



Département ...Génie Civil.....

# Polycopié pédagogique

**Dossier numéro** (à remplir par l'administration) : .....

## Titre

.....DYNAMIQUE DES STRCUTURES 1 (DDS 1) .....

Cours destiné aux étudiants de

Master (spécialité et niveau) : .....Master 1 Structures.....

Année : ..2024..

# Sommaire

---

## CHAPITRE I : Introduction

1. Introduction.....	1
2. Approches d'analyse dynamique pour trouver la réponse structurelle .....	2
3. La modélisation .....	3
3.1. Modélisation de la charge dynamique .....	7
3.2. Modélisation de la structure.....	7
3.3. Représentation générale du modèle physique .....	20
3.4. Modélisation de la réponse de la structure.....	20
4. Formulation d'équation du mouvement.....	22
4.1. Loi de Newton.....	22
4.2. Principe de d'Alembert .....	23
5. Comparaison entre un calcul dynamique et celui statique.....	24
6. Vibrations des systèmes dynamiques.....	25
6.1. Vibration non forcée .....	25
6.2. Vibration forcée .....	25
6.3. Vibrations non amorties.....	25
6.4. Vibration amortie.....	25
7. Méthodes de solution de l'équation différentielle .....	26
7.1. Solution classique .....	26
7.2. Intégrale de Duhamel.....	27
7.3. Méthode du domaine de fréquence .....	27
7.4. Méthodes numériques .....	28

## CHAPITRE II : Systèmes à un seul degré de liberté

1. Système libre non-amorti .....	29
1.1. Formulation de l'équation de mouvement .....	29
1.2. Paramètres .....	30
1.3. Application.....	33

2. Système libre amorti .....	35
2.1. Formulation de l'équation de mouvement .....	35
2.2. Système à amortissement critique : $\zeta = 1$ .....	36
2.3. Système sur-amorti : $\zeta > 1$ .....	36
2.4. Système sous-amorti : $\zeta < 1$ .....	36
2.5. Comparaison entre les trois systèmes amortis .....	37
2.6. Décrément logarithmique.....	39
2.7. Applications .....	40
3. Système force non amorti sous charge harmonique .....	43
3.1. Formulation de l'équation de mouvement .....	43
3.2. Paramètres .....	42
3.3. Phénomène de résonance .....	45
3.4. Applications .....	46
4. Système force amorti sous charge harmonique .....	49
4.1. Formulation de l'équation de mouvement .....	49
4.2. Déformation maximale et décalage de phase .....	50
4.3. Phénomène de résonance .....	54
4.4. Facteurs de réponse dynamique .....	56
4.5. Fréquences de résonance.....	58
4.6. Évaluation de l'amortissement à partir de la courbe de résonance .....	59
4.7. Applications .....	60
5. Système forcé sous charge générale .....	63
5.1. Les méthodes de résolution.....	63
5.2. Formulation de l'équation de mouvement sous charge impulsive.....	64
5.3. Intégrale de Duhamel pour un système non-amortie .....	65
5.4. Intégrale de Duhamel pour un système amortie .....	66
5.5. Applications .....	66
6. Réponse au mouvement d'un support.....	67
6.1. Excitation harmonique du support.....	68
6.2. Excitation sismique du support.....	70
7. Spectres de réponse.....	71

7.1. Concept du spectre de réponse.....	73
7.2. Spectre de réponse en déformation.....	74
7.3. Spectre de réponse en pseudo-vitesse.....	74
7.4. Spectre de réponse en pseudo-accélération.....	74
7.5. Spectres de réponse tripartite.....	75
7.6 Applications.....	77

### **CHAPITRE III : Systèmes à plusieurs degrés de libertés**

1. Système a deux degrés de libertés .....	82
1.1. Formulation de l'équation de mouvement.....	82
1.2. Matrices de masse, amortissement, et de rigidité .....	83
1.3. Vibration libre du système à deux degrés sans amortissement.....	84
1.4. Problème des valeurs propres .....	84
1.5. Application.....	86

<b>Références.....</b>	<b>91</b>
------------------------	-----------

### **Annexes**

Annexe A.....	92
Annexe B.....	107

# **Chapitre : I**

## **Introduction et généralité**

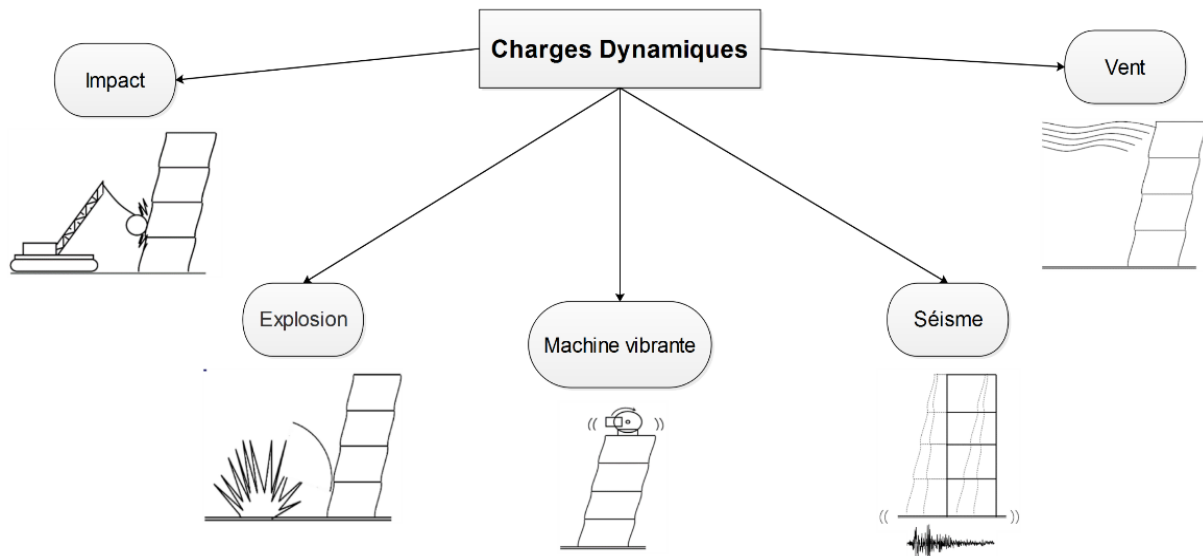
## 1. Introduction

Dans le contexte de la mécanique des structures, la dynamique est la branche qui concerne l'étude des oscillations des structures soumises à diverses sollicitations en général et aux séismes en particulier. En bref, par rapport à la statique familière aux ingénieurs du génie civil, la dynamique fait intervenir un paramètre supplémentaire : le temps. Les bases théoriques de la dynamique proviennent de la physique générale. Par conséquent, il s'agit d'une matière plutôt théorique dont les développements requièrent quelques notions mathématiques, notamment de calcul matriciel pour traiter les systèmes à plus d'un degré de liberté.

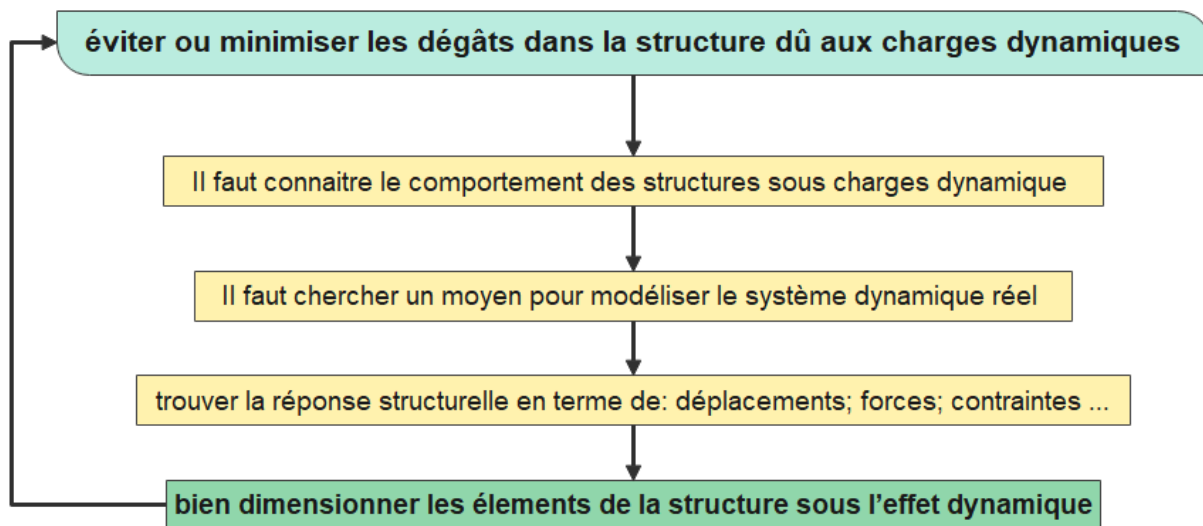


En prenant le premier terme dynamique, quelque chose de dynamique est celui qui est actif et change avec le temps. Tandis qu'une structure est la composition de plusieurs éléments linéaires, surfaciques ou volumiques. Donc, on dit que la dynamique des structures est l'étude du comportement (du mouvement) de la structure avec le temps (quand elle sera active ! !). Puisque la structure est déjà soumise, des forces statiques ne provoquent pas un comportement qui change avec le temps. Donc, le seul moyen qu'une structure en génie civil entre en vibration ou en mouvement, c'est sous l'effet d'une charge dynamique importante. À cet égard, le domaine de la dynamique des structures est l'étude du comportement de la structure dans le temps sous l'effet d'une charge dynamique.

La figure ci-dessous présente certaines charges dynamiques importantes qui peuvent engendrer une vibration dans la structure (une structure encadrée à la base vibre sous l'effet d'une charge dynamique, ne se déplace pas comme les véhicules ! !). C'est pour cela qu'on dit vibration (qui est le mouvement d'oscillation autour d'une position d'équilibre).

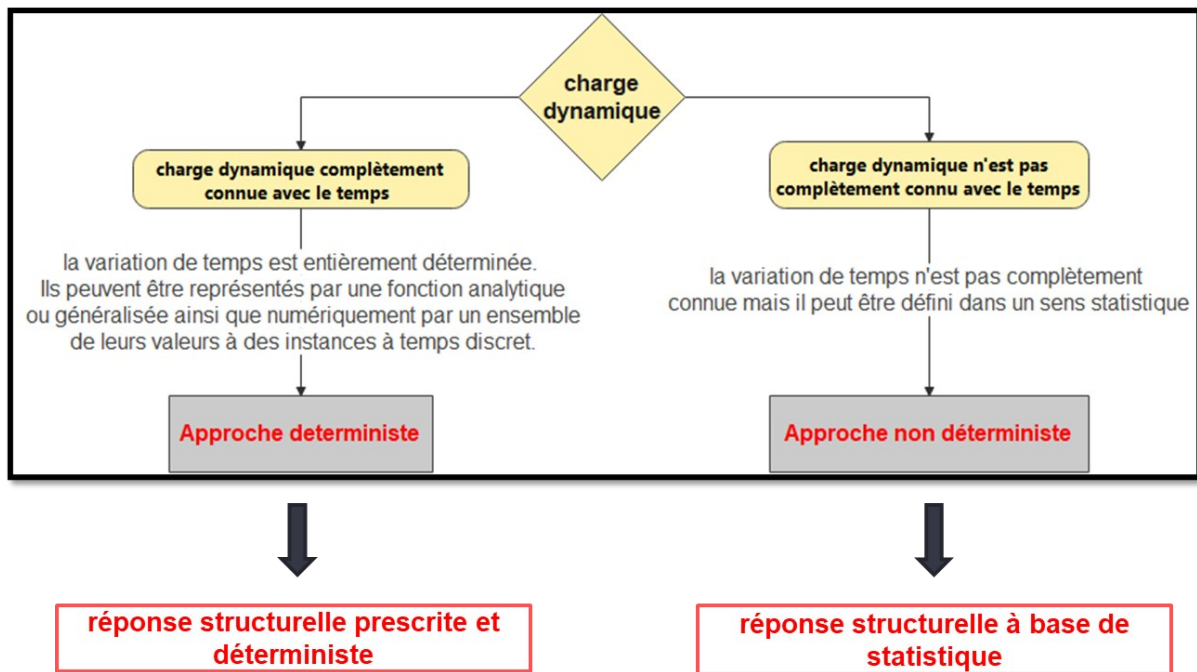


Ces charges dynamiques peuvent causer des dégâts dans la structure, donc l'objectif derrière l'étude de la dynamique des structures est d'éviter ou de minimiser ces dégâts. Pour atteindre ce but, la figure suivante présente les étapes à suivre :



## 2. Approches d'analyse dynamique pour trouver la réponse structurelle

Les charges dynamiques peuvent être classées en deux grands groupes qui caractérisent l'approche qui va évaluer la réponse de la structure. Donc, ce cours va traiter principalement les méthodes d'analyse déterministe. En général, la réponse structurelle à tout chargement dynamique est exprimée essentiellement en termes de déplacements de la structure. Ainsi, une analyse déterministe conduit directement à des historiques de déplacement correspondant à l'historique de chargement prescrit ; d'autres grandeurs de réponse connexes, telles que les contraintes, les déformations, les efforts internes, etc., sont généralement obtenues comme phase secondaire de l'analyse.



### 3. La modélisation

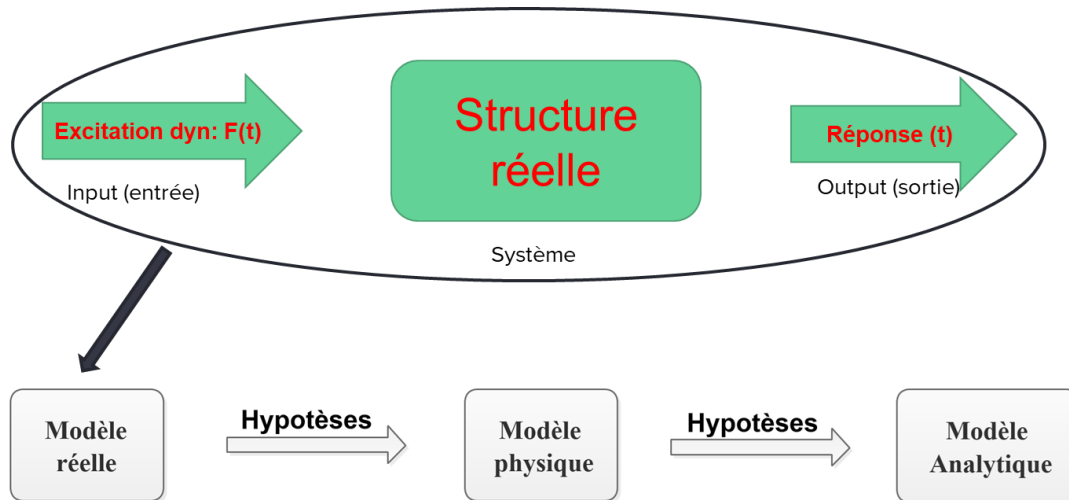
L'analyse et la conception de structures pour résister à l'effet produit par des forces ou des mouvements dépendant du temps nécessitent des idéalizations conceptuelles et des hypothèses simplificatrices à travers lesquelles le système physique est représenté par un système idéalisé connu sous le nom de modèle analytique ou mathématique. Ces idéalizations ou hypothèses simplificatrices peuvent être classées dans les trois groupes suivants:

1. Hypothèses importantes. Ces hypothèses ou simplifications incluent les propriétés des matériaux tels que l'homogénéité ou l'isotropie et les comportements des matériaux telles que la linéarité ou l'élasticité.
2. Hypothèses de chargement. Certaines hypothèses de charge courantes consistent à considérer des forces concentrées à appliquer en un point géométrique, à supposer des forces soudainement appliquées ou à supposer des forces externes pour être constantes ou périodiques.
3. Hypothèses géométriques. Une hypothèse générale pour les poutres, les cadres et les fermes consiste à considérer que ces structures sont formées par des éléments unidirectionnels. Une autre hypothèse courante consiste à supposer que certaines structures telles que les plaques sont des systèmes bidimensionnels avec des épaisseurs relativement petites. Il est plus important de supposer que les structures continues peuvent être analysées en tant que systèmes discrets en spécifiant les emplacements (nœuds) et les directions des déplacements (coordonnées nodales) dans les structures, comme décrit dans la section suivante.

La structure réelle ne peut pas être analysée: elle ne peut être « testée en charge » que pour déterminer la réponse

- On ne peut analyser qu'un « modèle » de la structure

- Nous avons donc besoin d'outils pour modéliser la structure et analyser le modèle



Les sorties d'un système vibrant, en général, dépendent des conditions initiales et des excitations externes. L'analyse vibratoire d'un système physique peut se résumer en trois étapes:

### 1. Modélisation mathématique d'un système physique

Le but de la modélisation mathématique est de déterminer l'existence et la nature du système, ses caractéristiques et ses aspects, et les éléments ou composants physiques impliqués dans le système physique. Les hypothèses nécessaires sont faites pour simplifier la modélisation.

Le modèle mathématique résultant peut-être linéaire ou non linéaire, selon le système physique donné. De manière générale, tous les systèmes physiques présentent un comportement non linéaire. Une modélisation mathématique précise de tout système physique conduira à des équations différentielles non linéaires régissant le comportement du système. Souvent, ces équations différentielles non linéaires n'ont pas de solution ou sont difficiles à trouver. Des hypothèses sont faites pour linéariser un système, ce qui permet des solutions rapides à des fins pratiques. Les avantages des modèles linéaires sont les suivants :

- (1) leur réponse est proportionnelle à l'entrée
- (2) la superposition est applicable
- (3) ils se rapprochent étroitement du comportement de nombreux systèmes dynamiques
- (4) leurs caractéristiques de réponse peuvent être obtenues à partir de la forme d'équations du système sans solution détaillée

- (5) une solution sous forme fermée est souvent possible
- (6) les techniques d'analyse numérique sont bien développées, et
- (7) ils servent de base à la compréhension de comportements de systèmes non linéaires plus complexes.

Il convient toutefois de noter que dans la plupart des problèmes non linéaires, il n'est pas possible d'obtenir des solutions analytiques sous forme fermée pour les équations du mouvement. Par conséquent, une simulation informatique est souvent utilisée pour l'analyse de la réponse.

Lors de l'analyse des résultats obtenus à partir du modèle mathématique, il faut se rendre compte que le modèle mathématique n'est qu'une approximation du système physique vrai ou réel et donc que le comportement réel du système peut être différent.

Une fois le modèle mathématique développé, nous pouvons appliquer les lois fondamentales de la nature et les principes de la dynamique et obtenir les équations différentielles qui régissent le comportement du système. Une loi fondamentale de la nature est une loi physique applicable à tous les systèmes physiques, quel que soit le matériau à partir duquel le système est construit. Différents matériaux se comportent différemment dans différentes conditions de fonctionnement. Les équations constitutives fournissent des informations sur les matériaux dont un système est fait. L'application de contraintes géométriques telles que la relation cinématique entre le déplacement, la vitesse et l'accélération est souvent nécessaire pour compléter la modélisation mathématique du système physique. L'application de contraintes géométriques est nécessaire pour formuler la frontière et / ou les conditions initiales requises.

Le modèle mathématique résultant peut-être linéaire ou non linéaire, selon le comportement des éléments ou composants du système dynamique

## 2. Solution mathématique des équations gouvernantes

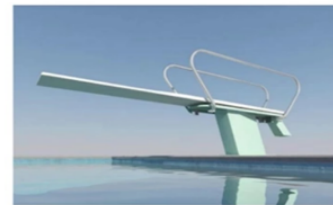
La modélisation mathématique d'un système de vibration physique aboutit à la formulation des équations gouvernantes du mouvement. La modélisation mathématique de systèmes typiques conduit à un système d'équations différentielles du mouvement. Les équations gouvernant le mouvement d'un système sont résolues pour trouver la réponse du système. Il existe de nombreuses techniques disponibles pour trouver la solution, à savoir les méthodes standard pour la résolution d'équations différentielles ordinaires, les méthodes de transformation de Laplace, les méthodes matricielles et les méthodes numériques. En général, des solutions analytiques exactes sont disponibles pour de nombreux systèmes dynamiques linéaires, mais

seulement pour quelques systèmes non linéaires. Bien entendu, les solutions analytiques exactes sont toujours préférables aux solutions numériques ou approximatives.

### 3. Interprétation physique des résultats

La solution des équations de mouvement régissant le système physique donne généralement la performance. Pour vérifier la validité du modèle, les performances prévues sont comparées aux résultats expérimentaux. Le modèle peut devoir être affiné ou un nouveau modèle est développé et une nouvelle prédiction comparée aux résultats expérimentaux. L'interprétation physique des résultats est une étape importante et finale de la procédure d'analyse. Dans certaines situations, cela peut impliquer (a) de tirer des inférences générales de la solution mathématique, (b) d'élaborer des courbes de conception, (c) d'arriver à une simple arithmétique pour arriver à une conclusion (pour un problème typique ou spécifique), et (d) des recommandations concernant l'importance des résultats et tout changement (le cas échéant) requis ou souhaitable dans le système concerné.

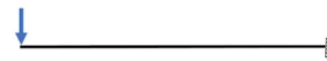
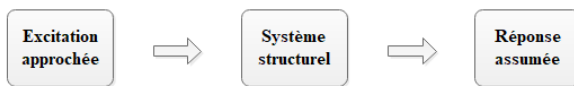
#### **Systeme réel**



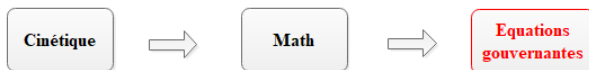
#### **Modèle Physique**

*hypothèses basées sur jugements d'engineering*

- 1- form géométrique (voir figure ci-contre)
- 2- propriétés des matériaux
- 3- petite ou large déflexion
- 4- charge concentrée malgré est répartie sous le pied de nageur
- 5- les conditions aux limite (encastrement)



#### **Modèle analytique**



On applique les lois de la cinématique et cinétique (dynamique du point matériel)

- Les équations d'équilibres
- les relations contraintes déformations
- les relations charges déplacements

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

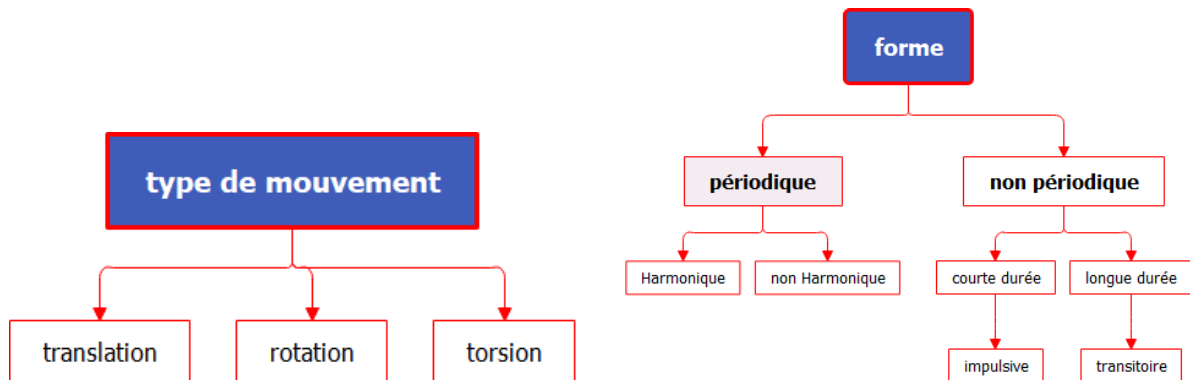
équation de la courbe élastique

résolution

Déformation, forces, contraintes, .....

### 3.1. Modélisation de la charge dynamique

On suppose que la force dynamique  $F(t)$  a certaine forme et certain comportement (mouvement)



Impulsive: vent, explosion ....

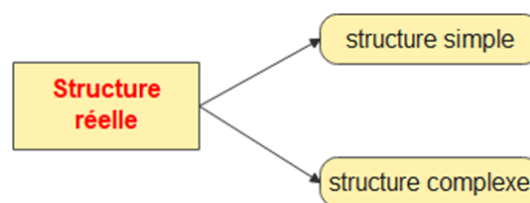
Transitoire: séismes

### 3.2. Modélisation de la structure

On a mentionné que la structure réelle ne peut pas être analyser, donc on doit la modéliser



Généralement, en génie civil, on peut diviser les structures en deux catégories, celles simples dont la forme et les éléments sont simples (barre, poteau, poutres, plancher rigide, simple ou multiétages...). Et les structures complexes dont la géométrie est très compliquée et elles peuvent comporter des éléments compliqués à modéliser et à analyser (coques, plaques, plancher déformable...).



Dans ce contexte, on doit commencer l'étude en dynamique des structures par les structures simples pour pouvoir comprendre d'abord les principes de base et par la suite on peut généraliser ces derniers aux autres cas de structures.

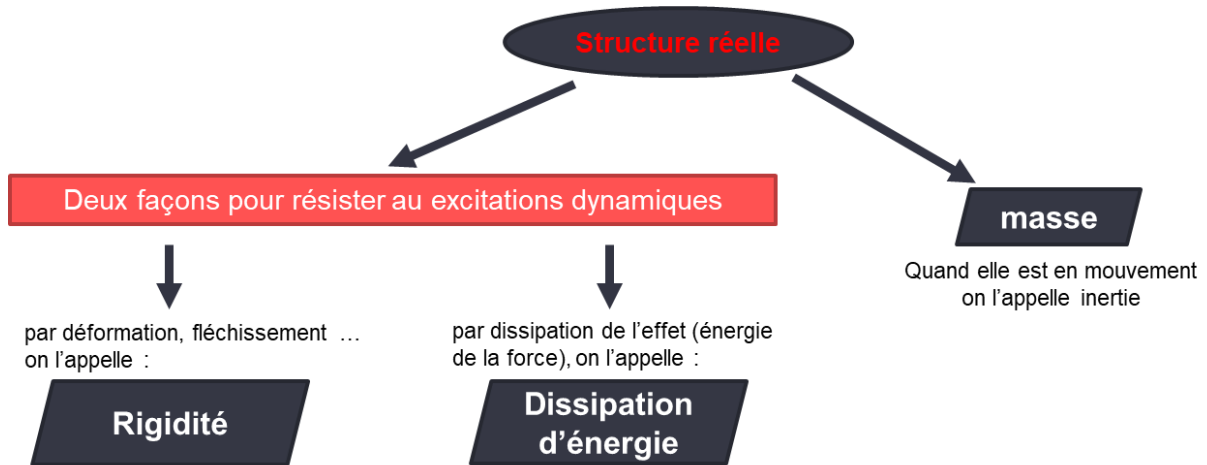
Maintenant pour savoir comment modéliser une structure réelle en dynamique il faut connaître son comportement sous l'effet d'une charge dynamique qui varie avec le temps.

- Quand on applique une force dynamique, la structure va résister ou réagir contre cette force de deux façons :

1- par déformer et ce qu'on appelle ELASTICITE (rigidité)

2- par dissipation de l'effet de cette force ou on dit l'énergie de cette force et ce qu'on appelle DISSIPATION D'ENERGIE

- Donc, en général, une structure en analyse dynamique n'a pas plus de trois paramètres intrinsèques.

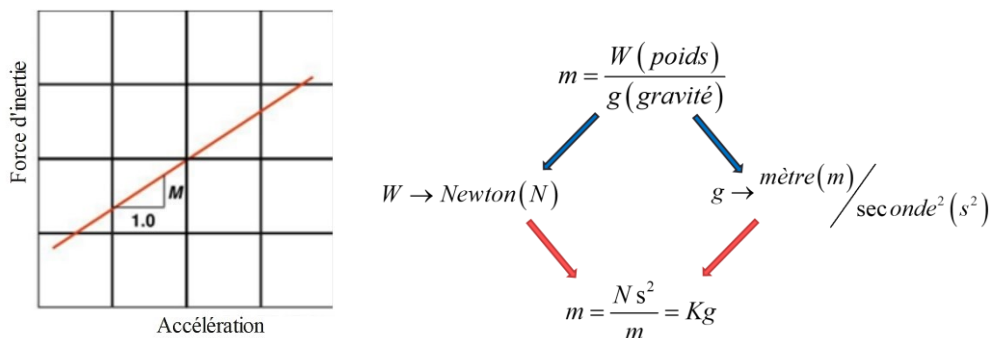


- Le modèle est le paramètre le plus important en dynamique des structures
- Le modèle peut être simple ou complexe (en ingénierie on doit le rendre le plus simple possible pour pouvoir l'analyser)
- Le modèle doit contenir toutes les trois caractéristiques intrinsèques d'une structure réelle MASSE – RIGIDITÉ – DISSIPATION D'ENERGIE

NB : par conséquent, pour pouvoir modéliser une structure réelle, il faut modéliser ses composants qui participent à son comportement dynamique, à savoir la masse, la rigidité et le paramètre responsable de la dissipation d'énergie qu'on l'appellera ici amortissement.

### 3.2.1 Modélisation de la masse

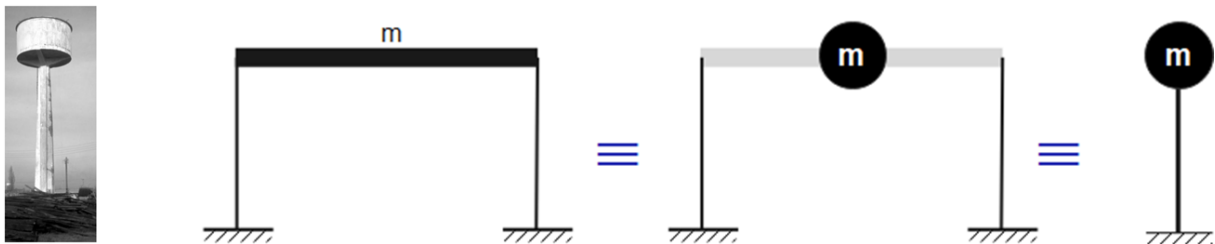
Dynamiquement, la masse inclut tout le poids de la structure et elle peut inclure certaines charges variables aussi. Les masses engendrent des forces d'inertie qui font osciller la structure. On peut dire donc que la masse est la pente entre la force d'inertie et l'accélération, par conséquent son unité est de force/accélération



Elles peuvent habituellement être considérées comme concentrées en un certain nombre de points de la structure. Dans le cas où la masse est répartie plus uniformément, il est possible de simplifier l'analyse à un oscillateur simple équivalent. Une alternative consiste à subdiviser artificiellement la structure et à concentrer les masses de chaque subdivision au milieu du segment.

**a. Masse concentrée (masse discrète)**

Masse de nature concentrée. Plusieurs masses se déplacent de la même façon, on doit les concentrer pour simplifier le calcul.



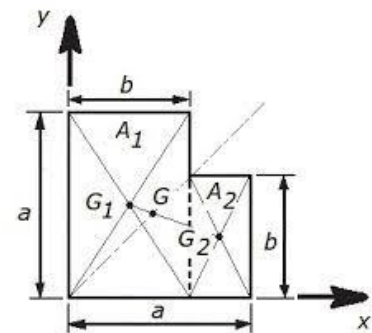
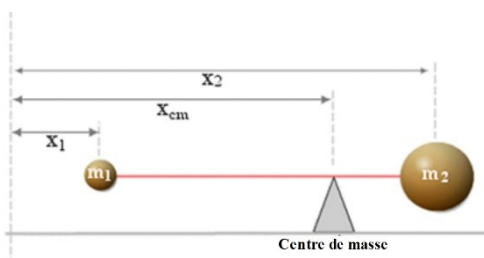
**Centre de masse concentrée**

En dynamique, le CM est très important, car la trajectoire d'un corps qui meut est en fait celle de son centre de masse, puisque l'objet est représenté par un point matériel.

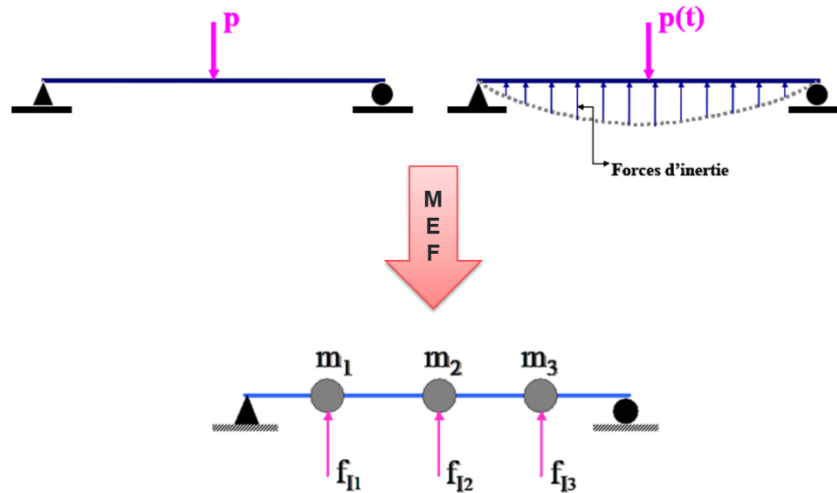
Le centre de masse CM d'un corps est le point situé à la position moyenne de la masse du corps.

$$m_{tot} = \sum_{i=1}^N m_i \qquad x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m_{tot}} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m_{tot}}$$

**Centre de masse VS le centre géométrique (centre de gravité)**

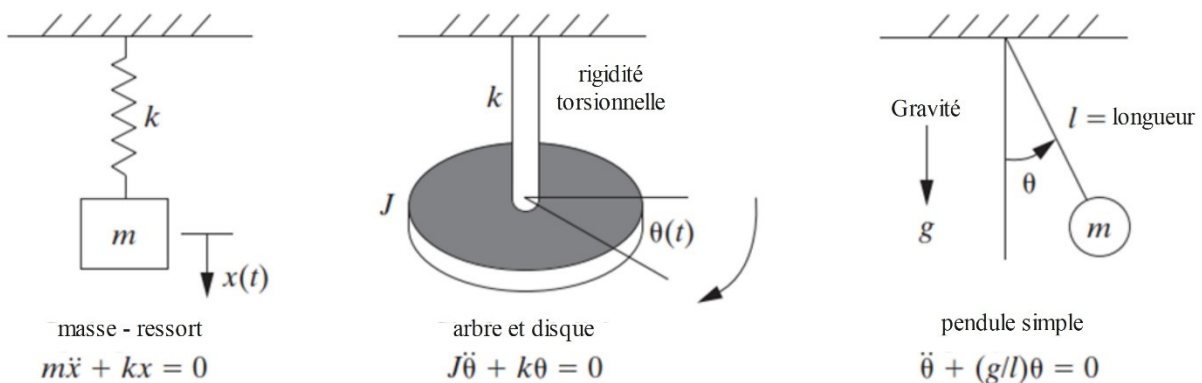


**b. Masse répartie (masse continue)**



**c. Degrés de liberté**

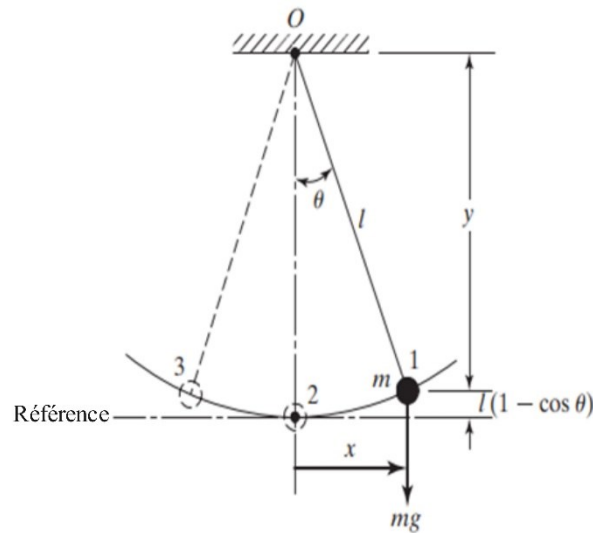
Le nombre minimum de coordonnées indépendantes nécessaires pour déterminer complètement les positions de toutes les parties d'un système à tout instant définit le degré de liberté du système. Un système à un seul degré de liberté ne nécessite qu'une seule coordonnée pour décrire sa position à tout instant. Généralement, les structures peuvent être modélisées en considérant que les masses sont concentrées dans quelques éléments particuliers, comme les dalles d'étage des bâtiments, par exemple. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté par direction principale est égal au nombre d'étages. En effet, la connaissance des déplacements horizontaux de chaque étage permet de décrire les oscillations du bâtiment.



Pour le pendule simple de la figure, le mouvement peut être exprimé en termes de  $\theta$  ou de  $x$  et  $y$ . Si les coordonnées  $x$  et  $y$  sont utilisées pour décrire le mouvement, il faut reconnaître que ces coordonnées ne sont pas indépendantes. Ils sont liés les uns aux autres par la relation :

$$x^2 + y^2 = l^2$$

où  $l$  est la longueur constante du pendule. Ainsi, n'importe quelle coordonnée peut décrire le mouvement du pendule.

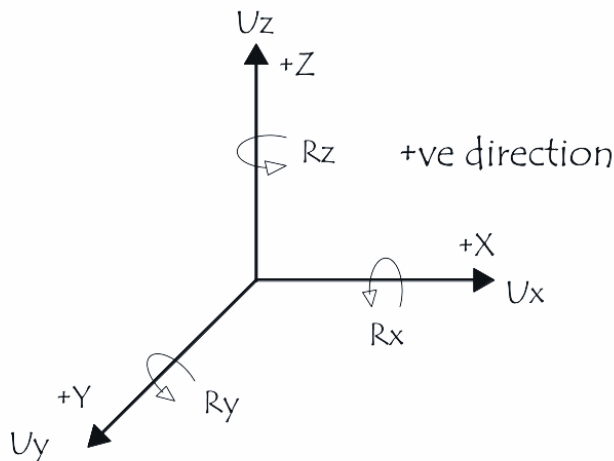


Dans cet exemple, nous constatons que le choix de  $\theta$  comme coordonnée indépendante sera plus pratique que le choix de  $x$  et  $y$ .

