

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University -
Annaba



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Probabilités et Statistiques

INFERENCE STATISTIQUE POUR LES MODELES AUTOREGRESSIFS A COEFFICIENTS ALEATOIRES

Par

Abdelhalim Bouchemella

Devant le jury

PRESIDENT :	Zeghdoudi Halim	M.C.A	U. ANNABA
ENCADREUR :	Benmostefa Fatima Zahra	M.C.A	U. ANNABA
EXAMINATEUR :	Aissaoui Mohamed Zine	Prof	U. GUELMA
EXAMINATEUR :	Sakrani Samia	M.C.A	U. GUELMA
EXAMINATEUR :	Lemnaouar Zedam	Prof	U. M'SILA

Année : 2015

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	vi
Introduction générale	vii
0.1 L'objectif de cette thèse	ix
0.2 Organisation du mémoire	x
1 Généralités	1
1.1 Généralités sur les variables aléatoires	1
1.1.1 Convergence de suite de variables aléatoires	1
1.1.2 Théorèmes limites	3
1.1.3 Qualités d'un estimateur	3
1.2 Processus stochastiques	4
1.2.1 Fonction d'autocovariance et d'autocorrélation	5
1.2.2 Autocorrélations partielles	6
1.3 Stationnarité	7
1.4 Ergodicité	9
1.5 Processus linéaires	10
1.5.1 Processus MA	11
1.5.2 Processus AR	12
1.5.3 Processus ARMA	13
1.6 Processus non linéaires	14
1.6.1 Processus autorégressifs à coefficients aléatoires	15
1.6.2 Modèle GARCH	15
1.7 Produit de Kronecker	17

2	Etude probabiliste	19
2.1	Propriétés du modèle RCA(1)	19
2.2	Propriétés du modèle RCA(p)	25
2.2.1	Conditions de stationnarité	26
2.2.2	Exemple	31
2.2.3	Solutions stationnaires	32
2.2.4	Stationnarité stricte	35
2.2.5	Exemple	36
3	Inférence statistique	38
3.1	La méthode des moindres carrés ordinaire	38
3.1.1	Procédure d'estimation	39
3.1.2	Comportement asymptotique	40
3.2	La méthode du maximum de vraisemblance	44
3.2.1	Procédure de l'estimation	44
3.2.2	Comportement asymptotique	46
3.3	Modèle RCA en données croisées	54
3.3.1	Identification des moments	55
3.3.2	Comportement asymptotique	58
3.4	Conclusion	61
4	Les Modèles BL-GARCH	62
4.1	Introduction	62
4.2	Propriétés de modèle BL-GARCH(1,2)	63
4.2.1	Positivité de la variance conditionnelle	63
4.2.2	Distribution marginale	65
4.3	Modèle BL-GARCH en données de panel	66
4.3.1	Maximum du vraisemblance composite	66
4.3.2	Comportement asymptotique	69
4.4	Conclusion	70
	Conclusion générale	72
	Bibliographie	74

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude d'une classe de modèles auto-régressifs à coefficients aléatoires, sous différentes hypothèses. Dans la première partie, on commence par l'étude des propriétés probabilistes telles que la stationnarité et l'existence des solutions stationnaires. Ensuite on fait l'inférence statistique dans cette classe de modèles. Dans la deuxième partie, on se concentre sur la classe de modèles *BL-GARCH*, qui a été initialement introduite par Storti & Vitale [46] afin de traiter les effets de levier et le regroupement des extrêmes (volatility clustering). D'abord, on illustre certaines propriétés de modèle *BL-GARCH* (1, 2), comme la positivité de la variance conditionnelle, la stationnarité et la distribution marginale, ensuite on fait l'inférence statistique dans cette classe, en appliquant la méthode du maximum de vraisemblance composite pour le modèle *BL-GARCH*(1, 2) en données de panel, et en étudiant le comportement asymptotique d'estimateurs, obtenus pour établir la consistance et la normalité asymptotique.

Mots clés : Modèles *RCA*, séries temporelles non linéaires, modèles *BL-GARCH*, stationnarité, maximum de vraisemblance composite, consistance forte, normalité asymptotique, données de panel, paramètres de nuisance et d'intérêt.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of a class of random coefficient autoregressive models under different assumptions. In the first part, we begin by studying the probabilistic properties such as stationary and the existence of stationary solutions. Then we make statistical inference in this class of models. In second part we focus on the class of *BL-GARCH* models, which is initially introduced by Storti & Vitale [46] in order to handle leverage effects and volatility clustering. First we illustrate some properties of *BL-GARCH*(1, 2) model, like the positivity, stationarity and marginal distribution, then we study the statistical inference, applying the composite likelihood on panel of *BL-GARCH*(1, 2) model, and studying the asymptotic behavior of the estimators, like the consistency property and the asymptotic normality.

Keywords : *RCA* Models, nonlinear time series, *BL-GARCH* models, stationarity, maximum composite likelihood, strong consistency, asymptotic normality, panel data, nuisance and interest parameters.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus vifs remerciements envers ma directrice de thèse Mme Benmostefa Fatima Zohra qui par ses encouragements, ses soutiens et surtout son aide constante m'ont permis de mener à bonne fin cette thèse. Elle a endirigé et accompagné me laissant une certaine liberté d'action. J'ai beaucoup apprécié la confiance qu'elle m'a faite.

Un merci particulier à Monsieur Zeghdoudi Halim M.C.A à l'U.B.M Annaba, pour m'avoir honoré par sa présidence du jury et pour ses remarques pertinentes concernant les chapitres 1 et 2.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait, Monsieur Aissaoui Mohamed Zine Professeur à l'université de Guelma, Madame Sakrani Samia M.C.A à l'université de Guelma, Monsieur Lemnaouar Zedam Professeur à l'université de M'sila, et Monsieur Storti Giuseppe Professeur à l'université de Salerne - Italie, en s'intéressant à mon travail et en acceptant de faire partie de mon jury de thèse.

Mes derniers remerciements s'adressent à ma mère **Fatima**, ma femme **Haddad Nardjes**, mes sœurs **Zahia**, **Soria**, **Hanane** et à mon frère **Sebti Bouchemella** et tous mes neveux et nièces surtout Amin, Islam, Mahacene, Ibtissem et Amel par leur soutien moral qui a favorisé l'aboutissement de ce travail. Je n'oublierais toutefois pas mes filles **Bouchemella Alia** et **Bouchemella Meriem** avec qui j'ai partagé de très bons moments et par fois trop difficile, à elles je dédie ce travail.

Je passe également une dédicace spéciale à tous mes amis que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces années , à savoir Kheniche Azzedine, Boukhalfa Elhafsi, Tabaza Chaouki...

Introduction générale

L'étude de l'analyse des séries chronologiques est fondamentale quant à leurs utilisations dans de nombreux domaines tels que l'économie, la finance, l'économétrie, la biologie, etc.

Les formulations classiques ne sont pas toujours appropriées pour modéliser toutes les données des séries chronologiques car les modèles considérés sont généralement linéaires à coefficients constants. Dans la plupart des situations, on ne s'attend pas à ces modèles soient la meilleure classe pour s'adapter à un ensemble de données réelles, même si on fait tacitement l'hypothèse que le modèle linéaire à l'étude est une bonne approximation de la réalité physique. Un certain nombre de facteurs ont conduit à une prise en compte des différentes catégories de modèles non linéaires. Récemment, plusieurs travaux qui traitent les modèles non linéaires des séries chronologiques ont vu le jour, démontrant ainsi la limitation du champ d'application des modèles linéaires, en s'intéressant aux modèles non linéaires.

La modélisation des données des séries chronologiques dans certains domaines tels que l'hydrologie, la météorologie et la biologie, les coefficients du modèle à l'étude se posent à la suite d'un processus complexes et des actions qui ont généralement de nombreuses perturbations aléatoires. Ainsi la modélisation des séries financières est un problème complexe. Cette complexité n'est pas seulement due à la grande variété des séries utilisées, à l'importance de la fréquence d'observation, ou à la disponibilité d'échantillons de très grande taille. Elle tient surtout à l'existence de régularités statistiques communes (ou faits stylisés) à un très grand nombre de séries financières et difficiles à reproduire artificiellement à partir de modèles stochastiques. Dans un article paru en Mandelbrot (1963) mettait en évidence un ensemble de telles propriétés. Ces régularités empiriques, vérifiées et complétées depuis par de nombreux auteurs, apparaissent plus ou moins nettement en fonc-

tion de la fréquence d'observation de la série et de sa nature. Alors pour ce type de séries, les modèles linéaires utilisés auparavant, tels que le processus *ARMA*, sont limités car ils ne permettent pas la prise en compte des phénomènes de variabilité de la volatilité en fonction du temps et des mécanismes d'asymétrie. Les modèles *ARMA* n'arrivent pas à générer des autocorrélations au carré Francq, C., and Zakoian, J. M. (2010). Ces caractéristiques sensibles de ces séries favorisent l'émergence de nouvelles formes d'extension des modèles autorégressifs standards aux modèles autorégressifs à coefficients aléatoires noté *RCA*.

L'intérêt croissant dans différentes classes de modèles des séries chronologiques non linéaires est clairement démontré par la littérature des séries chronologiques au cours de la dernière décennie. Granger et Andersen (1978) ont introduit la classe désormais familière de modèles bilinéaires. Subba Rao (1970) a traité les modèles autorégressifs à coefficients dépendant du temps en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés pour l'estimation. Tong (1978) , Tong et Lim (1980) ont examiné les modèles autorégressifs à seuil, qui rapprochent les séries chronologiques non linéaire au moyen de différents modèles autorégressifs linéaires équipés de sous ensembles des données, et ont discuté de l'estimation et de l'application de ces modèles à différents ensembles de données. Ozaki (1980) a étudié le cas d'une autorégression dont les coefficients sont des fonctions du temps qui se désintègrent de façon exponentielle. Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*ARCH*) ont été introduits par Engle (1982) et leur extension *GARCH* (*ARCH* généralisés) est due à Bollerslev (1986). Leur caractérisation repose essentiellement sur le concept de variance conditionnelle.

Cette thèse est consacrée aux modèles autorégressifs à coefficients aléatoires qui ont été initialement introduits , par Andel (1976). Ceci lui a permis d'examiner les conditions de stationnarité, en démontrant que la fonction de covariance d'un modèle *RCA* stationnaire remplit les mêmes équations de Yule-Walker comme celle d'un modèle autorégressif standard.

Robinson (1978) a étudié l'inférence statistique d'un modèle *RCA*(1) dont les coefficients varient par individu, et a établi les propriétés asymptotiques dans cette classe de modèles.

Ensuite ces modèles ont été étudiés en détail par Nicholls et Quinn (1980) et Nicholls et Quinn (1982). Ils ont généralisé le travail de Andel , en dérivant les conditions de stationnarité et de stabilité, pour les modèles autorégressifs

à coefficients aléatoires multivariés. Ainsi ils ont étudié l'inférence statistique dans cette classe de modèles, en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaire et celle de maximum de vraisemblance, et en obtenant les propriétés asymptotiques des estimateurs. Ainsi, d'autres auteurs comprennent Schick (1996), Tong (1990), et Koul Schick (1996) et Berkes et al. (2009).

Récemment des études ont été menées par Sue et al. (2006), Aue (2006), Aue et Horvath (2011), Fink et Kreiss (2013) qui ont également examiné plusieurs autres cas, par exemple, le cas de la non stationnarité, l'instabilité temporelle des paramètres, et l'estimation par les méthodes de bootsdrap.

On peut distinguer plusieurs types de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires. La plupart de ces modèles sont construits selon la structure des coefficients. Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude d'une classe de ces modèles de séries temporelles dont les coefficients varient avec le temps, ensuite par groupes d'individus. Cette classe de modèles est générée par l'équation aux différences stochastiques suivante

$$Y_t = \sum_{k=1}^p (A_k + \phi_{kt}) Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

(A_1, A_2, \dots, A_p) sont des réels, $(\phi_{1t}, \phi_{2t}, \dots, \phi_{pt})_t$ sont des variables aléatoires et les innovations (ε_t) est un bruit blanc.

0.1 L'objectif de cette thèse

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'une des classes de modèles existentes en séries chronologiques, dite classe de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires. Notre travail consiste donc en deux contributions aux modèles *RCA* :

- Développer les propriétés probabilistes, en établissant les conditions de stationnarité, d'existence des solutions stationnaires et de stabilité dans cette classe de modèles.

- Ainsi qu'à faire l'inférence statistique dans cette classe de modèles, en appliquant certaines méthodes d'estimation, par exemple la méthode des moindres carrés ordinaire, la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode de vraisemblance composite, et à étudier le comportement asymptotique pour établir des bonnes propriétés de ces estimateurs, notamment la consistance et la normalité asymptotique.

Par conséquent, la problématique générale de cette thèse donc porte sur l'analyse de la non linéarité dans les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires et nous nous interrogeons sur les difficultés dans cette modélisation non linéaire. Plusieurs questions se posent dans ce cadre. Doit-on garder les mêmes techniques d'estimation pour avoir des bonnes propriétés d'estimateurs, notamment la consistance et la normalité asymptotique ? De la même manière, est-ce que la modélisation non linéaire en données de panel s'interprète comme en séries chronologiques ? Si la réponse est négative, ce champ de recherche est-il une voie prometteuse pour l'économétrie ?

0.2 Organisation du mémoire

Le manuscrit de cette thèse est composé de quatre chapitres, une introduction générale et une conclusion :

Le premier chapitre est consacré aux concepts utilisés tout au long de cette thèse, ainsi aux quelques définitions et théorèmes préliminaires notamment le théorème central limite.

On s'intéresse dans **Le deuxième chapitre** à l'étude probabiliste des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires et nous établissons les conditions de stationnarité, l'existence et l'unicité des solutions stationnaires.

Le troisième chapitre est consacré à l'inférence statistique dans la classe de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires, en faisant une synthèse sur les techniques d'estimation telles que, la méthode des moindres carrés ordinaires, la méthode du maximum de vraisemblance, et celle des moments classique et en étudiant le comportement asymptotique de ces estimateurs.

Dans **le quatrième chapitre** nous focalisons l'étude sur les modèles *BL-GARCH*, spécifiquement le modèle *BL-GARCH*(1, 2) qui sont largement utilisés et ont prouvé leur performance pour l'analyse de la volatilité des séries financières, en basant sur les études de Storti & Vitale [46], et Diongue, Guégan et Wolff [15], qui ont bien discutés et traités cette classe de modèles. Dans la première partie nous étudions les propriétés probabilistes du modèle *BL-GARCH*(1, 2), tels que la positivité de la variance conditionnelle, les conditions de stationnarité et les propriétés de la distribution marginale. Dans la deuxième partie, nous étudions l'inférence statistique dans les modèles *BL-GARCH*(1, 2) en données de panel, en appliquant la méthode du maximum de vraisemblance composite.

Enfin on termine ce travail en donnant une conclusion générale sur les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires. Dans la première partie de cette thèse, on a proposé un modèle $RCA(1)$ et $RCA(p)$ avec des hypothèses sur les coefficients et les innovations, on a obtenu des résultats sur les conditions de certaines propriétés probabilistes. L'estimation est faite par la méthode des moindres carrés ordinaire, la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Ces méthodes montrent que leurs estimateurs satisfaisant aux propriétés de consistance et de normalité asymptotique. la deuxième partie est un article qui a été publié dans la revue « Far East Journal of Mathematical Sciences », et consacré aux modèles $BL-GARCH$. Dans cette classe de modèles, on a étudié des propriétés probabilistes, ensuite on a appliqué la méthode du maximum de vraisemblance composite qui est largement utilisée en inférence statistique en raison des bonnes propriétés asymptotiques de ses estimateurs. La méthode permet de réduire la complexité numérique des procédures d'optimisation même en présence de données fortement corrélées ou d'un modèle à structure hiérarchique. L'idée de la vraisemblance composite est de ne s'intéresser qu'à une partie de la vraisemblance complète. En effet, on peut décomposer, pour un modèle paramétrique, la vraisemblance complète en un produit de vraisemblances et ne considérer pour l'inférence statistique qu'une partie de ces vraisemblances qui est relativement plus simple à calculer. Le modèle proposé et estimé par cette méthode est $BL-GARCH(1, 2)$ en données de panel. Notre objectif consiste à établir la propriété de la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs obtenus.

CHAPITRE 0. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre on s'intéresse à la présentation des concepts, des définitions et de l'aspect générale des modèles et des méthodes qu'on utilisera dans les chapitres suivants. Ce préliminaire commencera par des généralités sur les variables aléatoires et les processus stochastiques. On l'enchaîne ensuite par la définition et quelques propriétés des modèles de séries chronologiques.

1.1 Généralités sur les variables aléatoires

Définition 1.1.1 Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et (E, ε) un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de Ω vers E , toute fonction mesurable X de Ω vers E .

Cette condition de mesurabilité de X assure que l'image réciproque par X de tout élément B de la tribu ε possède une probabilité et permet ainsi de définir sur (E, ε) , une mesure de probabilité, notée P_X , par

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

P_X est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X .

1.1.1 Convergence de suite de variables aléatoires

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et Y une variable aléatoire définie sur le même espace.

On désigne par $(F_n)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions de répartition de $(Y_n)_{n \geq 1}$ et F celle de Y . On va étudier le comportement asymptotique de ces suites, en commençant par faire le point sur les divers modes de convergences.

Définition 1.1.2 Convergence en loi

La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Y et l'on écrit $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$:

Si $F_n(x) \rightarrow F(x)$ en tout point de continuité de F .

Ou si pour toute fonction g continue et bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\lim_n E[g(Y_n)] = E[g(Y)]$.

Définition 1.1.3 Convergence en probabilité

La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers Y et l'on écrit $Y_n \xrightarrow{P} Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_n P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\} = 0.$$

Définition 1.1.4 Convergence presque sûre

La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers Y et l'on écrit $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$ si :

$$P\{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)\} = 1$$

Définition 1.1.5 Convergence en moyenne d'ordre $p \geq 1$

La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne d'ordre p vers Y et l'on écrit $Y_n \xrightarrow{L^p} Y$ si :

$$\lim_n E(|Y_n - Y|^p) = 0$$

Hierarchie des convergences

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_n \xrightarrow{p.s.} Y & \implies & Y_n \xrightarrow{P} Y & \implies & Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \\
 & & \uparrow & & \\
 & & Y_n \xrightarrow{L^q} Y & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & Y_n \xrightarrow{L^p} Y, \quad p > q & &
 \end{array}$$

1.1.2 Théorèmes limites

En statistique, la loi des grands nombres indique que lorsque l'on fait un tirage aléatoire dans une série de grande taille, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus les caractéristiques statistiques de l'échantillon se rapprochent des caractéristiques statistiques de la population. On distingue loi faible et loi forte en fonction du mode de convergence, en probabilité et presque sûre, respectivement.

Proposition 1.1.1 Loi faible des grands nombres

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi ayant une espérance finie $E[Y]$. On a alors :

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{P} E(Y)$$

Proposition 1.1.2 Loi forte des grands nombres

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi ayant une espérance finie $E[Y]$. On a alors :

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E(Y)$$

Théorème 1.1.1 Théorème central limite

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et de carré intégrable. Notons $\mu = E[Y_1]$, $Var[Y_1] = \sigma^2$, alors

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

1.1.3 Qualités d'un estimateur

Un estimateur peut être sans biais. Un estimateur est sans biais si, à taille d'échantillon finie et fixée, les différentes estimations d'un même paramètre sur différents échantillons admettent le paramètre à estimer comme barycentre ; ou plus simplement, si on a la définition suivante :

Définition 1.1.6 On dit que $T(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ est un estimateur sans biais de θ si et seulement si $E[T] = \theta$.

On appelle biais d'un estimateur : $E[T] - \theta$.

Une des qualités élémentaires que doit remplir un estimateur est d'être convergent. En d'autres termes, lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini, il faut que l'estimateur se rapproche du paramètre qu'il estime.

Dans un cadre plus général, nous noterons T_n un estimateur du paramètre obtenu à partir d'un échantillon de taille n , qui vérifie pour tout n , $E [T_n] = \theta$.

Définition 1.1.7 *L'estimateur T_n est faiblement convergent s'il converge en probabilité vers θ , soit :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{|T_n - \theta| \leq \varepsilon\} = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Définition 1.1.8 *L'estimateur T_n est fortement convergent s'il converge presque sûrement vers θ , soit :*

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \theta \right\} = 1.$$

On a une condition suffisante de convergence en probabilité. Il suffit que

$$\begin{aligned} E [T_n] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \\ \text{Var} [T_n] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

1.2 Processus stochastiques

Pour modéliser une série d'observations, on cherche le modèle qui approxime adéquatement le vrai processus aléatoire sous-jacent à ces observations. Pour mener cette démarche on a besoin de faire rappel aux processus stochastiques et leurs propriétés fondamentales.

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{Y_t\}_{t \in T}$ définies sur un certain espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et indexées par un certain ensemble T , appelé ensemble de temps.*

* Si $T = \mathbb{Z}$ on parle de processus stochastique à temps discret.

* Si $T = \mathbb{R}^+$ on parle de processus stochastique à temps continu.

Définition 1.2.2 *Les fonctions $\{Y_t(\omega), \omega \in \Omega\}$ sur T sont connues les réalisations du processus $\{Y_t\}_{t \in T}$.*

1.2.1 Fonction d'autocovariance et d'autocorrélation

Les principales caractéristiques temporelles d'un processus sont données par la fonction d'autocovariance et celle d'autocorrélation.

