وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar Annaba

Badji Mokhtar University - Annaba

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Calcul Stochastique et Approximation

Contrôle Optimal Stochastique avec Saut
Application à la Finance :
Problème d'investissement à volatilité stochastique

Par
Benchaabane Abbes

Sous la direction de
Prof. Benchettah Azzedine

Devant le jury

PRESIDENT :	Haiour Mohammed	Prof	U. Annaba
EXAMINATEUR 1 :	Aissaoui Med Zine	M. C. A	U. Guelma
EXAMINATEUR 2 :	Boushaba Mahmoud	Prof	U. Constantine
EXAMINATEUR 3 :	Rahmani Fouad Lazhar	Prof	U. Constantine
EXAMINATEUR 4 :	Remita Riad	M. C. A	U. Annaba

Année : 2013

Table des matières

Page

ملخص

في هذه الرسالة سندرس إشكالية الاستثمارات المثالية في الأسواق المالية ذات التغاير العشوائي الذي يتمتع بخاصية الرجوع السريع إلى المتوسط. نتحصل على التقريب من الدرجة الأولى للقيمة المثلى ونبرهن أن القيمة المثلى للاستثمارات ذات التغاير العشوائي تقترب من القيمة المثلى لنفس الاستثمارات بتغاير ثابت ونحصل على التقريبات المطلوبة.

Abstract

Dans cette thèse nous étudions un problème d'investissement optimal dans les marchés financiers avec une volatilité stochastique qui possède la propriété de retour rapide à la moyenne. La première correction de la fonction valeur du problème d'investissement optimal avec une volatilité stochastique étant obtenue, nous montrons qu'elle converge vers la fonction valeur du même problème à volatilité constante, ayant obtenu une erreur convenable.

Abstract

In this thesis we study a problem of optimal investment in financial markets based on the fast-mean reverting stochastic volatility, The first correction of value function is obtained. We show that the value function for optimal investment problem with stochastic volatility converges to the value function for the some problem with constant volatility and obtains the desired error.

Remerciements

Je remercie, vivement, Monsieur le Professeur Benchettah Azzedine et Monsieur le Professeur Paul Raynaud de Fitte pour avoir dirigé ce travail, pour leur disponibilité et pour leurs qualités humaines et scientifiques.

Je remercie, également, Messieurs les membres du Jury :

Monsieur le Président, Haiour Mohammed, Professeur à l’université d’Annaba
Monsieur Aissaoui Mohamed Zine, M. C. A. à l’université de Guelma
Monsieur Boushaba Mahmoud, Professeur à l’université de Constantine
Monsieur Rahmani Raouf, Professeur à l’université de Constantine
Monsieur Remita Riad, M. C. A. à l’université d’Annaba,

qui ont accepté de juger mon travail.

Enfin, je veux remercier mes parents et toute ma famille qui m'a toujours encouragé et une pensée spéciale pour G-W.

Introduction

Dans cette thèse, nous nous proposons d'étudier un modèle d'investissement optimal à volatilité stochastique. Le modèle est le suivant

$$\begin{cases} dX_t = X_t \left[(r + (\mu - r)u_t)dt + \sigma_t u_t dB_t^x \right], \\ \sigma_t = f(Y_t), \\ V(t,x,y) = \sup_u V(t,x,y;u), \text{ où } V(t,x,y;u) = E\left(\frac{\left(X_T^u\right)^p}{p} \mid X_t = x, Y_t = y \right). \end{cases}$$

Ici :

- X représente le processus de la richesse, X_t sa valeur à la date t,
- r et μ représentent respectivement le taux d'intérêt et le rendement instantané, supposés constants,
- σ_t est la valeur à la date t de la volatilité ; elle mesure l'intensité du bruit $\sigma_t u_t X_t dB_s^x$,
- B_t^x est un mouvement brownien standard,
- u_t est le processus de contrôle,
- $V(t,x,y)$ est la fonction valeur et $V(t,x,y;u)$ la fonction de coût.

Il y a une bonne raison a priori de considérer la volatilité comme une quantité aléatoire : des études empiriques sur les rendements du cours du sous-jacent permettent d'estimer la volatilité et celle-ci semble présenter un comportement stochastique. Mais modéliser la volatilité par un processus stochastique, c'est en fait reconnaître que quantifier le risque à travers un paramètre de volatilité constant est aujourd'hui insuffisant pour expliquer certains phénomènes de marché.

Nous supposons que la volatilité σ_t soit une quantité $\mathcal{F}_t$-mesurable et strictement positive. Aussi nous nous proposons de l'écrire sous la forme $\sigma_t = f(Y_t)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction déterministe et Y est un processus aléatoire à valeurs réelles $\mathcal{F}_t$-adapté, et B_t^y est un mouvement brownien standard indépendant de B_t^x. Nous considérons la diffusion markovienne de type

$$dY_t = \mu_Y(t, Y_t)dt + \sigma_Y(t, Y_t)dB_t^y,$$

et nous nous limiterons à celle qui possède la propriété de retour à la moyenne, i.e.,

$$\mu_Y(t, y) = \alpha(m - y).$$

Le paramètre α s'appelle le taux de retour à la moyenne et le paramètre m la moyenne à long terme. On peut voir Y_t comme la position à la date t d'une particule soumise à une force de rappel d'intensité α qui a tendance à la ramener à sa position d'équilibre (déterministe) m et à une force aléatoire - par exemple des chocs- modélisée par le bruit $\sigma_Y(t, Y_t)dB_t^y$.

L'idée principale est celle considérée par J-P Fouque (FPS00) pour un modèle de Black-sholes à volatilité stochastique qui consiste :

1. D'une part à ce que la volatilité possède la propriété de retour à la moyenne, qu'on modélise par la force de rappel déterministe $\alpha(m - Y_t)dt$,
2. D'autre part que ce retour à la moyenne soit rapide. On suppose donc que l'intensité α de la force de rappel est grande. Grande devant quoi ? α est l'inverse d'un temps. Il s'agit donc de comparer $\epsilon = 1/\alpha$- temps caractéristique de retour à la moyenne- à l'échelle de temps du problème : $T - t$. Aussi, on considère que $\epsilon \ll T - t$ où, de manière équivalente, que $(T - t)^{-1} \ll \alpha$.

L'idée est de proposer un développement limité en $\sqrt{\epsilon}$ de la fonction valeur $V(t, x, y)$.

Le plan de cette thèse est le suivant :

- Nous commençons par formuler au **chapitre 1** de façon générale la structure d'un problème de contrôle stochastique. On va essentiellement exposer l'approche du contrôle stochastique d'un processus de diffusion en appliquant le principe de la programmation dynamique de Bellman qui conduit à des équations aux dérivées partielles non linéaires appelées équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) dont la résolution s'appuie sur un résultat dit le théorème de vérification.

- Le **chapitre 2** reprend le principe de la programmation dynamique mais en adoptant une démarche plus récente, basée sur la théorie des solutions de viscosité. Ce concept permet de résoudre des problèmes de contrôle lorsque la fonction valeur n'est pas régulière comme supposée au chapitre précédent, voir (Lio83), (ePL92) et (FS06).

- Le **chapitre 3** consiste à définir et à étudier un problème d'investissement optimal aussi bien sous une volatilité constante que sous une volatilité stochastique. Nous avons ainsi obtenu l'existence et l'unicité de la fonction valeur donnée explicitement dans le cas où la volatilité est constante, aussi pour le cas où la volatilité est stochastique, en utilisant la notion de solutions de viscosité introduite dans le chapitre 2, nous avons réussi à démontrer l'existence et l'unicité de la fonction valeur.

- Dans le **chapitre 4** on commence par rappeler la technique d'approximation basée sur l'analyse asymptotique. Ensuite on utilise la méthode de moyennisation de Bogoliubov pour :

  1- Mettre en évidence l'existence d'une stratégie optimale pour le problème d'investissement optimal pour les marchés financiers à volatilité stochastique avec petit paramètre.

  2- Obtenir un développement limité pour les stratégies optimales quand le petit paramètre du modèle tend vers zéro ainsi que la limite de la stratégie optimale, et on démontre la convergence de ces stratégies optimales, résultat ayant fait l'objet d'une publication international, voir (BB11). Ceci nous a permis de démontrer dans le Théorème 4.3 la convergence de la fonction valeur $V^\epsilon(t,x,y)$ vers la valeur corrigée d'ordre 1 : $V_0 + \sqrt{\epsilon} V_1$ par l'utilisation des propriétés de l'équation de Poisson et l'application de quelques estimations concernant les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

I. *Problème de contrôle stochastique*

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance et reposent sur la méthode de la programmation dynamique. L'idée principale de cette méthode consiste à considérer une famille de contrôles à différents états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire appelée équation d'Hamilton -Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le théorème de vérification valide l'optimalité de ce candidat, solution d'HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal, voir (Pha07).

