

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- - عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES
Option: Control Optimal Stochastique

**Solution process of a class of differential equation using Homotopy
Analysis Wiener-Hermite Expansion and Perturbation technique**

Par

BOUKEHILA Ahcene

Directeur de Thèse: BENMOSTEFA FATIMA ZOHRA MCA U.B.M. ANNABA

Devant le Jury

PRESIDENT	BENCHETTAH Azzedine	Pr U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	AISSAOUI Mohamed Zine	MCA U. GUELMA
EXAMINATEUR	BOUTABIA Hacène	Pr U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	ELLAGGOUNE Fateh	MCA U. GUELMA
EXAMINATEUR	GUESMIA Amar	MCA U. SKIKDA

Année Universitaire 2014/2015

ملخص

إن موضوع الدراسة التي قدمت في هذه الأطروحة للدكتوراه هو حول تطبيق طريقة جديدة تتكون من الطريقة الهوموتوبية للتحليل مع طريقة نشر وينير-هرميت بالارتياح وتسمى طريقة الهوموتوبي للتحليل نشر وينير-هرميت بالارتياح. طبقت هذه الطريقة بنجاح على صنف من المعادلات التفاضلية العشوائية لإثبات أن الحل المتمثل في الأمل الرياضي والتباين أن كلا منهما متقارب بواسطة تطبيق هذه الطريقة.

الهدف من تطبيق هذه الريق الجديدة هو لتجاوز وتفادي استعمال الطريقة الهوموتوبية للارتياح التي لا تضمن تقارب الحل وكذلك أنها حالة خاصة من الطريقة الهوموتوبية للتحليل.

الكلمات المفتاحية: من الطريقة الهوموتوبية للتحليل; طريقة نشر وينير-هرميت بالارتياح ; طريقة الهوموتوبي للتحليل نشر وينير-هرميت بالارتياح ; المعادلات التفاضلية العشوائية; معادلة لانجوفين.

Abstract

In this thesis, we present a new method based on Wiener Hermite Expansion and Perturbation technique or WHEP linked to Homotopy Analysis Method or HAM and it is called HAM WHEP technique and then apply it for solving a class of differential equation. Using the Homotopy Perturbation Method linked to WHEP in [6] may lead to divergence, there is absolutely no guarantee that perturbation methods result in a convergent solution. This disadvantage is overcome by using the Homotopy Analysis Method (HAM) linked to WHEP or (HAM WHEP) technique which guarantees the convergence of the solution.

Keywords : Wiener Process, Wiener Hermite Expansion and Perturbation technique, Homotopy Perturbation Method, Homotopy Analysis Method, HAM WHEP technique, Langevin Equation, Stochastic differential Equation, Initial and Boundary Value Problems.

Résumé

Dans cette Thèse on présente une nouvelle methode basée sur le développement de Wiener Hermite et le méthode perturbative oubien WHEP liée à la méthode d'Homotopy et d'analyse, et l'appliquée pour résoudre une classe d'équation différentielle.

l'utilisation de la méthode WHEP liée à la méthode d'Homotopy et de Perturbation dans [6] peut conduire à divergence de la solution. cet disadvantage est surmonter en utilisant la méthode WHEP liée à la méthode d'Homotopy et d'analyse qui assure la convergence de la solution

Mots clés : Processus de Wiener, Développement de Wiener Hermite et la méthode perturbative, la méthode d'Homotopy et de Perturbation, la méthode d'Homotopy et d'analyse, l'Equation de Langevin, Equation Différentielle Stochastique, Problem Initial, Problem aux Limites.

Dédicace

A ma famille
et mes parents
à la mémoire du
Professeur Magdy El Tawil
qui est décédé en 2013.

Remerciements

Cette thèse n'aurait jamais été possible sans la confiance, la patience de mon superviseur Benmostefa Fatima Zohra je voudrais la remercier chaleureusement. Je voudrais aussi la remercier pour les conseils que m'a guidé tout au long de la production de cette thèse. En fait, je ne peux pas exprimer ma gratitude en quelques lignes.

Professeur BENCHETTAH Azzedine m'a fait le grand honneur de présider le jury. Je le remercie très vivement.

Je remercie les professeurs BOUTABIA Hacene, AISSAOUI Zine, ELLAGGOUNE Fateh et GUESMIA Amar pour me donner l'honneur d'être examinateurs de cette thèse.

Enfin, je tiens à offrir mes plus sincères remerciements à ma famille, mes parents, frères et mes amis pour leur soutien constant tout au long de la années de la thèse.

Liste des Figures

2.3 Differentes corrections de l'espérance, Homotopy WHEP $n=2$	19
2.3 Differentes corrections de la variance, Homotopy WHEP, $n=2$	19
2.3 Deuxième correction de l'espérance, Homotopy WHEP $n=2$,	20
2.3 Deuxième correction de la variance, Homotopy WHEP $n=2$,	20
3.1.3 \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la 4ème appr de HAM	26
3.2 \hbar -courbe de la variance obtenue par la 4ème appr de HAM	26
3.1.4 \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la 6ème appr de HAM WHEP $n=2$...	27
3.4 \hbar -courbe de la variance obtenue par la 5ème appr de HAM WHEP $n=2$	28
3.5 \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la 4ème appr de HAM WHEP $n=3$	28
3.6 \hbar -courbe de la variance obtenue par la 4ème appr de HAM WHEP $n=3$	29
4.1 \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la 5ème appr de HAM WHEP $n=2$	33
4.2 \hbar -courbe de la variance obtenue par la 5ème appr de HAM WHEP $n=2$	33
4.3 \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la 5ème appr de HAM WHEP $n=3$	34
4.4 \hbar -courbe de la variance obtenue par la 5ème appr de HAM WHEP $n=3$	34

Liste des of Symboles

v : variance

u : espérance

$W(t)$: processus de Wiener

$dW(t)$; est la dérivée du mouvement Brownien ,i.e., $n(t)$.

$f(t), t \geq 0$: est un processus stochastique dont les trajectoires sont p.s. continues et il est adapté à la filtration F_t

$f \in M^2$:Intégrale d'Ito $I(f)$ existe, et $E(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt) < \infty$

$f \in M_T^2$: Intégrale d'Ito $I_T(f)$ existe, et $E(\int_0^T |f(t)|^2 dt) < \infty$

$\xi(t), t \geq 0$ est un processus Ito dont les trajectoires continues p.s et
 $\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(t)dt + \int_0^t b(t)dW(t)a.s.$

The space M^2 : se compose de tous les processus stochastiques progressivement mesurable $f(t)$ tel que $E(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt) < \infty$

l'espace M_T^2 : se compose de tous les processus stochastiques progressivement mesurable $f(t)$ tel que $E(\int_0^T |f(t)|^2 dt) < \infty$.

\hbar : un paramètre à régler et de contrôler la zone de convergence et le taux de convergence de la série de la solution.

WHEP technique : le développement de Wiener Hermite et la technique de la

perturbation.

HPM : la Méthode de la Perturbation Homotopique.

HAM : la Méthode de l'Analyse Homotopique.

HAM WHEP technique : la méthode de l'Analyse Homotopique liée au développement de Wiener Hermite et la technique de la perturbation

Sommaire

Liste des Figures	vi
Liste des Symboles	vii
Introduction	3
1 Notes sur les équations différentielles stochastiques	5
1.1 Définitions et propriétés de base des processus de Wiener	5
1.2 Calcul stochastique de Ito	6
1.3. Propriétés de l'intégrale stochastique	9
1.4 Calcul stochastique et la Formule de Ito	10
1.5 Equations différentielles stochastiques	11
2 La Technique de Homotopie WHEP	13
2.1 Le développement de Wiener Hermite et la technique de la perturbation..	13
2.2 La méthode de Homotopie et la Perturbation	16
2.3 La technique de Homotopie WHEP	17
3 Résolution d'un problème de valeur initiale par HAM WHEP	21
3.1 La méthode de l'Analyse Homotopique	21
3.2 La résolution de l'équation de Langevin par la technique de WHEP	24
3.3 La résolution de l'équation de Langevin par l'Analyse Homotopique	25
3.4 La résolution de l'équation de Langevin par la technique de HAM WHEP	27
4 Résolution d'un problème aux limites par la technique de HAM WHEP	30

4.1 Résoudre l'EDS de diffusion non linéaire en utilisant HAM WHEP**30**

Conclusion

Bibliographie

Appendice

Introduction

L'étude de solutions aléatoires des équations aux dérivées partielles était initié par Kampe de Fériet en 1955 [26] . Dans son étude précieuse sur la théorie des équations aléatoires , Bharucha - Reid a montré comment un équation de la chaleur stochastique de type Cauchy peut être résolu en utilisant la la théorie des intégrales stochastiques [27] . En 1973 , Lo Dato [28] a estimé le champ de vitesse stochastique et l'équation de Navier Stokes et discuté des problèmes mathématiques qui lui sont associés . Becus [29] introduit une solution générale au problème de conduction de chaleur avec un terme source aléatoire et les conditions initiales et aux limites aléatoires . beaucoup auteurs ont étudié l'équation de diffusion stochastique sous différents points de vue [5-11] . Récemment, M. A. El - Tawil utilisé le Wiener L'expansion Hermite avec la théorie de la perturbation (WHEP) technique pour résoudre une équation de diffusion non linéaire stochastique perturbée [4] . La technique a ensuite été mis au point pour être appliqué sur le non- perturbée équations différentielles à l'aide de la méthode de perturbation lié Homotopy Wiener Hermite technique développement de perturbation et il est appelé Homotopy WHEP [3] . Cependant, comme mentionné S.J. Liao [19] , la méthode de Perturbation Homotopique (HPM) n'est qu'un cas particulier de la méthode d'Analyse Homotopique (HAM) . La différence est que , le HPM a dû utiliser une assez bonne estimation initiale, mais ce n'est pas absolument nécessaire pour la méthode HAM . C'est important parce que la HAM utilise un paramètre de contrôler pour garantir la convergence de l'approximation de la série sur un intervalle donné. Ainsi, la méthode d'Analyse Homotopique (HAM) est plus générale . En 2010, MA El-Tawil et NA Al-Mulla [6] ont utilisé le HPM lié à la technique WHEP pour résoudre l'équation de diffusion non linéaire stochastique des pertes non linéaires carrés ou cubes, comme suit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \varepsilon u^n(t, x; \omega) + \sigma.n(t, \omega); (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0, \quad u(0, x) = \phi(x), \end{aligned} \quad (0.1)$$

où la viscosité ε est une échelle déterministe pour le terme non linéaire. Le terme de non homogénéité $\sigma.n(t)$ le processus de bruit blanc en temps en produit scalaire par σ . Cependant, la résolution de l'équation de diffusion non linéaire stochastique (0,1) mentionnés ci-dessus n'a pas tenue compte de l'influence de l'utilisation de la HPM sur la convergence de la série de la solution. En fait, il n'y a absolument aucune garantie que les méthodes de perturbation se traduisent par une solution convergente. Par conséquent, en utilisant le HPM liée à WHEP dans [6] peut conduire à divergence. Cet inconvénient est surmonté en utilisant la méthode d'Analyse Homotopique (HAM) liée à WHEP (HAM WHEP) technique.

Pour cela, l'objectif principal de cette thèse est de construire et de développer une nouvelle

approche basée sur la méthode d'Analyse Homotopique introduite dans WHEP (HAM WHEP) technique et ensuite l'appliquée pour résoudre une classe d'équations différentielles stochastiques [7].

En ce sens, pour notre but nous considérons l'équation stochastique généralisée de diffusion non linéaire avec des pertes carrés ou cubes εu^2 or εu^3 d'intérêt est de la forme suivante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \varepsilon u^n(t, x; \omega) + \sigma(t).n(t, \omega); (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0, \quad u(0, x) = \phi(x), \end{aligned} \quad (0.2)$$

où la viscosité ε est une échelle déterministe pour le terme non linéaire and $n = 2, 3$. $\omega \in (\Omega, \sigma, P)$ est un espace de probabilité Ω comme l'échantillon espace, σ est un σ -algèbre des événements Ω et P est une mesure de probabilité. Le sens physique du terme non linéaire est qu'il existe une perte proportionnelle à u^2 ou u^3 . Le terme de non homogénéité $\sigma(t).n(t, \Omega)$ le processus de bruit blanc en temps en produit scalaire par $\sigma(t) : \sigma(t; \omega)$ est une partie de temps continu de la force aléatoire.

Plan de la thèse

Cette thèse est divisé en quatre chapitres. Dans le **Chapitre 1**, nous rappelons quelques définitions et propriétés du processus de Wiener (Mouvement brownien). puis nous construisons l'intégrale de Ito stochastique, et nous terminons ce chapitre par la définition et les propriétés des equations differentielles stochastiques.

Dans le **Chapitre 2**, nous nous sommes intéressés à l'étude du développement de Wiener Hermite et technique Perturbation lié à la méthode de la Perturbation Homotopique ou (Homotopy WHEP). Pour cela, nous étudions le développement de Wiener Hermite et la technique de la Perturbation ou (WHEP) technique et après on est intéressé par la Méthode de la perturbation Homotopique ou (HPM). Nous terminons cet Chapitre par l'introduction de la WHEP dans HPM ou la technique de Homotopy WHEP, et ensuite l'appliqué à une classe de l'équation différentielle.

Chapitre 3, est consacré à l'étude de la méthode Analysis Homotopique ou HAM et prouver que la technique HPM est un cas particulier de HAM. Pour illustrer l'importance de l'utilisation de la nouvelle méthode de HAM WHEP, qui est l'un des principaux objectifs de cette thèse, différentes méthodes sont appliquées pour résoudre l'équation de Langevin comme : HPM, HAM, HAM WHEP.

Dans le **Chapitre 4**, nous utilisons la technique de HAM WHEP pour résoudre les problèmes de valeurs aux limites d'une classe d'équations différentielles.

Enfin, nous terminons par une conclusion résumant les points les plus importants de cette thèse.

Chapitre 1

Notes sur les équations différentielles stochastiques

1.1 Définition et propriétés de base des processus de Wiener

1.1.1 Définition

Le processus de Wiener ou mouvement Brownien est un processus stochastique $W(t)$ à valeurs dans \mathfrak{R} défini pour $t \in [0, \infty]$ tel que

- 1) $W(0) = 0$ p.s.
- 2) les trajectoire de $t \mapsto W(t)$ sont p.s. continus.

Pour toute suite finie de temps $0 < t_1 < \dots < t_n$ et boréliens $A_1 \dots A_n \subset \mathfrak{R}$ on a :

$$P(W(t_1) \in (A_1), \dots, W(t_n) \in (A_n)) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.1)$$

où

$$p(t_1, x, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \quad (1.2)$$

défini pour tous $x, y \in \mathfrak{R}$ et $t > 0$ est appelée la densité de transition.

1.1.2 Remarque :

Le processus de Wiener $W(t)$ a la distribution normale de moyenne 0 et variance t .

1.1.3 Proposition

Pour tout $0 \leq s < t$ l'incrément $W(t) - W(s)$ suit la distribution normale de moyenne 0 et de variance $t - s$.

Preuve. (Voir [24]).

1.1.4 corollaire

Pour tout $0 \leq s < t$ l'incrément $W(t) - W(s)$ est indépendant de la tribu engendrée F_s :

$$F_s = \sigma\{W(r) : 0 \leq r \leq s\} \quad (1.3)$$

Preuve. (Voir [24]).

1.1.5 Théorème

Un processus stochastique $W(t), t \geq 0$, est un processus de Wiener si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $W(0) = 0$ p.s.
- 2) les trajectoire de $t \mapsto W(t)$ sont continus.
- 3) $W(t)$ possède des incréments statinaire indépendants.
- 4) l'incrément $W(t) - W(s)$ a la distribution normale de moyenne 0 et de variance $t - s$.

Preuve. (Voir [25]).

1.1.6 Théorème

La variation des trajectoires de $W(t)$ est p.s. infini

Preuve.(Voir [25]).

Le théorème 1.1.4 a des conséquences importantes pour la théorie de la Intégrante stochastique présenté dans le prochain paragraphe. c'est car une intégrale de la forme

$$\int_0^T f(t)dW(t) \tag{1.4}$$

ne peut pas être définie dont les trajectoires sont p.s. continus.

1.1.7 Théorèm

Avec la probabilité 1, le processus de Wiener est non-différentiable en tout $t \geq 0$.

Preuve.(Voir [25]).