**Degrés de liberté d'un point en 3D**

Le point se déplace dans l'espace (3D) en 6 mouvements divisés en :

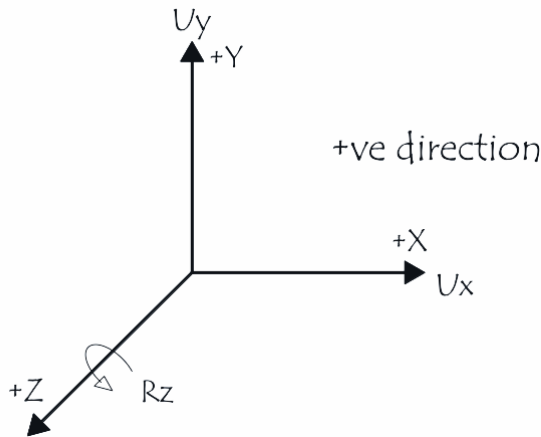
- ❖ Trois degrés de liberté de translation :
  - mouvement de translation dans la direction de l'axe  $x$  noté  $u_x$
  - mouvement de translation dans la direction de l'axe  $y$  noté  $u_y$
  - mouvement de translation dans la direction de l'axe  $z$  noté  $u_z$
- ❖ Trois degrés de liberté de rotation :
  - rotation autour de l'axe  $x$  notée  $R_x$
  - rotation autour de l'axe  $y$  notée  $R_y$
  - rotation autour de l'axe  $z$  notée  $R_z$



**Degrés de liberté d'un point en 2D**

le point en plan (2D) se déplace en 3 mouvements divisés en :

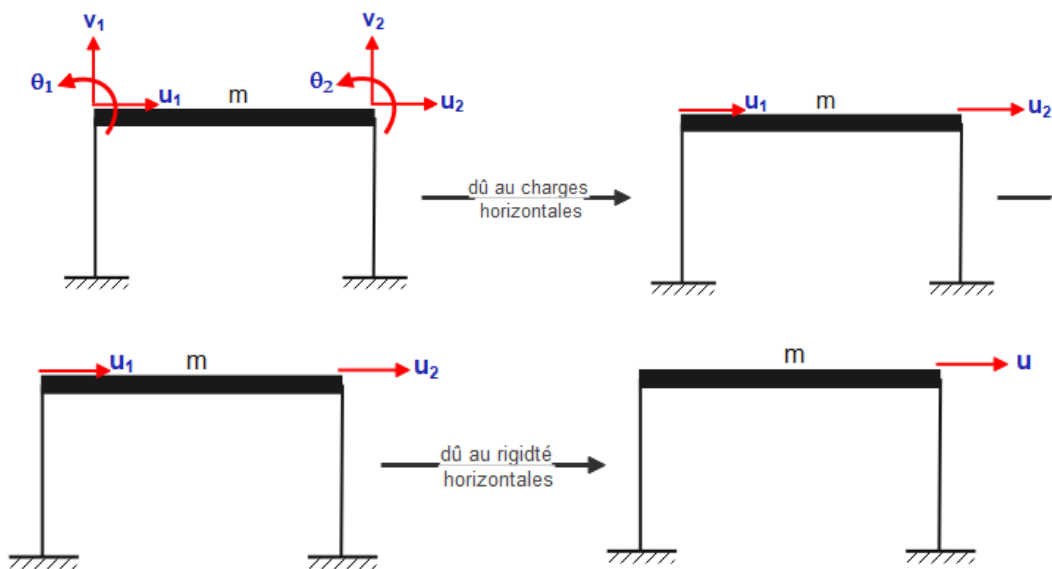
- ❖ Deux degrés de liberté en translation :
  - mouvement de translation dans la direction de l'axe x noté  $u_x$
  - mouvement de translation dans la direction de l'axe y noté  $u_y$
- ❖ Rotation autour de l'axe z notée  $R_z$

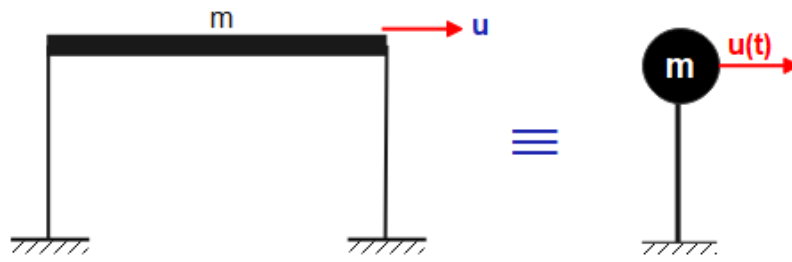


**Différence entre DDL et DDH**

En 3D chaque nœud a 6 degrés de liberté, et en 2D, il y aura 3 degrés de liberté par nœud, cependant, Il faut distinguer entre le DDH et le DDL.

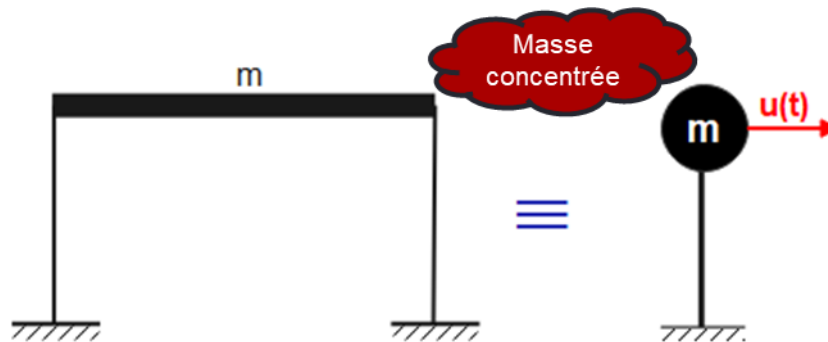
**Simplification des DDLs**



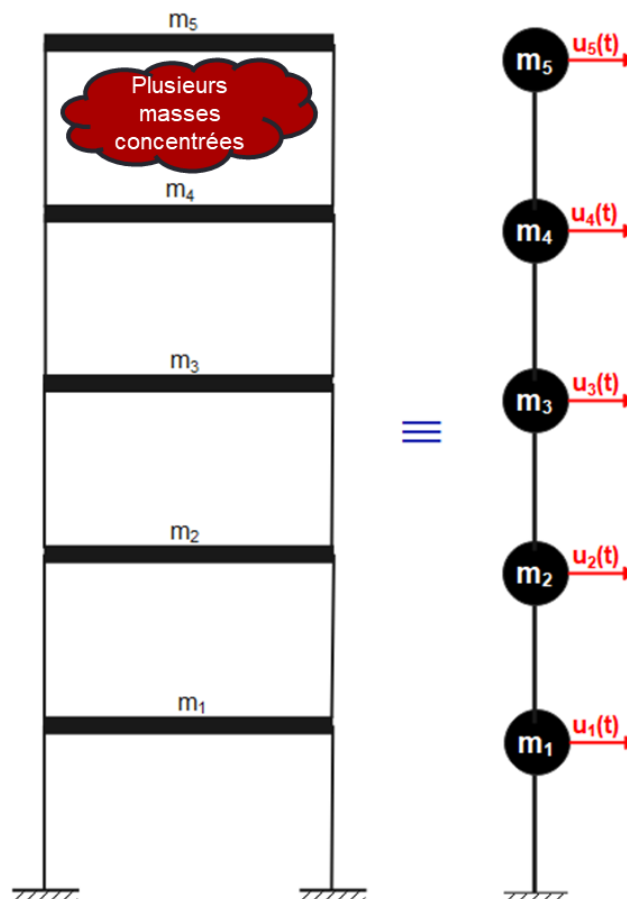


**Types de degré de liberté**

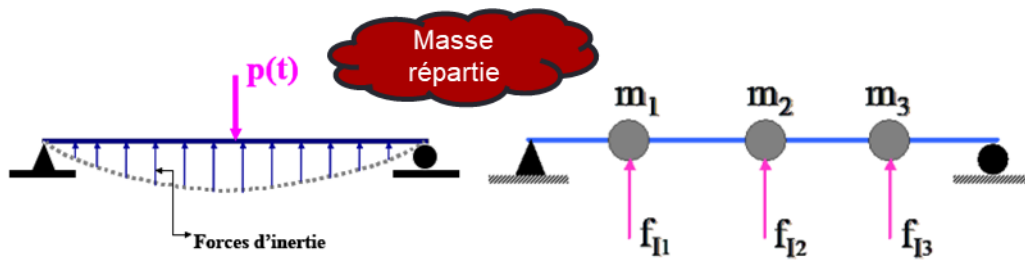
**1- Un seul degré de liberté**



**2- Plusieurs ou multi degrés de libertés**



### 3- Infinité de degrés de libertés

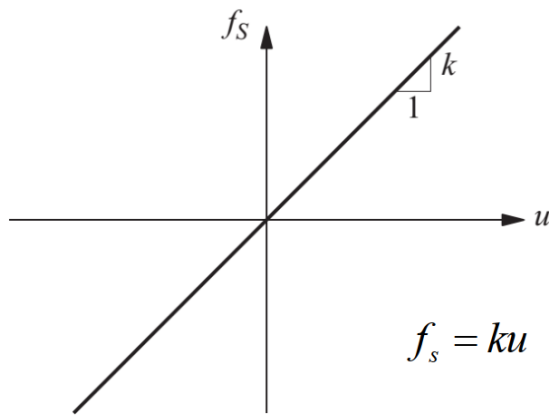


#### 3.2.2 Modélisation de la rigidité

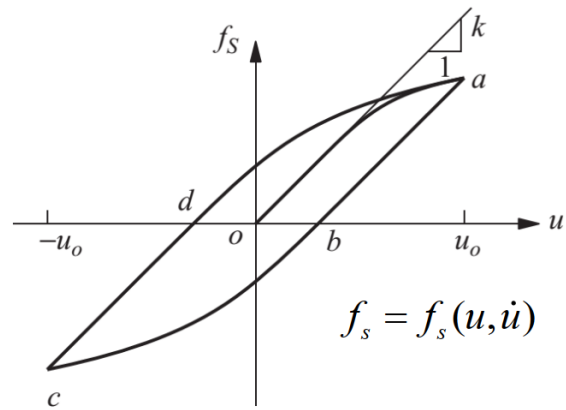
La rigidité est associée aux forces de rappel exercées sur les masses par les éléments stabilisateurs d'une structure en fonction des déplacements de celle-ci. Dans le cas linéaire, ces forces sont directement proportionnelles aux déplacements. La constante de proportionnalité est la rigidité ( $k$ ), horizontale ou verticale. Conformément à la figure 1.1a, la rigidité est habituellement représentée schématiquement par des ressorts. Pour un système composé de plusieurs ressorts, on peut déterminer une rigidité équivalente. La figure 1.5 présente les cas de base de ressorts disposés en série et en parallèle avec les rigidités équivalentes associées ( $k_{\text{éq}}$ ). Notons que la représentation graphique peut être trompeuse, car l'analogie électrique est un système de condensateurs et non un système de résistances. Avec des structures plus complexes, il faut se référer aux méthodes habituelles de la mécanique des structures pour déterminer la rigidité équivalente. Remarquons finalement que les ressorts sont admis sans masse.

En termes structurels, la rigidité peut être définie comme « Résistance à la déformation »

- Inclus la rigidité de tous les membres
- Peut inclure la rigidité des éléments non-structuraux
- Donc pour chaque type de déformation, il y a une rigidité correspondante
- La rigidité peut être considérée ou évaluée à différents niveaux
- La rigidité est également la « constante » dans la relation action-déformation
- La rigidité  $k$  a une unité de force/déplacement  $k = \text{N/m}$



Pour les petites déformations



Pour les grandes déformations

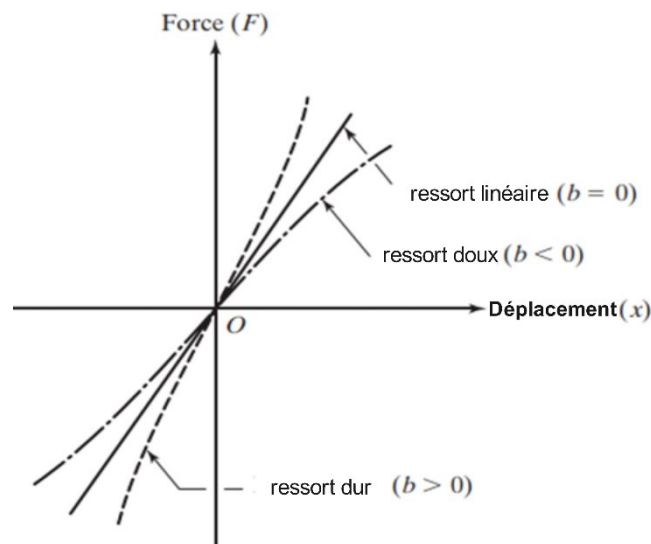
- La rigidité généralement non-linéaire en réponse sismique
- La non-linéarité implicitement traitée dans les codes sismiques
- Explicitement, l'effet de la non-linéarité peut être modélisé

**a. Types de rigidités**

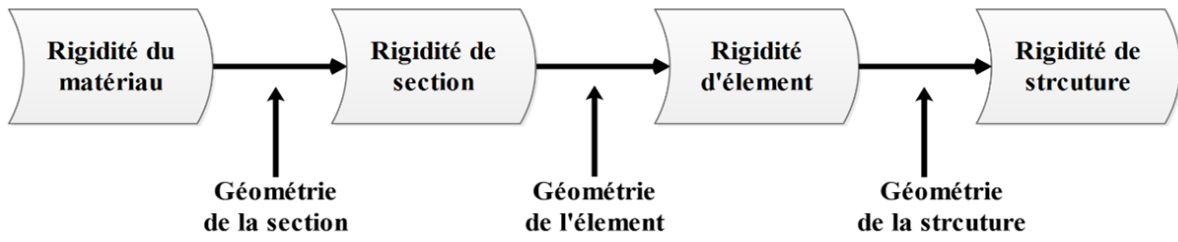
La plupart des ressorts utilisés dans les systèmes pratiques présentent une relation force-déflexion non linéaire, en particulier lorsque les déflexions sont importantes. Si un ressort non linéaire subit de petites déflexions, il peut être remplacé par un ressort linéaire.

$$F = ax + bx^3 \quad a > 0$$

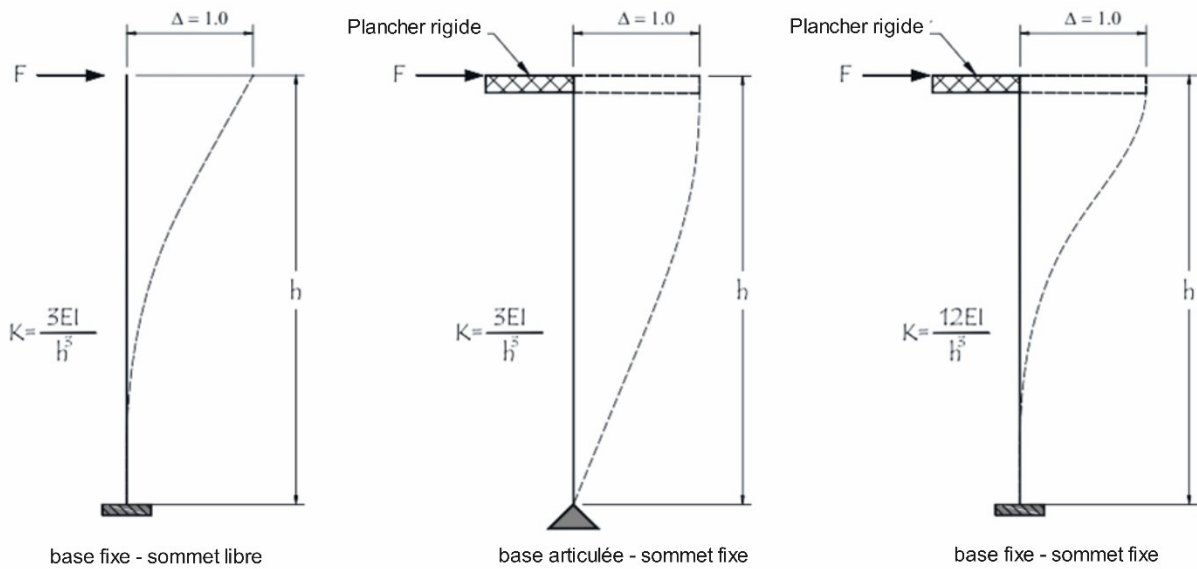
a désigne la constante associée à la partie linéaire et b indique la constante associée à la non-linéarité (cubique). Le ressort est dit dur si  $b > 0$ , linéaire si  $b = 0$  et mou si  $b < 0$



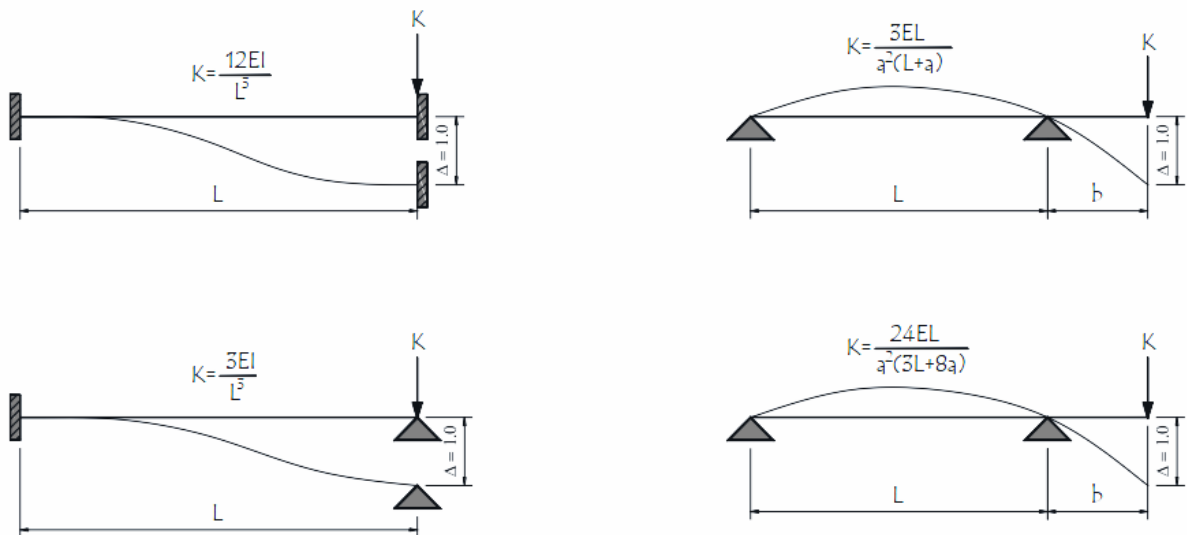
**b. Obtention de rigidité**

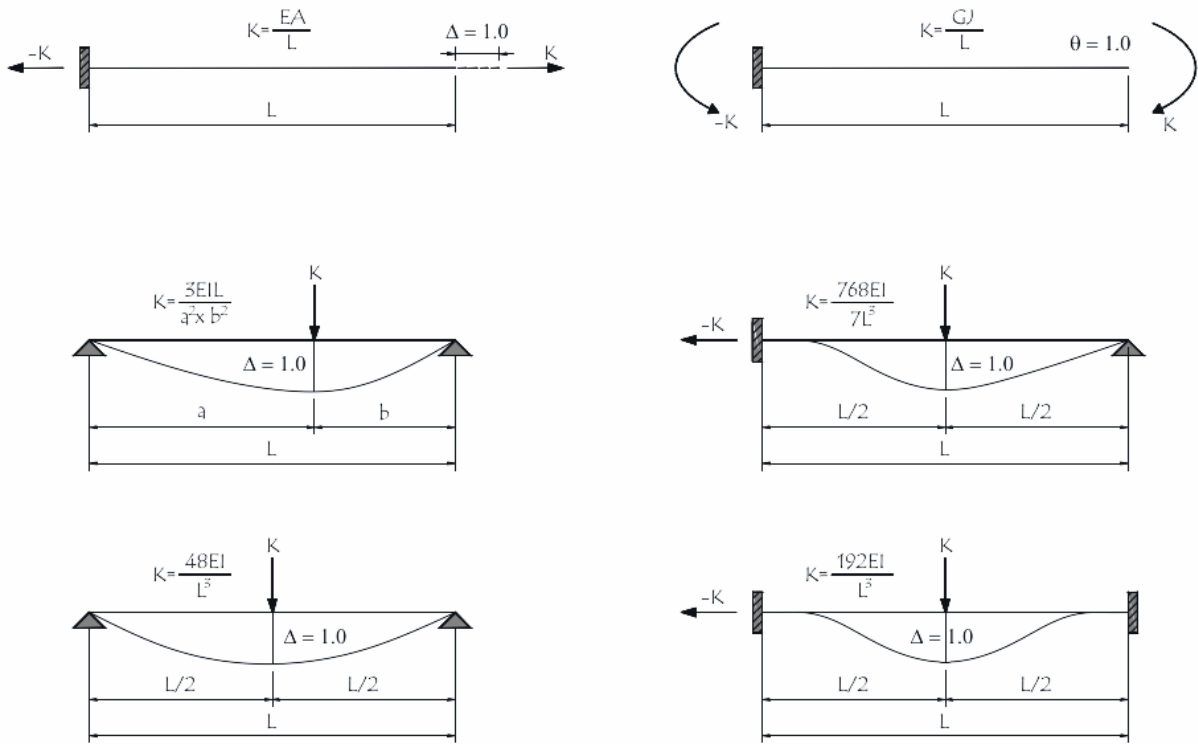


**Exemple de calcul de rigidité dans les poteaux**



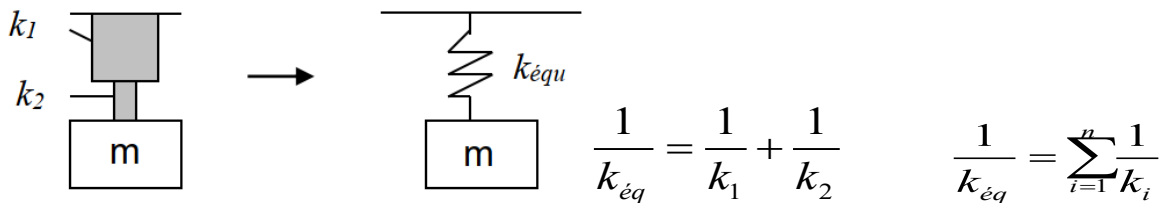
**Exemple de calcul de rigidité dans les poutres**



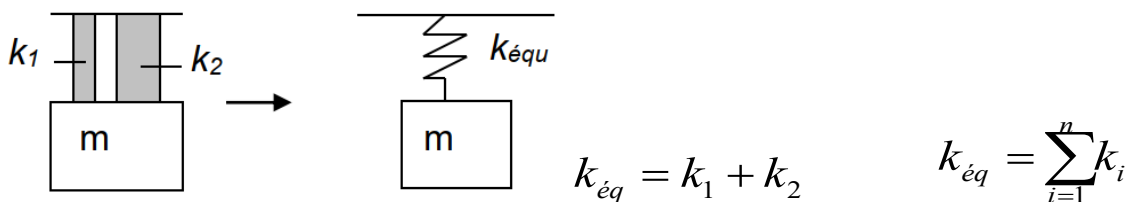


**c. Rigidité équivalente**

**Rigidités en série**



**Rigidités en parallèle**



**d. Centre de rigidité équivalente**

Le principe de représenter toutes les rigidités dans une seule équivalente, un centre d'équilibre des rigidités dans les deux sens en plan doit être défini. Ce point est noté généralement comme

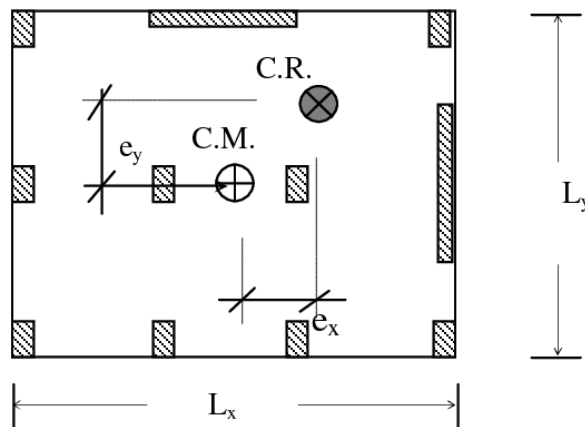
le centre de rigidité. Voici les formules comment on calcule les coordonnées du centre de rigidité :

$$x_{cr} = \frac{\sum(x_i k_{yi})}{\sum k_{yi}}$$

$$y_{cr} = \frac{\sum(x_i k_{xi})}{\sum k_{xi}}$$

**e. Excentricité et degré de liberté**

Selon les principes expliqués ci-dessus, un plancher en génie civil en mouvement dynamique a 3 DDL ; deux translation et une rotation autour de l'axe Z



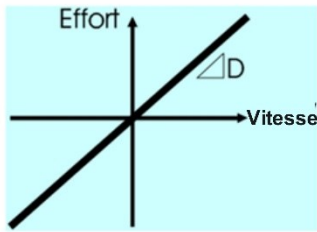
Par définition, en dynamique des structures on considère que la force dynamique est appliquée au centre des masses. Donc, en 3D en général, par rapport au centre de rigidité, on aura deux cas :

- 1- Le centre de masse coïncide avec le centre de rigidité dans la direction x : 3DDL
- 2- Le centre de masse coïncide avec le centre de rigidité dans la direction y : 3DDL
- 3- Le centre de masse coïncide avec le centre de rigidité dans la direction x et y : 2DDL
- 4- Le centre de masse ne coïncide pas avec le centre de rigidité dans les deux directions : 3DDL

**3.2.3 Modélisation de l'amortissement**

Un amortisseur est considéré comme n'ayant ni masse ni élasticité. Les trois principales formes d'amortissement sont l'amortissement visqueux, l'amortissement Coulomb ou à friction sèche et l'amortissement à hystérésis.

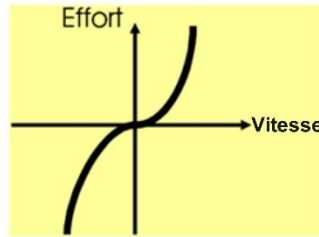
**VISQUEUX (Linéaire)**



Généralement trouvé à basse vitesse et avec des fluides visqueux

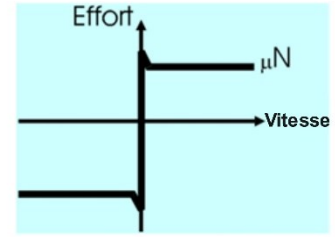
**AMORTISSEMENT NON LINÉAIRE**

Aérodynamique



Généralement trouvé à des vitesses élevées et avec des fluides non visqueux

**Frottement sec (Coulomb)**



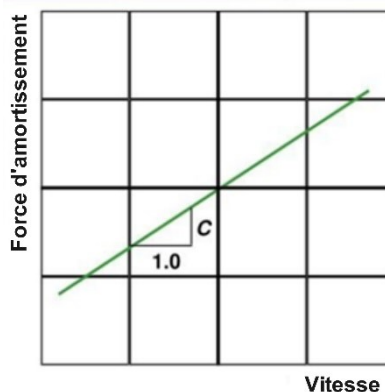
Généralement trouvé entre les surfaces sèches en mouvement relatif.

**NB :** À l'exception de l'amortissement linéaire (visqueux), toutes les autres formes d'amortissement sont difficiles à analyser (et à inclure) dans les modèles dynamiques, même pour des cas simples.

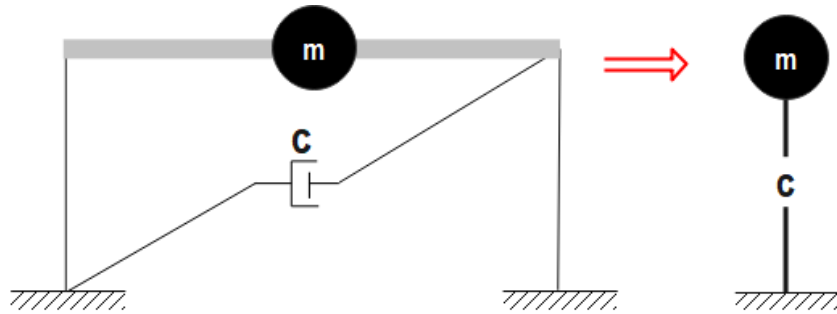
En amortissement visqueux, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse du corps. Coulomb ou amortissement par friction sèche se produit lorsque le contact glissant qui existe entre les surfaces en contact est sec ou a une lubrification insuffisante. Dans ce cas, la force d'amortissement est d'amplitude, constante mais de sens opposé à celui du mouvement. En cas d'amortissement par friction sèche, l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

Les matériaux solides ne sont pas parfaitement élastiques et lorsqu'ils sont déformés, l'énergie est absorbée et dissipée par le matériau. L'effet est dû au frottement interne dû au mouvement relatif entre les plans internes du matériau pendant le processus de déformation. Ces matériaux sont connus sous le nom de solides visco-élastiques et le type d'amortissement qu'ils présentent est appelé amortissement structurel ou hystérétique, ou matériau ou amortissement solide.

L'amortissement regroupe les phénomènes qui atténuent l'amplitude des oscillations au cours du mouvement. Bien que son essence réelle soit beaucoup plus complexe, l'amortissement est habituellement grossièrement représenté par un amortissement de type visqueux. L'intensité de la force correspondante est alors proportionnelle à la vitesse.

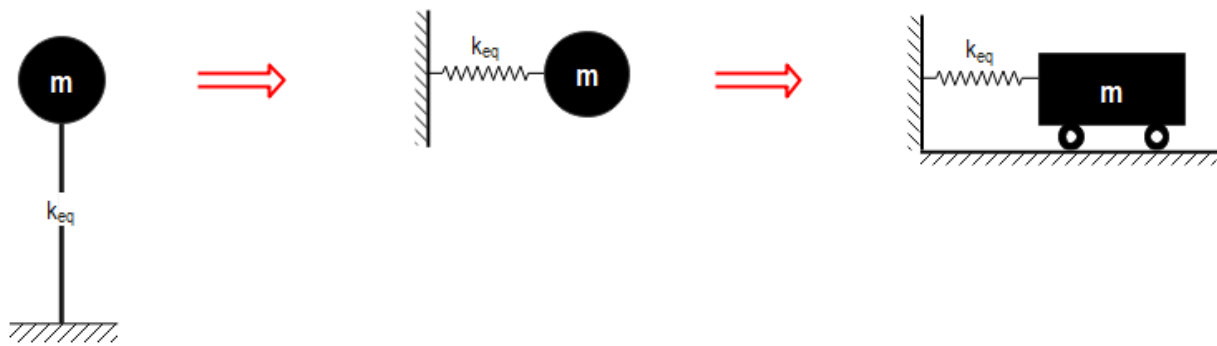


Le coefficient  $c$  représente l'amortissement total de la structure. Il n'y a pas une astuce pour calculer les amortissements élémentaires. Son unité est force/vitesse = Ns/m



### 3.3. Représentation générale du modèle physique

Les systèmes à un seul degré de liberté en génie civil ne sont pas tous sous forme d'un plancher supporté par des poteaux, mais pratiquement ayant le même développement théorique en dynamique des structures. Par conséquent, il est important de présenter le modèle physique par une présentation plus ou moins générale. La figure suivante présente l'étape de simplification :



### 3.4. Modélisation de la réponse de la structure

#### 3.4.1. Type des matériaux

##### Matériau élastique

- Suit le même chemin pendant le chargement et le déchargement et revient à l'état initial de déformation, contrainte, déformation, etc. après le retrait de la charge / excitation

##### Matériau inélastique

- Ne suit pas le même chemin pendant le chargement et le déchargement et peut ne pas revenir à l'état initial de déformation, contrainte, déformation, etc. après le retrait de la charge / excitation

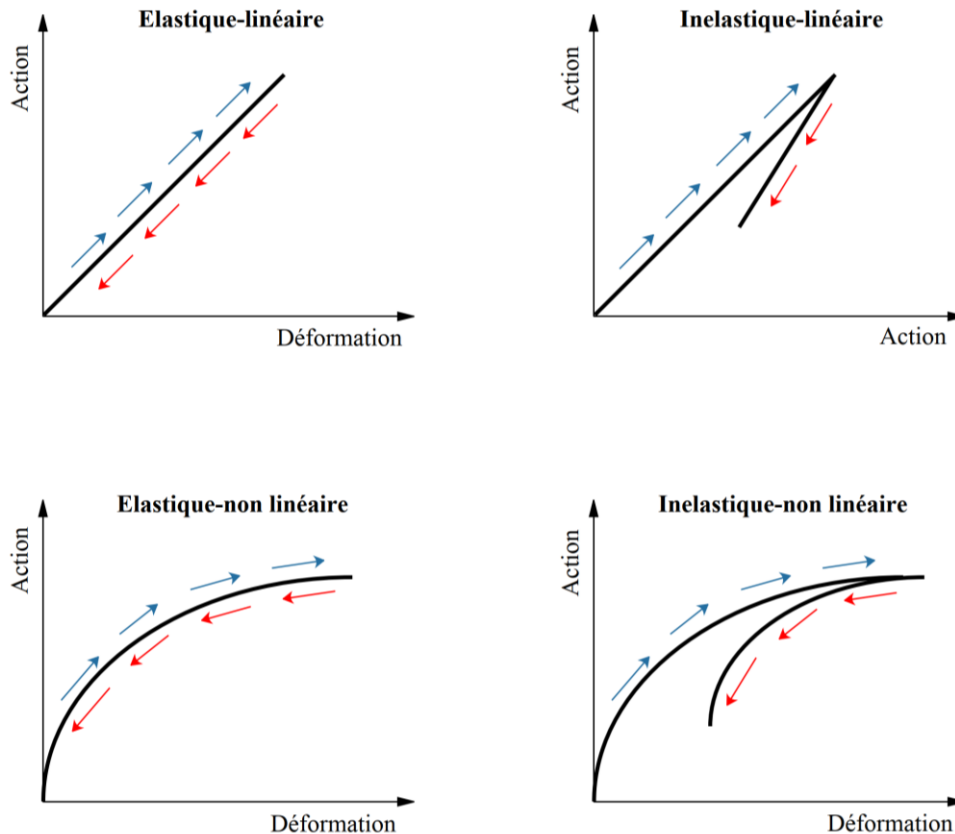
- La plupart des matériaux présentent un comportement élastique et inélastique selon le niveau de charge.

### 3.4.2. Type de réponse

**Linéaire** : si tous les composants de base d'un système structural se comportent de manière linéaire, le comportement résultant est connu sous le nom de réponse linéaire. Les équations régissant le comportement de ce type de systèmes sont linéaires. Donc, la réponse est directement proportionnelle à l'excitation (la déflexion double si la charge est doublée). Par conséquent, le principe de superposition est valable.

**Non-linéaire** : si toutefois l'un des composants de base se comporte de manière non linéaire, la réponse est non-linéaire. Les équations qui régissent le comportement de ce type de systèmes sont non-linéaires. La réponse n'est pas directement proportionnelle à l'excitation (la déviation peut devenir 4 fois si la charge est doublée). Par conséquent, le principe de superposition ne tient pas.

La réponse non linéaire peut être produite par les effets géométriques (non-linéarité géométrique) ou les effets de matériaux (non-linéarité des matériaux), ou bien tous les deux



Les concepts abordés dans les cours liés à l'ingénierie structurale que vous avez étudiés jusqu'à présent sont basés sur l'hypothèse de base que la charge (principalement la gravité) est déjà présente ou appliquée très lentement sur les structures.

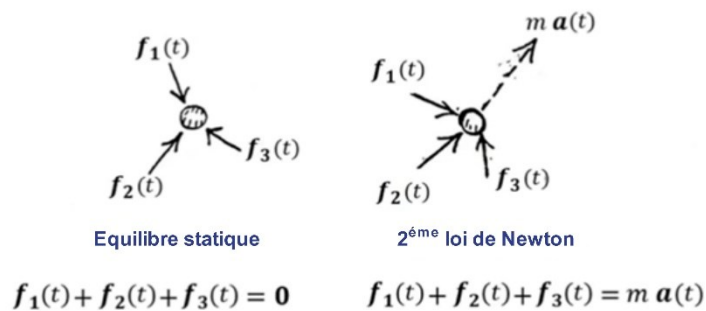
Cette hypothèse fonctionne bien la plupart du temps tant qu'aucune accélération n'est produite en raison des forces appliquées. Cependant, dans le cas de structures / systèmes soumis à des charges dynamiques dues à des machines en rotation, des vents, une charge de gravité soudainement appliquée, des explosions, des tremblements de terre, l'utilisation de l'hypothèse susmentionnée fournit des résultats trompeurs et peut entraîner des structures / systèmes avec de mauvaises performances qui peuvent parfois échouer.