1.1 Forme standard d'un problème de contrôle stochastique

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème à elle seule a posé problème aux mathématiciens, et il a fallu attendre les années 40 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement brownien, ainsi on peut donner un sens à l'expression $\int_s^t f(u,\omega)dB_u$, où $f(u,.)$ est un processus stochastique muni de propriétés de régularités suffisantes. On rappelle dans cette section quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques (EDS) à coefficient aléatoires par rapport à un mouvement brownien.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles[1], et soit $(B_t)_t$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On se donne un sous ensemble $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^k$, on note par $\mathcal{U}_0$ l'ensemble de tous les processus progressivement mesurables $v = \{v_t,\ t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{U}$. Les éléments de $\mathcal{U}_0$ sont appelés les **processus de contrôles**. Soit

$$b : (t, x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to b(t, x, u) \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

et

$$\sigma : (t, x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \sigma(t, x, u) \in \mathbb{R}^{n\times d}, \tag{1.2}$$

deux fonctions satisfaisant la condition uniforme de Lipschitz

$$|b(t, x, u) - b(t, y, u)| + |\sigma(t, x, u) - \sigma(t, y, u)| \leq K|x - y|, \tag{1.3}$$

pour une certaine constante finie K indépendante de (t, x, y, u). Pour tout processus de contrôle $v \in \mathbb{U}$, on considère alors l'EDS :

$$dX_t = b(t, X_t, v_t)dt + \sigma(t, X_t, v_t)dB_t. \tag{1.4}$$

Si l'équation (1.4) admet une solution unique X, pour des données initiales, alors on dit que X est **un processus contrôlé** par le processus de contrôle v.

Soit $T > 0$ un horizon du temps donné. On note par $\mathcal{U}$ le sous ensemble de tous les processus de contrôles $v \in \mathcal{U}_0$ satisfaisant la condition

$$E\int_0^T \left(|b(t, x, v_t| + |\sigma(t, X_t, v_t)|^2\right) dt < \infty. \tag{1.5}$$

[1] c-à-d que la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite et complète.

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés les **processus de contrôles admissibles.** Cette condition assure l'existence d'un processus contrôlé pour des données initiales, sous la condition uniforme de Lipschitz sur b et σ. C'est une conséquence d'un théorème d'existence plus général des EDS à coefficients aléatoires, voir (Pro05).

Théorème I.1 *Supposons que $v \in \mathcal{U}$. Alors sous la conditions* (1.3) *et pour toute variable aléatoire $\zeta \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_0-$mesurale, il existe un unique processus X $\mathbb{F}-$adapté vérifiant* (1.4) *avec la condition initiale $X_0 = \zeta$. De plus, on a*

$$E(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^2) < \infty. \tag{1.6}$$

Soient $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On suppose que f et g sont à croissance quadratique en x, i.e. il existe une constante positive C indépendante de (t,u) telle que

$$|f(t,x,u)| + |g(x)| \leq C(1 + |x|^2),\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7}$$

On peut alors définir **la fonction de coût** J sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ par

$$J(t,x,v) = E\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, v_s)ds + g(X_T^{t,x})\right], \tag{1.8}$$

où X est la solution de EDS (1.4) avec le contrôle v et la condition initiale $X_t = x$.

Observons que les conditions de croissances quadratiques de f et g assurent que $J(t,x,v)$ est bien définie pour tout contrôle admissible $v \in \mathcal{U}$, comme une conséquence du Théorème I.1. L'objectif étant de minimiser cette fonction de coût, on introduit **la fonction valeur** :

$$V(t,x) = \inf_{v\in\mathcal{U}} J(t,x,v), \qquad \text{pour } (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Soit $(t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$, on dit que $v^* \in \mathcal{U}$ est un contrôle optimal si

$$V(t, x) = J(t, x, v^*). \tag{1.10}$$

1.2 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique (PPD)[2] est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique (Kry80), (FS06). Dans le contexte de contrôle de processus de diffusion décrit au paragraphe précédent, et même plus généralement pour des contrôles de processus de Markov[3], il s'énonce ainsi :

Théorème I.2 *Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Alors on a*
(i) Pour tout $v \in \mathcal{U}$ et $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$:

$$V(t, x) \leq E\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, v_s)ds + V(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{1.11}$$

(ii) Pour tout $\delta > 0$, il existe $v \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$:

$$V(t, x) + \delta \geq E\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, v_s)ds + V(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{1.12}$$

C'est une version plus forte que la version traditionnelle du principe de la programmation dynamique :

$$V(t, x) = \inf_{v \in \mathcal{U}} E\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, v_s)ds + V(\theta, X_\theta^{t,x})\right], \tag{1.13}$$

pour tout temps d'arrêt $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$.

[2]Ce principe est initié dans les année 50 par Bellman.

[3]Un processus de Markov est un processus stochastique jouissant de la propriété de Markov, c-à-d : "ce qui se passe dans le futur dépend seulement de l'état présent et ne dépend pas du parcours de passé".

1.3 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman HJB est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique : elle décrit le comportement local de la fonction valeur $V(t,x)$ lorsqu'on fait tendre le temps d'arrêt θ dans (1.13) vers t.

Dans cette section, nous dérivons formellement l'équation d'HJB en supposant que la **fonction valeur V est suffisamment régulière** (Yon00), (Pha07).

Considérons le temps $\theta = t+h$ et un contrôle constant $\alpha_s = a$, avec a arbitraire dans $\mathbb{U}$, on a, d'après la relation de la programmation dynamique,

$$V(t,x) \leq E\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, a)ds + V(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right]. \tag{1.14}$$

En supposant que V est suffisamment régulière, on a par la formule d'Itô[4] entre t et $t+h$:

$$V(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = V(t,x) + \int_t^{t+h} (\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}^a V)(s, X_s^{t,x})ds + \int_t^{t+h} \frac{\partial V}{\partial x}(s, X_s^{t,x})dB_s,$$

où $\mathcal{L}^a$ est l'opérateur associé à la diffusion (1.4) pour le contrôle constant a et est défini par :

$$\mathcal{L}^a V = b(x,a)D_x V + \frac{1}{2}tr(\sigma(x,a)\sigma'(x,a)D_x^2 V).$$

En substituant dans (1.14), on obtient alors :

$$0 \leq E\left[\int_t^{t+h} (\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}^a V)(s, X_s^{t,x}) + f(s, X_s^{t,x}, a)ds\right].$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on a :

$$0 \leq \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}^a V(t,x) + f(t,x,a).$$

[4] Pour appliquer la formule d'Itô, il faut que v soit une fois dérivable par rapport à t et deux fois dérivable par rapport à x (suffisamment régulière).

Ceci étant valable pour tout $a \in \mathbb{U}$, on obtient alors l'inégalité :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in\mathbb{U}}[-\mathcal{L}^a V(t,x) - f(t,x,a)] \leq 0. \tag{1.15}$$

D'autre part, supposons que α^* est un contrôle optimal. Alors on a :

$$V(t,x) = E\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^*, \alpha_s^*)ds + V(t+h, X_{t+h}^*)\right],$$

où X^* est l'état du système solution de (1.4) partant de x en t avec le contrôle α^*. Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur V, on obtient :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{\alpha_t^*} V(t,x) - f(t,x,\alpha_t^*) = 0,$$

ce qui, combiné avec (1.15), suggère que V doit satisfaire :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in\mathbb{U}}[-\mathcal{L}^a V(t,x) - f(t,x,a)] = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n,$$

si le supremum ci-dessus en a est fini. On réécrit souvent cette EDP sous la forme :

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + H(t,x,V(t,x), D_x V(t,x), D_x^2 V(t,x)) = 0, \qquad \forall (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \tag{1.16}$$

où pour $(t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$H(t,x,p,M) = \sup_{a\in\mathbb{U}}[-b(x,a).p - \frac{1}{2}tr(\sigma\sigma'(x,a)M) - f(t,x,a)]. \tag{1.17}$$

Cette fonction H est appelée le hamiltonien du problème de contrôle considéré. A cette équation aux dérivées partielles, il faut ajouter la condition terminale

$$V(T,x) = g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.18}$$

1.4 Théorème de vérification

L'étape la plus importante dans la programmation dynamique consiste à montrer, étant donnée une solution régulière à l'équation d'HJB, sous des conditions suffisantes, coïncide avec la fonction valeur. Ce résultat est appelé théorème de vérification et permet aussi d'obtenir un contrôle optimal. Il repose essentiellement sur la formule d'Itô (Yon00).