Définition 1.2.3 Si $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus telle que $Var [Y_t] < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$, alors la fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ de $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est définie par

$$\gamma(h) = Cov(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)], \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}$$

Ainsi : $\gamma(0) = Cov(Y_t, Y_t) = Var[Y_t] = E[(Y_t - \mu)^2]$, où $E(Y_t) = \mu$.

Remarque 1.2.1 Elle fournit une information sur la variabilité de la série et sur les liaisons temporelles qui existent entre les diverses composantes de la série Y_t .

La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire est une fonction :

- * Paire $\gamma(h) = \gamma(-h), \forall h$,
- * Semi-définie positive

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma(t_j - t_k) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall t_j \in \mathbb{Z}.$$

puisque cette quantité est égale à $Var \left[\sum_{j=1}^n a_j Y_{t_j} \right]$.

Définition 1.2.4 La fonction d'autocorrélation d'un processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, de moyenne μ , notée $\rho(k)$ ou ρ_k , est définie par

$$\rho_k = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

avec $\rho_k \in [-1, 1]$.

Estimateur

Définition 1.2.5 L'estimateur de la fonction d'autocorrélation, noté $\hat{\rho}(k)$ ou $\hat{\rho}_k$, obtenu pour un échantillon de T réalisations du processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, est donné par $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)},$$

où $\widehat{\gamma}(k)$ désigne l'estimateur de la fonction d'autocovariance $\forall k \in \mathbb{Z}^+$

$$\widehat{\gamma}(k) = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - \bar{Y}_t) (Y_{t-k} - \bar{Y}_{t-k}), \text{ avec } \bar{Y}_t = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} Y_t$$

D'après le théorème central limite, la variable centrée t_{ρ_k} suit une loi normale centrée réduite :

$$t_{\rho_k} = \frac{\widehat{\rho}_k - \rho_k}{\sqrt{V[\widehat{\rho}_k]}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathfrak{N}(0, 1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

où $V(\widehat{\rho}_k)$ désigne l'estimateur de la variance empirique des estimateurs $\widehat{\rho}_k$:

$$V[\widehat{\rho}_k] = \frac{1}{T} \sum_{j=-h}^h \widehat{\rho}_j^2, \quad h < k.$$

En utilisant la symétrie des ρ_k , on montre que :

$$V[\widehat{\rho}_k] = \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^h \widehat{\rho}_j^2 \right)$$

1.2.2 Autocorrélations partielles

Définition 1.2.6 *Le coefficient d'autocorrélation partielle théorique de retard $h > 0$, $r_Y(h)$, d'un processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire au second ordre, est le coefficient de corrélation entre*

$$Y_t - EL(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1}) \text{ et } Y_{t-h} - EL(Y_{t-h} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1})$$

$EL(Z | X_1, X_2, \dots, X_k)$ est la régression linéaire d'une variable de carré intégrable Z sur X_1, X_2, \dots, X_k :

$$r_Y(h) = Cov(Y_t, Y_{t-h} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1})$$

Supposons $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ centré et considérons le modèle de régression linéaire de Y_t sur $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h}$:

$$Y_t = a_{h,1}Y_{t-1} + \dots + a_{h,h}Y_{t-h} + u_{h,t}, \quad u_{h,t} \perp Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h}$$

On a

$$\begin{aligned} EL(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h}) &= a_{h,1}Y_{t-1} + \dots + a_{h,h}Y_{t-h} \\ EL(Y_{t-h-1} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h}) &= a_{h,1}Y_{t-h} + \dots + a_{h,h}Y_{t-1} \\ r_Y(h) &= a_{h,h} \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned} EL(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1}) &= a_{h,1}Y_{t-1} + \dots + a_{h,h-1}Y_{t-h+1} \\ &\quad + a_{h,h}EL(Y_{t-h} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1}) \end{aligned}$$

D'où

$$Y_t - EL(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1}) = a_{h,h} \{Y_{t-h} - EL(Y_{t-h} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1})\} + u_{h,t}$$

Cette dernière égalité est de la forme : $Y = a_{h,h}X + u$ avec $u \perp X$, d'où $Cov(Y, X) = a_{h,h}Var(X)$, ce qui donne :

$$a_{h,h} = \frac{Cov\{Y_t - EL(Y_{t-h} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1}), Y_{t-h} - EL(Y_{t-h} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1})\}}{Var\{Y_{t-h} - EL(Y_{t-h} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1})\}}$$

Algorithme de calcul

On peut calculer $r_Y(h)$ rapidement, à partir de $\rho(1), \dots, \rho(h)$, à l'aide de l'algorithme de Durbin :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \rho(1) \\ a_{k,k} &= \frac{\rho(k) - \sum_{i=1}^{k-1} \rho(k-i) a_{k-1,i}}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho(i) a_{k-1,i}} \\ a_{k,i} &= a_{k-1,i} - a_{k,k} a_{k-1,k-i}, \quad i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

1.3 Stationnarité

La stationnarité joue un rôle majeur en séries chronologiques car elle remplace de manière naturelle l'hypothèse d'observations *iid* en statistique standard. Dans la suite, on considère généralement deux notions de stationnarité.

Définition 1.3.1 (Stationnarité stricte)

Le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit strictement stationnaire si les vecteurs $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$ et $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_k+h})$ ont même loi jointe, pour tout entier k , et tout entier relatif h .

Définition 1.3.2 (Stationnarité au second ordre)

Le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit stationnaire au second ordre si

- (i) $E\{Y_t\} = \mu, t \geq 0$
- (ii) $E\{Y_t^2\} < \infty$
- (iii) $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma(h) \forall t, h \in \mathbb{Z}$.

La fonction $\gamma(\cdot)$ (resp. $\rho(\cdot) = \gamma(\cdot)/\gamma(0)$) est appelée fonction d'autocovariance (resp. d'autocorrélation) de $\{Y_t\}$.

L'exemple le plus simple de processus stationnaire au second ordre est celui du bruit blanc. Ce processus est particulièrement important car il permet de construire des processus stationnaires plus complexes.

Définition 1.3.3 (Bruit blanc faible)

Le processus (ε_t) est appelé bruit blanc faible s'il vérifie, pour une constante positive σ^2 :

- (i) $E[\varepsilon_t] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$,
- (ii) $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$,
- (iii) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0 \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$.

Remarque 1.3.1 Il est parfois nécessaire de remplacer l'hypothèse (iii) par l'hypothèse plus forte :

- (iiii) les variables ε_t et ε_{t+h} sont indépendantes.
- On parle alors de bruit blanc fort.

Il est souvent important par exemple pour la sélection de modèles, de déterminer si les autocovariances empiriques sont significativement différentes de zéro au-delà d'un certain rang. Pour cela il est nécessaire d'estimer la structure de covariance de ces autocovariances empiriques. On a le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 (Formules de Bartlett)

Si $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus linéaire, c'est à dire s'il satisfait

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$$

où (ε_t) est une suite de variables iid, telles que

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \quad E[\varepsilon_t^4] = \eta\sigma^4 < \infty$$

et où $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\phi_j| < \infty$, on a les formules de Bartlett :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov} \{ \hat{\gamma}(h), \hat{\gamma}(k) \} &= (\eta - 3) \gamma(h) \gamma(k) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \gamma(i) \gamma(i+k-h) + \gamma(i+k) \gamma(i-h). \end{aligned}$$

1.4 Ergodicité

On dit qu'une suite stationnaire est ergodique si elle satisfait la loi forte des grands nombres.

Définition 1.4.1 (*Processus stationnaire ergodique*) Un processus strictement stationnaire $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs réelles, est dit ergodique si et seulement si pour tout borélien B et tout entier k ,

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n I_B(Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k}) \rightarrow P[(Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k}) \in B]$$

avec probabilité 1.

Certaines transformations de suites ergodiques restent ergodiques.

Théorème 1.4.1 Si $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite strictement stationnaire ergodique et si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est définie par

$$X_t = f(\dots, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, \dots)$$

où f est une fonction mesurable de \mathbb{R}^∞ dans \mathbb{R} , alors $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est également une suite strictement stationnaire ergodique.

En particulier, si $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est la solution stationnaire non anticipative de l'équation $AR(1)$:

$$Z_t = aZ_{t-1} + \eta_t, \quad |a| < 1, \quad \eta_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

alors le théorème montre que $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $\{Z_{t-1}\eta_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ et $\{Z_{t-1}^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sont des suites stationnaires et ergodiques.

Théorème 1.4.2 (*Le théorème ergodique pour suites stationnaires*)

Si $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique, si f est mesurable et si $E|f(\dots, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, \dots)| < \infty$, alors

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n f(\dots, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, \dots) \rightarrow Ef(\dots, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, \dots) \quad p.s.$$

Considérons l'estimateur des moindres carrés \hat{a}_n du paramètre a de modèle $AR(1)$ précédent

$$\hat{a}_n = \arg \min_a Q_n(a), \quad Q_n(a) = \sum_{t=2}^n (Z_t - aZ_{t-1})^2.$$

En annulant la dérivée du critère, on obtient

$$\hat{a}_n = \frac{n^{-1} \sum_{t=2}^n Z_t Z_{t-1}}{n^{-1} \sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2}$$

Le théorème ergodique montre que le numérateur tend presque sûrement vers $\gamma(1) = \text{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) = a\gamma(0)$ et que le dénominateur tend vers $\gamma(0)$. On en déduit que $\hat{a}_n \rightarrow a$ presque sûrement quand $n \rightarrow \infty$. Remarquant que ce résultat reste valable si on remplace l'hypothèse η_t bruit blanc fort par l'hypothèse que η_t est bruit blanc semi-fort, ou même que η_t bruit blanc faible stationnaire ergodique.

Théorème 1.4.3 (*Billingsley*)

Soit $\{\xi_t\}$ une suite de variables aléatoires \mathcal{F}_t -mesurable où \mathcal{F}_t est une σ -Algèbre engendrée par une suite $\{X_t, X_{t-1}, \dots\}$ de variables aléatoires strictement stationnaire et ergodique. On suppose que $E[\xi_t/\mathcal{F}_{t-1}] = 0$ et $E[\xi_t^2] = c^2$. Alors $(c^2 N)^{-1/2} \sum_{t=1}^N \xi_t$ converge en distribution vers une variable aléatoire qui suit une distribution normale standard.

1.5 Processus linéaires

Les modèles linéaires occupent une place centrale dans la théorie des séries chronologiques. L'analyse classique des séries temporelles basée sur la

construction de modèles du processus stochastique sous-jacent. Celui-ci est ensuite utilisé d'un point de vue statistique, que ce soit pour analyser la structure du processus ou pour produire des prévisions. Dans la pratique on trouve plusieurs modèles linéaires de séries chronologiques, on cite : modèles AR , modèles MA et modèles $ARMA$.

1.5.1 Processus MA

Définition 1.5.1 On appelle processus moyenne mobile d'ordre q , noté $MA(q)$, un processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant une relation du type

$$Y_t = \sum_{k=0}^q \theta_k \varepsilon_{t-k}$$

où les θ_k sont des nombres réels et ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ε^2 .

Proposition 1.5.1 Soit $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus $MA(q)$, alors

- (i) $E[Y_t] = \mu$.
- (ii) $Var[Y_t] = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2$.
- (iii)

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \begin{cases} 0 & |k| > q \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q-|k|} \theta_i \theta_{i+|k|} & |k| \leq q. \end{cases}$$

Avant de détailler les conditions d'inversibilité, il convient d'introduire l'opérateur retard B ce qui permettra de simplifier les écritures. En général, Soit $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un modèle $MA(q)$, et B l'opérateur retard, avec $B^j Y_t = Y_{t-j}$, alors on a

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) \varepsilon_t \\ &= \theta(B) \varepsilon_t \end{aligned}$$

où $\theta(B)$ est un polynôme moyenne mobile d'ordre q .

Théorème 1.5.1 Un processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ moyenne mobile d'ordre q , est dit inversible si les racines de l'équation $\theta(B)$, se trouvent à l'extérieur du cercle unitaire.

1.5.2 Processus AR

Définition 1.5.2 On appelle processus autorégressif d'ordre p , noté $AR(p)$, un processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant une relation du type

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

où les ϕ_k sont des nombres réels et ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ε^2 .

On utilise l'opérateur retard, on peut écrire

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \\ Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} &= \varepsilon_t \\ (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) Y_t &= \varepsilon_t \\ \phi(B) Y_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

où $\phi(B)$ est un polynôme autorégressif d'ordre p .

Définition 1.5.3 Un processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit causal, s'il existe une suite de constantes $\{\psi_i\}$, tel que

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \text{ avec } \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$

Pour un modèle $AR(p)$; $Y_t = \phi^{-1}(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, avec $\psi_0 = 1$. Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles le modèle $AR(p)$ soit causal.

Théorème 1.5.2 Le processus $AR(p)$ est causal si toutes les racines du polynôme autorégressif

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

se trouvent à l'extérieur du cercle unitaire, i.e. $\{z : \phi(z) = 0\} \subseteq \{z : |z| > 1\}$.

► La stationnarité va exiger que les racines du polynôme $\phi(z)$ soient extérieures au cercle unitaire complexe.

► En prenant l'espérance du produit $Y_t Y_{t-k}$ et en remplaçant Y_t par l'équation de définition du processus, il est immédiat de montrer que

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \phi_1 \gamma(1) + \dots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 \\ \text{d'où } 1 &= \phi_1 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_p + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma(0)}, \text{ pour } k = 0, \\ &\implies \gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \dots - \phi_p \rho_p} \\ \gamma(k) &= \phi_1 \gamma(k-1) + \dots + \phi_p \gamma(k-p), \text{ pour } k > 0. \end{aligned}$$

► La fonction d'autocorrélation d'un $AR(p)$:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0$$

l'équation liant les valeurs de cette fonction est donc la même que celle existant entre les réalisations du processus aux divers instants $t, t-1, \dots, t-p$. Les conditions de stationnarité vont impliquer la convergence vers zéro de la suite des termes ρ_k . Cette décroissance étant dominée par des exponentielles ou des vagues sinusoïdales selon que les racines du polynôme $\phi(B)$ sont réelles ou complexes.

1.5.3 Processus ARMA

Définition 1.5.4 On dit que le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suit un modèle $ARMA(p, q)$, s'il est défini par la relation suivante

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j} + \sum_{k=0}^q \theta_k \varepsilon_{t-k}$$

où les ϕ_k, θ_k sont des nombres réels et ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ε^2 .

Le modèle peut aussi s'écrire

$$\left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j\right) Y_t = \left(1 - \sum_{k=0}^q \theta_k B^k\right) \varepsilon_t, \text{ ou } \phi(B) Y_t = \theta(B) \varepsilon_t$$

* Stationnarité du processus ARMA

Théorème 1.5.3 *Le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire et admet la décomposition $MA(\infty)$*

$$Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \text{ avec } \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i| < +\infty$$

si et seulement si les racines de l'équation $\phi(z) = 0$ sont de modules strictement supérieurs à 1.

*** Inversibilité du processus ARMA**

Théorème 1.5.4 *Le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est inversible, ce qui s'exprime par*

$$Y_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t, \text{ avec } \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| < +\infty$$

si et seulement si les racines de l'équation $\theta(z) = 0$, sont de modules strictement supérieurs à 1.

En pratique, on rencontre des séries chronologiques non stationnaires. La non stationnarité peut provenir de la variation de la moyenne, ou de la variance, ou bien les deux dans le temps. Lorsque la non stationnarité est consécutive à la variation de la moyenne dans le temps, on procède à des différences successives de la série en question.

Définition 1.5.5 *Soit $\nabla^d Y_t = (1 - B)^d Y_t$ la différence d'ordre d de Y_t . On appelle un processus ARMA intégré et on le note ARIMA(p, d, q) le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tel que*

$$\phi(B) \nabla^d Y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

1.6 Processus non linéaires

L'observation de certaines séries chronologiques provenant du monde économique et financier (par exemple, des taux d'échanges, des taux d'actions et des indices, ...) montre des caractéristiques spécifiques qui ne sont pas théoriquement prises en compte dans la modélisation linéaire. Cependant, ils ont introduit des modèles non linéaires, pour modéliser ces genres des données de series chronologiques.

1.6.1 Processus autorégressifs à coefficients aléatoires

Définition 1.6.1 On dit que le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus autorégressif d'ordre p à coefficients aléatoires, noté $RCA(p)$, s'il est défini par une équation du type suivant

$$Y_t = \sum_{i=1}^p (A_i + \phi_{it}) Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- où i) A_1, A_2, \dots, A_p sont des réels,
 ii) $\phi_{1t}, \phi_{2t}, \dots, \phi_{pt}$ sont des variables aléatoires,
 iii) $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc.

1.6.2 Modèle GARCH

Les modèles *ARCH* (autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques) ont été introduits par Engle (1982) et leur extension *GARCH* (*ARCH* généralisés) est due à Bollerslev (1986). Leur caractérisation repose essentiellement sur le concept de variance conditionnelle. Dans ces modèles, celle-ci s'écrit comme une fonction affine des valeurs passées du carré de la série. Cette spécification particulière se révèle très fructueuse car elle permet une étude complète des propriétés des solutions tout en étant assez générale. Les modèles *GARCH* sont en effet susceptibles de capter les propriétés caractéristiques de certaines séries chronologiques.

Définition 1.6.2 On dit que $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus *GARCH*(p, q), si ses deux premiers moments conditionnels existent et vérifient

- (i) $E[\varepsilon_t / \varepsilon_u, u < t] = 0$, $t \in \mathbb{Z}$;
 (ii) Il existe des constantes ω , α_i , $i = 1, \dots, q$ et β_j , $j = 1, \dots, p$ telles que

$$\sigma_t^2 = Var[\varepsilon_t / \varepsilon_u, u < t] = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Ce modèle peut être écrit de manière symbolique sous la forme plus compacte

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B) \varepsilon_t^2 + \beta(B) \sigma_t^2, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où B est l'opérateur retard, α et β sont les polynômes de degrés q et p .

$$\alpha(B) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i, \quad \text{et} \quad \beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j$$

Si $\beta(z) = 0$ on a

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

et le processus est appelé $ARCH(q)$.

L'innovation du processus (ε_t^2) est par définition la variable $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. En remplaçant, dans le modèle, les variables σ_{t-j}^2 par $\varepsilon_{t-j}^2 - \nu_{t-j}$ on obtient la représentation

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{i=1}^p \beta_i \nu_{t-i}^2, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $r = \max(p, q)$, On retrouve ainsi dans cette équation la structure linéaire des modèles $ARMA$. Sous des hypothèses supplémentaires, on peut affirmer que si (ε_t) est un $GARCH(p, q)$, (ε_t^2) est un processus $ARMA(r, p)$. En particulier, le carré d'un processus $ARCH(q)$ admet, s'il est stationnaire, une représentation $AR(p)$. Ces représentations $ARMA$ seront utiles pour l'estimation et l'identification des processus $GARCH$.

Définition 1.6.3 Processus $GARCH(p, q)$ fort

Soit (η_t) une suite de variables iid de loi η . On dit que (ε_t) est un processus $GARCH(p, q)$ au sens fort relativement à la suite (η_t) s'il vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

où les α_i et β_j sont des constantes positives et ω est constante strictement positive.

Il est clair qu'un processus $GARCH$ fort tel que σ_t^2 est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\varepsilon_u, u < t)$ est un processus $GARCH$ au sens de la première définition. La réciproque n'est cependant pas vraie.

Les processus $GARCH$ au sens de la première définition sont souvent qualifiés de semi-forts. En remplaçant ε_{t-i} par $\sigma_{t-i} \eta_{t-i}$ dans le modèle, on obtient

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

que l'on peut écrire

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r a_i (\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^2$$

où $a_i(z) = \sigma_t^2 = \alpha_i z^2 + \beta_i$, $i = 1, \dots, r$. Cette représentation montre que dans le cas d'un *GARCH* fort, le processus de volatilité vérifie une équation autorégressive, mais avec coefficients aléatoires.

1.7 Produit de Kronecker

Définition 1.7.1 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de dimension respectivement $n \times p$ et $m \times q$, la matrice de dimension $mn \times pq$ définie par

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{np}B \end{bmatrix}$$

est appelé produit de Kronecker des matrices A et B .

Définition 1.7.2 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times n$, on définit la norme matricielle par l'une des normes usuelles

- * $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- * $\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(AA^t)}$, où $\varrho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.
- * $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Définition 1.7.3 L'opérateur *Vec* génère un vecteur colonne d'une matrice A en empilant les vecteurs colonnes de la matrice $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ au-dessous l'un à l'autre

$$Vec(A) = [a'_1, a'_2, \dots, a'_n]'$$

Théorème 1.7.1 Soient A, B, C et D quatre matrices appropriées

- (i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
- (ii) $(A \otimes B)^j = A^j \otimes B^j$.
- (iii) $Vec[ABC] = (C' \otimes A) Vec[A]$.
- (iv) $Tr[AB] = (Vec[B'])' Vec[A] = (Vec[B])' Vec[A']$.

