

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA  
BADJI MOKHTAR UNIVERSITY ANNABA



جامعة باجي مختار  
عنابة

Faculté des Sciences

Année : 2015

Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option  
Mathématiques Appliquées

Titre

**Problèmes multipoints associés aux équations  
ordinaires singulières**

Par  
Nacira HAMIDANE

DIRECTEUR DE THESE : Prof. Khaldi Rabah U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR : Prof. Assia Guezane-Lakoud U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Dr. Kelaiaia Smail Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEURS : Dr. Haouam Kamel M.C.A Université de TEBESSA

Dr. Chaoui Abderezak M.C.A Université de GUELMA

Dr. Ellagoune Fateh M.C.A Université de GUELMA



# Remerciements

*« Je remercie en premier lieu Allah le plus puissant. »*

*Je tiens à adresser mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, le professeur **Rabah Khaldi** qui a su me faire profiter de ses connaissances et ses compétences scientifiques. Je lui témoigne ma sincère reconnaissance.*

*J'exprime aussi ma reconnaissance et mes remerciements à mon deuxième encadreur le professeur **Assia Guezane-Lakoud**, qui m'a soutenu et guider tout au long des années de cette thèse. Je la remercie pour avoir su partager et transmettre ses connaissances, pour ses précieux conseils, sa disponibilité et pour ses qualités humaines. Je la prie de croire en l'expression de ma profonde gratitude.*

*Je remercie le professeur **Smail Kelaiaia** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.*

*Mes remerciements vont aux docteurs **Fateh Ellagoune**, **Kamel Haouam** et **Chaoui Abderezak** qui ont bien accepté, avec beaucoup de gentillesse de faire partie du jury.*

*Je remercie très profondément mes parents qui sont mes premiers enseignants dans la vie, pour leur dévouement et leurs incroyables sacrifices.*

*Je remercie également mon mari d'avoir partagé avec moi tous les moments de stress, de m'avoir assisté, encouragé et soutenu avec beaucoup d'amour.*

*Mes remerciements vont aussi à mes deux enfants, mes sœurs, mes beaux frères et à ma belle famille pour leur soutien morale tout au long de ce travail.*

*Je profite aussi pour remercier mes amis Amel, Sabrina, Nawel, les deux Lylia, Fahima et Asma.*

*A la fin, je remercie grandement toute l'équipe des thésards sous l'égide du professeur Assia Guezane-Lakoud, en particulier mes amis Samia, Assia et Nadia.*

*A la mémoire de mon cher papa.*

*A ma chère mère.*

*A mon cher époux Sofiane.*

*A mes adorables enfants ; Malak et Mohammed Seifeddine.*

*A mes beaux parents et ma belle grand-mère.*

*A mes sœurs, leurs maries et fillettes.*

*A ma belle sœur, mes deux beaux frères, leurs  
conjoints et enfants.*

*A tous mes amis.*

# Résumé

L'objectif des travaux présentés dans cette thèse est l'étude de l'existence des solutions de quelques problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles ordinaires non linéaires du deuxième et troisième ordre avec trois types de conditions aux limites: trois points, intégrales et multipoints. Pour certains d'entre eux on établit aussi l'unicité et la positivité. On s'intéresse également aux singularités du terme non linéaire dans le cas du problème aux limites multipoints. Les résultats sont obtenus en se basant essentiellement sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le principe de contraction de Banach, le théorème du point fixe de Schauder, le théorème de Guo-Krasnosel'skii et la méthode de sous et sur solutions.

**Mots clés:** Théorème du point fixe, Principe de contraction de Banach, L'alternative non linéaire de Leray-Schauder, Théorème de Guo-Krasnosel'skii, Conditions intégrales, Problème multipoints, Problème aux limites régulier, Problème aux limites singulier, Sous et sur solutions.

# Abstract

The objective of the work presented in this thesis, is to study the existence of solutions of some boundary value problems generated by nonlinear ordinary differential equations of second and third order with three types of boundary conditions: three-point, integrals and multipoint. For some of them, we also establish the uniqueness and positivity. Moreover for the case of the multipoint boundary value problem we are interested by the singularity of the nonlinear term. The results are obtained by using Leray-Schauder nonlinear alternative, the Banach contraction principle, Schauder fixed point theorem, Guo-Krasnosel'skii theorem and the method of lower and upper solutions.

**Keywords:** Fixed point theorem, Banach contraction principle, Leray-Schauder nonlinear alternative, Guo-Krasnosel'skii theorem, Integrals Conditions, Multipoint problem, Regular boundary value problem, Singular boundary value problem, Lower and upper solutions.

## ملخص

الهدف من الأعمال المقدمة في هذه الرسالة يكمن في دراسة وجود حلول لبعض المسائل ذات الشروط الحدية والمولدة بواسطة معادلات تفاضلية عادية وغير خطية من الدرجة الثانية والثالثة ذات الثلاث أنماط من الشروط الحدية: ثلاثة نقاط، تكاملية ومتعددة النقاط. بالنسبة لبعض من هذه المسائل فإننا نعمل على إثبات وحدانية وإيجابية الحلول مع اهتمامنا أيضا لشذوذيات الحد غير الخطي عند دراسة مسألة ذات شروط حدية متعددة النقاط. النتائج المحصل عليها في هذه الدراسة كانت في نطاق كل من "نظرية المتناوبة غير الخطية للاري-شودار"، "مبدأ التقلص لبناخ"، "نظرية النقطة الصامدة لشودار"، "نظرية قيو-كرازنوزلسكي" و "طريقة الحلول التحتية وال فوقية".

**كلمات مفتاحية :** نظرية النقطة الصامدة، مبدأ التقلص لبناخ، نظرية المتناوبة غير الخطية للاري-شودار، نظرية قيو-كرازنوزلسكي، الشروط التكاملية، مسألة النقاط المتعددة، مسألة نظامية ذات الشروط الحدية، مسألة شاذة ذات الشروط الحدية، الحلول التحتية وال فوقية.

# Table des matières

0.1	Introduction générale . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Existence de solutions pour un problème aux limites du troisième ordre en trois points</b>	<b>8</b>
1.1	Introduction . . . . .	9
1.2	Position du problème et motivation . . . . .	10
1.3	Préliminaires . . . . .	11
1.4	Résultats d'existence de solutions . . . . .	13
1.5	Exemples . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Existence et unicité de la solution d'un problème aux limites du second ordre avec conditions intégrales</b>	<b>22</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Position du problème et préliminaires . . . . .	24
2.3	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	27
2.3.1	Unicité . . . . .	28
2.3.2	Existence . . . . .	29
2.4	Exemples . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Existence et positivité des solutions d'un problème aux limites du second ordre avec une condition intégrale</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	36

3.2	Position du problème et préliminaires . . . . .	37
3.3	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	40
3.3.1	Unicité . . . . .	40
3.3.2	Existence . . . . .	42
3.4	Positivité de la solution . . . . .	43
3.5	Exemples . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Existence de solutions d'un problème aux limites multipoints par la méthode de sous et sur solutions</b>	<b>50</b>
4.1	Introduction . . . . .	51
4.2	Position du problème et motivation . . . . .	52
4.3	Préliminaires . . . . .	54
4.4	Résultats d'existence de solutions dans le cas régulier . . . . .	58
4.5	Résultats d'existence de solutions dans le cas singulier . . . . .	62

## 0.1 Introduction générale

L'étude des problèmes aux limites non linéaires est un domaine de recherche important et difficile. En effet, leur importance est due au fait que les problèmes aux limites modélisent un grand nombre de phénomènes, que ce soit en physique, en sciences technologiques ou en mathématiques appliquées.