Théorème I.3 *Soit* $w \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n) \cap C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *à croissance quadratique, i.e., il existe une constante* C *telle que :*

$$|w(t,x)| \leq C(1+|x|^2), \quad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n. \tag{1.19}$$

(i) Supposons que :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + \sup_{a\in\mathbb{U}}[-\mathcal{L}^a w(t,x) - f(t,x,a)] \leq 0, \qquad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \tag{1.20}$$

$$w(T,x) \leq g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.21}$$

Alors $w \leq v$ *sur* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

(ii) De plus supposons que $w(T.) = g$, *et pour tout* $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$, *il existe* $\hat{\alpha}(t,x)$ *mesurable à valeurs dans* $\mathbb{U}$ *tel que :*

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)+\sup_{a\in\mathbb{U}}[-\mathcal{L}^a w(t,x)-f(t,x,a)] = -\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)-\mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)}w(t,x)-f(t,x,\hat{\alpha}(t,x)) = 0. \tag{1.22}$$

l'EDS :

$$dX_s = b(X_s,\hat{\alpha}(s,X_s))ds + \sigma(X_s,\hat{\alpha}(s,X_s))dB_s, \tag{1.23}$$

admette une solution, notée $\hat{X}_s^{t,x}$, étant donnée une condition initiale $X_t = x$, et $\{\hat{\alpha}(s, \hat{X}_s^{t,x}), t \leq s \leq T\} \in \mathcal{U}$. Alors

$$w = v \qquad \textit{sur } [0, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1.24}$$

et $\hat{\alpha}$ est un contrôle optimal markovien.

1.5 Formule de Feynman-Kac

On considère l'EDS avec des coefficients déterministes $b(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t. \tag{1.25}$$

Pour tout $t \in [0, T]$, on introduit l'opérateur (déterministe) différentiel du second-ordre :

$$(\mathcal{L}_t\varphi)(x) = b(t, x).D_x\varphi(x) + \frac{1}{2}tr(\sigma(t, x)\sigma^{'}(t, x)D_x^2\varphi(x)), \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.26}$$

$\mathcal{L}_t$ est appelé générateur infinitésimal de la diffusion (1.25). Si X est une solution de l'EDS (1.25), $v(t, x)$ une fonction (réelle) de classe $C^{1,2}$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $r(t, x)$ une fonction continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, on a d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} M_t \quad : \quad &= e^{-\int_0^t r(s,X_s)ds}v(t, X_t) + \\ &\quad - \int_0^t e^{-\int_0^s r(u,X_u)du}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}_s v - rv\right)(s, X_s)ds \\ &= v(0, X_0) + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u,X_u)du} D_x v(s, X_s)^{'}\sigma(s, X_s)dB_s. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Le processus M est donc une martingale locale continue.

On considère le problème d'équation aux dérivées partielles EDP linéaire parabolique de Cauchy :

$$\begin{aligned} rv - \frac{\partial v}{\partial t} - \mathcal{L}_t v &= f, \quad \text{sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n, && (1.28)\\ v(T,.) &= g, \quad \text{sur } \mathbb{R}^n. && (1.29) \end{aligned}$$

où f (resp. g) est une fonction continue de sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ (resp. sur $\mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{R}$. On suppose aussi que la fonction r est positive. On donne ici une version simple du théorème de représentation de Feynman-Kac.

Théorème I.4 (Représentation de Feynman-Kac) *Soit v une fonction $C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n) \cap C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ à dérivée en x bornée et solution du problème de Cauchy* (1.28)-(1.29). *Alors v admet la représentation*

$$v(t,x) = E\left[\int_t^T e^{-\int_t^s r(u,X_u^{t,x})du} f(s, X_s^{t,x})ds + e^{-\int_t^T r(u,X_u^{t,x})du} g(X_T^{t,x})\right], \qquad (1.30)$$

pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

L'application du théorème précédent requiert l'existence d'une solution régulière v au problème de Cauchy (1.28)-(1.29). Ce genre de résultats s'obtient typiquement sous une hypothèse d'uniforme ellipticité de l'opérateur $\mathcal{L}_t$:

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ y^{'}\sigma\sigma^{'}(t,x)y \geq \epsilon|y|^2, \qquad (1.31)$$

et des hypothèses de bornitude sur b, σ et de croissance polynomiale sur f et g. Il existe aussi d'autres types de conditions suffisantes qui omettent l'hypothèse d'uniforme ellipticité (1.31) mais imposent des conditions de régularité plus fortes sur les coefficients (voir Krylov (Kry80) p. 118).

Dans le cas général où il n'y a pas forcément de solution régulière au problème de Cauchy (1.28)-(1.29), on peut donner un sens à cette EDP avec un concept de solution faible appelée solution de viscosité.

Remarque I.5 *Lorsque l'ensemble des contrôles est réduit à un singleton* $\{a_0\}$*, c'est à dire qu'il n'y pas de contrôle sur l'état du système, l'équation HJB se réduit au problème d'EDP linéaire de Cauchy et donc le théorème de vérification se réduit à la formule de Feynman-Kac.*

II. *Solutions de viscosité*

La méthode de la programmation dynamique suppose a priori que la fonction valeur soit régulière, ce qui n'est pas toujours le cas même dans les cas très simples. Pour surmonter cette difficulté, Crandall et Lions (Lio83) ont introduit dans les années 80 la notion de solution de viscosité pour les équations du premier ordre. Cette théorie a été ensuite généralisée aux équations du second ordre, voir (ePL92) et (FS06). Ce concept fournit un moyen très puissant pour étudier en toute généralité les problèmes de contrôle stochastique et permet de donner une formulation rigoureuse à l'équation d'HJB pour des fonctions supposées seulement localement bornées. En combinant avec des résultats de comparaison pour les solutions de viscosité, on obtient ainsi une caractérisation de la fonction valeur comme l'unique solution de viscosité de l'équation de la programmation dynamique associée.

2.1 Rappel d'analyse convexe

Etant donnée une fonction u de Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on définit les fonctions u_* et $u^* : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$u_*(x) = \{\liminf_{y \to x} u(y) := \liminf_{\epsilon \to 0} f(y) : y \in \Omega, \quad |y - x| \leq \epsilon\}, \tag{2.1}$$

$$u^*(x) = \{\limsup_{y \to x} u(y) := \limsup_{\epsilon \to 0} u(y) : y \in \Omega, \quad |y - x| \leq \epsilon\}. \tag{2.2}$$

Définition II.1 (Fonctions semi-continues) *Soit u une fonction de Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que u est semi-continue inférieurement (s.c.i) si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(i) $\forall x \in \Omega,\ u(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf u(x_n)$, *pour toute suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *convergent vers* x.

(iii) $\forall x \in \Omega,\ u(x) = u_*(x)$.

(iii) $\{x \in \Omega : u(x) \leq \lambda\}$ *est fermé pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

On dit que f est semi-continue supérieurement (s.c.s) si $-f$ est semi-continue inférieurement.

Notons que u est continue sur Ω si et seulement si u est semi-continue inférieurement et supérieurement. La fonction u_* est appelée enveloppe semi-continue inférieure de u : c'est la plus grande fonction s.c.i. minorant u.

La fonction u^* est appelée enveloppe semi-continue supérieure de u : c'est la plus petite fonction s.c.s. majorant u.

Théorème II.2 *Une fonction s.c.i. (resp. s.c.s.) attient son minimum (resp. maximum) sur tout compact.*

2.2 Présentation et définitions

On s'intéresse ici à une équation elliptique, c'est-à-dire à une équation de la forme

$$H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad x \in \Omega \tag{2.3}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ donné et $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S_n \to \mathbb{R}$. Dans toute la suite on supposera que H est "elliptique", c'est-à-dire que H est décroissant par rapport à la dernière variable :

$$H(x, s, p, X) \geq H(x, s, p, Y) \quad \text{si } X \leq Y \qquad \forall (x, s, p, X, Y) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S_n \times S_n \tag{2.4}$$

(L'inégalité $X \leq Y$ étant comprise au sens des matrices symétriques).

Définition II.3 (Solution de viscosité-définition par les fonctions-test) *On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est sous-solution de viscosité de* (2.3) *si u est semi-*

continue supérieurement (s.c.s) dans Ω et si, pour toute fonction-test $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $u - \phi$ a un maximum local en un point $x_0 \in \Omega$, on a

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0. \tag{2.5}$$

Symétriquement, on dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est sursolution de viscosité de (2.3) *si u est semi-continue inférieurement (s.c.i) dans Ω et si, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $u - \phi$ a un minimum local en un point $x_0 \in \Omega$, on a*

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0. \tag{2.6}$$

Enfin, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est solution de viscosité[1] de (2.3) *si u est sous- et sursolution de* (2.3).

2.3 Solutions de viscosité et dérivées généralisées

Nous allons donner dans ce paragraphe une définition équivalente de la notion de solution de viscosité qui s'appuie sur la notion de sur- et sous-différentiels d'ordre 2 d'une fonction. L'intérêt de cette définition équivalente est très limité pour les équations du premier ordre mais elle joue au contraire un rôle fondamental pour les équations du deuxième ordre.