Ce cours est conçu pour vous fournir des connaissances fondamentales sur la façon dont les forces dynamiques influencent la réponse structurale / des systèmes

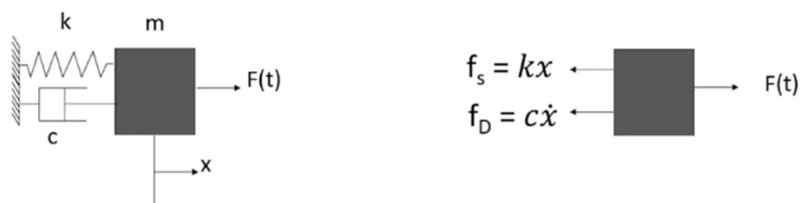
Excitation	Type d'analyse
Dynamique	Dynamique élastique-linéaire
	Dynamique élastique-non linéaire
	Dynamique inélastique-linaire
	Dynamique inélastique-non linéaire

#### 4. Formulation d'équation du mouvement

##### 4.1. Loi de Newton



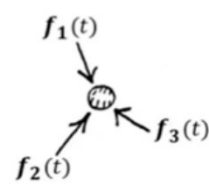
*Fresultante* = mass x acceleration



$$F_{resultante} = F(t) - c\dot{x} - kx = m \ddot{x}$$

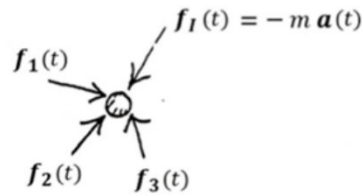
Donc l'équation du mouvement sera  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

**4.2. Principe de d'Alembert**



Equilibre statique

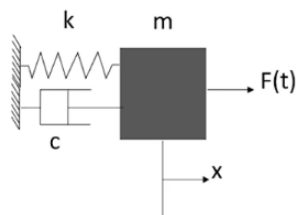
$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0$$



Principe d'Alembert

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_1(t) = 0$$

Le principe d'Alembert est de considérer une force d'inertie supplémentaire dans le sens opposé de la direction du mouvement.



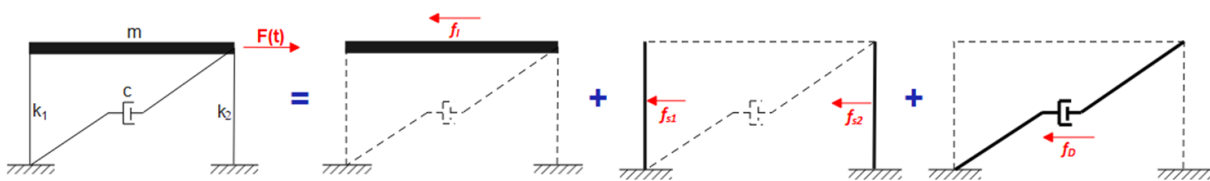
$$f_1 = m\ddot{x} \quad \begin{matrix} f_s = kx \\ f_D = c\dot{x} \end{matrix}$$

$$\sum F = 0$$

De même, l'équation du mouvement sera  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

Le principe d'Alembert considéré le plus approprié en dynamique des structures puisqu'il décrit l'équation du mouvement sous forme d'une équation d'équilibre dynamique

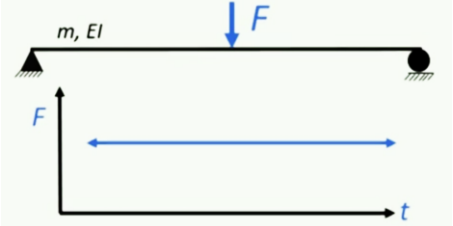
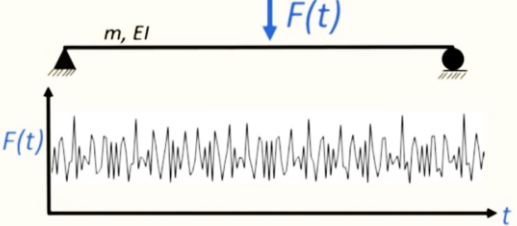
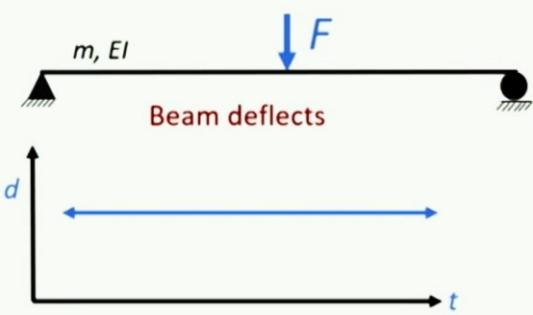
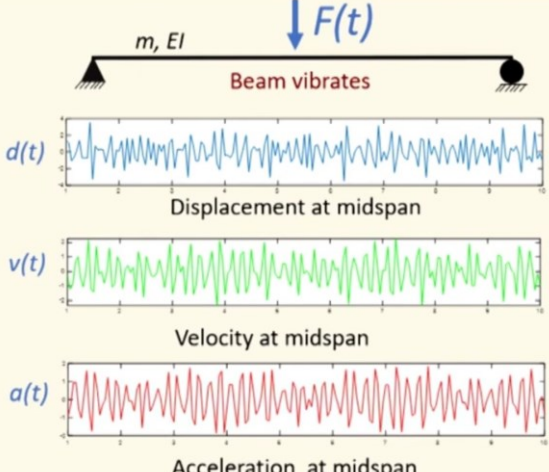
Finalement, on peut représenter l'équation d'équilibre dynamique comme suit :



Force dynamique = Force d'inertie + Force de rappelle + Force d'amortissement

$$F(t) = f_I = m\ddot{u} + f_s = ku + f_D = c\dot{u}$$

**5. Comparaison entre un calcul dynamique et celui statique**

Analyse statique	Analyse dynamique
	
La force est constante avec le temps	La force varie avec le temps
Pas de vitesse et pas d'accélération	Masse sous accélération = effet d'inertie
La solution se fait par le biais des: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Equation d'équilibre statique</li> <li>✓ Relations force – déplacement</li> <li>✓ Condition de compatibilité</li> </ul>	La solution se fait par le biais des: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Equation d'équilibre dynamique</li> </ul>
La réponse est constante avec le temps	la réponse varie avec le temps
	
L'équilibre fait seulement par la charge constante extérieure et la rigidité $ku = F$	L'équilibre fait par 04 charges $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t)$
L'analyse statique nécessite: <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Une seule solution qui sera constante</li> <li>b) Un temps de calcul très réduit</li> </ol>	L'analyse dynamique nécessite: <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Considération des force d'inertie</li> <li>b) La solution à chaque instant « t »</li> <li>c) Un temps de calcul important</li> </ol>

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

D'après cette équation de mouvement l'énoncé du problème est le suivant:

Les données:	Les réponses du système à chercher :
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. La force dynamique appliquée <math>F(t)</math></li> <li>2. La masse de système (m)</li> <li>3. La rigidité latérale du système (k),</li> <li>4. Le coefficient d'amortissement de système (c)</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Le déplacement du système <math>u(t)</math></li> <li>2. Les autres réponses structurelles ie: la vitesse , l'accélération , les efforts internes, effort tranchant à la base, moment de reversement..... peut être par la suite déterminés en fonction de <math>u(t)</math></li> </ol>

## 6. Vibrations des systèmes dynamiques

La vibration est « le mouvement rapide de va-et-vient d'un système élastique / inélastique dont l'équilibre est perturbé ». Les vibrations sont des oscillations dues à une force de rappel élastique.

### 6.1. Vibration non forcée :

si un système, après une perturbation initiale, est laissé à vibrer seul, la vibration qui en résulte est connue sous le nom de vibration libre.

Aucune force externe n'agit sur le système. L'oscillation d'un simple pendule est un exemple de vibration libre.

### 6.2. Vibration forcée :

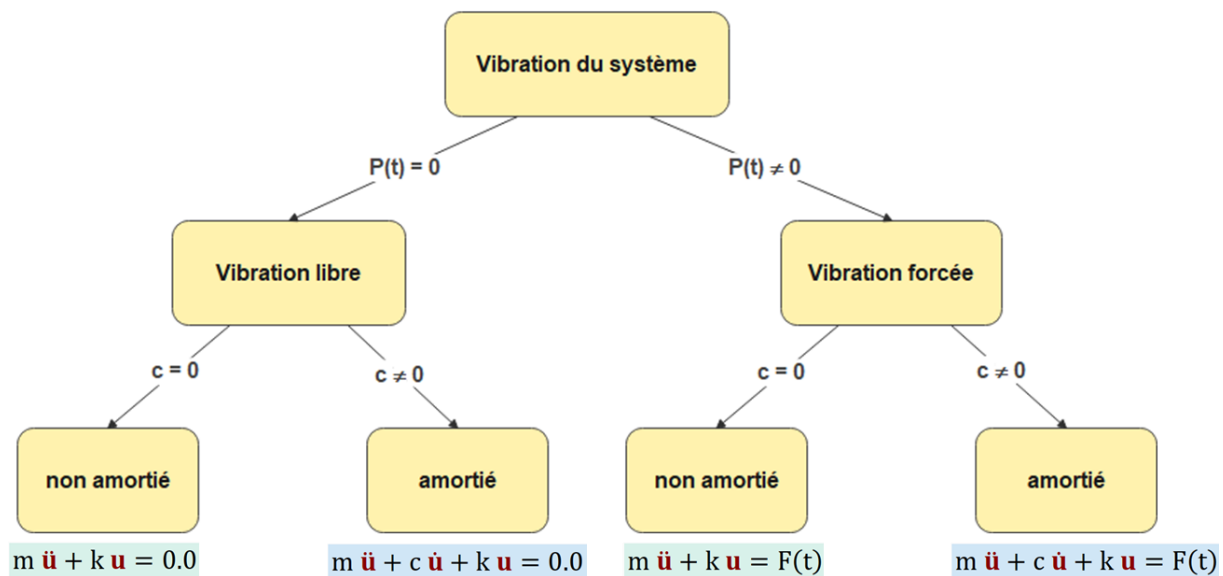
si un système est soumis à une force externe (souvent un type de force répétitif), la vibration résultante est connue sous le nom de vibration forcée.

### 6.3. Vibrations non amorties

Si aucune énergie n'est perdue ou dissipée dans le frottement ou toute autre résistance pendant la vibration, la vibration est connue sous le nom de vibration non amortie. La vibration non amortie est un phénomène hypothétique qui aide à fournir une compréhension de la vibration amortie.

### 6.4. Vibration amortie

Dans le système actuel, l'énergie est toujours perdue en raison d'un certain nombre de mécanismes. Ce type de vibration est connu sous le nom de vibrations amorties



## 7. Méthodes de solution de l'équation différentielle

### 7.1. Solution classique

La solution complète de l'équation différentielle linéaire du mouvement consiste en la somme de la solution complémentaire  $u_c(t)$  et de la solution particulière  $u_p(t)$ , c'est-à-dire  $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$ . L'équation différentielle étant de second ordre, deux constantes d'intégration sont impliquées. Ils apparaissent dans la solution complémentaire et sont évalués à partir d'une connaissance des conditions initiales.

#### 7.1.1. Contexte mathématique (Solution classique)

Le comportement dynamique des systèmes mécaniques est décrit par ce que nous appelons des équations différentielles ordinaires de second ordre.

- L'entrée de la structure mécanique apparaît sur le côté droit de l'équation et est la Force. La solution de l'équation donne la sortie qui est généralement le déplacement.
- Pour pouvoir résoudre ces équations, il est impératif d'avoir un fond solide sur la solution d'équations différentielles ordinaires homogènes et non homogènes.
- Les équations différentielles ordinaires homogènes représentent les vibrations » et les équations différentielles ordinaires non homogènes représentent des « vibrations forcées ».

#### 7.1.2. ODE linéaires homogènes à coefficients constants

cas	Racines	base	Solution générale
I	Distinct real $\lambda_1, \lambda_2$	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
II	Real double root $\lambda = -a/2$	$e^{-ax/2}, xe^{-ax/2}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{-ax/2}$
III	Complex conjugate $\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + i\omega$ $\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - i\omega$	$y_1 = e^{-ax/2} \cos \omega x$ $y_2 = e^{-ax/2} \sin \omega x$	$y = e^{-ax/2} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

#### 7.1.3. ODE non homogène

Dans cette section, nous procédons d'homogène à non homogène ODE.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

La solution générale se compose de deux parties :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Avec  $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$  est la solution générale de ODE

Terme en r(x)	Choix pour $y_p(x)$
$ke^{ax}$	$Ce^{ax}$
$kx^n (n = 0,1,2,...)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$
$k \cos ax$	$K \cos ax + M \sin ax$
$k \sin ax$	
$ke^{ax} \cos ax$	$e^{ax} (K \cos ax + M \sin ax)$
$ke^{ax} \sin ax$	

Règles de choix pour la méthode des coefficients indéterminés

a) Règle de base: si  $r(x)$  est l'une des fonctions de la première colonne du tableau, choisissez  $y_p$  sur la même ligne et déterminez ses coefficients indéterminés en substituant  $y_p$  et ses dérivés dans

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

b) Règle de modification : si un terme de votre choix pour  $y_p$  se trouve être une solution de l'OD homogène correspondant à l'équation ci-dessus, multipliez votre choix de  $y_p$  par  $x$  (ou  $x^2$  si cette solution correspond à une racine double de la équation caractéristique de l'ODE homogène)

c) Règle de somme : si  $r(x)$  est une somme de fonctions dans la première colonne du tableau, choisissez pour  $y_p$  la somme des fonctions dans les lignes correspondantes de la deuxième colonne.

### 7.2. Intégrale de Duhamel

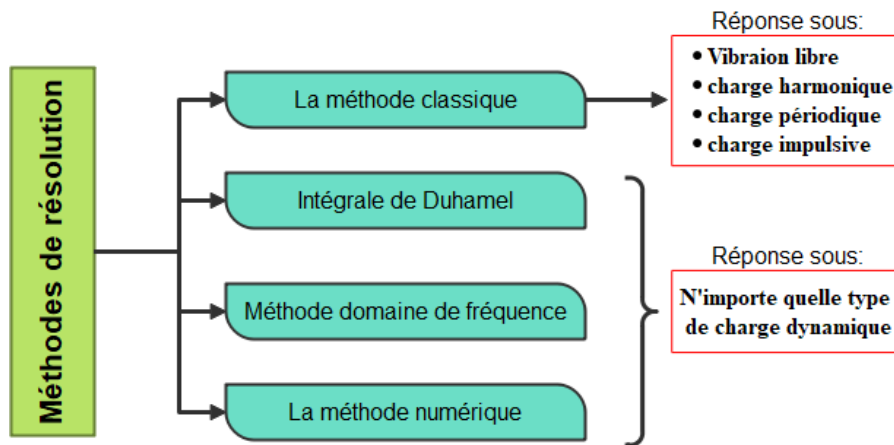
Une autre approche bien connue de la solution d'équations différentielles linéaires, telles que l'équation de mouvement d'un système SDF, est basée sur la représentation de la force appliquée sous la forme d'une séquence d'impulsions infiniment courtes. La réponse du système à une force appliquée,  $p(t)$ , au temps  $t$  est obtenue en additionnant les réponses à toutes les impulsions jusqu'à ce moment

### 7.3. Méthode du domaine de fréquence

Les transformations de Laplace et de Fourier fournissent des outils puissants pour la résolution d'équations différentielles linéaires, en particulier l'équation du mouvement pour un système 1DDL. Étant donné que les deux méthodes de transformation sont similaires dans leur concept, nous ne mentionnons ici que l'utilisation de la transformée de Fourier, ce qui conduit à la méthode d'analyse dynamique du domaine fréquentiel.

### 7.4. Méthodes numériques

Les trois méthodes d'analyse dynamique précédentes sont limitées aux systèmes linéaires et ne peuvent pas prendre en compte le comportement inélastique des structures anticipé lors des tremblements de terre si les secousses du sol sont intenses. La seule approche pratique pour de tels systèmes implique des méthodes de chronométrage numérique, qui sont présentées au chapitre 5. Ces méthodes sont également utiles pour évaluer la réponse des systèmes linéaires à l'excitation - force appliquée  $p(t)$  ou mouvement de sol  $u''_g(t)$  - qui est trop compliqué pour être défini analytiquement et n'est décrit que numériquement.



# **Chapitre II :**

## **Systemes à un seul degré de liberté**

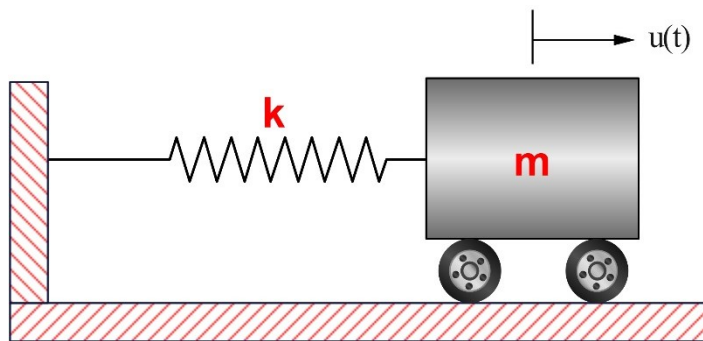
## CHAPITRE II : Systèmes à un seul degré de liberté

### I. Système libre non-amorti

Le but derrière l'étude de ce type de vibration est de déterminer les caractéristiques dynamiques intrinsèques de la structure, qui ne sont pas liées aux forces dynamiques. Cette empreinte dynamique (les caractéristiques) distingue cette structure des autres.

La vibration libre est initiée en perturbant le système à partir de sa position d'équilibre statique en communiquant à la masse un certain déplacement  $u(0)$  et une vitesse au temps zéro, défini comme l'instant où le mouvement est initié :

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0)$$



#### 1.1. Formulation de l'équation de mouvement

Si nous avons un corps de masse ( $m$ ) qui se déplace à une distance ( $u$ ) du point d'équilibre ( $O$ ), Il générera une force de grandeur ( $ku$ ) pour résister au mouvement provoqué par la force d'inertie ( $m \ddot{u}$ )

L'équation du système dynamique est :  $-Ku = m\ddot{u}$

$$m\ddot{u} + ku = 0.0 \quad \text{avec} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

En divisant l'équation précédente sur la masse, on aura :  $\ddot{u} + \frac{K}{m}u = 0$

La solution de l'équation différentielle est de forme :

$$u = B_1 e^{i\omega_n t} + B_2 e^{-i\omega_n t}$$

En cours de développement théorique, on obtient l'équation suivante :

$$\left(\frac{K}{m} - \omega_n^2\right) (A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) = 0$$

Tant que le système est en mouvement, le terme à droite  $(A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) \neq 0.0$

Donc, on note que :  $\frac{K}{m} - \omega_n^2 = 0.0$ , cela implique que  $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$  par conséquent  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\omega_n$  est la fréquence angulaire en rad/sec

Les constantes A et B peuvent être obtenues en remplaçant les conditions aux limites

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{u_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{u} = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + u_0 \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{u} = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - u_0 \cos(\omega_n t)$$

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{u_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{u} = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + u_0 \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{u} = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - u_0 \cos(\omega_n t)$$

## 1.2. Paramètres

Étant donné que pour compléter les fonctions sinus et cosinus, cycle complet, chaque angle de ( $2\pi = 360$ ), nous pouvons donc calculer la période de cycle ( $t_n$ ) comme suit :

$$\sin(\omega_n t_n) = \sin(2\pi) \qquad \omega_n t_n = 2\pi$$

$$t_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad t_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$T_n$  nommée aussi période naturelle ou période propre.

On peut donc calculer le nombre de cycles par seconde ( $F_n$ ) comme suit :

$$f_n = \frac{1}{T_n}$$

$$1rpm = \frac{1}{60} \text{ cycle/sec} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/sec}$$

$$1 \text{ Hertz (HZ)} = 1 \text{ cycle/sec}$$

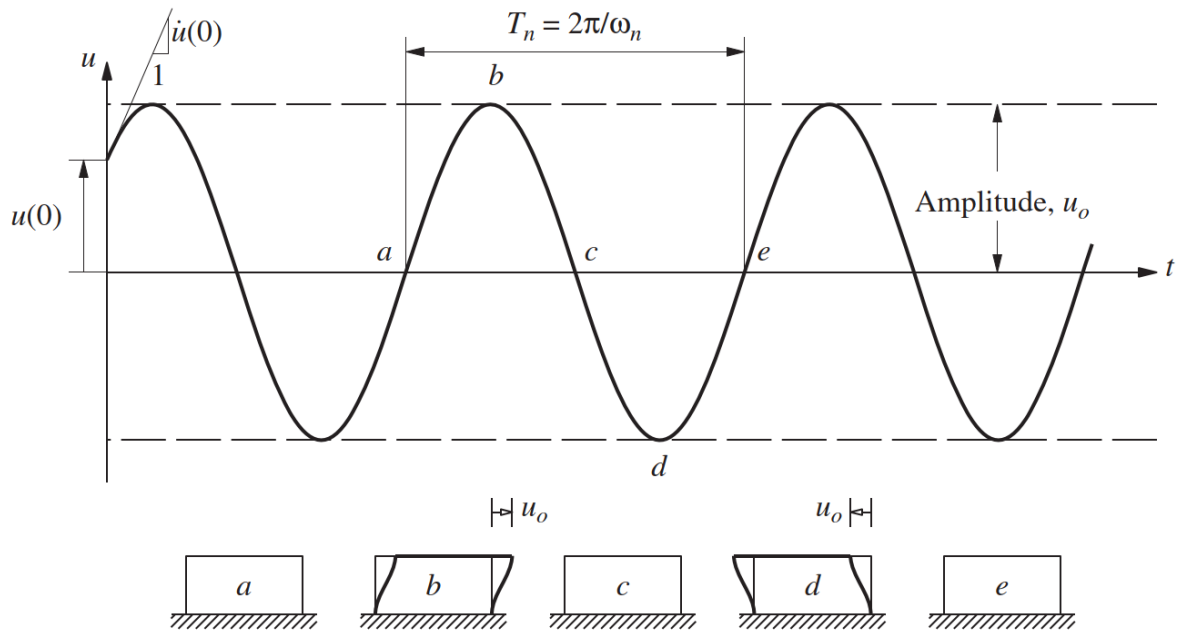
$\omega_n$  : Fréquence circulaire naturelle de vibration (rad/sec).

$T_n$  : Période naturelle de vibration (sec).

$f_n$  : Fréquence cyclique naturelle de vibration (hertz (Hz)) ou (cycle par seconde (cps)).

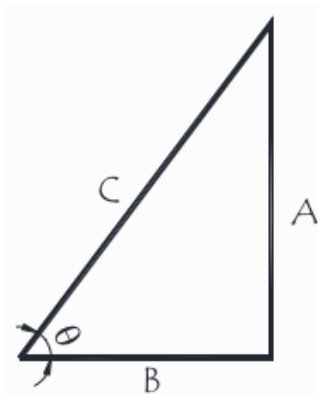
**NB :** le terme naturel accompagnant les propriétés vibratoires  $\omega_n$ ,  $T_n$  et  $f_n$  désigne qu'elles sont des propriétés propres de la structure et ne dépendent pas de la charge dynamique (elles ne dépendent que de la masse et de la rigidité de la structure)

Le plus rigide des deux systèmes SDF ayant la même masse aura la fréquence propre plus élevée et la période propre plus courte. De même, la plus lourde (plus de masse) des deux structures ayant la même rigidité aura la fréquence propre inférieure et la période propre plus longue.



Une autre méthode pour résoudre l'équation différentielle

$$u = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$



$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{C}$$

$$\sin \theta = \frac{A}{C}$$

$$\tan \theta = \frac{A}{B}$$

$$a = u_0$$

$$B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}$$

$$\tan \theta = \omega_n \left( \frac{u_0}{\dot{u}_0} \right)$$

$$C = \sqrt{u_0^2 + \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right)^2}$$

$$u = \frac{C}{C} [A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)]$$

$$u = C \left[ \frac{A}{C} \cos(\omega_n t) + \frac{B}{C} \sin(\omega_n t) \right]$$

$$u = C \left[ \sin \theta \cos(\omega_n t) + \cos \theta \sin(\omega_n t) \right]$$

On sait que :

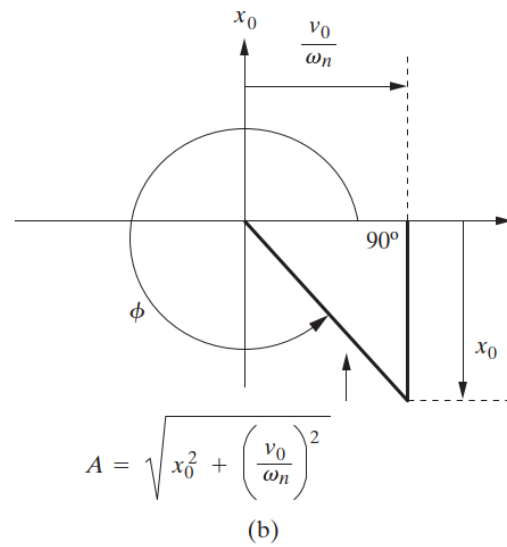
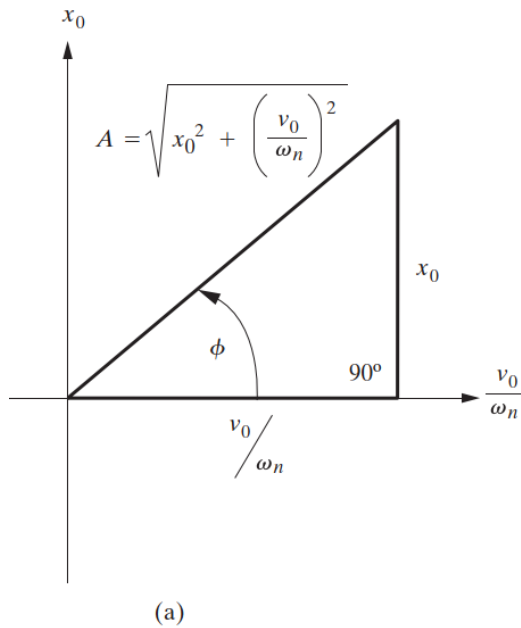
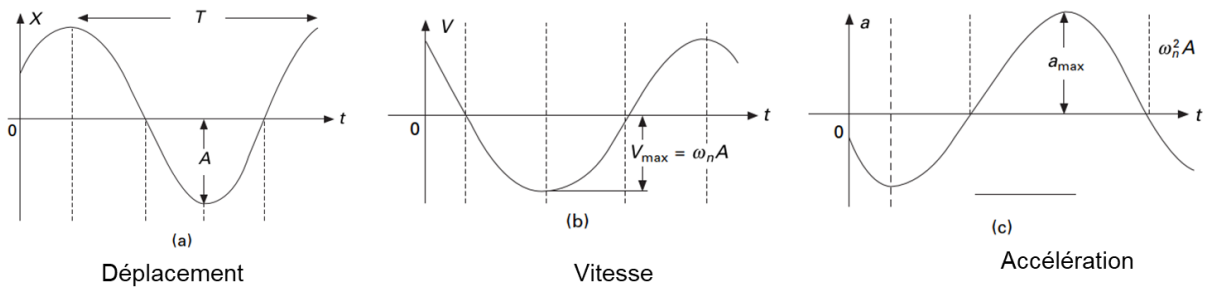
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

Donc on peut écrire :

$$u = C \sin(\omega_n t + \theta) \quad \text{avec} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \tan^{-1}\left(\omega_n \frac{u_0}{\dot{u}_0}\right)$$

$$u_{\max} = C = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} u &= C \sin(\omega_n t + \theta) & u_{\max} &= C = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2} \\ \dot{u} &= C \omega_n \cos(\omega_n t + \theta) & \dot{u}_{\max} &= C \omega_n = \sqrt{(\omega_n u_0)^2 + \dot{u}_0^2} \\ \ddot{u} &= -C \omega_n^2 \sin(\omega_n t + \theta) & \ddot{u}_{\max} &= -C \omega_n^2 = \omega_n \sqrt{(\omega_n u_0)^2 + \dot{u}_0^2} \end{aligned}$$



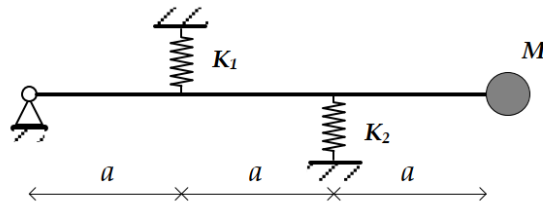
Les relations trigonométriques entre la phase, la fréquence propre, et les conditions initiales. Notez que les conditions initiales déterminent le quadrant approprié pour la phase :

- (a) pour une position et une vitesse initiales positives,
- (b) pour une position initiale négative et une vitesse initiale positive.

**1.3. Applications**

**Exercice 1**

Une masse  $M$  est fixée à l'extrémité d'une poutre parfaitement rigide articulée à son origine.

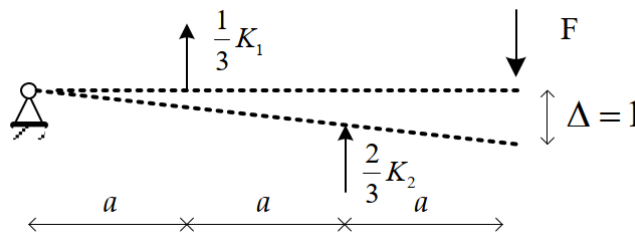


AN :  $a = 1m$  ;  $m = 10kg$  ;  $K_1 = K_2/2 = 10^5 N/m$

1 . Déterminer la pulsation propre des oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.

**Solution 1**

La rigidité équivalente du système est égale à la force nécessaire pour avoir un déplacement unité au droit de la masse. Cette force est équilibrée par les forces de rappel au droit des ressorts.



$$\sum M_A = F3a - \frac{2}{3} K_2 2a - \frac{1}{3} K_1 a = 0 \Rightarrow F \cong K_{equ} = \frac{1}{9} K_1 + \frac{4}{9} K_2$$

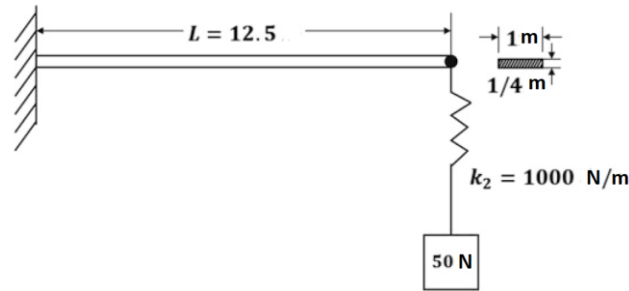
Avec :  $K_2 = 2K_1 \Rightarrow K_{equ} = K_1$

Pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{equ}}{M}} \cong 100 rad / s$

Fréquence propre :  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \cong 15.9 Hz$

**Exercice 2**

Déterminez la fréquence naturelle du système poutre-ressort illustré dans la figure au-dessous, constitué d'un poids de  $W = 50,0 N$  attaché à une poutre en porte-à-faux horizontale à travers le ressort hélicoïdal  $k_2$ . La poutre en console a une épaisseur  $h = 1 m$ , une largeur  $b = \frac{1}{4} m$ . Le module d'élasticité  $E = 30 \times 10^6 N/m^2$  et longueur  $L = 12,5 m$ . Le ressort hélicoïdal a une rigidité  $k_2 = 100 (N/m)$ .



**Solution 2**

La flèche à l'extrémité libre d'une poutre en porte-à-faux uniforme sollicitée par une force statique P à l'extrémité libre est donnée par

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

La constante de ressort correspondante k1 est alors

$$k_1 = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{L^3}$$

où le moment d'inertie  $I = \frac{1}{12}bh^3$  de la section (pour une section rectangulaire). Maintenant, la console et le ressort hélicoïdal de ce système sont connectés en tant que ressorts en série.

Par conséquent, la rigidité équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

En substituant les valeurs numériques correspondantes, on obtient

$$I = \frac{1}{12} \times 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{768} (m)^4$$

$$k_1 = \frac{3 \times 30 \times 10^6}{(12.5)^3 \times 768} = 60 N/m$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{60} + \frac{1}{100}$$

$$k_e = 37.5 N/m$$

La fréquence circulaire propre de ce système est alors donnée :

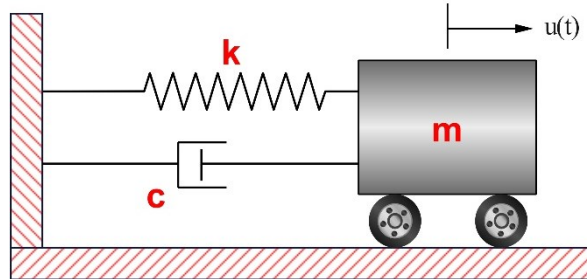
$$\omega = \sqrt{k_e/m} \left( m = W/g \right) \text{ avec } (g = 9.8 m/sec^2)$$

$$\omega = \sqrt{37.5 \times 9.8 / 50} \Rightarrow \omega = 2.71 rad/sec$$

Et la fréquence naturelle sera donc :  $f = \omega/2\pi = 0.43$  cps ou Hertz

## II. Système libre amorti

Le but derrière l'étude de ce type de vibration est d'identifier la nature de l'amortissement et de déterminer les états d'amortissement auxquels la structure peut être exposée, en plus de déterminer l'effet d'amortissement sur les caractéristiques dynamiques de la structure, ainsi que l'étude du décrétement logarithmique.