C'est dans ce contexte que s'inscrit cette thèse, notre objectif est l'étude de l'existence de solutions de quelques problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre deux et trois avec des conditions aux limites en trois points, intégrales et multipoints, en utilisant les théorèmes de point fixe ainsi que la méthode de sous et sur solutions.

Les équations différentielles du troisième ordre interviennent, par exemple, à la déviation d'un faisceau courbé ayant une section transversale constante ou variable, une poutre à trois couches ou aux ondes électromagnétiques [26], tandis que celles du deuxième ordre et plus spécifiquement celles avec des termes non linéaires qui ne dépendent que des variables  $t$  et  $u$  sont utilisées dans la modélisation de différents phénomènes en physique, en chimie ou en épidémiologie. Par exemple en physique, la détermination du potentiel électrique dans un atome neutre isolé, se réduit à l'équation  $u'' = t^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}$ , ainsi que dans l'étude de la physique des plasmas, où le problème peut se formuler par l'équation  $\frac{1}{t^2}(t^2u')' = \sinh u - \frac{1}{\alpha\beta^3}e^{-\frac{t}{\beta}}$  et plein d'autres modèles qui ont été évoqués dans [2].

Les théorèmes de point fixe sont fondamentaux en analyse. Ils ont des applications nombreuses, à la fois, théoriques et pratiques. De nombreux problèmes peuvent être reformulés sous forme de problèmes d'existence d'un point fixe pour une certaine application. A titre d'exemple, en analyse numérique si l'on examine de plus près les méthodes de Lagrange et de Newton, on voit bien qu'elles reviennent dans leur principe à remplacer la résolution de l'équation  $f(x) = 0$  sur un intervalle  $[a, b]$  par celle d'une équation équivalente  $g(x) = x$  dont on approxime la solution  $x^*$  par une suite de valeurs  $(c_n)$  définie par son premier terme  $c_0 \in [a, b]$  et la relation de récurrence  $c_{n+1} = g(c_n)$ . L'application de ces théorèmes apparait aussi dans la recherche des zéros d'un polynôme, ou bien

pour démontrer que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement, c'est la raison pour laquelle on a fait intervenir ces théorèmes dans le présent travail. On a utilisé d'une façon particulière le principe de contraction de Banach, l'alternative de Leray-Schauder et le théorème de Guo-Krasnosel'skii. Les résultats obtenus ont fait l'objet des trois premiers chapitres.

Le dernier chapitre, se base essentiellement, sur la méthode de sous et sur solutions. Cette méthode a été introduite pour la première fois par Picard [52] en 1893. Il avait cherché les solutions du problème aux limites :

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad t \in ]a, b[, \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \quad (0.1)$$

en supposant  $u = 0$  est une solution et que la fonction  $f(t, \cdot)$  est croissante. L'idée était de construire une suite croissante  $(\alpha_n)_n$  d'approximations successives qui satisfait  $\alpha_0(t) > 0$  sur  $]a, b[$  de manière à éviter la solution triviale et qu'elle converge vers une solution  $u$  du problème (0.1). Il avait prouvé l'existence d'une première approximation  $\alpha_0$  et une fonction positive telle que

$$\alpha_0'' + f(t, \alpha_0) > 0, \quad t \in ]a, b[, \quad \alpha_0(a) = 0, \quad \alpha_0(b) = 0. \quad (0.2)$$

Aujourd'hui, une telle fonction est appelée une sous solution. Tandis que le grand mérite revient à Dragoni en 1931, dans un premier papier [14], développé et amélioré dans [15], en considérant le problème de Dirichlet

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in ]a, b[, \quad u(a) = A, \quad u(b) = B. \quad (0.3)$$

Il avait supposé l'existence de deux fonctions  $\alpha, \beta \in C^2([a, b])$ , avec  $\alpha(t) \leq \beta(t)$  sur  $[a, b]$  où

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), y), \quad \text{si } t \in ]a, b[, \quad y \leq \alpha'(t) \quad (\text{resp } y \geq \alpha'(t)), \quad (0.4)$$

$$\alpha(a) \leq A, \alpha(b) \leq B, \quad (0.5)$$

et

$$\beta''(t) \geq f(t, \beta(t), y), \text{ si } t \in ]a, b[ , y \geq \beta'(t) \text{ (resp } y \leq \beta'(t)), \quad (0.6)$$

$$\beta(a) \leq A, \beta(b) \leq B. \quad (0.7)$$

Il avait obtenu alors l'existence d'une solution de (0.3) avec sa localisation  $\alpha \leq u \leq \beta$ . Les hypothèses de régularité étaient que  $f$  est continue et bornée sur

$$E = \{(t, u, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 / \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}. \quad (0.8)$$

Donc l'idée principale de cette méthode consiste à modifier le problème donné afin d'avoir une fonction bornée, puis utiliser les résultats d'existence de solutions de celui ci pour montrer l'existence de solutions du problème original. En fait, cette méthode est un outil puissant dans l'analyse non linéaire, car en l'utilisant, on n'obtient pas seulement l'existence de la solution, mais aussi son emplacement entre ce qu'on appelle les sous et sur solutions, chose qui fournit une estimation de la solution. On doit noter ici, que les travaux cités ci-dessus sont les premiers qui reconnaissent explicitement le rôle central des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ , qu'on appelle aujourd'hui sous et sur solutions. Plus tard, un grand nombre de travaux a été consacré à cette théorie, plus particulièrement, dans l'étude des équations différentielles du premier et deuxième ordre avec différentes formes de la fonction  $f$  et avec diverses conditions aux limites comme celles de Neumann, périodiques ou de Dirichlet. Le monographe de Cabada [9] est une excellente référence qui fait le tour des principaux travaux utilisant la méthode de sous et sur solutions.

Les problèmes aux limites, considérés dans le présent travail, peuvent être réguliers ou bien singuliers, ces derniers interviennent dans plusieurs domaines comme la dynamique des gaz, mécanique des fluides newtoniens ou bien la théorie de la couche limite [50]. Vu que la plupart des papiers traitant les problèmes singuliers a été consacrée au cas  $f(t, u)$ , on a trouvé qu'il serait intéressant d'étudier le cas  $f(t, u, u')$  où la fonction  $f$  dépend,

aussi, de la première dérivée. Ce cas à fait l'objet d'une importante partie du dernier chapitre.

Cette thèse est constituée de quatre chapitres.