Définition II.4 (Sous-différentiel d'ordre 2**)** *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (s.c.i). Le sous-différentiel $D^{2,-}u(x_0)$ d'ordre 2 de u en $x_0 \in \Omega$ est l'ensemble des couples $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times S_n$ tels que, pour tout $x \in \Omega$,*

$$u(x) \geq u(x_0) + < p, x - x_0 > + \frac{1}{2} < X(x - x_0), x - x_0 > + o(|x - x_0|^2). \tag{2.7}$$

Remarque II.5 *i) Trouver un sous-différentiel d'ordre 2 consiste donc à mettre, à une erreur d'ordre supérieur près, une parabole sous le graphe de u, parabole qui colle*

[1] *Soulignons que, par définition, une solution est toujours une fonction continue.*

au graphe en x_0.
ii) De la même manière, pour une fonction (s.c.s), on définit le surdifférentiel d'ordre 2, noté $D^{2,+}u(x_0)$, en inversant l'inégalité.
iii) Si u est régulière alors $D^{2,-}u(x_0) = \{(\nabla u(x_0), X), X \in S_n$ telle que $X \leq D^2u(x_0)\}$.
On a alors une nouvelle définition des solutions de viscosité, équivalente à la précédente.

Définition II.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$,*
i) On dit que u est une sous-solution de viscosité de (2.3) si u est (s.c.s) et si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $(p, X) \in D^{2,+}u(x_0)$, on a $H(x_0, u(x_0), p, X) \leq 0$.
ii) De même, u est une sursolution de viscosité de (2.3) si u est (s.c.i) et si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$, on a $H(x_0, u(x_0), p, X) \geq 0$.
iii) u est une solution de viscosité de (2.3) si elle est une sur et sous-solution de viscosité de (2.3).

2.4 Existence d'une solution par la méthode de Perron

Nous expliquons dans cette partie comment construire une solution de viscosité d'une équation lorsque l'on en connait une sous- et une sursolution et que l'on sait que l'équation possède un “principe de comparaison”. Cette méthode est connue sous le nom de méthode de Perron.

En fait, le procédé très général décrit ici permet, pratiquement sans hypothèse, de construire des solutions “très faible” : des solutions dites discontinues.

On s'intéresse à nouveau à l'équation

$$H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{2.8}$$

où, dans toute cette partie, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S_n \to \mathbb{R}$ est supposée elliptique et continue.

Définition II.7 *On dit qu'une fonction* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une solution de viscosité discontinue de* (2.8) *si* u^* *est une sous-solution de* (2.8) *tandis que* u_* *est sursolution de cette équation.*

Remarque II.8 *Il ne manque donc à une solution discontinue que la continuité pour être une solution continue.*

2.4.1 La méthode de Perron. Nous décrivons maintenant la méthode de Perron bien plus que le résultat-qui est assez formel-, il convient de retenir de cette partie la technique de construction d'une solution.

Théorème II.9 *On suppose que* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une sous-solution de* (2.8) *tandis que* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une sursolution de cette équation. On suppose de plus* $u \leq v$ *dans* Ω*. Alors il existe une solution de viscosité discontinue* $w : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que* $u \leq w \leq v$*.*

2.4.2 Existence d'une solution de viscosité continue. Afin de récupérer la continuité de la solution, nous allons supposer que l'équation vérifie un principe de comparaison :

Définition II.10 *On dit que l'équation* (2.8) *vérifie un principe de comparaison dans* Ω *si, pour toute sous-solution* u *et pour toute sursolution* v *de* (2.8)*, si* $u \leq v$ *dans* $\partial\Omega$*, alors* $u \leq v$ *dans* Ω*.*

Remarque II.11 *Dans toute la suite, l'inégalité* $u \leq v$ *dans* $\partial\Omega$ *signifie par abus de notation :*

$$\limsup_{x' \to x, x' \in \Omega} u(x') \leq \liminf_{x' \to x, x' \in \Omega} v(x') \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Nous étudions maintenant le problème de Dirichlet pour l'équation (2.8). Soit $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Corollaire II.12 *Supposons que l'équation* (2.8) *vérifie un principe de comparaison dans* Ω*. Supposons également qu'il existe deux applications* u *et* v *telles que*

- *u est une sous-solution de* (2.8) *et*

$$\lim_{x' \to x, x' \in \Omega} u(x') = g(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

- *v est une sursolution de* (2.8) *et*

$$\lim_{x' \to x, x' \in \Omega} v(x') = g(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

Alors il existe une unique solution de viscosité w *de l'équation* (2.8) *telle que* $w = g$ *dans* $\partial\Omega$*.*

Autrement dit, le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 & x \in \Omega \\ u = g & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

possède une unique solution de viscosité.

Preuve. Par la méthode de Perron, on construit une solution discontinue w telle que $u \leq w \leq v$. Montrons d'abord que $w_* = w^* = g$ sur le bord de Ω. En effet, pour tout $x \in \partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{x' \to x, x' \in \Omega} u(x') \leq \lim \inf_{x' \to x, x' \in \Omega} w(x') \leq w_*(x') \leq w^*(x) \\ &\leq \lim \sup_{x' \to x, x' \in \Omega} w(x') \leq \lim_{x' \to x, x' \in \Omega} v(x') = g(x). \end{aligned}$$

D'ou $w_* = w^* = g$ sur $\partial\Omega$.

Comme w_* est une sursolution tandis que w^* est une sous-solution, et comme $w_* = w^*$ sur $\partial\Omega$, le principe de comparaison affirme que $w_* \geq w^*$..L'inégalité inverse étant toujours vraie, cela prouve que $w_* = w^*$, et donc que w est en fait une solution de viscosité continue.

L'unicité est une conséquence directe du principe de comparaison car, si w_1 et w_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet, alors $w_1 = w_2$ sur le bord de Ω, et comme w_1 est une sous-solution et w_2 est une sursolution, on a $w_1 \leq w_2$. L'inégalité inverse est obtenue en intervertissant les rôles de w_1 et w_2. ■

2.5 Principe de comparaison

On dit que l'on a un principe de comparaison fort (pour les solutions discontinues) pour l'EDP (2.3) dans le cas d'un ouvert Ω borné si l'énoncé suivant est vrai :

Si u est une sous-solution de viscosité de (2.3) et v est une sursolution de viscosité de (2.3) tel que $u^* \leq v_*$ sur $\partial\Omega$ alors

$$u^* \leq v_* \qquad \text{sur } \overline{\Omega}. \tag{2.10}$$

Remarque II.13 *Le principe de comparaison se formule aussi de manière équivalente : Si u est une sous-solution (s.c.s) de viscosité de* (2.3) *et v est une sursolution (s.c.i) de viscosité de* (2.3) *tel que $u^* \leq v_*$ sur $\partial\Omega$ alors*

$$u \leq v \qquad \textit{sur } \overline{\Omega}. \tag{2.11}$$

On donne ci-dessous quelques exemples de fonctions H pour lesquels il y a un principe de comparaison fort. Des résultats généraux avec leurs preuves peuvent être trouvées dans Crandall, Ishii et P.L.Lions (ePL92) ou (Bar95).

On considère d'abord le cas où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

1. $H(x, s, p, X) = \beta r + F(x, p) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma'(x)X)$ avec $\beta > 0$, $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ Lipschitzienne et $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse suivante :

(A1) $|F(x,p) - F(y,p)| \leq m(|x-y|(1+|p|))$, où $m(z)$ tend vers zéro quand z tend vers zéro.

2. $H(x,s,p,X) = F(x,p)$ avec $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant **(A1)** et les hypothèses supplémentaires :

   (A2) $F(x,p)$ est convexe en p, pour tout $x \in \Omega$

   (A3) Il existe une fonction $\varphi \in C^1(\Omega)$, continue sur $\overline{\Omega}$, et $\delta > 0$ telle que $F(x, D\varphi(x)) \leq -\delta$ sur Ω.

III. Problèmes d'investissement optimal

Dans ce chapitre, nous exposons la structure de base d'un problème de contrôle optimale issu des mathématiques financières. De façon générale, un problème de contrôle se formule selon les caractéristiques suivantes :

• **Etat du système** : On considère un système dynamique caractérisé par son état à tout instant. Le temps peut être discret ou continu. Nous considérons ici qu'il varie de façon continue et dans des conditions d'incertitude. L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description 'exhaustive' du système. Les variables sont supposées en nombre fini à valeurs réelles. On notera $X_t(\omega)$ l'état du système à l'instant t dans un scénario du monde $\omega \in \Omega$ espace mesurable muni d'une probabilité P.

Une fois défini l'état, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \to X_t$ décrit l'évolution du système. Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste.

• **Contrôle** : La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus $(u_t)_t$ dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que u est adapté par rapport une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle $\mathbb{U}$.