### 2.1. Formulation de l'équation de mouvement

De même, ce qui va être présenté dans ce qui suit, ce sont les démarches pour la solution théorique :

$$\begin{aligned}
 & -Ku - C\dot{u} = m\ddot{u} \quad \text{donc} \quad m\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \\
 \text{avec} \quad & \dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2} \\
 & u = ae^{\lambda X} \quad \dot{u} = a\lambda e^{\lambda X} \quad \ddot{u} = a\lambda^2 e^{\lambda X} \\
 & ma\lambda^2 e^{\lambda X} + Ca\lambda e^{\lambda X} + Kae^{\lambda X} = 0 \\
 & ae^{\lambda X} (m\lambda^2 + C\lambda + K) = 0 \\
 & ae^{\lambda X} \neq 0 \quad m\lambda^2 + C\lambda + K = 0 \\
 \lambda_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mK}}{2m} = \frac{-C}{2m} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4m^2} - \frac{4mK}{4m^2}} = \frac{-C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad \text{avec} \quad \omega_n^2 = \frac{K}{m} \\
 \lambda_{1,2} = \frac{-C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}
 \end{aligned}$$

La nature de la solution dépend de la valeur du discriminant  $\left(\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2\right)$

$$\text{Si} \left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 = 0 \quad (\lambda_1 = \lambda_2) \quad \text{donc} \quad u = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{Si} \left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 > 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2) \quad \text{donc} \quad u = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{Si} \left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 < 0 \quad \lambda_{1,2} = R \pm i m \quad \text{donc} \quad u = e^{Rt} \left[ C_1 \cos(mt) + C_2 \sin(mt) \right]$$

**2.2. Système à amortissement critique :**  $\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 = 0$

Après un développement théorique, on obtient les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} u &= e^{-\omega_n t} (u_0 + (\dot{u}_0 + u_0 \omega_n) t) \\ \dot{u} &= e^{-\omega_n t} (\dot{u}_0 - (\dot{u}_0 + u_0 \omega_n) \omega_n t) \\ \ddot{u} &= e^{-\omega_n t} ((\dot{u}_0 + u_0 \omega_n) \omega_n^2 t - u_0 \omega_n^2 - 2\dot{u}_0 \omega_n) \end{aligned}$$

**2.3. Système sur-amorti :**  $\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 > 0$

Après un développement théorique, on obtient les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} u &= A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \\ \dot{u} &= A \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ \ddot{u} &= A \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Avec

$$A = \frac{\dot{u}_0 - u_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B = u_0 - \frac{\dot{u}_0 - u_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B = \frac{u_0 (\lambda_1 - \lambda_2) - \dot{u}_0 + u_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B = \frac{u_0 \lambda_1 - u_0 \lambda_2 - \dot{u}_0 + u_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

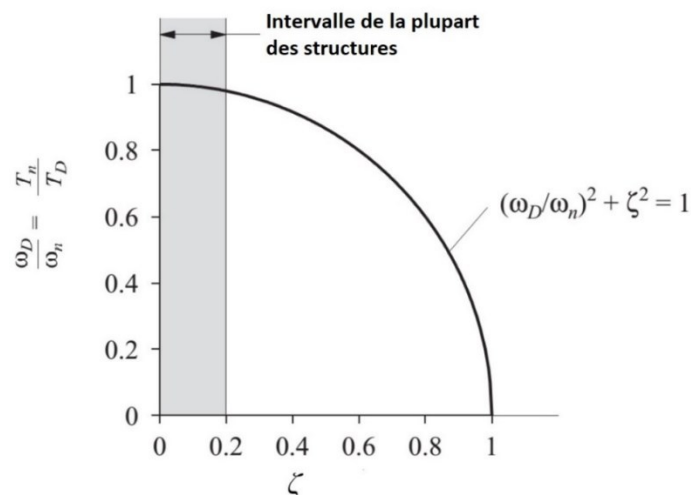
$$B = \frac{-\dot{u}_0 + u_0 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$t = 0.0 \rightarrow u = u_0 = A + B$$

$$t = \infty \rightarrow u = 0.0$$

**2.4. Système sous-amorti:**  $\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 < 0$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{et} \quad T_d = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



$$\left. \begin{aligned} \omega_D &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \left( \frac{\omega_D}{\omega_n} \right)^2 + \zeta^2 = 1 \\ T_D &= \frac{T_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow \left( \frac{T_n}{T_D} \right)^2 + \zeta^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y^2 + x^2 = 1$$

La valeur de  $(1 - \zeta^2)$  est comprise entre (2% à 20%), ce qui signifie que cette quantité est approximativement égale à 1 comme le démontre la figure

$$\sqrt{1 - \zeta^2} \begin{cases} 0.999 \\ 0.979 \end{cases} \cong 1.0 \quad \text{cela implique que} \quad \omega_d \cong \omega_n$$

On aura comme équations :

$$u = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t) \right]$$

$$u = p e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) \quad u_{\max} = p e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$\dot{u} = \psi p e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \quad \dot{u}_{\max} = \psi p e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$\ddot{u} = \psi^2 p e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + 2\varphi) \quad \ddot{u}_{\max} = \psi^2 p e^{-\zeta\omega_n t}$$

### 2.5. Comparaison entre les trois systèmes amortis

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}$$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 = 0$$

$c = c_{cr} = 2m\omega_n$   
système critique

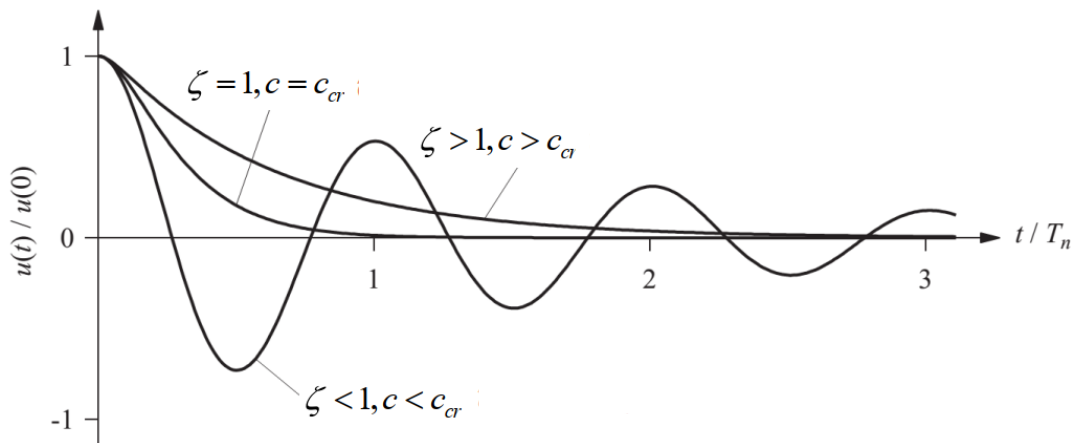
$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 > 0$$

$c > c_{cr} \Rightarrow$  système sur-amorti

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 < 0$$

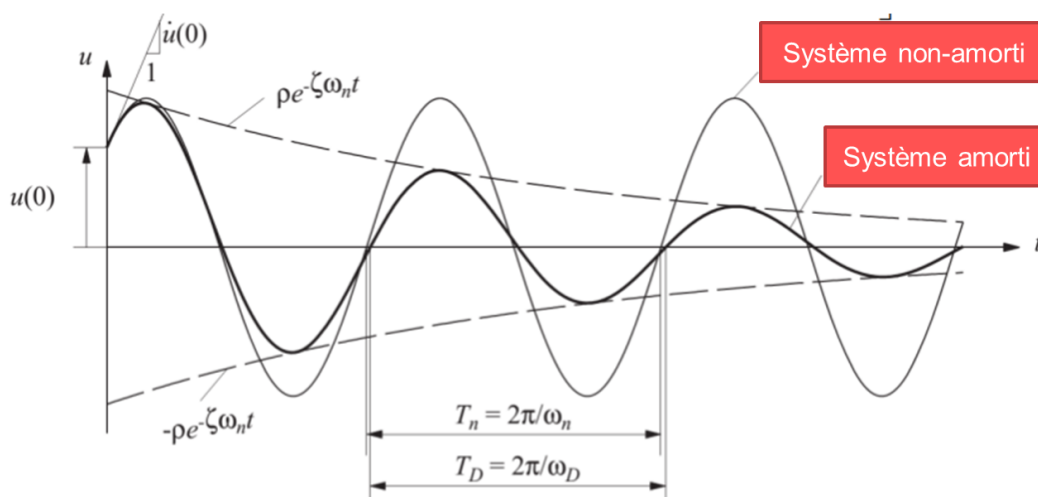
$c < c_{cr} \Rightarrow$  système sous-amorti

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u &= 0 \\ u(0), \dot{u}(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(t)$$

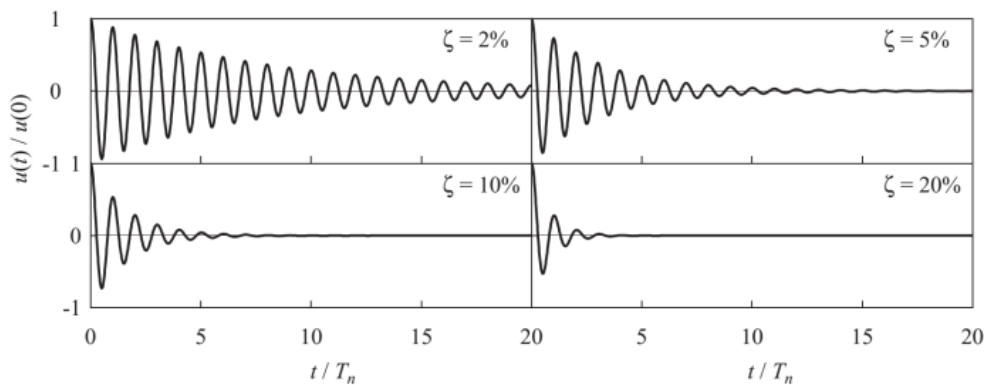


On peut voir que le système critique et sur-amorti n'ont pas d'oscillations autour de la position moyenne.

Le reste de cette présentation est limité aux systèmes sous-amortis ( $C < C_{cr}$ ) car les structures d'intérêt - bâtiments, ponts, barrages, centrales nucléaires, structures offshore, etc. - entrent toutes dans cette catégorie, car généralement, leur taux d'amortissement est inférieur à 0,10. Par conséquent, nous avons peu de raisons d'étudier la dynamique des systèmes à amortissement critique ( $c = c_{cr}$ ) ou des systèmes sur-amortis ( $c > c_{cr}$ ). De tels systèmes existent cependant; par exemple, les mécanismes de recul, tels que le ferme-porte automatique commun, sont sur-amortis ; et les instruments utilisés pour mesurer les valeurs en régime permanent, comme une balance mesurant le poids mort, sont généralement amortis de manière critique.



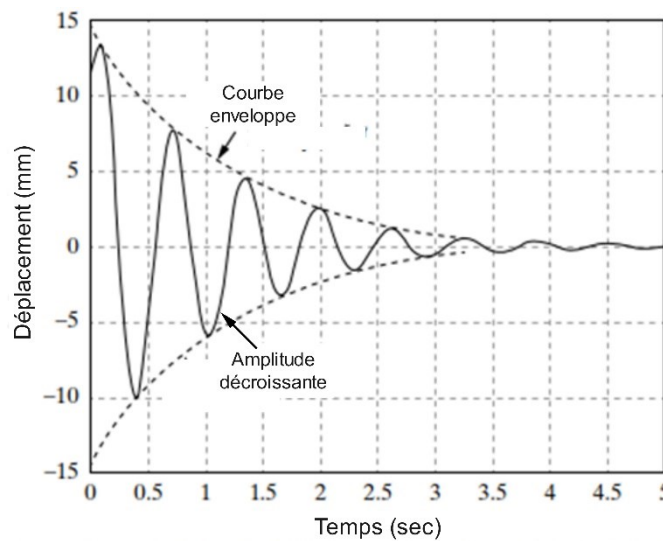
L'effet le plus important de l'amortissement est la vitesse à laquelle les vibrations libres diminuent, comme montre la figure suivante où la vibration libre due au déplacement initial  $u(0)$  est tracée pour quatre systèmes ayant la même période propre  $T_n$  mais des taux d'amortissement différents : = 2, 5, 10 et 20 %.



### 2.6. Décrément logarithmique

On voit selon la figure que l'amplitude de vibration diminue progressivement en raison de la présence de la fonction logarithmique (fonction exponentielle), car nous savons que cette fonction est décroissante et non vibrationnelle, tandis que nous constatons que la forme de la fonction sinusoïdale oscillatoire est fixe et en additionnant les deux fonctions, jusqu'à atteindre la statique, nous obtenons une fonction oscillatoire qui diminue. Et lorsque le taux d'amortissement est augmenté, l'exposant de la fonction logarithmique augmentera, et donc la décroissance se produira, et parce qu'elle est logarithmique, elle sera rapide.

La masse et la rigidité d'un système 1 DDL peuvent être estimées par des tests statiques. Cependant, la mesure de l'amortissement nécessite un essai dynamique, ce qui est le but du calcul du décrément du logarithme



$$(m = 1kg, C = 2N\ s/m, K = 100N/m, X(0) = 0.01m, \dot{x}(0) = 0.1m/s)$$

Décrément logarithmique Il est défini comme le décrément du logarithme népérien de deux pics ou amplitudes consécutifs dans la même direction.

$$u = pe^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$u_1 = pe^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$u_{1+t_d} = pe^{-\zeta\omega_n(t+t_d)} \sin(\omega_d(t+t_d) + \theta)$$

$$\left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = \frac{pe^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)}{pe^{-\zeta\omega_n(t+t_d)} \sin(\omega_d(t+t_d) + \theta)}$$

$$\sin(\omega_d t + \theta) = \sin(\omega_d(t+t_d) + \theta) = 1$$

$$\left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{e^{-\zeta\omega_n(t+t_d)}}$$

Après développement et simplification de l'équation précédente on obtient :

$$\delta = 2\pi\zeta \qquad \zeta = \frac{\delta}{2\pi}$$

il y a une forte probabilité de faire une erreur en mesurant les amplitudes de déplacement dans deux cycles consécutifs quelconques car la différence entre ces deux quantités est très petite. Par conséquent, une plus grande précision peut être obtenue en considérant des pics de réponse qui sont distants de plusieurs cycles, disons en "j" cycles. Le mouvement décroît de  $u_i$  à  $u_{i+j}$  sur j cycles, c'est-à-dire :

$$\frac{u_i}{u_{i+j}} = \frac{u_i}{u_{i+1}} \frac{u_{i+1}}{u_{i+2}} \frac{u_{i+2}}{u_{i+3}} \dots \frac{u_{i+j-1}}{u_{i+j}} = e^{j\delta}$$

On aura :

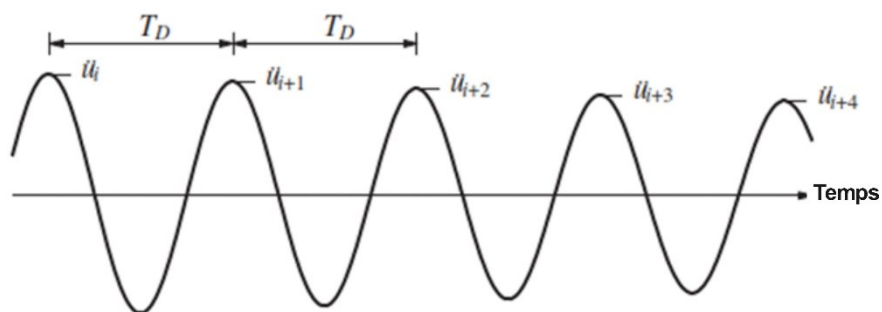
$$\delta = \frac{1}{j} \log \frac{u_i}{u_{i+j}} \qquad \text{et} \qquad \delta \approx 2\pi\zeta$$

$$\delta = \frac{1}{j} \log \frac{u_i}{u_{i+j}} \qquad \text{et} \qquad \delta \approx 2\pi\zeta$$

Donc pour des faibles amortissements :

$$\xi = \frac{u_i - u_{i+j}}{2j\pi u_{i+j}}$$

Le même principe pour le décrément logarithmique peut être effectué avec les accélérations :



## 2.7. Applications

### Exercice 1

Un appareil fragile d'un poids de 20 kg est emballé dans une mousse de polyuréthane dont la rigidité verticale est de 20 kN/m. Le frottement interne de la mousse de protection développe un coefficient d'amortissement  $\xi = 0.05$ .

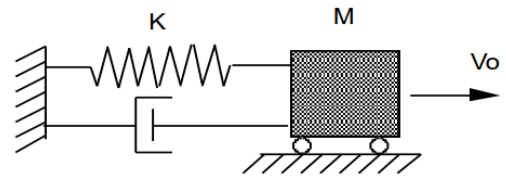
Déterminer l'accélération subie par l'appareil à  $t = 0s$  si on laisse tomber l'emballage d'une hauteur de 1 m.

Remarque : la mousse constitue à la fois un ressort et un amortisseur.

**Solution 1**

Il s'agit d'un système amorti à un degré de liberté dont la solution générale est :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( X_0 \cos(\omega_D t) + \frac{V_0 + \zeta\omega_n X_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right)$$



Conditions limites :

$$U_0 = 0$$

$$V_0 = \sqrt{2gh} \cong 4.43 \text{ m/s}$$

Donc :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( \frac{V_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right)$$

$$\dot{u}(t) = V_0 e^{-\zeta\omega_n t} \left( -\frac{\zeta\omega_n}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right)$$

$$\ddot{u}(t) = V_0 e^{-\zeta\omega_n t} \left( \frac{(\zeta\omega_n)^2}{\omega_D} \sin(\omega_D t) - 2\zeta\omega_n \cos(\omega_D t) - \omega_D \sin(\omega_D t) \right)$$

$$\ddot{u}(t=0) = -2\zeta\omega_n V_0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \cong 31.6 \text{ rad/s}$$

$$\zeta\omega_n = 0.05\omega_n = 1.58 \text{ 1/s}$$

$$\ddot{u}(t=0) = -2 \cdot 1.58 \cdot 4.43 \cong -14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**Exercice 2**

Une expérience de vibration libre a été réalisée sur un réservoir haut vide. Le réservoir a été connecté avec un câble et tiré latéralement (horizontalement) avec une force de 73 kN à une distance de 5,1 cm. Le câble a été soudainement coupé et la vibration libre résultante du réservoir a été enregistrée. Le temps nécessaire au réservoir pour terminer quatre cycles complets est de 2,0 sec. L'amplitude du mouvement à ce moment était de 2,54 cm

À partir des données précédentes, il est nécessaire de calculer chacun des éléments suivants :

- a) taux d'amortissement
- b) La période naturelle du système non amorti
- c) La rigidité effective
- d) Poids effectif
- e) facteur d'amortissement
- f) Le nombre de tours nécessaires pour que l'amplitude diminue à 0,5 cm

**Solution 2**

a) taux d'amortissement

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left( \frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad j = 4 \text{ cycles et } u_1 = 5.1 \text{ cm et } u_5 = 2.54 \text{ cm} \quad \Rightarrow \delta = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{5.1}{2.54} \right) = 174.27 \times 10^{-3}$$

On supposant que l'amortissement est faible  $\zeta < 0.2$

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \delta \cong 2\pi\zeta \Rightarrow \zeta = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{174.27 \times 10^{-3}}{2\pi} = 0.0277 = 2.77\% < 20\%$$

b) La période naturelle du système non amorti

Puisque  $\zeta < 20\%$ , alors  $T_n \approx T_D$ . D'autre part, le temps requis pour quatre cycles complets est de sec 2.0, donc :

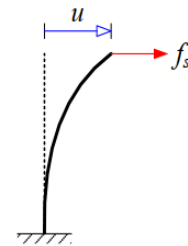
$$T_n \cong T_D = \frac{2.0}{4} = 0.5 \text{ sec}$$

c) La rigidité effective

$$f_s = 73 \text{ kN}$$

$$u = 5.1 \text{ cm} \quad f_s = k_e u$$

$$\Rightarrow k_e = \frac{f_s}{u} = \frac{73 \times 10^3}{5.1 \times 10^{-2}} = 1431.37 \times 10^3 \text{ N/m}$$



d) Poids effectif

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{0.50} = 12.57 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{1431.37 \times 10^3}{12.57^2} = 9059 \text{ kg}$$

$$W = mg = 9059 \times 9.81 = 88.87 \times 10^3 \text{ N} = 88.87 \text{ KN}$$

e) facteur d'amortissement

$$\zeta = \frac{c}{c_{er}} \Rightarrow c = \zeta c_{er} = \zeta (2\sqrt{km}) = 0.0277 \times 2 \times \sqrt{1431.37 \times 10^3 \times 9059}$$

$$\Rightarrow c = 6308.5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ sec}$$

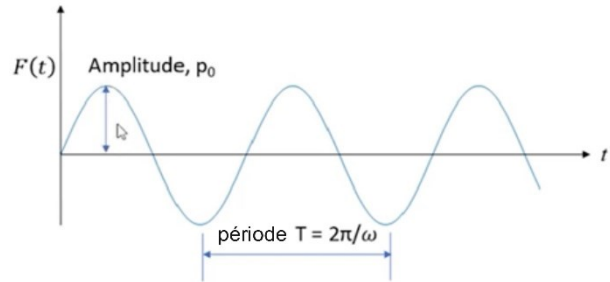
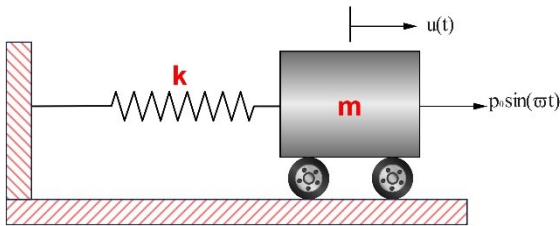
f) Le nombre de tours nécessaires pour que l'amplitude diminue à 0,5 cm tant que  $\zeta < 20\%$

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left( \frac{u_1}{u_{1+j}} \right) \Rightarrow j = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{u_1}{u_{1+j}} \right) = \frac{1}{174.27 \times 10^{-3}} \ln \left( \frac{5.1}{0.5} \right) = 13.33$$

$$\Rightarrow j = 13 \text{ cycles}$$

### III. Système forcé non amorti sous charge harmonique

#### 3.1. Formulation de l'équation de mouvement



$$F(t) - Ku = m\ddot{u}$$

$$m\ddot{u} + Ku = F(t)$$

$$m\ddot{u} + Ku = F(t)$$

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_{ex}t)$$

$$u = u_h + u_p$$

$$m\ddot{u} + Ku = F_0 \sin(\omega_{ex}t)$$

$$u_h = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

$$u_p = y \sin(\omega_{ex}t)$$

Après un développement théorique on obtient l'équation dynamique suivante :

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \left[ \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} - \frac{F_0}{K} \frac{\beta}{1 - \beta^2} \right] \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\omega_{ex}t)$$

Réponse transitoire

réponse permanente

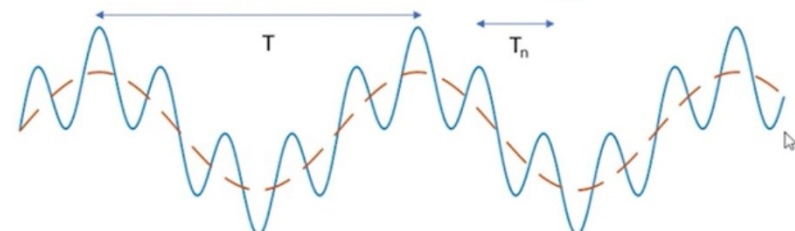
Réponse transitoire



Réponse permanente



Réponse totale



Pour simplifier les choses, on peut dire qu'au début du mouvement, la vitesse initiale et le déplacement libre initial « insensible à aucune force » sont égaux à zéro, et donc le déplacement initial final est égal à :

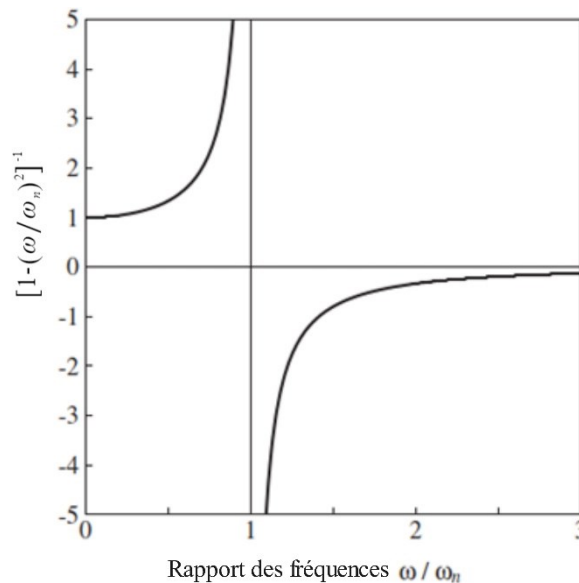
$$u = \left( \frac{F_0}{K} \right) (DMF) (\sin(\omega_{ex}t) - \beta \sin(\omega_n t))$$

$$\dot{u} = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + \dot{u}_0 \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{K} (DMF) (\omega_{ex} \cos(\omega_{ex}t) - \beta \omega_n \cos(\omega_n t))$$

$$\ddot{u} = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - \dot{u}_0 \omega_n \sin(\omega_n t) - \frac{F_0}{K} (DMF) (\omega_{ex}^2 \sin(\omega_{ex}t) - \beta \omega_n^2 \sin(\omega_n t))$$

### 3.2. Paramètres

$$R_d = \frac{1}{1 - \beta^2}$$



- ❖ Pour  $\beta = \omega / \omega_n < 1$  ou  $\omega < \omega_n$  le facteur  $1 / (\beta^2 - 1)$  est positif et donc  $u(t)$  et  $F(t)$  ont le même signe algébrique (c'est-à-dire lorsque la force agit vers la droite, le système se déplace en même temps vers la droite). Le mouvement dans ce cas est dit en phase avec la force appliquée.
- ❖ pour  $\beta = \omega / \omega_n > 1$  ou  $\omega > \omega_n$  le facteur  $1 / (\beta^2 - 1)$  est négatif et donc  $u(t)$  et  $F(t)$  ont des signes algébriques opposés (c'est-à-dire lorsque la force agit sur le droite, le système se déplace en même temps vers la gauche.) Le mouvement dans ce cas est dit déphasé par rapport à la force appliquée.

Maintenant, puisque l'amortissement inévitablement présent dans les systèmes réels fait que la vibration libre (la composante transitoire) décroît avec le temps. La réponse dynamique en

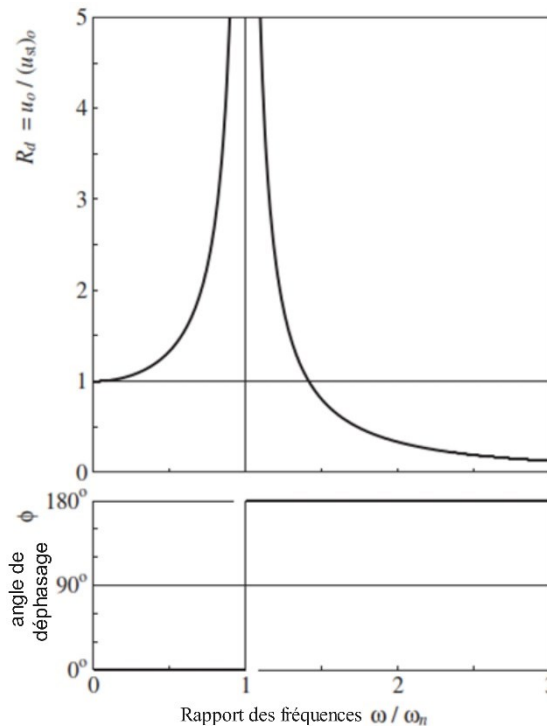
régime permanent, une oscillation sinusoïdale à la fréquence de la force dynamique, peut être exprimée sous la forme

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\bar{\omega}t) \qquad u(t) = \left| u_{st} \frac{1}{1-\beta^2} \right| \sin(\bar{\omega}t - \phi)$$

$$u_0 = u_{\max} = \left| u_{st} \frac{1}{1-\beta^2} \right| = u_{st} \frac{1}{|1-\beta^2|} \qquad R_d = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{u_0}{u_{st}}$$

$$u(t) = u_{st} R_d \sin(\bar{\omega}t - \phi) \qquad \phi = \begin{cases} 0^{\circ} & \beta < 1 \text{ (or } \bar{\omega} < \omega_n) \\ 180^{\circ} & \beta > 1 \text{ (or } \bar{\omega} > \omega_n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + ku &= p_0 \sin \bar{\omega}t \\ u(t) &= u_{st} R_d \sin(\bar{\omega}t - \phi) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} R_d = \frac{1}{|1-\beta^2|} \\ \phi = \begin{cases} 0^{\circ} & \beta < 1 \text{ (or } \bar{\omega} < \omega_n) \\ 180^{\circ} & \beta > 1 \text{ (or } \bar{\omega} > \omega_n) \end{cases} \end{cases}$$



### 3.3. Phénomène de résonance

Dans ce cas, la première solution de l'équation différentielle n'est pas acceptable car si  $\omega_{ex} = \omega_n$  la fonction  $C\sin\omega t$  dans la solution particulière (up) fait elle-même partie de la solution complémentaire. En plus le facteur d'amplification dynamique (DMF) est égal à l'infini, et cela sera difficile à gérer, nous allons donc résoudre l'équation du mouvement d'une autre manière :

$$mu + Ku = F_0 \sin(\omega_n t) \qquad u + \frac{K}{m} u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t) \qquad u + \omega_n^2 u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t)$$

$$u = u_h + u_q$$

$$u_h = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \quad \text{et} \quad u_p = y t \cos(\omega_n t)$$

$$u_p = y \cos(\omega_n t) - y \omega_n t \sin(\omega_n t)$$

$$u = -\left(\frac{F_0}{2K}\right) (\omega_n t \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t))$$

$$u = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{2K} (\omega_n^2 t \sin(\omega_n t))$$

$$u = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{2K} (\omega_n^2 \sin(\omega_n t) + \omega_n^3 t \cos(\omega_n t))$$

$$m\ddot{u} + Ku = F_0 \sin(\omega_n t) \quad \ddot{u} + \frac{K}{m}u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t) \quad \ddot{u} + \omega_n^2 u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t)$$

$$u = u_h + u_p$$

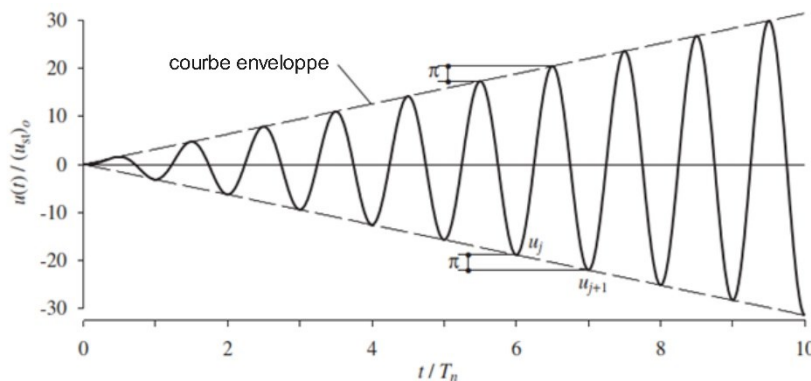
$$u_h = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \quad \text{et} \quad u_p = y t \cos(\omega_n t)$$

$$\dot{u}_p = y \cos(\omega_n t) - y \omega_n t \sin(\omega_n t)$$

$$u = -\left(\frac{F_0}{2K}\right) (\omega_n t \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t))$$

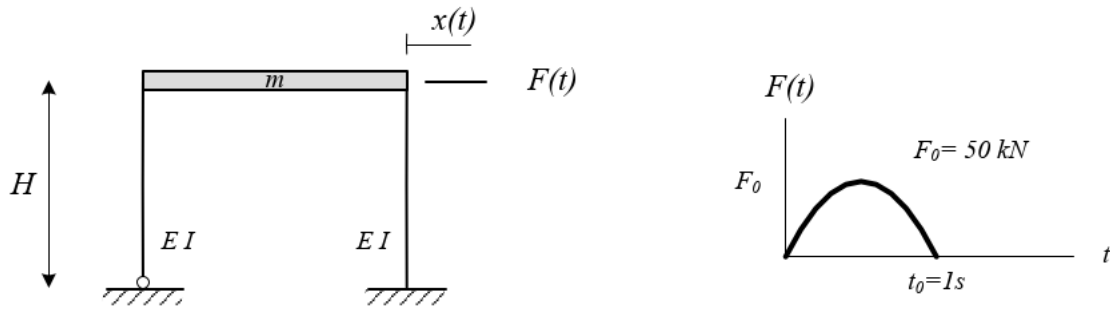
$$\dot{u} = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + \dot{u}_0 \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{2K} (\omega_n^2 t \sin(\omega_n t))$$

$$\ddot{u} = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - \dot{u}_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{2K} (\omega_n^2 \sin(\omega_n t) + \omega_n^3 t \cos(\omega_n t))$$



### 3.4. Application

On considère le portique simple de la figure ci-dessous. Le portique est initialement au repos,  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , quand une force  $F(t)$  est appliquée en tête de l'un des poteaux du portique. La force  $F(t)$  est de la forme d'une demi-sinusoïde avec une amplitude  $F_0$ .



$F_0 = 50 \text{ kN}$  ;  $m = 2000 \text{ kg}$  ;  $E = 210000 \text{ MPa}$  ;  $I = 400 \text{ cm}^4$  ;  $H = 5 \text{ m}$

En supposant que la structure est non amortie, établir l'expression de la réponse de la structure  $x(t)$  pour  $t \leq t_0$  et pour  $t > t_0$ .

**Solution**

Masse :  $m = 2000 \text{ kg}$

Rigidité :  $k = \frac{3EI}{H^3} + \frac{12EI}{H^3} = \frac{15EI}{H^3} \Rightarrow k = 100.810^3 \text{ N/m}$

Amortissement :  $\xi = 0$

Pulsation propre :  $\omega_n = 7.1 \text{ rad/s}$

**1. Réponse de la structure pour  $t < t_0$**

En absence d'amortissement, la réponse totale du portique est donnée par :

$$u(t) = D \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{F_0/k}{\left|1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2\right|} \sin(\omega t)$$

En utilisant la forme trigonométrique de la partie transitoire de la réponse :

$$u(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t) - B\omega_n \sin(\omega_n t) + \frac{F_0/k}{\left|1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2\right|} \omega \cos(\omega t)$$

La vitesse est obtenue en dérivant par rapport au temps.

$$\dot{u}(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t) - B\omega_n \sin(\omega_n t) + \frac{F_0/k}{\left|1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2\right|} \omega \cos(\omega t)$$

Le déplacement statique :  $\delta_{stat} = \frac{F_0}{k} = 0.496 \text{ m}$

La pulsation de la force d'excitation : on a  $T=2\text{s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 3.14 \text{ rad/s}$

$$\omega/\omega_n = 0.442$$

Les coefficients A et B sont déterminés en utilisant les conditions initiales :

$$u(0) = 0 = B \qquad \dot{u}(0) = 0 = A\omega_n + \frac{F_0/k}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|} \omega$$

Ce qui donne :  $A = -272.2 \cdot 10^{-3}$  et  $B=0$

Finalement la réponse totale du portique à l'excitation sinusoïdale peut être écrite comme :

$$u(t) = -272.2 \sin(7.1t) + 616 \sin(3.14t) [mm]$$

**2. Réponse de la structure pour  $t \geq t_0$  :**

A l'instant  $t = t_0$  la force de perturbation s'annule. Le portique continue à osciller à cause des conditions initiales non nulles (déplacement et vitesse à l'instant  $t = 1s$ ). Les vibrations correspondent alors à un cas d'oscillations libres non amorties.

La réponse de la structure s'écrit alors :

$$u(\bar{t}) = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2} \cos\left(\omega_n \bar{t} - a \tan\left(\frac{V_0}{\omega_n X_0}\right)\right) \quad ; \quad \bar{t} = t - t_0$$

Avec :

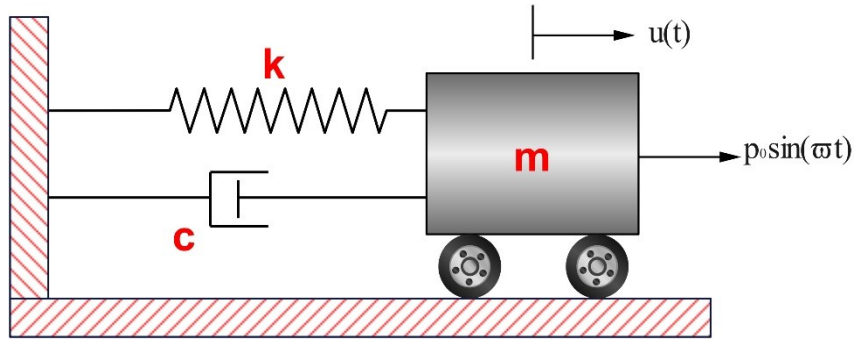
$$X_0 = x(\bar{t} = 0) = x(t = 1s) = -0.19Sm$$

$$V_0 = \dot{x}(\bar{t} = 0) = \dot{x}(t = 1s) = -3.257m/s$$

La réponse du portique peut être écrit comme :

$$u(\bar{t}) = 500 \cos(7.1\bar{t} - 4.305) [mm]$$

### IV. Système forcé amorti sous charge harmonique



#### 4.1. Formulation de l'équation de mouvement

$$F(t) - KD - C\dot{u} = m\ddot{u}$$

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$$

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}$$

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

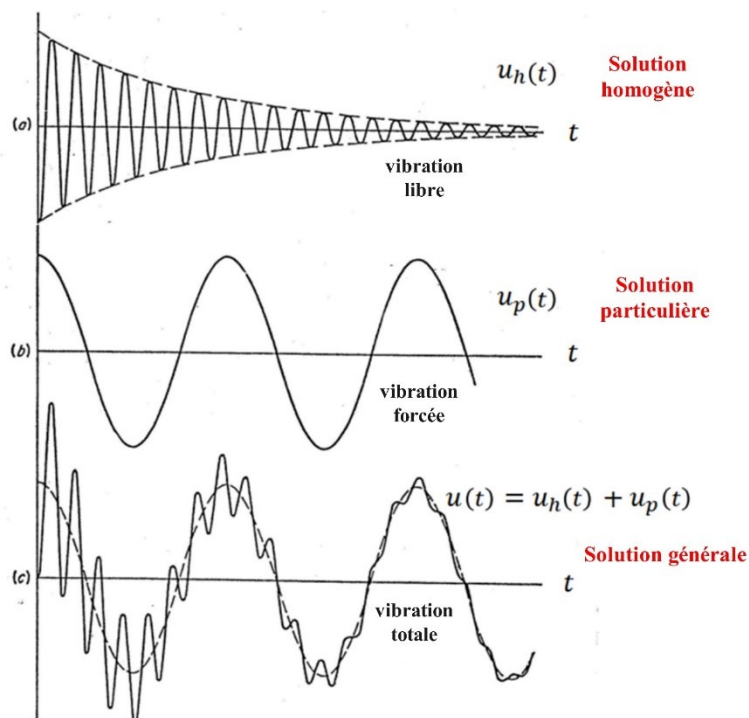
$$F(t) = F_0 \sin(\omega_{ex}t)$$

$$u = u_h + u_p$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin(\omega_{ex}t) \quad \text{et} \quad C = 2m\zeta\omega_n$$

Donc l'équation du mouvement dynamique sera :

$$u = (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) e^{-\zeta\omega_n t} + \frac{F_0}{K} \left[ \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] * \left[ (1-\beta^2) \sin(\omega_{ex}t) - (2\zeta\beta) \cos(\omega_{ex}t) \right]$$



Comme d'habitude, on peut trouver les constantes A et B en remplaçant l'équation totale du mouvement par les conditions initiales. Cependant, on a constaté précédemment (et d'après la figure) que la solution homogène est une partie transitoire (diminue avec le temps) due à l'existence de l'amortissement dans le système dynamique. Donc on peut négliger cette partie de mouvement et la forme de l'équation dynamique se limite à la solution permanente  $U_p$ .

$$u_p = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right) \left[ (1-\beta^2) \sin(\omega_{ex}t) - (2\zeta\beta) \cos(\omega_{ex}t) \right]$$

Après simplification on aura :

$$u = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \right) \sin(\omega_{ex}t - \theta)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \beta = \frac{\omega_{ex}}{\omega_n}$$

Le paramètre D facteur d'amplification dynamique noté en génie parasismique, réponse spectrale. Ce paramètre est responsable de la conversion du problème dynamique en statique.