Théorème 1.7.2 *Soit V une matrice de dimension $n \times n$ vérifiant l'équation suivante*

$$V = MVN' + G$$

où M , N et G sont des matrices données de dimension $n \times n$. Si la matrice $[I_{n^2} - N \otimes M]$ est inversible alors il existe une solution unique V telle que

$$\text{Vec}[V] = [I_{n^2} - N \otimes M]^{-1} \text{Vec}[G]$$

Définition 1.7.4 *Soit A une matrice symétrique de dimension $n \times n$, alors l'opérateur $\text{Vech}[A]$ défini un vecteur de dimension $[n(n+1)/2] \times 1$ qui est obtenu de A en empilant de gauche à droite ses parties des colonnes de A sur et au-dessous du diagonal principal, l'une sur l'autre dans l'ordre.*

Théorème 1.7.3 *Il existent deux matrices K_n et H_n de dimension $[n(n+1)/2] \times n^2$, tel que*

$$\text{Vech}[A] = H_n \text{Vec}[A], \quad \text{et} \quad \text{Vec}[A] = K_n' \text{Vec}[A]$$

pour toute matrice A de dimension $n \times n$, et $H_n K_n' = I_{n(n+1)/2}$.

Chapitre 2

Etude probabiliste

Au cours des 40 dernières années, il y a eu un intérêt croissant dans les modèles de séries chronologiques non linéaires. Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude des conditions de stationnarité, ainsi les conditions d'existence et d'unicité des solutions stationnaires des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires introduits et étudiés par plusieurs auteurs.

2.1 Propriétés du modèle RCA(1)

Comme beaucoup d'autres auteurs, on considère le modèle $RCA(1)$ pour faciliter les calculs. En principe, ces méthodes peuvent être étendues au cas général. Tout au long de cette section, on aimerait utiliser la définition suivante :

Définition 2.1.1 *un processus autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre 1, noté $RCA(1)$ est défini par*

$$Y_t = (\alpha + \phi_t) Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

où : (i) $\alpha \in \mathbb{R}$,

(ii) $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires iid, de moyenne nulle et de variance σ_ε^2 ,

(iii) $(\phi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires iid, de moyenne nulle et de variance ω^2 ,

(iv) les suite (ε_t) , (ϕ_t) sont mutuellement indépendantes.

Les conditions pour lesquelles le modèle *RCA* défini par l'équation (2.1) admet des solutions, ont été souvent discuté dans la littérature. Le premier travail a été fait par Nicholls et Quinn (1980) et Nicholls et Quinn (1982) dans le cas univarié et multivarié, tandis que Andel (1976) a étudié les conditions de stationnarité faible. Récemment, Aue et al. (2006) ont étendu ce travail dans cette classe de modèles.

D'abord on va commencer, par l'étude des propriétés de :

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\alpha + \phi_{-j}) \quad (2.2)$$

Soit : $\log^+ x = \max \{\log x, 0\}$ la partie positive du logarithme.

Lemme 2.1.1 *On suppose que (i)-(iv) soient vérifiées et*

$$E [\log^+ |\varepsilon_0|] < \infty \quad \text{et} \quad E [\log^+ |\alpha + \phi_0|] < \infty. \quad (2.3)$$

Si

$$-\infty \leq E [\log |\alpha + \phi_0|] < 0 \quad (2.4)$$

Alors Y défini par (2.2) est absolument convergent avec probabilité 1. Réciproquement, si $P [\varepsilon_0 = 0] < 1$ et $P [|Y| < \infty] = 1$, alors (2.4) est vérifiée.

Preuve. (1) D'abord, nous supposons que (2.4) soit vérifiée, par la loi forte des grands nombres, il existe une variable aléatoire i_0 telle que

$$\log |\alpha + \phi_{-1}| + \log |\alpha + \phi_{-2}| + \dots + \log |\alpha + \phi_{-i}| \leq \frac{1}{2} i \gamma, \quad \text{si } i \geq i_0, \quad (2.5)$$

quand $-\infty < \gamma = E [\log |\alpha + \phi_{-0}|] < 0$. En utilisant (2.5), on a

$$|Y| \leq \sum_{i=0}^{i_0} |\varepsilon_{-i}| \prod_{j=0}^{i-1} |\alpha + \phi_{-j}| + \prod_{k=0}^{i_0} |\alpha + \phi_{-k}| \sum_{i=i_0+1}^{\infty} |\varepsilon_{-i}| e^{i\gamma/2} \quad (2.6)$$

D'après le lemme 2.2 de Berkes *et al.* (2003), on a

$$P \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_{-i}| e^{i\gamma/2} < \infty \right\} = 1,$$

et on achève la première partie du lemme si $-\infty < E [\log |\alpha + \phi_0|] < 0$.

Si $E [\log |\alpha + \phi_0|] = -\infty$, alors (2.5) est vérifiée pour tout $\gamma < 0$, alors

2.1. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE RCA(1)

l'argument dans (2.6) peut être répété.

(2) Si $P\{|\varepsilon_0| = 0\} < 1$, il existe $a > 0$ telle que $P\{|\varepsilon_0| \geq a\} > 0$.

Soient les événements A_k définis par :

$$A_k = \left\{ \omega : \left(|\varepsilon_{-k}| \prod_{i=0}^{k-1} |\alpha + \phi_{-i}| \right) \in [a, \infty) \times [1, \infty) \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ensuite, nous introduisons une suite croissante de σ -algèbres données par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_k = \sigma((\varepsilon_i, \phi_i), -k \leq i \leq 0)$. Il est clair que $A_k \in \mathcal{F}_k$. En appliquant (i) – (iv), on obtient

$$P[A_k | \mathcal{F}_{k-1}] = P[|\varepsilon_0| \geq a] I \left[\sum_{i=0}^{k-1} \log |\alpha + \phi_{-i}| \geq 0 \right].$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[A_k | \mathcal{F}_{k-1}] = P[|\varepsilon_0| \geq a] \sum_{k=1}^{\infty} I \left[\sum_{i=0}^{k-1} \log |\alpha + \phi_{-i}| \geq 0 \right]. \quad (2.7)$$

Ensuite nous montrons que

$$\sum_{k=1}^{\infty} I \left[\sum_{i=0}^{k-1} \log |\alpha + \phi_{-i}| \geq 0 \right] = \infty \quad p.s. \quad (2.8)$$

Si $E[\log |\alpha + \phi_0|] > 0$, alors (2.8) devient de la loi forte des grands nombres.

Si $E[\log |\alpha + \phi_0|] = 0$, alors on a

$$P \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \prod_{j=0}^{k-1} |\alpha + \phi_{-j}| = 0 \right] = 0.$$

Cela contredit avec le fait que Y soit fini, et complétant la démonstration du lemme. ■

Lemme 2.1.2 *On suppose que (i)-(iv) et (2.4) soient vérifiées, $E|\phi_0|^\epsilon < \infty$ et $E|\varepsilon_0|^\epsilon < \infty$ pour $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$, telle que $E|Y|^\delta < \infty$.*

Preuve. Soit $M(t) = E|\alpha + \phi_0|^t$, $0 \leq t \leq \epsilon$. On note que $M(0) = 1$ et d'après (2.4), $M'(0^+) < 0$. Par conséquent $M(t)$ est décroissant à droite au voisinage de zéro, alors il existe $\delta > 0$ telle que $M(\delta) < 1$. Nous pouvons

supposer sans perte de généralité, que $0 < \delta \leq 1$. Comme $(a + b)^\delta \leq a^\delta + b^\delta$ pour $a, b \geq 0$ par concavité,

$$|Y|^\delta \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_{-i}| \prod_{j=0}^{i-1} |\alpha + \phi_{-j}| \right)^\delta \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_{-i}|^\delta \prod_{j=0}^{i-1} |\alpha + \phi_{-j}|^\delta.$$

En utilisant (i)-(iv) et $M(\delta) < 1$ on conclut que

$$E |Y|^\delta \leq E |\varepsilon_0|^\delta \sum_{i=0}^{\infty} E \left[\prod_{j=0}^{i-1} |\alpha + \phi_{-j}|^\delta \right] = E |\varepsilon_0|^\delta \sum_{i=0}^{\infty} M^i(\delta) < \infty.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Le lemme suivant nous fournit la condition d'existence de $E |Y|^v$, $v \geq 1$, généralisant le lemme précédent.

Lemme 2.1.3 *On suppose que (i)-(iv) et (2.4) soient vérifiées, pour certains $v \geq 1$, $E |\phi_0|^v < \infty$, $E |\varepsilon_0|^v < \infty$ et $|\alpha + \phi_0|^v < 1$. Alors $E |Y|^v < \infty$.*

Preuve. En utilisant (i)-(iv) et l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$(E |Y|^v)^{1/v} \leq (E |\varepsilon_0|^v)^{1/v} \sum_{i=0}^{\infty} (E |\alpha + \phi_0|^v)^{i/v} < \infty.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Remarque 2.1.1 *Si ε_0 et ϕ_0 sont indépendentes, $E [\phi_0] = E [\varepsilon_0] = 0$, $E [\phi_0^2] = \omega^2$ et $E [\varepsilon_0^2] < \infty$, alors $E [Y^2] < \infty$ si et seulement $\alpha^2 + \omega^2 < 1$. Ce résultat est obtenu par Nicholls et Quinn (1982) d'après Andel (1976).*

Définition 2.1.2 *On dit que $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est une solution non anticipative de l'équation (2.1), si Y_j est indépendante de $\{(\phi_k, \varepsilon_k) : k > j\}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.*

Le théorème suivant donne la condition nécessaire et suffisante d'existence de la solution unique de l'équation (2.1).

Théorème 2.1.1 *Si (2.3) et (2.4) sont vérifiées, alors il existe une unique solution strictement stationnaire, non anticipative et absolument convergente de l'équation (2.1) donnée par*

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\alpha + \phi_{t-j}) \tag{2.9}$$

2.1. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE RCA(1)

Réciproquement, si

$$\Pr [c_1\phi_1 + c_2\varepsilon_1 = c_3] < 1 \text{ pour tout } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^* \text{ et } c_3 \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

et l'équation (2.1) admet une solution non anticipative, alors (2.4) est vérifiée.

Preuve. La première partie du théorème est une conséquence du lemme précédent et les résultats de Brandt (1986). La condition (2.10) produit que Y_t est irréductible, au sens de Bougerol et Picard (1992), par conséquent leur théorème 2.5 implique la deuxième partie du théorème. ■

Remarque 2.1.2 1- $E[\log |\alpha + \phi_1|]$ existe toujours dans $[-\infty, +\infty[$ car :

$$E[\log |\alpha + \phi_1|] \leq E[|\alpha + \phi_1|] \leq |\alpha|$$

2- La condition (2.4) dépend de la loi des variables aléatoires (ϕ_t) .

3- La stationnarité au second ordre du processus RCA (1) défini par (2.1), a été étudiée par Nicholls et Quinn (1982), en montrant qu'il existe une unique solution stationnaire si et seulement si $|\alpha| < 1$ et $\omega^2(1 - \alpha^2)^{-1} < 1$, ceci est équivalent que $\alpha^2 + \omega^2 < 1$.

4- La condition (2.4) implique $\alpha < 1$. Inversement, si $\alpha^2 + \omega^2 < 1$, (2.3) est vérifiée, car par application de l'inégalité de Jensen

$$E[\log |\alpha + \phi_1|] \leq \log E[|\alpha + \phi_1|] \leq \log |\alpha| < 0$$

Maintenant on cherche des conditions d'existence des moments d'ordre $2m$ où $m = 1, 2, 4$. On ne considère que les moments d'ordre pair, car si l'on fait une hypothèse de symétrie pour la loi de (ϕ_t) et (ε_t) , les moments d'ordre impair, lorsqu'ils existent, sont nuls. Si cette hypothèse n'est pas faite, ces moments semblent difficilement calculables. Pour les moments d'un processus RCA (1), on a le résultat suivant, d'après Fink et Kreiss (2013).

Théorème 2.1.2 On considère le modèle RCA (1) défini par l'équation (2.1), et on suppose que les moments $E[\phi_t^{2m}]$ et $E[\varepsilon_t^{2m}]$, $m = 1, 2, 3, 4$ sont finis, alors on a

$$\begin{aligned} E[Y_t^2] < \infty &\iff \alpha^2 + \omega^2 < 1 & (2.11) \\ E[Y_t^4] < \infty &\iff \alpha^4 + 6\alpha^2\omega^2 + \varphi^4 < 1 \\ E[Y_t^8] < \infty &\iff \alpha^8 + 28\alpha^6\omega^2 + 70\varphi^4\alpha^4 + 28\alpha^2E[\phi_t^6] + E[\phi_t^8] < 1 \end{aligned}$$

Où $E[\phi_t^4] = \varphi^4$ et $E[\varepsilon_t^4] = \beta^4$. Si les moments sont finis, on a

$$E[Y_t^2] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad E[Y_t^4] = \frac{\beta^4 + 6\sigma_\varepsilon^4 \frac{\alpha^2 + \omega^2}{1 - \alpha^2 - \omega^2}}{1 - \alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 - \varphi^4} \quad (2.12)$$

Pour $h \geq 0$, les autocovariances sont données par

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_t, Y_{t+h}] &= \alpha^h E[Y_t^2] \\ \text{Cov}[Y_t^2, Y_{t+h}^2] &= (\alpha^2 + \omega^2)^h \left(E[Y_t^4] - E[Y_t^2]^2 \right) \end{aligned}$$

Preuve. La première assertion de (2.11) est démontrée par Nicholls et Quinn (1982), Corollaire 2.3.2. Les autres assertions seraient démontrées d'une façon similaire.

Le moment du second d'ordre de (2.12) est énoncé par Aue (2003), Lemme 3.1.1. Concernant le moment d'ordre 4, on suppose que les moments impairs des bruits blancs sont nuls jusqu'à l'ordre 7, alors

$$\begin{aligned} E[Y_t^4] &= E[((\alpha + \phi_t) Y_{t-1} + \varepsilon_t)^4] \\ &= E[(\alpha + \phi_t)^4] E[Y_{t-1}^4] + 6E[(\alpha + \phi_t)^2] E[Y_{t-1}^2] E[\varepsilon_t^2] + E[\varepsilon_t^4] \\ &= (\alpha^4 + 6\alpha^2\omega^2 + \varphi^4) E[Y_{t-1}^4] + 6(\alpha^2 + \omega^2) E[Y_{t-1}^2] \sigma_\varepsilon^2 + \beta^4. \end{aligned}$$

comme le processus est supposé stationnaire, on a

$$E[Y_t^4] (1 - (\alpha^4 + 6\alpha^2\omega^2 + \varphi^4)) = 6(\alpha^2 + \omega^2) E[Y_t^2] \sigma_\varepsilon^2 + \beta^4$$

d'où le résultat. Concernant les autocovariances du processus sont également donnée par Aue (2003), Lemme 3.1.1. ■

Dans ce qui suit, nous allons largement faire usage du processus soi-disant processus RCA tronqué qui peut être obtenu à partir de l'équation (2.9) en considérant seulement les derniers termes du bruit d'innovation ε_t et le bruit de perturbation ϕ_t , qui est donnée par la définition suivante.

Définition 2.1.3 La version tronquée du processus RCA, Y_t est donnée par

$$\tilde{Y}_t^s = \sum_{i=0}^{s-1} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\alpha + \phi_{t-j}) \quad (2.13)$$

Lemme 2.1.4 *Si Y_t a un moment d'ordre 2 fini, la L^2 -norme de la différence entre le processus initial Y_t et le processus tronqué \tilde{Y}_t^s décroît exponentiellement vers zéro, i.e.*

$$E \left[\left(Y_t - \tilde{Y}_t^s \right)^2 \right] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2 - \omega^2} (\alpha^2 + \omega^2)^s = C\vartheta^s, \quad \vartheta < 1$$

Les constantes ϑ^s sont absolument sommables.

Preuve. On a

$$E \left[\left(Y_t - \tilde{Y}_t^s \right)^2 \right] = E \left[\left(\sum_{i=s}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} (\alpha + \phi_{t-j}) \varepsilon_{t-j} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2 - \omega^2} (\alpha^2 + \omega^2)^s := \vartheta^s$$

Il découle directement que les constantes ϑ^s sont absolument sommables. ■

2.2 Propriétés du modèle RCA(p)

Dans cette section, nous allons essayer d'étudier certaines propriétés du modèle autorégressive à coefficients aléatoires d'ordre p noté $RCA(p)$ et défini par

$$Y_t = \sum_{k=1}^p (A_k + \phi_{kt}) Y_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (2.14)$$

On suppose que :

- (i) $\{\varepsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ_ε^2 ,
- (ii) Les A_k , pour $k = 1, \dots, p$ sont constantes,
- (iii) $\phi_t = [\phi_{1t}, \phi_{2t}, \dots, \phi_{pt}]'$, $(\phi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que $E[\phi_t] = 0$, et les suite (ε_t) , (ϕ_t) sont indépendantes,
- (iv) Il n'existe aucun vecteur constant non nul Z tel que $Z'Y_t$ est purement linéaire déterministe.

La relation (2.14) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\underline{Y}_t = [A + \Phi_t] \underline{Y}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t \quad (2.15)$$

tels que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_t = \begin{pmatrix} \phi_{1t} & \cdots & \phi_{pt} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_t = (Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p+1})', \quad \underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t, 0, \dots, 0)'$$

$$E[\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t'] = \sigma_\varepsilon^2 J = \Omega, \quad E[\Phi_t \otimes \Phi_t'] = C.$$

où A , Φ_t et Ω sont des matrices carrées d'ordre p et \underline{Y}_t , $\underline{\varepsilon}_t$ sont des vecteurs de dimension $p \times 1$.

2.2.1 Conditions de stationnarité

Théorème 2.2.1 *Le processus $\{Y_t, t = 1 - T, \dots, 0, 1, \dots\}$ généré par (2.14) est stationnaire si et seulement si*

$$\mu_1 = \mu_0 \text{ et } V_{1,1} = V_{0,0}, \text{ où } \mu_i = E[\underline{Y}_i] \text{ et } V_{i,j} = E[\underline{Y}_i \underline{Y}_j'].$$

Preuve. Il est clair que la condition nécessaire devient directement de la constricton de \underline{Y}_t .

Pour démontrer la condition suffisante, on suppose que \underline{Y}_0 est indépendant de $\{\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots\}$ et $\{\phi_k, k = 1, \dots, p\}$, ainsi que $\mu_t = \mu$ pour $t = 0, 1, \dots, h$ et $V_{t,t-s} = V_{t-u, t-s-u} = W_s$, $t = s+1, \dots, h$, $u = 1, \dots, t-s$ et $s = 0, \dots, h$. Dans le cas $h = 1$, ces conditions se réduisent à $\mu_1 = \mu_0 = \mu$ et $V_{1,1} = V_{0,0} = W_0$. En utilisant (2.15) on obtient

$$\begin{aligned} \mu_{h+1} &= E[\underline{Y}_{h+1}] = E[(A + \Phi_{h+1})\underline{Y}_h + \underline{\varepsilon}_{h+1}] \\ &= AE[\underline{Y}_h] = AE[\underline{Y}_{h-1}] = \mu_h \end{aligned}$$

Sachant que Φ_{h+1} et $\underline{\varepsilon}_{h+1}$ sont indépendants de $\{\underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_h\}$ et \underline{Y}_0 .

Pour $1 \leq s \leq h$,

$$\begin{aligned} V_{h+1, h+1-s} &= E[\underline{Y}_{h+1} \underline{Y}'_{h+1-s}] \\ &= E[(A + \Phi_{h+1})\underline{Y}_h + \underline{\varepsilon}_{h+1}] \underline{Y}'_{h+1-s}] \\ &= AE[\underline{Y}_h \underline{Y}'_{h+1-s}] = AE[\underline{Y}_{h-1} \underline{Y}'_{h-s}] \\ &= E[\underline{Y}_h \underline{Y}'_{h-s}] = V_{h, h-s} \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} V_{h+1,h+1} &= E [\underline{Y}_{h+1} \underline{Y}'_{h+1}] \\ &= E \left[([A + \Phi_{h+1}] \underline{Y}_h + \varepsilon_{h+1}) ([A + \Phi_{h+1}] \underline{Y}_h + \varepsilon_{h+1})' \right] \end{aligned}$$

par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} Vec [V_{h+1,h+1}] &= Vec E \left[[A + \Phi_{h+1}] \underline{Y}_h \underline{Y}'_h [A + \Phi_{h+1}]' + \varepsilon_{h+1} \varepsilon'_{h+1} \right] \\ &= E \left[[A + \Phi_{h+1}] \otimes [A + \Phi_{h+1}] Vec [\underline{Y}_h \underline{Y}'_h] + Vec [\varepsilon_{h+1} \varepsilon'_{h+1}] \right] \\ &= E [A \otimes A + \Phi_{h+1} \otimes \Phi_{h+1}] E [Vec [\underline{Y}_h \underline{Y}'_h]] + Vec [\sigma_\varepsilon^2 J] \\ &= [A \otimes A + C] Vec [V_{h,h}] + Vec [\Omega] \\ &= [A \otimes A + C] Vec [V_{h-1,h-1}] + Vec [\Omega] \\ &= Vec [V_{h,h}] \end{aligned}$$

■

On note que \mathcal{F}_t , est une σ -Algèbre engendrée par les suites des variables aléatoires $\{\phi_{kt}\}_{k=1}^p \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$.

