d^2\phi_i}{dx^2} + \dfrac{d\phi_i}{dx} + \lambda_i x\phi_i = 0, \\ \phi_i(1) = 0, \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\frac{d\phi_i}{dx}(x) = 0. \end{cases}$$

Pour le premier problème nous trouvons $v_i(t) = C_i \exp(-\lambda_i t)$.

L'équation

$$x\frac{d^2\phi_i}{dx^2} + \frac{d\phi_i}{dx} + \lambda_i x\phi_i = 0, \qquad (*)$$

est l'équation de Bessel qui admet la solution :

$$\phi_i(x) = \alpha J_0\left(\sqrt{\lambda_i}x\right) + \beta N_0\left(\sqrt{\lambda_i}x\right),$$

où $J_0\left(\sqrt{\lambda_i}x\right)$ et $N_0\left(\sqrt{\lambda_i}x\right)$, sont les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre zéro, α et β sont des constantes.

Pour continuer la résolution, nous avons besoin des propositions suivantes :

Proposition 3.1.1 *Si μ_1 et μ_2 deux racines distinctes de $J_0(x)$, alors ; on a :*

$$\int_0^1 xJ_0(\mu_1 x) J_0(\mu_2 x)\, dx = 0,$$

et

$$\int_0^1 xJ_0^2(\mu_1 x)\, dx = -\frac{1}{2}J_0'(\mu_1).$$

Proposition 3.1.2 *Sous les mêmes conditions de la proposition précédente, les racines de l'équation*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

sont réelles, simples et reparties symétriquement par rapport à zéro. Elles n'ont pas de point d'accumulation fini.

D'après les conditions aux limites, nous trouvons que $\beta = 0$.

D'après les propositions ci-dessus, on trouve les valeurs propres de l'opérateur de Bessel $\sqrt{\lambda_i}$ $=\xi_i$, $i = 0, 1, ...$

Qui sont des racines positives de l'équation $J_0(x) = 0$.

Les fonctions propres associées sont

$$\phi_i(x) = \alpha_i J_0\left(\sqrt{\lambda_i}x\right),$$

où

$$\alpha_i = \frac{\sqrt{2}}{J_0'\left(\sqrt{\lambda_i}\right)},$$

qui constituent une base orthonormée dans l'espace $H_x[0,1]$.

Donc

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} C_i \exp(-\lambda_i t)\,\phi_i(x).$$

Et

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{i=1}^{+\infty} C_i \phi_i(x).$$

D'où

$$C_i = \int_0^1 x\phi_i(x)\,g(x)\,dx.$$

Comme le problème est de trouver $g(x) = u(x,0)$, avec $f(x) = u(x,T)$ connue, nous devons donc résoudre l'intégrale de première espèce

$$f(x) = \int_0^1 K(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Avec

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{+\infty} \xi \exp(-\lambda_i T)\,\phi_i(\xi)\,\phi_i(x).$$

On peut écrire le problème (p_3) sous la forme intégrale ci-dessus car : $\phi_i(x)$ sont des fonctions qui constituent une bas orthonormée associées aux valeurs propres λ_i.

D'après le théorème de Picard, cette équation intégrale admet une solution si :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \exp(2\lambda_i T)\,|f_i|^2 \langle \infty,$$

où f_i sont les coefficients de Fourier de la fonction f.

D'où

$$g(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \xi \exp(\lambda_i T) f_i \phi_i(x).$$

Qui donne

$$g(x) = \int_0^1 K'(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

où

$$K'(x,\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi \exp(\lambda_i T) \phi_i(\xi) \phi_i(x).$$

Si on fait une petite perturbation dans la température finale f; on a :

$$f^\delta = f + \delta\phi_i,$$

on obtient une solution perturbée

$$g^\delta = g + \delta\phi_i \exp(\lambda_i T),$$

ce qui signifie que :

$$\left|g^\delta - g\right| = \exp(\lambda_i T) \left|f^\delta - f\right|.$$

Dans cette dernière formule le coefficient $\exp(\lambda_i T)$ peut provoquer une perturbation arbitrairement grande dans la température initiale, avec une erreur même petite dans les mesures de la température finale.