1.2 Calcul d'Intégrale stochastique de Ito

Nous suivrons une construction ressemblant à celle de l'intégrale de Riemann. Première l'intégrale sera définie pour une classe de processus constants par morceaux appelé processus en escalier aléatoires. Ensuite, il sera étendu à une grande classe par approximation. Il existe au moins deux différences majeures entre les Riemann et Intégrales Ito. L'un est le type de convergence. Le rapprochement des intégrale de Riemann convergent dans \mathfrak{R} , tandis que l'intégrale Ito sera approchée par des séquences de variables aléatoires convergent dans L^2 . L'autre différence c'est que les sommes de Riemann approchant l'intégrale d'une fonction $f: [0, T] \mapsto \mathfrak{R}$ sont de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(t_{i+1} - t_i) \tag{1.5}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < \infty$ and s_i est un point arbitraire $[t_i, t_{i+1}]$ pour tout i . La valeur de l'intégrale de Riemann ne dépend pas du choix de points $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Dans le cas stochastique des sommes d'approximation auront la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (1.6)$$

Il s'avère que l'approximation d'une telle limite ne dépend du choix des points intermédiaires $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

1.2.1 Définition

On appelle $f(t), t \geq 0$ un processus aléatoire en escalier s'il existe une suite finie de nombres $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et variables aléatoires de carrées intégrables $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ tel que

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \chi_{[(t_i, t_{i+1}) - (t_i)]} \quad (1.7)$$

où η_i is F_{t_i} -mesurable pour $i = 0, 1, \dots, n - 1$. L'ensemble des processus aléatoires en escaliers sera noté M_{step}^2 .

On observe que sous l'hypothèse η_i est F_{t_i} mesurable assure que $f(t)$ soit adapté à la filtration F_t . Sous l'hypothèse η_i de carrée intégrables assure que $f(t)$ est de carrée intégrables pour tout t . En plus, M_{step}^2 est un espace vectoriel. tel que $\alpha f + \beta g \in M_{step}^2$ pour tout $f, g \in M_{step}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$.

1.2.2 Définition

L'intégrale stochastique d'un processus aléatoire en escalier $f \in M_{step}^2$ de la forme (1.7) est défini par

$$\int_0^t f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (1.8)$$

1.2.3 Proposition

Pour tout processus aléatoire en escalier $f \in M_{step}^2$ l'intégral stochastique $I(f)$ est une variable aléatoire de carrée intégrable, i.e. $I(f) \in L^2$, tel que

$$E(|I(f)|^2) = E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) \quad (1.9)$$

Preuve. Voir [24]

1.2.4 Définition

On note par M^2 la classe des processus stochastiques $f(t), t \geq 0$ tel que

$$E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) < \infty \quad (1.10)$$

et qui est une séquence $f_1, f_2, \dots \in M_{step}^2$ de processus aléatoire en escalier telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt\right) = 0 \quad (1.11)$$

Dans ce cas, nous dirons que la suite de processus aléatoires en escalier f_1, f_2, \dots se rapproche $f \in M^2$.

1.2.5 Définition

On appelle $f \in L^2$ l'intégrale Stochastique de Ito (de 0 à ∞) pour $f \in M^2$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|I(f(t)) - I(f_n(t))|^2) = 0 \quad (1.12)$$

pour toute suite $f_1, f_2, \dots \in M_{step}^2$ des processus aléatoires en escaliers approximatives $f \in M^2$, i.e. telle que (1.11) est satisfaite. Nous allons également écrire

$$\int_0^\infty f(t) dW(t) \quad (1.13)$$

à la place de $I(f)$.

1.2.6 Proposition

Pour tout $f \in M^2$ l'intégrale Stochastique $I(f) \in L^2$ existe, est unique (comme un élément dans L^2 , i.e. à l'intérieur de l'égalité. p.s.) et satisfait

$$E(|I(f)|^2) = E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) \quad (1.14)$$

Preuve. Voir [25]

1.2.7 Définition

Pour tout $T > 0$ nous noterons par M_T^2 l'espace de l'ensemble des processus stochastiques $f(t), t \geq 0$ tel que

$$\chi_{[0,T]} f \in M^2 \quad (1.15)$$

l'intégrale Stochastique de Ito (de 0 à T) pour $f \in M_T^2$ est définie par

$$I_T(f) = I(\chi_{[0,T]} f) \quad (1.16)$$

On écrit

$$\int_0^T f(t) dW(t) \quad (1.17)$$

à la place de $I_T(f)$.

Les processus pour lesquels l'intégrale stochastique existe ont été définis comme ceux qui peuvent être approchés les processus aléatoires en escaliers. Cependant, il ne doit pas toujours vérifier si vraiment une telle approximation existe. Pour des raisons pratiques, il est important d'avoir une condition suffisante pour qu'un processus simple ait une intégrale stochastique. Dans le calcul il y a le résultat bien connu de cette sorte : l'intégrale

de Riemann existe pour certaine fonction sous condition données. Voici un théorème de ce genre pour l'intégrale de Ito.

1.2.8. Théorème

Soit $f(t), t \geq 0$ un processus stochastique dont les trajectoires sont p.s. continues adaptées à la filtration F_t . alors

1) $f \in M^2$, i.e. the Ito inequal $I(f)$ existe avec

$$E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) < \infty \quad (1.18)$$

2) $f \in M_T^2$, i.e. l'integral de Ito $I_T(f)$ exists avec

$$E\left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right) < \infty \quad (1.19)$$

Preuve.(Voir [25]).

Le théorème suivant qui fournit une caractérisation des M^2 et M_T^2 , i.e. une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus stochastique f appartenit à M^2 où à M_T^2 . Il implique la notion d'un processus progressivement mesurable.

1.2.9 Définition

un processus stochastique $f(t), t \geq 0$ est appelée progressivement mesurable si pour tout $t \geq 0$

$$(s, \omega) \mapsto f(s, \omega) \quad (1.20)$$

est une fonction mesurable de $[0, t] \times \Omega$ avec la tribu engendrée par $\sigma B[0, t] \times F$ à \mathfrak{R} . Ici $B[0, t] \times F$ est le produit de la tribu engendrée par σ sur $[0, t] \times \Omega$, c'est à dire la plus petite tribu engendrée par σ contenant tous les ensembles de la forme $A \times B$, où $A \subset [0, t]$ est un Borelien $B \int F$.

1.2.10 Théorème

1) L'espace M^2 se compose de tous les processus stochastiques progressivement mesurables $f(t), t \geq 0$ tels que

$$E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) < \infty \quad (1.21)$$

2) L'espace M_T^2 se compose de tous les processus stochastiques progressivement mesurables $f(t), t \geq 0$ tels que

$$E\left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right) < \infty \quad (1.22)$$

Preuve.(Voir [24]).

1.2.11 Example

Le processus de Wiener $W(t)$ appartient à M_T^2 . Donc the l'integral stochastique

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T \quad (1.23)$$

existe.

1.3. Propriétés de l'intégrale stochastique

Les propriétés de base de Ito intégrante sont résumées dans le théorème ci-dessous.

1.3.1 Théorème

Les propriétés suivantes sont valables pour toute $f, g \in M_T^2$ and $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, and $0 < s < t$

1) Linéarité

$$\int_0^t (\alpha f(r) + \beta g(r))dW(r) = \alpha \int_0^t f(r)dW(r) + \beta \int_0^t g(r)dW(r) \quad (1.24)$$

2) Isométrie

$$E(|\int_0^t f(r)dW(r)|^2) = E(\int_0^t |f(r)|^2 dr) \quad (1.25)$$

3) Propriété de Martingale

$$E(\int_0^t f(r)dW(r)|F_s) = \int_0^s |f(r)|dW(r) \quad (1.26)$$

Preuve.(Voir [25]).

1.4. Différentiel Stochastique et Formule de Ito

1.4.1 Définition

Un processus stochastique $\xi(t), t \geq 0$ est appelé un processus de Ito s'il a des trajectoires continues et peut être représenté comme suit

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(t)dt + \int_0^t b(t)dW(t)p.s. \quad (1.27)$$

où $b(t)$ est un processus appartenant à M_T^2 pour tout $T > 0$ et $a(t)$ un processus adapté à la filtration F_t tel que

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty p.s. \quad (1.28)$$

pour tout $T \geq 0$. La classe de tous les processus adaptés $a(t)$ satisfaisant (1.28) pour $T > 0$ sera notée par L_T^1 . Pour un processus de Ito $\xi(t)$ il est d'usage d'écrire (1.27) comme

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)p.s. \quad (1.29)$$

et d'appeler $d\xi(t)$ le différentiel stochastique de $\xi(t)$. Ceci est connu comme la notation différentielle Ito.

1.4.2 Example

Le processus de Wiener $W(t)$ satisfait

$$W(T) = \int_0^T dW(t) \quad (1.30)$$

Il s'ensuit que le processus de Wiener est un processus de Ito.

1.4.3 Théorème (Formule de Ito, cas générale)

Soit $\xi(t)$ un processus de Ito comme ci-dessus (1.29). Supposons que $F(t, x)$ est une fonction à valeurs réelles avec des dérivées partielles continues $F'_t(t, x)$, $F'_x(t, x)$ et $F''_{xx}(t, x)$ pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathfrak{R}$. Nous supposons également que le processus $b(t)F'_x(t, \xi(t))$ appartient à M_T^2 pour tout $T \geq 0$. Alors $F(t, \xi(t))$ est un processus de Ito tel que

$$dF(t, \xi(t)) = (F'_t(t, \xi(t)) + F'_x(t, \xi(t))a(t) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t, \xi(t))b^2(t))dt + F'_x(t, \xi(t))b(t)dW(t) \quad (1.31)$$

Preuve.(Voir [24]).

1.4.2 Example (Processus de Ornstein-Uhlenbeck)

Supposons que $a > 0$ et $\sigma \in \mathfrak{R}$ sont fixés. on définit $Y(t), t > 0$ une modification adaptée de l'intégral de Ito

$$Y(t) = \sigma.e^{-at} \int_0^t e^{as}dW(s) \quad (1.32)$$

avec des trajectoires p.s continues. Alors $Y(t)$ satisfait

$$dY(t) = -aY(t)dt + \sigma.dW(s) \quad (1.33)$$

$$Y(t) = F(t, \xi(t)), \xi(t) = \sigma. \int_0^t e^{as}dW(s), F(t, x) = e^{-at}x$$

1.5. Equations Differentielles Stochastiques

1.5.1 Définition

Soit

$$d\xi(t) = f(\xi(t))dt + g(\xi(t)).dW(t) \quad (1.34)$$

soumise à la condition initiale $\xi(0) = \xi_0$.

Un processus de Ito $\xi(t), t \geq 0$ est appelé une solution du problème de valeur initiale ci-dessus, si ξ_0 est une variable aléatoire F_0 -mesurable, les $f(\xi(t))$ et $g(\xi(t))$ appartiennent, respectivement, à L_T^1 et M_T^2 et

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t f(\xi(t))dt + \int_0^t g(\xi(t)).dW(t) a.s \quad (1.34)$$

pour tout $T \geq 0$.

L'existence et l'unicité de la solution dans le théorème ci-dessous ressemble à celle de la théorie des équations différentielles ordinaires, où il est également crucial pour la solution

de l'équation à être Lipschitzienne et continue.

1.5.1 Théorème

Supposons que f et g sont des fonctions Lipschitziennes et continues de \mathfrak{R} vers \mathfrak{R} , i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathfrak{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$$

En outre, laisser ξ_0 est une variable aléatoire F_0 -mesurables de carré intégrable. Then the initial value problem

$$d\xi(t) = f(\xi(t))dt + g(\xi(t)).dW(t) \tag{1.35}$$

$$\xi(0) = \xi_0 \tag{1.36}$$

soit une solution $\xi_t, t > 0$ dans la classe de processus de Ito. La solution est unique en ce sens que si $\eta(t), t > 0$ est un autre processus satisfaisant (1.35) et (1.36), alors les deux processus sont identiques que cela soit,

$$P(\xi(t) = \eta(t) \forall t > 0) = 1 \tag{1.37}$$

Preuve.(Voir [24]).

pour plus de détails sur les E.D.S voir [24],[25].

Chapitre 2

La Technique de Homotopie WHEP

2.1 Le Développement de Wiener Hermite et la technique de la Perturbation

La méthode d'extension Wiener Hermite utilise les polynômes d'Hermite Wiener qui sont les éléments d'un ensemble complet de fonctions aléatoires statistiquement orthogonales qui représente l'étude de la sous-section suivante.

2.1.1 Définition de la fonction aléatoire Idéale

En basant sur la construction de la série, nous utilisons la fonction "aléatoire idéal" $n(t)$ d'une variable scalaire t . Cela peut être défini de différentes façons :

(a) comme la dérivée de la fonction aléatoire de Wiener $W(t)$, or

(b) par les équations des moments

$$\langle n(t) \rangle = 0 \quad (2.1)$$

$$\langle n(t_1)n(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) \quad (2.2)$$

où a est un processus Gaussien. L'équivalence de la définition de Wiener (a) est démontrée par le fait que l'intégrale de $n(t)$, comme suit

$$W(t) = \int_0^t n(x') dx' \quad (2.3)$$

possède toutes les propriétés de la fonction de Wiener et il est Gaussien.

Le polynôme de Wiener-Hermite $H^{(i)}(t_1, t_2, \dots, t_i)$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= 1 \\ H^{(1)}(t) &= n(t) \\ H^{(2)}(t_1, t_2) &= H^{(1)}(t_1)H^{(1)}(t_2) - \delta(t_1 - t_2) \\ H^{(3)}(t_1, t_2, t_3) &= H^{(2)}(t_1, t_2)H^{(1)}(t_3) - H^{(1)}(t_1)\delta(t_1 - t_2) - H^{(1)}(t_2)\delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dans lequel $n(t)$ est le processus de bruit blanc avec les propriétés statistiques suivantes

$$En(t) = 0, \quad En(t_1)n(t_2) = \delta(t_1 - t_2) \quad (2.5)$$

où $\delta(-)$ est la fonction de Dirac et E désigne l'opérateur moyenne d'ensemble. L'ensemble de Wiener-Hermite est un ensemble statistiquement orthogonaux, c'est à dire

$$EH^{(i)}.H^{(j)} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (2.6)$$

La moyenne des fonctions H s'annule p.s., en particulier

$$EH^{(i)} = 0 \quad i \geq 1 \quad (2.7)$$

Chaque fonction aléatoire $G(t; \omega)$ peut être étendue de la manière suivante,

$$\begin{aligned} G(t) &= G^{(0)}(t) + \int_{\mathfrak{R}} G^{(1)}(t; t_1) H^{(1)}(t_1) dt_1 \\ &+ \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} G^{(2)}(t; t_1, t_2) H^{(2)}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

où les deux premiers termes sont la partie Gaussienne $G(t; \omega)$. Le reste des termes dans le développement représentent la partie non Gaussienne de $G(t; \omega)$.

La moyenne de $G(t; \omega)$ est,

$$\mu_G = EG(t; \omega) = G^{(0)}(t), \quad (2.9)$$

où le processus de bruit blanc en temps est $n(t_1) = H^{(1)}(t_1)$.

La covariance de $G(t; \omega)$ est

$$\begin{aligned} Cov(G(t; \omega), G(\tau; \omega)) &= E(G(t; \omega) - \mu_G(t))(G(\tau; \omega) - \mu_G(\tau)) \\ &= \int_{\mathfrak{R}} G^{(1)}(t; t_1) G^{(1)}(\tau; t_1) dt_1 \\ &+ 2 \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} G^{(2)}(t; t_1, t_2) G^{(2)}(\tau; t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

La variance de $G(t; \omega)$ est

$$\begin{aligned} \sigma_G^2 &= E(G(t; \omega) - \mu_G(t))^2 \\ &= \int_{\mathfrak{R}} [G^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1 + 2 \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} [G^{(2)}(t; t_1, t_2)]^2 dt_1 dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

La technique WHEP peut être appliquée sur les systèmes linéaires ou non linéaires perturbé décrits par des équations différentielles ordinaires ou partielles. La solution peut être modifiée en ce sens que d'autres parties de le développement de Wiener Hermite peuvent être prises en considérations et l'ordre requis des approximations peuvent toujours être faites en fonction de l'outil informatique.