Le premier chapitre, s'intéresse à l'étude du problème aux limites en trois points suivant :

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (0.9)$$

$$u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u'(\eta), \quad u'(1) = 0, \quad (0.10)$$

où  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $1 + 2\alpha + 2\beta\eta - 2\beta \neq 0$ . En supposant qu'il existe deux fonctions positives  $k, h \in L^1[0, 1]$  avec  $h \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $p \in \mathbb{R}_*^+$  et  $f(t, 0) \neq 0$  telles que

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x|^p + h(t), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

Notre objectif est de donner de nouvelles conditions sur le terme non linéaire  $f$ , afin d'établir l'existence d'une solution non triviale, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Ainsi nos conditions sont plus générales que celles données dans [27].

Dans le deuxième chapitre on étudie l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la compacité de l'ensemble des solutions du problème aux limites avec conditions intégrales suivant :

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (0.11)$$

$$u(0) = \int_0^1 u(t) dt, \quad u(1) = \int_0^1 tu(t) dt, \quad (0.12)$$

où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory avec  $f(t, 0) \neq 0$ , vérifiant l'inégalité suivante :

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x|^\alpha + h(t), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad (0.13)$$

où  $k, h \in L^1[0, 1]$ . Les résultats d'existence concernent trois cas  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$  et  $\alpha > 1$ .

Le troisième chapitre est une généralisation de l'étude proposée au chapitre 2, où le terme non linéaire dépend de la première dérivée  $u'$ . En effet, on établit l'existence, l'unicité et la positivité du problème aux limites suivant :

$$u'' + f(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (0.14)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 tu(t) dt, \quad (0.15)$$

où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory et vérifiant des inégalités plus générales que celles données au chapitre précédent, telles qu'il existe trois fonctions positives  $h, g, k \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et

$$|f(t, x, y)| \leq h(t)|x|^\alpha + g(t)|y|^\beta + k(t), \quad \forall (t, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, \quad (0.16)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres positifs.

Au quatrième chapitre, on se concentre sur l'étude de l'existence de solutions du problème aux limites multipoints suivant :

$$u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (0.17)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k), \quad (0.18)$$

en utilisant la méthode de sous et sur solutions, où  $f$  est une fonction continue, vérifiant la condition de Nagumo, telle que  $0 < \eta_k < 1$ ,  $\lambda_k > 0$  ( $k = 1, \dots, m$ ),  $0 < \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \leq 1$  et  $\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \eta_k \neq 1$ . Les résultats concernent les deux cas, le régulier ainsi que le singulier. Il est noté que les singularités de  $f$  peuvent apparaître aux points  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $u = 0$ . Lorsqu'on traite le cas singulier  $u = 0$ , on donne quelques conditions et on construit les sous et sur solutions afin d'obtenir une solution positive.

# Chapitre 1

## Existence de solutions pour un problème aux limites du troisième ordre en trois points

Dans ce chapitre on donne des résultats d'existence de solutions pour un problème aux limites en trois points engendré par une équation différentielle du troisième ordre. Les démonstrations se basent essentiellement sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Les résultats ont fait l'objet de la publication internationale :

A.Guezane-Lakoud, N. Hamidane, R.Khaldi, “*On a Third-Order Three-Point Boundary Value Problem*”, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol.2012, Article ID 513189, 7 pages, 2012.

## 1.1 Introduction

Les équations différentielles du troisième ordre interviennent dans de différents domaines des mathématiques appliquées et de physique, par exemple, à la déviation d'un faisceau courbé ayant une section transversale constante ou variable, une poutre à trois couches ou aux ondes électromagnétiques, pour plus de détails, on peut se référer au livre de Gregus [26]. Dans la dernière décennie, les problèmes aux limites en trois points engendrés par des équations différentielles du troisième ordre ont reçu beaucoup d'attention.

En utilisant les théorèmes de Guo-Krasnosel'skii et Leggett-Williams, Anderson [3] a obtenu des résultats d'existence de solutions positives pour le problème aux limites en trois points :

$$u'''(t) - f(t, u(t)) = 0, \quad t_1 < t < t_3, \quad (1.1)$$

$$u(t_1) = u'(t_2) = 0, \quad \gamma u(t_3) + \delta u''(t_3) = 0, \quad (1.2)$$

où  $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $f$  est positive pour  $x \geq 0$  et  $f(t, \cdot)$  n'est pas identiquement nulle sur tout sous ensemble de  $[t_1, t_3]$  de mesure positive. Par la suite, via le théorème de Guo-Krasnosel'skii, Sun [55] a établi différents résultats sur l'existence de solutions positives simples et multiples pour le problème aux limites en trois points :

$$u'''(t) - \lambda a(t) f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.3)$$

$$u(0) = u'(\eta) = u''(1) = 0, \quad (1.4)$$

où  $\eta \in [1/2, 1)$ ,  $\lambda > 0$ ,  $a(t)$  une fonction positive continue définie sur  $(0, 1)$ , et  $f : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  continue. Palamides et Stavrakakis [51] ont également abouti à des résultats d'existence de solutions pour le problème aux limites en trois points suivant :

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.5)$$

$$u(0) = qu'(0), \quad u'(\eta) = u(1) = 0, \quad (1.6)$$

en utilisant le théorème de Guo-Krasnosel'skii, comme ils ont garanti l'unicité de la solution en ajoutant des hypothèses supplémentaires. Pour plus de résultats concernant cette classe de problèmes, on peut se référer aux travaux [4, 5, 22, 23, 31, 37, 44] ainsi que leurs références.

Ce chapitre est organisé comme suit, on présente tout d'abord notre problème aux limites, ensuite on donne quelques lemmes préliminaires, après on expose nos résultats d'existence de solutions et on termine par des exemples.

## 1.2 Position du problème et motivation

Motivé par les travaux précédemment cités et inspiré de [27], où les auteurs ont été concernés par l'existence de solutions non triviales pour le problème aux limites du second ordre

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.7)$$

$$u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u'(\eta), \quad (1.8)$$

où  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $1 + \alpha - \beta \neq 0$  et en supposant qu'il existe deux fonctions positives  $k, h \in L^1[0, 1]$  telles que

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x|^p + h(t), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

avec  $0 < p \leq 2$ , on va se concentrer, dans ce chapitre, sur l'étude de l'existence de solutions non triviales pour le problème aux limites en trois points suivant :

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.9)$$

$$u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u'(\eta), \quad u'(1) = 0, \quad (1.10)$$

en se basant principalement dans notre démonstration sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Où  $\eta \in (0, 1)$ ,  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  et les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont arbitraires dans  $\mathbb{R}$  tels que  $1 + 2\alpha + 2\beta\eta - 2\beta \neq 0$ . L'objectif est de donner des conditions nouvelles et plus générales que celles données dans [27]. D'ailleurs, on établit des résultats d'existence de solutions pour  $p \in \mathbb{R}_*^+$ .

### 1.3 Préliminaires

L'espace de Banach considéré dans ce chapitre est  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme  $\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$ ,  $\forall u \in E$ .

On donne ci-dessous, une définition et quelques lemmes faisant intervenir dans les démonstrations de la quatrième section.