Pour cela, ce problème est mal posé.

3.2 Régularisation du problème

On peut formuler le problème précédent de la manière suivante :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < T \\ \\ u(T) = f(x). \end{cases} \tag{p_4}$$

A est l'opérateur de Bessel, il est auto adjoint, positivement défini, et admet une base orthonormée

$$\phi_i(x) = \frac{\sqrt{2}}{J_0'\left(\sqrt{\lambda_i}\right)} J_0\left(\sqrt{\lambda_i} x\right),$$

de vecteurs propres dans l'espace de Hilbert $H_x[0,1]$, associés aux valeurs propres λ_i.
Nous allons suivre la méthode des conditions non locales, donc après la perturbation nous obtenons le problème :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(T) - \alpha u'(0) = f(x). \end{cases} \qquad (p_{\alpha_3})$$

D'après les théorèmes 2.2.12, 2.2.13, 2.2.14, 2.2.15 et 2.2.16 nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 3.2.1 ***1.*** *Le problème* (p_{α_1}) *admet une solution sous la forme :*

$$u_\alpha(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\exp(-\lambda_i t)}{\alpha\lambda_i + \exp(-\lambda_i T)} f(x).$$

2. *Pour toute* $f = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i\phi_i \in H_x[0,1]$, *la fonction* $u_\alpha(t)$ est une solution classique de problème (p_{α_3}) et ; *on a :*

$$\int_0^1 x\left(u_\alpha(x,t)\right)^2 dx \leq \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \int_0^1 xf(x)^2\, dx,$$

où $\alpha \leq eT$.

3. *Pour toute* $f \in H_x[0,1]$,

$$\int_0^1 x\left(u_\alpha(x,T) - f(x)\right)^2 dx,$$

tend vers zéro ; quand $\alpha \longrightarrow 0$.

4. *Pour chaque* $f \in H_x[0,1]$, *le problème* (p_4) *admet une solution classique*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \exp\left(\lambda_i(T-t)\right) f(x),$$

si, et seulement si la série $u'_\alpha(0)$ *converge dons* $H_x[0,1]$ *fortement, et*

$$\int_0^1 x\left(u_\alpha(x,t) - u(x,t)\right)^2 dx,$$

tend vers zéro ; quand $\alpha \longrightarrow 0$, *dans* $\mathcal{C}^1\left([0,T], H_x[0,1]\right)$.

5. *Si la fonction*

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{+\infty}\exp\left(\lambda_i\left(T-t\right)\right)f\left(x\right),$$

est une solution classique du problème (p_4) *,et*

$$u_\alpha^\delta(x,t)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\exp\left(-\lambda_i t\right)}{\alpha\lambda_i+\exp\left(-\lambda_i T\right)}f_\delta\left(x\right),$$

où $f_\delta=\sum_i b_i^\delta\phi_i$, et $f=f_\delta$ avec $\int_0^1 x\left(f-f_\delta\right)^2dx\ \langle\ \delta\ pour\ \delta\ \rangle\ 0$
est une solution du problème (p_{α_3}) *, nous avons :*

$$\int_0^1 x\left(u\left(x,0\right)-u_\alpha^\delta\left(x,0\right)\right)^2dx\leq C\left(1+\ln\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)^{-1},$$

avec $C=T\left(1+\left|Au\left(0\right)\right|\right)$ *.*

6. *Si il existe* $\epsilon\in[0,2]$ *, telle que la série*

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i^\epsilon b_i^2\exp\left(\epsilon\lambda_i T\right),$$

est convergente, alors :

$$\int_0^1 x\left(u_\alpha\left(x,T\right)-f\left(x\right)\right)^2dx,$$

tend vers zéro ; quand $\alpha\longrightarrow 0$ *d'ordre* $\alpha^\epsilon\epsilon^{-2}$*.*

Bibliographie

[1] A. Pazy, "*Semi groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*", Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] P. G. Ciarlet et J. L. Lions, *Analyse fonctionnelle,Théorie et applications*. Dunod, Paris, 1999. ISBN 2 10 00431405.