Corollaire 2.2.1 *Le processus $\{Y_t\}$ généré par (2.14) est stationnaire si et seulement si $\mu = E [\underline{Y}_0]$ vérifié $A\mu = \mu$ et $V = E [\underline{Y}_0 \underline{Y}'_0]$ satisfaisant*

$$Vec [V] = [A \otimes A + C] Vec [V] + Vec [\Omega] \quad (2.16)$$

Preuve. D'après la démonstration du théorème précédent on a :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= E [\underline{Y}_1] = A\mu_0 \\ Vec [V_{1,1}] &= E [\underline{Y}_1 \underline{Y}'_1] = [A \otimes A + C] Vec [V_{0,0}] + Vec [\Omega]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

d'où le résultat. ■

La solution de l'équation (2.16) joue un rôle important pour établir des conditions d'existence de solutions stationnaires doublement-infinies de l'équation (2.14). Il convient de noter que la solution V de l'équation (2.16) doit être définie non négative, étant une matrice de covariance, et définie positive si l'hypothèse (iv) doit être satisfaite. En outre, il ya une solution de (2.16) si $(I - A \otimes A - C)$ est inversible, i.e. $Vec [V] = [I - A \otimes A - C]^{-1} Vec [\Omega]$, mais il peut exister une solution, même si $(I - A \otimes A - C)$ n'est pas inversible.

Les conditions de stationnarité pour un modèle autorégressifs à coefficients aléatoires d'ordre p , ont été également étudiées par Andel (1976).

Théorème 2.2.2 *Si la condition suivante est vérifiée*

$$z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p \neq 0 \text{ pour } |z| \geq 1 \quad (2.18)$$

alors il existe une solution unique de l'équation

$$B^+ = AB^+A' + \Omega \quad (2.19)$$

et cette solution est une matrice définie positive et explicitement donnée par

$$B^+ = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \Omega A'^k \quad (2.20)$$

Preuve. Sachant que : $z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p$ est le polynôme caractéristique de la matrice A , alors si la condition (2.18) est vérifiée, ceci implique que les valeurs propres de la matrice A se trouvent à l'intérieur du cercle unité. En introduisant l'opérateur Vec on obtient

$$Vec [B^+] = A^{\otimes 2} Vec [B^+] + Vec [\Omega] \quad (2.21)$$

où la matrice $A^{\otimes 2}$ est de dimension $p^2 \times p^2$. Sachant que les valeurs propres de $A^{\otimes 2}$ sont de la forme $\lambda_i \lambda_j$ où λ_i et λ_j sont celles de la matrice A , et $|\lambda_i| < 1$ pour tout i , il résulte que les valeurs propres de $A^{\otimes 2}$ sont à l'intérieur du cercle unité, alors $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}]$ est inversible, par conséquent l'équation (2.14) admet une solution donnée par

$$Vec [B^+] = [I_{p^2} - A^{\otimes 2}]^{-1} Vec [\Omega]$$

En développant la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}]^{-1}$ en séries on obtient

$$\begin{aligned} Vec [B^+] &= [I_{p^2} - A^{\otimes 2}]^{-1} vec [\Omega] \\ &= [I_p^{\otimes 2} + A^{\otimes 2} + A^{\otimes 4} + \dots] vec [\Omega] \\ &= I_p^{\otimes 2} Vec [\Omega] + A^{\otimes 2} Vec [\Omega] + \dots \\ &= Vec [I_p \Omega I_p] + Vec [A \Omega A'] + Vec [A^2 \Omega A'^2] + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Vec [A^k \Omega A'^k] = Vec \left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k \Omega A'^k \right] \end{aligned}$$

d'où : $B^+ = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \Omega A'^k$. ■

2.2. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE RCA(P)

Théorème 2.2.3 *La condition $Var [Y_1, \dots, Y_p] = Var [Y_2, \dots, Y_{p+1}]$ est vérifiée si et seulement si la matrice $B = Var [Y_1, \dots, Y_p]$ est une solution de l'équation*

$$B = ABA' + [\sigma^2 + Tr(\Delta^* B)] J \quad (2.22)$$

où $\Delta^* = Var [A_p, \dots, A_1]$.

Preuve. On note que :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} Y_{p+1} \\ \vdots \\ Y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y_p \\ \vdots \\ Y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{p+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

On pose : $A = (A_{ij})$, $Y = (Y_1, \dots, Y_p)'$, $Z_i = \sum_{h=1}^p A_{ih} Y_h$, et $Z = (Z_1, \dots, Z_p)'$, on va calculer

$$Cov [Z_i, Z_j] = \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^p Cov [A_{ih} Y_h, A_{jk} Y_k]$$

(A_{ij}) et (Y_k) , $k = 1, \dots, p$ sont indépendants et $E \{Y_t\} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & Cov [A_{ih} Y_h, A_{jk} Y_k] \\ &= E [A_{ih} Y_h A_{jk} Y_k] - E [A_{ih} Y_h] E [A_{jk} Y_k] \\ &= E [A_{ih} A_{jk}] E [Y_h Y_k] - E [A_{ih}] E [Y_h] E [A_{jk}] E [Y_k] \\ &= [Cov [A_{ih}, A_{jk}] + E [A_{ih}] E [A_{jk}]] Cov [Y_h, Y_k] \\ &= Cov [A_{ih}, A_{jk}] Cov [Y_h, Y_k] + E [A_{ih}] Cov [Y_h, Y_k] E [A_{jk}] \end{aligned}$$

On note que : $H_{ij} = (Cov [A_{ih}, A_{jk}])_{h,k=1}^p$, $B_{hk} = Cov [Y_h, Y_k]$.

Sachant que $B = (B_{hk})_{h,k=1}^p$, on a :

$$\begin{aligned} Cov [Z_i, Z_j] &= \sum_h \sum_k Cov [A_{ih}, A_{jk}] B_{hk} + \sum_h \sum_k E [A_{ih}] B_{hk} E [A_{jk}] \\ &= Tr (H_{ij} B) + \sum_{h=1} \sum_{k=1} E [A_{ih}] B_{hk} E [A_{jk}] \end{aligned}$$

Il est clair que

$$H_{ij} = \begin{cases} \Delta^* & \text{pour } i = j = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $E \{A\} = A$, par conséquent

$$Var [Z] = Tr (\Delta^* B) J + ABA$$

Ainsi on a

$$Var [0, \dots, 0, \varepsilon_{p+1}] = \sigma^2 J$$

on pose $S = \left(Y_2, \dots, Y_p, \sum_{k=1}^p A_k Y_k \right)'$, alors

$$Var (S, [0, \dots, 0, \varepsilon_{p+1}]') = 0$$

D'après la relation (2.23) on a :

$$B = Var [Y_2, \dots, Y_{p+1}] = ABA' + [\sigma^2 + Tr (\Delta^* B)] J$$

■

Théorème 2.2.4 *On suppose que*

$$z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p \neq 0 \text{ pour } |z| \geq 1 \quad (2.24)$$

si la condition suivante est vérifiée

$$1 - Tr (\Delta^* B^+) > 0 \quad (2.25)$$

alors (2.22) admet une solution unique, définie positive donnée par

$$B = \sigma^2 [1 - Tr (\Delta^* B^+)]^{-1} B^+ \quad (2.26)$$

Preuve. Les racines de l'équation $z^p - A_1 z^{p-1} - \dots - A_p \neq 0$ sont celles du polynôme caractéristique de la matrice A , si (2.24) est vérifiée, alors (2.20) est la solution unique de l'équation (2.19).

Pour tout nombre arbitraire u on a

$$uB^+ = AuB^+A' + J$$

la matrice uB^+ est l'une des solutions de l'équation (2.22) si et seulement si

$$u = \sigma^2 + Tr(\Delta^* uB^+)$$

Si (2.25) est vérifiée alors la matrice B donnée par (2.26) est l'unique solution de l'équation (2.22) et cette matrice est définie positive. ■

Corollaire 2.2.2 *Les conditions (2.24) et (2.25) sont nécessaires et suffisantes pour que le processus $\{Y_t\}$ soit stationnaire.*

2.2.2 Exemple

Nous considérons un modèle $AR(1)$ à coefficient aléatoire

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{2.27}$$

telles que $E[A_1] = \beta$ et $Var[A_1] = \Delta$.

On suppose que $|A_1| < 1$ p.s, alors $\beta < 1$ alors la condition (2.24) est vérifiée. Dans ce cas $A = (\beta)$ et l'équation (2.22) devient

$$B = \beta^2 A + \sigma^2 + \Delta B$$

et sa solution

$$B = [1 - (\beta^2 + \Delta)]^{-1} \sigma^2$$

sachant que

$$1 > E[A_1^2] = \beta^2 + \Delta$$

alors la solution existe toujours et elle est positive, et en vertu du *Corollaire* précédent le modèle est stationnaire sous la condition $|A_1| < 1$ p.s.

2.2.3 Solutions stationnaires

Essayons maintenant de trouver sous quelles conditions l'équation (2.14) admet une solution stationnaire.

Soit \mathcal{F}_t : σ -Algèbre engendrée par $\{(\varepsilon_s), (\phi_s) ; s < t\}$.

Dans une tentative de trouver une solution \mathcal{F}_t -mesurable de l'équation (2.14), il est avantageux d'obtenir un développement pour Y_t en termes de fonctions mesurables sur \mathcal{F}_t , en itérant l'équation (2.15).

On pose : $S_{t,r} = \prod_{k=0}^r [A + \Phi_{t-k}]$; $R_{t,r} = S_{t,r} \underline{Y}_{t-r-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_t &= [A + \Phi_t] \{ [A + \Phi_{t-1}] \underline{Y}_{t-2} + \underline{\varepsilon}_{t-1} \} + \underline{\varepsilon}_t \\
 &= \underline{\varepsilon}_t + [A + \Phi_t] \underline{\varepsilon}_{t-1} + [A + \Phi_t] [A + \Phi_{t-1}] \underline{Y}_{t-2} \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_{j=0}^r \prod_{k=0}^{j-1} [A + \Phi_{t-k}] \underline{\varepsilon}_{t-j} + \prod_{k=0}^r [A + \Phi_{t-k}] \underline{Y}_{t-r-1} \\
 &= \sum_{j=0}^r S_{t,j-1} \underline{\varepsilon}_{t-j} + R_{t,r} \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

On note que $E [\underline{\varepsilon}_{t-i} \underline{\varepsilon}'_{t-j}] = 0$ pour $i \neq j$, alors on a

$$\begin{aligned}
 \text{Vec} E [(\underline{Y}_t - R_{t,r}) (\underline{Y}_t - R_{t,r})'] &= \text{Vec} E \left[\left(\sum_{j=0}^r S_{t,j-1} \underline{\varepsilon}_{t-j} \right) \left(\sum_{i=0}^r S_{t,i-1} \underline{\varepsilon}_{t-i} \right)' \right] \\
 &= \text{Vec} E \left[\sum_{j=0}^r S_{t,j-1} \underline{\varepsilon}_{t-j} \underline{\varepsilon}'_{t-j} S'_{t,j-1} \right] \\
 &= E \left[\sum_{j=0}^r (S_{t,j-1} \otimes S'_{t,j-1}) \text{Vec} (\underline{\varepsilon}_{t-j} \underline{\varepsilon}'_{t-j}) \right] \\
 &= E \sum_{j=0}^r \left[\prod_{k=0}^{j-1} [(A + \Phi_{t-k}) \otimes (A + \Phi_{t-k})] \text{Vec} (\underline{\varepsilon}_{t-j} \underline{\varepsilon}'_{t-j}) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^r (A \otimes A + C)^j \text{Vec} (\Omega) \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

Lemme 2.2.1 Si $\sum_{k=0}^j [A \otimes A + C]^k \text{Vec} [J \otimes \sigma^2]$ converge lorsque $j \rightarrow \infty$ et

2.2. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE RCA(P)

H est une matrice définie positive telle que

$$Vec[H] = Vec(\Omega) + C \sum_{k=0}^{\infty} [A \otimes A + C]^k Vec(\Omega) \quad (2.30)$$

alors les valeurs propres de A se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

Preuve. Soit la matrice W définie par

$$Vec[W] = \sum_{k=0}^{\infty} [A \otimes A + C]^k Vec[J \otimes \sigma^2]$$

Alors

$$\begin{aligned} [A \otimes A + C] Vec[W] &= \sum_{k=1}^{\infty} [A \otimes A + C]^k Vec[J \otimes \sigma^2] \\ &= Vec[W] - Vec[J \otimes \sigma^2] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Vec[W] &= [A \otimes A] Vec[W] + (CVec[W] + Vec[J \otimes \sigma^2]) \\ &= [A \otimes A] Vec[W] + Vec[J \otimes H] \end{aligned}$$

comme $CVec[W] = Vec[J \otimes (CVec(W))]$, alors $W = AWA' + J \otimes H$
Soit λ une valeur propre de la matrice A et $z' \neq 0$ un vecteur propre à gauche associé à λ tel que $z = (z_1, \dots, z_p)'$, alors

$$\begin{aligned} z'W\bar{z} &= z'AWA'\bar{z} + z'[J \otimes H]\bar{z} \\ &= |\lambda|^2 z'W\bar{z} + z'_p H\bar{z}_p \end{aligned}$$

alors $(1 - |\lambda|^2) z'W\bar{z} = z'_p H\bar{z}_p$.

Sachant que $\sum_{k=1}^r [A \otimes A + \tilde{C}]^k Vec[J \otimes \sigma^2]$ est un Vec d'une matrice définie non négative, alors sa limite est aussi la matrice W qui est non négative, et $zW\bar{z} \geq 0$. Si $z'_p H\bar{z}_p > 0$ alors $z_p \neq 0$, par conséquent $|\lambda| < 1$.

Maintenant on suppose que $z_p = 0$, sachant que z' est une valeur propre à gauche de A alors

$$(z_1, \dots, z_p) \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda (z_1, \dots, z_p)$$

ceci est réduit au système d'équations suivantes

$$\begin{cases} z_1 A_1 = \lambda z_1 \\ z_i + z_p A_{p-1} = \lambda z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p-1 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$, la première équation implique que $z_1 = 0$, comme $z_p = 0$ et les équations restantes ont comme leur seule solution $z_2 = \dots = z_{p-1} = 0$, donc $z \neq 0$, par conséquent $|\lambda| < 1$. ■

Théorème 2.2.5 *Afin qu'il existe une solution stationnaire unique \mathcal{F}_t -mesurable de l'équation (2.15), vérifiant (i)-(iv), il est nécessaire que*

$$\sum_{j=1}^r [A \otimes A + C]^j \text{Vec} [J \otimes \sigma^2]$$

converge lorsque $r \rightarrow \infty$, et suffisant que cela se produit avec la matrice définie positive H telle que

$$\text{Vec} [H] = \text{Vec} [\Omega] + C \sum_{j=1}^{\infty} [A \otimes A + C]^j \text{Vec} [\Omega].$$

Si $[A \otimes A + C]$ n'a pas une valeur propre unitaire, alors cette dernière condition est à la fois nécessaire et suffisante, et il existe une solution stationnaire unique, donnée par

$$\underline{Y}_t = \underline{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} [A + \Phi_t]^k \underline{\varepsilon}_{t-j}$$

Preuve. Voir [37]. ■

Corollaire 2.2.3 *Afin qu'il existe une solution stationnaire unique \mathcal{F}_t -mesurable de l'équation (2.15) il est nécessaire et suffisant que toutes les valeurs propres de la matrice $[A \otimes A + C]$ soient à l'intérieur du cercle unité.*

Preuve. On peut représenter la matrice $(A \otimes A + C)$ sous la forme canonique de Jordan

$$(A \otimes A + C) = P \Lambda P^{-1}$$

où Λ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des valeurs propres de $(A \otimes A + C)$.

Il est nécessaire seulement de démontrer que les lignes de P^{-1} qui correspondent à un élément diagonal λ de Λ pour que $|\lambda| \geq 1$ ne peuvent pas être orthogonales à $Vec[J \otimes \sigma^2]$.

Soit z' l'un de ces lignes de P^{-1} lequel est un vecteur propre à gauche de $(A \otimes A + C)$, en notant qu'il existe au moins un tel vecteur.

Si $z' Vec[J \otimes \sigma^2] = 0$ alors le premier élément de z est non nul, sachant que le seul élément non nul de $(J \otimes \sigma^2)$ est σ^2 , ainsi que C a seulement une ligne non nulle (la première ligne) qui est C .

D'où : $z' (A \otimes A + \tilde{C}) = z' (A \otimes A)$, tandis que $z' (A \otimes A + \tilde{C}) = \lambda z'$ et donc λ est aussi une valeur propre de $(A \otimes A)$. En vertu du lemme précédent toutes les valeurs propres de A se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

Soit $P\Lambda P^{-1}$ la forme canonique de Jordan de la matrice A et $[\lambda_1, \dots, \lambda_p] = diag(\Lambda)$.

Si λ est une valeur propre de $(A \otimes A)$ alors $\det[\lambda I_{p^2} - A \otimes A] = 0$, mais

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_{p^2} - A \otimes A] &= \det[\lambda I_{p^2} - (P\Lambda P^{-1}) \otimes (P\Lambda P^{-1})] \\ &= \det[\lambda I_{p^2} - (P \otimes P)(\Lambda \otimes \Lambda)(P^{-1} \otimes P^{-1})] \\ &= \det[\lambda (P \otimes P)(P \otimes P)^{-1} - (P \otimes P)(\Lambda \otimes \Lambda)(P \otimes P)^{-1}] \\ &= \det[(P \otimes P)(\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda)(P \otimes P)^{-1}] \\ &= \det(P \otimes P) \det(\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda) \det[(P \otimes P)^{-1}] \\ &= \det[\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda] = \prod_{i,j=1}^p (\lambda - \lambda_i \lambda_j) \end{aligned}$$

Sachant que les éléments sous-diagonal de $(\lambda I_{p^2} - \Lambda \otimes \Lambda)$ sont non nuls, alors $\lambda = \lambda_i \lambda_j$ pour certains i et j où λ_i, λ_j sont des valeurs propres de A et sachant que $|\lambda_i| < 1$, alors $|\lambda| = |\lambda_i| |\lambda_j| < 1$. ■

2.2.4 Stationnarité stricte

Dans les sections précédentes on n'a rien supposé sur $\{\varepsilon_t\}$ et $\{\phi_t\}$ seulement que sont indépendantes, stationnaires du second d'ordre et qui sont mutuellement indépendants. Si $\{\varepsilon_t\}$ et $\{\phi_t\}$ sont aussi deux suites de variables aléatoires identiquement distribuées dans quel cas elles sont aussi strictement stationnaires et ergodiques, il est possible d'inférer des propriétés plus fortes pour la solution \mathcal{F}_t -mesurable, $\{y_t\}$ de l'équation (2.14).

Théorème 2.2.6 *On suppose que les suites $\{\varepsilon_t\}$ et $\{\phi_t\}$ vérifient les suppositions (i) et (iii) et qu'elles sont identiquement distribuées. S'il existe une unique solution $\{Y_t\}$ stationnaire au second d'ordre et \mathcal{F}_t -mesurable de l'équation (2.14), alors cette solution est aussi strictement stationnaire et ergodique.*

Preuve. L'unique solution stationnaire au second d'ordre et \mathcal{F}_t -mesurable, $\{Y_t\}$ de l'équation (2.14) donnée par

$$\underline{Y}_t = \underline{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} [A + \Phi_{t-k}]^j \underline{\varepsilon}_{t-j}$$

est une limite en quadratique moyenne, par conséquent en probabilité d'une suite de variables aléatoires \mathcal{F}_t -mesurable. Comme la solution a la même forme fonctionnelle pour chaque t , $\{\underline{Y}_t\}$ doit être strictement stationnaire, par conséquent l'est aussi $\{Y_t\}$.

Sachant que $\{\phi_t, \varepsilon_t\}$ est une suite *iid* alors elle est ergodique.

Ainsi que la σ -Algèbre \mathcal{G}_t engendrée par $\{Y_t, Y_{t-1}, \dots\}$ est incluse dans \mathcal{F}_t , si $\{Y_t\}$ est une suite \mathcal{F}_t -mesurable de variables aléatoires.

Soient \mathcal{G} et \mathcal{F} les petites σ -Algèbres contenant respectivement $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_t$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}_t$, il résulte que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ et $\{Y_t\}$ est ergodique. ■

Les résultats de cette section, ne couvrent pas complètement le cas où $(A \otimes A + C)$ a une valeur propre de l'unité. Cela est dû à l'absence éventuelle de l'unicité de la solution, et le fait que $(I - A \otimes A - C)$ n'est pas inversible.

Si $\sum_{k=0}^j [A \otimes A + C]^k \text{Vec}[\Omega]$ converge lorsque $j \rightarrow \infty$, il existe une solution stationnaire et \mathcal{F}_t -mesurable de (2.14), quelles que soient les valeurs propres de $(A \otimes A + C)$. Il peut, cependant, exister d'autres solutions stationnaires si $(A \otimes A + C)$ a une valeur propre de l'unité.

2.2.5 Exemple

Il est possible de construire un exemple pour lequel l'équation (2.14) génère un processus $\{Y_t, t = 1, 2, 3, \dots\}$ stationnaire satisfaisant les conditions (i) – (iv), et dont la matrice $(A \otimes A + C)$ a une valeur propre de l'unité.

Pour illustrer cette propriété, on considère le modèle suivant

$$Y_t = (A + A_t) Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

2.2. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE RCA(P)

où Y_t, ε_t sont deux vecteurs aléatoires tels que

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_t \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \delta_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E[a_t] = E[\delta_t] = 0, \quad E[a_t^2] = 1, \quad E[\delta_t^2] = \varphi, \quad |a| < 1,$$

a_t et δ_t sont indépendantes. De plus, soit $E[Y_0] = 0$ et $Vec[Y_0 Y_0'] = (\frac{\varphi}{1-a^2}, 0, 0, C)$, où $C > 0$.