La solution du premier ordre peut être obtenue lorsque l'on considère uniquement la partie Gaussienne de la solution du processus $u(t; \omega)$ peut être étendu comme,

$$u(t; \omega) = u^{(0)}(t) + \int_{\mathbb{R}} u^{(1)}(t; t_1) H^{(1)}(t_1) dt_1. \quad (2.12)$$

La technique WHEP utilise le développement suivant pour ses noyaux déterministes,

$$u^{(i)}(t) = u_0^{(i)}(t) + \varepsilon u_1^{(i)}(t) + \varepsilon^2 u_2^{(i)}(t) + \dots, i = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

2.1.2 Exemple illustratif .(M.A. El-Tawil[6])

En 2010, MA El-Tawil et NA Al-Mulla [6] ont utilisé le HPM lié à la technique de WHEP pour résoudre l'équation de diffusion non linéaire stochastique des pertes non linéaires carrés ou cubes, comme suit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \varepsilon u^n(t, x; \omega) + \sigma.n(x, \omega); (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0, \quad u(0, x) = \phi(x), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où la viscosité ε est une échelle déterministe pour le terme non linéaire. Le terme de non homogénéité $\sigma.n(x)$ est le processus de bruit blanc en espace en produit scalaire par σ . La solution du premier ordre peut être obtenue lorsque l'on considère uniquement la partie Gaussienne de la solution du processus $u(t; \omega)$ peut être étendu comme suit,

$$u(t; \omega) = u^{(0)}(t, x) + \int_{\mathbb{R}} u^{(1)}(t, x; x_1) H^{(1)}(x_1) dx_1. \quad (2.15)$$

où $u^{(0)}(t, x)$ and $u^{(1)}(t, x; x_1)$ sont des noyaux déterministes à évaluer. en remplaçant dans Eq. (2.14) où $n = 2$, en prenant les moyennes nécessaires sur l'équation résultante, puis en utilisant la méthode WHEP on a :

$$u^{(0)}(t, x) = u_0^{(0)}(t, x) + \lambda u_1^{(0)}(t, x) \quad (2.16)$$

$$u^{(1)}(t, x) = u_0^{(1)}(t, x; x_1) + \lambda u_1^{(1)}(t, x; x_1) \quad (2.17)$$

en tant que première correction, on obtient les équations déterministes suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0^{(0)}(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_0^{(0)}}{\partial x^2} \\ u_0^{(0)}(t, 0) = 0, u_0^{(0)}(t, L) &= 0, u_0^{(0)}(0, x) = \phi(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1^{(0)}(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x^2} - [u_0^{(0)}]^2 - \int_0^L [u_0^{(1)}]^2 dx_1 \\ u_1^{(0)}(t, 0) &= 0, u_1^{(0)}(t, L) = 0, u_1^{(0)}(0, x) = 0\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0^{(1)}(t, x; x_1)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_0^{(1)}}{\partial x^2} + \sigma \delta(x - x_1) \\ u_0^{(1)}(t, 0; x_1) &= 0, u_0^{(1)}(t, L; x_1) = 0, u_0^{(1)}(0, x; x_1) = 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1^{(1)}(t, x; x_1)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x^2} - 2u_0^{(0)}u_0^{(1)} \\ u_1^{(1)}(t, 0; x_1) &= 0, u_1^{(1)}(t, L; x_1) = 0, u_1^{(1)}(0, x; x_1) = 0\end{aligned}\quad (2.21)$$

L'algorithme de la solution est d'évaluer $u_0^{(1)}$ et $u_1^{(1)}$ par l'utilisation de la séparation des variables et le développement de fonction propre, respectivement, et puis en calculant les deux autres noyaux indépendamment en utilisant le développement de fonction propre. Les résultats définitifs du premier ordre de la moyenne et de la variance de la première de correction sont respectivement :

$$\mu_u(t, x) = u_0^{(0)}(t, x) + \lambda u_1^{(0)}(t, x) \quad (2.22)$$

$$Varu(t, x) = \int_0^L [u_0^{(1)}]^2 dx_1 + 2\lambda \int_0^L u_0^{(1)} u_1^{(1)} dx_1 \quad (2.23)$$

La technique WHEP peut être appliquée pour résoudre les équation différentielles ordinaires ou partielles. Le développement de Wiener-Hermite peut toujours être pris en considérations et l'ordre requis des approximations peut toujours être fait.

2.1.3 Théorème

La solution de Eq. (2.14), si elle existe est une série de puissance en λ , i.e. $u(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i(t, x)$, si on a la série converge .

Preve Utiliser la méthode de Picard qui génère une séquence d'approximations qui converge vers la solution.

2.2 La méthode de Homotopie et de la Perturbation

Pour illustrer les idées de bases de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$A(u) - f(u) = 0, r \in \Omega \quad (2.24)$$

Compte tenu des conditions aux limites de :

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) \in \Gamma \quad (2.25)$$

où A est un opérateur différentiel, B un opérateur de limite, $f(r)$ une fonction analytique connue et Γ est la limite du domaine Ω .

L'operator A généralement être divisée en deux parties L et N , où L est linéaire mais N est non linéaire.

Eq. (2.25) peut donc être réécrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (2.26)$$

En utilisant la technique de Homotopie, nous construisons une Homotopie $\nu(r, p) : \Omega \times [0, 1] \mapsto \mathfrak{R}$, qui satisfait la relation :

$$H(\nu, p) = (1 - p)[L(\nu) - L(u_0)] + p[A(\nu) - f(r)] = 0, p \in [0, 1], r \in \Omega \quad (2.27)$$

ou

$$H(\nu, p) = L(\nu) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(\nu) - f(r)] = 0, \quad (2.28)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre que l'on ajoute et u_0 est une approximation initiale of Eq. (2.24), qui satisfait les conditions aux limites. En considérant Eqs. (2.27) et (2.28), nous aurons

$$H(\nu, 0) = L(\nu) - L(u_0) = 0, \quad (2.29)$$

$$H(\nu, 1) = A(\nu) - f(r) = 0 \quad (2.30)$$

Le parametre p varie de 0 à 1 et (ν, p) de $u_0(r)$ à $u_1(r)$. En topologie, c'est ce qu'on appelle la déformation, et $L(\nu) - L(u_0)$ and $A(\nu) - f(r)$ Selon la méthode de Homotopie et de la Perturbation (HPM), on peut d'abord utiliser le paramètre p comme un parametre de puissance , et supposer que la solution des équations (2.27) et (2.28) peut être écrite comme une série de puissance en p :

$$\nu = \nu_0 + p\nu_1 + p^2\nu_2 + \dots \quad (2.31)$$

Posons $p = 1$, alors $u = \lim_{p \rightarrow 1} \nu$ d'où on trouve la solution approchée de Eq. (2.24).

La combinaison de la méthode de Perturbation et la méthode de Homotopie est appelée la méthode de homotopie et de la perturbations (HPM), qui est différente de la méthode de la perturbation traditionnels.

La série (2.31) est convergente pour la plupart des cas. Toutefois, le rayon de la convergence dépend de l'opérateur non linéaire $A(\nu)$.

2.3 La méthode de Homotopie WHEP

L'un des principaux inconvénients de la technique WHEP est de résoudre les problèmes de perturbation uniquement, donc le problème doit contenir un petit paramètre. Cet inconvénient peut être surmonté à l'aide de la HPM à la place des méthodes de perturbation classiques. Ainsi, en utilisant le développement de Wiener-Hermite et la technique Homotopie et la Perturbation , ou la méthode Homotopy WHEP peut approximativement résoudre des équations différentielles stochastiques non linéaire en obtenant la moyenne

et la variance du processus de la solution.

La méthode Homotopie WHEP fournit un moyen systématique pour résoudre des équations différentielles stochastiques lorsque la convergence est assurée..

En appliquant cette technique sur l'équation. (2,14) avec $n = 2$, On obtient les résultats suivants :

1. En premier lieu, on applique la méthode du développement de Wiener-Hermite, les équations suivantes sont obtenus :

$$Ru^{(0)}(t, x) = -\lambda[u^{(0)}(t, x)]^2 - \lambda \int_0^L [u^{(1)}(t, x; x_1)]^2 dx_1 \quad (2.32)$$

$$Ru^{(1)}(t, x; x_1) = -2\lambda.u^{(0)}(t, x)u^{(1)}(t, x; x_1) + \sigma\delta(x - x_1) \quad (2.33)$$

où $R = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^2}$.

2. On utilise la méthode HPM dans la résolution des équations différentielles non linéaires (2.32) et (2.33), les fonctions Homotopies sont construites :

$$H_1 = R(v) - R(y_0) + p[R(y_0) + \lambda \int_0^L (w)^2 dx_1] = 0 \quad (2.34)$$

$$H_2 = R(w) - R(z_0) + p[R(z_0) + 2\lambda.vw - \sigma.\delta(x - x_1)] = 0 \quad (2.35)$$

where

$$\begin{aligned} v &= u^{(0)}(t, x) \\ &= u_0^{(0)}(t, x) + pu_1^{(0)}(t, x) + p^2u_2^{(0)}(t, x) + \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

and

$$\begin{aligned} w &= u^{(1)}(t, x; x_1) \\ &= u_0^{(1)}(t, x; x_1) + pu_1^{(1)}(t, x; x_1) + p^2u_2^{(1)}(t, x; x_1) + \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

3. En substituant les équations. (2.36) et (2.37) dans (2.34) et (2.35), puis assimiler les puissances en p des deux côtés de l'équation, nous obtenons le système d'équations itératives suivantes :

$$R(u_0^{(0)}(t, x)) = R(y_0(t, x)), y_0(0, x) = \phi(x), y_0(t, 0) = y_0(t, L) = 0 \quad (2.38)$$

$$R(u_0^{(1)}(t, x; x_1)) = R(z_0(t, x; x_1)), z_0(0, x; x_1) = z_0(t, 0; x_1) = z_0(t, L; x_1) \quad (2.39)$$

and

$$R(u_1^{(0)}(t, x)) = -R(y_0) - \lambda[u_0^{(0)}(t, x)]^2 - \lambda \int_0^L [u_0^{(1)}(t, x; x_1)]^2 dx_1 \quad (2.40)$$

$$R(u_1^{(1)}(t, x; x_1)) = -R(z_0) - 2\lambda.u_0^{(0)}(t, x)u_0^{(1)}(t, x; x_1) + \sigma.\delta(x - x_1) \quad (2.41)$$

and

$$R(u_2^{(0)}(t, x)) = -2\lambda.u_0^{(0)}(t, x)u_1^{(1)}(t, x; x_1) - 2\lambda. \int_0^L u_0^{(1)}(t, x; x_1)u_1^{(1)}(t, x; x_1)dx_1 \quad (2.42)$$

$$R(u_2^{(1)}(t, x; x_1)) = -2\lambda.u_0^{(0)}(t, x)u_1^{(1)}(t, x; x_1) - 2\lambda.u_1^{(0)}(t, x)u_0^{(1)}(t, x; x_1) \quad (2.43)$$

Par l'utilisation de notion des fonctions propres [26], et en substituant dans le premier modèle de correction, puis en utilisant les expressions générales de la moyenne et de la variance, on obtient les résultats pour $\phi(x) = x$ comme dans les Figures 1-4.

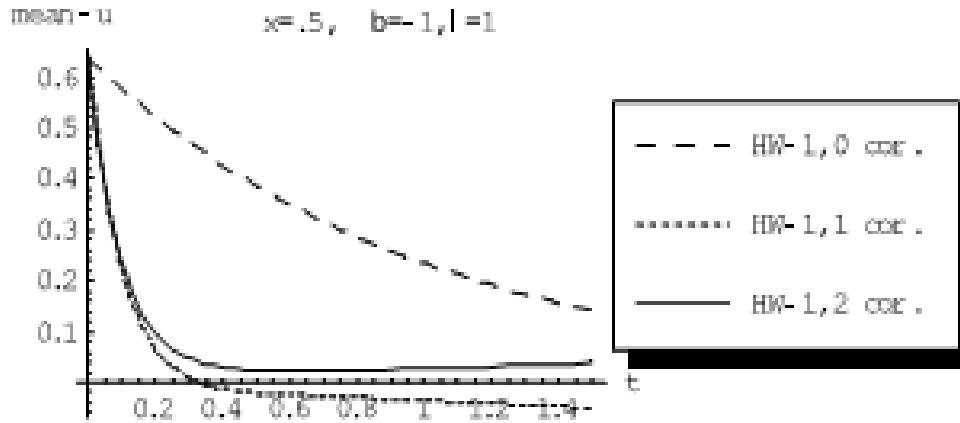


Fig. 1: Differentes corrections de l'esperance, Homotopy WHEP n=2

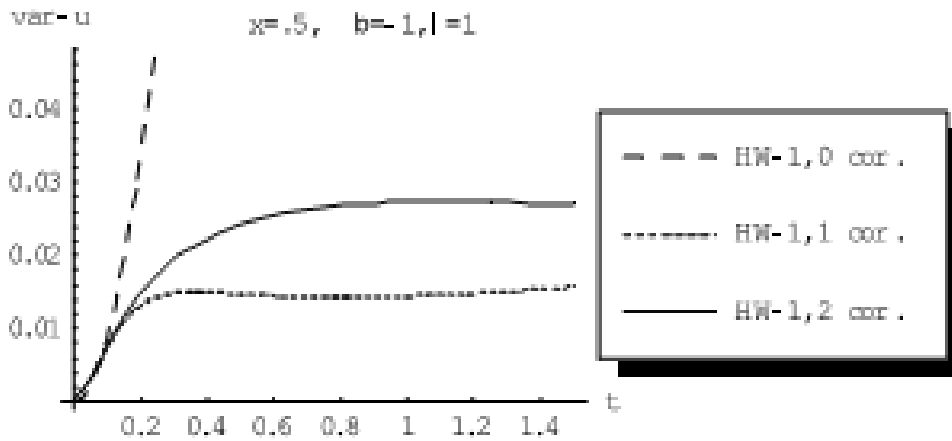


Fig. 2: Differentes corrections de la variance, Homotopy WHEP

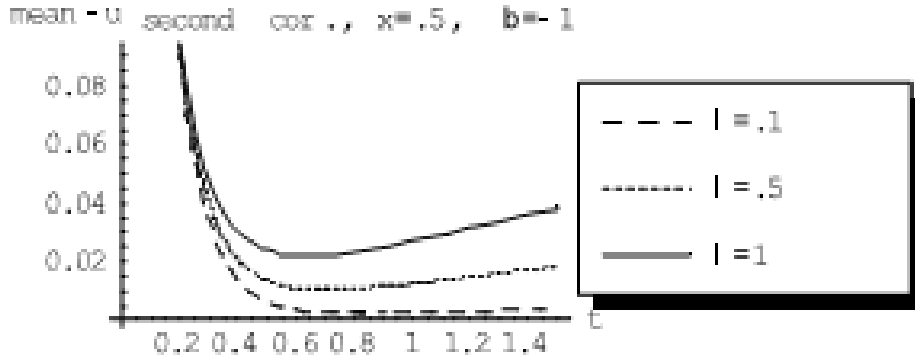


Fig. 3: La Seconde correction de l'espérance, Homotopy WHEP

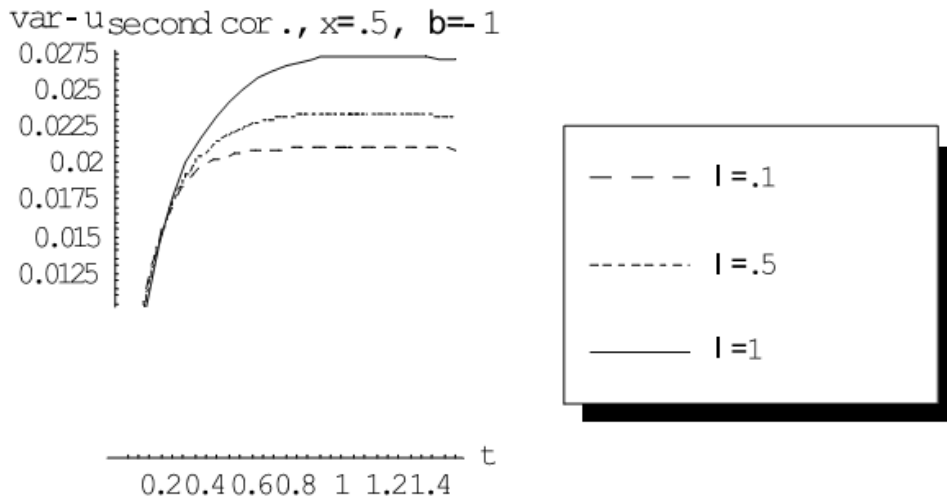


Fig. 4: La Seconde correction de la variance, Homotopy WHEP

L'utilisation de la méthode de Homotopie et de la Perturbation liée à technique WHEP pour résoudre les EDS est meilleur par rapport à l'utilisation de la méthode de Homotopie et de la perturbation seule. Le développement de Wiener-Hermite est connue à être convergent, mais l'application de la méthode de Homotopie et de la perturbation (HPM) peut conduire à des divergences parce que la méthode (HPM) a dû utiliser une assez bonne estimation initiale. cet inconvénient est surmonté en utilisant la méthode Homotopie et d'Analyse (HAM) qui représente la nouvelle approche et la nouvelle contribution dans cette thèse pour résoudre l'équation (2.14) en particulier l'objet de l'étude dans les chapitres 3 et 4. Les résultats des chapitres 3 et 4 forment une partie essentielle du travail [7] publié dans le journal International Journal of Mathematical Analysis.