#### 4.2. Déformation maximale et décalage de phase

La déformation en régime permanent du système due à la force harmonique, décrite précédemment est de la forme suivante :

$$u = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega_{ex}t - \theta)$$

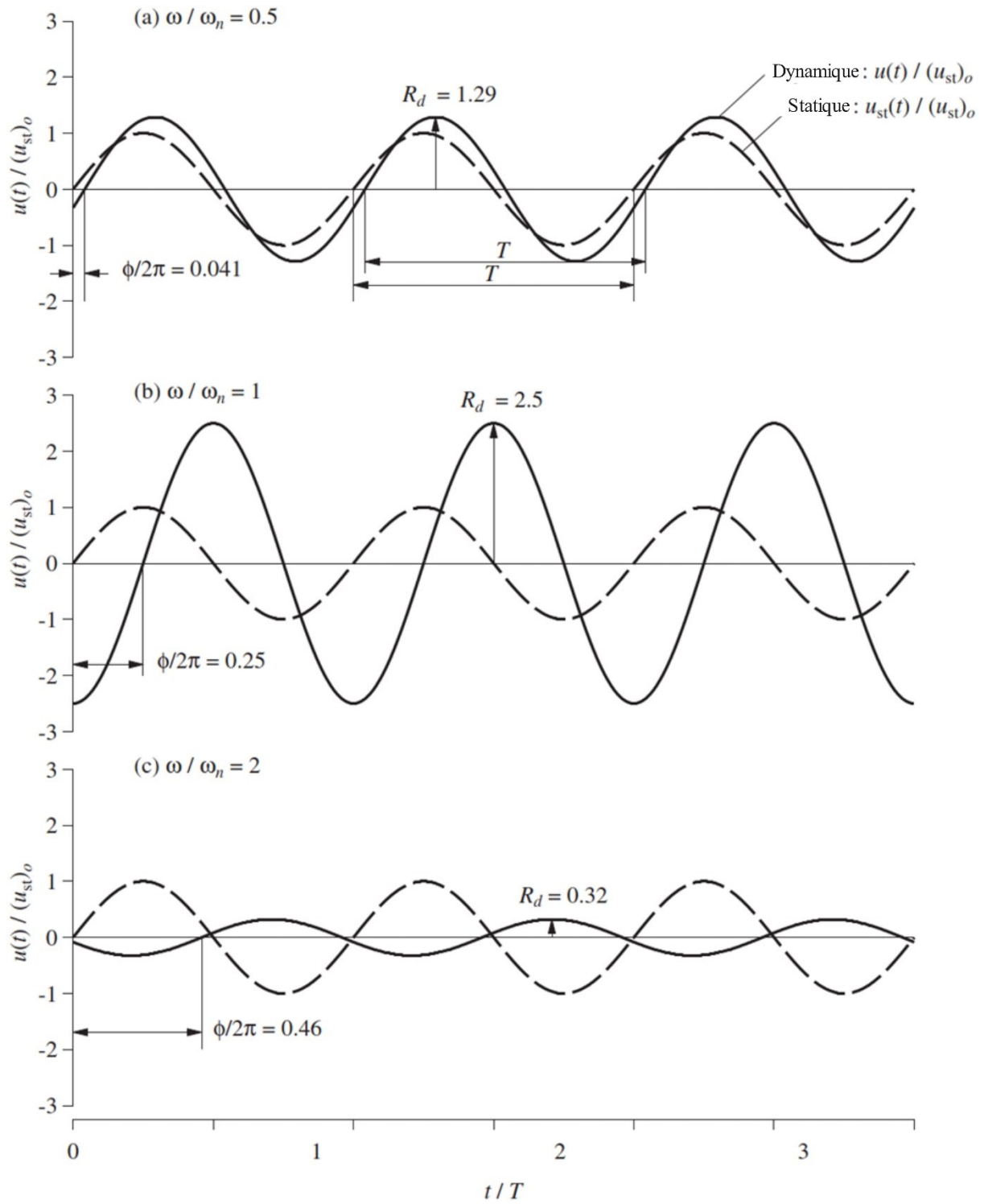
avec

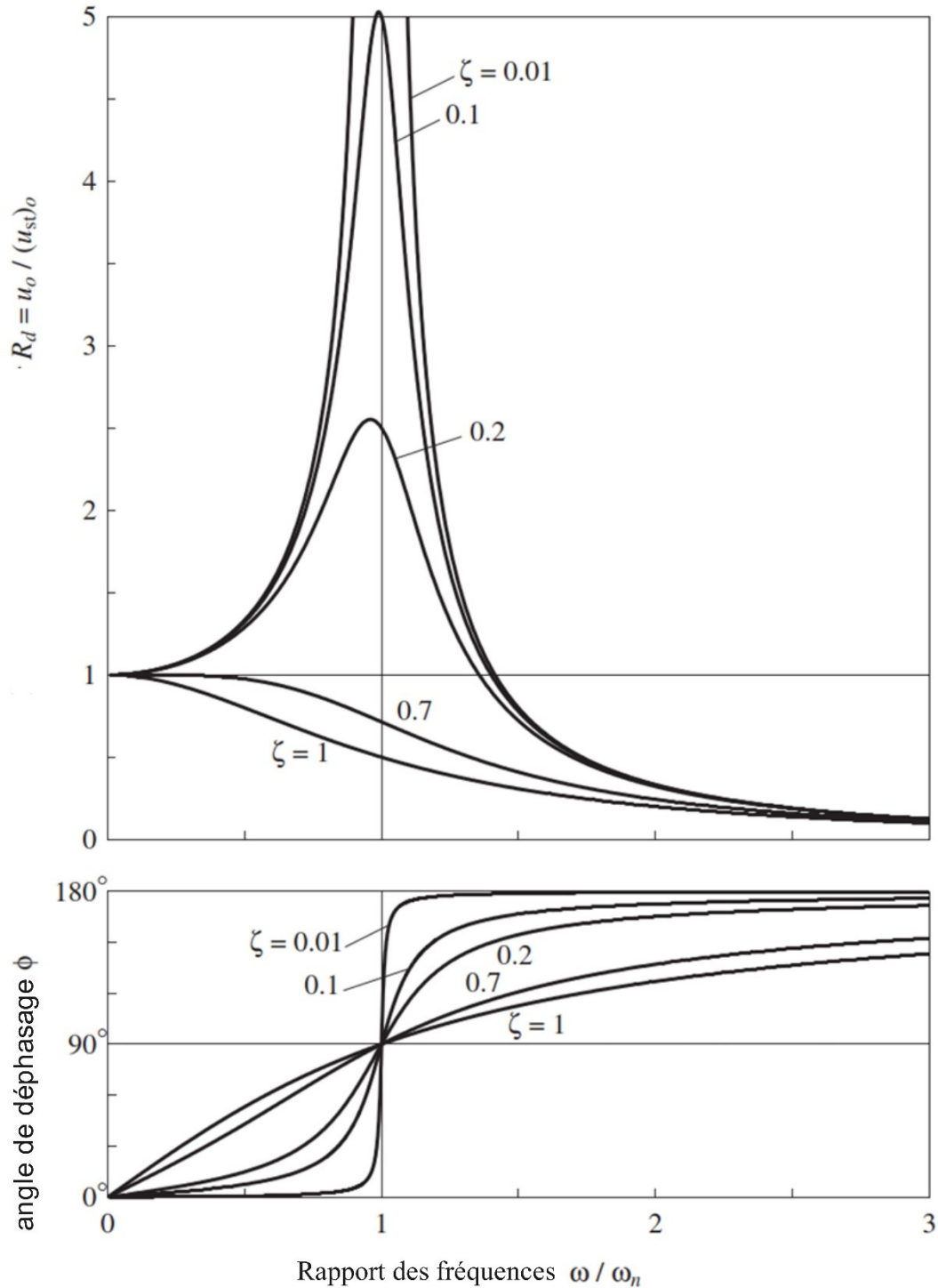
$$\theta = \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \right)$$

et

$$D = R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

L'équation  $u(t)$  est tracée sur la figure suivante pour trois valeurs de  $\omega/\omega_n$  et une valeur fixe de  $\zeta = 0,20$ . Les valeurs de  $R_d$  et  $\varphi$  calculées à partir des équations ci-dessus sont identifiées. La déformation statique  $u_{st}(t) = \frac{P_0}{k} \sin \omega t$  due à  $p(t)$ , qui varie dans le temps comme la force appliquée, à la constante  $k$  près. On voit que le mouvement en régime permanent se produit à la période de forçage  $T = 2\pi/\omega$ , mais avec un décalage temporel  $= \varphi/2\pi$  ;  $\varphi$  est appelé angle de phase ou déphasage.





La figure montre la courbe  $D$  en fonction de  $\beta$  pour les structures avec  $\xi = 0, 0,1, 0,2, 0,5$  et 1  
 L'amortissement réduit  $D$ , et donc l'amplitude de déformation à toutes les fréquences d'excitation.

**Remarque importantes:**

**CAS 1:** lorsque  $\beta$  tend vers zéro,  $D \rightarrow 1$

- l'amplitude de déplacement dynamique est à peu près la même que celle statique.

- En d'autres termes, si la fréquence de force est très inférieure à la fréquence propre de la structure, les effets dynamiques sont négligeables.
- Le déplacement est contrôlé par la rigidité de la structure, avec peu d'effet de masse et d'amortissement, nous appelons donc cette plage ( $\beta \rightarrow 0$ ) comme plage « pseudo-statique ».  $\rho \cong u_0^{st} = \frac{P_0}{k}$

**CAS 2: A l'autre extrême, lorsque  $\beta \gg \gg 1$ ,  $D \rightarrow 0$**

- Si la fréquence de force est très supérieure à la fréquence propre de la structure, le déplacement tend vers zéro.  $u_0 \cong \frac{u_0^{st}}{\beta^2}$
- Dans cet extrême, la force d'inertie domine. Nous appelons donc cette plage "plage inertielle".
- Ce résultat implique que la réponse est contrôlée par la masse du système.

**CAS 3: lorsque  $\beta = 1$ ,  $D \rightarrow \text{pic}$**

- On remarque que l'amortissement ne permet pas le déplacement infini,
- le déplacement peut être très important lorsque le taux d'amortissement est faible.
- une petite force peut produire une très grande réponse.  $D = \frac{1}{2\zeta}$
- Ce résultat implique que la réponse est contrôlée par l'amortissement du système. Le facteur d'amplification dynamique est inversement proportionnel à l'amortissement.
- Dans cette gamme, la force d'amortissement joue un rôle très crucial. Nous appelons donc cette gamme « gamme de résonance ».

L'angle de phase  $\varphi$ , qui définit le temps de retard de la réponse par rapport à la force, varie avec  $\omega/\omega_n$  comme le montre la figure ci-dessus. Il est ensuite examiné pour les trois mêmes régions de l'échelle de fréquence d'excitation :

1. **Si  $\omega/\omega_n \ll 1$**  (c'est-à-dire que la force « varie lentement »),  $\varphi$  est proche de  $0^\circ$  et le déplacement est essentiellement en phase avec la force appliquée, comme sur la Fig. a. Lorsque la force agit vers la droite, le système serait également déplacé vers la droite.
2. **Si  $\omega/\omega_n \gg 1$**  (c'est-à-dire que la force « varie rapidement »),  $\varphi$  est proche de  $180^\circ$  et le déplacement est essentiellement de phase opposée par rapport à la force appliquée, comme sur la Fig. c. Lorsque la force agit vers la droite, le système se déplacerait vers la gauche.
3. **Si  $\omega/\omega_n = 1$**  (c'est-à-dire que la fréquence de forçage est égale à la fréquence naturelle),  $\varphi = 90^\circ$  pour toutes les valeurs de  $\zeta$ , et le déplacement atteint ses pics lorsque la force passe par zéro, comme dans la Fig. b.

### 4.3. Phénomène de résonance

Pour mieux comprendre la nature de la réponse résonnante, considérons la solution générale  $u$  à  $\beta = 1$  :

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \rho_h \cos(\omega t - \theta_h) + \frac{p_o}{k} \left( \frac{1}{2\xi} \right) \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

On note :

$$\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\omega t)$$

Supposons que la structure n'ait initialement aucun mouvement, c'est-à-dire  $u_0 = 0$  et  $v_0 = 0$ .

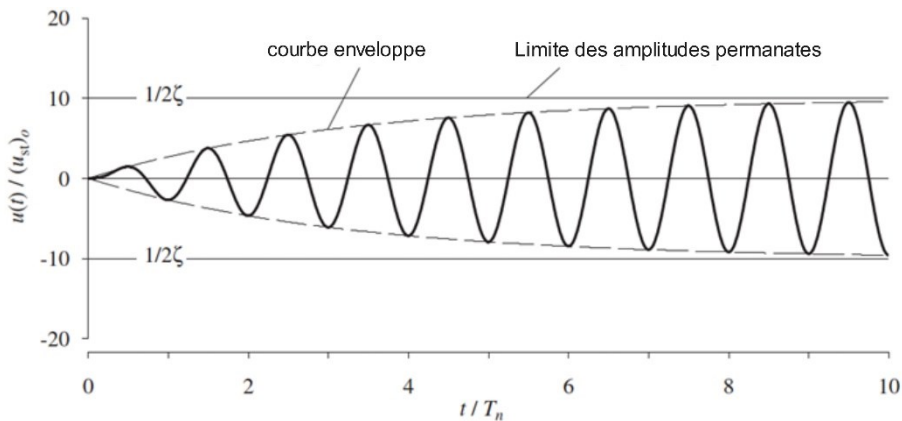
Avec ces conditions initiales spécifiées,  $\rho_h$  et  $\theta_h$  peuvent être déterminés et nous obtenons finalement

$$u(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{p_o}{k} \left( e^{-\xi \omega t} \left[ \cos(\omega_D t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) \right] - \cos(\omega t) \right)$$

Pour les systèmes amortis, l'amortissement abaisse chaque pic et limite la réponse à la valeur

bornée :

$$u_o = \frac{(u_{st})_o}{2\xi}$$

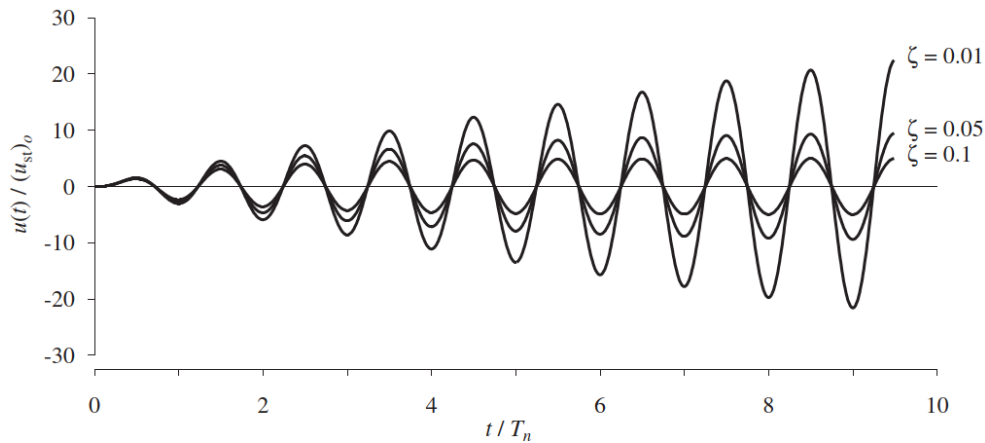


Pour les systèmes légèrement amortis,

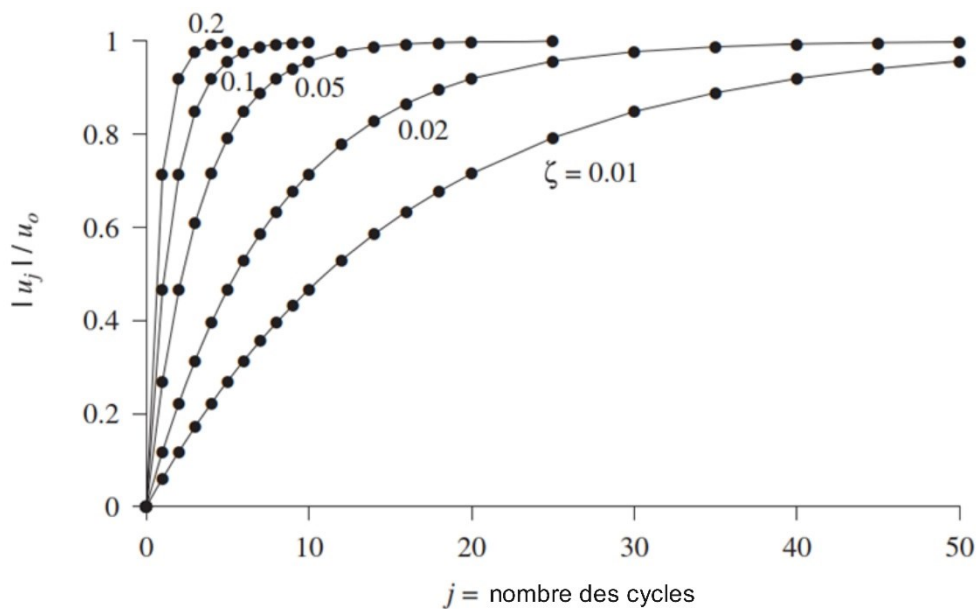
$$u(t) \simeq \underbrace{(u_{st})_o \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi \omega_n t} - 1)}_{\text{envelope function}} \cos \omega_n t$$

- La déformation varie avec le temps selon une fonction cosinus, son amplitude augmentant avec le temps selon la fonction enveloppe représentée en pointillés sur la figure.
- L'amplitude de la déformation en régime permanent d'un système en une force harmonique avec  $\omega = \omega_n$  et la vitesse à laquelle le régime permanent est atteint sont fortement influencées par l'amortissement.

L'influence importante du taux d'amortissement sur l'amplitude est visible sur la figure suivante, où l'équation précédente est tracée pour trois rapports d'amortissement :  $\zeta = 0,01, 0,05$  et  $0,1$ .



Pour étudier comment la réponse s'accumule jusqu'à l'état d'équilibre, nous examinons le pic  $u_j$  après  $j$  cycles de vibration. Une relation entre  $u_j$  et  $j$  peut être écrite en substituant  $t = jT_n$  dans l'Eq. (3.2.8), en fixant  $\cos \omega_n t = 1$ , et en utilisant l'Eq. (3.2.7) pour obtenir



Plus l'amortissement est faible, plus le nombre de cycles nécessaires pour atteindre un certain pourcentage de  $u_0$ , l'amplitude en régime permanent, est important. Par exemple, le nombre de cycles requis pour atteindre 95 % de  $u_0$  est de 48 pour  $\zeta = 0,01$ , 24 pour  $\zeta = 0,02$ , 10 pour  $\zeta = 0,05$ , 5 pour  $\zeta = 0,10$  et 2 pour  $\zeta = 0,20$ . Donc :

- Pour les systèmes fortement amortis, il ne faut que quelques cycles pour atteindre le pic.
- Pour les systèmes faiblement amortis, un grand nombre de cycles peut être nécessaire pour atteindre le pic.

#### 4.4. Facteurs de réponse dynamique

##### 4.4.1. Réponse en déplacement

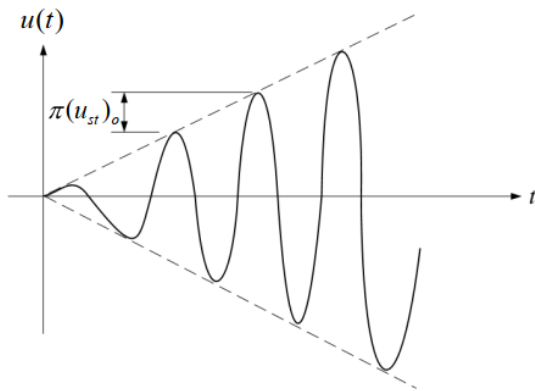
$$D = \frac{1}{(1-\beta^2)} \quad \text{sans amortissement}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \text{avec amortissement}$$

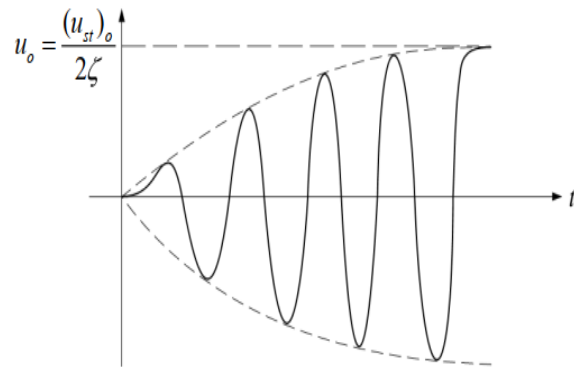
Nous avons appris que l'état de résonance se produit lorsque le rapport ( $\beta$ ) est égal à 1, et donc:

$$D = \frac{1}{(1-1)} = \infty \quad \text{sans amortissement}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{0+(2\zeta*1)^2}} = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{avec amortissement}$$



sans amortissement



avec amortissement

Et nous avons appris que le taux d'amortissement dans les constructions civiles varie entre (0.5 % à 20 %), et nous pouvons donc calculer la valeur minimale et maximale du facteur d'amplification dynamique comme suit:

$$\xi_{\min} = 0.005 \quad D_{\max} = \frac{1}{2 \times 0.005} = 100$$

$$\xi_{\max} = 0.20 \quad D_{\min} = \frac{1}{2 \times 0.2} = 2.5$$

Pour vous donner quelques idées sur cette « amplification de résonance »,

- $\xi$  des structures en acier  $\approx 0,01$ ,  $D = 1/(2 \times 0,01) = 50$
- $\xi$  des structures en béton  $\approx 0,05$ ,  $D = 1/(2 \times 0,05) = 10$
- $\xi$  des tours (300 m à 400 m de hauteur), ponts à longue portée (300 m de portée supérieure)  $\approx 0,005$ ,  $D = 100$

C'est-à-dire que si le phénomène de résonance se produit, la force dynamique sera comprise entre (2,5 à 100) fois la force statique, ce qui nous fait sentir l'importance d'étudier les structures de manière dynamique.

#### 4.4.2. Réponse en vitesse

Dans cette section, nous introduisons des facteurs de réponse de déformation (ou de déplacement), de vitesse et d'accélération qui sont sans dimension et définissent l'amplitude de ces trois grandeurs de réponse. Le déplacement en régime permanent est répété par commodité

$$u = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega_{ex}t - \theta) \text{ ou } \frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \sin(\omega_{ex}t - \theta) :$$

$$u = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega_{ex}t - \theta) \text{ ou } \frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \sin(\omega_{ex}t - \theta)$$

où le facteur de réponse de déformation  $R_d$  est le rapport de l'amplitude  $u_0$  de la déformation dynamique (ou vibratoire) à la déformation statique  $(u_{st})_0$ . En différenciant les deux côtés, une relation peut être développée entre le facteur de réponse de vitesse,  $R_v$  et  $R_d$ , qui est donnée ci-dessous.

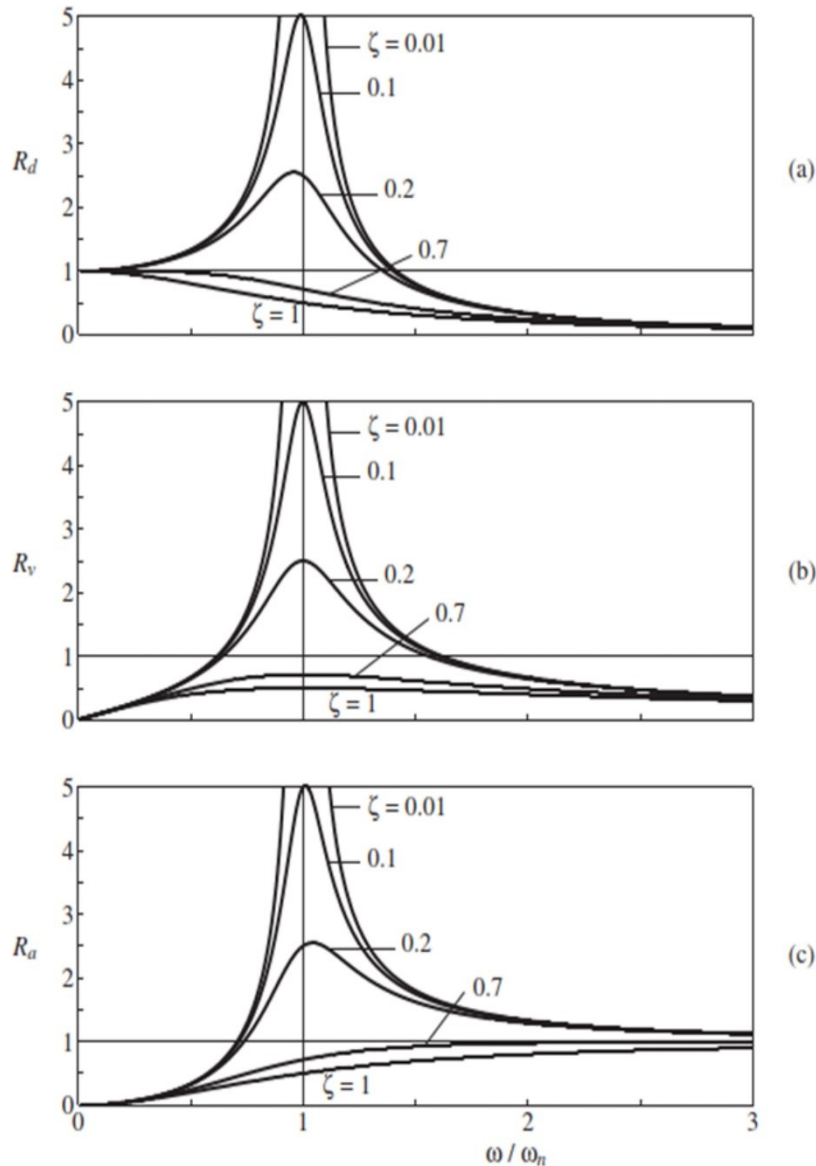
$$R_v = \beta R_d$$

#### 4.4.3. Réponse en accélération

De même, une autre relation peut également être développée entre facteurs de réponse à l'accélération,  $R_a$  et  $R_d$ , qui est donné ci-dessous.

$$R_a = \beta^2 R_d = \beta R_v$$

Les facteurs de réponse dynamique  $R_d$ ,  $R_v$  et  $R_a$  sont tracés en fonction de  $\omega/\omega_n$  dans la figure ci-dessous. Les courbes de  $R_v$  et  $R_a$  sont nouvelles, mais celle de  $R_d$  est la même que celle de la figure précédente. Le facteur de réponse de la déformation  $R_d$  est égal à l'unité à  $\omega/\omega_n = 0$ , son pic à  $\omega/\omega_n < 1$  et s'approche de zéro lorsque  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ . Le facteur de réponse en vitesse  $R_v$  est nul à  $\omega/\omega_n = 0$ , le pic à  $\omega/\omega_n = 1$ , et se rapproche de zéro lorsque  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ . Le facteur de réponse d'accélération  $R_a$  est nul à  $\omega/\omega_n = 0$ , max à  $\omega/\omega_n > 1$  et s'approche de l'unité lorsque  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ . Pour  $\zeta > 1/\sqrt{2}$  aucun pic ne se produit pour  $R_d$  et  $R_a$ .



#### 4.5. Fréquences de résonance

Une fréquence de résonance est définie comme la fréquence forcée à laquelle se produit la plus grande amplitude de réponse. La figure ci-dessus montre que les pics des courbes de réponse en fréquence pour le déplacement, la vitesse et l'accélération se produisent à des fréquences légèrement différentes. Ces fréquences de résonance peuvent être déterminées en mettant à zéro la dérivée première de  $R_d$ ,  $R_v$  et  $R_a$  par rapport à  $\omega/\omega_n$  ; pour  $\zeta < 1/\sqrt{2}$  ils sont :

Fréquence de résonance de déplacement :  $\omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Fréquence de résonance de vitesse :  $\omega_n$

Fréquence de résonance d'accélération :  $\omega_n \div \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Pour un système non-amorti les trois fréquences de résonance sont identiques et égales à la fréquence propre  $\omega_n$  du système. Normalement, les fréquences de résonance d'un système

amorti devraient être à sa fréquence naturelle  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ , mais cela ne se produit pas ; la différence est cependant minime. Pour le degré d'amortissement habituellement incorporé dans les structures, typiquement bien inférieur à 20 %, les différences entre les trois fréquences de résonance et la fréquence propre sont faibles. Les trois facteurs de réponse dynamique à leurs fréquences de résonance respectives sont

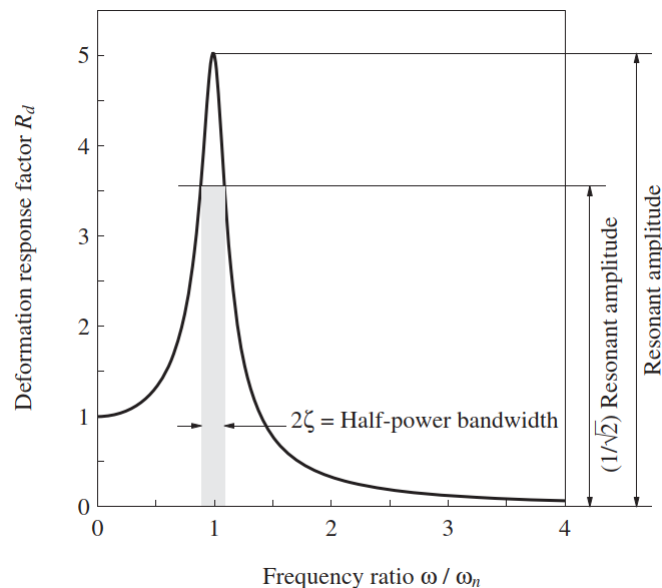
$$R_d = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad R_v = \frac{1}{2\xi} \quad R_a = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

**4.6. Évaluation de l'amortissement à partir de la courbe de résonance**

- Une façon de déterminer expérimentalement l'amortissement "c" est la décroissance des vibrations libres (décrément logarithmique).
- Une autre façon d'estimer l'amortissement "c" consiste à utiliser la courbe de réponse en fréquence.

La courbe de réponse en fréquence est un tracé de l'amplitude d'une quantité de réponse par rapport à la fréquence d'excitation.

Si  $\omega_a$  et  $\omega_b$  sont les fréquences de forçage de part et d'autre de la fréquence de résonance à laquelle l'amplitude  $u_o$  est  $1/\sqrt{2}$  fois l'amplitude de résonance, alors pour un petit  $\zeta$



Équation de  $R_d$  et  $1/\sqrt{2}$  fois l'amplitude de résonance de  $R_d$ , par définition, les fréquences de forçage  $\omega_a$  et  $\omega_b$  vérifient la condition

$$\frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Inverser les deux côtés, les mettre au carré et réorganiser les termes donnent

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1 - 2\zeta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2) = 0$$

L'équation (b) est une équation quadratique en  $(\omega/\omega_n)^2$  dont les racines sont

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}$$

où le signe positif donne la plus grande racine  $\omega_b$  et le signe négatif correspond à la plus petite racine  $\omega_a$ .

Pour les petits rapports d'amortissement représentatifs des structures pratiques, les deux termes contenant  $\zeta^2$  peuvent être supprimés et

$$\frac{\omega}{\omega_n} \simeq (1 \pm 2\zeta)^{1/2}$$

En ne prenant que le premier terme du développement en série de Taylor du côté droit, on obtient

$$\frac{\omega}{\omega_n} \simeq 1 \pm \zeta$$

En soustrayant la plus petite racine de la plus grande, on obtient

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} \simeq 2\zeta$$

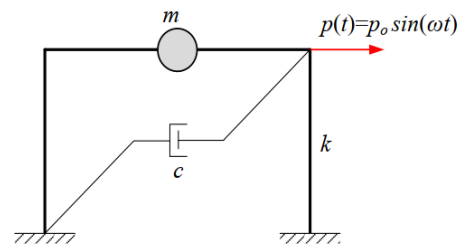
#### 4.7. Applications

##### Exercice 1

On a l'amplitude de transition  $u_0$  d'un système à un degré de liberté soumis à une force harmonique pour deux fréquences d'excitation :

lorsque  $\omega = \omega_n$ , l'amplitude de déplacement est égale à  $u_0 = 12,7$  cm

lorsque  $\omega = 5\omega_n$  l'amplitude de déplacement  $u_0 = 0,0508$  cm  
On demande d'estimer le taux d'amortissement du système.



##### Solution 1

##### 1<sup>er</sup> cas

$$A : \omega = \omega_n \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \beta = 1 \text{ mais quand } \beta = 1 \Rightarrow R_d = \frac{1}{2\zeta}$$

$$R_d = \frac{1}{2\zeta} \Rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{2\zeta} \Rightarrow u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \Rightarrow 12.7 \times 10^{-2} = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{(u_{st})_0}{25.4 \times 10^{-2}} \dots (1)$$

**2<sup>eme</sup> cas**

$$\text{At } \omega = 5\omega_n \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 5 \Rightarrow \beta = 5 \Rightarrow R_d = \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow R_d = \frac{1}{25}$$

$$R_d = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{25} \Rightarrow u_0 = \frac{(u_{st})_0}{25} \Rightarrow 0.0508 \times 10^{-2} = \frac{(u_{st})_0}{25}$$

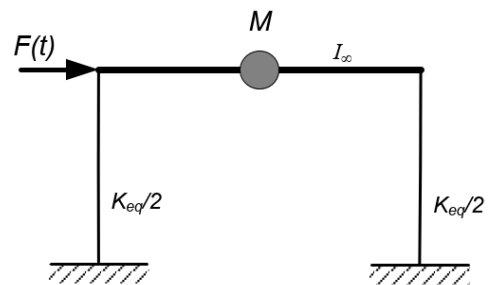
$$\Rightarrow (u_{st})_0 = 12.7 \times 10^{-3} \text{ m... (2)}$$

En substituant la relation (2) dans (1), on obtient :

$$\zeta = \frac{(u_{st})_o}{25.4 \times 10^{-2}} = \frac{12.7 \times 10^{-3}}{25.4 \times 10^{-2}} = 0.05 \Rightarrow \zeta = 5\%$$

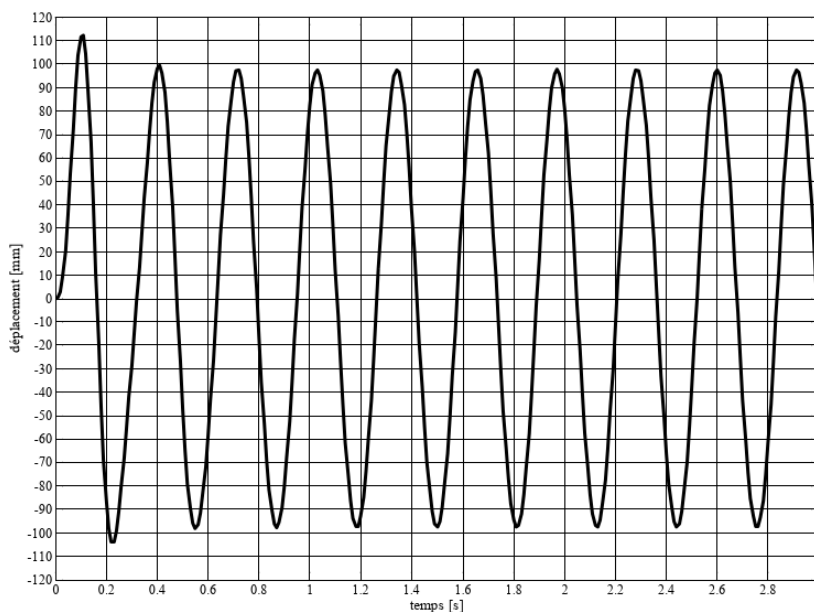
**Exercice 2**

On considère le portique simple de la figure suivante. Le portique est initialement au repos,  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , quand une force  $F(t)$  est appliquée en tête de l'un des poteaux du portique. La force  $F(t)$  est de la forme suivante :  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$



La réponse de la structure (figure ci-contre) est enregistrée à partir du moment d'application de la force.

$F_0 = 600 \text{ kN}$   
 $K_{eq} = 8090 \text{ kN/m}$



1. S'agit-il d'un système amorti ou non ? justifier votre réponse.
2. Déterminer approximativement la pulsation de la force d'excitation  $\omega$ .
3. Déterminer approximativement la valeur du facteur d'amplification  $R_d$ .

**Solution 2**

1. Sur la figure on voit que l'amplitude de la réponse totale diminue après quelques cycles pour se stabiliser. Cela est dû au fait que la solution homogène disparaît après les quelques premières oscillations : le système est donc amorti.

2. Dans les oscillations forcées, la réponse totale se compose de deux sinusoides avec des fréquences différentes : une à celle de la force perturbatrice (correspondant à la solution particulière) et l'autre à la fréquence propre de l'oscillateur (correspondant à la solution homogène). Avec amortissement, la solution homogène disparaît après quelques oscillations. Donc, pour déterminer la pulsation de la force d'excitation il faut essayer d'estimer sur la courbe de la réponse de la structure la période des oscillations à amplitude constante.

Estimation : Durée pour 5 cycles = 2.74-1.53s

$$\text{Donc : } T=0.306 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 20.53 \text{ rad/s}$$

Estimation : Durée pour 5 cycles = 2.74-1.21=1.53s

$$\text{Donc : } T = 0.306 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 20.53 \text{ rad/s}$$

3. Toujours en considérant la partie de la réponse correspondant aux oscillations à amplitude constante.

$$x_{\max} \approx 98 \text{ mm}$$

$$\text{Avec : } \delta_{star} = \frac{F_0}{K} = 0.0742 \text{ m}$$

$$\text{Et le facteur d'amplification vaut : } R_d = \frac{x_{\max}}{\delta_{star}} = \frac{98}{74.2} = 1.32$$

## V. Système forcé sous charge générale

### 5.1. Les méthodes de résolution

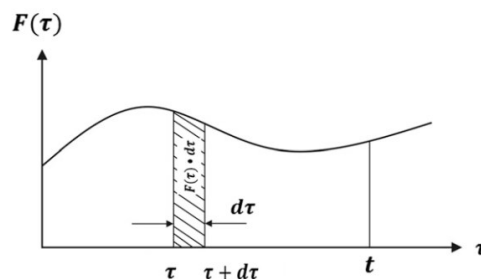
Les forces dynamiques qui s'exercent sur les structures ne sont souvent connues que par des mesures (séisme, pression du vent, etc.) et ne peuvent donc pas être exprimées par une fonction mathématique.