Alors $Vec[\Omega] = \varphi(1, 0, 0, 0)'$, les valeurs propres de A se trouvent dans le cercle unité et

$$(A \otimes A + C) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ses valeurs propres sont $0, 0, a^2$ et 1 . D'une part on a

$$\begin{aligned} VecE[Y_1 Y_1'] &= (A \otimes A + C) VecE[Y_0 Y_0'] + Vec[\Omega] \\ &= \left(\frac{\varphi a^2}{1-a^2}, 0, 0, C \right) + (\varphi, 0, 0, A) \\ &= \left(\frac{\varphi}{1-a^2}, 0, 0, C \right) = VecE[Y_0 Y_0']. \end{aligned}$$

D'autre part on a : $E[Y_1] = aE[Y_1] = 0 = E[Y_0]$. Alors le processus $\{Y_t, t = 1, 2, 3, \dots\}$ est stationnaire.

Chapitre 3

Inférence statistique

Dans ce chapitre nous faisons l'inférence statistique dans la classe de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires par l'application de certaines méthodes usuelles d'estimation, et nous étudions ensuite le comportement asymptotique d'estimateurs obtenus.

3.1 La méthode des moindres carrés ordinaire

Dans cette section on s'intéresse à trouver l'estimateur des moindres carrés ordinaires d'un modèle défini par (2.14). On retient les suppositions (i)-(iv), et on rajoute :

(v) Les coefficients A_k , $k = 1, \dots, p$ et C sont supposés de sorte qu'il existe une solution unique $\{Y_t\}$ du second d'ordre et \mathcal{F}_t -mesurable vérifiant l'équation (2.14).

(vi) ε_t ne peut prendre presque sûrement que deux valeurs seulement.

Soient $\sigma_\varepsilon^2 \neq 0$ et $\Sigma = E[\phi_t' \phi_t]$, il est clair que

$$Vec[\Sigma] = E[\phi_t' \otimes \phi_t'] = [E[\phi_t \otimes \phi_t]]' = C'$$

On a vu que la condition (vi) est vérifiée si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A se trouvent à l'intérieur du cercle unité, ou encore équivalent à $1 - \sum_{i=1}^p A_i z^i \neq 0$ pour tout $|z| \geq 1$, lequel est démontré par *Andel* (1971) i.e. $C\Lambda < 1$, où Λ est la dernière colonne de $(I - A \otimes A)^{-1}$. Soit W une matrice d'ordre $p \times p$ tel que $\Lambda = Vec[W]$, alors la condition $C\Lambda < 1$

peut être remplacé par $Tr [\Sigma W]$ car

$$C\Lambda = (Vec [\Sigma])' Vec [W] = Tr [\Sigma W]$$

Le modèle (2.14) devient

$$Y_t = \sum_{k=1}^p A_k Y_{t-k} + \left(\sum_{k=1}^p \phi_k Y_{t-k} + \varepsilon_t \right)$$

ou bien

$$Y_t = \underline{A}' \underline{Y}_{t-1} + u_t \quad (3.1)$$

où : $\underline{A} = (A_1, \dots, A_p)'$ et $u_t = \phi_t \underline{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$.

3.1.1 Procédure d'estimation

Sachant que la matrice Σ est symétrique, alors on a besoin d'estimer seulement $\Xi = Vech [\Sigma]$.

D'abord on va estimer le coefficient $\underline{A} = (A_1, \dots, A_p)'$. On a

$$E [u_t / \mathcal{F}_{t-1}] = E [\phi_t] \underline{Y}_{t-1} + E [\varepsilon_t] = 0$$

Sachant que ϕ_k et ε_t sont indépendantes de $\{\phi_1, \dots, \phi_p, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$, alors

$$\begin{aligned} E [u_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}] &= E [\varepsilon_t^2] + 2E [\varepsilon_t \phi_t \underline{Y}_{t-1} / \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad + E \left[[\phi_t \underline{Y}_{t-1}]^2 / \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + 2E [\varepsilon_t] E [\phi_t \underline{Y}_{t-1} / \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad + E [\underline{Y}'_{t-1} \phi_t \phi_t \underline{Y}_{t-1} / \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \underline{Y}'_{t-1} E [\phi_t \phi_t] \underline{Y}_{t-1} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \underline{Y}'_{t-1} \Sigma \underline{Y}_{t-1} \end{aligned}$$

Alors u_t est une différence de martingale conditionnellement hétéroscédastique.

$$\begin{aligned} E [u_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}] &= \sigma_\varepsilon^2 + [\underline{Y}'_{t-1} \otimes \underline{Y}'_{t-1}] Vec [\Sigma] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + [Vec [\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}]]' K'_p Vech [\Sigma] \end{aligned}$$

on pose : $\Xi = Vech [\Sigma]$ et $\underline{z}_t = K_p [Vec [\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}]]$, on a

$$E [u_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_\varepsilon^2 + \underline{z}'_t \Xi = \sigma_\varepsilon^2 + \Xi' \underline{z}_t \quad (3.2)$$

Si on se donne l'ensemble des observations $\{Y_{1-p}, \dots, Y_0\}$, on obtient l'estimateur des moindres carrés $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$ de \underline{A} en minimisant $\sum_{t=1}^T u_t^2$ par rapport à \underline{A} dans la relation (3.1), alors on a

$$\hat{\underline{A}}_T^{(LS)} = \left\{ \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} Y_t \quad (3.3)$$

D'après la relation (3.1) on a : $\hat{u}_t = Y_t - \hat{\underline{A}}_T^{(LS)'} \underline{Y}_{t-1}$, $t = 1, \dots, T$.

Soit $\eta_t = u_t^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \underline{z}'_t \Xi$, alors les estimateurs $\hat{\Xi}$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ de Ξ et σ_ε^2 sont obtenus en minimisant $\sum_{t=1}^T \eta_t^2$ par rapport Ξ et σ_ε^2 , et on a

$$\hat{\Xi} = \left\{ \sum_{t=1}^T [\underline{z}_t - \bar{z}] [\underline{z}_t - \bar{z}]' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 [\underline{z}_t - \bar{z}] \quad (3.4)$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 - \hat{\Xi}' \bar{z} \quad (3.5)$$

3.1.2 Comportement asymptotique

Dans ce paragraphe on va établir que les estimateurs $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$, $\hat{\Xi}$ et $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ définis par (3.3), (3.4), et (3.5) sont consistants, alors il est convenable d'abord d'obtenir les propriétés asymptotiques concernant l'estimateur $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$, ensuite celles des $\hat{\Xi}$ et $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ car ces estimateurs sont obtenus en dérivant \hat{u}_t .

Théorème 3.1.1 *Soit $\{Y_t\}$ un processus RCA(p) strictement stationnaire \mathcal{F}_t - mesurable vérifie l'équation (2.14) et soit $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$ donné par la relation (3.3) alors sous les conditions (i) – (vi), l'estimateur $\hat{\underline{A}}_T^{(LS)}$ converge presque sûrement vers \underline{A} .*

De plus si $E[Y_t^4] < \infty$ alors $T^{1/2} \left(\hat{\underline{A}}_T^{(LS)} - \underline{A} \right)$ lorsque $T \rightarrow \infty$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$\sigma_\varepsilon^2 \Upsilon^{-1}(0) + \Upsilon^{-1}(0) E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \Xi' \underline{z}_t] \Upsilon^{-1}(0) \quad (3.6)$$

où : $\Upsilon(0) = E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}]$.

3.1. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ORDINAIRE

Preuve. D'après la relation (4.3) on a

$$\begin{aligned} \hat{A}_T^{(LS)} - \underline{A} &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \right\}^{-1} \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} Y_t \right\} - \underline{A} \\ &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \left\{ \underline{Y}_{t-1} Y_t - \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \underline{A} \right\} \\ &= \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} u_t \end{aligned}$$

Le processus est strictement stationnaire et ergodique, par conséquent $\left\{ \underline{Y}_t \underline{Y}'_t \right\}$

et $\left\{ \underline{Y}_{t-1} u_t \right\}$ sont aussi strictement stationnaires et ergodiques.

Alors $\Upsilon(0) = E[\underline{Y}_t \underline{Y}'_t]$ est bornée par (vi), ainsi que

$$\begin{aligned} E[\underline{Y}_{t-1} u_t] &= E[E[\underline{Y}_{t-1} u_t] / \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E[\underline{Y}_{t-1}] E[u_t / \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \end{aligned}$$

sachant que $E[u_t / \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ et \underline{Y}_{t-1} est une fonction \mathcal{F}_{t-1} -mesurable, alors

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}$$

converge *p.s* vers $\Upsilon(0)$ et $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} u_t$ converge *p.s* vers 0, par conséquent

$\left(\hat{A}_T^{(LS)} - \underline{A} \right)$ converge *p.s* vers 0.

Maintenant si ψ est un vecteur de p composantes, alors on a :

$$\begin{aligned} E\left[[\psi' \underline{Y}_{t-1} u_t]^2 \right] &= E\left[E\left[[\psi' \underline{Y}_{t-1} u_t]^2 \right] / \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= E\left[[\psi' \underline{Y}_{t-1}]^2 E[u_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}] \right] \\ &= E\left[[\psi' \underline{Y}_{t-1}]^2 [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t] \right] \end{aligned}$$

d'après la relation (3.2) cette espérance existe si $E[Y_t^4] < \infty$, car les composantes de $[\psi' \underline{Y}_{t-1}]^2 [\Xi' z_t]$ sont en fonction de Y_t^4 et $E\{\psi' \underline{Y}_{t-1} u_t / \mathcal{F}_{t-1}\} = 0$,

alors en vertu du *Théorème de Billingsley* : $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T [\psi' \underline{Y}_{t-1}] u_t$ admet une distribution qui converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$E\left[[\psi' \underline{Y}_{t-1}]^2 [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t] \right] = \psi' E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t]] \psi$$

Pour tout $\psi \in \mathbb{R}^p$ montre que $E[Y_t^4] < \infty$, donc $T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} u_t$ converge en distribution vers une distribution normale multidimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t]]$$

par conséquent $T^{1/2} (\hat{A}_T^{(LS)} - A)$ converge en distribution vers une distribution normale de moyenne nulle et d'une matrice de covariance :

$$\begin{aligned} & \Upsilon^{-1}(0) E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t]] \Upsilon^{-1}(0) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \Upsilon^{-1}(0) \Upsilon(0) \Upsilon^{-1}(0) + \Upsilon^{-1}(0) E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \Xi' z_t] \Upsilon^{-1}(0) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \Upsilon^{-1}(0) + \Upsilon^{-1}(0) E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \Xi' z_t] \Upsilon^{-1}(0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 3.1.1 *Sous les conditions (i) - (vii), il existe un vecteur ψ de $p(p+1)/2$ composantes tel que $\phi[z_t - E[z_t]] = 0$ presque partout pour tout t .*

Preuve. Voir [37]. \blacksquare

Maintenant, pour étudier le comportement asymptotique des estimateurs $\hat{\Xi}_\omega$ et $\hat{\sigma}_\omega^2$ on a besoin de remplacer $\hat{u}_t(\omega)$ par $u_t(\omega)$ dans les relations (3.4) et (3.5) on obtient

$$\bar{\Xi} = \left\{ \sum_{t=1}^T [z_t - \bar{z}] [z_t - \bar{z}]' \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T u_t^2 [z_t - \bar{z}] \quad (3.7)$$

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t^2 - \bar{\Xi}' \bar{z} \quad (3.8)$$

Lemme 3.1.2 $(\hat{\Xi} - \Xi)$ et $(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2)$ convergent presque sûrement vers zéro si :

$$E[Y_t^4] < \infty$$

tandis que $T^{1/2} (\hat{\Xi} - \Xi)$ et $T^{1/2} (\hat{\sigma}_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2)$ convergent en probabilité vers zéro.

Preuve. Voir [37]. \blacksquare

3.1. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ORDINAIRE

Théorème 3.1.2 Soit $\{Y_t\}$ un processus $RCA(p)$ strictement stationnaire \mathcal{F}_t -mesurable vérifiant l'équation (2.8), sous les conditions (i) – (vi), $\hat{K} = [\hat{A}_T^{(LS)'}, \hat{\Xi}', \hat{\sigma}_\varepsilon^2]'$ converge presque sûrement vers $K = [A', \Xi', \sigma_\varepsilon^2]'$ si $E[Y_t^4] < \infty$.

De plus si $E[Y_t^8] < \infty$, alors $T^{1/2}(\hat{K} - K)$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance Ω donnée par

$$\Omega = (\Omega_{ij}) = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega'_{12} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega'_{13} & \Omega'_{23} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

où : $i, j = 1, 2, 3$, et Ω_{ij} est une matrice de dimension $p(i) \times p(j)$ avec $p(1) = p$, $p(2) = p(p+1)/2$, et $p(3) = 1$, tels que

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \sigma_\varepsilon^2 \Upsilon^{-1}(0) + \Upsilon^{-1}(0) E[\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \Xi' z_t] \Upsilon^{-1}(0) \\ \Omega_{12} &= \Upsilon^{-1}(0) E[\underline{Y}_{t-1} [z_t - E[z_t]]' u_t^3] R^{-1} \\ \Omega_{13} &= \Upsilon^{-1}(0) E[\underline{Y}_{t-1} [I - [z_t - E[z_t]]]' R^{-1} E[z_t] u_t^3] \\ \Omega_{22} &= R^{-1} E\left[[z_t - E[z_t]] [z_t - E[z_t]]' \left[u_t^4 - [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t]^2\right]\right] R^{-1} \\ \Omega_{23} &= R^{-1} E\left[[z_t - E[z_t]] \left[u_t^4 - [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t]^2\right]\right] - \Omega_{22} E[z_t] \\ \Omega_{33} &= E\left[\left[u_t^4 - [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t]^2\right]\right] \\ &\quad - 2E\left[\left[u_t^4 - [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi' z_t]^2\right] E[z_t]' R^{-1} [z_t - E[z_t]] + E[z_t]' \Omega_{22} E[z_t]\right] \end{aligned}$$

Preuve. Voir [37].

■

Corollaire 3.1.1 On obtient l'estimateur $\hat{\Omega}$ de la matrice de covariance Ω lorsque on remplace les moments théoriques par ceux empiriques dans les sous-matrices Ω_{ij} et en posant

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= Y_t - \hat{A}_T^{(LS)'} \underline{Y}_{t-1} \\ \hat{\Upsilon}(0) &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \\ \hat{\Xi} &= T^{-1} \sum_{t=1}^T [z_t - \bar{z}] [z_t - \bar{z}]' \end{aligned}$$

ce qui implique la consistance forte de cet estimateur.

3.2 La méthode du maximum de vraisemblance

Dans cette section on s'intéresse à trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance d'un processus $RCA(p)$ strictement stationnaire satisfaisant l'équation (2.14). On suppose que les conditions (i)-(vi) énoncés dans la section 1 sont vérifiées, en rajoutant

(vii) $E[\varepsilon_t^4] < \infty$ et $E[\phi_k^4] < \infty$ pour $\omega = 1, \dots, N$,

(viii) Si $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ ou Σ avait une valeur propre nulle on suppose que $\sigma_\varepsilon^2 \geq \delta_1 > 0$, tandis que la plus petite valeur propre de Σ est inférieurement bornée par δ_2 où δ_1 et δ_2 peuvent être pris aussi petits.

3.2.1 Procédure de l'estimation

On se donne l'ensemble d'observations $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\}$ du processus, on va dériver la fonction de vraisemblance conditionnellement à $\{Y_{1-p}, \dots, Y_0\}$. Soit $f_s(Y_t, \dots, Y_{t-s+1}/\Lambda_{t-s})$, désigne la densité de Y_t, \dots, Y_{t-s+1} en donnant l'événement $\Lambda_{t-s} \in \mathcal{F}_{t-s}$ qui est une σ -Algèbre.

On a :

$$E[Y_t/\underline{Y}_{t-1}] = E\left[\sum_{k=1}^p [A_k + \phi_k] Y_{t-k} + \varepsilon_t/\underline{Y}_{t-1}\right] \quad (3.9)$$

$$= A'\underline{Y}_{t-1} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} Var[Y_t/\underline{Y}_{t-1}] &= E\left[[A\underline{Y}_{t-1} + \varepsilon_t]^2/\underline{Y}_{t-1}\right] \\ &= \underline{Y}'_{t-1}\Sigma\underline{Y}_{t-1} + \sigma_\varepsilon^2 = \Xi'z_t + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

où : $\Xi = Vech[\Sigma]$ et $z_t = K_p[Vec[\underline{Y}_{t-1}\underline{Y}'_{t-1}]]$, alors

$$\begin{aligned} f_T(Y_1, \dots, Y_T/Y_0, \dots, Y_{1-p}) &= \prod_{t=1}^T f_1(Y_t/Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) \\ &= (2\pi)^{-T/2} \prod_{t=1}^T \left\{ [\sigma_\varepsilon^2 + \Xi'z_t]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \times \frac{[Y_t - A'\underline{Y}_{t-1}]^2}{\Xi'z_t + \sigma_\varepsilon^2}\right]\right\} \\ &= L_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On convient de considérer, au lieu de la maximisation de $L_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2)$, la

3.2. LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

minimisation de la fonction

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2) &= -2/T \ln \{L_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2)\} - \ln(2\pi) \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(\Xi' \underline{z}_t + \sigma_\varepsilon^2) + T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - A' \underline{Y}_{t-1}]^2}{\Xi' \underline{z}_t + \sigma_\varepsilon^2}\end{aligned}\quad (3.12)$$

La fonction $\tilde{\ell}_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2)$ est non linéaire en σ_ε^2 et Ξ .

On pose : $r = \Xi/\sigma_\varepsilon^2$ donc $\bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\varepsilon^2) = \tilde{\ell}_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2)$, alors on a

$$\bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\varepsilon^2) = \ln(\sigma_\varepsilon^2) + T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r' \underline{z}_t) + \sigma_\varepsilon^{-2} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - A' \underline{Y}_{t-1}]^2}{1 + r' \underline{z}_t}\quad (3.13)$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial A} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\varepsilon^2) &= -2\sigma_\varepsilon^{-2} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - A' \underline{Y}_{t-1}] \underline{Y}_{t-1}}{1 + r' \underline{z}_t(\omega)} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\varepsilon^2) &= \sigma_\varepsilon^{-2} - \sigma_\varepsilon^{-4} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - A' \underline{Y}_{t-1}]^2}{1 + r' \underline{z}_t}\end{aligned}$$

Maintenant $\frac{\partial}{\partial A} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\varepsilon^2) = 0$ uniquement pour

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_t \underline{Y}_{t-1}}{1 + r' \underline{z}_t} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}}{1 + r' \underline{z}_t} A$$

alors l'estimateur de A est donné par

$$A_T(r) = \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}}{1 + r' \underline{z}_t} \right\}^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_t \underline{Y}'_{t-1}}{1 + r' \underline{z}_t}\quad (3.14)$$

Ainsi on a : $\frac{\partial}{\partial (A', \sigma_\varepsilon^2)} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\varepsilon^2) = 0$ uniquement lorsque

$$\sigma_T^2(r) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - A'_T(r) \underline{Y}_{t-1}]^2}{1 + r' \underline{z}_t}\quad (3.15)$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance \hat{A}_T , $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ sont obtenus en calculant \hat{r}_T qui minimise la fonction

$$\ell_T^*(r) = \ln(\sigma_T^2(r)) + T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r' \underline{z}_t) \quad (3.16)$$

Alors les estimateurs \hat{A}_T , $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ sont donnés par :

$$\hat{A}_T = A_T(\hat{r}_T), \hat{\sigma}_T^2 = \sigma_T^2(\hat{r}_T) \text{ et } \hat{\Xi}_T = \hat{\sigma}_T^2 \hat{r}_T$$

Par conséquent, on doit minimiser la fonction en A et r ,

$$\begin{aligned} \ell_T(A, r) &= \inf_{\sigma_\varepsilon^2} \bar{\ell}_T(A, r, \sigma_\varepsilon^2) - 1 \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r' \underline{z}_t) + \ln \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - A' \underline{Y}_{t-1}]^2}{1 + r' \underline{z}_t} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

La dernière équation devient directement de (3.17).

Alors les estimateurs du maximum de vraisemblance \hat{A}_T , $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ sont définis par

$$\hat{\ell}_T(\hat{A}_T, \hat{r}_T) = \inf_{(A', r')' \in \Theta} \ell_T(A, r), \quad (3.18)$$

$$\hat{\sigma}_T^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - \hat{A}'_T(r) \underline{Y}_{t-1}]^2}{1 + \hat{r}'_T \underline{z}_t} \quad (3.19)$$

$$\hat{\Xi}_T = \hat{\sigma}_T^2 \hat{r}_T \quad (3.20)$$

3.2.2 Comportement asymptotique

Soit Θ l'ensemble dans lequel on minimise $\ell_T(A, r)$ et δ_4, δ_5 sont deux nombres arbitrairement petits. Θ est l'ensemble de tous les vecteurs $[A', r']'$ avec A et r ont respectivement p et $p(p+1)/2$ composantes satisfont les conditions suivantes :

- 1) Les valeurs propres de la matrice \underline{A} sont de module inférieur ou égale $(1 - \delta_3)$,
- 2) Soit R une matrice carrée symétrique dont $r = Vech[R]$, alors R a des valeurs propres strictement positives qui sont toutes supérieures ou égales à

3.2. LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

δ_4 ,

3) $(Vec[R])' W \leq \delta_5$ où W est la dernière colonne de la matrice $[I - \underline{A} \otimes \underline{A}]^{-1}$. Maintenant, on suppose que $\theta_0 = (A'_0, r'_0)'$ est la vraie valeur de $\theta = (A', r)'$ et que $\{Y_t(\omega)\}$ est une solution strictement stationnaire \mathcal{F}_t -mesurable, satisfaisant les conditions (i) – (viii) et pour que $A = A_0$, $\Xi = \Xi_0$, $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_0^2$ et $r = r_0 = \Xi_0/\sigma_0^2$.