Chapitre 3

Résolution d'un problème de valeur initiale par la technique de HAM WHEP technique

3.1 Résolution de l'équation de Langevin par plusieurs méthodes : HAM, WHEP et HAM WHEP technique

Cette partie traite l'équation de Langevin en utilisant trois techniques, en particulier : WHEP, HAM et HAM WHEP technique. Nous considérons l'équation de Langevin pour $n = 2, 3$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t; \omega)}{\partial t} &= -\varepsilon u^n(t; \omega) + \sigma(t) \cdot n(t, \omega); t \in (0, \infty) \\ u(0) &= 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $n(t, \omega)$ est le processus de bruit blanc en temps, $\sigma(t)$ est une fonction continue et ε est une constante.

3.1.1 La méthode de l'Analyse Homotopique

La méthode d'analyse homotopique (HAM) initialement proposé par SJ Liao dans son thèse de doctorat [17]. Une approche claire et systématique est exposée sur la technique de HAM est donnée dans [18]. Ces dernières années, ce procédé a été utilisée avec succès pour résoudre de nombreux types de problèmes non linéaires en la science et de l'ingénierie[1, 2, 13, 15, 20]. HAM contient un certain auxiliaire paramètre \hbar , ce qui fournit un moyen simple pour régler et contrôler la région de convergence. De plus, par l'intermédiaire de la dite \hbar -courbe, une région valable de \hbar peut être étudié pour obtenir une convergence de la serie de solution. Il est important de noter que, on a une grande liberté pour choisir \hbar et L dans HAM. Ainsi, par HAM, solutions analytiques explicites de problèmes non linéaires sont possibles

Pour décrire l'idée de base de la HAM, nous considérons l'équation différentielle suivante,

$$N[u(x, t)] = 0, \tag{3.2}$$

où N est un opérateur non linéaire, x et t désigne les variables indépendantes, $u(x, t)$ est une fonction inconnue, respectivement. Au moyen de généraliser la méthode traditionnelle de Homotopie, S.J. Liao [17] construit la dite : équation de déformation d'ordre zéro,

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Psi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar H(x, t)N[\Psi(x, t; q)], \quad (3.3)$$

où $q \in [0, 1]$ est un paramètre intégré, \hbar est le paramètre auxiliaire différent de zéro et $H(x, t)$ est la fonction auxiliaire non nulle \mathcal{L} est un opérateur linéaire auxiliaire, $u_0(x, t)$ est une estimation initiale de $u(x, t)$ et $\Psi(x, t; q)$ est une fonction inconnue.

De toute évidence, lorsque $q = 0$ et $q = 1$ tous les deux,

$$\Psi(x, t; 0) = u_0(x, t) \quad \text{and} \quad \Psi(x, t; 1) = u(x, t), \quad (3.4)$$

détiendront respectivement. ainsi que q augmente à partir de 0 à 1, la solution $\Psi(x, t; q)$ varie de la condition initiale $u_0(x, t)$ à la solution $u(x, t)$.

utilisant le développement de Taylor pour $\Psi(x, t; q)$ par rapport à q , on a

$$\Psi(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)q^m, \quad (3.5)$$

où

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Psi(x, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}. \quad (3.6)$$

Si l'opérateur linéaire auxiliaire, l'estimation initiale, paramètre auxiliaire \hbar et la fonction auxiliaire sont si bien choisis, donc la serie (3.3) converge pour $q = 1$ et,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t), \quad (3.7)$$

qui est la solution de l'équation d'origine, comme le prouve S.J. Liao [18]. pour $H(x, t) = 1$ et $\hbar = -1$, l'équation (3.3) devient,

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Psi(x, t; q) - u_0(x, t)] + qN[\Psi(x, t; q)] = 0, \quad (3.8)$$

qui est principalement utilisé dans la méthode de perturbation Homotopique (HPM) prouvant que le HPM est un cas particulier de la méthode de l'analyse Homotopique (HAM). Comparaison entre la HAM et HPM peut être trouvée dans [12, 19]. D'après l'équation (3.6), l'équation qui régit, peut être déduite de l'équation d'ordre zéro de déformation

(3.3). définir le vecteur,

$$\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}. \quad (3.9)$$

Différenciant l'équation(3.3) m fois par rapport le paramètre intégré q et puis on met $q = 0$ et finalement en les divisant par $m!$, nous avons qu'on appelle m th ordre de déformation,

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}), \quad (3.10)$$

où

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

et

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Psi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}. \quad (3.12)$$

Pour tout opérateur non linéaire donné N et le terme $R_m(\vec{u}_{m-1})$ peut être facilement exprimée par l'équation (3.12). Ainsi, nous pouvons obtenir $u_0(x, t), u_1(x, t), \dots$ au moyen de la résolution de l'équation de déformation d'ordre supérieur linéaire (3.10). le m th ordre d'approximation de $u(x, t)$ est obtenu par,

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) \quad (3.13)$$

La solution approchée est en fonction de \hbar , qui joue un rôle nécessaire et important dans HAM pour déterminer la convergence de la série de solution. On peut ajuster et contrôler la région de convergence (3.13) au moyen du paramètre auxiliaire \hbar . Pour obtenir la région de validité en \hbar nous traçons d'abord qu'on appelle \hbar -courbe de $u(x, t), u_t(x, t)|_{x=\alpha}$ où $\alpha \in [a, b]$ et ainsi de suite. Selon celles-ci \hbar -courbes, il est facile de découvrir la région valide \hbar , ce qui correspond à des segments de ligne à peu près parallèle à l'axe horizontal.

Théoreme

Selon S.J. Liao [18], la série (3.13) converge vers $u(x, t)$, où $u_m(x, t)$ dont elle est régie par l'équation de déformation d'ordre élevé (3,10) avec les définitions (3.11) et (3.12), et elle doit être la solution exacte de l'équation (3.2).

Preuve. See S.J. Liao [18].

3.1.2 Utilisation de WHEP méthode pour résoudre l'équation de Langevin

At $n = 2$ l'eq.(3.1) devient,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t; \omega)}{\partial t} &= -\varepsilon u^2(t; \omega) + \sigma(t).n(t, \omega); t \in (0, \infty) \\ u(0) &= 1,\end{aligned}\tag{3.14}$$

où $n(t, \omega)$ est le processus de bruit en temps, $\sigma(t)$ est une fonction continue et ε est une constante.

Par l'application de la technique de WHEP à l'eq (3.14) et en prenant les moyennes nécessaires, nous obtenons les équations suivantes,

$$\frac{\partial u^{(0)}(t)}{\partial t} = -\varepsilon [u^{(0)}(t)]^2 - \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1,\tag{3.15}$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t; t_1)}{\partial t} = -2\varepsilon u^{(0)}(t)u^{(1)}(t; t_1) + \sigma(t)\delta(t - t_1).\tag{3.16}$$

où,

$$u(t; \omega) = u^{(0)}(t) + \int_0^t u^{(1)}(t; t_1)H^{(1)}(t_1)dt_1\tag{3.17}$$

L'application de la technique de perturbation, les noyaux déterministes peuvent être représentés en approximation du premier ordre en tant que,

$$u^{(0)}(t) = u_0^{(0)}(t) + \varepsilon u_1^{(0)}(t),\tag{3.18}$$

$$u^{(1)}(t; t_1) = u_0^{(1)}(t; t_1) + \varepsilon u_1^{(1)}(t; t_1).\tag{3.19}$$

La solution cherchée est alors évaluer $u_0^{(0)}$ and $u_0^{(1)}$ puis en calculant les deux autres noyaux indépendamment. Les résultats définitifs du premier ordre moyen la variance de la première de correction sont respectivement,

$$\mu_u(t) = u^{(0)}(t)\tag{3.20}$$

$$\sigma_u^2(t) = \int_0^t [u^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1\tag{3.21}$$

3.1.3 Utilisation de HAM pour résoudre l'équation Langevin

Afin de résoudre l'équation. (3.14) par la méthode de HAM, nous choisissons la première approximation,

$$u_0(t) = 1, \quad (3.22)$$

et l'opérateur linéaire auxiliaire,

$$\mathcal{L}[\Psi(t; q)] = \frac{\partial \Psi(t; q)}{\partial t}, \quad (3.23)$$

et l'opérateur linéaire auxiliaire,

$$\mathcal{L}[c_1] = 0,$$

où c_1 est constante d'intégration. En outre, l'Eq. (3.14) suggère que nous définissons l'équation suivante,

$$N[\Psi(t; q)] = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \varepsilon \Psi^2 - \sigma(t).n(t) \quad (3.24)$$

En utilisant la définition ci-dessus, on construit l'équation de déformation d'ordre zéro

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Psi(t; q) - u_0(t)] = q\hbar H(t)N[\Psi(t; q)]. \quad (3.25)$$

pour $H(t) = 1$, l'éq. (3.25) devient,

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Psi(t; q) - u_0(t)] = q\hbar N[\Psi(t; q)] \quad (3.26)$$

et qu'on appelle l'équation de déformation d'ordre m th ,

$$\mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}), \quad (3.27)$$

avec la condition initiale,

$$u_m(0) = 0, \quad (3.28)$$

où

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = (u_{m-1})_t + \varepsilon(u_{m-1})^2 - (1 - \chi_m)\sigma(t)n(t). \quad (3.29)$$

Or, la solution de l'équation (3.27) de déformation d'ordre m th pour $m \geq 1$ devient,

$$u_m(t) = \chi_m u_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t R_m(\vec{u}_{m-1}) d\tau + c_1, \quad (3.30)$$

la constante c_1 est déterminée par la condition initiale (3.28).

Prenant les moyennes nécessaires avec $\sigma(t) = t$, on obtient les résultats suivants lors de l'obtention à la fois l'approximation du quatrième ordre pour la moyenne et la variance, respectivement,

$$\begin{aligned} \mu_u = & 1 + \hbar t + (2 + \hbar)(\hbar + \hbar^2)t + \frac{(3\hbar^4 + 3\hbar^3 + \hbar^2)}{3}t^3 \\ & + \frac{(\hbar + \hbar^2)^2}{12}t^4 + \frac{3\hbar^4(1 + \hbar)}{10}t^5 \\ & - \frac{\hbar^3(\hbar + \hbar^2)}{9}t^6 + \frac{\hbar^6}{14}t^7 + \frac{\hbar^6}{32}t^8 + \frac{\hbar^6}{81}t^9, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\sigma_u^2(t) = \frac{(\hbar + \hbar^2)^2}{3}t^3 + \frac{2\hbar^4(1 + \hbar)}{3}t^5 + \frac{\hbar^6}{3}t^7 + \frac{\hbar^6}{9}t^8. \quad (3.32)$$

La valide valeur de \hbar qui garantit la convergence de la série solution se trouve en traçons la \hbar -courbes obtenues à la fois à partir du quatrième ordre HAM approximation de la moyenne et de la variance représenté par les Figures 5 and 6 respectivement. La région valide de \hbar correspond à des segments de lignes à peu près parallèle à l'axe horizontal.

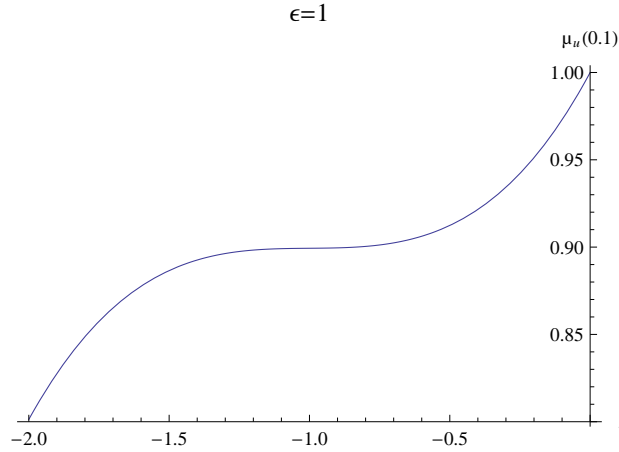


Fig. 5: La \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la quatrième ordre d'approximation HAM WHEP

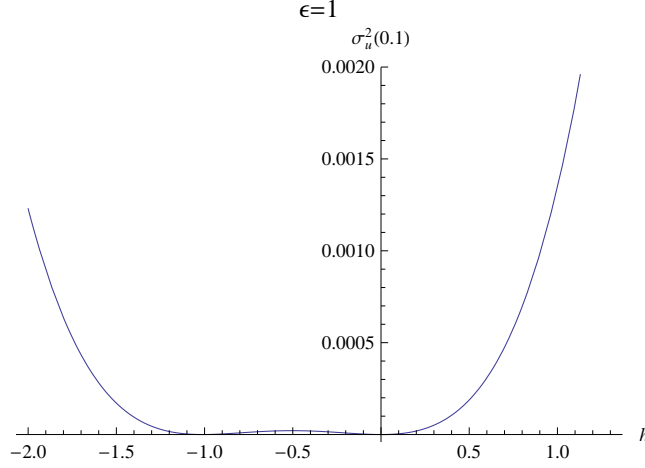


Fig. 6: La \hbar -courbe de la variance obtenue par la quatrième ordre d'approximation HAM WHEP

3.1.4 Utilisation de HAM WHEP technique pour résoudre l'équation Langevin

En appliquant la technique de WHEP sur l'exemple proposé par l'équation(3.2), et en prenant les moyennes nécessaires, nous obtenons les équations suivantes,

$$\frac{\partial u^{(0)}(t)}{\partial t} = -\varepsilon[u^{(0)}(t)]^2 - \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t; t_1)}{\partial t} = -2\varepsilon u^{(0)}(t)u^{(1)}(t; t_1) + \sigma(t)\delta(t - t_1). \quad (3.34)$$

Afin de résoudre les équations (3.33) et (3.34) par la HAM, nous choisissons les approximations initiales

$$u_0^{(0)}(t) = 1, \quad u_0^{(1)}(t; t) = t \quad (3.35)$$

En appliquant la même approche que dans le paragraphe (3.1.2) avec $\sigma(t) = t$. La valide valeur de \hbar qui garantit que la solution soit convergente est obtenue en traçant la \hbar -courbes à partir du sixième ordre d'approximation de HAM WHEP de la moyenne et du cinquième ordre d'approximation de HAM WHEP de la variance représentées par les Figures 7 and 8 respectivement. Comme mentionné S.J. Liao [18], la région valable et la valide valeur de \hbar correspond à des segments de lignes à peu près parallèles à l'axe horizontal.

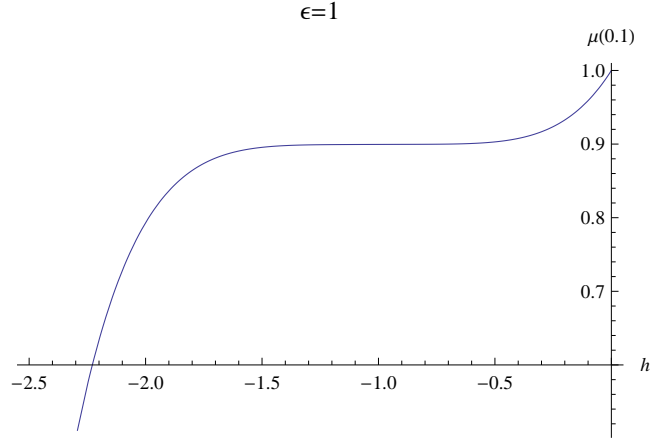


Fig. 7: La \hbar -courbe de la variance obtenue par la sixième ordre d'approximation HAM WHEP

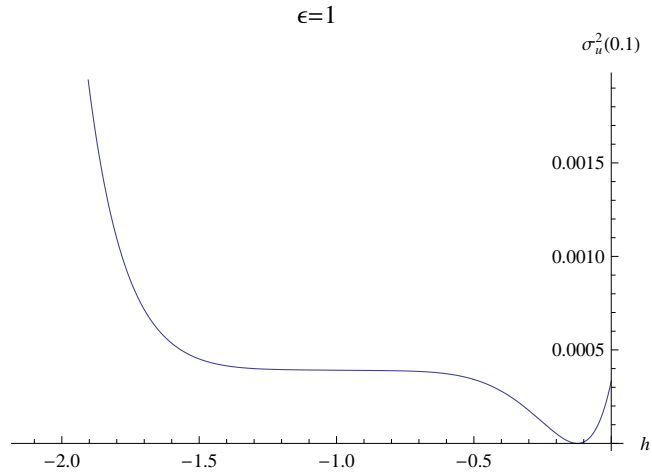


Fig. 8: La \hbar -courbe de la variance obtenue par la cinquième ordre d'approximation HAM WHEP

Maintenant, compte tenu le cas $n = 3$ et procédant d'une façon similaire comme dans le paragraphe 3.1.2 et 3.1.3, les résultats sont obtenus à partir de la \hbar -courbe à la fois du quatrième ordre d'approximation de HAM WHEP de la moyenne et de la variance représenté par les figures 9 et 10 respectivement. La région valide de \hbar correspondent à des segments de lignes à peu près parallèles à l'axe horizontal.