•**Critère de coût/performance** : L'objectif est de minimiser (ou maximiser) sur les contrôles une fonctionnelle $J(X, u)$. Dans cette thèse, on considérera des fonctionnelles de la forme

$$E\left[\int_0^T f(X_t, \omega, u_t)dt + g(X_T, \omega)\right], \quad \text{en horizon fini} \tag{3.1}$$

La fonction f est la fonction de coût intégral, g est le coût final. On définit alors la fonction valeur

$$v = \inf_u J. \tag{3.2}$$

Les objectifs seront de déterminer d'une part la fonction valeur, et d'autre part les infima pour ces critères et les contrôles optimaux, s'ils existent, qui les réalisent. Deux modélisations sont couramment utilisées : le critère d'espérance d'utilité et le critère moyenne-variance. Dans le premier critère reposant sur une théorie du choix en univers incertain, l'individu compare des revenus aléatoires dont il connait les lois de probabilité. Sous certaines conditions sur ses préférences, **Von Neumann et Morgenstern** montrent qu'elles peuvent se représenter par l'espérance d'une fonction, dite d'utilité. En notant U la fonction d'utilité de l'individu, cela signifie qu'un revenu aléatoire X sera préféré à un revenu aléatoire $X^{'}$si $E[U(X)] \geq E[U(X^{'})]$. Cette fonction d'utilité est croissante, ce qui exprime l'amour de la richesse de l'individu. Elle est aussi supposée usuellement concave pour formaliser l'aversion pour le risque de l'individu. En effet, si l'individu n'aime pas le risque, à un revenu aléatoire X, il préfère obtenir avec certitude l'espérance $E[X]$ de ce revenu. Autrement dit, sa fonction d'utilité U vérifie

$$U(E[X]) \geq E[U(X)]. \tag{3.3}$$

En particulier, si le revenu X vaut x avec probabilité λ et $x^{'}$ avec probabilité $1-\lambda$, $\lambda \in [0,1]$, on a

$$U(\lambda x + (1-\lambda)x^{'}) \geq \lambda U(x) + (1-\lambda)U(x^{'}), \tag{3.4}$$

ce qui traduit la propriété de concavité de U. Dans notre contexte, ce critère économique consiste à maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse terminale à un horizon fini

$$\sup_u E[U(X_T)], \tag{3.5}$$

où $U(x)$ est une fonction croissante et concave de $\mathbb{R}$ dans $[-\infty, +\infty[$.

Le critère moyenne-variance, initié par Markowitz (Mar52), repose sur l'hypothèse que les préférences de l'individu ne dépendent que de la moyenne et de la variance de ses revenus aléatoires. Pour exprimer le fait que l'individu aime la richesse et a une aversion au risque, le critère moyenne-variance s'intéressera aux portefeuilles MV-efficaces, c'est à dire minimisant la variance à espérance donnée. Dans notre contexte, le problème d'optimisation s'écrit :

$$\inf_u \{Var(X_T) : E(X_T) = m\}, \tag{3.6}$$

qu'on peut ramener à la résolution d'un problème de la forme (3.5) pour une fonction d'utilité de la forme :

$$U(x) = \lambda - x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

3.1 *Classe des modèles à volatilité constantes*

On considère un marché financier avec un actif sans risque de processus de prix S_t^0 strictement positif qui représente le compte d'épargne vérifiant, pour $0 \leq t \leq s \leq T$,

$$\begin{cases} dS_s^0 = rS_s^0 ds, \\ S_t^0 = C > 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

avec $r > 0$ représentant le taux d'intérêt. L'actif risqué représente une action, son prix S_s, pour $0 \leq t \leq s \leq T$ est modélisé par la diffusion solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dS_s = \mu S_s ds + \sigma S_s dB_s, \\ S_t = S > 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Les paramètres de marché μ et σ sont respectivement le taux moyen de retour et la volatilité, il est supposé que $\mu - r > 0$ et $\sigma > 0$. Le processus stochastique B_s est un

Brownien standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit un investisseur qui investit à toute date $s \in [t, T]$ dans ces actifs, soit X_s sa richesse à la date s composé de a_s unités d'actif risqué et b_s unités d'actif sans risque,

$$X_s = a_s S_s + b_s e^{rs}. \tag{3.10}$$

Soit u_s la fraction de sa richesse investie dans les actifs risqué et $1 - u_s$ la fraction de sa richesse investie dans les actifs sans risque, on a $a_s = \frac{u_s X_s}{S_s}$ et $b_s = \frac{(1-u_s)X_s}{e^{rs}}$; alors son processus de richesse autofinançant évolue selon

$$dX_s = \frac{(1 - u_s)X_s}{e^{rs}} d(e^{rs}) + \frac{u_s X_s}{S_s} dS_s. \tag{3.11}$$

En utilisant les deux équations de prix (3.8, 3.9), on obtient

$$dX_s = X_s \left[(r + (\mu - r)u_s)ds + \sigma u_s dB_s \right]. \tag{3.12}$$

Le processus de la richesse doit satisfaire la contrainte

$$X_s \geq 0, \qquad t \leq s \leq T. \tag{3.13}$$

Remarque III.1 *Lorsque $u_s > 1$, le terme $(1 - u_s)X_s$ dans (3.11) est négatif. Ce terme représente l'argent emprunté par l'investisseur ; et il a été supposé implicitement que l'argent est emprunté au même taux r.*

Le processus de contrôle $(u_s)_{t \leq s \leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{U} =]-\infty, +\infty[$ est dit admissible s'il est $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable, avec $\mathcal{F}_s = \sigma(B_v;\ t \leq v \leq s)$. On suppose que

$$E \int_t^T u_s^2 dt < +\infty, \tag{3.14}$$

et la contrainte (3.13) est satisfaite. On note par $\mathcal{U}$ la classe de tous les contrôles admissibles.

Pour $u \in \mathcal{U}$, on définit la fonction de coût

$$V(t,x;u) = E\left[\frac{(X_T^u)^p}{p} \mid X_t^u = x\right]. \tag{3.15}$$

Le but de l'investisseur est de choisir la stratégie qui maximise la fonction de coût à un temps terminal fini donné T. Nous définissons

$$V(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} V(t,x;u). \tag{3.16}$$

L'argument d'optimalité de la programmation dynamique suggère que $V(t,x)$ satisfait l'HJB suivante

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sup_u \left\{\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (r + (\mu - r)u)x\frac{\partial V}{\partial x}\right\} = 0, \tag{3.17}$$

avec la condition terminale suivante

$$V(T,x) = \frac{x^p}{p}. \tag{3.18}$$

On peut résoudre explicitement ce problème. En effet, on va chercher une solution de la forme

$$V(t,x) = \frac{x^p}{p}c(t).$$

On obtient alors

$$\frac{\partial c}{\partial t} + cp\sup_u \left\{\frac{1}{2}\sigma^2 u^2(p-1) + r + (\mu - r)u\right\} = 0, \tag{3.19}$$

avec $c(T) = 1$. Le supremum est atteint en

$$u_t^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-p)}. \tag{3.20}$$

Ainsi, la fonction valeur est donnée par

$$V(t,x) = V(t,x,u^*) = \frac{x^p}{p} \exp\left[(T-t)p\left(r + \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2(1-p)}\right)\right]. \tag{3.21}$$

Le résultat suivant a été prouvé dans Karatzas et al.(KLSS86).

Théorème III.2 *La fonction valeur $V \in C^{1,2}([0,T],]0,+\infty[)$ est l'unique solution croissante et concave de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \sup_u \left\{\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (r + (\mu - r)u)x\frac{\partial V}{\partial x}\right\} = 0, \\ V(T,x) = \frac{x^p}{p} \quad et \quad V(t,0) = 0, \qquad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.22}$$

Le contrôle optimal u_s^*, $t \leq s \leq T$ est donné sous la forme feedback $u_s^* = \widehat{u}(s, X_s^*)$ où $\widehat{u} : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et

$$\widehat{u}(t,x) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-p)}, \tag{3.23}$$

et X_s^* est la solution de(3.12) avec le contrôle u_s^*.

3.2 Classe des modèles à volatilité stochastique

On considère un modèle d'investissement optimal à volatilité stochastique. Le prix d'actif sans risque satisfait

$$\begin{cases} dS_s^0 = rS_s^0 ds, \\ S_0^0 = C \geq 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

avec $r > 0$. Le prix d'actif risqué S_s est modélisé par la diffusion qui résoud l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dS_s = \mu S_s ds + f(Y_s) S_s dB_s^x, \\ S_0 = S \geq 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

avec $\mu - r > 0$, la volatilité $f(.)$ est conduit par un autre processus stochastique Y_s donné par

$$\begin{cases} dY_s = -\alpha Y_s dt + \beta dB_s^y, \\ Y_0 = y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Les processus B_s^x et B_s^y sont deux mouvements Browniens indépendants définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Hypothèse i) La fonction de la volatilité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ satisfait la condition globale de Lipschitz et la condition de croissance polynomiale, i.e., pour tout $y, \overline{y} \in \mathbb{R}$ et K une constante positive

$$|f(y) - f(\overline{y})| \leq K \, |y - \overline{y}| \, , \tag{3.27}$$

$$f(y) \leq K(1 + y^2). \tag{3.28}$$

ii) Uniformément en $y \in \mathbb{R}$, la fonction $f(y)$ satisfait, pour certaine constante ℓ,

$$f(y) \geq \ell > 0. \tag{3.29}$$

Les conditions (3.27) et (3.28) sont standards pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.25), la condition (3.29) est nécessaire pour démontrer la croissance de la fonction valeur.