**Définition 1.1** (*Opérateur complètement continu*) Soient  $E$  un espace de Banach et  $\Omega$  une partie de  $E$ . On dit que l'opérateur  $T : \Omega \rightarrow E$  est complètement continu si'il est continu et si pour toute partie bornée  $B$  de  $\Omega$ ,  $T(B)$  est relativement compact dans  $E$ .

**Lemme 1.1** (*L'alternative non linéaire de Leray-Schauder*)[13] Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega$  un sous ensemble ouvert borné de  $E$ ,  $0 \in \Omega$  et  $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$  un opérateur complètement continu. Alors

- (i) il existe  $x \in \partial\Omega$  et  $\lambda > 1$  tel que  $T(x) = \lambda x$ , ou bien
- (ii) il existe un point fixe  $x^* \in \overline{\Omega}$ .

**Lemme 1.2** (*Arzela-Ascoli (1)*)[13] Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact. Un sous-ensemble  $F \subset C(K)$  est relativement compact si et seulement s'il est uniformément borné et équicontinu, où  $C(K)$  désigne l'espace des fonctions continues dans  $K$ .

**Lemme 1.3** (*L'inégalité de Hölder*) [8] Soient un espace  $E$  mesurable,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $q$  son exposant conjugué c.à.d.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ .

Alors  $f \cdot g \in L^1$  et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Maintenant, on étudie un problème auxiliaire pour avoir la forme de la solution du problème aux limites posé (1.9) – (1.10).

**Lemme 1.4** *Soit  $y \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Si  $\zeta = 1 + 2\alpha + 2\beta\eta - 2\beta \neq 0$ , alors la solution du problème aux limites auxiliaire*

$$u'''(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.11)$$

$$u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u'(\eta), \quad u'(1) = 0, \quad (1.12)$$

est donnée par

$$\begin{aligned} u(t) = & -\frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds + \frac{\beta}{\zeta} (t^2 - 2t - 2\alpha) \int_0^\eta (\eta-s) y(s) ds \\ & + \frac{1}{\zeta} \int_0^1 (1-s) \left( \frac{t^2}{2} (1+s+2\alpha-2\beta) + (t+\alpha)(2\beta\eta-s) \right) y(s) ds. \end{aligned} \quad (1.13)$$

**Preuve.** En intégrant l'équation différentielle  $u'''(t) = -y(t)$  deux fois sur l'intervalle  $[0, t]$ , on trouve

$$u'(t) = - \int_0^t (t-s) y(s) ds + At + B. \quad (1.14)$$

Comme  $u'(1) = 0$ , on obtient

$$- \int_0^1 (1-s) y(s) ds + A + B = 0. \quad (1.15)$$

L'intégration de (1.14) donne

$$u(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds + \frac{1}{2} At^2 + Bt + C. \quad (1.16)$$

En tenant compte des conditions  $u(0) = \alpha u'(0)$ ,  $u(1) = \beta u'(\eta)$  et en vue de (1.14)

et de (1.16), on aboutit aux équations :

$$C = \alpha B, \quad (1.17)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^2 y(s) ds + \frac{A}{2} + B + C = -\beta \int_0^\eta (\eta-s) y(s) ds + \beta \eta A + \beta B. \quad (1.18)$$

La résolution du système formé par les équations (1.15), (1.17) et (1.18), donne les valeurs des constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$ ,

d'où

$$\begin{aligned} u(t) = & -\frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds + \frac{\beta}{\zeta} (t^2 - 2t - 2\alpha) \int_0^\eta (\eta-s) y(s) ds \\ & + \frac{1}{\zeta} \int_0^1 (1-s) \left( \frac{t^2}{2} (1+s+2\alpha-2\beta) + (t+\alpha)(2\beta\eta-s) \right) y(s) ds. \end{aligned}$$

■

## 1.4 Résultats d'existence de solutions

Dans cette section on introduit deux résultats concernant l'existence de solutions.

**Théorème 1.1** *On suppose que  $f(t, 0) \neq 0$ ,  $\zeta \neq 0$ ,  $p \in \mathbb{R}_*^+$ , et qu'il existe deux fonctions positives  $k, h \in L^1[0, 1]$  avec  $h \in \mathbb{R}_*^+$  telles que*

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x|^p + h(t), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad (1.19)$$

$$\left( 1 + \left| \beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{\zeta} \right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|) \right) \int_0^1 (1-s) k(s) ds < \frac{1}{2}, \quad (1.20)$$

$$\left( 1 + \left| \beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{\zeta} \right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|) \right) \int_0^1 (1-s) h(s) ds < \frac{1}{2}. \quad (1.21)$$

Alors le problème aux limites (1.9)-(1.10) a au moins une solution non triviale  $u^* \in E$ .

On démontre ce théorème grâce à l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

**Preuve.** Tout d'abord, à partir du lemme 1.4 on définit l'opérateur  $T : E \rightarrow E$ , par

$$\begin{aligned} & Tu(t) \\ = & -\frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 f(s, u(s)) ds + \frac{\beta}{\zeta} (t^2 - 2t - 2\alpha) \int_0^\eta (\eta-s) f(s, u(s)) ds \\ & + \frac{1}{\zeta} \int_0^1 (1-s) \left( \frac{t^2}{2} (1+s+2\alpha-2\beta) + (t+\alpha)(2\beta\eta-s) \right) f(s, u(s)) ds \end{aligned} \quad (1.22)$$

Le problème aux limites (1.9) – (1.10) a une solution si et seulement si l'opérateur  $T$  admet un point fixe.

Premièrement, on va montrer que  $T$  est complètement continu.

(i)  $T$  est continu. Soit  $(u_n)$  une suite qui converge vers  $u$  dans  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Alors

$$\begin{aligned} & |Tu_n(t) - Tu(t)| \\ \leq & \left( 1 + \left| \beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{\zeta} \right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|) \right) \\ & \times \int_0^1 (1-s) |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds, \end{aligned} \quad (1.23)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \|Tu_n - Tu\| \\ \leq & \left( 1 + \left| \beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{\zeta} \right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|) \right) \\ & \times \|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

par passage à la limite, en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  et due au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^1} \rightarrow 0,$$

ce qui permet de conclure que  $T$  est un opérateur continu.

(ii) L'image de tout ensemble borné par  $T$  est un ensemble relativement compact.