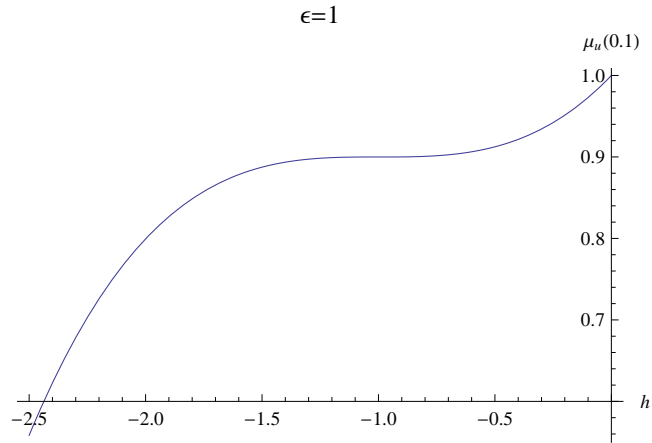


Fig. 9: La \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la quatrième ordre d'approximation HAM WHEP

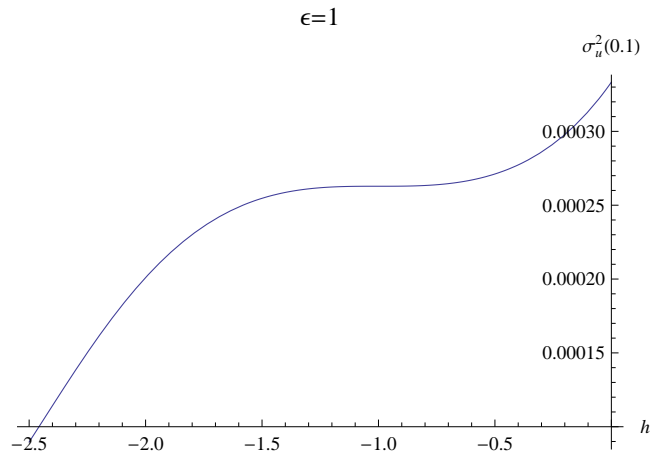


Fig. 10: La \hbar -courbe de la variance obtenue par la quatrième ordre d'approximation HAM WHEP

En ce qui concerne seulement une approximation de premier ordre, on peut noter à la fois la méthode de HAM et la techniques de HAM WHEP donnent des résultats proches. La technique de HAM WHEP est alors efficace en raison de ses possibilités de correction.

Chaptire 4

Résolution d'un problème aux limites par la technique de l'Analyse Homotopique liée à la technique de developpement de Wiener Hermite et la Perturbation

Dans ce chapitre, l'équatione stochastique non linéaire de diffusion généralisée des pertes carrés ou cubic εu^2 or εu^3 est résolu par la methode de HAM WHEP comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \varepsilon u^2(t, x; \omega) + \sigma(t).n(t, \omega); (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0, \quad u(0, x) = \phi(x),\end{aligned}\tag{4.1}$$

où $\sigma(t).n(t, \omega)$ est le processus en temps de bruit blanc produit par $\sigma(t)$: $\sigma(t)$ est la partie de temps continu de la force aléatoire.

En appliquant la technique de WHEP sur l'équation proposée dans (4.1), et en prenant les moyennes nécessaires, nous obtenons les équations suivantes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(0)}(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u^{(0)}(t, x)}{\partial x^2} - \varepsilon [u^{(0)}(t, x)]^2 - \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t, x; t_1)]^2 dt_1, \\ u^{(0)}(t, 0) = u^{(0)}(t, L) &= 0, \quad u^{(0)}(0, x) = \phi(x)\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(1)}(t, x; t_1)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u^{(1)}(t, x; t_1)}{\partial x^2} - 2\varepsilon u^{(0)}(t, x)u^{(1)}(t, x; t_1) + \sigma(t)\delta(t - t_1), \\ u^{(1)}(t, 0; t_1) = u^{(1)}(t, L; t_1) &= 0, \quad u^{(1)}(0, x; t_1) = t.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Afin de résoudre les équations (4.2) et (4.3) par la méthode de HAM, nous choisissons les

approximations initiales,

$$u_0^{(0)}(t, x) = \phi(x), \quad u_0^{(1)}(t, x; t_1) = t, \quad (4.4)$$

et les opérateurs linéaires auxiliaires,

$$\mathcal{L}_1[u^{(0)}(t, x; q)] = \frac{\partial u^{(0)}(t, x; q)}{\partial t}, \quad \mathcal{L}_2[u^{(1)}(t, x; t_1; q)] = \frac{\partial u^{(1)}(t, x; t_1; q)}{\partial t}, \quad (4.5)$$

avec les propriétés,

$$\mathcal{L}_1[c_1] = \mathcal{L}_2[c_2] = 0. \quad (4.6)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégrations..

les équations (4.2) and (4.3) suggèrent que nous définissons les opérateurs non linéaires

$$\begin{aligned} N[u^{(0)}(t, x; q)] &= \frac{\partial u^{(0)}(t, x; q)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{(0)}(t, x)}{\partial x^2} \\ &+ \varepsilon [u^{(0)}(t, x)]^2 + \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t, x; t_1)]^2 dt_1, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} M[u^{(1)}(t, x; t_1; q)] &= \frac{\partial u^{(1)}(t, x; t_1; q)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{(1)}(t, x; t_1; q)}{\partial x^2} + 2\varepsilon u^{(0)}(t, x)u^{(1)}(t, x; t_1) \\ &- (1 - \chi_m)\sigma(t)\delta(t - t_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

En utilisant la définition ci-dessus, nous construisons la déformation d'ordre zéro avec $H(t, x) = 1$, on a :

$$(1 - q)\mathcal{L}_1[u^{(0)}(t, x; q) - u_0^{(0)}(t, x)] = q\hbar N[u^{(0)}(t, x; q)], \quad (4.9)$$

$$(1 - q)\mathcal{L}_2[u^{(1)}(t, x; t_1; q) - u_0^{(1)}(t, x; t_1)] = q\hbar M[u^{(1)}(t, x; t_1; q)], \quad (4.10)$$

et qu'on appelle les équations de déformations d'ordre m th pour $m \geq 1$ et on a :

$$\mathcal{L}_1[u_m^{(0)} - \chi_m u_{m-1}^{(0)}] = \hbar R_m^{(0)}(\vec{u}_{m-1}^{(0)}), \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_2[u_m^{(1)} - \chi_m u_{m-1}^{(1)}] = \hbar R_m^{(1)}(\vec{u}_{m-1}^{(1)}), \quad (4.12)$$

avec les conditions initiales,

$$u_m^{(0)}(0, x) = 1, \quad u_m^{(1)}(0, x; t_1) = 0 \quad (4.13)$$

où,

$$R_m^{(0)}(\vec{u}_{m-1}^{(0)}) = (u_{m-1}^{(0)})_t - (u_{m-1}^{(0)})_{xx} + \varepsilon(u_{m-1}^{(0)})^2 + \varepsilon \int_0^t [u_{m-1}^{(1)}]^2 dt_1, \quad (4.14)$$

$$R_m^{(1)}(\vec{u}_{m-1}^{(1)}) = (u_{m-1}^{(1)})_t - (u_{m-1}^{(1)})_{xx} + 2\varepsilon u_{m-1}^{(0)} u_{m-1}^{(1)} - (1 - \chi_m) \sigma(t) \delta(t - t_1). \quad (4.15)$$

Les solutions des l'équations de déformations d'ordre m th (4.11) et (4.12) sont,

$$u_m^{(0)}(t, x) = \chi_m u_{m-1}^{(0)} + \hbar \int_0^t R_m^{(0)}(\vec{u}_{m-1}^{(0)}) d\tau + c_1, \quad (4.16)$$

$$u_m^{(1)}(t, x; t_1) = \chi_m u_{m-1}^{(1)} + \hbar \int_0^t R_m^{(1)}(\vec{u}_{m-1}^{(1)}) d\tau + c_2. \quad (4.17)$$

On obtient les résultats pour $\sigma(t) = t$ and $\phi(x) = x$,

$$u_1^{(0)}(t, x) = \hbar \left(\frac{t^4}{4} + tx^2 \right) \quad \text{and} \quad u_1^{(1)}(t, x) = \hbar tx^2, \quad (4.18)$$

et ainsi de suite.

La valide valeur de \hbar qui garantit que la solution soit convergente est obtenue en traçon la \hbar bar-courbes à partir du cinquième ordre d'approximation de HAM WHEP à la fois de la moyenne de la variance représentées par les Figures 11 and 12 respectivement. Comme mentionné S.J. Liao [18], la région valable de \hbar bar correspondant à des segments de lignes à peu près parallèles à l'axe horizontal.

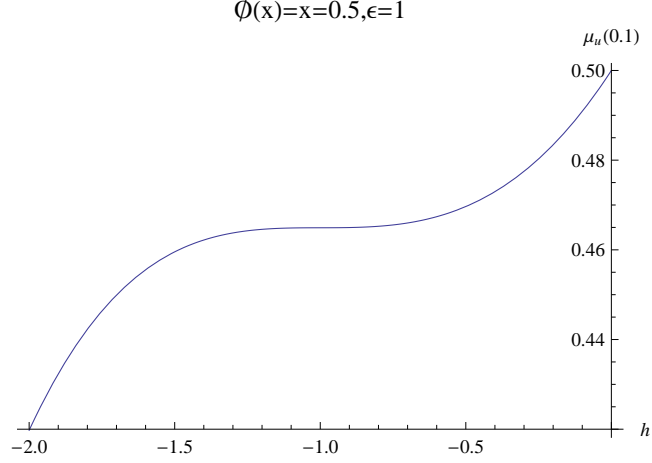


Fig. 11: La \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la cinquième ordre d'approximation HAM WHEP

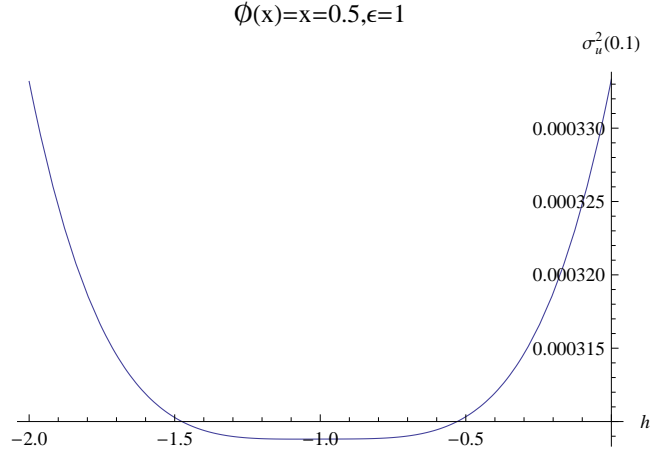


Fig. 12: La \hbar -courbe de la variance obtenue par la cinquième ordre d'approximation HAM WHEP

Maintenant, compte tenu du cas $n = 3$, l'équation (0.2) d'intérêt dans le présent document devient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \varepsilon u^3(t, x; \omega) + \sigma(t).n(t, \omega); (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0, \quad u(0, x) = \phi(x), \end{aligned} \quad (4.19)$$

où $\sigma(t).n(t, \omega)$ est le processus en temps de bruit blanc produit par $\sigma(t)$: $\sigma(t)$ est la partie de temps continu de la force aléatoire.

En procédant de la même manière que précédemment. La valide valeur de \hbar qui garantit que la solution soit convergente est obtenue en traçon la $hbar$ -courbes à partir du quatrième ordre d'approximation de HAM WHEP à la fois de la moyenne de la variance représentées par les Figures 13 and 14 respectivement. Comme mentionné S.J. Liao [18],

la région valable de \hbar correspondant à des segments de lignes à peu près parallèles à l'axe horizontal.

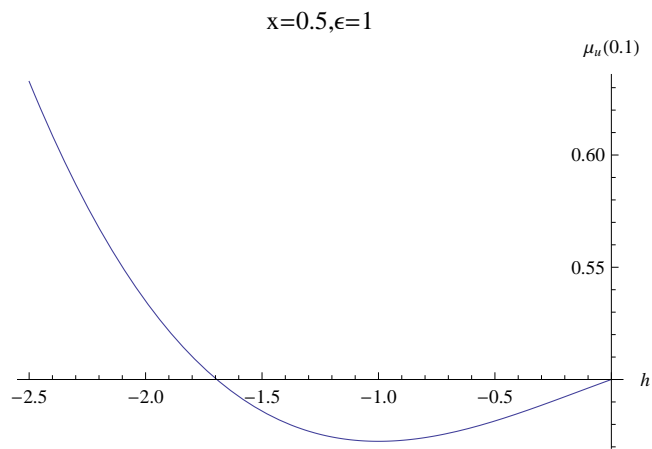


Fig. 13: La \hbar -courbe de l'espérance obtenue par la quatrième ordre d'approximation HAM WHEP

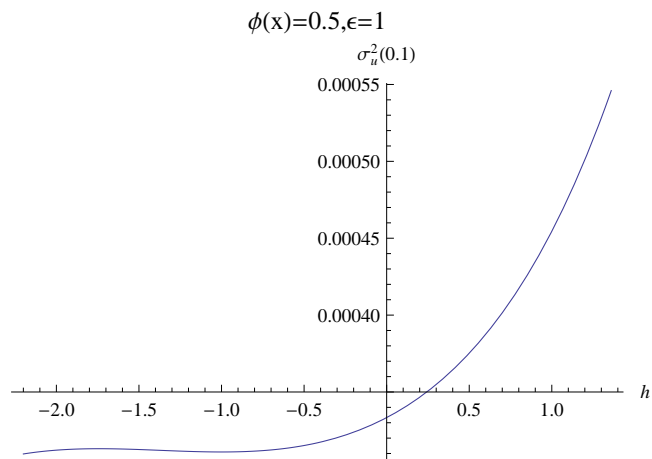


Fig. 14: La \hbar -courbe de la variance obtenue par la quatrième ordre d'approximation HAM WHEP

Conclusion

Cette thèse est cosacrée à l'étude d'une nouvelle approche qu'on appelle la méthode Homotopie et l'Analyse liée au développement de Wiener Hermite et la Perturbation et l'appliquée pour résoudre une certaine classe d'équations différentielles stochastiques. L'avantage de cette méthode est de surmonter les difficultés résultantes de la méthode de la Homotopie et la perturbation car l'utilisation des méthodes perturbatives peut conduire à divergence de solution et le choix doit être bon de la condition initiale dans la méthode de Homotopie et de perturbation pour qu'on puisse garantir la convergence de la solution. La méthode Homotopie et d'Analyse utilise un paramètre \hbar de contrôle la région de convergence de la série de la solution et on a une grande liberté de choisir la condition initiale ce qui est différent de HPM. La méthode a été appliquée avec succès sur une certaine classe d'EDS dont nous avons eu la convergence de la série de la solution les résultats sont interprétés par des courbes. Tous les résultats prouvent l'importance de la nouvelle approche.

Actuellement nous nous sommes intéressés par l'application de la nouvelle approche pour résoudre l'équation de Navier Stokes à une dimension.