Soit un investisseur qui investit à toute date $s \in [t, T]$, sa richesse à la date s est donnée par X_s. Soit u_s la fraction de sa richesse investie dans l'actif risqué.et $1 - u_s$ la fraction de sa richesse investie dans l'actif sans risque. Alors le processus de la richesse évolue d'après le système suivant

$$\begin{cases} dX_s = X_s \left[(r + (\mu - r)u_s)ds + f(Y_s)u_s dB_s^x \right], \\ X_t = x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases} \tag{3.30}$$

Le processus X_s doit satisfaire, pour $s \in [t, T] : X_s \geq 0$.

Le contrôle $(u_s)_{t\leq s\leq T}$ est dite admissible s'il est $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable, avec $\mathcal{F}_s = \{\sigma(B^x_v, B^y_v); t \leq v \leq s\}$ et satisfait la condition d'intégrabilité

$$E\int_t^T f^2(Y_s)u_s^2 ds < +\infty. \tag{3.31}$$

On note par $\mathcal{U}$ la classe de tous les contrôles admissibles.

Le problème d'investissement optimal consiste à choisir une stratégie qui maximise la fonction de coût à un temps terminal fini donné T. En particulier le problème peut être décrit en terme de la fonction valeur par

$$V(t,x,y) = \sup_{u\in\mathcal{U}} V(t,x,y;u), \tag{3.32}$$

où

$$V(t,x,y;u) = E\left(\frac{(X_T^u)^p}{p} \mid X_t = x, Y_t = y\right). \tag{3.33}$$

Par le principe de Bellman $V(t,x,y)$ satisfait l'EDP non linéaire de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial V}{\partial t} + \sup_u \left\{\tfrac{1}{2}f^2(y)u^2x^2\tfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (r+(\mu-r)u)x\tfrac{\partial V}{\partial x}\right\} + \\ +\tfrac{1}{2}\beta^2\tfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \alpha y\tfrac{\partial V}{\partial y} = 0,\end{gathered} \tag{3.34}$$

avec la condition terminale

$$V(T,x,y) = \frac{x^p}{p}. \tag{3.35}$$

Cherchons une solution de la forme

$$V(t,x) = \frac{x^p}{p}c(t,y). \tag{3.36}$$

Donc

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial c}{\partial t} + pc\sup_u \left\{-\tfrac{1}{2}(p-1)f^2(y)u^2 + (r+(\mu-r)u)\right\} + \\ +\tfrac{1}{2}\beta^2\tfrac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \alpha y\tfrac{\partial c}{\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{3.37}$$

avec $c(T, y) = 1$. Le supremum est atteint en

$$u_t^* = \frac{\mu - r}{f^2(y)(1-p)}. \tag{3.38}$$

Pour la preuve du résultat suivant, voir (Zar01).

Proposition III.3 *La fonction valeur V est donnée par*

$$V(t, x, y) = \frac{x^p}{p} c(t, y),$$

où $c: \ [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est l'unique solution de viscosité du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \alpha y \frac{\partial c}{\partial y} + pc\left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2f^2(y)(1-p)}\right) = 0, \\ c(T, y) = 1. \end{cases} \tag{3.39}$$

IV. ***Analyse asymptotique***

4.1 Equation de Poisson

Considérons l'opérateur donné par

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{4.1}$$

Supposons que l'opérateur $\mathcal{L}$ est elliptique, i.e.,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) \lambda_i \lambda_j > 0, \tag{4.2}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ avec $\lambda \neq 0$.

Commençons d'abord par les lemmes suivants qui ont été prouvé dans (Kha04).

Corollaire IV.1 *. Soit $\mathcal{L}^*$ l'opérateur adjoint de $\mathcal{L}$. Alors le problème suivant*

$$\mathcal{L}^* \phi = 0, \qquad \int \phi(y) dy = 1, \tag{4.3}$$

possède une solution unique qui est la densité stationnaire du processus de la diffusion.

Corollaire IV.2 *Considérons l'équation de Poisson*

$$\mathcal{L}\psi = \zeta(y). \tag{4.4}$$

L'équation (4.4) possède une solution unique si et seulement si

$$\int \zeta(y)\phi(y)dy = 0.$$

Toute solution de (4.4) peut s'écrire sous la forme

$$\psi = \psi_0 + C, \tag{4.5}$$

où ψ_0 est la solution unique du problème

$$\mathcal{L}\psi = \zeta(y), \qquad \int \psi(y)\phi(y)dy = 0, \tag{4.6}$$

et C est une constante arbitraire.

Une propriété importante de la solution de l'équation (4.4) est la suivante : si on a pour une certaine constante C_1 et un nombre entier $n \neq 0$

$$\langle \zeta \rangle = 0 \quad \text{et} \quad |\zeta(y)| \leq C_1(1 + |y|^n),$$

alors on a

$$|\psi(y)| \leq C_2(1 + |y|^n), \tag{4.7}$$

pour une autre constante C_2

Si $n = 0$, on a

$$|\psi(y)| \leq C_2(1 + \log(1 + |y|)). \tag{4.8}$$

Pour plus de détails voir (FPS00).

4.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On se propose ici d'étudier le processus d'Ornstein-Uhlenbeck Y de dynamique

$$\begin{cases} dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dB_t, \\ Y_0 = y. \end{cases} \tag{4.9}$$

On a une expression explicite pour Y_t :

$$Y_t = m + (y - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s, \tag{4.10}$$

qui prouve que Y_t suit la loi gaussienne de moyenne $m + (y - m)e^{-\alpha t}$ et de variance $\nu^2(1 - e^{-2\alpha t})$, où $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$; Y_t converge en loi lorsque $t \to +\infty$ vers la loi gaussienne de moyenne m et de variance ν^2.

Cette loi limite est aussi la loi stationnaire du processus Y : si Y_0 suit la loi $\mathcal{N}(m,\ \nu^2)$, alors, à toute date $t \geq 0$, la variable aléatoire Y_t suit la loi $\mathcal{N}(m,\ \nu^2)$. Sa densité ϕ est donnée par

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu} \exp\left(-\frac{(u - m)^2}{2\nu^2}\right), \tag{4.11}$$

et, d'après le Corollaire IV.1, c'est l'unique solution de l'équation

$$\mathcal{L}^*_{OU}\phi = 0, \tag{4.12}$$

où

$$\mathcal{L}^*_{OU} = -\alpha \frac{\partial}{\partial y}((m - y).) + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{4.13}$$

est l'adjoint de l'opérateur

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m - y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.14}$$

qui est le générateur infinitésimal de la diffusion Y.

4.2.1 Propriété de décorrélation, théorème ergodique. L'inverse ϵ de l'intensité α de la force de rappel s'interprète aussi comme le temps caractéristique de décorrélation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, puisque si $s \leq t$

$$cov(Y_s, Y_t) = \nu^2 \left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)} \right). \tag{4.15}$$

Par conséquent, si s et t tendent vers $+\infty$ de sorte que $\triangle = |t-s|$ reste constant, la covariance limite de Y_s et Y_t vaut $\nu^2 e^{-\alpha\triangle}$. Notons que c'est exactement la covariance de Y_s et Y_t sous la loi stationnaire. A la limite, lorsque ce temps typique de déccorélation ϵ est infiniment petit, i.e.α est infiniment grand, les valeurs Y_s et Y_t, même pour des temps voisin s et t, sont indépendantes (leur covariance est nulle et le processus Y est gaussien). C'est pour cette raison qu'on va utiliser des théorèmes ergodiques de type loi forte de grands nombres. Plus précisément, pour toute fonction g intégrable par rapport à la mesure stationnaire $\mathcal{N}(m,\ \nu^2)$, on a

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{T-t} \int_t^T g(Y_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\phi(y) dy. \tag{4.16}$$

En pratique, l'approximation

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T g(Y_s) ds \approx \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\phi(y) dy, \tag{4.17}$$

ne sera valable que si $\alpha \gg \frac{1}{T-t}$.

Dans le contexte des marchés financiers, cela signifie que nous pourrons faire cette approximation que si nous sommes suffisamment loin de l'échéance T.