Soit  $B_r = \{u \in E : \|u\| \leq r\}$  un sous-ensemble borné.

a) En utilisant (1.19) Pour  $(t, u) \in [0, 1] \times B_r$ , on trouve

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \left(1 + \left|\beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta}\right| + \left|\frac{1}{\zeta}\right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|)\right) \\
&\quad \times \int_0^1 (k(s)|u(s)|^p + h(s)) ds \\
&\leq \left(1 + \left|\beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta}\right| + \left|\frac{1}{\zeta}\right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|)\right) \\
&\quad \times \left(r^p \int_0^1 k(s) ds + \int_0^1 h(s) ds\right), \tag{1.25}
\end{aligned}$$

d'où

$$\|Tu\| \leq \left(1 + \left|\beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta}\right| + \left|\frac{1}{\zeta}\right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|)\right) (r^p \|k\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}). \tag{1.26}$$

Alors  $T(B_r)$  est uniformément borné.

b)  $T(B_r)$  est équicontinu. En effet, pour tout  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  et  $u \in B_r$ , on a

$$\begin{aligned}
&|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \\
\leq &\frac{1}{2} \int_0^1 ((t_2^2 - t_1^2) + 2s(t_1 - t_2)) f(s, u(s)) ds \\
&+ \frac{\beta}{\zeta} ((t_1^2 - t_2^2) + 2(t_2 - t_1)) \int_0^\eta (\eta - s) f(s, u(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\zeta} \int_0^1 (1-s) \left( \left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2}\right) (1+s+2\alpha-2\beta) + (t_1 - t_2)(2\beta\eta - s) \right) f(s, u(s)) ds. \tag{1.27}
\end{aligned}$$

par passage à la limite, lorsque  $t_1 \longrightarrow t_2$ , on a  $|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \longrightarrow 0$ , donc  $T(B_r)$  est équicontinu et par conséquent  $T$  est un opérateur complètement continu, en vue du théorème d'Arzela -Ascoli.

Dés lors, on va appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. On pose

$$M = \left( 1 + \left| \beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{\zeta} \right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|) \right) \int_0^1 (1-s) k(s) ds$$

et

$$N = \left( 1 + \left| \beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{\zeta} \right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|) \right) \int_0^1 (1-s) h(s) ds,$$

Soient  $m = \frac{M}{N}$  et  $\Omega = \{u \in C[0,1] : \|u\| < 1\}$ . Comme  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , on conclut que  $N > 0$ .

À présent, en supposant que  $u \in \partial\Omega$ ,  $\lambda > 1$  avec  $Tu = \lambda u$ , permet d'avoir

$$\lambda \|u\| = \|Tu\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Tu)(t)| \leq M \|u\|^p + N.$$

Comme  $\|u\| = 1$ , il en résulte que

$$\lambda \leq M + N. \tag{1.29}$$

D'abord, si  $m \leq 1$  alors  $\lambda \leq 2N < 1$ , d'où  $\lambda < 1$ , ce qui contredit le fait que  $\lambda > 1$ . Par l'utilisation de l'alternative de Leray-Schauder il en découle que  $T$  admet un point fixe  $u^* \in \bar{\Omega}$  et donc le problème aux limites (1.9)-(1.10) admet une solution non triviale  $u^* \in E$ .

Idem, si  $m \geq 1$ . ■

Pour la suite, on a besoin d'introduire les notations suivantes :

$$a = \left( 1 + \left| \beta \frac{(1+2\alpha)}{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{\zeta} \right| (2|1+\alpha|(|\beta|\eta+1) + |\beta|) \right), \tag{1.30}$$

$$M = a \int_0^1 (1-s) k(s) ds,$$

et

$$N = a \int_0^1 (1-s) h(s) ds.$$

**Théorème 1.2** *Sous les conditions du théorème 1.1 et si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) *Il existe  $n > 1$  et  $r > 1$  telles que*

$$\left( \int_0^1 k^n(s) ds \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{(1+q)^{\frac{1}{q}}}{2a} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{q} = 1 \right), \quad (1.31)$$

$$\left( \int_0^1 h^r(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} < \frac{(1+l)^{\frac{1}{l}}}{2a} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{l} = 1 \right). \quad (1.32)$$

(2) *Il existe deux constantes  $\mu, \tau > -1$  telles que*

$$k(s) < \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2a} s^\mu, \quad (1.33)$$

$$h(s) < \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2a} s^\tau, \quad (1.34)$$

$$\text{meas} \left\{ s \in [0, 1], k(s) < \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2a} s^\mu \right\} > 0, \quad (1.35)$$

*et*

$$\text{meas} \left\{ s \in [0, 1], h(s) < \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2a} s^\tau \right\} > 0. \quad (1.36)$$

(3) *Les fonctions  $k(s)$  et  $h(s)$  satisfont*

$$k(s) < \frac{1}{a}, \quad (1.37)$$

$$h(s) < \frac{1}{a}, \quad (1.38)$$

$$\text{meas} \left\{ s \in [0, 1], k(s) < \frac{1}{a} \right\} > 0, \quad (1.39)$$

*et*

$$\text{meas} \left\{ s \in [0, 1], h(s) < \frac{1}{a} \right\} > 0. \quad (1.40)$$

(4) La fonction  $f(t, x)$  satisfait

$$\omega_1 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} \max \frac{|f(t, x)|}{|x|^p} < \frac{1}{2a}, \quad (1.41)$$

et

$$\omega_2 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} |f(t, x)| < \frac{1}{2a}. \quad (1.42)$$

Alors le problème aux limites (1.9)-(1.10) a au moins une solution non triviale  $u^* \in E$ .

**Preuve.** Soient  $M$  et  $N$  définies comme dans la preuve du théorème 1.1. Afin de démontrer le théorème 1.2, on a seulement besoin de prouver que  $M < 1/2$  et  $N < 1/2$ .

(i) On suppose que la condition (1) est vérifiée. L'utilisation de l'inégalité de Hölder, permet d'écrire

$$M \leq a \left( \int_0^1 k^n(s) ds \right)^{\frac{1}{n}} \left( \int_0^1 (1-s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.43)$$

et de l'inégalité (1.31), il vient

$$M < a \frac{(1+q)^{\frac{1}{q}}}{2a} \left( \int_0^1 (1-s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.44)$$

Après intégration du second membre de la dernière inégalité, on aboutit à  $M < 1/2$ .

En utilisant l'inégalité de Hölder une autre fois, on obtient

$$N \leq a \left( \int_0^1 h^r(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_0^1 (1-s)^l ds \right)^{\frac{1}{l}}. \quad (1.45)$$

En utilisant (1.32), puis en intégrant le second membre de l'inégalité résultante, on arrive à  $N < 1/2$ .

(ii) On suppose que la condition (2) est vérifiée. En tenant compte de (1.33) et (1.34), il en résulte que

$$M < \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2a} \left( a \int_0^1 (1-s) s^\mu ds \right) = \frac{1}{2}, \quad (1.46)$$

et

$$N < \frac{(\tau + 1)(\tau + 2)}{2a} \left( a \int_0^1 (1 - s) s^\mu ds \right) = \frac{1}{2}. \quad (1.47)$$

(iii) Maintenant, on suppose que la condition (3) est vérifiée. En utilisant le même raisonnement, que celui dans la preuve de la deuxième condition, on démontre la troisième.