Bibliographie

- [1] S. Abbasbandy, E. Magyari, E. Shivanian, The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14 (9-10) (2009), 3530 - 3536
- [2] S. Abbasbandy, Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method, *Chemical Engineering Journal*, 136 (2-3)(2008), 144-150.
- [3] M.A. El-Tawil, The Homotopy Wiener Hermite Expansion and Perturbation technique (WHEP), *Transactions on Computational Science I*, 4750(2008), 159-180.
- [4] M.A. El-Tawil, The application of WHEP technique on partial differential equations, *International Journal of Differential Equations and Applications*, 7 (3)(2003), 325-337.
- [5] M.A. El-Tawil, Nonhomogeneous boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 200(1996), 53-65.
- [6] M.A. El-Tawil, N. A. Al-Mulla, Using Homotopy WHEP technique for solving a stochastic nonlinear diffusion equation, *Mathematical and Computer Modelling*, 51(2010), 1277-1284.
- [7] A. Boukehila, F. Z. Benmostefa, Solution process of a class of differential equation using homotopy analysis Wiener Hermite expansion and perturbation technique, 8(2014), n.4, 167-186.
- [8] M.A. El-Tawil, A. Fareed, Solution of Stochastic Cubic and Quintic Nonlinear Diffusion Equation Using WHEP, Pickard and HPM Methods, *Open Journal of Discrete*

Mathematics,1(1) (2011), 6-21.

[9]M.A. El-Tawil, G. Mahmoud, The solvability of parametrically forced oscillators using WHEP technique, *Mechanics and Mechanical Engineering*,3 (2)(1999), 181-188.

[10] M.A. El-Tawil, The average solution of a stochastic nonlinear Schrodinger equation under stochastic complex non-homogeneity and complex initial conditions, *Transactions on Computational Science III*,5300 (2009), 143-170.

[11] C. Eftimiu, First-order Wiener Hermite Expansion in the electromagnetic scattering by conducting rough surfaces, *Radio Science*,23 (5)(1980), 769-779.

[12] J.H. He, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*,156 (2)(2004), 527-539.

[13] I. Hashim, O. Abdulaziz, S. Momani, Homotopy analysis method for fractional IVPs, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*,14 (3) (2009), 674-684.

[14] T. Imamura, W. Meecham, A. Siegel, Symbolic calculus of the Wiener process and Wiener Hermite Functionals, *Journal of Mathematical Physics*,6 (5)(1983), 695-706.

[15]H. Jafari, S. Seifi, Homotopy analysis method for solving linear and nonlinear fractional diffusion wave equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*,14 (2009), 2006-2012.

[16] P. E. Kloeden, and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*,Springer, Berlin, 1995.

[17] S.J. Liao, *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*,PhD, Dissertation, Shanghai, Shanghai Jiao Tong University, 1992.

[18] S.J. Liao, *Beyond Perturbation Introduction to the Homotopy Analysis Method*,CRC

Press, Boca Raton, Chapman and Hall, Boca Raton, 2003.

[19] S.J. Liao, Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*,169(2005), 1186-1194.

[20] S.J. Liao, A new branch of solutions of boundary layer flows over an impermeable stretched plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*,48(2005), 2529-39.

[21] I. Orabi, I. Ahmadi, A. Goodarz, A Functional Series Expansion Method for Response Analysis of Nonlinear Systems Subjected to Random Excitations, *International Journal of NonLinear Mechanics*,22 (6) (1987), 451-465

[22] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Application*, Springer, Berlin, 1998.

[23] P. Saffman, Application of Wiener Hermite Expansion to the diffusion of a passive scalar in a homogeneous turbulent flow, *Physics of Fluids*,12 (9) (1969), 1786-1798.

[24] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations : An introduction with application*, Third Edition, Springer, 1989.

[25] B. Zdzislaw, T. Zastawniak Basic Stochastic Process, A course Through Exercices, Springer, 1998.

[26] Kampe de Fariet, Random solutions of partial differential equations, in : Proc. 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability- 1955, vol. III, 1956, pp. 199-208.

[27] R. Bharucha, A survey on the theory of random functions, The Institute of Mathematical Sciences : Mat science Report 31, India, 1965.

[28] V. Lo Dato, Stochastic processes in heat and mass transport, C, in : Bharucha-Reid

(Ed.), Probabilistic Methods in Applied Mathematics, vol. 3, A.P., 1973, pp. 183-212.

[29] A. Georges Becus, Random generalized solutions to the heat equations, J. Math. Anal. Appl. 60 (1977) 93-102.

Appendice

Les Polynômes de Wiener-Hermite

La méthode de développement de Wiener Hermite WHE utilise Les Polynômes de Wiener-Hermite dont ils sont des éléments d'un ensemble complet des variables aléatoires statistiquement orthogonales. Chaque fonction aléatoire $G(t)$, peut être développée en terme des Polynômes de Wiener-Hermite $H^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ as :

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{(n)} G^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) H^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt^{(n)} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \xi^{(n)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \\ dt^{(n)} &= dt_1 dt_2 \dots dt_n \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où $G^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sont les noyaux en fonction de temps t .

Les Polynômes de Wiener-Hermite $H^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} H^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= H^{(n-1)}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) H^{(n)}(t_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} H^{(n-2)}(t_1, \dots, t_{n-2}) \cdot \delta(t_{n-i} - t_n), i \geq 2, n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

For example

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= 1 \\ H^{(1)}(t) &= n(t) \\ H^{(2)}(t_1, t_2) &= H^{(1)}(t_1) H^{(1)}(t_2) - \delta(t_1 - t_2) \\ H^{(3)}(t_1, t_2, t_3) &= H^{(2)}(t_1, t_2) H^{(1)}(t_3) - H^{(1)}(t_1) \delta(t_2 - t_3) - H^{(1)}(t_2) \delta(t_1 - t_3) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où $n(t)$ est processus de Bruit blanc, en particulier on a :

$$En(t) = 0, \quad En(t_1)n(t_2) = \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{B.5})$$

où $\delta(-)$ est la fonction de Dirac, tel que pour toutes fonction $f(x)$ on :,

$$\int f(x)\delta(y-x)dx = f(y) \quad (\text{B.6})$$

L'ensemble de Wiener-Hermite est statistiquement orthogonale, i.e.

$$EH^{(i)}.H^{(j)} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{B.7})$$

Propriétés des Polynômes de Wiener-Hermite

H^i and H^j sont orthogonales, i.e ;

$$EH^{(i)}(t_1, t_2, \dots, t_i)H^{(j)}(t_1, t_2, \dots, t_j) = 0, \forall i \neq j \quad (\text{B.8})$$

La moyenne pour tous les H s'annule, en particulier,

$$EH^{(i)}(t_1, t_2, \dots, t_i) = 0, i \geq 1 \quad (\text{B.9})$$

$$EH^{(2)}(t_1, t_2)H^{(2)}(t_3, t_4) = \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) + \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \quad (\text{B.10})$$

$$EH^{(1)}(t_1)H^2(t_2, t_3)H^{(1)}(t_4) = \delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) + \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) \quad (\text{B.11})$$

$$EH^{(2)}(t_1, t_2)H^1(t_3)H^{(1)}(t_4) = \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) + \delta(t_2 - t_4)\delta(t_1 - t_3) \quad (\text{B.12})$$

$$EH^{(1)}(t_1)H^1(t_2)H^2(t_3, t_4) = \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) + \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \quad (\text{B.13})$$

$$EH^{(1)}(t_1)H^{(1)}(t_2) \dots H^{(1)}(t_i) = 0, \text{ odd} \quad (\text{B.14})$$

$$EH^{(1)}(t_1)H^{(1)}(t_2)H^{(1)}(t_3) = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$EH^{(1)}(t_1)H^{(1)}(t_2)H^{(1)}(t_3)H^{(1)}(t_4) = \delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) + \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) \\ + \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \quad (\text{B.16})$$

$$EH^{(l)}H^{(m)} = 0, l + m = \text{odd} \quad (\text{B.17})$$

$$E\left(\int_0^t \sigma(\tau)n(\tau)d\tau\right) = \int_0^t \sigma(\tau)En(\tau)d\tau = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$E\left(\int_0^t \sigma(\tau)n(\tau)d\tau\right)^2 = E\left(\int_0^t \sigma(\tau_1)n(\tau_1)d\tau_1\right)\left(\int_0^t \sigma(\tau_2)n(\tau_2)d\tau_2\right) \\ = \int_0^t \int_0^t \sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)En(\tau_1)n(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ = \int_0^t \int_0^t \sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)\delta(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ = \int_0^t (\sigma(\tau_1))^2d\tau_1, \text{ when } \tau_2 \rightarrow \tau_1 \quad (\text{B.19})$$

Les Polynômes de Wiener-Hermite sont symétriques ;

$$H^{(i)}(t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_m, \dots, t_i) = H^{(i)}(t_1, t_2, \dots, t_m, \dots, t_l, \dots, t_i) \quad (\text{B.20})$$

Solution Process of a Class of Differential Equation Using Homotopy Analysis Wiener Hermite Expansion and Perturbation Technique

A. Boukehila

Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
Badji Mokhtar University. PO Box 12, 23000 Annaba, Algeria

F. Z. Benmostefa

Numerical Analysis, Optimization and Statistical Laboratory
Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Badji Mokhtar
University. PO Box 12, 23000 Annaba, Algeria

Copyright © 2014 A. Boukehila and F. Z. Benmostefa. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

In this paper, we construct a new method based on the Homotopy analysis method (HAM) linked to Wiener Hermite expansion perturbation (WHEP) technique and it is called HAM WHEP and then apply it to solve the generalized stochastic nonlinear diffusion equation with square or cubic nonlinear losses by obtaining the average and variance of the solution process. The aim of applying this new technique is to overcome the difficulties arising from the Homotopy perturbation method (HPM). Accordingly, applying HPM linked to WHEP in [6] may lead to divergence. This disadvantage is overcome by using the HAM which guarantees the convergence of the series solution. In this direction, this paper revisits and solves the sto-

chastic nonlinear diffusion equation in [6] by applying the HAM WHEP technique. All test problems reveal the accuracy and the convergence of the suggested method.

Mathematics Subject Classification: 65L05; 34A25; 34B15

Keywords: Stochastic nonlinear diffusion equation; Homotopy analysis method; Wiener hermite expansion; Homotopy analysis wiener hermite expansion and perturbation technique

1 Introduction

The mathematical modeling of many real-life phenomena by reason of random perturbation are not possible by ordinary differential equations, and hence are often modeled by using stochastic differential equations in order for the model to become more realistic [16, 22]. Because such differential equations cannot usually be solved analytically, the study of numerical methods is required and these must be designed to perform with a certain order of accuracy. Many authors investigated the stochastic diffusion equation under different views [5, 21].

Recently, M.A. El-Tawil used the Wiener Hermite expansion together with Perturbation theory (WHEP) technique to solve a perturbed nonlinear stochastic diffusion equation [4]. The technique has been then developed to be applied on non-perturbed differential equations using the Homotopy perturbation Method linked to Wiener Hermite expansion perturbation technique and it is called Homotopy WHEP [3]. However, as mentioned S.J. Liao [19], Homotopy perturbation method (HPM) is only a special case of the Homotopy analysis method (HAM). The difference is that, the HPM had to use a good enough initial guess, but this is not absolutely necessary for the HAM. This is mainly because the HAM uses a so-called convergence control parameter \hbar to guarantee the convergence of approximation series over a given interval of physical parameters. So, the Homotopy analysis method (HAM) is more general.

In 2010, M.A. El-Tawil and N.A. Al-Mulla [6] used the HPM linked to WHEP technique to solve the stochastic nonlinear diffusion equation with square or cubic nonlinear losses, as follows,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \varepsilon u^n(t, x; \omega) + \sigma.n(t; \omega); (t; x) \in (0, \infty) \times (0, L), \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, u(0, x) = \phi(x), \end{aligned} \quad (1)$$

where the viscosity ε is a deterministic scale for the nonlinear term. The non homogeneity term $\sigma.n(t)$ is a time white noise process scaled by σ .

However, solving the stochastic nonlinear diffusion equation (1) mentioned

above did not consider the influence of using the HPM on the convergence of the series solution. In fact, there is absolutely no guarantee that perturbation methods result in a convergent solution. Accordingly, using the HPM linked to WHEP in [6] may lead to divergence. This disadvantage is overcome by using the Homotopy analysis method (HAM) linked to WHEP (HAM WHEP) technique.

In this direction, this paper revisits and solves the stochastic nonlinear diffusion equation in [6] by applying the HAM WHEP technique. All test problems reveal the accuracy and convergence of the suggested new method.

The main aim of this paper is to construct and develop a new approach based on the Homotopy analysis method introduced in WHEP (HAM WHEP) technique and then apply it for solving the diffusion equation under square and cubic nonlinearities and stochastic non-homogenous on a class of differential equations. Some statistical moments are obtained, mainly the ensemble average and variance of the solution process with corresponding figures.

In this study, for our aim we consider the generalized stochastic nonlinear diffusion equation with square or cubic losses ϵu^2 or ϵu^3 of interest is of the following form,

$$\frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \epsilon u^n(t, x; \omega) + \sigma(t)n(t; \omega); \quad (t; x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, u(0, x) = \phi(x),$$

where ϵ is a deterministic scale for the nonlinear term and $n = 2, 3$. $\omega \in (\Omega, \sigma, P)$ is a triple probability space with Ω as the sample space, σ is a σ -algebra on events in Ω and P is a probability measure. The physical meaning of the nonlinear term is that there exists a loss proportional to u^2 or to u^3 . The non homogeneity term $\sigma(t)n(t, \omega)$ is a time white noise process scaled by $\sigma(t)$: $\sigma(t; \omega)$ is a continuous time part of the random forcing.

2 The Wiener Hermite Expansion and Perturbation Technique

The application of the Wiener Hermite expansion and perturbation (WHEP) technique [7, 8, 9, 10, 11, 14, 23] aims at finding a truncated series solution to the stochastic solution process of stochastic differential equations. The truncated series is composed of two major parts; the first is the Gaussian part which consists of the first two terms, while the rest of the series constitute the non-Gaussian part. In nonlinear cases, there exist always difficulties of solving the resultant set of deterministic integro-differential equations got from the applications of a set of comprehensive averages on the stochastic integro-differential equation obtained after the direct application of WHE.

Due to the completeness of the wiener Hermite set, any random function $G(t; \omega)$

can be expanded as follows,

$$G(t) = G^{(0)}(t) + \int_{\mathfrak{R}} G^{(1)}(t; t_1) H^{(1)}(t_1) dt_1 + \iint_{\mathfrak{R} \mathfrak{R}} G^{(2)}(t; t_1, t_2) H^{(2)}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \dots \quad (3)$$

Where the first two terms are the Gaussian part of $G(t; \omega)$. The rest of the terms in the expansion represent the non-Gaussian part of $G(t; \omega)$.

The average of $G(t; \omega)$ is

$$\mu_G = EG(t; \omega) = G^{(0)}(t) \quad \text{with} \quad EH^{(1)}(t_1) = 0, EH^{(1)}(t_1).H^{(1)}(t_2) = \delta(t_1 - t_2), \quad (4)$$

where the time white noise process is $n(t_1) = H^{(1)}(t_1)$.

The covariance of $G(t; \omega)$ is

$$\begin{aligned} Cov(G(t; \omega), G(\tau; \omega)) &= E(G(t; \omega) - \mu_G(t))(G(\tau; \omega) - \mu_G(\tau)) \\ &= \int_{\mathfrak{R}} G^{(1)}(t; t_1) G^{(1)}(\tau; t_1) dt_1 + 2 \iint_{\mathfrak{R} \mathfrak{R}} G^{(2)}(t; t_1, t_2) G^{(2)}(\tau; t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

The variance of $G(t; \omega)$ is

$$\begin{aligned} \sigma_G^2 &= E(G(t; \omega) - \mu_G(t))^2 \\ &= \int_{\mathfrak{R}} [G^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1 + 2 \iint_{\mathfrak{R} \mathfrak{R}} [G^{(2)}(t; t_1, t_2)]^2 dt_1 dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

The WHEP technique can be applied on linear or nonlinear perturbed systems described by ordinary or partial differential equations. The solution can be modified in the sense that additional parts of the Wiener Hermite expansion can be taken into considerations and the required order of approximations can always be made depending on the computing tool.