Pour montrer la consistance forte des estimateurs du maximum de vraisemblance on exigera que Θ est compact afin que plusieurs résultats de l'analyse réelle peuvent être utilisés. En particulier on aura besoin de savoir que toute fonction continue sur Θ atteint ses bornes dans Θ et l'équicontinuité et la convergence uniforme sont équivalentes dans Θ .

Théorème 3.2.1 *Soit $\{Y_t\}$ un processus RCA(p) strictement stationnaire \mathcal{F}_t -mesurable, vérifie l'équation (2.14) tels que $A = A_0$, $\Xi = \Xi_0$ et $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_0^2$, sous les conditions (i)-(vi), (viii) et soit $\theta_0 = [A'_0, r'_0]$ où $r_0 = \Xi_0/\sigma_0^2$. Alors $\lim_{T \rightarrow \infty} \ell_T(\theta)$ existe presque sûrement pour tout $\theta \in \Theta$ et sa limite $\ell(\theta)$ est minimisée uniquement sur Θ à $(A', r') = \theta_0$ ce qui montre que $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$.*

Preuve. Sachant que $0 \leq \ln(1 + r'z_t) \leq r'z_t$ et $E[z_t]$ existe par (v).

D'après le théorème d'ergodicité $T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln(1 + r'z_t)$ converge p.s vers $E[\ln(1 + r'z_t)]$.

Ainsi que

$$0 < T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A'Y_{t-1})^2}{1 + r'z_t} \leq T^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - A'Y_{t-1})^2$$

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - A'Y_{t-1})^2 \rightarrow E[(Y_t - A'Y_{t-1})^2] \quad p.s$$

par conséquent

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A'Y_{t-1})^2}{1 + r'z_t} \rightarrow E\left[\frac{(Y_t - A'Y_{t-1})^2}{1 + r'z_t}\right] \quad p.s$$

sachant que $E\left[\frac{\ln(1 + r'z_t)^2}{1 + r'z_t}\right] > 0$, alors $Y_t = A'Y_{t-1}$ p.s.

$\ell_T(A, r)$ converge p.s vers

$$\ell(A, r) = E[\ln(1 + r'z_t)] + \ln\left[E\left[\frac{(Y_t - A'Y_{t-1})^2}{1 + r'z_t}\right]\right]$$

On a

$$\begin{aligned}
 & E \left[\frac{(Y_t - A' \underline{Y}_{t-1})^2}{1 + r' \underline{z}_t} \right] \\
 &= E \left[\frac{(Y_t - A_0' \underline{Y}_{t-1})^2 + 2(Y_t - A_0' \underline{Y}_{t-1})(A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1} + ((A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1})^2}{1 + r' \underline{z}_t} \right] \\
 &= E \left[\frac{(\phi_t \underline{Y}_{t-1} + \varepsilon_t)^2 + ((A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1})^2}{1 + r' \underline{z}_t} \right] \\
 &= E \left[\frac{E \left[(\phi_t \underline{Y}_{t-1} + \varepsilon_t)^2 / \mathcal{F}_{t-1} \right]}{1 + r' \underline{z}_t} \right] + E \left[\frac{((A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1})^2}{1 + r' \underline{z}_t} \right] \\
 &\geq E \left[\frac{\sigma_0^2 + \Xi_0' \underline{z}_t}{1 + r' \underline{z}_t} \right] + \sigma_0^2 E \left[\frac{1 + r_0' \underline{z}_t}{1 + r' \underline{z}_t} \right]
 \end{aligned}$$

sachant que

$$E \left[(Y_t - A_0' \underline{Y}_{t-1})^2 / \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0$$

$$E \left[\phi_t \underline{Y}_{t-1} + \varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-1} \right] = \sigma_0^2 + \Xi_0' \underline{z}_t$$

et $\Xi_0 = \sigma_0^2 r_0$. De plus on aura l'égalité si $(A_0 - A)' \underline{Y}_{t-1} = 0$ *p.s* lorsque $A = A_0$, par conséquent

$$\inf_A \ell(A, r) = \ell(A_0, r) = \ln(\sigma_0^2) + \ln \left(E \left[\frac{1 + r_0' \underline{z}_t}{1 + r' \underline{z}_t} \right] \right) + E[1 + r' \underline{z}_t]$$

et $\ell(A, r) = \inf_A \ell(A, r)$ seulement si $A = A_0$.

D'après l'égalité de Jensen, si X est un tel vecteur aléatoire positif d'espérance 1, alors

$$E[\ln(X)] \leq \ln(E[X]) = 0 \tag{3.21}$$

et il y a une égalité si $X = 1$ *p.s*. Soit X tel que

$$X = \left(E \left[\frac{1 + r_0' \underline{z}_t}{1 + r' \underline{z}_t} \right] \right)^{-1} \frac{1 + r_0' \underline{z}_t}{1 + r' \underline{z}_t} = C^{-1} \frac{1 + r_0' \underline{z}_t}{1 + r' \underline{z}_t}$$

3.2. LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

en appliquant (3.21) on obtient

$$E \left[\ln \left(\frac{1 + r'z_t}{1 + r'_0z_t} \right) \right] \geq - \ln \left(E \left[\frac{1 + r'_0z_t}{1 + r'z_t} \right] \right)$$

et on a une égalité seulement si $1 + r'_0z_t = C(1 + r'z_t)$ *p.s* par conséquent $(r_0 - Cr)'z_t = (C - 1)$ *p.s* et ceci est vrai uniquement pour $r_0 = Cr$, $C = 1$ et lorsque $r = r_0$.

Par conséquent $\ell(A, r)$ est uniquement minimisée pour $A = A_0$ et $r = r_0$. ■

Corollaire 3.2.1 $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2)$ existe *p.s* et minimisée uniquement à $A = A_0$, $\Xi = \Xi_0$ et $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_0^2$.

Preuve. $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2)$ existe presque partout et uniquement minimisé à $A = A_0$ et

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_0^{2*} = E \left[\frac{(Y_t - A'_0 Y_{t-1})^2}{1 + r'_0 z_t} \right] \quad \text{et} \quad \Xi = r_0 \sigma_0^{2*}$$

mais

$$\begin{aligned} \sigma_0^{2*} &= E \left[\frac{E \left\{ (Y_t - A'_0 Y_{t-1})^2 / \mathcal{F}_{t-1} \right\}}{1 + r'_0 z_t} \right] \\ &= E \left[\frac{\sigma_0^2 + \Xi'_0 z_t}{1 + r'_0 z_t} \right] = \sigma_0^2 \end{aligned}$$

et donc $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\ell}_T(A, \Xi, \sigma_\varepsilon^2)$ est uniquement minimisée à $A = A_0$, $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_0^2$ et $\Xi = \Xi_0$. ■

Théorème 3.2.2 Soit $\ell_T(A, r)$ minimisée sur Θ à $A = \hat{A}_T$, $r = \hat{r}_T$ et soit $\hat{\theta}_T = (\hat{A}'_T, \hat{r}'_T)$. Alors $\hat{\theta}_T$ converge presque sûrement vers θ_0 ce qui montre que $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$.

Preuve. D'abord on va montrer que $\{\ell_T(A, r)\}$ converge uniformément *p.s* vers $\ell(A, r)$ dans Θ . Sachant que Θ est compact, on a besoin seulement de démontrer que $\{\ell_T(A, r)\}$ est *p.s* equicontinue.

Soit $\theta = (A', r')$ pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\delta \geq 0$ qui dépendent de ε telle que

$$|\ell_T(\theta_1) - \ell_T(\theta_2)| < \varepsilon \text{ p.s pour } N > N^* \text{ lorsque } \|\theta_1 - \theta_2\| < \delta.$$

Sachant que $\ell_T(\theta)$ est différentiable sur Θ et d'après le Théorème de la valeur moyenne on a pour tout θ_1 et $\theta_2 \in \Theta$,

$$\ell_T(\theta_1) - \ell_T(\theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)' \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta_{12}^*)$$

où $\theta_{12}^* = \lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2$ pour $\lambda \in]0, 1[$.

Soit $\Theta^* = f(\Theta, \Theta, [0, 1])$ où $f : \mathbb{R}^{p(p+3)/2} \times \mathbb{R}^{p(p+3)/2} \rightarrow \mathbb{R}^{p(p+3)/2}$, cette fonction est continue et définie par $f(\theta_1, \theta_2, \lambda) = \lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2$.

Alors Θ^* est compact car $\Theta \times \Theta \times [0, 1]$ l'est aussi, et comme

$$\left| (\theta_1 - \theta_2)' \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta_{12}^*) \right|^2 \leq \|\theta_1 - \theta_2\|^2 \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta_{12}^*) \right\|^2$$

il résulte que $\{\ell_T(A, r)\}$ est equicontinue si $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta^*} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta) \right\|^2 < \infty$ p.s.

$$\frac{\partial}{\partial A} \ell_T(\theta) = -2 (\sigma_T^2(\theta))^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A'Y_{t-1}) Y_{t-1}}{1 + r'z_t} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \ell_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{z_t}{1 + r'z_t} - (\sigma_T^2(\theta))^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A'Y_{t-1})^2 z_t}{1 + r'z_t} \quad (3.23)$$

$$\sigma_T^2(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A'Y_{t-1})^2}{1 + r'z_t} \quad (3.24)$$

Maintenant si $(A', r') \in \Theta^*$, soit R une matrice symétrique d'ordre $n \times n$ tel que $r = \text{Vech}[R]$, alors

$$R = \lambda\Omega_1 + (1 - \lambda)\Omega_2, \quad \lambda \in]0, 1[$$

où les valeurs propre de Ω_1 et Ω_2 sont inférieurement bornées par $\delta_5 > 0$. Alors le plus petites valeur propre de R est inférieurement bornée par δ_5 . Sachant que pour tout p -vecteur z on a

$$\frac{z'Rz}{z'z} = \lambda \frac{z'\Omega_1 z}{z'z} + (1 - \lambda) \frac{z'\Omega_2 z}{z'z} \geq [\lambda + (1 - \lambda)] \delta_5 = \delta_5$$

3.2. LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Alors $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta^*} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_T(\theta) \right\|^2 < \infty$ *p.s.* Par exemple,

$$\inf_{\theta \in \Theta^*} \sigma_T^2(\theta) \geq \inf_{\theta \in \Theta^*} T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A'Y_{t-1})^2}{1 + k [\underline{z}'_t \underline{z}_t]^{1/2}}$$

où $K = \sup_{\theta \in \Theta^*} (r'r)^{1/2}$, laquelle existe car Θ^* est borné. Par conséquent

$$\inf_{\theta \in \Theta^*} \sigma_T^2(\theta) \geq T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A_T^{*'}Y_{t-1})^2}{1 + k [\underline{z}'_t \underline{z}_t]^{1/2}}$$

où

$$A_T^{*'} = \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1}Y_{t-1}}{1 + k [\underline{z}'_t \underline{z}_t]^{1/2}} \right)^{-1} \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1}Y_t}{1 + k [\underline{z}'_t \underline{z}_t]^{1/2}} \right)$$

D'après le théorème ergodique $A_T^{*'}$ converge *p.s.* vers A_0 et on a

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - A_T^{*'}Y_{t-1})^2}{1 + k [\underline{z}'_t \underline{z}_t]^{1/2}} \rightarrow E \left[\frac{(Y_t - A_0'Y_{t-1})^2}{1 + k [\underline{z}'_t \underline{z}_t]^{1/2}} \right] \quad p.s.$$

laquelle est strictement positive car $Y_t - A_0'Y_{t-1} \neq 0$ *p.s.*, par conséquent $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta^*} \sigma_T^2(\theta) > 0$.

De même manière on peut démontrer que (3.26) et (3.27) sont bornés.

Soit $\hat{\theta}_T \rightarrow \theta_0$ *p.s.*, sachant que $\{\ell_T(\theta)\}$ converge uniformément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N^* dépendant de ε telle que

$$|\ell_T(\hat{\theta}_T) - \ell(\hat{\theta}_T)| < \varepsilon/2$$

$$|\ell_T(\theta_0) - \ell(\theta_0)| < \varepsilon/2$$

p.s. lorsque $N > N^*$, et comme $\ell_T(\hat{\theta}_T) \leq \ell_T(\theta_0)$ et $\ell(\hat{\theta}_T) \geq \ell(\theta_0)$, il résulte que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ell_T(\hat{\theta}_T) - \ell(\theta_0) = [\ell(\hat{\theta}_T) - \ell_T(\hat{\theta}_T)] + [\ell_T(\hat{\theta}_T) - \ell_T(\theta_0)] + [\ell_T(\theta_0) - \ell(\theta_0)] \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad p.s. \text{ pour } N < N^* \end{aligned}$$

Par conséquent $\{\ell_T(\hat{\theta}_T)\}$ converge *p.s.* vers $\ell(\theta_0)$ ■

Corollaire 3.2.2 $\hat{\Xi}_T$ et $\hat{\sigma}_T^2$ convergent presque sûrement vers Ξ_0 et σ_0^2 , respectivement.

Preuve. \hat{A}_T et \hat{r}_T convergent *p.s* respectivement vers A_0 et r_0 .
D'autre part on a

$$\hat{\sigma}_T^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\left(Y_t - \hat{A}'_T Y_{t-1} \right)^2}{1 + \hat{r}'_T z_t}$$

la suite $\{\sigma_T^2(\theta)\}$ telle que

$$\sigma_T^2(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\left(Y_t - A' Y_{t-1} \right)^2}{1 + r' z_t}$$

converge *p.s* dans Θ vers

$$\sigma^2(\theta) = E \left\{ \frac{\left(Y_t - A' Y_{t-1} \right)^2}{1 + r' z_t} \right\}$$

en utilisant la même procédure que la démonstration du théorème précédent on trouve que $\hat{\sigma}_T^2$ converge *p.s* vers $\sigma^2(\theta_0) = \sigma_0^2$.

Sachant que $\hat{\Xi}_T = \hat{r}_T \hat{\sigma}_T^2$, alors $\hat{\Xi}_T$ converge *p.s* vers $r_0 \sigma_0^2 = \Xi_0$. ■

Lemme 3.2.1 La suite $\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ converge uniformément presque sûrement sur un voisinage compact de θ_0 vers $\frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}$.

Preuve. Voir [37]. ■

Pour l'existence du théorème central limite des estimateurs du maximum de vraisemblance on rajoute aux suppositions au-dessus que $\sigma_\varepsilon^2 \neq 0$ et la matrice Σ n'a pas des valeurs propres nulles, en posant $\hat{\theta}_T = \left(\hat{A}'_T, \hat{\Xi}'_T, \hat{\sigma}_T^2 \right)$ et $\theta_0 = (A'_0, \Xi'_0, \sigma_0^2)$, par conséquent on a le théorème suivant

Théorème 3.2.3 Soit $\{Y_t\}$ un processus *RCA(p)* strictement stationnaire \mathcal{F}_t -mesurable, sous les suppositions (i)–(viii), alors $T^{1/2} \left(\hat{\theta}_T - \theta_0 \right)$ converge vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance $I^{-1} J I^{-1}$.

3.2. LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Si $\{\varepsilon_t\}$ et $\{\phi_t\}$ sont conjointement normales alors la matrice de covariance se réduit à $2I^{-1}$. Les matrices I et J sont données par :

$$I = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I'_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I'_{13} & I'_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial A \partial A'} = 2E [\lambda_0^{-1} \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}] \\ I_{12} &= \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial A \partial \Xi'} = 2E [E [u_{0t} / \mathcal{F}_{t-1}] \underline{Y}_{t-1} \underline{z}'_t] = 0 \\ I_{13} &= \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial A \partial \sigma^2} = 2E [E [u_{0t} / \mathcal{F}_{t-1}] \lambda_0^{-2} \underline{Y}_{t-1}] = 0 \\ I_{22} &= \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \Xi \partial \Xi'} = E [\lambda_0^{-2} \underline{z}_t \underline{z}'_t] \\ I_{23} &= \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{\partial \Xi \partial \sigma^2} = E [\lambda_0^{-2} \underline{z}_t] \\ I_{33} &= \frac{\partial^2 \tilde{\ell}(\theta_0)}{(\partial \sigma^2)^2} = E \{ \lambda_0^{-2} \} \quad \text{où } E [u_{0t}^2 / \mathcal{F}_{t-1}] = \lambda_0. \end{aligned}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J'_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J'_{13} & J'_{23} & J_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_{11} &= 4E [E [u_{0t}^2 / \mathcal{F}_{t-1}] \lambda_0^{-2} \underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1}] = 4E [\underline{Y}_{t-1} \underline{Y}'_{t-1} \lambda_0^{-1}] \\ J_{12} &= 2E [E [u_{0t} \eta_t / \mathcal{F}_{t-1}] \lambda_0^{-3} \underline{Y}_{t-1} \underline{z}'_t] = 2E [u_{0t}^3 \lambda_0^{-3} \underline{Y}_{t-1} \underline{z}'_t] \\ J_{13} &= 2E [E [u_{0t} \eta_t / \mathcal{F}_{t-1}] \lambda_0^{-3} \underline{Y}_{t-1}] = 2E [u_{0t}^3 \lambda_0^{-3} \underline{Y}_{t-1}] \\ J_{22} &= E [\eta_t^2 \lambda_0^{-4} \underline{z}_t \underline{z}'_t], \quad J_{23} = E [\eta_t^2 \lambda_0^{-4} \underline{z}_t], \quad J_{33} = E [\eta_t^2 \lambda_0^{-2}] \end{aligned}$$

Preuve. Voir [37]. ■

3.3 Modèle RCA en données croisées

Cette section est consacrée à l'étude d'un modèle $RCA(p)$ dont les coefficients varient par groupe d'individus. Nous allons estimer les moments des coefficients, et nous étudierons ensuite le comportement asymptotique d'estimateurs obtenus.

Considérons le modèle $RCA(p)$ suivant

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^p A_k(\omega) Y_{t-k}(\omega) + \varepsilon_t(\omega). \quad (3.25)$$

La relation (3.25) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} Y_t(\omega) \\ Y_{t-1}(\omega) \\ \vdots \\ Y_{t-p+1}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(\omega) & \cdots & A_p(\omega) \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1}(\omega) \\ Y_{t-2}(\omega) \\ \vdots \\ Y_{t-p}(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t(\omega) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\underline{Y}_t(\omega) = A(\omega) \underline{Y}_{t-1}(\omega) + \underline{\varepsilon}_t(\omega) \quad (3.26)$$

On suppose que

- (i) Les indices $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ et $\omega \in \{1, 2, \dots, N\}$ désignent respectivement le temps et la population d'individus.
- (ii) $\{\varepsilon_t(\omega)\}$ est une suite de variables aléatoires *iid* telles que

$$E[\varepsilon_t(\omega)] = 0, \\ E[\varepsilon_t(\omega) \varepsilon_u(\omega)] = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq u \\ \sigma_\omega^2 & \text{si } t = u \end{cases}$$

- et $E[\varepsilon_t(\omega) \varepsilon_u(\omega) \varepsilon_v(\omega) \varepsilon_k(\omega)] = 3\sigma_\omega^4 + \varkappa$, $|\varkappa| < \infty$ si $t = u = v = k$
- (iii) $A_i(\omega)$, $1 \leq i \leq p$ sont des variables aléatoires *iid*.
- (iv) $A_i(\omega)$, $1 \leq i \leq p$ sont mutuellement indépendantes de $\varepsilon_t(\omega)$ et $Y_t(\omega)$ pour tout t .
- (v) $Y_t(\omega)$ est indépendante de $\varepsilon_s(\omega)$ pour tout $s > t$.

Alors

$$E[\underline{Y}_t(\omega) / \mathcal{F}_t(\omega)] = 0 \quad p.s \\ \Upsilon_\omega(u) = E[\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) / \mathcal{F}_t(\omega)] \quad p.s$$

Pour $u = 0$ on a

$$\Upsilon_\omega(0) = A(\omega) \Upsilon_\omega(0) A'(\omega) + \Omega_\omega \quad p.s \quad (3.27)$$

Si la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]$ est inversible, alors l'équation (3.27) admet la solution unique définie positive

$$Vec[\Upsilon_\omega(0)] = [I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^{-1} Vec[\Omega_\omega] \quad p.s \quad (3.28)$$

Par récurrence on obtient

$$Vec[\Upsilon_\omega(u)] = (I_p \otimes A^u(\omega)) [I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^{-1} Vec[\Omega_\omega], \quad p.s \quad (3.29)$$

Sachant que la matrice $\Upsilon_\omega(0)$ est définie positive d'après (3.28), alors elle est inversible, donc on peut identifier $A(\omega)$ par

$$A(\omega) = \Upsilon_\omega^{-1}(0) \Upsilon_\omega(1) \quad p.s$$

On considère l'estimateur $\hat{A}_T(\omega)$ donné par

$$\hat{A}_T(\omega) = \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_{t-1}(\omega) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^T \underline{Y}_{t-1}(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \right] \quad p.s \quad (3.30)$$

Sous les suppositions (i) - (v), on peut avoir pour $u \geq 0$

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left\| T^{-1} \sum_{t=1}^{T+u} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) - E[\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) / \mathcal{F}_t(\omega)] \right\| \right) = 0 \quad p.s$$

3.3.1 Identification des moments

On s'intéresse aux moments de $A(\omega)$ qui peuvent être identifiés en termes de $\Upsilon_\omega(u)$. Les estimateurs des moments sont proposés pour être consistents lorsque $N \rightarrow \infty$ et T soit fixe, sous les conditions (i) - (v).