(iii) Finalement, on suppose que la condition (4) est vérifiée. A partir de  $\omega_1 = \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \max_{t \in [0,1]} \frac{|f(t, x)|}{|x|^p}$ , on déduit qu'il existe  $c_1 > 0$  tel que pour  $|x| > c_1$ , on a

$$\forall \varepsilon > 0, |f(t, x)| \leq (\omega_1 + \varepsilon) |x|^p, \quad (1.48)$$

pour  $\varepsilon = \omega_1$ , il en résulte que

$$|f(t, x)| \leq 2\omega_1 |x|. \quad (1.49)$$

D'autre part de  $\omega_2 = \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \max_{t \in [0,1]} |f(t, x)|$ , on conclut qu'il existe  $c_2 > 0$  tel que pour  $|x| > c_2$  on a

$$|f(t, x)| \leq \omega_2 + \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R} \setminus ]-c_2, c_2[, \quad (1.50)$$

et en choisissant  $\varepsilon = \omega_2$ , on obtient

$$|f(t, x)| \leq 2\omega_2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus ]-c_2, c_2[, \quad (1.51)$$

par conséquent

$$|f(t, x)| \leq 2\omega_1 |x|^p + 2\omega_2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus ]-c, c[, \quad (1.52)$$

où  $c = \max(c_1, c_2)$ . A présent, on pose  $R = \max \{|f(t, x)| : (t, x) \in [0, 1] \times [-c, c]\}$ , donc  $\forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ , on trouve

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x|^p + h(t), \quad (1.53)$$

où  $k(t) = 2\omega_1$  et  $h(t) = 2\omega_2 + R$ . A la fin, l'utilisation de (1.41), donne

$$k(t) = 2\omega_1 < \frac{1}{a}, \quad (1.54)$$

et de (1.37) il en découle que  $M < 1/2$ . De même, par (1.38) on arrive à

$$h(t) = 2\omega_2 + R < \frac{1}{a}, \quad (1.55)$$

ce qui permet d'avoir  $N < 1/2$ . A ce stade, en appliquant la troisième condition, la preuve du théorème est achevée. ■

## 1.5 Exemples

**Exemple 1.1** *On considère le problème aux limites en trois points suivant :*

$$\begin{cases} u''' + \frac{1}{7}u^5 \left( \frac{\sqrt[2]{t^3}}{2} + \cos t \right) + \frac{\arcsin t}{5} = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = -\frac{1}{2}u'(0), \quad u(1) = -\frac{1}{2}u'(\frac{1}{3}), \quad u'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.56)$$

On a

$$f(t, x) = \frac{x^5}{7} \left( \frac{\sqrt[2]{t^3}}{2} + \cos t \right) + \frac{\arcsin t}{5}, \quad \alpha = \beta = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{3}, \quad \zeta = \frac{2}{3}. \quad (1.57)$$

Alors

$$|f(t, x)| \leq \frac{1}{7} \left( \frac{\sqrt[2]{t^3}}{2} + \cos t \right) |x|^5 + \frac{\arcsin t}{5} = k(t) |x|^5 + h(t). \quad (1.58)$$

En appliquant la première condition du théorème 1.2, pour  $p = 5$  et  $n = r = 2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 k^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} &= \left( \frac{1}{49} \int_0^1 \left( \frac{\sqrt[2]{s^3}}{2} + \cos s \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = 0.1488 \\ &< \frac{(1+q)^{\frac{1}{q}}}{2a} = 0.16496 \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 h^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} &= \left( \int_0^1 (\arcsin s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = 0.13673 \\ &< \frac{(1+l)^{\frac{1}{l}}}{2a} = 0.16496. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Alors le problème aux limites (1.56) a au moins une solution  $u^*$  dans  $C([0, 1], \mathbb{R})$ .

## Chapitre 2

# Existence et unicité de la solution d'un problème aux limites du second ordre avec conditions intégrales

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la compacité de l'ensemble de solutions d'un problème aux limites du second ordre avec seulement des conditions intégrales. Le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder sont principalement les approches utilisées. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale :

A.Guezane-Lakoud, N. Hamidane, R.Khaldi, "*Existence and uniqueness of solution for a second order boundary value problem*" Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1 Volume 62, Number 1, Pages 121-129 (2013).

## 2.1 Introduction

Les équations différentielles du second ordre avec des termes non linéaires qui ne dépendent que des variables  $t$  et  $u$  sont utilisées dans la modélisation de différents phénomènes en physique, en chimie ou en épidémiologie. Par exemple en physique, la détermination du potentiel électrique dans un atome neutre isolé, se réduit à l'équation  $u'' = t^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}$ , ainsi que dans l'étude de la physique des plasmas, où le problème peut se formuler par l'équation  $\frac{1}{t^2}(t^2u')' = \sinh u - \frac{1}{\alpha\beta^3}e^{-\frac{t}{\beta}}$  et plein d'autres modèles qui ont été évoqués dans [2] ainsi que dans ses références. Récemment, il y a eu plusieurs travaux sur les problèmes aux limites du second ordre, parmi eux, on peut consulter [17, 32, 42, 54], où dans la plupart, l'outil essentiel utilisé a été l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, ou plus généralement la théorie du point fixe sur le cône.

Les conditions intégrales interviennent lorsque les valeurs de la fonction sur le bord sont connectées à celles de l'intérieur du domaine ou bien lorsque les mesures sur le bord ne sont pas possibles. D'ailleurs, parfois il est préférable d'imposer des conditions intégrales, car elles conduisent à des mesures plus précises que celles proposées par les conditions locales.

Dernièrement, les problèmes aux limites avec des conditions intégrales ont fait l'objet de plusieurs articles. Dans [6], en utilisant l'alternative de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach, Benchohra et al ont établi des résultats d'existence et d'unicité pour le problème aux limites suivant :

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, u(1) = \int_0^1 g(s)u(s) ds,$$

sous la condition

$$|f(t, x)| \leq p(t)|x|^\alpha + \bar{q}(t), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory,  $p, \bar{q}(t) \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $g$  une fonction intégrable et  $\alpha \in [0, 1[$ . Dans [63] en se basant sur la théorie du point fixe dans un cône, Zhao et al ont étudié l'existence, non existence et la multiplicité de solutions positives pour l'équation différentielle du troisième ordre

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

assujettie à l'une des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 g(s)u(s) ds, \\ u(0) &= \int_0^1 g(s)u(s) ds, \quad u''(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

où  $f \in C([0, 1] \times P, P)$  et  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ , avec  $P$  un cône dans  $\mathbb{R}$ .

Pour plus de détails sur cette classe de problème, on peut consulter les références [18, 19, 41, 55, 59 – 61].

Ce chapitre est organisé comme suit. On commence par la présentation de notre problème aux limites, tout en rappelant quelques résultats préliminaires qui seront utilisés par la suite, à savoir la définition d'une fonction  $L^1$ -Carathéodory, le théorème d'Arzela-Ascoli qui concerne la convergence, le principe de contraction de Banach ainsi que le lemme qui fournit la forme de la solution. Puis, on établit les résultats d'existence et d'unicité de la solution et la fin, on donne quelques exemples d'applications.

## 2.2 Position du problème et préliminaires

Motivé par les différentes modélisations et les travaux cités précédemment, dans ce chapitre, on va établir des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour le problème aux limites du second ordre suivant :

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.1)$$

$$u(0) = \int_0^1 u(t) dt, \quad u(1) = \int_0^1 tu(t) dt, \quad (2.2)$$

où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory, vérifiant certaines inégalités. En outre, on démontre la compacité de l'ensemble de solutions pour chaque résultat d'existence.