Diverses méthodes peuvent être utilisées pour trouver la réponse du système à une excitation arbitraire comme suit :

- Représenter l'excitation par une intégrale de Fourier
- En utilisant la méthode intégrale de Duhamel
- En utilisant la méthode de transformation de Laplace
- D'abord en approchant  $F(t)$  par un modèle d'interpolation approprié et puis en utilisant une procédure numérique
- En intègre numériquement les équations de mouvement.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la seconde méthode de Duhamel. Nous verrons que ce concept nous aidera à obtenir la réponse à l'aide d'une intégrale qui peut être résolue analytiquement si la fonction de la force est simple. Cependant, si la fonction de la force est compliquée, une procédure d'intégration numérique est nécessaire.

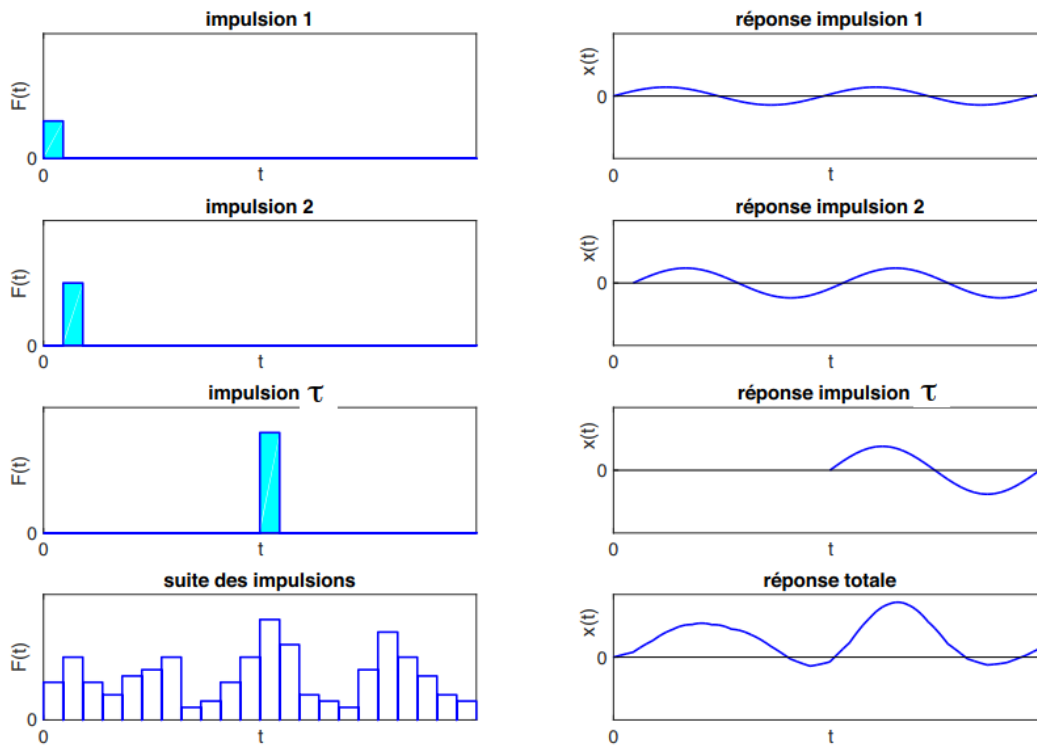
La méthode consiste à considérer la force comme une suite d'impulsions très brèves. En d'autres termes, la fonction de la force est décomposée en une série d'impulsions successives. Une force impulsive est une force très grande qui agit pendant un temps très court. L'impulsion correspondante de ce type de charge est définie comme le produit de la force par le temps de sa durée (l'aire sous la courbe)  $(F(\tau) \cdot d\tau)$ .



Une force quelconque peut être considérée comme une suite d'impulsions  $(F(\tau) \cdot d\tau)$ .

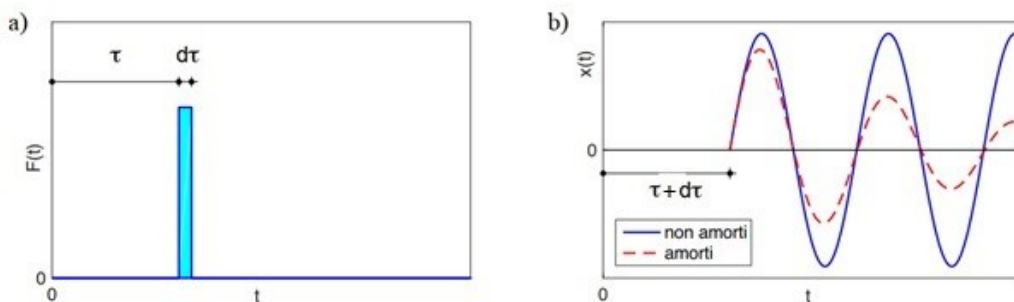
Nous devons étudier le chargement impulsif, car les structures réelles sont soumises à des charges qui ne sont pas harmoniques comme nous l'avons étudié auparavant. Nous allons utiliser ce principe de la charge impulsive pour évaluer la réponse d'un système linéaire quand il est au repos. Pour déterminer la réponse complète, il suffit d'appliquer le principe de

superposition et d'additionner les réponses dues aux impulsions successives, en prenant soin de considérer les instants différents auxquels elles apparaissent.



**5.2. Formulation de l'équation de mouvement sous charge impulsive**

Tant que la force est appliquée dans un temps très court, la force d'amortissement  $f_D$  et la force de rappel  $f_s$  peuvent être négligées ( $ku = k\dot{u} = 0$ ), ce qui veut dire qu'après l'impulsion, la réponse de l'oscillateur est connue par la solution des oscillations libres.



Partant de l'expression originale de la deuxième loi de Newton qui stipule que le changement de quantité de mouvement est égal à la force nette appliquée sur la masse:

$$\sum F = \frac{d(m.u)}{dt} \Rightarrow F(t) = m \cdot \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow du(t) = \frac{F(t)}{m} dt$$

$$\sum F = \frac{d(m.\dot{u})}{dt} \Rightarrow F(\tau) = m \cdot \frac{d\dot{u}(\tau)}{d\tau} \Rightarrow d\dot{u}(\tau) = \frac{F(\tau)}{m} d\tau$$

où  $F(\tau)d\tau$  est l'impulsion et  $du(\tau)$  est la vitesse incrémentale. Cette vitesse incrémentale peut être considérée comme une vitesse initiale de la masse à l'instant  $\tau$ .

### 5.3. Intégrale de Duhamel pour un système non-amortie

On sait que l'équation du mouvement s'écrit :  $m\ddot{u} + ku = 0$

$$u(t) = u(0)\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t) \quad \text{Si } u(0) = 0 \Rightarrow u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

Considérons maintenant cette impulsion  $F(\tau)d\tau$  agissant sur la structure représentée par l'oscillateur non-amorti. Au temps  $\tau$ , l'oscillateur subira un changement de vitesse donné par l'équation  $du(\tau)$ . Ce changement de vitesse est ensuite introduit dans l'équation de réponse en déplacement d'un système 1DDL libre non-amorti comme une vitesse initiale  $v_0$  ainsi que le déplacement initial  $u_0 = 0$  au temps  $\tau$  produisant un déplacement  $du(t)$  à un temps ultérieur  $t$  donné par :

$$du(t) = \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - \tau)$$

La fonction de chargement peut alors être considérée comme une série d'impulsions courtes à des instants incrémentiels successifs  $d\tau$ , chacune produisant sa propre réponse différentielle à l'instant  $t$  de la forme donnée par l'Eq. (4.2).

Par conséquent, nous concluons que le déplacement total à l'instant  $t$  dû à l'action continue de la force  $F(\tau)$  est donné par la somme ou l'intégrale des déplacements différentiels  $du(t)$  de l'instant  $t = 0$  à temps  $t$ , c'est-à-dire

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

L'intégrale dans cette équation est connue sous le nom d'intégrale de Duhamel. L'équation ci-dessus représente le déplacement total produit par la force d'excitation  $F(\tau)$  agissant sur l'oscillateur non-amorti ; elle comprend à la fois les composantes stationnaire et transitoire du mouvement correspondant aux conditions initiales nulles,  $u_0 = 0$  et  $v_0 = 0$ . Si la fonction  $F(\tau)$  ne peut pas être exprimée analytiquement, cette intégrale peut toujours être évaluée approximativement par des méthodes numériques appropriées. Pour inclure l'effet du déplacement initial  $u_0$  et de la vitesse initiale  $v_0$  au temps  $t = 0$ , il suffit d'ajouter à l'Eq. (4.3)

la solution donnée par  $u(t) = u(0)\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$  pour les effets dus aux conditions

initiales. Ainsi, le déplacement total d'un système à un seul degré de liberté non amorti avec une charge arbitraire est donné par :

$$u(t) = u(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

**5.2. Intégrale de Duhamel pour un système amortie**

On sait que l'équation du mouvement s'écrit :  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[ u(0) \cos(\omega_D t) + \left( \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n u(0)}{\omega_n} \right) \sin(\omega_D t) \right]$$

Si  $u(0) = 0 \Rightarrow u(t) = e^{-\xi\omega_n t} \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D} \sin(\omega_D t)$

La réponse d'un système amorti exprimée par l'intégrale de Duhamel est obtenue de manière tout à fait équivalente à l'analyse non amortie. En remplaçant les conditions aux limites dans l'équation du mouvement d'un système libre amorti ci-dessus, on aura :

$$du(t) = e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \frac{F(\tau) d\tau}{m\omega_D} \sin \omega_D (t - \tau)$$

La sommation ou l'intégration de ces termes de réponse différentielle sur l'ensemble de l'intervalle de chargement donne

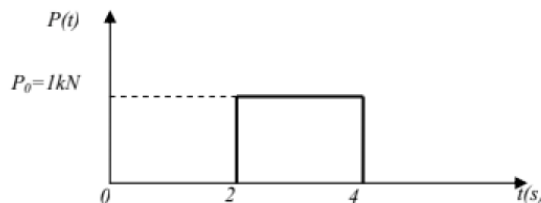
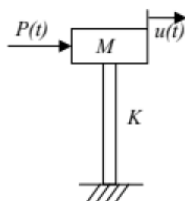
$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_D (t - \tau) d\tau$$

Cette équation est la réponse d'un système amorti en fonction de l'intégrale de Duhamel.

**5.4. Application**

La structure schématisée ci-dessous est soumise à une excitation P(t) avec les conditions initiales  $x(0) = 2\text{cm}$  et  $v(0) = 1\text{cm/s}$ . Si la masse de la structure  $M = 1000\text{kg}$ , la rigidité  $K = 1\text{kN/cm}$  et l'amortissement  $C = 0$  Déterminer :

- 1- La pulsation, la fréquence et la période de cette structure.
- 2- Les déplacements à  $t = 1\text{sec}$ , et  $t = 3\text{sec}$  en utilisant la méthode de l'intégrale de Duhamel.



**Solution**

1. Détermination de la pulsation, la fréquence et la période de cette structure

$$\omega = \frac{k}{m} = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{1000 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.59 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 0.625 \text{ s}$$

2. le déplacement à  $t = 1 \text{ sec} : 0 < t < 2$

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega_0} \int p(r) \sin \omega(t-r) dr$$

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t$$

$$u(1) = 2 \cos 10 * (1) + \frac{1}{10} \sin 10 * (1) = -1.73 \text{ cm}$$

3. le déplacement à  $t = 3 \text{ sec} : 0 < t < 4$

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(r) \sin \omega(t-r) dr$$

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + \int_2^t p_0 \sin \omega(t-r) dr$$

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{p_0 - 1}{m\omega - \omega} [\cos \omega(t-r)]_2^t$$

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{p_0}{k} [1 - \cos \omega(t-2)]$$

$$u(3) = 2 \cos 10 * (5) + \frac{1}{10} \sin 10 * (3) + \frac{1}{k} [1 - \cos 10 * (3-2)] = 2.05 \text{ cm}$$

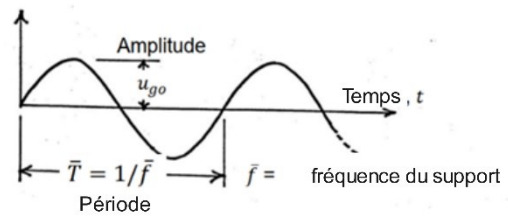
## VI. Réponse au mouvement d'un support

Les systèmes structuraux sont souvent excités par le mouvement de leur support. La réponse d'une structure à l'excitation de support est dynamique même si aucune charge dynamique externe n'agit sur elle. Le mouvement sismique du sol représente un exemple typique d'excitation du support des structures. Par conséquent, L'étude de la réponse des structures au mouvement induit par les tremblements de terre est un sujet spécifique mais très important de la dynamique des structures.

### 6.1. Excitation harmonique du support

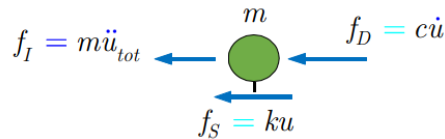
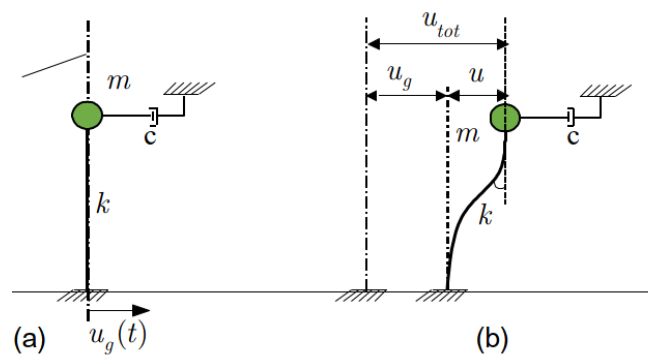
Le mouvement harmonique de support est représenté par :

$$u_g(t) = u_{g0} \sin(\bar{\omega}t) = u_{g0} \sin(2\pi \bar{f}t)$$



La méthode habituelle pour analyser le mouvement du système est de décomposer le déplacement total, à savoir le déplacement par rapport à un référentiel fixe,  $u_{tot}$ , en deux composantes :

$$u_{tot}(t) = u_g(t) + u(t)$$



où  $u(t)$  est le déplacement relatif du sommet de la colonne par rapport à sa base. La déformation de la structure est causée par le déplacement relatif  $u(t)$ . Par conséquent, la force élastique  $f_s(t)$  et la force d'amortissement  $f_D(t)$  ne dépendent que de  $u(t)$  et  $\dot{u}(t)$ , respectivement. Cependant, la force d'inertie  $f_I(t)$  dépend de l'accélération totale  $\ddot{u}_{tot}(t)$ . Ainsi, nous aurons :

$$f_I(t) = m\ddot{u}_{tot}(t) \quad , \quad f_S(t) = ku(t) \quad , \quad f_D(t) = c\dot{u}(t)$$

Selon la loi de Newton, l'équilibre dynamique du système nécessite que :

$$f_I(t) + f_S(t) + f_D(t) = 0$$

cela veut dire que :

$$m\ddot{u}_{tot} + c\dot{u} + ku = 0$$

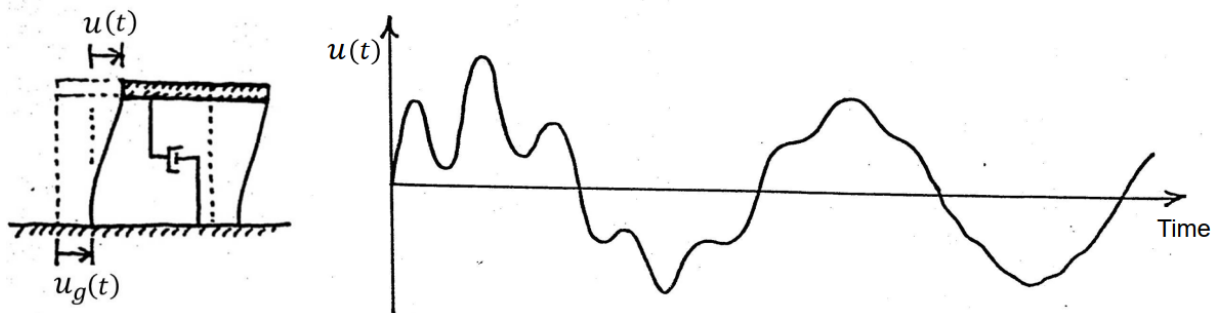
Donc, en se basant sur l'équation de  $u_{tot}(t)$  on aura :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g$$

Cette formule est une équation de mouvement forcé, où la fonction d'excitation est  $-m\ddot{u}_g$ . Dans ce cas, la fonction d'excitation est appelée charge effective. Tant que l'excitation du support est une fonction harmonique simple, on peut noter :

$$P_{eff}(t) = -m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = m (2\pi \bar{f})^2 u_{go} \sin(2\pi \bar{f} t)$$

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c \frac{du(t)}{dt} + k u(t) = P_{eff}(t) = m (2\pi \bar{f})^2 u_{go} \sin(2\pi \bar{f} t)$$



Au stade stable :

$$u(t) = R u_{go} \sin(2\pi \bar{f} t - \phi)$$

$\phi$  = déphasage

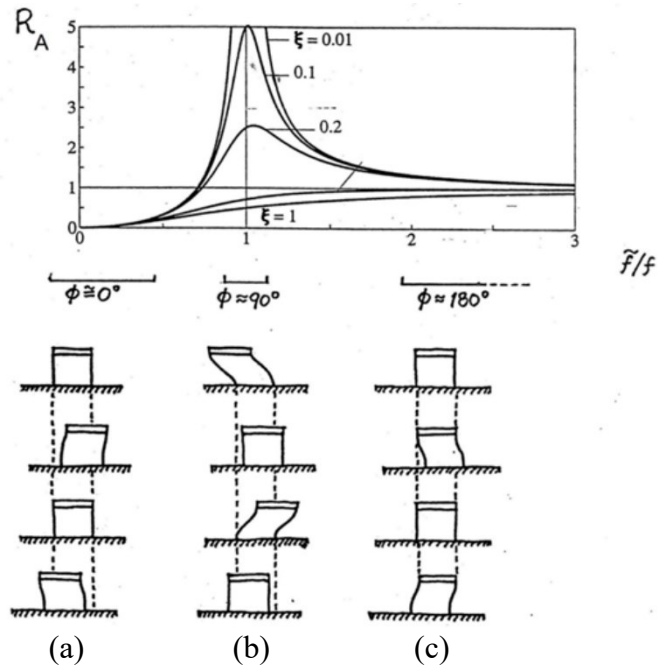
$R$  = Facteur d'amplification dynamique (fonction du rapport de fréquence et du rapport d'amortissement)

$$R = \frac{\left(\frac{\bar{f}}{\bar{f}}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\bar{f}}{\bar{f}}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\bar{f}}{\bar{f}}\right)^2}}$$

Pour  $R = 1$ , la structure aura la même amplitude de mouvement que le mouvement du sol.

La même secousse du sol n'est pas également nocive pour toutes les structures, car elles auront des fréquences naturelles différentes et, par conséquent, réagiront différemment.

- En (a), la structure est en phase avec les mouvements du support, mais de faible amplitude.
- En (b), la réponse de la structure est décalée d'un quart de cycle aux mouvements du support. On voit une grande réponse dynamique due à l'effet de "résonance"
- En (c), la masse de la structure reste au même endroit en raison de la force d'inertie élevée, tandis que le support tremble. La réponse structurelle et les mouvements du support sont complètement déphasés.



### 6.2. Excitation sismique du support

Le mouvement sismique du sol représente un exemple typique d'excitation de support des structures. On peut prendre le même principe précédent d'excitation harmonique du support :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g$$

Où la force effective est :  $\bar{p}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$

Nous observons que l'influence du mouvement du sol sur la structure ne dépend pas directement du déplacement du sol  $u_g(t)$ , mais de son accélération  $\ddot{u}_g(t)$ . Ainsi, la réponse dynamique de la structure due au mouvement du sol peut être étudiée si l'accélérogramme du mouvement sismique est connu, c'est-à-dire s'il existe un enregistrement de la fonction  $\ddot{u}_g(t)$  lors du séisme (voir figure).

L'équation précédente peut aussi s'écrire :

$$m\ddot{u} + 2m\omega\xi\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g(t)$$

Ou :

Apparemment, cette équation indique que la déformation du système due à une accélération du sol donnée  $\ddot{u}_g(t)$  ne dépend que de la fréquence propre  $\omega_n$ , donc de la période propre  $T_n$ , et du taux d'amortissement  $\xi$ , c'est-à-dire  $u = u(t, T, \xi)$ . Par conséquent, deux systèmes ayant la même période propre  $T$  et le même taux d'amortissement  $\xi$  subiront le même déplacement  $u(t)$

sous le même mouvement du sol, malgré le fait que les deux systèmes peuvent avoir des masses différentes ou des rigidités différentes.

Le signe négatif de la charge effective  $\bar{p}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$  n'affecte que la direction du déplacement et non pas son amplitude. En pratique, cela a peu d'importance dans la mesure où l'ingénieur s'intéresse généralement à la valeur absolue maximale de  $u(t)$ . Par conséquent, le signe peut être omis dans ce cas. Cette hypothèse permet d'écrire l'intégrale de Duhamel sous la forme :

$$u(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau$$

Pour un mouvement du sol donné et un taux d'amortissement fixé, on peut évaluer la plus grande valeur absolue de la fonction  $u(t)$ .

## VII. Spectre de réponse

Le graphique montrant la variation de la réponse maximale (déplacement maximal, vitesse, accélération ou toute autre quantité) avec la fréquence naturelle (ou période naturelle) et un amortissement fixé d'un système à un seul degré de liberté pour une fonction de force spécifiée est connu sous le nom de spectre de réponse. Étant donné que la réponse maximale est tracée par rapport à la fréquence naturelle (ou période naturelle), le spectre de réponse donne la réponse maximale de tous les systèmes à un degré de liberté possible. Le spectre de réponse est largement utilisé dans la conception parasismique. Une fois que le spectre de réponse correspondant à une fonction de force spécifiée est disponible, nous avons besoin de connaître uniquement la fréquence naturelle du système pour trouver sa réponse maximale.

Une fois la réponse de l'oscillateur déterminée, l'effort élastique dans le système s'obtient simplement par :

$$f_s(t) = ku(t)$$

L'expression de la raideur  $k$  en fonction de la masse de l'oscillateur et de sa pulsation propre permet d'écrire sous la forme :

$$f_s = m\omega^2 u(t) = mA(t)$$

où  $A(t)$  représente une accélération, appelée pseudo-accélération de l'oscillateur, à ne pas confondre avec son accélération. Sous la forme (4.10), on reconnaît que l'effort est donné par le produit de la masse par une accélération. La pseudo-accélération  $A(t)$  de l'oscillateur est peu

différente en valeur absolue de l'accélération absolue de la masse ; la différence provient des forces d'amortissement. Réécrivant l'équation (4.5) sous la forme :

$$(\ddot{u}_g + \ddot{u}) = -\omega^2 u - 2\xi\omega \dot{u}$$

on reconnaît l'accélération absolue ( $\ddot{u}_g + \ddot{u}$ ) de la masse et sa pseudo-accélération  $\omega^2 u$ . Ces deux grandeurs ne sont égales, et de signe opposé, que lorsque le pourcentage d'amortissement critique est nul.

De façon équivalente, on peut définir une pseudo-vitesse relative de la masse  $V(t)$ , donnée par :

$$V(t) = \omega u(t)$$

Cette vitesse diffère également de la vitesse relative de la masse, comme le montre la relation (4.5) réécrite sous la forme :

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\xi} \omega u - \frac{1}{2\xi \omega} (\ddot{u} + \ddot{y})$$

Les pseudo-vitesse et pseudo-accélération sont reliées au déplacement relatif de la masse

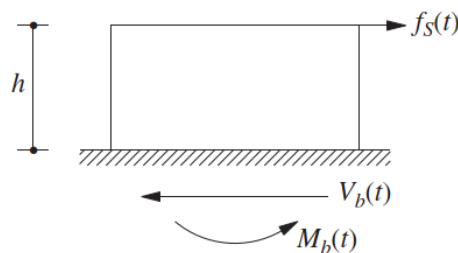
par :

$$A = \omega V = \omega^2 u$$

Une fois que l'historique de réponse à la déformation  $u(t)$  a été évalué par une analyse dynamique de la structure (c'est-à-dire en résolvant l'équation du mouvement), les forces de l'élément (moments fléchissants, cisaillements et forces axiales) et les contraintes nécessaires à la conception de la structure peuvent être déterminées par une analyse statique de la structure à chaque instant dans le temps (c'est-à-dire qu'aucune analyse dynamique supplémentaire n'est nécessaire). Cette analyse statique d'une ossature linéairement élastique à un étage peut être visualisée en introduisant l'approche de la force statique équivalente.

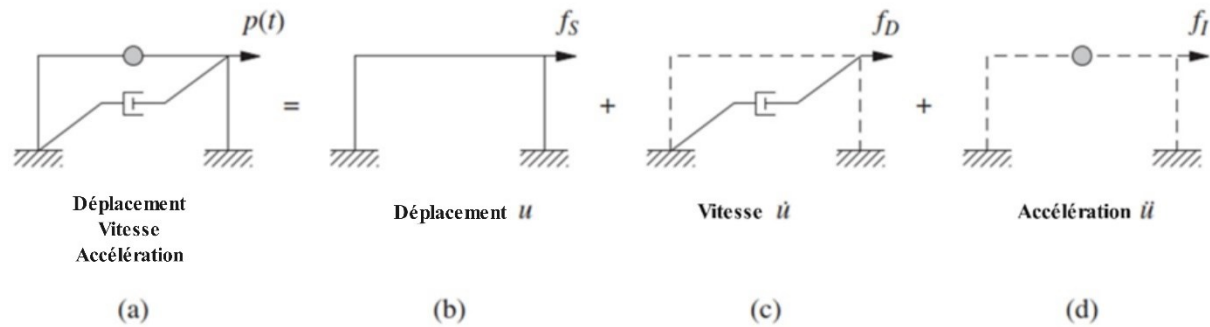
A tout instant  $t$  cette force  $f_s$  est la force externe statique (appliquée lentement) qui produira la déformation  $u$  déterminée par l'analyse dynamique. Donc :

$$f_s(t) = ku(t)$$



où  $k$  est la rigidité latérale de la structure. Alternativement,  $f_s$  peut être interprété comme la force externe qui produira la même déformation  $u$  dans la composante de rigidité de la structure [c'est-à-dire le système sans masse ni amortissement (Fig. b)] que celle déterminée par l'analyse

dynamique de la structure [c'est-à-dire le système avec masse, rigidité et amortissement (Fig. a)]. Les forces ou contraintes des éléments peuvent être déterminées à chaque instant par analyse statique de la structure soumise à la force  $f_s$  déterminée à partir de ci-dessus.



En particulier, le cisaillement à la base  $V_b(t)$  et le moment de renversement à la base  $M_b(t)$  sont :

$$V_b(t) = f_s(t) \quad M_b(t) = hf_s(t)$$

où  $h$  est la hauteur de la masse au-dessus de la base. On pose l'équation précédente de  $f_s$  dans ces équations pour obtenir

$$V_b(t) = mA(t) \quad M_b(t) = hV_b(t)$$

### 7.1. Concept du spectre de réponse

Un tracé de la valeur pic d'une quantité de réponse en fonction de la période de vibration naturelle  $T_n$  du système, ou d'un paramètre relié tel que la fréquence circulaire  $\omega_n$  ou la fréquence cyclique  $f_n$ , est appelé le spectre de réponse pour cette quantité. Chacun de ces tracés concerne des systèmes 1DDL ayant un taux d'amortissement  $\zeta$  fixe, et plusieurs de ces tracés pour différentes valeurs de  $\zeta$  sont inclus pour couvrir la plage de valeurs d'amortissement rencontrées dans les structures réelles.

Que la réponse maximale soit tracée par rapport à  $f_n$  ou  $T_n$  est une question de préférence personnelle. Nous avons choisi cette dernière parce que les ingénieurs préfèrent utiliser la période naturelle plutôt que la fréquence naturelle car la période de vibration est un concept plus familier et intuitivement attirant.

Une variété de spectres de réponse peut être définie en fonction de la quantité de réponse qui est tracée. Considérez les réponses maximales suivantes :

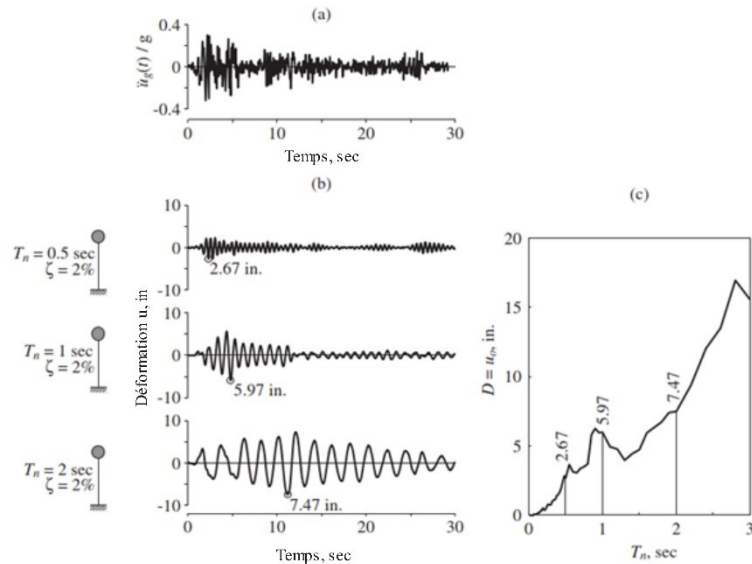
$$u_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |u(t, T_n, \zeta)|$$

$$\dot{u}_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\dot{u}(t, T_n, \zeta)|$$

$$\ddot{u}'_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\ddot{u}'(t, T_n, \zeta)|$$

Le spectre de réponse en déformation est un tracé de  $u_o$  en fonction de  $T_n$  pour  $\zeta$  fixe. Un graphique similaire pour  $\dot{u}_o'$  est le spectre de réponse de vitesse relative, et pour  $\ddot{u}_o'$  est le spectre de réponse d'accélération.

**7.2. Spectre de réponse en déformation**



**7.3. Spectre de réponse en pseudo-vitesse**

Considérons une quantité  $V$  pour un système 1DDL de fréquence propre  $\omega_n$  liée à sa déformation maximale  $D \equiv u_o$  due au mouvement du sol sismique :

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D$$

La quantité  $V$  a des unités de vitesse. Elle est liée à la valeur maximale de l'énergie de déformation  $E_{So}$  stockée dans le système pendant le tremblement de terre par l'équation

$$E_{So} = \frac{mV^2}{2}$$

Cette relation peut être dérivée de la définition de l'énergie de déformation et en utilisant l'équation de  $V$  comme suit :

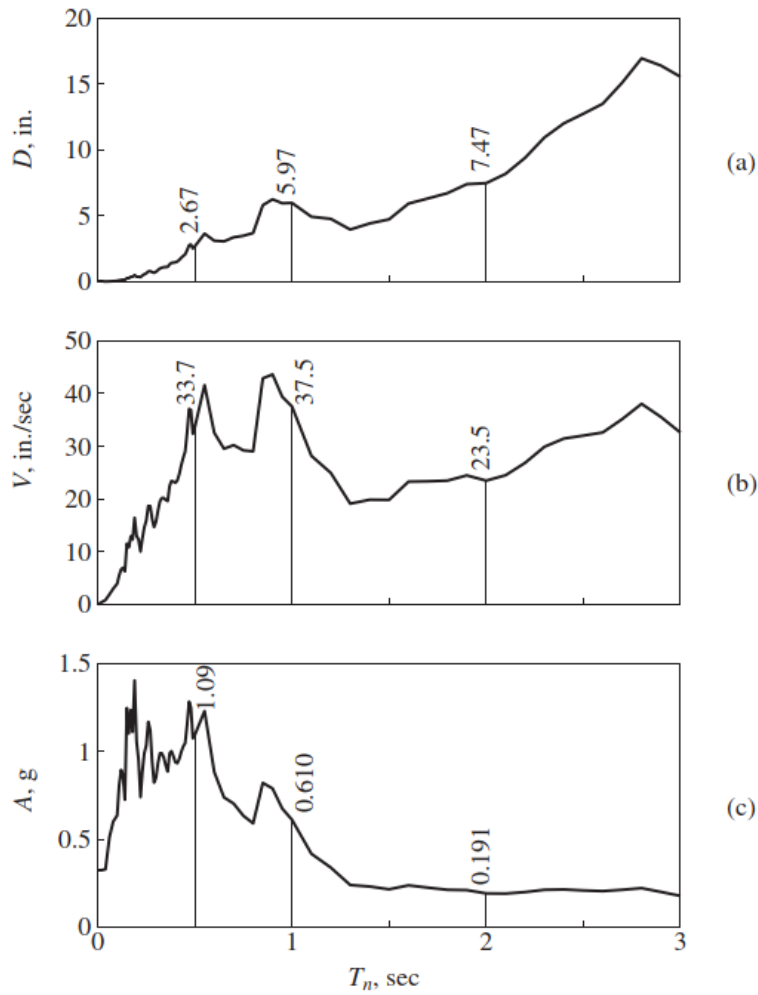
$$E_{So} = \frac{ku_o^2}{2} = \frac{kD^2}{2} = \frac{k(V/\omega_n)^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$$

**7.4. Spectre de réponse en pseudo-accélération**

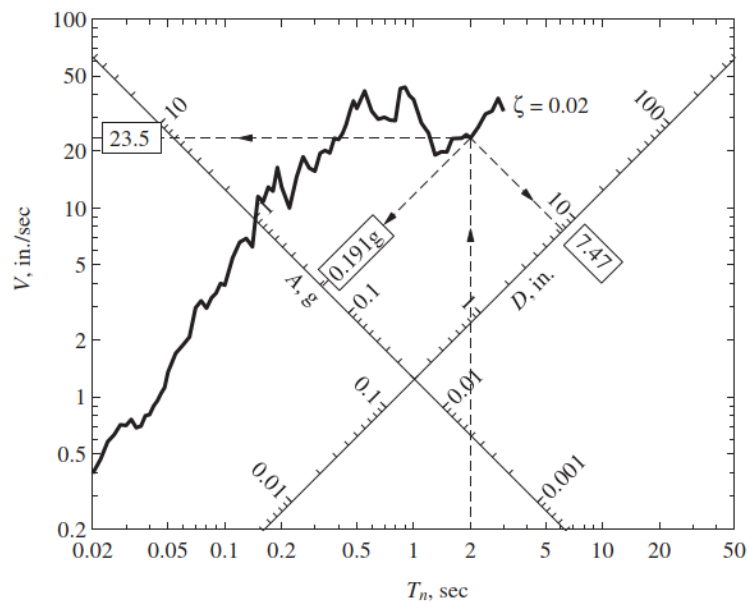
Considérons une quantité  $A$  pour un système SDF de fréquence naturelle  $\omega_n$  liée à sa déformation maximale  $D \equiv u_o$  due au mouvement du sol sismique :

$$A = \omega_n^2 D = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D$$

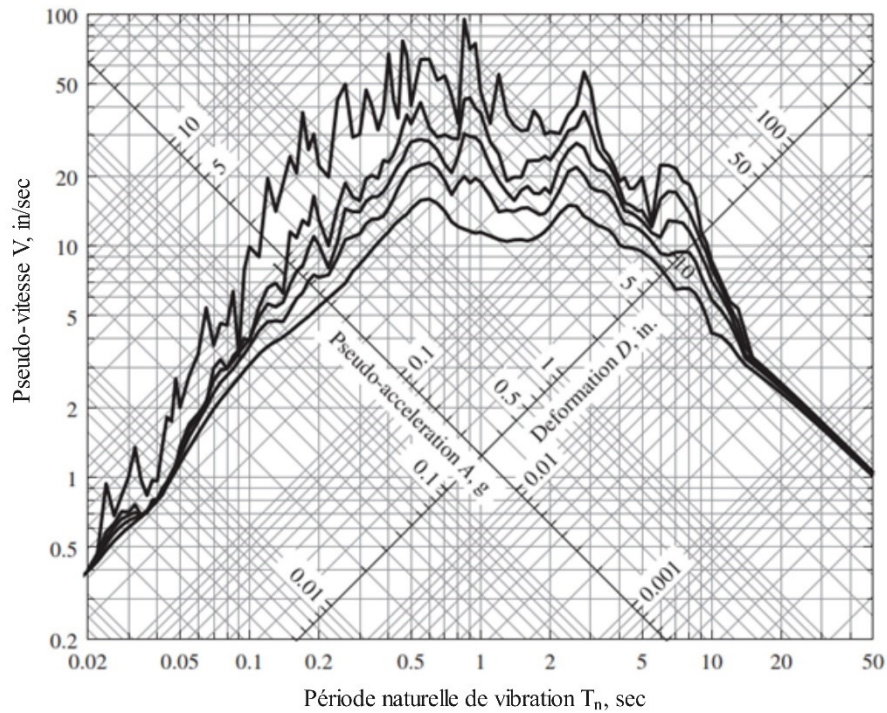
La quantité  $A$  a des unités d'accélération et est liée à la valeur maximale du cisaillement de base  $V_{bo}$  (ou à la valeur maximale de la force statique équivalente  $f_{so}$ )



### 7.5. Spectres de réponse tripartite



Spectre de réponse combiné D – V – A pour le mouvement du sol d'El Centro ;  $\zeta = 2 \%$ .