Théorème 3.3.1 *Si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité, alors*

$$Vec[\Upsilon_\omega(0)] = \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} Vec[\Omega_\omega] \quad (3.31)$$

$$Vec[\Upsilon_\omega(u)] = \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v+u} Vec[\Omega_\omega] \quad (3.32)$$

$$\text{où : } \underline{\mu}_{2v} = E[A^{\otimes 2v}(\omega)] \quad \text{et} \quad \underline{\mu}_{2v+u} = E[A^v(\omega) \otimes A^{v+u}(\omega)]$$

Preuve. Sachant que les valeurs propres non nulles de la matrice $A^{\otimes 2}(\omega)$ sont les mêmes valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ et qui se trouvent à l'intérieur du cercle unité i.e. $|\lambda_i \lambda_j| < 1$, la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]$ est non singulière, alors on a

$$\begin{aligned}
 \text{Vec}[\Upsilon_\omega(0)] &= \text{Vec}[E[\underline{Y}_t(\omega)\underline{Y}'_t(\omega)]] = E\left[[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^{-1} \text{Vec}[\Omega_\omega]\right] \\
 &= E\left[[I_p^{\otimes 2} + [A^{\otimes 2}(\omega)] + [A^{\otimes 2}(\omega)]^2 + \dots] \text{Vec}[\Omega_\omega]\right] \\
 &= [E[I_p^{\otimes 2}] + E[A^{\otimes 2}(\omega)] + E[A^{\otimes 4}(\omega)] + E[A^{\otimes 6}(\omega)] \dots] \text{Vec}[\Omega_\omega] \\
 &= \sum_{v=0}^{\infty} \mu_{2v} \text{Vec}[\Omega_\omega].
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
 \text{Vec}[\Upsilon_\omega(u)] &= E[(I_p \otimes A^u(\omega))(I_p^{\otimes 2} + A^{\otimes 2}(\omega) + A^{\otimes 4}(\omega) + \dots) \text{Vec}[\Omega_\omega]] \\
 &= E[I_p \otimes A^u(\omega) + A(\omega) \otimes A^{1+u}(\omega) + A^2(\omega) \otimes A^{2+u}(\omega) + \dots] \text{Vec}[\Omega_\omega] \\
 &= \sum_{v=0}^{\infty} \mu_{2v+u} \text{Vec}[\Omega_\omega], \quad u \geq 1
 \end{aligned}$$

■

Définition 3.3.1 La densité spectrale du modèle (3.25) est donnée par

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \Upsilon_\omega(u) e^{-i\lambda u}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.33)$$

Théorème 3.3.2 Lorsque la densité spectrale $S(\lambda)$ existe alors

$$\text{Vec}[S(\lambda)] = \frac{1}{2\pi} \left[I_{p^2} + \sum_{u=1}^{\infty} (\underline{\mu}_u + \underline{\mu}'_u) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \mu_{2v} \text{Vec}[\Omega_\omega], \quad \text{pour } \lambda = 0 \quad (3.34)$$

Preuve.

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \Upsilon_\omega(u) e^{-i\lambda u} = \frac{1}{2\pi} \left[\Upsilon_\omega(0) + \sum_{u=1}^{\infty} \Upsilon_\omega(u) e^{-i\lambda u} + \sum_{u=1}^{\infty} \Upsilon'_\omega(u) e^{i\lambda u} \right]$$

3.3. MODÈLE RCA EN DONNÉES CROISÉES

$$\begin{aligned}
 \text{Vec}[S(\lambda)] &= \frac{1}{2\pi} \left[\text{Vec}[\Upsilon_\omega(0)] + \sum_{u=1}^{\infty} \text{Vec}[\Upsilon_\omega(u)] e^{-i\lambda u} + \sum_{u=1}^{\infty} \text{Vec}[\Upsilon'_\omega(u)] e^{i\lambda u} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} + \sum_{u=1}^{\infty} \underline{\mu}_u \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} e^{-i\lambda u} + \sum_{u=1}^{\infty} \underline{\mu}'_u \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} e^{i\lambda u} \right) \text{Vec}[\Omega_\omega]
 \end{aligned}$$

où $\underline{\mu}'_u = E\{A^u(\omega) \otimes I_p\}$. Pour $\lambda = 0$ on obtient :

$$\text{Vec}[S(0)] = \frac{1}{2\pi} \left[I_{p^2} + \sum_{u=1}^{\infty} (\underline{\mu}_u + \underline{\mu}'_u) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \underline{\mu}_{2v} \text{Vec}[\Omega_\omega].$$

■

Théorème 3.3.3 *Afin que $S(\lambda)$ existe et continue, il est nécessaire que la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]$ soit inversible.*

Preuve. Si la matrice $[I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega)]^2$ est inversible alors ceci est équivalent que les valeurs propres de la matrice $A^{\otimes 2}(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité i.e. celles de la matrice $A(\omega)$ le sont aussi i.e. $|\lambda_i| < 1$, $1 \leq i \leq p$ par conséquent

$$\begin{aligned}
 (I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega))^{-1} &= I_p^{\otimes 2} + A^{\otimes 2}(\omega) + A^{\otimes 4}(\omega) + \dots \\
 &= \sum_{v=0}^{\infty} A^{\otimes 2v}(\omega)
 \end{aligned}$$

sachant que

$$E \left[[I_p^{\otimes 2} + I_p \otimes A^u(\omega) + A^u(\omega) \otimes I_p] (I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega))^{-1} \text{Vec}[\Omega_\omega] \right] = \text{Vec}[S(\lambda)]$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
 \|\text{Vec}[S(\lambda)]\| &= \left\| \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \left\{ I_{p^2} + \sum_{u=1}^{\infty} (\underline{\mu}_u + \underline{\mu}'_u) \right\} \underline{\mu}_{2v} \right) \text{Vec}[\Omega_\omega] \right\| \\
 &= \left\| E \left[[I_p^{\otimes 2} + I_p \otimes A^u(\omega) + A^u(\omega) \otimes I_p] (I_{p^2} - A^{\otimes 2}(\omega))^{-1} \text{Vec}[\Omega_\omega] \right] \right\| < \infty.
 \end{aligned}$$

■

3.3.2 Comportement asymptotique

Définition 3.3.2 Pour $0 \leq u \leq T$ on définit l'estimateur de $\Upsilon_\omega(u)$ par

$$\hat{\Upsilon}_N(u) = \frac{1}{(T-u+1)N} \sum_{t=1}^{T+u} \sum_{\omega=1}^N \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) \quad (3.35)$$

lequel est un estimateur sans biais de $\Upsilon_\omega(u)$.

Théorème 3.3.4 Afin que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(u) \right] = \text{Vec} [\Upsilon_\omega(u)] \quad p.s \quad (3.36)$$

il est nécessaire et suffisant que les valeurs propres de $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Preuve. Considérons d'abord $\text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right]$ en notant que

$$\sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega), \quad \omega = 1, 2, \dots$$

sont des variables aléatoires *i.i.d* pour $\omega = 1, \dots, N$.

Alors pour que $\text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right] \rightarrow \text{Vec} [\Upsilon_\omega(0)]$ *p.s*, il est nécessaire que :

$$\left\| \text{Vec} E \left[\sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \right] \right\| < \infty$$

donc $\| \text{Vec} E [\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega)] \| < \infty$, $t = 0, \dots, T$, lequel est équivalent que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Pour montrer la suffisance, on note que pour (3.36), il est suffisant que pour tout u :

$$\left\| \text{Vec} E \left[\sum_{t=0}^{T-u} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t-u}(\omega) \right] \right\| < \infty$$

lequel est vrai par l'inégalité de Schwarz, si $\| \text{Vec} E [\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega)] \| < \infty$, $t = 0, \dots, T$, et ceci est vérifié si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité. ■

3.3. MODÈLE RCA EN DONNÉES CROISÉES

Définition 3.3.3 On définit les estimateurs $\hat{\Omega}_N$ et $\hat{\underline{\mu}}_N(u)$ respectivement de Ω_ω et $\underline{\mu}_u$ telle que $\underline{\mu}_u = E[I_p \otimes A^u(\omega)]$ par :

$$\begin{aligned} \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(u) \right] &= \hat{\underline{\mu}}_N(u) \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right]^{-1} \\ \text{Vec}[\hat{\Omega}_N] &= [I_{p^2} - \hat{\underline{\mu}}_N(2)] \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) \right] \end{aligned}$$

Théorème 3.3.5 Sous la condition que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ se trouvent à l'intérieur du cercle unité, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vec}[\hat{\Omega}_N] = \text{Vec}[\Omega_\omega] \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Vec}[\hat{\underline{\mu}}_N(u)] = \text{Vec}[\underline{\mu}_u], \quad u = 1, \dots, T-2 \quad (3.37)$$

De plus pour que

$$\sqrt{N} \left(\text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) - \Upsilon_\omega(0) \right]', \dots, \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(T) - \Upsilon_\omega(T) \right]' \right) \quad (3.38)$$

converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution normale $(T+1)p^2$ -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance en bloque Σ , dont la $(p+1, q+1)$ ème matrice est donnée par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{NCov} \left(\text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(p) \right], \text{Vec} \left[\hat{\Upsilon}_N(q) \right] \right)$$

il est nécessaire et suffisant que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Preuve. La condition nécessaire : on note que

$$\sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega), \quad \omega = 1, 2, \dots, N$$

sont des variables aléatoires *iid*.

Pour que $\sqrt{N} \left[\hat{\Upsilon}_N(0) - \Upsilon_\omega(0) \right]$ soit asymptotiquement normale, il est nécessaire et suffisant que :

$$\left\| E \left[\sum_{t=0}^T \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_t(\omega) \right]^2 \right\| < \infty.$$

D'après le théorème central limite pour les variables aléatoires *i.i.d* lequel est vrai si et seulement si $\left\| E [\underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}_t'(\omega)]^2 \right\| < \infty$ mais cette inégalité est équivalente que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité.

La condition suffisante : maintenant, pour que $\sqrt{N} [\hat{\Upsilon}_N(u) - \Upsilon_\omega(u)]$ soit aussi asymptotiquement normale pour tout $u \geq 1$, il est nécessaire et suffisant que

$$\left\| E \left[\sum_{t=0}^{T-u} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}_{t-u}(\omega) \right]^2 \right\| < \infty$$

lequel est vrai en si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité en utilisant l'inégalité Schwarz.

Par conséquent si les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ sont à l'intérieur du cercle unité est une condition nécessaire et suffisante pour que toute combinaison de $\sqrt{N} [\hat{\Upsilon}_N(u) - \Upsilon_\omega(u)]$, $u \geq 0$, soit asymptotiquement normale. ■

Théorème 3.3.6 *Sous la condition que les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$ soient à l'intérieur du cercle unité, alors*

$$\sqrt{N} \left(\text{Vec} [\hat{\Omega}_N - \Omega_\omega]', \text{Vec} [\hat{\underline{\mu}}_N(1) - \underline{\mu}_1]', \dots, \text{Vec} [\hat{\underline{\mu}}_N(T-2) - \underline{\mu}_{T-2}]' \right) \quad (3.39)$$

converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution normale $(T-1)p^2$ -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance en bloque $\Phi \Sigma \Phi'$, où Φ est la matrice aux dérivées partielles de vecteur colonne $(\text{Vec}[\Omega_\omega]', \text{Vec}[\underline{\mu}_1]', \dots, \text{Vec}[\underline{\mu}_{T-2}]')'$ par rapport au vecteur ligne $(\text{Vec}[\Upsilon_\omega(0)]', \text{Vec}[\Upsilon_\omega(1)]', \dots, \text{Vec}[\Upsilon_\omega(T)]')$.

Si $\widehat{\Sigma}$ est la matrice en bloque avec $(p + 1, q + 1)$ ème élément :

$$\begin{aligned}
 & N^{-1} \sum_{\omega=1}^N \left[(T - p + 1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-p} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+p}(\omega) \right] \\
 & \times \left[(T - q + 1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-q} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+q}(\omega) \right] \\
 & - \left[N^{-1} \sum_{\omega=1}^N (T - p + 2)^{-1} \sum_{t=0}^{T-p} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+p}(\omega) \right] \\
 & \times \left[N^{-1} \sum_{\omega=1}^N (T - q + 1)^{-1} \sum_{t=0}^{T-q} \underline{Y}_t(\omega) \underline{Y}'_{t+q}(\omega) \right],
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

$p, q = 0, 1, \dots, T - 1$, et $\widehat{\Phi}$ est la matrice obtenue en substituant Ω_ω , $\underline{\mu}_u$ par $\widehat{\Omega}_N$, $\widehat{\underline{\mu}}_N(u)$ dans Φ , $u = 0, 1, \dots, T - 2$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{\Phi} \widehat{\Sigma} \widehat{\Phi}' = \Phi \Sigma \Phi', \text{ p.s.} \tag{3.41}$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu des estimateurs des paramètres d'un modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre p dont les coefficients varient avec le temps par la méthode des moindres carrés ordinaire et celle du maximum de vraisemblance, sous certaines conditions, nous avons étudié le comportement asymptotique, en établissant les propriétés de ces estimateurs comme la consistance et la normalité asymptotique, ainsi nous avons considéré un modèle $RCA(p)$ en données croisées, et nous avons montré que les moments des coefficients peuvent être identifiés en terme des autocovariances du processus . Ensuite lorsque $N \rightarrow +\infty$; nous avons établi les propriétés de la consistance et de la normalité asymptotique de ces moments estimés.

Chapitre 4

Les Modèles BL-GARCH

4.1 Introduction

En face des problèmes de modélisation dans les séries financières, Engle [16] a introduit une nouvelle classe de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*ARCH*), suivie par *ARCH* généralisée ou *GARCH*, proposée par Bollerslev [12]. Storti et Vitale [46] ont proposé une approche innovante pour modéliser des effets de levier dans les séries chronologiques financière basée sur les modèles *GARCH* bilinéaires noté par *BL-GARCH* que l'on peut rendre et transmettre sous forme des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires.

Au cours des dernières années, plusieurs auteurs se sont intéressés à des méthodes du maximum de vraisemblance composites, qui sont largement utilisés dans l'inférence statistique paramétrique, en raison des bonnes propriétés asymptotiques des estimateurs. Le but de vraisemblance composite est de réduire et de simplifier la complexité de calcul pour faire face aux grands ensembles de données et de la présence d'interdépendances complexes.

Le terme pseudo-vraisemblance a été initialement proposé par Besag [10]. Lindsay [32] a utilisé le terme de vraisemblance composite pour justifier son choix de décrire la méthode de construction considéré. Il y a beaucoup de recherches et des études dans divers domaines, ont appliqué cette méthode, par exemple en génétique statistique; Larribe et Fearnhead [30], en série temporelle; Richard et Chun [43] et Pakel, Shephard et Sheppard [41], et en données longitudinales; Molenberghs et Verbeke [34].

4.2 Propriétés de modèle BL-GARCH(1,2)

Nous considérons y_t le logarithme du rendement d'un actif à la date t , tels que

$$y_t = \mu_t + u_t \text{ où } \mu_t = E[y_t/\Omega_{t-1}] \quad (4.1)$$

$$u_t = h_t \varepsilon_t \quad (4.2)$$

$$h_t^2 = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1}^2 + b_2 h_{t-2}^2 + c_1 u_{t-1} h_{t-1} \quad (4.3)$$

Où Ω_{t-1} est la tribu engendrée par le passé de u_t .

4.2.1 Positivité de la variance conditionnelle

Nous pouvons écrire le modèle (4.3) sous forme matricielle suivante

$$\begin{aligned} h_t^2 &= [1, u_{t-1}, h_{t-1}, h_{t-2}] \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & \frac{1}{2}c_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}c_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u_{t-1} \\ h_{t-1} \\ h_{t-2} \end{bmatrix} \\ &= K_t' A K_t \end{aligned} \quad (4.4)$$

Proposition 4.2.1 *L'ensemble de conditions suffisantes pour la positivité de la variance conditionnelle h_t^2 est*

$$a_0 > 0 ; a_1 > 0 ; b_1 > 0 ; b_2 > 0 ; c_1^2 > 4a_1b_1 \quad (4.5)$$

Preuve. On note que $h_t^2 > 0$ si et seulement si la matrice A est définie positive, ce qui implique que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. Ces valeurs propres sont :

$$a_0; b_2; \frac{1}{2} \left(a_1 + b_1 - \sqrt{a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + c_1^2} \right); \frac{1}{2} \left(a_1 + b_1 + \sqrt{a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + c_1^2} \right)$$

■

On peut écrire le modèle *BL - GARCH(1,2)* sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} h_t^2 &= a_0 + (a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 + c_1 \varepsilon_{t-1}) h_{t-1}^2 + b_2 h_{t-2}^2 \\ h_t^2 &= g(\varepsilon_{t-1}) + c(\varepsilon_{t-1}) h_{t-1}^2 + d(\varepsilon_{t-1}) h_{t-2}^2 \end{aligned}$$

qui est un modèle autorégressif à coefficients aléatoires autorégressif d'ordre deux [RCAR(2)].

On pose : $h_t^2 = X_t$; $g(\varepsilon_{t-1}) = e_t$; $c(\varepsilon_{t-1}) = \phi_1$ et $d(\varepsilon_{t-1}) = \phi_2$, on obtient

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t \quad (4.6)$$

$$\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{X}_t &= \Phi \underline{X}_{t-1} + \underline{e}_t \\ V_t &= a_0 [I_2 - \Psi B]^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec $E[\underline{X}_t] = V_t$, $E[\Phi] = \Psi$, et B est l'opérateur retard. On peut également réécrire le modèle BL-GARCH(1, 2) :

$$\underline{Z}_t = \underline{b}_t + A_t \underline{Z}_{t-1} \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} u_t^2 \\ h_t^2 \\ h_{t-1}^2 \\ u_t h_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \varepsilon_t \\ a_0 \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \varepsilon_t^2 & b_1 \varepsilon_t^2 & b_2 \varepsilon_t^2 & c_1 \varepsilon_t^2 \\ a_1 & b_1 & b_2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 \varepsilon_t & b_1 \varepsilon_t & b_2 \varepsilon_t & c_1 \varepsilon_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t-1}^2 \\ h_{t-1}^2 \\ h_{t-2}^2 \\ u_{t-1} h_{t-1} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Remarque 4.2.1 (i) La matrice A_t est $(p + q + r) \times (p + q + r)$ tel que $r = \min(p, q)$ généralement dans le cas du modèle BL-GARCH(p, q).

(ii) L'équation (4.8) est VAR(1) à coefficients aléatoires.

(iii) $(\underline{Z}_t)_{t \geq 1}$ est processus de Markov.

Théorème 4.2.1 Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un processus BL-GARCH(1, 2) strictement stationnaire, solution du modèle (4.3) est que

$$\gamma < 0 \quad (4.10)$$

où $\gamma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|$ est le plus grand exposant de Lyapounov de la suite $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ définie par (4.9). Lorsqu'elle existe, la solution strictement stationnaire est unique, non anticipative et ergodique.

Preuve. Voir [23]. ■

4.2.2 Distribution marginale

En itérant (4.8), on obtient :

$$\underline{Z}_t = \underline{b}_t + \sum_{k=1}^{+\infty} A_t A_{t-1} \dots A_{t-k+1} \underline{b}_{t-k} \quad (4.11)$$

on pose, pour $k > 0$,

$$A_{t,k} = A_t A_{t-1} \dots A_{t-k+1} \text{ et } \underline{Z}_{t,k} = A_{t,k} \underline{b}_{t-k}$$

on note \otimes le produit de Kronecker et $\|\cdot\|$ est la norme matricielle, alors

$$\begin{aligned} E \|\underline{Z}_{t,k}\|^m &= E \|A_{t,k}^{\otimes m} \underline{b}_{t-k}^{\otimes m}\| = E \|A_t^{\otimes m} A_{t-1}^{\otimes m} \dots A_{t-k+1}^{\otimes m} \underline{b}_{t-k}^{\otimes m}\| \\ &= \left\| A^{(m)} \underline{b}^{(m)} \right\| \end{aligned}$$

on utilise l'indépendance du produit de matrices aléatoires $A_t A_{t-1} \dots A_{t-k+1} \underline{b}_{t-k}$, car (ε_t) sont *iid*, on obtient

$$\begin{aligned} \|\underline{Z}_t\|_m &= [E \|\underline{Z}_t\|^m]^{1/m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|\underline{Z}_{t,k}\|_m \\ &\leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left\| (A^{(m)})^k \right\|^{1/m} \right\} \|\underline{b}^{(m)}\|^{1/m} \end{aligned}$$

Si le rayon spectral $\rho(A^{(m)}) < 1$ de la matrice $A^{(m)}$, alors $\left\| (A^{(m)})^k \right\| \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, par conséquent $\|u_t\|_m \leq \|\underline{Z}_t\|_m$. $\rho(A^{(m)}) < 1$ est une condition suffisante de l'existence de $E[u_t^{2m}]$. Pour plus de détails, il est recommandé de se référer à [11].