The first order solution can be obtained when considering only the Gaussian part of the solution process $u(t; \omega)$ can be expanded as,

$$u(t; \omega) = u^{(0)}(t) + \int_{\mathfrak{R}} u^{(1)}(t; t_1) H^{(1)}(t_1) dt_1. \quad (7)$$

The WHEP technique uses the following expansion for its deterministic kernels,

$$u^{(i)}(t) = u_0^{(i)} + \varepsilon u_1^{(i)} + \varepsilon^2 u_2^{(i)} + \dots, i = 0, 1, \dots \quad (8)$$

3 Basic idea of Homotopy Analysis Method

The Homotopy analysis method (HAM) initially proposed by S.J. Liao in his

Ph.D. thesis [17]. A systematic and clear exposition on the HAM is given in [18]. In recent years, this method has been successfully employed to solve many types of nonlinear problems in science and engineering [1, 2, 13, 15, 20]. HAM contains a certain auxiliary parameter \hbar , which provides with a simple way to adjust and control the convergence region and rate of convergence of the series solution. Moreover, by means of the so-called \hbar -curve, a valid region of \hbar can be studied to gain a convergent series solution. It is important to note that, one has great freedom to choose auxiliary objects such as \hbar and L in HAM. Thus, through HAM, explicit analytic solutions of nonlinear problems are possible. To describe the basic idea of the HAM, we consider the following differential equation,

$$N[u(x,t)] = 0, \tag{9}$$

where N is a nonlinear operator, x and t denotes the independent variables, $u(x,t)$ is an unknown function, respectively. By means of generalizing the traditional Homotopy method, S.J. Liao [17] construct the so-called zero order deformation equation,

$$(1-q)\mathcal{L}[\psi(x,t;q) - u_0(x,t)] = q\hbar H(x,t)N[\psi(x,t;q)], \tag{10}$$

where $q \in [0,1]$ is an embedding parameter, \hbar is the nonzero auxiliary parameter and $H(x,t)$ is the nonzero auxiliary function, \mathcal{L} is an auxiliary linear operator, $u_0(x,t)$ is an initial guess of $u(x,t)$ and $\psi(x,t;q)$ is an unknown function. Obviously, when $q = 0$ and $q = 1$ both,

$$\psi(x,t;0) = u_0(x,t) \text{ and } \psi(x,t;1) = u(x,t), \tag{11}$$

respectively hold. Thus as q increases from 0 to 1, the solution $\psi(x,t;q)$ varies from the initial guess $u_0(x,t)$ to the solution $u(x,t)$.

Expanding $\psi(x,t;q)$ in Taylor series with respect to q , one has,

$$\psi(x,t;q) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t)q^m, \tag{12}$$

where,

$$u_m(x,t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \psi(x,t;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}. \tag{13}$$

If the auxiliary linear operator, the initial guess, the auxiliary parameter \hbar and the auxiliary function are so properly chosen, then the series (12) converges at $q = 1$ and,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t), \quad (14)$$

which is the solution of the original equation, as proved by S.J. Liao [30]. As $H(x, t) = 1$ and $\hbar = -1$, Equation (10) becomes,

$$(1 - q)\mathfrak{L}[\psi(x, t; q) - u_0(x, t)] + qN[\psi(x, t; q)] = 0, \quad (15)$$

which is used mostly in the Homotopy perturbation method (HPM) proving that the HPM is a special case of the Homotopy analysis method (HAM). Comparison between the HAM and HPM can be found in [12, 19].

According to equation (13), the governing equation can be deduced from the zero order deformation equation (10). Define the vector,

$$\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}. \quad (16)$$

Differentiating (10) m times with respect to the embedding parameter q and then setting $q = 0$ and finally dividing them by $m!$, we have the so-called m th order deformation equations,

$$\mathfrak{L}[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}), \quad (17)$$

where

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (18)$$

and

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\psi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0}. \quad (19)$$

For any given nonlinear operator N and the term $R_m(\vec{u}_{m-1})$ can be easily expressed by equation (19). So we can obtain $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots$ by means of solving the linear high order deformation equation (17). The m th order approximation of $u(x, t)$ is given by,

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t), \quad (20)$$

The foregoing approximate solution consist of \vec{u}_n , which is a cornerstone of the HAM in determining convergence of series solution rapidly. We may adjust

and control the convergence region and rate of the solution series (20) by means of the auxiliary parameter \hbar . To obtain valid region of \hbar , we first plot the so called \hbar -curves of $u(x, t)$, $u_t(x, t)|_{x=\alpha}$ where $\alpha \in [a, b]$ and so on. According to these \hbar -curves, it is easy to discover the valid region of \hbar , which corresponds to the line segments nearly parallel to the horizontal axis.

Theorem 3.1 According to S.J. Liao [18], as long as the series (20) converges to $u(x, t)$, where $u_m(x, t)$ is governed by the high-order deformation equation (17) under the definitions (18) and (19), it is must be the exact solution of equation (9).

4 Solving the Langevin equation using some techniques: HAM, WHEP and HAM WHEP technique

This section deals with the Langevin equation by using three techniques, in particular: WHEP, HAM and HAM WHEP technique.

We consider the Langevin equation for $n = 2, 3$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t; \omega)}{\partial t} &= -\varepsilon u^n(t; \omega) + \sigma(t)n(t; \omega), t \in (0, \infty), \\ u(0) &= 1, \end{aligned} \tag{21}$$

where $n(t; \omega)$ is the time white noise process, $\sigma(t)$ is a continuous function and ε is a constant.

4.1 Using WHEP technique for solving the Langevin equation

At $n = 2$, Eq.(21) recasts as,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t; \omega)}{\partial t} &= -\varepsilon u^2(t; \omega) + \sigma(t)n(t; \omega), t \in (0, \infty), \\ u(0) &= 1, \end{aligned} \tag{22}$$

where $\sigma(t).n(t; \omega)$ is the time white noise process scled by $\sigma(t)$: $\sigma(t)$ is a continuous function and ε is a constant.

Applying the WHEP technique on Eq. (22) and taking the necessary averages, we get the following equations,

$$\frac{\partial u^{(0)}(t)}{\partial t} = -\varepsilon [u^{(0)}(t)]^2 - \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1, \tag{23}$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t; t_1)}{\partial t} = -2\epsilon u^{(0)}(t)u^{(1)}(t; t_1) + \sigma(t)\delta(t - t_1). \quad (24)$$

Where,

$$u(t; \omega) = u^{(0)}(t) + \int_0^t u^{(1)}(t; t_1) H^{(1)}(t_1) dt_1. \quad (25)$$

Applying the perturbation technique, the deterministic kernels can be represented in first order approximation as,

$$u^{(0)}(t) = u_0^{(0)}(t) + \epsilon u_1^{(0)}(t), \quad (26)$$

$$u^{(1)}(t; t_1) = u_0^{(1)}(t; t_1) + \epsilon u_1^{(1)}(t; t_1). \quad (27)$$

The solution is to evaluate $u_0^{(0)}$ and $u_0^{(1)}$ and then computing the other two kernels independently. The final results of the first order first correction mean and variance respectively are,

$$\mu_u(t) = u^{(0)}(t), \quad (28)$$

$$\sigma_u^2(t) = \int_0^t [u^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1. \quad (29)$$

4.2 Using HAM for solving the Langevin equation

In order to solve Eq. (22) by the HAM, we choose the initial approximation,

$$u_0(t) = 1, \quad (30)$$

and the auxiliary linear operator,

$$\mathfrak{L}[\psi(t; q)] = \frac{\partial \psi(t; q)}{\partial t}, \quad (31)$$

with the property,

$$\mathfrak{L}[c_1] = 0, \quad (32)$$

where c_1 is an integral constant. Furthermore, Eq. (22) suggests that we define the nonlinear,

$$N[\psi(t; q)] = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varepsilon \psi^2 - \sigma(t)n(t). \quad (33)$$

Using the above definition, we construct the zero order deformation equation

$$(1 - q)\mathcal{L}[\psi(t; q) - u_0(t)] = q\hbar H(t)N[\psi(t; q)]. \quad (34)$$

As $H(t) = 1$, Eq. (34) becomes,

$$(1 - q)\mathcal{L}[\psi(t; q) - u_0(t)] = q\hbar N[\psi(t; q)], \quad (35)$$

and the so-called m th order deformation equation,

$$\mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}), \quad (36)$$

with the initial condition,

$$u_m(0) = 0, \quad (37)$$

where

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = (u_{m-1})_t + \varepsilon (u_{m-1})^2 - (1 - \chi_m)\sigma(t)n(t). \quad (38)$$

Now, the solution of the so-called m th order deformation equation Eq. (36) for $m \geq 1$ becomes,

$$u_m(t) = \chi_m u_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t R_m(\vec{u}_{m-1}) d\tau + c_1, \quad (39)$$

where the integration constant c_1 is determined by the initial condition (37).

Taking the necessary averages with $\sigma(t) = t$, we get the following results when getting both the fourth order approximation for the mean and the variance respectively,

$$\begin{aligned} \mu_u = & 1 + \hbar t + (2 + \hbar)(\hbar + \hbar^2)t + \frac{[3\hbar^4 + 3\hbar^3 + \hbar^2]}{3}t^3 + \frac{(\hbar + \hbar^2)^2}{12}t^4 + \frac{3\hbar^4(1 + \hbar)}{10}t^5 \\ & - \frac{\hbar^3(\hbar + \hbar^2)}{9}t^6 + \frac{\hbar^6}{14}t^7 + \frac{\hbar^6}{32}t^8 + \frac{\hbar^6}{81}t^9, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\sigma_u^2(t) = \frac{(\hbar + \hbar^2)^2}{3} t^3 + \frac{2\hbar^4(\hbar + 1)}{3} t^5 + \frac{\hbar^6}{3} t^7 + \frac{\hbar^6}{9} t^8. \quad (41)$$

The proper value of \hbar which ensures that the approximation solution is convergent is found from the \hbar -curves obtained both from the fourth order HAM approximation of the mean and the variance shown in Figures 1 and 2 respectively. The valid region of \hbar corresponds to the line segments nearly parallel to the horizontal axis.

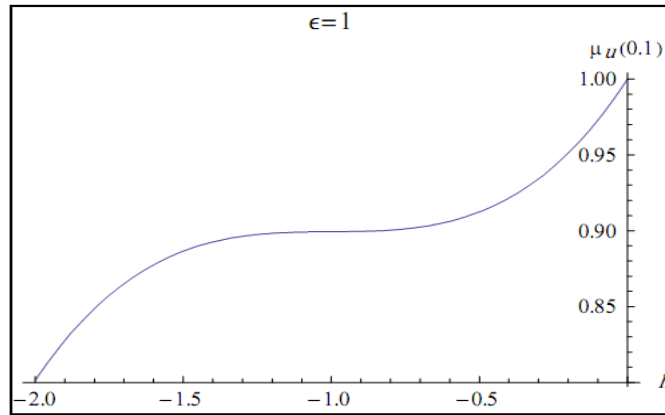


Figure 1: The \hbar -curve of the mean based on the fourth order HAM approximation

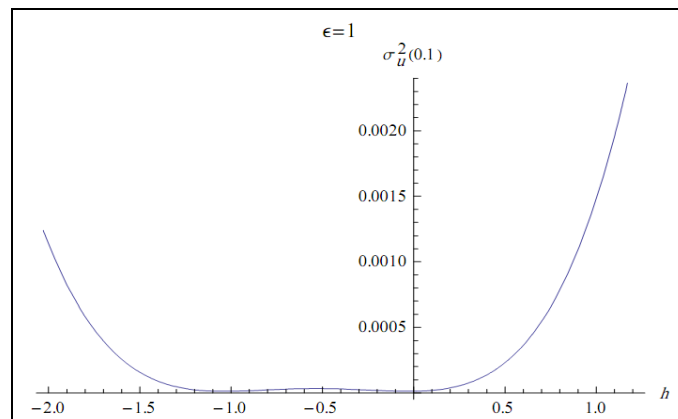


Figure 2: The \hbar -curve of the variance based on the fourth order HAM approximation

4.3 Using HAM WHEP technique for solving the Langevin equation

Applying the WHEP technique on the proposed example of the Eq. (22), and taking the necessary averages, we get the following equations,

$$\frac{\partial u^{(0)}(t)}{\partial t} = -\varepsilon [u^{(0)}(t)]^2 - \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t; t_1)]^2 dt_1 \tag{42}$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t; t_1)}{\partial t} = -2\varepsilon u^{(0)}(t)u^{(1)}(t; t_1) + \sigma(t)\delta(t - t_1). \tag{43}$$

In order to solve the Eqs. (42) and (43) by the HAM, we choose the initial approximations

$$u_0^{(0)}(t) = 1, u_0^{(1)}(t; t_1) = t. \tag{44}$$

Applying the same approach as in subsection (4.2) with $\sigma(t) = t$. The proper value of \hbar is found from the \hbar -curves obtained from the sixth order HAM WHEP approximation of the mean and the fifth order HAM WHEP approximation of the variance shown in Figures 3 and 4 respectively. The valid region of \hbar corresponds to the line segments nearly parallel to the horizontal axis.

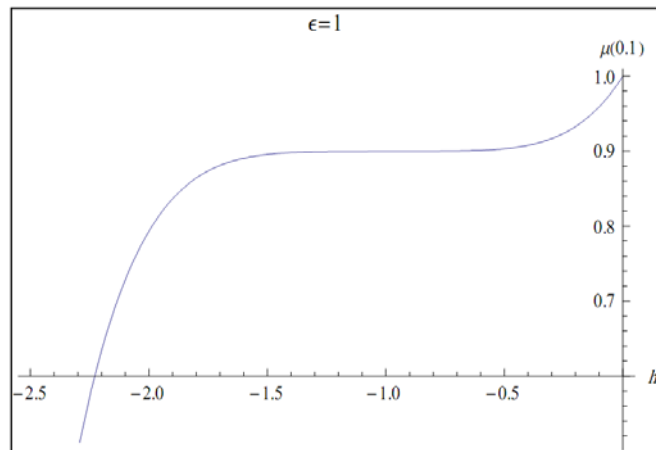


Figure 3: The \hbar -curve of the mean obtained from the sixth order HAM WHEP approximation

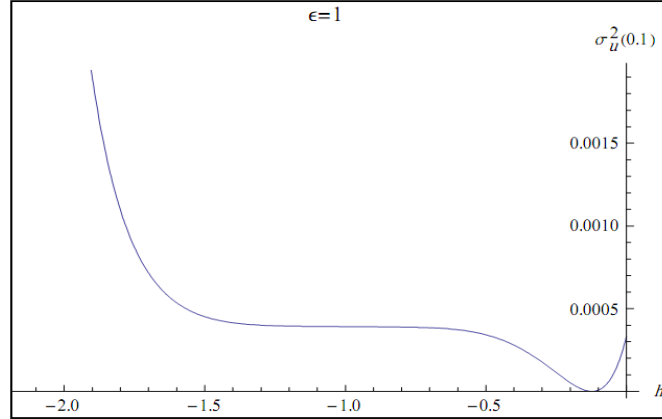


Figure 4: The \hbar -curve of the variance obtained from the fifth order HAM WHEP approximation

Now, considering the case $n=3$, and proceeding in a similar manner as in subsection 4.3, the results are obtained from the \hbar -curves both of the fourth order HAM WHEP approximation of the mean and the variance shown in Figures 5 and 6 respectively. The valid region of \hbar corresponds to the line segments nearly parallel to the horizontal axis.

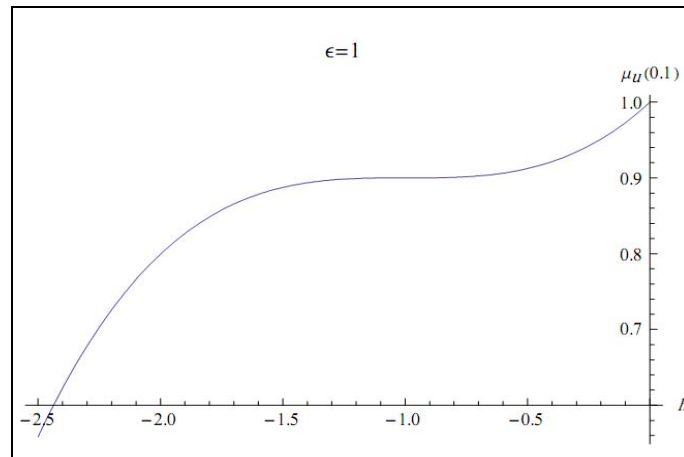


Figure 5: The \hbar -curve of the mean obtained from the fourth order HAM WHEP approximation

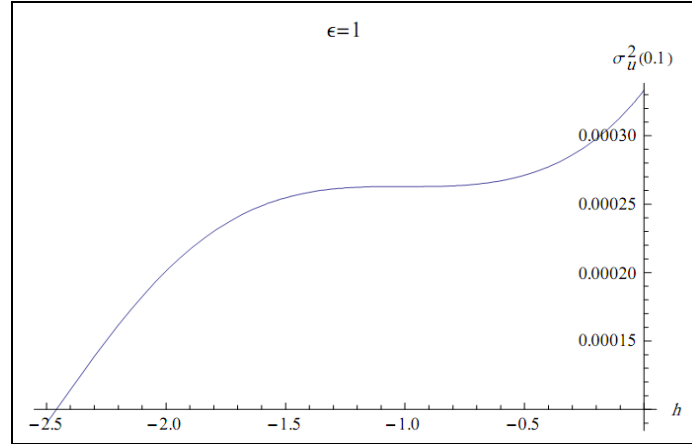


Figure 6: The h -curve of the variance obtained from the fourth order HAM WHEP approximation

Concerning only a first order approximation, it can be noticed both the HAM and HAM WHEP techniques give near results. The HAM WHEP technique seems an efficient one because of its correction possibilities.