Spectre de réponse combiné D – V – A pour le mouvement du sol d'El Centro ;  $\zeta = 0, 2, 5, 10$  et  $20\%$ .

La méthode du spectre de réponse est privilégiée par la communauté des ingénieurs parasismiques en raison de :

- Il fournit une technique pour effectuer une analyse de charge latérale statique équivalente.
- Il permet une compréhension claire des contributions des différents modes de vibration.
- Il offre une méthode simplifiée pour trouver les forces de calcul pour les éléments structuraux en cas de tremblement de terre.
- il est également utile pour l'évaluation approximative de la fiabilité sismique des structures.
- Le concept de forces latérales équivalentes pour les tremblements de terre est un concept unique car il convertit une analyse dynamique en partie en analyse dynamique et en partie en analyse statique pour trouver les contraintes maximales.
- Pour la conception sismique, ces contraintes maximales sont intéressantes, et non l'histoire temporelle de la contrainte.
- La force latérale équivalente pour un tremblement de terre est définie comme un ensemble de forces latérales qui produiront la même réponse maximale que celle obtenue par l'analyse dynamique des structures.

L'équivalence est restreinte à un seul mode de vibration.

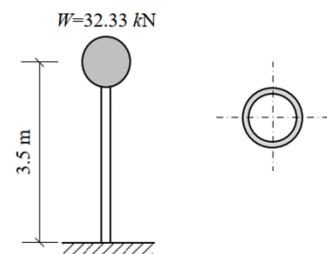
**La méthode d'analyse du spectre de réponse est développée en utilisant les étapes suivantes :**

1. Une analyse modale de la structure est effectuée pour obtenir des formes de mode, des fréquences et des facteurs de participation modale.
  2. En utilisant le spectre de réponse d'accélération, une charge statique équivalente est dérivée qui fournira la même réponse maximale que celle obtenue dans chaque mode de vibration.
  3. Les réponses modales maximales sont combinées pour trouver la réponse maximale totale de la structure.
- La première étape est l'analyse dynamique tandis que la deuxième étape est une analyse statique.
  - Les deux premières étapes n'ont pas d'approximations, tandis que la troisième étape a quelques approximations.
  - En conséquence, l'analyse du spectre de réponse est appelée une analyse approximative : mais les applications montrent qu'elle fournit principalement une bonne estimation des réponses maximales.
  - La méthode est développée pour l'excitation à un seul point et à un seul composant pour les systèmes linéaires amortis de manière classique. Cependant, avec des approximations supplémentaires, il a été étendu pour les excitations multipoints multi-composantes et pour les systèmes non amortis de manière classique.

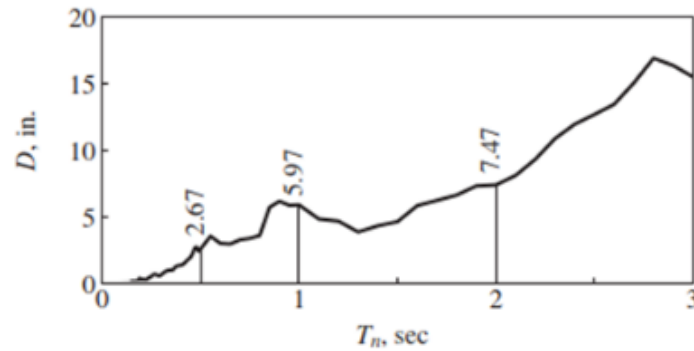
## Application

### Exercice 1

La figure ci-contre montre qu'une colonne verticale de longueur 3,5 m supporte un poids de 32,33 kN fixé au sommet. La colonne est un tube métallique régulier d'un diamètre nominal de 10 cm. Les propriétés de la section sont les suivantes : diamètre extérieur  $d_2=11,5$  cm, diamètre intérieur  $d_1=10$  cm, épaisseur  $t=0,75$  cm, moment d'inertie de la section  $I=367,67\text{cm}^4$ , le module d'élasticité  $E= 200$  GPa et le poids d'une unité de longueur 157 N/m



Supposons que  $\zeta = 2\%$ , déterminer la déformation maximale et la contrainte de flexion du tube résultant du mouvement du sol causé par le tremblement de terre d'El Centro (voir figure ci-dessus).



Spectres de réponse ( $\zeta = 0,02$ ) pour le mouvement du sol El Centro

**Solution 1**

La rigidité latérale  $k$  :

$$k = \frac{3EI}{h^3} = \frac{3 \times 200 \times 10^9 \times 367.67 \times 10^{-8}}{3.5^3} = 51452.36 \text{ N/m}$$

Masse : Le poids total du tube est de  $157 \times 3,5 = 549,5$ . Par conséquent, le poids du tube peut être négligé par rapport à  $W=32333 \text{ N}$ . Poids centré en haut du tube

$$m = \frac{W}{g} = \frac{32.33 \times 10^3}{9.81} = 3295.62 \text{ kg}$$

La fréquence périodique est la vibration naturelle du système :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{51452.36}{3295.62}} = 3.951 \text{ rad/sec}; \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{3.951} = 1.59 \text{ sec}$$

A partir d'un graphique d'une réponse sismique à un El Centro pour un taux d'amortissement  $\zeta = 2\%$ , on trouve que pour une période de vibration normale du système égale à  $T_n = 1,59 \text{ sec}$ , alors :

$$D = 5.0 \text{ in} = 5.0 \times 2.54 = 12.7 \text{ cm}$$

$$A = 0.2 g \Rightarrow \frac{A}{g} = 0.20$$

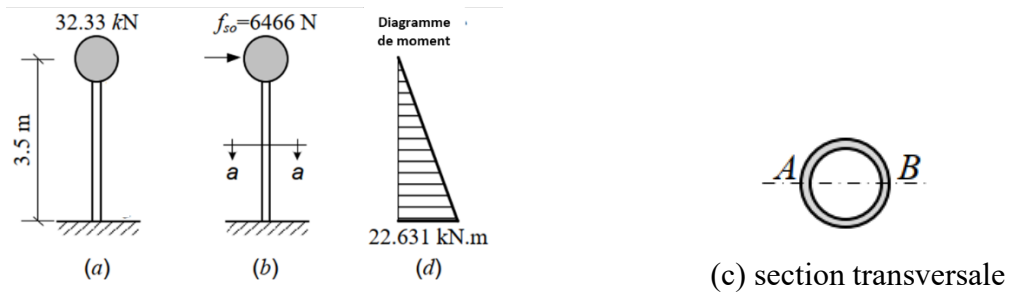
Le pic de déformation vaut donc :  $u_o = D = 12.7 \text{ cm}$

La valeur maximale de la force statique équivalente est :  $f_{so} = \frac{A}{g} W = 0.20 \times 32.33 \times 10^3 = 6466 \text{ N}$

Couple de flexion maximal à la base du tube :

$$M_{base} = hf_{so} = 3.5 \times 6466 = 22.631 \times 10^3 \text{ N.m}$$

$$M_{base} = 22.631 \text{ kN.m}$$



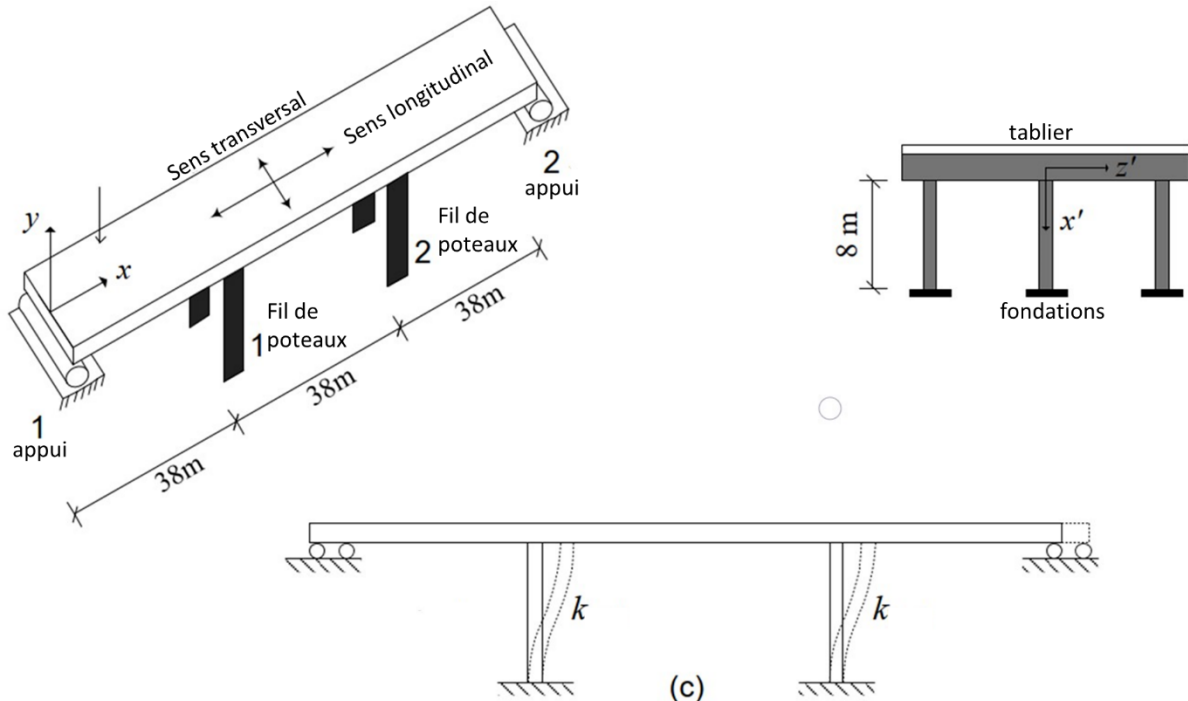
La figure (d) montre un diagramme de moment.

Les points A et B de la figure (c) sont les fibres où la contrainte de flexion maximale se produit :

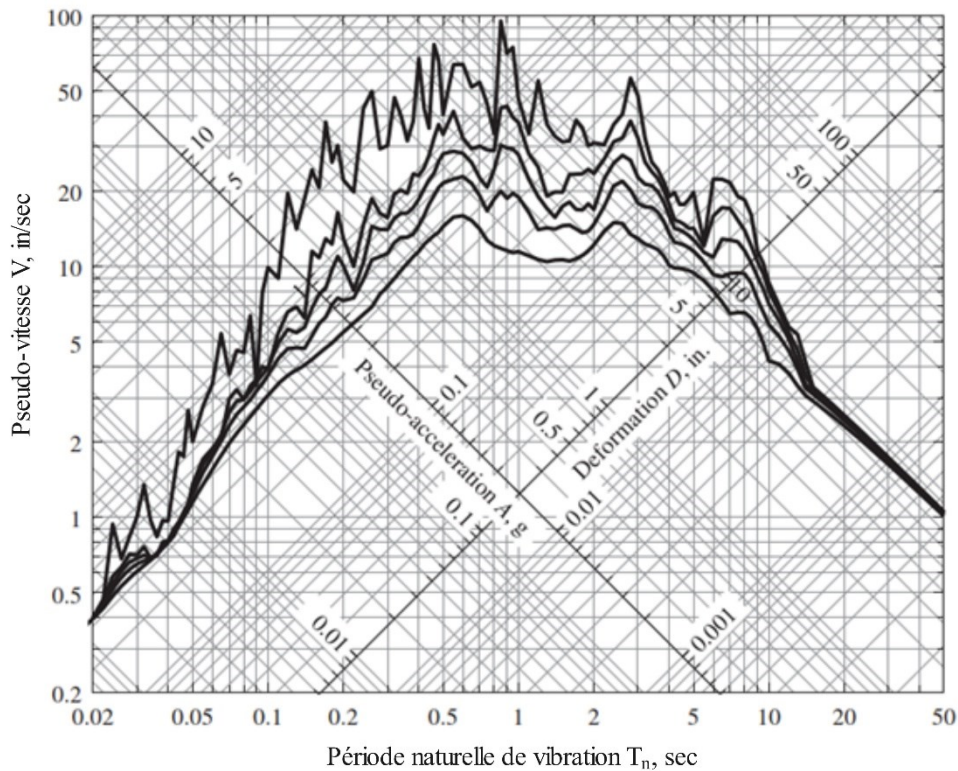
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{base}}}{I} c = \frac{22.631 \times 10^3 \times 5.75 \times 10^{-2}}{367.67 \times 10^{-8}} = 353.93 \times 10^6 \text{ Pa} = 353.93 \text{ MPa}$$

**Exercice 2**

Un pont en béton d'une longueur de 114 m est supporté par quatre supports : deux portiques de poteaux et deux supports d'extrémité, comme indiqué dans la figure ci-dessous. La section transversale de l'ensemble du plancher du pont (tablier) est de 11,44 m<sup>2</sup>. Le poids du pont peut être considéré comme étant centré au niveau du tablier. Le poids volumique du béton est de 24 kN/m<sup>3</sup>. Le poids des deux portiques de support peut être négligé. Chaque portique est constitué de trois poteaux de longueur 8 m et de section circulaire où I<sub>y</sub> = I<sub>z</sub> = 0,1125 m<sup>4</sup> et on utilise le module d'élasticité du béton E = 20 GPa.



Déterminer la valeur l'effort tranchant à la base à chacune des six colonnes de support du pont au moment où la réponse maximale se produit sous l'influence du séisme Elcentro appliqué dans la direction longitudinale du pont. Supposons que le taux d'amortissement est de 5 %.



**Solution 2**

Le poids total ainsi que la masse correspondante concentrée au niveau du plancher du pont :

$$W = 24 \times 3 \times 38 \times 11.44 = 31299.84 \text{ kN} \Rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{31299.84 \times 10^3}{9.81} = 3190.6 \times 10^3 \text{ kg}$$

La rigidité longitudinale du pont est calculée en supposant que son plancher se déplace rigidement. Chaque colonne se comporte comme un poteau encasté à ses deux côtés. Par conséquent, la rigidité longitudinale résultant de chaque portique de poteaux est :

$$k_{\text{bent}} = 3 \times \frac{12EI_z}{h^3} = 3 \times \frac{12 \times 20 \times 10^9 \times 0.1125}{8^3} = 158.2 \times 10^6 \text{ N/m}$$

La rigidité longitudinale globale du pont issu de deux portiques de poteaux porteurs est donc :

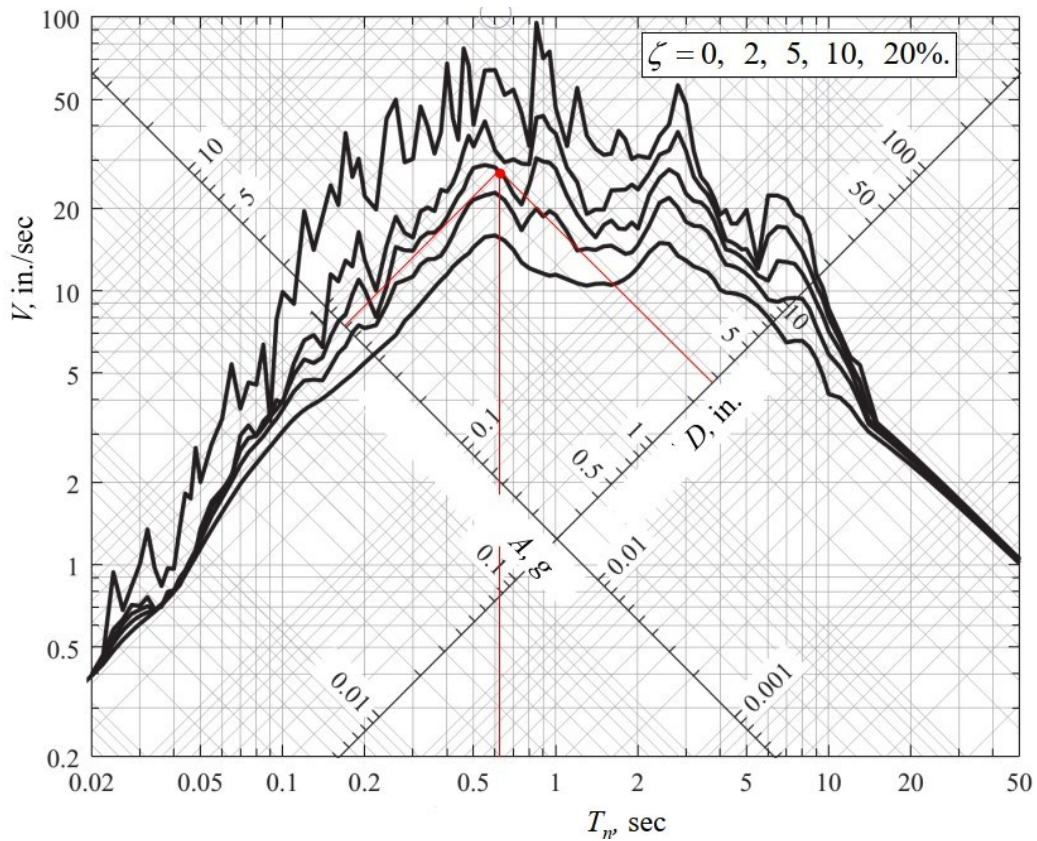
$$k = 2 \times k_{\text{bent}} = 2 \times 158.2 \times 10^6 = 316.4 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Donc, la période de vibration naturelle dans le sens longitudinal est :

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3190605.5}{316.4 \times 10^6}} = 0.631 \text{ sec}$$

A partir de spectre de la réponse sismique ElCentro (ci-dessous) pour un taux d'amortissement  $\zeta = 5\%$ , on trouve que pour  $T_n = 0,631 \text{ sec}$ , alors :

$$u_o = D = 2.9 \text{ in} = 2.9 \times 2.54 = 7.366 \text{ cm}; \quad A = 0.745 \text{ g} \Rightarrow \frac{A}{g} = 0.745$$



Tous les poteaux ont la même rigidité et sont également soumis à la même déformation. Ainsi, la valeur de cisaillement de base sera la même pour toutes les colonnes.

L'effort tranchant à la base de l'un des poteaux est calculé de l'une des deux manières suivantes :

**1- Première méthode :**

La force statique totale appliquée au pont :  $f_{so} = \frac{A}{g} W = 0.745 \times 31299.84 = 23318.38 \text{ kN}$

L'effort tranchant à la base sous chaque poteau sera donc :  $V_b = 23318.38 \div 6 = 3886.4 \text{ kN}$

**2- Deuxième méthode :**

Alternativement, le cisaillement de base au bas de chaque colonne peut être calculé comme suit :

$$V_b = k_{col} u_o = \frac{316.41 \times 10^6}{6} \times 7.366 \times 10^{-2} \times 10^{-3} = 3884.46 \text{ kN}$$

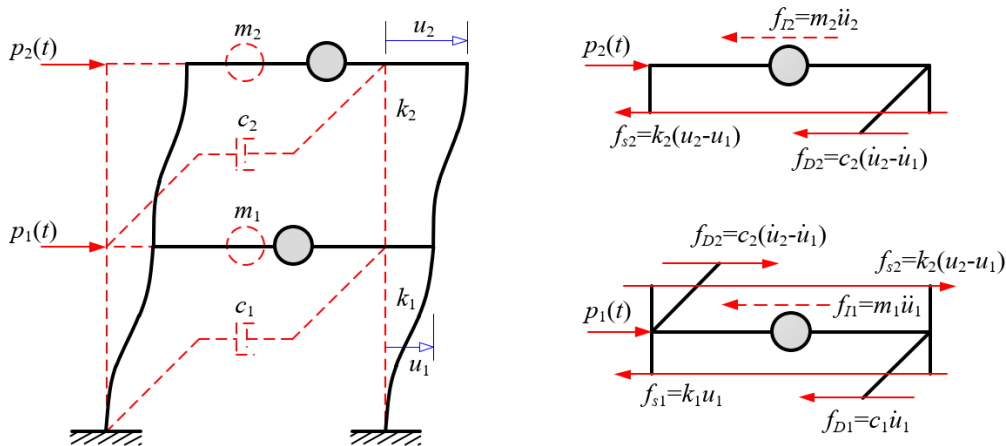
# **Chapitre III :**

## **Systemes à plusieurs degrés de liberté**

## CHAPITRE III : Systèmes à plusieurs degrés de liberté

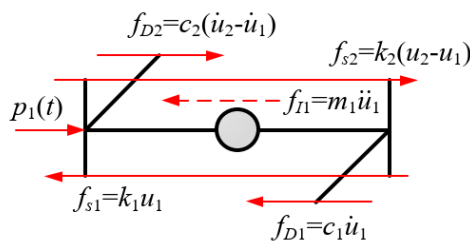
### 1. Système a deux degrés de liberté

Un système réel comprend généralement plusieurs masses reliées entre elles par des éléments de types ressort et amortisseur. L'étude d'un système à deux degrés de liberté (2DDL) est un cas le plus simple avec lequel on peut montrer comment écrire et résoudre l'équation du mouvement, trouver les fréquences et les formes de mode et interpréter les résultats.



#### 1.1. Formulation de l'équation de mouvement

##### La masse 1:



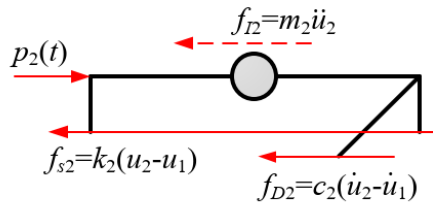
$$m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) - p_1(t) = 0$$

$$m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) - p_1(t) = 0$$

$$m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = p_1(t)$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{u}_1 + 0 \ddot{u}_2 + (c_1 - c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = p_1(t) \dots (1)$$

##### La masse 2:



$$m_2 \ddot{u}_2 + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) - p_2(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) - p_2(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + c_2 \dot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + k_2 u_2 - k_2 u_1 = p_2(t)$$

$$\Rightarrow O\ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = p_2(t) \dots (2)$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{u}_1 + o\ddot{u}_2 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = p_1(t) \dots (1)$$

Les équations (1) et (2) sont interconnectées et sont donc dites couplées. Ils peuvent être exprimés sous forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Sous forme compacte Eq. (3) peut s'écrire

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \quad (4)$$

### 1.2. Matrices de masse, amortissement, et de rigidité

Par analogie, pour le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, on aura :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -k_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} nx1 \\ \{ \ddot{U} \} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} nx1 \\ \{ \dot{U} \} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} nx1 \\ \{ U \} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} nx1 \\ \{ F(t) \} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

L'équation (4) peut également être réécrite comme

$$[m]\{\ddot{u}\} + \{f_D\} + \{f_s\} = \{P(t)\} \quad (5)$$

Où :

$$\{f_D\} = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = [c] \{\dot{u}\} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = [K] \{u\} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ K_1 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Semblable au système 1DDL, l'équation de mouvement pour 2DDL est exprimée de manière générique comme suit :

$$\bar{m}\ddot{\tilde{x}} + \bar{c}\dot{\tilde{x}} + \bar{K}\tilde{x} = \bar{P}(t) \quad (8)$$

dans laquelle  $\bar{m}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{K}$ , sont sous forme matricielle

Dans l'éq. (8),  $\bar{m}$  - matrice de masse ;  $\bar{c}$  - matrice d'amortissement ;  $\bar{K}$  - matrice de rigidité et  $\bar{P}$  - matrice de force et  $\ddot{\tilde{x}}$ ,  $\dot{\tilde{x}}$ , et  $\tilde{x}$  sont respectivement les vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement.

### 1.3. Vibration libre du système à deux degrés sans amortissement

Dans le cas d'une vibration libre,  $\bar{P}(t) = 0$  car aucune force dynamique n'est appliquée. Pour un système sans amortissement,  $\bar{c} = 0$ . Par conséquent, un système non amorti soumis à des vibrations libres est régi par :

$$\bar{m}\ddot{\tilde{u}} + \bar{K}\tilde{u} = 0$$

### 1.4. Problème des valeurs propres

Dans cette section, nous introduisons le problème aux valeurs propres dont la solution donne les fréquences propres et les modes d'un système. La vibration libre d'un système non amorti dans l'un de ses modes de vibration naturels, illustrée graphiquement dans les Fig. 5.12 et 5.13 pour un système à deux degrés de liberté, peut être exprimée mathématiquement comme

$$\tilde{u}(t) = q_m(t)\phi_m \quad (9)$$

où  $q_m$  est les coordonnées modales et  $\phi_m$  la forme de déformée qui est invariante dans le temps. Cependant, nous décrivons la variation temporelle des déplacements des masses par une fonction harmonique simple comme :

$$q_m(t) = A_m \cos \omega_{nm}t + B_m \sin \omega_{nm}t \quad (10)$$

où  $A_m$  et  $B_m$  sont des constantes d'intégration. Ces constantes sont évaluées en appliquant les conditions initiales qui contribuent au démarrage du mouvement vibratoire. Nous remplaçons maintenant Eq. (10) en Eq. (9) :

$$\tilde{u}(t) = \varphi_m A_m \cos \omega_{nm} t + B_m \sin \omega_{nm} t \quad (11)$$

Où  $\omega_{nm}$  et  $\phi_m$  sont des inconnus

Maintenant en remplaçant l'Éq. (11) pour obtenir:

$$\left[ -\omega_{nm}^2 \bar{m} \phi_m + \bar{K} \phi_m \right] q_m(t) = \bar{0} \quad (12)$$

Nous savons que  $m = 1$  fait référence à la première fréquence  $\omega_{n1}$  et au mode correspondant  $\phi_1$  qui est donné par

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix}$$

et  $m = 2$  fait référence à la deuxième fréquence  $\omega_{n2}$  et au mode correspondant  $\phi_2$  qui est donné par

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix}$$

Sous forme développée Eq. (12) peut s'écrire

$$-\omega_{nm}^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

il y a deux possibilités comme solutions à l'équation. (13). Première  $q_m(t) = 0$ . Cela signifie  $\tilde{u}(t) = \bar{0}$ . Cela implique qu'il ne peut y avoir aucun mouvement du système. Cette solution est triviale. Une autre possibilité est

$$-\omega_n^2 \bar{m} \varphi_n + K \varphi_n = 0 \quad (14)$$

De l'éq. (14), on obtient

$$\bar{K} \varphi_n = \omega_n^2 \bar{m} \varphi_n \quad (15)$$

L'équation (15) fournit une condition utile. C'est une équation algébrique et s'appelle donc le problème des valeurs propres de la matrice. Ici, la matrice de rigidité et la matrice de masse sont des quantités connues. Ainsi, le problème se résume à la détermination du scalaire  $\omega_n^2$  et

du vecteur  $\phi_n$ . Nous pouvons maintenant réécrire l'Eq. (15) comme suit pour indiquer sa solution formelle

$$\left[ \bar{K} - \omega_n^2 \bar{m} \right] \phi_n = \bar{0} \tag{16}$$

L'expression ci-dessus est un ensemble de  $m$  équations algébriques homogènes pour les  $m$  éléments  $\phi_{im}$  ( $i = 1, 2$ ). La solution triviale de cet ensemble d'équations est  $\phi_n = \bar{0}$ . Cette solution n'est pas acceptable car elle conduit à la condition qu'il ne peut y avoir de mouvement du système. La solution non triviale de l'Eq. (16) est donné par

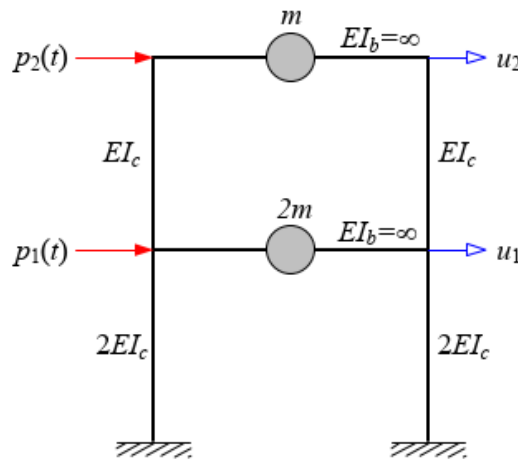
$$|\bar{K} - \omega_n^2 \bar{m}| = 0 \tag{17}$$

L'équation (17) est un déterminant et est connue sous le nom d'équation caractéristique ou d'équation de fréquence. Développement du déterminant dans l'équation. (17) aboutit à un polynôme d'ordre  $m$  en  $\omega_n^2$ .

### 1.5. Application

#### Exercice 1

Il est demandé de formuler les équations de mouvement pour un portique à deux étages illustrés dans la figure ci-dessous.



#### Solution 1

L'équation du mouvement pour ce système est  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$

en substituant  $c = 0$ , nous obtenons l'équation régissant le mouvement du système non amorti

$$m\ddot{u} + ku = p(t)$$

on remarque que la masse pour chaque étage est :  $m_1 = 2m, m_2 = m$

donc la matrice de masse est :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la rigidité de chaque étage est :  $k_1 = 2 \times \frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3}$ ,  $k_2 = 2 \times \frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$

donc la matrice de rigidité est :  $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \frac{EI_c}{h^3} & -24 \frac{EI_c}{h^3} \\ -24 \frac{EI_c}{h^3} & 24 \frac{EI_c}{h^3} \end{bmatrix} = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Finalement l'équation dynamique du mouvement sera de la forme :

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

Notez que la matrice de rigidité n'est pas diagonale (non-diagonale), donc les deux équations sont liées (Équations couplées). Par conséquent, ces deux équations doivent être résolues l'une avec l'autre en même temps (Simultanément).

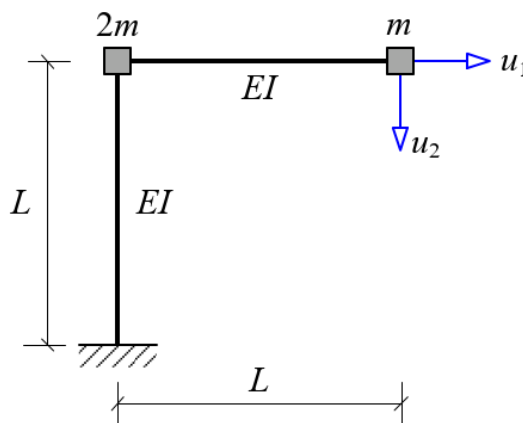
**Exercice 2**

La figure ci-dessous montre un portique en porte-à-faux dont la rigidité en flexion de la poutre ainsi que celle du poteau égale  $EI$  et les masses sont concentrées aux deux nœuds. En négligeant les déformations axiales dans la poutre et le poteau :

- 1- Développer son équation de mouvement pour des vibrations non amorties.
- 2- Déterminer les fréquences propres pour chaque mode de vibration.
- 3- Déterminer les vecteurs propres pour chaque mode de vibration.
- 4- Dessiner les modes de vibration

Pour simplifier, le problème on donne la matrice de rigidité du système est donnée comme suit :

$$\mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$



**Solution 2**

**1- Equation de mouvement pour des vibrations non amorties**

a- Matrice de masse

A noter que la masse associée à  $\ddot{u}_1=1$  est  $2m+m=3m$  puisque les deux masses subiront la même accélération car la poutre entre les deux masses ne subit pas de déformation axiale.

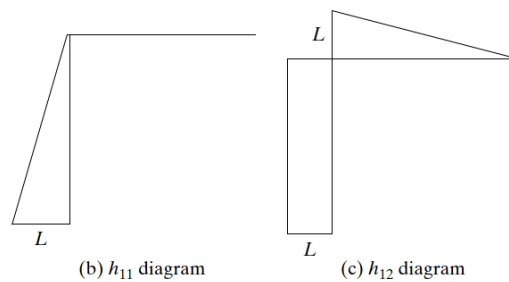
$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b- Matrice de rigidité

Bien que la matrice de rigidité a été donnée, mais elle peut être déterminée facilement à partir de la matrice de flexibilité dont les coefficients de flexibilité  $f_{ij}$  peuvent être dérivés en utilisant la méthode des coefficients d'influence comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Dessignons d'abord le diagramme du moment fléchissant dû à une force unitaire  $f_1$  appliquée à l'extrémité libre seule comme le montre la ci-dessous. Ce diagramme est appelé diagramme  $h_{11}$ . Dessinez maintenant le diagramme du moment de flexion dû à une force unitaire  $f_2$  appliquée à l'extrémité libre seule.