Théorème 4.2.2 *Supposons que $E[\varepsilon_t^{2m}] < \infty$ et que $\rho(A^{(m)}) < 1$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la série $(\underline{Z}_t)_t$ définie par (5.11) converge dans L^m et le processus $(u_t^2)_t$, défini comme la première composante de \underline{Z}_t , est strictement stationnaire et admet des moments jusqu'à l'ordre m . Inversement, si $\rho(A^{(m)}) \geq 1$, il n'existe pas de solution strictement stationnaire $(u_t^2)_t$ de (4.8) telle que $E[u_t^{2m}] < \infty$.*

Preuve. Voir [23]. ■

4.3 Modèle BL-GARCH en données de panel

On suppose que l'on dispose d'un ensemble de données de panel de rendements des actifs, avec T observations et N actifs. Le rendement d'un actif i à la date t est y_{it} , tels que $i = 1, \dots, N$ et $t = 1, \dots, T$, défini par :

$$\begin{aligned} y_{it} &= \mu_{it} + u_{it} \\ u_{it} &= h_{it}\varepsilon_{it} \end{aligned}$$

$$h_{it}^2 = a_{0i}(1 - a_1 - b_1 - b_2) + a_1 u_{it-1}^2 + b_1 h_{it-1}^2 + b_2 h_{it-2}^2 + c_1 u_{it-1} h_{it-1} \quad (4.12)$$

où $a_{0i} > 0$, $a_1 + b_1 + b_2 < 1$ et $a_1, b_1, b_2 \in [0, 1[$ avec $c_1 > 2a_1 b_1$. On considère a_{0i} comme des paramètres de nuisance, et $\theta = (a_1, b_1, b_2, c_1)$ est un vecteur de paramètres d'intérêt. On utilise "covariance tracking", proposé par Engle et Mezrich [18], on obtient :

$$E [y_{it}^2] = a_{0i} \quad (4.13)$$

Alors on peut utiliser la méthode des moments pour estimer le paramètre de nuisance. En supposant une indépendance stochastique sur i et t , alors l'estimateur du maximum de vraisemblance est généralement inconsistant lorsque T est fini, et $N \rightarrow \infty$. Afin d'obtenir un estimateur consistant, Engle, Shephard et Sheppard [19] ont supposé que T soit grand, et N se rapporte à T et à réduire la vitesse de convergence à \sqrt{T} au lieu de \sqrt{NT} , noté dans [19], suivie par la même étude et considération de Pakel, Shephard et Sheppard [41].

4.3.1 Maximum du vraisemblance composite

Dans ce paragraphe, on applique la méthode du maximum de vraisemblance composite, qui est largement utilisé dans les séries chronologiques en place de la vraisemblance totale, par exemple lorsque l'on veut réduire la complexité de calcul, ou faire une inférence sur les paramètres d'intérêt sans faire des hypothèses sur l'ensemble de la distribution conjointe de données. Soient $y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ où $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Nt})$ et $f(y_{it}/\Omega_{i,t-1})$ la densité conditionnelle de y_{it} , on pose $\phi_i = a_{0i}$ et $\phi_{(N)} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$. Notre procédure d'estimation porte sur deux étapes. D'abord on estime les paramètre

de nuisance par la méthode des moments, en utilisant (4.13), ensuite on applique la méthode du maximum de vraisemblance composite pour estimer θ qui est défini par :

$$CL(y, \phi_{(N)}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log f(y_{it} / \Omega_{i,t-1}; \phi_i) \right] \quad (4.14)$$

Dans ce cas, on utilise " variation-free" comme Engle, Shephard et Shephard [19], et Engle, Hendry et Richard [17], alors on obtient l'estimateur du maximum de vraisemblance, en résolvant :

$$\hat{\theta}_{CL} = \arg \max_{\theta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log f(y_{it} / \Omega_{i,t-1}; \hat{a}_{0i}, \theta) \quad (4.15)$$

où \hat{a}_{0i} pour tout i est obtenu en résolvant

$$\sum_{t=1}^T Q_{it}(\theta, \hat{a}_{0i}) = 0$$

D'après (4.13), on a

$$Q_{it}(\theta, a_{0i}) = y_{it}^2 - a_{0i}; \quad E[Q_{it}(\theta, a_{0i}^*)] = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Q_{it}(\theta, \hat{a}_{0i}) = 0 \quad (4.17)$$

où a_{0i}^* est la vraie valeur de a_{0i} pour tout i . On empile (4.14) pour $i = 1, \dots, N$, on obtient

$$Q_{(N)}(y_t, \phi_{(N)}) = \begin{bmatrix} y_{1t}^2 - a_{01} \\ \vdots \\ y_{Nt}^2 - a_{0N} \end{bmatrix} \implies E[Q_{(N)}(y_t, \phi_{(N)}^*)] = 0 \quad (4.18)$$

D'autre part, pour le paramètre d'intérêt θ , on utilise la composite, en tenant compte les trois distributions typiques suivantes :

1- La fonction score de vraisemblance composite avec une densité normale est :

$$W_1(y_t, \theta, \phi_{(N)}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{N} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log h_{it}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{u_{it}^2}{h_{it}^2} \right) \quad (4.19)$$

2- La fonction score de vraisemblance composite avec une densité de cauchy est :

$$W_2(y_t, \theta, \phi_{(N)}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-N \log \pi + \sum_{i=1}^N \log h_{it} - \sum_{i=1}^N \log (h_{it}^2 + u_{it}^2) \right) \quad (4.20)$$

3- La fonction score de vraisemblance composite avec une densité de Student est :

$$W_3(y_t, \theta, \phi_{(N)}) = \frac{\partial}{\partial \theta} N \left(\log \Gamma \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - h_{it}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{u_{it}^2}{h_{it}^2} \right) \quad (4.21)$$

Pour $i = 1, 2, 3$ on pose :

$$W_i(y_t, \theta, \hat{\phi}_{(N)}) = 0 \quad (4.22)$$

où $\hat{\phi}_{(N)}$ est l'estimateur obtenu par les méthode des moments.

L'ensemble des conditions de moments pour (4.19), (4.20) et (4.21) est donné par :

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T W_i(y_t, \hat{\theta}, \hat{\phi}_{(N)}) = 0 ; \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.23)$$

On pose :

$$K_i(y_t, \theta^*, \phi_{(N)}^*) = \begin{bmatrix} Q_{(N)}(y_t, \phi_{(N)}^*) \\ W_i(y_t, \theta^*, \phi_{(N)}^*) \end{bmatrix}$$

Alors, on implique que :

$$E [K_i(y_t, \theta^*, \phi_{(N)}^*)] = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T K_i(y_t, \hat{\theta}, \hat{\phi}_{(N)}) = 0 ; \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.24)$$

(4.17) et (4.22) sont des conditions du premier ordre pour la maximisation du problème (4.15).

4.3.2 Comportement asymptotique

Dans ce paragraphe, on essaye d'obtenir des propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance composite, basé sur un estimateur de moment initial pour des paramètres de nuisance. On va montrer sous quelles conditions initiales, on peut avoir un estimateur consistant, et la normalité asymptotique avec une vitesse de convergence \sqrt{T} et N peut potentiellement croître avec T .

Engle, Shephard et Sheppard [19] ont obtenu la propriété de consistance et le théorème central limite pour $\hat{\theta}_{CL}$, sous certaines conditions de régularité, ainsi Wu, Yao et Zhu [51]. A travers les deux théorèmes fondamentaux suivants, on va montrer la consistance et la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_{CL}$ lorsque $T \rightarrow \infty$ tandis que N est potentiellement accru avec T .

Théorème 4.3.1 *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- (i) *La condition (4.16),*
- (ii) *Les espaces des paramètres sont compacts,*
- (iii) *On suppose que*

$$\arg \max \frac{1}{TN} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \log f(y_{it}/\Omega_{i,t-1}; a_{0i}^*, \theta) \xrightarrow{p} \theta^*, \quad (4.25)$$

- (iv) *$\log f(y_{it}/\Omega_{i,t-1}; a_{0i}, \theta)$ est continûment différentiable en a_{0i} .*
- (v) *On suppose que la somme suivante satisfait la loi faible des grands nombres quand $T \rightarrow \infty$*

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sup_{a_{0i}, \theta} \left| \frac{\partial \log f(y_{it}/\Omega_{i,t-1}; a_{0i}, \theta)}{\partial a_{0i}} \right|, \quad (4.26)$$

- (vi)

$$\sup_{\theta} \max_{i \in \{1, \dots, N\}} |\hat{a}_{0i} - a_{0i}| \xrightarrow{p} 0, \quad (4.27)$$

alors il existe une solution de l'équation de vraisemblance (4.22), pour lequel

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta^*. \quad (4.28)$$

Preuve. Voir [19]. ■

Théorème 4.3.2 *Pour toute solution de l'équation de vraisemblance (4.22), on suppose que*

- (i) $Q_{it}(\theta, a_{0i})$ est une fois continûment différentiable.
- (ii) (a_{0i}^*, θ^*) est un point intérieur de $(\Lambda_i \times \Theta)$.
- (iii) on pose

$$Y_{t,T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \log f(y_{it}/\Omega_{i,t-1}; a_{0i}, \theta)}{\partial \theta'} - \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 \log f(y_{it}/\Omega_{i,t-1}; a_{0i}, \theta)}{\partial \theta \partial a_{0i}} \right) Q_{it}(\theta, a_{0i}) \right] \quad (4.29)$$

$$D_{i,\theta\theta,T} = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 \log f(y_{it}/\Omega_{i,t-1}; a_{0i}, \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] - \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 \log f(y_{it}/\Omega_{i,t-1}; a_{0i}, \theta)}{\partial \theta \partial a_{0i}} \right] \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial Q_{it}(\theta, a_{0i})}{\partial \theta'} \right] \quad (4.30)$$

$$D_{\theta\theta,T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{i,\theta\theta,T} \quad (4.31)$$

- (iv) on suppose que $(Y_{t,T})$ satisfait le théorème central limite i.e.

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{t,T} \xrightarrow{d} N(0, I_{\theta\theta}) \quad (4.32)$$

tel que les éléments diagonaux de $I_{\theta\theta}$ sont supposés définis positifs.

- (v) lorsque $T \rightarrow \infty$; $D_{\theta\theta,T} \xrightarrow{d} D_{\theta\theta} > 0, D_{\theta\theta}$ est inversible.

Alors $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, D_{\theta\theta}^{-1} I_{\theta\theta} D_{\theta\theta}^{-1})$. (4.1)

Preuve. Voir [19]. ■

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié, les propriétés probabilistes fondamentales du modèle *BL-GARCH*(1, 2), en se basant sur les études de Diongue, Guégan et Wolff [15], et Storti & Vitale [46], qui ont été faites dans cette classe de modèles. Ensuite, nous avons étudié l'inférence statistique, en

traitant le modèle en données de Panel, et en utilisant l'une des méthodes plus performante et efficace ainsi appelée la méthode du maximum de vraisemblance composite qui a été introduite par Lindsay [32], cette méthode présente de bonnes propriétés sous certaines conditions de régularité générales comme la propriété de la consistance et de la normalité asymptotique d'estimateurs.

Conclusion générale

La modélisation classique des séries chronologiques n'est pas toujours appropriée pour modéliser toutes les données temporelles, notamment dans certains domaines, par exemple en biologie, où ils existent des perturbations aléatoires, ainsi qu'en finance où la présence de l'hétéroscédasticité, ce qui exige l'émergence d'autres formes de modèles tels que les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (*RCA*).

Dans cette thèse nous avons traité cette classe de modèles (*RCA*), en étudiant certaines propriétés probabilistes des modèles *RCA*(1) et *RCA*(p) selon le modèle proposé et les conditions imposées sur les coefficients du modèle. Ainsi nous avons fait l'inférence statistique dans cette classe de modèles en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaire, la méthode du maximum de vraisemblance et celle des moments classique, afin d'obtenir des bonnes propriétés de ces estimateurs, comme la consistance et la normalité asymptotique.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, qui est un chapitre principal de ce travail, et qui a été publié comme un article scientifique, nous avons étudié une classe de modèles *BL-GARCH* (*GARCH* généralisé). Ces modèles peuvent être transformés aux modèles *RCA* et qui sont largement utilisés en finance pour traiter les effets de levier et le regroupement des extrêmes (volatility clustering). Dans la première partie nous avons établi certaines propriétés probabilistes de ces modèles. Ensuite dans la deuxième partie, nous nous sommes concentrés sur l'étude de l'inférence statistique dans cette classe de modèles, en s'appuyant sur l'une des méthodes statistiques dite la méthode du maximum de vraisemblance composite. Nous avons appliqué cette méthode sur un modèle *BL-GARCH* en données de panel et nous avons étudié

le comportement asymptotique d'estimateurs sous certaines conditions. Nous avons confirmé une bonne performance et supériorité de cette méthode par rapport à des méthodes existantes à travers les bonnes propriétés obtenues, comme la consistance et la normalité asymptotique de ses estimateurs.

Plusieurs recherches scientifiques ont été faites dans cette classe de modèles au cours des quarante dernières années, pour modéliser un grand nombre de données des séries chronologiques. Ce type de modélisation est encore l'objet des recherches approfondies de nombreux chercheurs où nous pouvons aborder ce sujet de nombreux aspects, notamment l'inférence statistique dans cette classe de modèles, en trouvant d'autres méthodes statistiques plus performantes telles que l'utilisation des méthodes d'estimation non paramétriques, les méthodes de bootstrap et sous différentes hypothèses.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Andel, J. (1976). Autoregressive series with random parameters. *Mathematische Operationsforschung und Statistik : A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 7(5),735–741.
- [2] Anděl, J. (1984) On Autoregressive Models With Random Parameters. *Asymptotic Statistics (2)*. Edited by Peter Mandel and Marie Hušková North-Holland.
- [3] Anh, V. V., and T. Chellia, T. (2000) Estimated Generalized Least Squares for Random Coefficient Regression Models. *Scand J Statist*, Vol 25 : p31-46.
- [4] Aue, A. (2003) Sequential Change Point Analysis based on Invariance Principles,Dissertation Universitat Koln.
- [5] Aue, A. (2006).Testing for parameter stability in RCA(1) time series. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 3070–3089.. *Mat.* 13, pages 45-50.
- [6] Aue, A., Berkes, I., and Horvath, L. (2007) A note on the existence of solutions to stochastic recurrence equation. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 7z (2VII), 837-849.
- [7] Aue, A., Horvath, L., and Steinebach, J. (2006) Estimation in random coefficient autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.* Vol. 27, No. 1, 61-76.
- [8] Baum, F. C., and Schaffer, M. F. (2002) Instrumental Variables and GMM Estimation and Testing. Boston college Economics Working paper 545, 02 November.
- [9] Beck, N., and Katz, J. N. (2004) Random Coefficient Models For Time Series Cross Section Data. *Social Science Working Paper*. September.
- [10] Besag, J. (1974) Spatial Interaction and the Statistical Analysis of Lattice Systems. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*36, 192-236.

-
- [11] Billingsley, P. (1968) Convergence of probability measures. John Wiley & Sons.
- [12] Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Jour. of Econo.* 31, 307-327.
- [13] Chelliah, N. (1997) A New Covariance Estimator in Random Coefficient Regression Model. *The Indian Journal of Statistics*, Vol. 60, Series A, Pt. 3, pp. 433-436.
- [14] Čojbašić, V. M. (2004) A Random Coefficient Autoregressive model (RCAR(1) Model). *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser*
- [15] Diongue, A. K., Guégan, D., and Wolff, R. C. (2009) BL-GARCH models with elliptical distributed innovations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. Vol. 00, No. 0, 1-17.
- [16] Engle, R. F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, 987-1007.
- [17] Engle, R. F., Hendry, D. F., and Richard, J. F. (1983) Exogeneity. *Econometrica* 51, 277-304.
- [18] Engle, R. F., and Mezrich, J. (1996) GARCH for groups. *Risk*, 9, 36-40.
- [19] Engle, R. F., Shephard, N., and Sheppard, K. (2008) Fitting vast dimensional time-varying covariance models. Working paper.
- [20] Fink, T. (2013) Statistical inference for autoregressive models with random coefficients and with functional realizations. Doctoral dissertation. Department of Mathematics, Technische Universität Braunschweig.
- [21] Fink, T. and Kreiss, J. P. (2013) Bootstrap for random coefficient autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.* 34, 646–667.
- [22] Fink, T. and Kreiss, J. P. (2014) Simultaneous bootstrap for all three parameters in random coefficient autoregressive models. *Journal of the Korean Statistical Society*, 1-14.
- [23] Francq, C., and Zakoian, J. M. (2010) GARCH Models. WILEY.
- [24] Hamilton, J. D. (1994) Time-series analysis. Princeton University Press, Princeton New Jersey.
- [25] Hill, J., and Peng, L. (2014) Unified interval estimation for random coefficient autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.* 35, 282-297.

- [26] Hsiao, C. (1975) Some Estimation Methods for a Random Coefficient Model. *Econometrica*, Vol. 43, N° 2, pp. 305-326.
- [27] Hsiao, C. (2003) *Analysis of Panel Data*. Economic society monographs. N°. 34, 2nd Edition, New York : Cambridge University Press.
- [28] Hsiao, C. and Persaran, M. H. (2004) *Random Coefficient Panel Data Models*. IZA DP N° 1236.
- [29] Hwang, S. Y., and Basawa, I. V. (1998) Parameter estimation for generalized random coefficient autoregressive processes. *Journal of Statistical Planning and Inference* 68, 323-337.
- [30] Larribe, F., and Fearnhead, P. (2011) On composite Likelihoods In *Statistical Genetics*. *Statistica Sinica* 21, 43-69.
- [31] Lee, S. (1998) Coefficient constancy test in a random coefficient autoregressive model. *Journal of Statistical Planning and Inference* 74, 93-101.
- [32] Lindsay, B. (1988) Composite likelihood methods. In *statistical inference from stochastic processes*, (Edited by N. U. Prabhu). American Mathematical Society, Providence, RI., 221-239.
- [33] Lon-Mu Liu. (1980) Random coefficient first-order autoregressive models. *J. of Econometrics*, Vol. 13, 305-325.
- [34] Monlenberghs, G. and Vervbeke, G. (2005) *Models for Discrete Longitudinal Data*. Springer, New York.
- [35] Nelson, D. B. (1990) Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, 6, 318-334.
- [36] Nicholls, D. F., and Quinn, B. G. (1980). The estimation of random coefficient autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 37-46.
- [37] Nicholls, D. F., and Quinn, B. G. (1982). *Random coefficient autoregressive models : an introduction*. In *Lecture notes in statistics*. Springer.
- [38] Nicholls, D. F., and Pagan, A. R. (1985) Varying coefficient regression. E. J. Hannan, P. R. Krishnaiah, M. M. Rao, eds, *Handbook of Statistics*, Vol. 5, 413-449.
- [39] Pace, L., Salvan, A., and Sartori, N. (2011) Adjusting composite likelihood ratio statistics. *Statistica Sinica* 21, 129-148.
- [40] Pagan, A. R. (1980) Some identification and estimation results for regression models with stochastically varying. *J. of Econometrics*, Vol. 13, 341-363.

- [41] Pakel, C., Shephard, N., and Sheppard, K. (2011) Nuisance parameters, composite likelihoods and panel of GARCH models. *Statistica Sinica* 21, 307-329.
- [42] Posedel , P. (2005) Properties and estimation of GARCH(1,1) model. *Metodoloski zveski*, Vol. 2, N°. 2, 243-257.
- [43] Richard, A. D., and Chun, Y. Y. (2011) Comments on pairwise likelihood in time series models. *Statistica Sinica* 21, 255-277.
- [44] Robinson, P. M. (1978) Statistical Inference for a Random Coefficient Autoregressive Model. *Scand. J. Statist* 5 Vol. 5, p163-168.
- [45] Rudolph, A. (1998) A Central limit theorem for random coefficient autoregressive models and ARCH/GARCH models. *Adv. Appl. Prob.* 30, 113-121.
- [46] Storti, G and Vitale, C. (2003) BL-GARCH models and asymmetries in volatility. *Statist. Methods Appl.* 12 , 19-40.
- [47] Swamy, P. A. V. B. (1971). *Statistical Inference in a Random Coefficient Regression Models*. Springer, New York.
- [48] Swamy, P. A. V. B. (1970). Efficient Inference in a Random Coefficient Regression Models. *Econometrica*, Vol. 38. N°. 2, 311-323.
- [49] Varin, C., Reid, N., and Firth, D. (2011) An overview of composite likelihood methods. *Statistica Sinica* 21, 5-42.
- [50] West, K. D. (2002) Efficient GMM estimation of weak AR processes. *Economics Letters* 75, pages 415-418.
- [51] Wu, B., Yao, Q., and Zhu, S. (2013) Estimation in the Presence of Many Nuisance Parameters : composite likelihood and plug-in likelihood. *Stochastic Processes and Their Applications*, 123 (7), 2877-2896.