[3] R. Dautray and J. L. Lions, editors. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1988.

[4] J. Hadamard, *Les problèmes de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques,* Paris. Hermann. 1932.

[5] R.E. Showalter, *Cauchy problem for Hyper-Parabolic Partial Differentions Equations,Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis*.Elsevier, 1983.

[6] K.A. Ames, L.E. Payne, P.W. Schaefer, *Enegy and pointwtse bounds in some non-standard parabolic problems*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 134 (2004) 1-9.

[7] K.A. Ames, L.E. Payne, *Asymptotic for tow regularizations of the Cauchy problem for the bak ward heat equation*. Math Models Methods Appl. Sci. 8(1998) 187-202.

[8] R.E. Showalter*, Cauchy Problem for Hyper-Parabolic Partial Differential Equations, Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier*, 1983.

[9] G.W. Clark, S.F. *Oppenheimer. Quesi reversibility methode for non-well-posed problems*. Electron. J. Differential Equations 8 (1994) 1-9.

[10] R.Lattes and J.L Lions, *Méthode de Quasi-Réversibilité et Applications,* Dunod, Paris,1967.

[11] M.M Lavrentiev. *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics*. Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol 11. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[12] R.E. Showalter, *The final value problem for evolution equation*, J. Math. Anal. Appl. 47,563-572, 1974.

[13] K. Miller. *Stabilized quasi reversibility and other nearly best possible methode for non - well-posed problems*, in : Symposium on Non-Well-problems and Logarithmic, in : Lecture notes in Mathematics, vol. 316.Springer-Verlag,1973.PP,161-176.

[14] A. Tikhonov,V.Arsénine, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés,* Traduction française. Editions Mir. 1976.

[15] M.Denche, K.Bessila, *Quasi-boundary Value Method for Non-well Posed Problem for a Parabolic Equation with Integral Boundary Condition*, Mathematical Problems in Engineering 7,129-145,2001.

[16] M.Denche, K.Bessila, *A modified quasi-boundary Value Method for ill-posedproblems,* Jmath. Anal. Appl. 301 (2005) 419-426.

[17] A.N. Tikhonov, V.V.Arsenine, *Méthode de régularisation de problème mal posé*, Mir, 1976.

[18] I.V. Mel'nikova, Q.Zheng and J.Zheng, *Regularization of weakly ill-posed Cauchy problem* ,J. Inv. Ill-posed Problems, Vol. 10 (2002), No. 5, 385-393.

[19] K.Massoud, S.Messaoudi, F.D.Zaman, *Initial inverse problem in heat equation with Bessel operator,* International Journal of Heat and Mass Transfer 45 (2002) 2959-2965.

[20] F. Rebbani, *Ill-posed problems, some recent developments and open problems,* JMAF-05, constantine 2005.

[21] F.Rebbani, N.Boussetila, *Optimal Regularisation Method For Ill-Posed Cauchy Problem, Eletronic Journal of Differential Equations,* Vol . 2006(2006), No. 147, pp. 1-15.

[22] Nouar Ahmed, Settara Loubna, *Régularisation d'un problème mal posé pour l'opérateur de Bessel.* EDPA-07. Guelma*, 5-7novembre 2007.*

[23] F.REBBANI AND N.BOUSSETILA, THE MODIFIED QUASI-REVERSIBILITY METHOD FOR A CLASS OF ILL-POSED CAUCHY PROBLEMS, Georgian Mathematical Journal, Volume 14 (2007), Number 4,627-642.

[24] M. DENCHE AND DJEZZAR, AMODIFIED QUASI-BOUNDARY VALUE METHOD FOR A CLASS OF ABSTRACT PARABOLIC ILL-POSED PROBLEMS, DOI 10.1155/BVP/2006/37524.

[25] L. SETTARA, PROBLÈMES MAL POSÉS ET METHODES DE RESOLUTION, Mèmoir de Magister. Université de Skikda, Juin 2007.