5. Solving the Boundary value problem using Homotopy Analysis Wiener Hermite Expansion and Perturbation technique

In the present paper, for our aim, the HAM WHEP technique is applied to solve the generalized stochastic nonlinear diffusion equation with square or cubic losses, ϵu^2 or ϵu^3 and it is shown that how one can control the convergence of approximate solution and make the convergence fast.

At $n = 2$, the equation (2) of interest in this paper becomes,

$$\frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \epsilon u^2(t, x; \omega) + \sigma(t)n(t; \omega); \quad (t; x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (45)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, u(0, x) = \varphi(x),$$

where $\sigma(t). n(t; \omega)$ is the time white noise process scaled by $\sigma(t)$: $\sigma(t)$ is the continuous time part of the random forcing.

Applying the WHEP technique on the proposed equation in (45), and taking the necessary averages, we get the following equations,

$$\frac{\partial u^{(0)}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^{(0)}(t, x)}{\partial x^2} - \varepsilon [u^{(0)}(t, x)]^2 - \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t, x; t_1)]^2 dt_1, \quad (46)$$

$$u^{(0)}(t, 0) = u^{(0)}(t, L) = 0, u^{(0)}(0, x) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}(t, x; t_1)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^{(1)}(t, x; t_1)}{\partial x^2} - 2\varepsilon u^{(0)}(t, x)u^{(1)}(t, x; t_1) + \sigma(t)\delta(t - t_1), \quad (47)$$

$$u^{(1)}(t, 0, t_1) = u^{(1)}(t, L; t_1) = 0, u^{(1)}(0, x; t_1) = t.$$

In order to solve the Equations (46) and (47) by the HAM, we choose the initial approximations,

$$u^{(0),0}(t, x) = \varphi(x), u^{(1),0}(t, x; t_1) = t, \quad (48)$$

and the auxiliary linear operators,

$$\mathfrak{L}_1[u^{(0)}(t, x; q)] = \frac{\partial u^{(0)}(t, x; q)}{\partial t}, \mathfrak{L}_2[u^{(1)}(t, x; t_1; q)] = \frac{\partial u^{(1)}(t, x; t_1; q)}{\partial t}, \quad (49)$$

with the properties,

$$\mathfrak{L}_1[c_1] = \mathfrak{L}_2[c_2] = 0, \quad (50)$$

where c_1 and c_2 are the integral constants.

Equations (46) and (47) suggests that we define the nonlinear operators,

$$N[u^{(0)}(t, x; q)] = \frac{\partial u^{(0)}(t, x; q)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{(0)}(t, x)}{\partial x^2} + \varepsilon [u^{(0)}(t, x)]^2 + \varepsilon \int_0^t [u^{(1)}(t, x; t_1)]^2 dt_1, \quad (51)$$

$$M[u^{(1)}(t, x; t_1; q)] = \frac{\partial u^{(1)}(t, x; t_1; q)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{(1)}(t, x; t_1)}{\partial x^2} + 2\varepsilon u^{(0)}(t, x)u^{(1)}(t, x; t_1) - (1 - \chi_m)\sigma(t)\delta(t - t_1). \quad (52)$$

Using the above definition we construct the zero order deformation equation with $H(t, x) = 1$, we have,

$$(1 - q)\mathfrak{L}_1[u^{(0)}(t, x; q) - u^{(0),0}(t, x)] = q\hbar N[u^{(0)}(t, x; q)], \quad (53)$$

$$(1 - q)\mathfrak{L}_2[u^{(1)}(t, x; t_1; q) - u^{(1),0}(t, x; t_1)] = q\hbar M[u^{(1)}(t, x; t_1; q)], \quad (54)$$

and the so-called m th order deformation equations for $m \geq 1$ are,

$$\mathfrak{L}_1 \left[u^{(0),m} - \chi_m u^{(0),m-1} \right] = \hbar R^{(0),m} \left(\vec{u}^{(0),m-1} \right), \quad (55)$$

$$\mathfrak{L}_2 \left[u^{(1),m} - \chi_m u^{(1),m-1} \right] = \hbar R^{(1),m} \left(\vec{u}^{(1),m-1} \right), \quad (56)$$

with the initial conditions,

$$u^{(0),m}(0, x) = 1, u^{(1),m}(0, x; t_1) = 0, \quad (57)$$

where,

$$R^{(0),m} \left(\vec{u}^{(0),m-1} \right) = \left(u^{(0),m-1} \right)_t - \left(u^{(0),m-1} \right)_{xx} + \varepsilon \left(u^{(0),m-1} \right)^2 + \varepsilon \int_0^t \left[u^{(1),m-1} \right]^2 dt_1, \quad (58)$$

$$R^{(1),m} \left(\vec{u}^{(1),m-1} \right) = \left(u^{(1),m-1} \right)_t - \left(u^{(1),m-1} \right)_{xx} + 2\varepsilon u^{(0),m-1} u^{(1),m-1} - (1 - \chi_m) \sigma(t) \delta(t - t_1). \quad (59)$$

The solutions of the so-called m th order deformation equation (55) and (56) are,

$$u^{(0),m}(t, x) = \chi_m u^{(0),m-1} + \hbar \int_0^t R^{(0),m} \left(\vec{u}^{(0),m-1} \right) d\tau + c_1, \quad (60)$$

$$u^{(1),m}(t, x) = \chi_m u^{(1),m-1} + \hbar \int_0^t R^{(1),m} \left(\vec{u}^{(1),m-1} \right) d\tau + c_2. \quad (61)$$

We obtain the results for $\sigma(t) = t$ and $\varphi(x) = x$,

$$u^{(0),1}(t, x) = \hbar \left(\frac{t^4}{4} + tx^2 \right), \quad u^{(1),1}(t, x) = \hbar tx^2, \quad (62)$$

and so on.

The proper value of \hbar which ensures that the approximation solution is converge is found from the \hbar -curves obtained both from the fifth order HAM WHEP technique approximation of the mean and the variance shown in Figures 7 and 8 respectively. As mentioned S.J. Liao [18], the valid region of \hbar corresponds to the line segments nearly parallel to the horizontal axis.

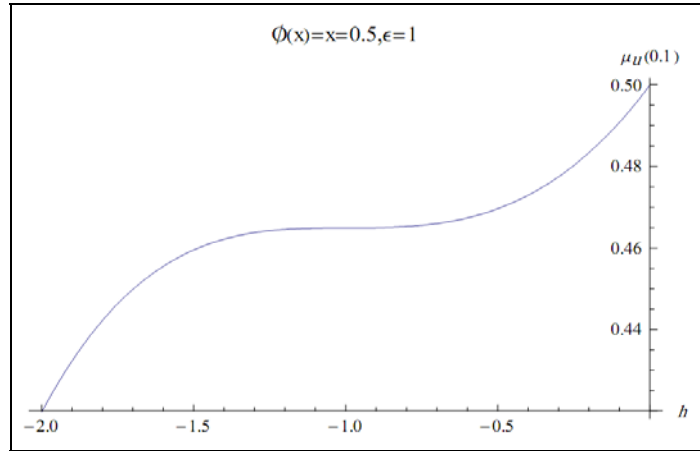


Figure 7: The \hbar -curve of the mean obtained from the fifth order HAM WHEP approximation.

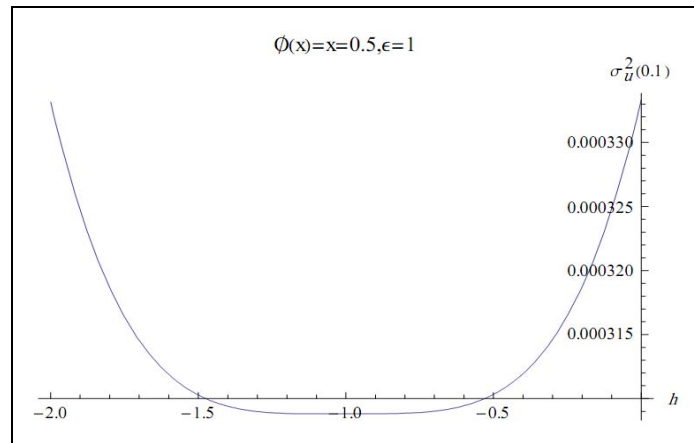


Figure 8: The \hbar -curve of the variance obtained from the fifth order HAM WHEP approximation.

Now, considering the case $n = 3$, the equation (2) of interest in this paper becomes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x; \omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x; \omega)}{\partial x^2} - \varepsilon u^3(t, x; \omega) + \sigma(t)n(t; \omega); \quad (t; x) \in (0, \infty) \times (0, L), \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, u(0, x) = \varphi(x), \end{aligned} \quad (63)$$

where $\sigma(t)n(t; \omega)$ is the time white noise process scaled by $\sigma(t)$: $\sigma(t)$ is the continuous time part of the random forcing.

Proceeding in the same manner as previously. The proper value of \hbar which ensures that the approximation solution is convergent is found from the \hbar -curves obtained both from the fourth order HAM WHEP approximation of the mean and the variance shown in Figures 9 and 10 respectively. The valid region of \hbar corresponds to the line segments nearly parallel to the horizontal axis.

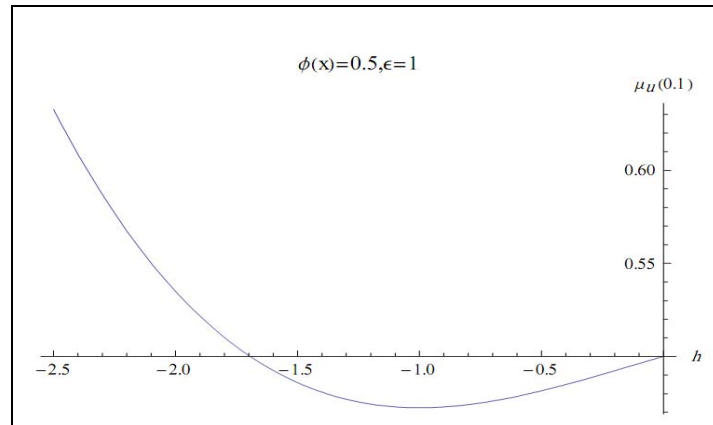


Figure 9: The \hbar -curve of the mean obtained from the fourth order HAM WHEP approximation

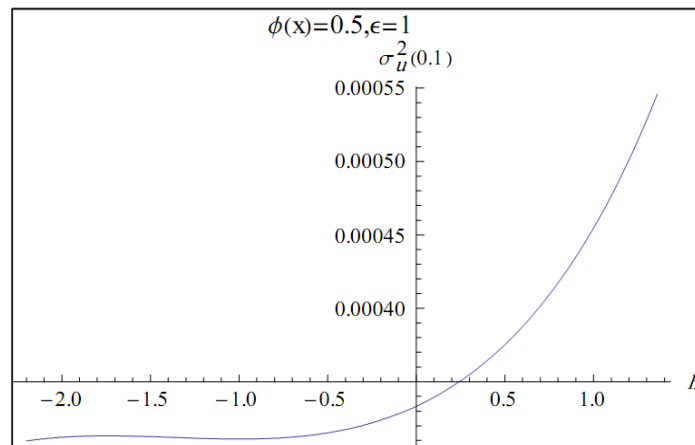


Figure 10: The \hbar -curve of the variance obtained from the fourth order HAM WHEP approximation.

6 Conclusion

In this paper, the HAM linked to WHEP (HAM WHEP) technique has been applied to solve the generalized stochastic nonlinear diffusion equation with

square or cubic nonlinear losses by obtaining the average and variance of the solution process. It has the advantage to overcome the difficulties arising from the Homotopy perturbation method (HPM). In fact, The HPM may lead to divergence because the rate of convergence of the HPM method depends greatly on the initial approximation which is considered as the main disadvantage of the HPM. The HAM WHEP contains the auxiliary parameter \hbar , which provides us with a convenient way to adjust and control the convergence region of the series solution. All test problems reveal the accuracy and convergence of the suggested method.

Acknowledgements. We dedicate this work to Professor Magdy El-Tawil, who passed away this year.

References

- [1] S. Abbasbandy, E. Magyari, E. Shivanian, The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14** (9-10) (2009), 3530-3536.
- [2] S. Abbasbandy, Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method, *Chemical Engineering Journal*, **136** (2-3) (2008), 144-150.
- [3] M.A. El-Tawil, The Homotopy Wiener Hermite Expansion and Perturbation technique (WHEP), *Transactions on Computational Science I*, **4750** (2008), 159-180.
- [4] M.A. El-Tawil, The application of WHEP technique on partial differential equations, *International Journal of Differential Equations and Applications*, **7** (3) (2003), 325-337.
- [5] M.A. El-Tawil, Nonhomogeneous boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **200** (1996), 53-65.
- [6] M.A. El-Tawil, N. A. Al-Mulla, Using Homotopy WHEP technique for solving a stochastic nonlinear diffusion equation, *Mathematical and Computer Modelling*, **51** (2010), 1277-1284.
- [7] M.A. El-Tawil, N.A. El-Molla, The approximate solution of a nonlinear diffusion equation using some techniques, a comparison study, *International*

- Journal of Nonlinear Sciences and numerical Simulation*, **10 (3)** (2009), 687-698.
- [8] M.A. El-Tawil, A. Fareed, Solution of Stochastic Cubic and Quintic Nonlinear Diffusion Equation Using WHEP, Pickard and HPM Methods, *Open Journal of Discrete Mathematics*, **1 (1)** (2011), 6-21.
- [9] M.A. El-Tawil, G. Mahmoud, The solvability of parametrically forced oscillators using WHEP technique, *Mechanics and Mechanical Engineering*, **3 (2)** (1999), 181-188.
- [10] M.A. El-Tawil, The average solution of a stochastic nonlinear Schrodinger equation under stochastic complex non-homogeneity and complex initial conditions, *Transactions on Computational Science III*, **5300** (2009), 143-170.
- [11] C. Eftimiu, First-order Wiener Hermite Expansion in the electromagnetic scattering by conducting rough surfaces, *Radio Science*, **23 (5)** (1980), 769-779.
- [12] J.H. He, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **156 (2)** (2004), 527-539.
- [13] I. Hashim, O. Abdulaziz, S. Momani, Homotopy analysis method for fractional IVPs, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14 (3)** (2009), 674-684.
- [14] T. Imamura, W. Meecham, A. Siegel, Symbolic calculus of the Wiener process and Wiener Hermite Functionals, *Journal of Mathematical Physics*, **6 (5)** (1983), 695-706.
- [15] H. Jafari, S. Seifi, Homotopy analysis method for solving linear and nonlinear fractional diffusion wave equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14** (2009), 2006-2012.
- [16] P. E. Kloeden, and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, 1995.
- [17] S.J. Liao, *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*, PhD, Dissertation, Shanghai, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [18] S.J. Liao, *Beyond Perturbation Introduction to the Homotopy Analysis Method*, CRC Press, Boca Raton, Chapman & Hall, Boca Raton, 2003.

- [19] S.J. Liao, Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, **169** (2005), 1186-1194.
- [20] S.J. Liao, A new branch of solutions of boundary layer flows over an impermeable stretched plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **48** (2005), 2529-39.
- [21] I. Orabi, I. Ahmadi, A. Goodarz, A Functional Series Expansion Method for Response Analysis of Nonlinear Systems Subjected to Random Excitations, *International Journal of NonLinear Mechanics*, **22 (6)** (1987), 451-465.
- [22] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application*, Springer, Berlin, 1998.
- [23] P. Saffman, Application of Wiener Hermite Expansion to the diffusion of a passive scalar in a homogeneous turbulent flow, *Physics of Fluids*, **12 (9)** (1969), 1786-1798.

Received: December 26, 2013