Ce diagramme est appelé diagramme  $h_{12}$ . Les coefficients d'influence peuvent être calculés comme suit :

$$f_{11} = \int \frac{h_{11}h_{11}dy}{EI} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{12} = \int \frac{h_{11}h_{12}dy}{EI} = \frac{L^3}{2EI}$$

$$f_{22} = \int \frac{h_{12}h_{12}dy}{EI} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{L^3}{EI} = \frac{4L^3}{3EI}$$

La matrice de flexibilité peut s'écrire comme suit :

$$[F] = \frac{L^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

La matrice de flexibilité est toujours une matrice symétrique. La matrice de rigidité est l'inverse de la matrice de flexibilité, c'est-à-dire :

$$[K] = [F]^{-1}$$

Avec un petit calcul matériel on obtient l'inverse de la matrice  $[F]$  comme suit :

$$\mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les équations de vibration libre pour le système non amorti sont :

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**2- Calcul des fréquences propres pour chaque mode de vibration**

A partir de l'équation de mouvement on aura :

$$\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 8-3\lambda_n & -3 \\ -3 & 2-\lambda_n \end{bmatrix}; \quad \lambda_n = \frac{C_m}{C_k} \omega_n^2 = \frac{7mL^3}{6EI} \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{6EI}{7mL^3} \lambda_n$$

En substituant dans l'équation de fréquence, on obtient :

$$\det[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0 \Rightarrow 3\lambda_n^2 - 14\lambda_n + 7 = 0$$

Cette équation a deux solutions, classées de la plus petite à la plus grande :

$$\lambda_1 = 0.5695 \quad \lambda_2 = 4.0972$$

On obtient les fréquences propres associées aux deux valeurs de  $\lambda$  comme suit :

$$\omega_n^2 = \frac{6EI}{7mL^3} \lambda_n \Rightarrow \omega_1 = 0.6987 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad \omega_2 = 1.874 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

**3- Calcul des vecteurs propres pour chaque mode de vibration**

Déterminer les modes propres à partir de l'équation des valeurs propres

$$[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] \boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8-3\lambda_n & -3 \\ -3 & 2-\lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La première équation de l'ensemble d'équations précédent est :

$$(8-3\lambda_n) \varphi_{1n} - 3\varphi_{2n} = 0$$

On va normaliser les modes pour que la valeur de l'élément correspondant au premier degré de liberté soit égale à 1.

$$n = 1 \Rightarrow (8-3\lambda_1) \varphi_{11} - 3\varphi_{21} = 0; \quad \lambda_1 = 0.5695, \quad \varphi_{11} = 1 \Rightarrow \varphi_{21} = 2.097$$

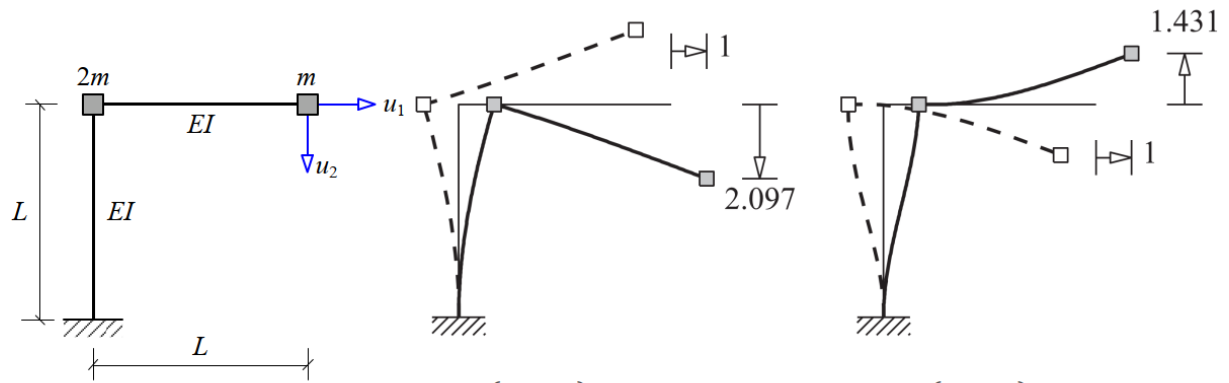
$$n = 2 \Rightarrow (8-3\lambda_2) \varphi_{12} - 3\varphi_{22} = 0; \quad \lambda_2 = 4.0972, \quad \varphi_{12} = 1 \Rightarrow \varphi_{22} = -1.43$$

Donc :

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.43 \end{Bmatrix}$$

**4- Dessin des modes de vibrations**

A partir des valeurs des vecteurs propres, on peut dessiner les modes propres comme suit :



$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.43 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1 = 0.6987 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$\omega_2 = 1.874 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

**Références**

**bibliographiques**

## Références

---

- Anil K. Chopra. « Dynamics of structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering », Fifth Edition in SI Units, University of California at Berkeley
- Fawad A. Najam, Pennung Warnitchai. « CE 809 - Structural Dynamic », Department of Structural Engineering. H-12 Islamabad, Pakistan
- John T. Katsikadelis. « Dynamic Analysis of Structures », Academic Press is an imprint of Elsevier, ISBN 978-0-12-818643-5
- Ashok K. Jain. « Dynamics of structures with matlab applications », ISBN 978-93-325-5855-7
- Ahmed Elsayed Ahmed Ali. « Structural Dynamics and Earthquake Engineering by using Autodesk Robot & Matlab »
- Akhtar Naeem Khan, Mohammad Javed. « CE-412: Introduction to Structural Dynamics and Earthquake Engineering », University of Engineering and Technology, Peshawar, Pakistan
- Mario Paz · Young Hoon Kim. « Structural Dynamics - Theory and Computation », Sixth Edition. ISBN 978-3-319-94743-3 (eBook). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-94743-3>
- A. Dazio. « Course Fundamentals of Structural Dynamics », An-Najah National University
- Thandavamoorthy Thumati. “course Dynamics of structures”, Adhiparasakthi Engineering College
- Pelin Gundes Bakir. « Vibration of single degree of freedom systems ».
- Abdelhafid OUNIS. « Cours de Dynamique des structures », Université de Biskra
- Singiresu S. Rao. « Mechanical Vibrations », Fifth Edition, University of Miami
- Alain PECKER. « Dynamique des structures et des ouvrages », Edition 2006
- Ray W. Clough, Joseph Penzien. « Dynamics of structures », Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704, USA
- DaniEl J. inman. « Engineering Vibration », Fourth Edition, University of Michigan
- Rabee AlSafadi. « Dynamique of structures », Arab International University (AIU)

# **Les Annexes**

## Annexe A

---

### I. Système libre non-amorti

Si nous avons un corps de masse ( $m$ ) qui se déplace à une distance ( $u$ ) du point d'équilibre ( $O$ ), Il générera une force de grandeur ( $ku$ ) pour résister au mouvement provoqué par la force d'inertie ( $m \ddot{u}$ )

L'équation du système dynamique est :  $-Ku = m\ddot{u}$

$$m\ddot{u} + ku = 0.0 \quad \text{avec} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

En divisant l'équation précédente sur la masse on aura :  $\ddot{u} + \frac{K}{m}u = 0$

La solution de l'équation différentielle est de forme :

$$u = B_1 e^{i\omega_n t} + B_2 e^{-i\omega_n t}$$

La conversion mathématique de la forme imaginaire vers la forme réelle peut se faire via la relation d'Euler suivantes :

$$e^{(-i\omega_n t)} = \cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t) \quad e^{(+i\omega_n t)} = \cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)$$

En remplaçant la relation d'Euler dans l'équation, on obtient:

$$\begin{aligned} u &= B_1 (\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)) + B_2 (\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)) \\ u &= B_1 \cos(\omega_n t) + i B_1 \sin(\omega_n t) + B_2 \cos(\omega_n t) - i B_2 \sin(\omega_n t) \\ u &= (B_1 + B_2) \cos(\omega_n t) + (B_1 - B_2) i \sin(\omega_n t) \\ u &= A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\ddot{u} = \frac{du}{dt} = -A\omega_n \sin(\omega_n t) + B\omega_n \cos(\omega_n t) \quad (4)$$

En faisant deux fois la différenciation du de l'équation on obtin l'équation d'accélération :

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2} = -A\omega_n^2 \cos(\omega_n t) - B\omega_n^2 \sin(\omega_n t)$$

La substotution de l'équation 3 et 4 dans l'équation du mouvement on aura:

$$\begin{aligned} (-A\omega_n^2 \cos(\omega_n t) - B\omega_n^2 \sin(\omega_n t)) + \frac{K}{m} + (A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) &= 0 \\ -\omega_n^2 (A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) + \frac{K}{m} (A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{K}{m} - \omega_n^2\right)(A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) = 0$$

Tant que le système est en mouvement, le terme à droite  $(A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)) \neq 0$

Donc on note que :  $\frac{K}{m} - \omega_n^2 = 0$ , cela implique que  $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$  par conséquent  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\omega_n$  est la fréquence angulaire en rad/sec

Les constantes A et B peuvent être obtenues en remplaçant les conditions aux limites dans les équations 3 et 4. A  $t = 0$ , le déplacement égale à un déplacement initial ( $u = u_0$ ), on utilisant l'équation 1, à l'instant  $t = 0$

$$u(0) = u_0 = A \cos(\omega_n 0) + B \sin(\omega_n 0) \Rightarrow u(0) = u_0 = A \cdot 1 + 0$$

on aura donc  $A = u_0$

Même principe concernant la vitesse qui est égale à une vitesse initiale  $v_0$  à  $t = 0$ , pour cela l'équation 2 est utilisée pour déterminer B:

$$t = 0 \rightarrow \dot{u}(0) = v_0 = -A \omega_n \sin(\omega_n 0) + B \omega_n \cos(\omega_n 0)$$

$$\dot{u} = v_0 = 0 + B \omega_n \cdot 1 \Rightarrow \text{donc } B = \frac{v_0}{\omega_n}$$

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{u} = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + v_0 \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{u} = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - v_0 \omega_n \sin(\omega_n t)$$

## II. Système libre amorti

2.2. Système à amortissement critique :  $\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 = 0$

$$\left(\frac{C}{2m}\right)^2 = \omega_n^2 \quad \left(\frac{C}{2m}\right) = \omega_n \quad C = C_{cr} = 2m\omega_n$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-C_{cr}}{2m} = \frac{-2m\omega_n}{2m} = -\omega_n \quad \lambda = -\omega_n$$

$$u = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$$

Notez que la principale raison pour laquelle la constante B est multipliée par t afin que nous ne puissions pas additionner les deux constantes optionnelles en une seule constante est que l'équation est du second degré et que nous devons donc avoir deux constantes optionnelles. On aura donc :

$$u = e^{\lambda t} (A + Bt)$$

$$\dot{u} = e^{\lambda t} (B + A\lambda + B\lambda t)$$

$$\ddot{u} = e^{\lambda t} (2B\lambda + A\lambda^2 + B\lambda^2 t)$$

Les constants A et B peuvent être obtenues en remplaçant les conditions aux limites dans les équations :

$$\begin{aligned} \text{à } t=0 \quad u &= u_0 = A & A &= u_0 \\ \dot{u} &= \dot{u}_0 = B + A\lambda & \dot{u}_0 &= B + u_0\lambda & B &= \dot{u}_0 - u_0\lambda \\ u &= e^{-\omega_n t} (u_0 + (\dot{u}_0 + u_0\omega_n)t) \\ \dot{u} &= e^{-\omega_n t} (\dot{u}_0 - (\dot{u}_0 + u_0\omega_n)\omega_n t) \\ \ddot{u} &= e^{-\omega_n t} ((\dot{u}_0 + u_0\omega_n)\omega_n^2 t - u_0\omega_n^2 - 2\dot{u}_0\omega_n) \end{aligned}$$

**2.3. Système sur-amorti :**  $\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{2m}\right) > \omega_n & \quad \left(\frac{C}{2m}\right) > \omega_n & C > 2m\omega_n & \quad C > C_{cr} \\ \zeta = \frac{C}{C_{cr}} & \quad C = \zeta C_{cr} & C = \zeta 2m\omega_n & \quad \zeta > 1.0 \end{aligned}$$

Ceci est obtenu dans le cas où la résistance au mouvement est grande, et dans ce cas l'équation discriminante a deux racines réelles différentes.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-\zeta 2m\omega_n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta 2m\omega_n}{2m}\right)^2 - \omega_n^2} \\ \lambda_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} \\ \lambda_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned}$$

Dans ce cas, les deux solutions ( $e^{\lambda_1 t}$  &  $e^{\lambda_2 t}$ ) sont linéairement indépendantes, et la solution générale est sous la forme suivante :

$$u = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{u} = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\ddot{u} = A\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}$$

$$t = 0.0 \rightarrow u = u_0 = Ae^{\lambda_1 \cdot 0} + Be^{\lambda_2 \cdot 0}$$

$$u = u_0 = A + B$$

$$B = u_0 - A$$

$$t = 0.0 \rightarrow \dot{u} = \dot{u}_0 = A\lambda_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 \cdot 0}$$

$$\dot{u} = \dot{u}_0 = A\lambda_1 + B\lambda_2$$

$$\dot{u}_0 - u_0\lambda_2 = A\lambda_1 - A\lambda_2$$

$$\dot{u}_0 = A\lambda_1 + u_0\lambda_2 - A\lambda_2$$

$$A = \frac{\dot{u}_0 - u_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B = u_0 - \frac{\dot{u}_0 - u_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B = \frac{u_0(\lambda_1 - \lambda_2) - \dot{u}_0 + u_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B = \frac{u_0\lambda_1 - u_0\lambda_2 - \dot{u}_0 + u_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B = \frac{-\dot{u}_0 + u_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$t = 0.0 \rightarrow u = u_0 = A + B$$

$$t = \infty \rightarrow u = 0.0$$

**2.4. Système sous-amorti:**  $\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 < 0$

$$\left(\frac{C}{2m}\right)^2 < \omega_n^2$$

$$\left(\frac{C}{2m}\right) < \omega_n$$

$$C < 2m\omega_n$$

$$C < C_{cr}$$

$$\zeta = \frac{C}{C_{cr}}$$

$$C = \zeta C_{cr}$$

$$\zeta < 1.0$$

$$C = \zeta 2m\omega_n$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\zeta 2m\omega_n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta 2m\omega_n}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}$$

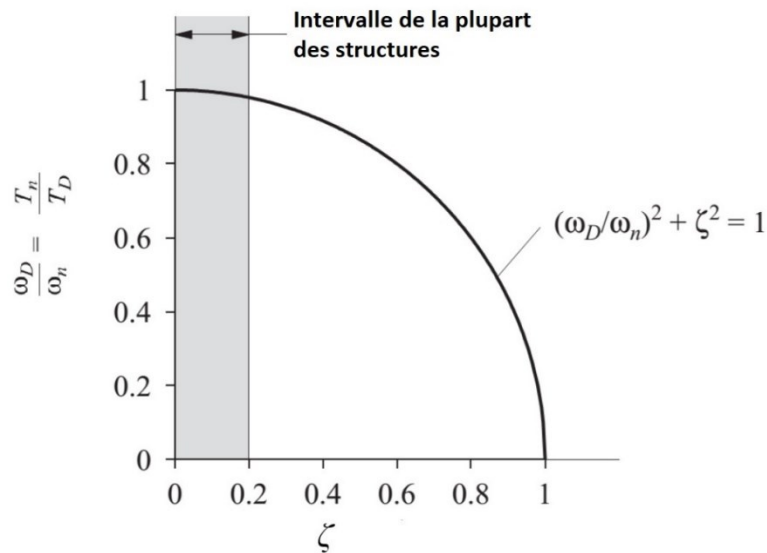
$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$T_d = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



$$\left. \begin{aligned} \omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} &\Rightarrow \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)^2 + \zeta^2 = 1 \\ T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} &\Rightarrow \left(\frac{T_n}{T_D}\right)^2 + \zeta^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y^2 + x^2 = 1$$

La valeur de  $(1 - \zeta^2)$  est comprise entre (2% à 20%), ce qui signifie que cette quantité est approximativement égale à 1 comme démontre la figure

$$\sqrt{1-\zeta^2} \begin{cases} 0.999 \\ 0.979 \end{cases} \cong 1.0 \quad \text{cela implique que} \quad \omega_d \cong \omega_n$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

Ainsi, la période d'amortissement ( $T_d$ ) peut être exprimé comme suit :

$$t_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$$

$$\lambda_{1,2} = R \pm im$$

$$R = -\zeta\omega_n$$

&

$$m = \omega_d$$

Ainsi, les deux solutions ( $e^{\lambda_1 t}$  &  $e^{\lambda_2 t}$ ) sont linéairement indépendantes, et la solution générale est la suivante :

$$u = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

En utilisant la relation d'Euler, cette forme imaginaire peut être convertie en une forme réelle comme suit :

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$u = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$u = Ae^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)t} + Be^{(-\zeta\omega_n - i\omega_d)t}$$

$$u = e^{-\zeta\omega_n t} (Ae^{i\omega_d t} + Be^{-i\omega_d t})$$

$$u = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ A(\cos(\omega_d t) + i \sin(\omega_d t)) + B(\cos(\omega_d t) - i \sin(\omega_d t)) \right]$$

$$u = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ A \cos(\omega_d t) + iA \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t) - iB \sin(\omega_d t) \right]$$

$$u = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ (A+B) \cos(\omega_d t) + i(A-B) \sin(\omega_d t) \right]$$

On note :

$$a = (A+B) \quad \& \quad b = i(A-B)$$

$$u = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t) \right]$$

$$\sin \theta = \frac{a}{p}$$

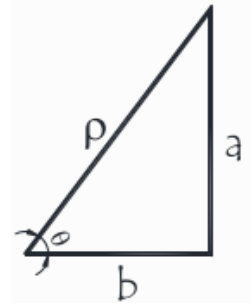
$$\cos \theta = \frac{b}{p}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$u = pe^{-\zeta\omega_n t} \left[ \frac{a}{p} \cos(\omega_d t) + \frac{b}{p} \sin(\omega_d t) \right]$$

$$u = pe^{-\zeta\omega_n t} \left[ \sin \theta \cos(\omega_d t) + \cos \theta \sin(\omega_d t) \right]$$



On sait que :

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

Donc on aura :

$$u = pe^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$u = pe^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\dot{u} = pe^{-\zeta\omega_n t} \omega_d \cos(\omega_d t + \theta) - p\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\dot{u} = pe^{-\zeta\omega_n t} \left[ \omega_d \cos(\omega_d t + \theta) - \zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \theta) \right]$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega_d}{\psi}$$

$$\cos \varphi = \frac{-\zeta\omega_n}{\psi}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n}$$

$$\psi = \sqrt{(\omega_d)^2 + (-\zeta\omega_n)^2}$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \psi p e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \frac{\omega_d}{\psi} \cos(\omega_d t + \theta) + \frac{-\zeta\omega_n}{\psi} \sin(\omega_d t + \theta) \right] \\ \dot{u} &= \psi p e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \sin\varphi \cos(\omega_d t + \theta) + \cos\varphi \sin(\omega_d t + \theta) \right] \\ \dot{u} &= \psi p e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \\ \ddot{u} &= \psi p e^{-\zeta\omega_n t} \omega_d \cos(\omega_d t + \theta + \varphi) - \psi \zeta \omega_n p e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \\ \ddot{u} &= \psi p e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \omega_d \cos(\omega_d t + \theta + \varphi) - \zeta \omega_n \sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \right] \\ \ddot{u} &= \psi^2 p e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \frac{\omega_d}{\psi} \cos(\omega_d t + \theta + \varphi) + \frac{-\zeta\omega_n}{\psi} \sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \right] \\ \ddot{u} &= \psi^2 p e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \sin\varphi \cos(\omega_d t + \theta + \varphi) + \cos\varphi \sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \right] \\ \ddot{u} &= \psi^2 p e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + 2\varphi) \end{aligned}$$

Trouver les constantes facultatives (a & b) :

$$\begin{aligned} u &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[ a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t) \right] \\ \dot{u} &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[ -a\omega_d \sin(\omega_d t) + b\omega_d \cos(\omega_d t) \right] - \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left[ a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t) \right] \\ t = 0.0 &\rightarrow u = u_0 = 1 * [a * 1 + b * 0] \\ u_0 &= a & a &= u_0 \\ t = 0.0 &\rightarrow \dot{u} = \dot{u}_0 = 1 * [-a\omega_d * 0 + b\omega_d * 1] - \zeta\omega_n * 1 [a * 1 + b * 0] \\ \dot{u}_0 &= b\omega_d - \zeta\omega_n u_0 & b &= \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \\ p &= \sqrt{a^2 + b^2} & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) & \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n}\right) \\ p &= \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{u_0 \omega_d}{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}\right) \\ \psi &= \sqrt{(\omega_d)^2 + (-\zeta\omega_n)^2} & \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n}\right) \\ u &= \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) \\ \dot{u} &= \sqrt{(\omega_d)^2 + (-\zeta\omega_n)^2} \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \\ \ddot{u} &= \left[ (\omega_d)^2 + (\zeta\omega_n)^2 \right] \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + 2\varphi) \\ u &= p e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) & u_{\max} &= p e^{-\zeta\omega_n t} \end{aligned}$$

$$\dot{u} = \psi p e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + \varphi)$$

$$\dot{u}_{\max} = \psi p e^{-\zeta \omega_n t}$$

$$\ddot{u} = \psi^2 p e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta + 2\varphi)$$

$$\ddot{u}_{\max} = \psi^2 p e^{-\zeta \omega_n t}$$

## 2.6. Décrément logarithmique

Décrément logarithmique Il est défini comme le décrément du logarithme népérien de deux pics ou amplitudes consécutifs dans la même direction.

$$u = p e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$u_1 = p e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$u_{1+t_d} = p e^{-\zeta \omega_n (t+t_d)} \sin(\omega_d (t+t_d) + \theta)$$

$$\left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = \frac{p e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)}{p e^{-\zeta \omega_n (t+t_d)} \sin(\omega_d (t+t_d) + \theta)}$$

$$\sin(\omega_d t + \theta) = \sin(\omega_d (t+t_d) + \theta) = 1$$

$$\left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{e^{-\zeta \omega_n (t+t_d)}}$$

$$\left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = e^{-\zeta \omega_n t + \zeta \omega_n (t+t_d)} = e^{-\zeta \omega_n t + \zeta \omega_n t + \zeta \omega_n t_d} = e^{\zeta \omega_n t_d}$$

$$\left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = e^{\zeta \omega_n t_d} \quad t_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \ln \left( \frac{u_1}{u_{1+t_d}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\ln \left( \frac{u_1}{u_{i+1}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \delta = \ln \left( \frac{u_i}{u_{i+1}} \right)$$

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \delta^2 (1-\zeta^2) = 4\pi^2 \zeta^2$$

$$\delta^2 = \frac{4\pi^2 \zeta^2}{1-\zeta^2} \quad \frac{\delta^2}{4\pi^2} = \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

$$\delta^2 = \zeta^2 (4\pi^2 + \zeta^2) \quad \delta^2 = 4\pi^2 \zeta^2 + \delta^2 \zeta^2$$

$$\zeta^2 = \frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2} \quad \zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}}$$

$$\delta^2 = \frac{4\pi^2 \zeta^2}{1-\zeta^2} \quad \delta = \sqrt{\frac{4\pi^2 \zeta^2}{1-\zeta^2}}$$

$$\delta = 2\pi\zeta$$

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi}$$

il y a une forte probabilité de faire une erreur en mesurant les amplitudes de déplacement dans deux cycles consécutifs quelconques car la différence entre ces deux quantités est très petite. Par conséquent, une plus grande précision peut être obtenue en considérant des pics de réponse qui sont distants de plusieurs cycles, disons en "j" cycles.

Le mouvement décroît de  $u_i$  à  $u_{i+j}$  sur j cycles, c'est-à-dire :

$$\frac{u_i}{u_{i+j}} = \frac{u_i}{u_{i+1}} \frac{u_{i+1}}{u_{i+2}} \frac{u_{i+2}}{u_{i+3}} \dots \frac{u_{i+j-1}}{u_{i+j}} = e^{j\delta}$$

On aura :

$$\delta = \frac{1}{j} \log \frac{u_i}{u_{i+j}} \quad \text{et} \quad \delta \approx 2\pi\zeta$$

### I. Système forcé non amorti sous charge harmonique

$$F(t) - Ku = m\ddot{u}$$

$$m\ddot{u} + Ku = F(t)$$

$$m\ddot{u} + Ku = F(t)$$

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_{ex} t)$$

$$u = u_h + u_p$$

$$m\ddot{u} + Ku = F_0 \sin(\omega_{ex} t)$$

$$u_h = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

$$u_p = y \sin(\omega_{ex} t)$$

$$\dot{u}_p = y\omega_{ex} \cos(\omega_{ex} t)$$

$$\ddot{u}_p = -y\omega_{ex}^2 \sin(\omega_{ex} t)$$

$$-my\omega_{ex}^2 \sin(\omega_{ex} t) + Ky \sin(\omega_{ex} t) = F_0 \sin(\omega_{ex} t)$$

$$-my\omega_{ex}^2 + Ky = F_0$$

$$y = \frac{F_0}{K - m\omega_{ex}^2}$$

$$u_p = \frac{F_0}{K - m\omega_{ex}^2} \sin(\omega_{ex} t)$$

$$u_p = \frac{F_0}{1 - \frac{m}{K} \omega_{ex}^2} \sin(\omega_{ex} t)$$

$$\omega_n = \frac{K}{m}$$

$$u_p = \frac{F_0}{K} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega_n}\right)^2} \sin(\omega_{ex} t) \quad DMF = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{T_n}{T_{ex}}\right)^2}$$

$$u = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{K} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{ex}^2}{\omega_n^2}\right)^2} \sin(\omega_{ex} t) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\omega_{ex}}{\omega_n}$$

$$u = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\omega_{ex} t)$$

$$\dot{u} = -A\omega_n \sin(\omega_n t) + B\omega_n \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{K} \frac{\omega_{ex}}{1 - \beta^2} \cos(\omega_{ex} t)$$

$$\ddot{u} = -A\omega_n^2 \cos(\omega_n t) - B\omega_n^2 \sin(\omega_n t) - \frac{F_0}{K} \frac{\omega_{ex}^2}{1 - \beta^2} \sin(\omega_{ex} t)$$

Pour trouver les constant A et B :

$$t = 0.0 \rightarrow u = u_0$$

$$u_0 = A + B * 0 + 0 \quad A = u_0$$

$$t = 0.0 \rightarrow \dot{u} = \dot{u}_0$$

$$\dot{u}_0 = -A * 0 + B\omega_n * 1 + \frac{F_0}{K} * \frac{\omega_{ex}}{1 - \beta^2} * 1$$

$$\dot{u}_0 = B\omega_n + \frac{F_0}{K} * \frac{\omega_{ex}}{1 - \beta^2} \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} - \frac{F_0}{K} \frac{\beta}{1 - \beta^2}$$

$$R_d = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \beta = \frac{\omega_{ex}}{\omega_n} \quad \omega_{ex} = \beta\omega_n$$

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \left[ \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} - \frac{F_0}{K} \frac{\beta}{1 - \beta^2} \right] \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\omega_{ex} t)$$

Réponse transitoire

réponse permanente

On peut réarranger l'équation comme suit :

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \left( \frac{F_0}{K} \right) \left( \frac{1}{1 - \beta^2} \right) (\sin(\omega_{ex} t) - \beta \sin(\omega_n t))$$

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \left( \frac{F_0}{K} \right) (DMF) (\sin(\omega_{ex} t) - \beta \sin(\omega_n t))$$

Pour simplifier les choses, on peut dire qu'au début du mouvement, la vitesse initiale et le déplacement libre initial « insensible à aucune force » sont égaux à zéro, et donc le déplacement initial final est égal à :

$$u = \left( \frac{F_0}{K} \right) (DMF) (\sin(\omega_{ex}t) - \beta \sin(\omega_n t))$$

$$\dot{u} = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + \dot{u}_0 \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{K} (DMF) (\omega_{ex} \cos(\omega_{ex}t) - \beta \omega_n \cos(\omega_n t))$$

$$\ddot{u} = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - \dot{u}_0 \omega_n \sin(\omega_n t) - \frac{F_0}{K} (DMF) (\omega_{ex}^2 \sin(\omega_{ex}t) - \beta \omega_n^2 \sin(\omega_n t))$$

### 3.3. Phénomène de résonance

Dans ce cas, la première solution de l'équation différentielle n'est pas acceptable car si  $\omega_{ex} = \omega_n$  la fonction  $C \sin \omega t$  dans la solution particulière ( $u_p$ ) fait elle-même partie de la solution complémentaire. En plus le facteur d'amplification dynamique (DMF) est égal à l'infini, et cela sera difficile à gérer, nous allons donc résoudre l'équation du mouvement d'une autre manière :

$$m\ddot{u} + Ku = F_0 \sin(\omega_n t) \quad \ddot{u} + \frac{K}{m}u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t) \quad \ddot{u} + \omega_n^2 u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t)$$

$$u = u_h + u_p$$

$$u_h = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \quad \text{et} \quad u_p = yt \cos(\omega_n t)$$

$$\dot{u}_p = y \cos(\omega_n t) - y \omega_n t \sin(\omega_n t)$$

$$\ddot{u}_p = -y \omega_n \sin(\omega_n t) - [y \omega_n \sin(\omega_n t) + y \omega_n^2 t \cos(\omega_n t)]$$

$$\ddot{u}_p = -2y \omega_n \sin(\omega_n t) - y \omega_n^2 t \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t)$$

$$-2y \omega_n \sin(\omega_n t) - y \omega_n^2 t \cos(\omega_n t) + \omega_n^2 yt \cos(\omega_n t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t) - 2y \omega_n = \frac{F_0}{m}$$

$$-2y \omega_n \sin(\omega_n t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_n t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m}$$

$$m = \frac{K}{\omega_n^2}$$

$$y = \frac{-F_0}{2 \frac{K}{\omega_n^2} \omega_n} = \frac{-F_0}{2 \frac{K}{\omega_n}} = \frac{-F_0 \omega_n}{2K} \quad \text{-----} \rightarrow \quad y = \frac{-F_0}{2K} \omega_n$$

$$u_p = \frac{-F_0}{2K} \omega_n t \cos(\omega_n t)$$

$$u_h = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

$$u = u_h + u_p$$

$$u = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) - \frac{F_0}{2K} \omega_n t \cos(\omega_n t)$$

Trouver les constants A et B :

$$u = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) - \frac{F_0}{2K} \omega_n t \cos(\omega_n t)$$

$$\dot{u} = -A\omega_n \sin(\omega_n t) + B\omega_n \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{2K} (\omega_n^2 t \sin(\omega_n t) - \omega_n \cos(\omega_n t))$$

$$t = 0.0 \rightarrow u = u_0$$

$$u = u_0 = A \cos(0) + B \sin(0) - \frac{F_0}{2K} \omega_n * 0 * \cos(0)$$

$$t = 0.0 \rightarrow \dot{u} = \dot{u}_0 \quad u_0 = A + B * 0 + 0 \quad A = u_0$$

$$\dot{u} = \dot{u}_0 = -A\omega_n \sin(0) + B\omega_n \cos(0) - \frac{F_0}{2K} \omega_n \cos(0) + \frac{F_0}{2K} \omega_n^2 * 0 * \sin(0)$$

$$\dot{u}_0 = -A * 0 + B\omega_n * 1 + \frac{F_0}{2K} \omega_n + 0$$

$$\dot{u}_0 = B\omega_n + \frac{F_0}{2K} \omega_n \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} + \frac{F_0}{2K}$$

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} + \frac{F_0}{2K} \right) \sin(\omega_n t) - \left( \frac{F_0}{2K} \right) \omega_n t \cos(\omega_n t)$$

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right) \sin(\omega_n t) + \left( \frac{F_0}{2K} \right) \sin(\omega_n t) - \left( \frac{F_0}{2K} \right) \omega_n t \cos(\omega_n t)$$

$$u = u_0 \cos(\omega_n t) + \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right) \sin(\omega_n t) - \left( \frac{F_0}{2K} \right) (\omega_n t \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t))$$

$$u = - \left( \frac{F_0}{2K} \right) (\omega_n t \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t))$$

$$\dot{u} = -u_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + \dot{u}_0 \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{2K} (\omega_n^2 t \sin(\omega_n t))$$

$$\ddot{u} = -u_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - \dot{u}_0 \omega_n \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{2K} (\omega_n^2 \sin(\omega_n t) + \omega_n^3 t \cos(\omega_n t))$$

## I. Système force amorti sous charge harmonique

$$F(t) - KD - C\dot{u} = m\ddot{u} \qquad m\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$$

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \qquad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_{ex} t)$$

$$u = u_h + u_p$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin(\omega_{ex} t) \quad \text{et} \quad C = 2m\zeta\omega_n$$

$$m\ddot{u} + 2m\zeta\omega_n\dot{u} + Ku = F_0 \sin(\omega_{ex} t) \qquad \ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \frac{K}{m}u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_{ex} t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \qquad m = \frac{K}{\omega_n^2}$$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_{ex} t)$$

La solution homogène

$$u_h = (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) e^{-\zeta\omega_n t}$$

La solution particulière

On commence par la solution particulière puisque elle facile à trouver

$$u_p = y_1 \cos(\omega_{ex} t) + y_2 \sin(\omega_{ex} t)$$

$$\dot{u}_p = -y_1 \omega_{ex} \sin(\omega_{ex} t) + y_2 \omega_{ex} \cos(\omega_{ex} t)$$

$$\ddot{u}_p = -y_1 \omega_{ex}^2 \cos(\omega_{ex} t) - y_2 \omega_{ex}^2 \sin(\omega_{ex} t)$$

$$y_2 - y_2 \beta^2 - 2\zeta\beta y_1 - \frac{F_0}{K} = 0 \qquad y_2 (1 - \beta^2) - 2\zeta\beta y_1 - \frac{F_0}{K} = 0$$

$$y_1 \omega_n^2 - y_1 \omega_{ex}^2 + 2\zeta\omega_n \omega_{ex} y_2 = 0 \qquad y_1 - y_1 \frac{\omega_{ex}^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{\omega_{ex}}{\omega_n} y_2 = 0$$

$$y_1 - y_1 \beta^2 + 2\zeta\beta y_2 = 0 \qquad y_1 (1 - \beta^2) + 2\zeta\beta y_2 = 0$$

$$y_1 = \frac{F_0}{K} \left( \frac{-2\zeta\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right) \qquad y_2 = \frac{F_0}{K} \left( \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right)$$

$$u_p = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right) \left[ (1 - \beta^2) \sin(\omega_{ex} t) - (2\zeta\beta) \cos(\omega_{ex} t) \right]$$

$$u = u_h + u_p$$

$$u_h = (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) e^{-\zeta \omega_n t} \quad \text{Transitoire}$$

$$u_p = y_1 \cos(\omega_{ex} t) + y_2 \sin(\omega_{ex} t) \quad \text{Permanant}$$

Donc l'équation du mouvement dynamique sera :

$$u = (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) e^{-\zeta \omega_n t} + \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right) * \left[ (1-\beta^2) \sin(\omega_{ex} t) - (2\zeta\beta) \cos(\omega_{ex} t) \right]$$

Comme d'habitude on peut trouver les constant A et B en remplaçant l'équation total du mouvement par les conditions initiales. Cependant on a constaté précédemment (et d'après la figure) que la solution homogène est partie transitoire (diminue avec le temps) dû à l'existence de l'amortissement dans le système dynamique, donc on peut négliger cette partie de mouvement et la forme de l'équation dynamique se limite à la solution permanente Up.

$$u_p = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right) \left[ (1-\beta^2) \sin(\omega_{ex} t) - (2\zeta\beta) \cos(\omega_{ex} t) \right]$$

$$u_p = D \left[ (1-\beta^2) \sin(\omega_{ex} t) - (2\zeta\beta) \cos(\omega_{ex} t) \right] \quad \text{avec}$$

$$\sigma = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right)$$

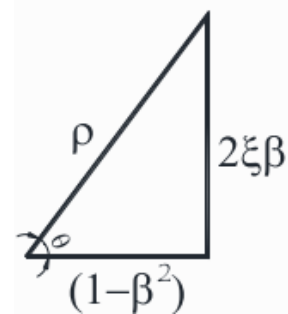
$$\sin \theta = \frac{2\zeta\beta}{\rho}$$

$$\cos \theta = \frac{(1-\beta^2)}{\rho}$$

$$(1-\beta^2) = \rho \cos \theta$$

$$2\zeta\beta = \rho \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$



$$u_p = \sigma (\rho \cos \theta \sin(\omega_{ex} t) - \rho \sin \theta \cos(\omega_{ex} t))$$

$$u_p = \sigma \rho (\sin(\omega_{ex} t) \cos \theta - \cos(\omega_{ex} t) \sin \theta)$$

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$u = \sigma \rho \sin(\omega_{ex} t - \theta) \qquad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta\beta}{1 - \beta^2} \right)$$

$$\sigma \rho = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right) \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$\sigma \rho = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \right)$$

$$u = \frac{F_0}{K} \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \right) \sin(\omega_{ex} t - \theta)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \qquad \beta = \frac{\omega_{ex}}{\omega_n}$$

Le paramètre D facteur d'amplification dynamique noté en génie parasismique réponse spectrale. Ce paramètre est responsable de la conversion du problème dynamique en statique.

## Annexe B

### Fonctions importantes

Trigonométrique	Hyperbolique
$\sin x = \frac{1}{\csc x}$	$\sinh x = \frac{1}{\operatorname{csch} x}$
$\cos x = \frac{1}{\sec x}$	$\cosh x = \frac{1}{\operatorname{sech} x}$
$\tan x = \frac{1}{\cot x}$	$\tanh x = \frac{1}{\operatorname{coth} x}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$	$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$	$\operatorname{coth}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sin(x \pm y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} = \frac{\sinh 2x \pm \sinh 2y}{\cosh 2x + \cosh 2y}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\sinh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$	$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$
$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$	$\cosh 2x = 1 + 2 \sinh^2 x$
$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\cosh 2x = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}$
$\tan 2x = \frac{2 \cot x}{\cot^2 x - 1}$	$\tanh 2x = \frac{2 \operatorname{coth} x}{\operatorname{coth}^2 x + 1}$
$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$
$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$	$2 \cosh^2 x = \cosh 2x + 1$
$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$	$2 \sinh^2 x = \cosh 2x - 1$
$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x$	$4 \sinh^3 x = 3 \sinh x - \sinh 3x$
$4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x$	$4 \cosh^3 x = 3 \cosh x + \cosh 3x$
$8 \sin^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x$	$8 \sinh^4 x = 3 - 4 \cosh 2x + \cosh 4x$
$8 \cos^4 x = 3 + 4 \cos 2x + \cos 4x$	$8 \cosh^4 x = 3 + 4 \cosh 2x + \cosh 4x$
$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$	$2 \sinh x \cosh y = \sinh(x + y) + \sinh(x - y)$
$2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$	$2 \cosh x \sinh y = \sinh(x + y) - \sinh(x - y)$
$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$	$2 \cosh x \cosh y = \cosh(x + y) + \cosh(x - y)$
$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$	$2 \sinh x \sinh y = \cosh(x + y) - \cosh(x - y)$
$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$	$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$	$\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$	$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$	$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$
$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$	$\tanh x + \tanh y = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh x \cosh y}$
$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$	$\tanh x - \tanh y = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh x \cosh y}$
$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$	$\tanh x - \tanh y = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh x \cosh y}$
$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$	$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$
$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$	$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$
$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$	$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$
$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$	$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$
$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$	$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$
$\sin(x+y) * \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$	$\sinh(x+y) * \sinh(x-y) = \sinh^2 x - \sinh^2 y$
$-\sin(x+y) * \sin(x-y) = \cos^2 x - \cos^2 y$	$\sinh(x+y) * \sinh(x-y) = \cosh^2 x - \cosh^2 y$
$\cos(x+y) * \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$	$\cosh(x+y) * \cosh(x-y) = \cosh^2 x + \sinh^2 y$
$\frac{\sin x \pm \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x \pm y}{2}$	$\frac{\sinh x \pm \sinh y}{\cosh x + \cosh y} = \tanh \frac{x \pm y}{2}$
$\frac{\sin x \pm \sin y}{\cos x - \cos y} = -\cot \frac{x \mp y}{2}$	$\frac{\sinh x \pm \sinh y}{\cosh x - \cosh y} = \coth \frac{x \mp y}{2}$
$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\tan \frac{x+y}{2}}{\tan \frac{x-y}{2}}$	$\frac{\sinh x + \sinh y}{\sinh x - \sinh y} = \frac{\tanh \frac{x+y}{2}}{\tanh \frac{x-y}{2}}$

### Relations trigonométriques

$\sin(x) = -\sin(-x) = \sin(x \pm 2\pi) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
$\sin(x) = -\sin(2\pi - x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
$\cos(x) = \cos(-x) = -\cos(\pi \pm x) = \cos(x \pm 2\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(2\pi - x) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right)$
$\tan(x) = -\tan(-x) = \tan(x \pm \pi) = \tan(\pi + x) = -\tan(\pi - x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
$\csc(x) = -\csc(-x) = \csc(x \pm 2\pi) = \csc(\pi - x) = -\csc(\pi + x) = \sec\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$

$\sec(x) = \sec(-x) = \sec(x \pm 2\pi) = -\sec(\pi \pm x) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	
$\cot(x) = -\cot(-x) = \cot(x \pm 2\pi) = \cot(\pi + x) = -\cot(\pi - x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	
$\sin(x \pm n\pi) = (-1)^n \sin(x)$	$\tan(x \pm n\pi) = \tan(x)$
$\cos(x \pm n\pi) = (-1)^n \cos(x)$	$\cot(x \pm n\pi) = \cot(x)$

### Relations hyperboliques

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$
$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$
$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$
$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$	

### Fonction trigonométrique et hyperbolique inverse :

$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(x)$	$\operatorname{arcsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$
$\arccos(x) = \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)$	$\operatorname{arccosh}(x) = \cosh^{-1}(x)$
$\arctan(x) = \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}(x)$	$\operatorname{arctanh}(x) = \tanh^{-1}(x)$
$\operatorname{arccsc}(x) = \csc^{-1}(x)$	$\operatorname{arccsch}(x) = \operatorname{csch}^{-1}(x)$
$\operatorname{arcsec}(x) = \sec^{-1}(x)$	$\operatorname{arsech}(x) = \operatorname{sech}^{-1}(x)$
$\operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$	$\operatorname{arcoth}(x) = \operatorname{coth}^{-1}(x)$
$\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \csc^{-1}(x)$	
$\arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x)$	
$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}(x)$	
$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$	$e^{jn\theta} = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)$
$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$	$e^{-jn\theta} = \cos(n\theta) - j \sin(n\theta)$
$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$	$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$