L'espace de Banach considéré dans ce chapitre est  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$ .

On donne ci-dessous la définition d'une fonction  $L^1$ -Carathéodory et deux lemmes, faisant intervenir dans les démonstrations de la prochaine section.

**Définition 2.1** Une fonction  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $L^1$ -Carathéodory si

- (i) La fonction  $t \rightarrow f(t, u)$  est mesurable pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .
- (ii) La fonction  $u \rightarrow f(t, u)$  est continue presque pour tout  $t \in [0, 1]$ .
- (iii) Pour chaque  $r > 0$ , il existe  $\psi_r \in L^1[0, 1]$  telle que

$$|f(t, u)| \leq \psi_r(t) \text{ presque pour tout } t \in [0, 1] \text{ et } |u| \leq r. \quad (2.3)$$

**Lemme 2.1 (Arzela-Ascoli (2))** Si  $\{f_m\}_1^\infty$  est une suite bornée et équicontinue dans  $C(K)$ , alors elle a une sous-suite qui converge uniformément.

**Lemme 2.2 (Principe de contraction de Banach)[13]** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et soit  $T : E \rightarrow E$  une application contractante c.à.d qu'il existe  $0 < k < 1$  telle que  $d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in E$ , alors  $T$  admet un unique point fixe  $x^* \in E$ .

A présent, on énonce le lemme qui étudie un problème auxiliaire pour avoir la forme de la solution du problème aux limites (2.1)-(2.2).

**Lemme 2.3** Soit  $y \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors la solution du problème aux limites auxiliaire suivant :

$$u''(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.4)$$

$$u(0) = \int_0^1 u(t) dt, \quad u(1) = \int_0^1 tu(t) dt,$$

est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{3} \int_0^1 G(t, s)y(s)ds, \quad (2.5)$$

où

$$G(t, s) = \begin{cases} 23s + 3s^2t - 6st - 4s^2 - 6s^3 - 10, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (1-s)(10s + 3t - 3st + 6s^2 - 10), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Preuve.** En intégrant l'équation différentielle  $u''(t) = -y(t)$ , deux fois sur l'intervalle  $[0, t]$ , on obtient

$$u(t) = - \int_0^t (t-s)y(s)ds + At + B. \quad (2.7)$$

En utilisant la première condition intégrale on trouve  $B = \int_0^1 u(s) ds$ . Après avoir substitué  $B$  dans (2.7) et utilisé la deuxième condition intégrale on arrive à

$$A = \int_0^1 (1-s)y(s)ds + \int_0^1 su(s) ds - \int_0^1 u(s) ds, \quad (2.8)$$

puis en substituant  $A$  à son tour dans (2.7), on aboutit à

$$u(t) = - \int_0^t (t-s)y(s)ds + t \int_0^1 (1-s)y(s)ds + t \int_0^1 su(s) ds + (1-t) \int_0^1 u(s) ds. \quad (2.9)$$

Maintenant, en intégrant l'inégalité (2.9) sur  $[0, 1]$ , il en résulte

$$\int_0^1 u(s) ds = - \int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds + \int_0^1 (1-s)y(s)ds + \int_0^1 su(s) ds. \quad (2.10)$$

Par la suite en substituant (2.8) dans (2.7), puis en intégrant l'inégalité résultante sur

$[0, 1]$ , on trouve

$$\begin{aligned}
u(t) &= - \int_0^t (t-s)y(s)ds - (1-t) \int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds \\
&\quad + \int_0^1 (1-s)y(s)ds + \int_0^1 su(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dés lors, en multipliant (2.11) par  $t$  puis en intégrant l'inégalité résultante sur  $[0, 1]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 su(s)ds &= -2 \int_0^1 (1-s)^2 (s+2)y(s)ds - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds \\
&\quad + \int_0^1 (1-s)y(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A la fin, en substituant (2.11) dans (2.10), il en découle

$$\begin{aligned}
u(t) &= - \int_0^t (t-s)y(s)ds + \frac{1}{3} \int_0^1 (1-s)^2 (3t-6s-16)y(s)ds \\
&\quad + 2 \int_0^1 (1-s)y(s)ds \\
&= \frac{1}{3} \int_0^t (23s+3s^2t-6st-4s^2-6s^3-10)y(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{3} \int_t^1 (1-s)(10s+3t-3st+6s^2-10)y(s)ds \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 G(t,s)y(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

■

## 2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section on donne un résultat sur l'unicité et trois autres sur l'existence. En ce qui concerne l'unicité, on la démontre à travers le principe de contraction de Banach, tandis que pour l'existence on utilise l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. En

effet, on transforme le problème (2.1)-(2.2) à un problème de point fixe, pour lequel on définit l'opérateur  $T : E \longrightarrow E$ , par

$$Tu(t) = \frac{1}{3} \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds, \forall t \in [0, 1]. \quad (2.14)$$

En fait, le problème aux limites (2.1)-(2.2) a une solution si et seulement si l'opérateur  $T$  a un point fixe.

### 2.3.1 Unicité

**Théorème 2.1** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites.*

(A1)  *$f$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory.*

(A2) *il existe une fonction positive  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  telle que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq g(t) |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, 1] \quad (2.15)$$

et

$$l = \frac{10}{3} \|g(s)\|_{L^1} < 1, \quad (2.16)$$

alors le problème aux limites (2.1)-(2.2) a une solution unique  $u$  dans  $E$ .

**Preuve.** On considère l'opérateur défini par (2.14).

En utilisant des calculs élémentaires, on trouve que  $|G(t, s)| \leq 10$ . Soient  $u, v \in E$ , de l'inégalité (2.15) on a

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \frac{1}{3} \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq \frac{10}{3} \int_0^1 g(s) |u(s) - v(s)| ds, \end{aligned} \quad (2.17)$$

et due à (2.16), il en résulte que

$$\|Tu - Tv\| < l \|u - v\|. \quad (2.18)$$

Donc  $T$  est une contraction, par conséquent elle a un unique point fixe qui est l'unique solution du problème aux limites (2.1)-(2.2). ■

### 2.3.2 Existence

**Théorème 2.2** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(B1)  *$f$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory et  $f(t, 0) \neq 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .*

(B2) *Il existe deux fonctions positives  $h, k \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  avec  $0 < \alpha < 1$ , telles que*

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x|^\alpha + h(t), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

*Alors le problème aux limites (2.1)-(2.2) a au moins une solution non triviale  $u^* \in E$  et l'ensemble de ses solutions est compact.*

Ce théorème, sera démontré via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, en considérant toujours l'opérateur défini par (2.14).

**Preuve.** Tout d'abord, on doit montrer que  $T$  est complètement continu.

(i)  $T$  est continu. Soit  $(u_n)$  une suite qui converge vers  $u$  dans  $E$ . En utilisant le fait que  $|G(t, s)| \leq 10$ , on obtient

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| \leq \frac{10}{3} \int_0^1 |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds, \quad (2.20)$$

d'où

$$\|Tu_n - Tu\| \leq \frac{10}{3} \|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^1}.$$

Par passage à la limite, en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  et due au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, ainsi que la deuxième condition de la définition 2.1, on conclut que

$$\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^1} \rightarrow 0,$$

alors  $T$  est un opérateur continu.