4.3 Fonction valeur corrigée

Reprenons la classe du modèle à volatilité stochastique. On se place ici sous l'hypothèse $\epsilon \ll T-t$. Sous cette hypothèse, Y_t atteint sa loi limite $\mathcal{N}(m,\ \nu^2)$ en temps fini. On se placera donc dans l'asymptotique

$$\epsilon \to 0, \qquad \nu^2 = cte.$$

Comme $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$, cela signifie que $\beta = v\sqrt{2\alpha} = \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}$ tend vers $+\infty$. Alors en faisant apparaître le paramètre infiniment petit ϵ, on peut traiter les processus X_s et Y_s définis respectivement dans (3.30) et (3.26) comme "variable lente" et "variable rapide". Nous considérons un problème de contrôle stochastique singulièrement perturbé sur un intervalle de temps fini $[0, T]$ pour un système décrit par les variables $(X_s^\epsilon, Y_s^\epsilon)$, où le processus de la richesse X_s^ϵ satisfait

$$dX_s^\epsilon = X_s^\epsilon \left[(r + (\mu - r)u_s)ds + f(Y_s^\epsilon)u_s dB_s^x \right], \quad X_0^\epsilon = x, \tag{4.18}$$

et

$$\epsilon dY_s^\epsilon = -Y_s^\epsilon ds + \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} dB_s^y, \quad Y_0^\epsilon = y. \tag{4.19}$$

La fonction valeur est définie par

$$V^\epsilon(t, x, y) = \sup_{u \in \mathcal{U}} V^\epsilon(t, x, y; u), \tag{4.20}$$

où

$$V^\epsilon(t, x, y; u) = E\left(\frac{(X_T^\epsilon)^p}{p} \mid X_t^\epsilon = x, Y_t^\epsilon = y \right). \tag{4.21}$$

La distribution de Y_s^ϵ est la distribution gaussienne $\mathcal{N}(0, \frac{\beta^2}{2\alpha})$. L'opérateur $\alpha\mathcal{L}_0$ est le générateur infinitésimal du processus Ornestrin-Uhlenbeck Y_s^ϵ avec $\mathcal{L}_0$ défini par

$$\mathcal{L}_0 = v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.22}$$

Le processus Y_s^ϵ a une distribution invariante $\mathcal{N}(0, v^2)$ qui admet la densité $\phi(y)$ obtenu en résolvant l'équation adjointe

$$\mathcal{L}_0^* \phi = 0, \tag{4.23}$$

où $\mathcal{L}_0^*$ est l'adjoint de $\mathcal{L}_0$. La densité est donnée explicitement par

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2v^2}\right).$$

Notons par $\langle . \rangle$ la moyennisation par rapport à cette distribution invariante

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\phi(y)dy. \tag{4.24}$$

Soit g une fonction bornée, d'après le théorème ergodique, on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(Y_s^\epsilon)ds = \langle g \rangle . \tag{4.25}$$

Notons que la volatilité possède la propriété de retour rapide à la moyenne, la constante $\epsilon > 0$ est petite pour représenter le retour rapide à la moyenne. Maintenant $1/\epsilon$ est la mesure de la vitesse locale du processus et nous nous intéressons aux développements asymptotiques lorsque $\epsilon \downarrow 0$. L'équation (3.39) devient

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 c^\epsilon + \mathcal{L}_2 c^\epsilon = 0, \\ c^\epsilon(T, y) = 1, \end{cases} \tag{4.26}$$

où

$$\mathcal{L}_2 c^\epsilon = \frac{\partial c^\epsilon}{\partial t} + p\left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2f^2(y)(1-p)}\right)c^\epsilon. \tag{4.27}$$

On se place dans les conditions où, pour tout $\epsilon > 0$, l'EDP (4.26) a une unique solution. On va voir que cette solution c^ϵa une limite quand ϵ tend vers 0 et on va s'intéresser à la correction d'ordre 1 : $c^\epsilon \approx c_0 + \sqrt{\epsilon} c_1$. Pour ce faire, on suppose l'existence d'un développement en série de la forme

$$c^{\epsilon} = c_0 + \sqrt{\epsilon}c_1 + \epsilon c_2 + \epsilon\sqrt{\epsilon}c_3 + ... \tag{4.28}$$

Substituant (4.28) dans (4.26), on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 c_0 + (\mathcal{L}_2 c_0 + \mathcal{L}_0 c_2) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_0 c_1 \\ &\quad +\sqrt{\epsilon}\,(\mathcal{L}_2 c_1 + \mathcal{L}_0 c_3) + ... \end{aligned} \tag{4.29}$$

On obtient les expressions de $c_n,\ n \geq 0$, en égalant tous les termes dans (4.29) à zéro, ainsi on a

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 c_0 = 0, \\ \mathcal{L}_0 c_1 = 0, \\ \mathcal{L}_0 c_n + \mathcal{L}_2 c_{n-2} = 0, \quad \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{4.30}$$

Supposons que les fonctions $c_0,\ c_{1,},\ c_2,$,répondant au problème ci-dessus, existent. Cherchons maintenant à calculer c_0 et c_1.

- On considère la première équation

$$\mathcal{L}_0 c_0 = 0. \tag{4.31}$$

  L'opérateur $\mathcal{L}_0$ est le générateur d'un processus de Markov ergodique et ne fait intervenir que la variable y, alors, d'après le Corollaire IV.2, toute fonction indépendante de y résoud cette équation. Par conséquent, nous cherchons des solutions qui sont indépendantes de y : $c_0 = c_0(t)$, avec la condition terminale $c_0(T) = 1$.

- Ensuite, on considère

$$\mathcal{L}_2 c_0 + \mathcal{L}_0 c_2 = 0, \tag{4.32}$$

$\mathcal{L}_2$ ne fait pas intervenir de dérivée par rapport à y ; cependant, la variable y est présente à travers $f(y)$, nous avons une équation de Poisson (en y) pour c_2. La condition de moyennisation dans le Corollaire IV.2 est que $\mathcal{L}_2 c_0$ doit être centré par rapport à la distribution invariante du processus Y_t, i.e.,

$$\langle \mathcal{L}_2 c_0 \rangle (t, y) = 0.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_2 c_0 \rangle (t, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_2 c_0)(t, u)\phi(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial c_0}{\partial t}(t) + p \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2f^2(u)(1-p)} \right) c_0(t) \right) \phi(u)du \\
&= \frac{\partial c_0}{\partial t}(t) + pc_0 \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1-p)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f^2(u)}\phi(u)du \right) \right) \\
&= \frac{\partial c_0}{\partial t}(t) + pc_0 \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1-p)} \left\langle \frac{1}{f^2} \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

On définit

$$\sigma^* = \frac{1}{\sqrt{\langle 1/f^2 \rangle}}, \tag{4.34}$$

alors

$$c_0 = \exp\left[(T - t)p \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2 (\sigma^*)^2 (1-p)} \right) \right].$$

- On calcule c_1 de la même façon que c_0

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 c_1 &= 0, &(4.35)\\
\mathcal{L}_2 c_1 + \mathcal{L}_0 c_3 &= 0, &(4.36)
\end{aligned}$$

on trouve

$$c_1 = \exp\left[(T - t)p \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2 (\sigma^*)^2 (1-p)} \right) \right]. \tag{4.37}$$

Alors la valeur corrigée d'ordre 1 de la fonction valeur est

$$
\begin{aligned}
V^*(t,x) &= \frac{x^p}{p}\exp\left[(T-t)p\left(r+\frac{(\mu-r)^2}{2(\sigma^*)^2(1-p)}\right)\right] \\
&\quad +\sqrt{\epsilon}\frac{x^p}{p}\exp\left[(T-t)p\left(r+\frac{(\mu-r)^2}{2(\sigma^*)^2(1-p)}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4,38}
$$

4.4 Validation asymptotique

Théorème IV.3 *Soit le point (t,x,y) fixé où $t<T$. Supposons que la fonction de la volatilité f est bornée. Alors on a*

$$|V^\epsilon(t,x,y)-V^*(t,x)|=o(\epsilon^{1-\eta}), \tag{4,39}$$

pour tout $\eta>0$.

Preuve. Nous introduisons quelque notation supplémentaire en premier. On définit l'erreur Z^ϵ dans l'approximation de c^ϵ dans (4.28) par

$$Z^\epsilon=c_0(t,y)+\sqrt{\epsilon}c_1(t,y)+\epsilon c_2(t,y)+\epsilon\sqrt{\epsilon}c_3(t,y)-c^\epsilon(t,y) \tag{4.40}$$

où $c^\epsilon(t,y)$ est la solution de (4.26), et

$$c_0(t,y)=c_0(t)\quad \text{et} \quad c_1(t,y)=c_1(t).$$

Posons

$$L^\epsilon=\frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_2. \tag{4.41}$$

On peut écrire

$$
\begin{aligned}
L^\epsilon Z^\epsilon &= L^\epsilon \left[c_0 + \sqrt{\epsilon} c_1 + \epsilon c_2 + \epsilon\sqrt{\epsilon} c_3 - c^\epsilon\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 c_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_0 c_1 \\
&\quad +(\mathcal{L}_0 c_2 + \mathcal{L}_2 c_0) + \sqrt{\epsilon}(\mathcal{L}_0 c_3 + \mathcal{L}_2 c_1) \\
&\quad +(\epsilon \mathcal{L}_2 c_2 + \epsilon\sqrt{\epsilon}\mathcal{L}_2 c_3) + L^\epsilon c^\epsilon.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

En utilisant (4.30), on obtient

$$
\begin{aligned}
L^\epsilon Z^\epsilon &= \epsilon(\mathcal{L}_2 c_2 + \sqrt{\epsilon}\mathcal{L}_2 c_3)) \\
&= (\epsilon + \epsilon\sqrt{\epsilon})\mathcal{L}_2 c_2 \\
&= : G^\epsilon(t, y).
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 c_0 &= \mathcal{L}_2 c_0 - \langle \mathcal{L}_2 c_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{p(\mu - r)^2}{(1-p)} \left(1/f^2(y) - 1/\left(\sigma^*\right)^2\right) c_0,
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

En utilisant (4.32) , nous pouvons choisir

$$
c_2(t, y) = -\frac{1}{2}\frac{p(\mu - r)^2}{(1-p)} c_0(t)\phi^*(y), \tag{4.44}
$$

où $\phi^*(y)$ est la solution de l'équation de Poisson

$$
\mathcal{L}_0 \phi^*(y) = 1/f^2(y) - 1/\left(\sigma^*\right)^2. \tag{4.45}
$$

Alors on obtient :

$$
\mathcal{L}_2 c_2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{p(\mu - r)^2}{(1-p)}\right)^2 c_0(t)\phi^*(y)\left(1/f^2(y) - 1/\left(\sigma^*\right)^2\right). \tag{4.46}
$$

Comme f est supposée bornée. Alors en utilisant le changement $t = t\epsilon$ dans (4.19), on trouve que l'estimation des moments du processus Y_t^ϵ sont uniformes en ϵ, ainsi il existe une constante C qui peut dépendre de y telle que, pour $t \le s \le T$,

$$E_{t,y}(|\phi^*(Y_s^\epsilon)|) \le C < \infty. \tag{4.47}$$

Au temps terminal T, nous avons

$$\begin{aligned} Z^\epsilon(T,y) &= \epsilon c_2(T,y) + \epsilon\sqrt{\epsilon} c_3(T,y) \\ &= (\epsilon + \epsilon\sqrt{\epsilon}) c_2(T,y) \\ &= -\phi^*(y)\frac{(\epsilon + \epsilon\sqrt{\epsilon})p(\mu - r)^2}{2(1-p)} \\ &= H^\epsilon(y), \end{aligned} \tag{4.48}$$

où nous avons utilisé la condition finale $c_0(T) = 1$.

À cause de la régularité de G^ϵ, H^ϵ, et, utilisant la représentation probabiliste de la solution de l'équation (4.42), $L^\epsilon Z^\epsilon = G^\epsilon$ avec la condition finale H^ϵ, on obtient

$$\begin{aligned} Z^\epsilon(t,y) = E_{t,y}\Bigg\{ & H^\epsilon(Y_T^\epsilon)\exp\left(\int_t^T p\left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2f^2(Y_s^\epsilon)(1-p)}\right) ds\right) \\ & - \int_t^T \left[G^\epsilon(s, Y_s^\epsilon)\exp\left(\int_t^s p\left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2f^2(Y_v^\epsilon)(1-p)}\right) dv\right)\right] ds\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Alors, d'après (4.47), il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned} |Z^\epsilon(t,y)| &\le C E_{t,y}\left[|\phi^*(Y_s^\epsilon)| + \int_t^T |\phi^*(Y_s^\epsilon)|\, ds\right] \\ &\le C(\epsilon + \epsilon\sqrt{\epsilon}). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Par conséquent, pour (t, y) fixé avec $t < T$

$$\begin{aligned} \left|c_0 + \sqrt{\epsilon} c_1 - c^\epsilon\right| &= \left|(\epsilon + \epsilon\sqrt{\epsilon}) c_2(t, y) - Z^\epsilon(t, y)\right| \\ &\leq C(\epsilon + \epsilon\sqrt{\epsilon}). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Ce qui implique, pour un point fixé (t, x, y) avec $t < T$

$$|V^\epsilon(t, x, y) - V^*(t, x)| \leq C(\epsilon + \epsilon\sqrt{\epsilon}), \tag{5.52}$$

alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{|V^\epsilon(t, x, y) - V^*(t, x)|}{\epsilon^{1-\eta}} = 0, \tag{5.53}$$

pour tous $\eta > 0$. ■

Bibliographie

Bar95. G. Barles. *Solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi.* Mathématiques et applications. Springer-Verlag, 1995.

BB11. Abbes Benchaabane and Azzedine Benchettah. Optimal investment under stochastic volatility and power type utility function. *Serdica Math.J.*, 37(3) :237–250, 2011.

BS73. F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.

EKQ95. Nicole El Karoui and Marie-Claire Quenez. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *SIAM J. Control Optim.*, 33(1) :29–66, 1995.

ePL92. Crandall M. Ischii. H et P.L. Lions. *User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations.* Bull. Amer. Math. Soc. 1992.

FPS00. Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, and K. Ronnie Sircar. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

FPSS03. J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solna. Singular perturbations in option pricing. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(5) :1648–1665 (electronic), 2003.

FPSS04. Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, and Knut Solna. Maturity cycles in implied volatility. *Finance Stoch.*, 8(4) :451–477, 2004.

Fre97. Rüdiger Frey. Derivative asset analysis in models with level-dependent and stochastic volatility. *CWI Quarterly*, 10(1) :1–34, 1997. Mathematics of finance, Part II.

FS06. Wendell H. Fleming and H. Mete Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25 of *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer, New York, second edition, 2006.

Hul90. A Hull, J. White. Pricing interest-rate-derivative securities. 3(4) :573–592., 1990.

Kha04. R. Z. Khasminskii. On averaging principle : an asymptotic expansion approach. *Math.Anal*, 35, 2004.

KLSS86. Ioannis Karatzas, John P. Lehoczky, Suresh P. Sethi, and Steven E. Shreve. Explicit solution of a general consumption/investment problem. *Math. Oper. Res.*, 11(2) :261–294, 1986.

Kry80. N. V. Krylov. *Controlled diffusion processes*, volume 14 of *Applications of Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the Russian by A. B. Aries.

Lio83. P.L. Lions. *Optimal Control of Diffusion Processes and Hamilton-Jacobi-Bellman Equations : Viscosity Solutions and Uniqueness.* Communications in partial differential equations. M. Dekker, Berlin, first edition, 1983. An introduction with applications.

LSD02. J. Liu, J. Sochacki, and P. Dostert. Singular perturbations and approximations for integrodifferential equations. In *Differential equations and control theory (Athens, OH, 2000)*, volume 225 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 233–244. Dekker, New York, 2002.

Mar52. H Markowitz. Portfolio selection. *J. of Finance*, (7) :77–91, 1952.

Mer71. Robert C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *J. Econom. Theory*, 3(4) :373–413, 1971.

ØS05. Bernt Øksendal and Agnès Sulem. *Applied stochastic control of jump diffusions.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

Pha07. Huyên Pham. *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, volume 61 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications].* Springer, Berlin, 2007.

Pro05. Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer-Verlag, Berlin, 2005. Second edition. Version 2.1, Corrected third printing.

Yon00. Zhou.X.Y Yong.J. *Stochastic controls, Hamiltonian systems and HJB equations.* Springer-Verlag, 2000.

Zar01. Thaleia Zariphopoulou. A solution approach to valuation with unhedgeable risks. *Finance Stoch.*, 5(1) :61–82, 2001.

MR2951411 37Lxx (91B24 91B25 91B70)

Benchaabane, Abbes (F-ROUEN-RS); **Benchettah, Azzedine** (DZ-ANNA-ANO)

Optimal investment under stochastic volatility and power type utility function. (English summary)

Serdica Math. J. **37** (2011), *no. 3,* 237–250.

{A review for this item is in process.}

Serdica Mathematical Journal

ISSN 1310-6600

Serdica Mathematical Journal is a quarterly publication of the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences. It publishes original research papers and invited survey articles in all areas of Mathematics, preferably accessible to a broad public. The submitted manuscripts should not have been published previously and should not be currently under consideration for publication elsewhere. They should be prepared in accordance with the Instructions for Authors. Papers are published after the recommendation of a member of the Editorial Board.

- **Serdica Bulgariacae Mathematicae Publicationes**
  Volumes 1-20 (1975-1994) **Free access**

- Volume 21, 1995 **Free access**
- Volume 22, 1996 **Free access**
- Volume 23, 1997 **Free access**
- Volume 24, 1998 **Free access**
- Volume 25, 1999 **Free access**
- Volume 26, 2000 **Free access**
- Volume 27, 2001 **Free access**
- Volume 28, 2002 **Free access**
- Volume 29, 2003 **Free access**
- Volume 30, 2004 **Free access**
- Volume 31, 2005 **Free access**
- Volume 32, 2006
- Volume 33, 2007
- Volume 34, 2008
- Volume 35, 2009
- Volume 36, 2010
- Volume 37, 2011
- Volume 38, 2012 **Partially free access**

Subscription:

Subscription rate per volume (4 issues) for 2012 (mail free): 80 EUR. Checks, money orders etc. should be made out to the Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences and should be sent to the address of the Editorial Office.

Library exchange:

All inquiries about library exchange should be addressed to the Editorial Office.

Digital Repository at IMI-BAS

Editorial Office:

Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Acad. G. Bonchev Str., Bl. 8, 1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: serdica@math.bas.bg