(ii) L'image de tout ensemble borné par  $T$  est un ensemble relativement compact.  
 Soit  $B_r = \{u \in E; \|u\| \leq r\}$  un sous-ensemble borné.

a) En utilisant (2.19) Pour  $(t, u) \in [0, 1] \times B_r$ , on obtient

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq \frac{10}{3} \int_0^1 (k(s) |u(s)|^\alpha + h(s)) ds \\ &\leq \frac{10}{3} \left( r^\alpha \int_0^1 k(s) ds + \int_0^1 h(s) ds \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

d'où

$$\|Tu\| \leq \frac{10}{3} (r^\alpha \|k\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}).$$

Alors  $T(B_r)$  est uniformément borné.

b)  $T(B_r)$  est équicontinu. En effet, pour tout  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $u \in B_r$ , on a

$$\begin{aligned} |Tu(t_1) - Tu(t_2)| &\leq \frac{10}{3} \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ((k(s) |u(s)|^\alpha + h(s))) ds \\ &\leq \frac{10r^\alpha}{3} \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| k(s) ds \\ &\quad + \frac{10}{3} \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| h(s) ds, \end{aligned} \quad (2.22)$$

par passage à la limite, lorsque  $t_1 \rightarrow t_2$ , on a  $|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \rightarrow 0$ . Donc  $T(B_r)$  est équicontinu et par conséquent  $T$  est un opérateur complètement continu, en vue du théorème d'Arzela -Ascoli.

Maintenant, on va appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Soient  $m = \left(\frac{10}{3} \|k\|_{L^1} + \frac{10}{3} \|h\|_{L^1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ,  $M = \max(1, m)$ ,  $0 < \lambda < 1$  et

$\Omega = \{u \in E : \|u\| < M + 1\}$ . On choisit  $u \in \partial\Omega$ , tel que  $u = \lambda Tu$ . A partir de (2.19), on obtient

$$|u(t)| = \lambda |Tu(t)| \leq \frac{10}{3} \int_0^1 (k(s) |u(s)|^\alpha + h(s)) ds$$

ainsi,

$$\|u\| \leq \frac{10}{3} (\|u\|^\alpha \|k\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}). \quad (2.23)$$

Si  $\|u\| \geq 1$ , donc

$$\|u\| \leq \left( \frac{10}{3} \|k\|_{L^1} + \frac{10}{3} \|h\|_{L^1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = m. \quad (2.24)$$

Ce qui contredit le fait que  $u \in \partial\Omega$ . L'alternative non linéaire de Leray-Schauder permet de conclure que l'opérateur  $T$  a un point fixe  $u^* \in \overline{\Omega}$  et alors le problème aux limites (2.1)-(2.2) a une solution non triviale  $u^* \in E$ .

Pour achever la preuve, il reste à démontrer que l'ensemble de solutions noté  $\Sigma$  est compact. Soit  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  une suite dans  $\Sigma$ , en utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que la suite  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  est bornée et équicontinue. A l'aide du lemme 2.1, il en découle qu'il existe une suite uniformément convergente  $\{u_{n'}\}_{n' \geq 1}$  de  $\{u_n\}_{n \geq 1}$ , telle que  $u_{n'} \rightarrow u$ .

D'autre part de la condition (B2), on a

$$|f(t, u_{n'})| \leq k(t) |u_{n'}|^\alpha + h(t) \leq k(t) m^\alpha + h(t), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue et le fait que  $f$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory on peut garantir que

$$u(t) = \lim u_{n'}(t) = - \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, 1],$$

d'où  $u \in \Sigma$ , ce qui permet de conclure que  $\Sigma$  est fermé et par conséquent il est compact.

■

**Théorème 2.3** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(C1)  *$f$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory et  $f(t, 0) \neq 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .*

(C2) *Il existe deux fonctions positives  $h, k \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  telles que*

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x| + h(t), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

et

$$\|k\|_{L^1} < \frac{3}{10}. \quad (2.26)$$

Alors le problème aux limites (2.1)-(2.2) a au moins une solution non triviale  $u^* \in E$  et l'ensemble de solutions est compact.

**Preuve.** De la preuve du théorème 2.2, on a  $T$  est complètement continu. Soient  $M_1 = \frac{10 \|h\|_{L^1}}{3 - 10 \|k\|_{L^1}}$ ,  $\Omega = \{u \in E : \|u\| < M_1 + 1\}$ ,  $u \in \partial\Omega$ ,  $0 < \lambda < 1$ , tels que  $u(t) = \lambda Tu(t)$ . Des hypothèses C1 et C2, on a

$$\|u\| \leq \frac{10}{3} (\|u\| \|k\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}),$$

alors  $\|u\| \leq M_1$ , ce qui contredit le fait que  $u \in \partial\Omega$ . De l'alternative de Leray-Schauder on conclut que l'opérateur  $T$  a un point fixe  $u^* \in \bar{\Omega}$  et donc le problème aux limites (2.1)-(2.2) a une solution non triviale  $u^* \in E$ .

La preuve de la compacité de l'ensemble de solutions est similaire à celle du cas  $\alpha \in [0, 1[$ . ■

**Théorème 2.4** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(E1)  $f$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory et  $f(t, 0) \neq 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$  avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$ .

(E2) Il existe deux fonctions positives  $h, k \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  et  $\alpha > 1$ , telles que

$$|f(t, x)| \leq k(t) |x|^\alpha + h(t), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

et

$$M = \frac{10}{3} \|k\|_{L^1} < \frac{1}{2}, \quad N = \frac{10}{3} \|h\|_{L^1} < \frac{1}{2}. \quad (2.28)$$

Alors le problème aux limites (2.1) – (2.2) a au moins une solution non triviale  $u^* \in E$  et l'ensemble de solutions est compact.

**Preuve.** Soit  $m = \left(\frac{N}{M}\right)^{1/n}$ , où  $n$  est la partie entière de  $\alpha$ .

On pose  $\Omega = \{u \in E : \|u\| < m\}$ ,  $u \in \partial\Omega$ ,  $\lambda > 1$ , tel que  $Tu(t) = \lambda u(t)$ . En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda \|u\| &\leq \frac{10}{3} \|u\|^\alpha \|k\|_{L^1} + \frac{10}{3} \|h\|_{L^1} \\ &= \|u\|^\alpha M + N, \end{aligned} \quad (2.29)$$

cela implique que  $\lambda m \leq m^\alpha M + N$ , donc

$$\lambda \leq M^{((n+1)-\alpha)/n} N^{(\alpha-1)/n} + M^{1/n} N^{1-1/n}. \quad (2.30)$$

A partir des hypothèses on a  $n \leq \alpha < n + 1$ ,  $M < 1/2$  et  $N < 1/2$ , ainsi

$$M^{((n+1)-\alpha)/n} < (1/2)^{((n+1)-\alpha)/n}, N^{(\alpha-1)/n} < (1/2)^{(\alpha-1)/n}, \quad (2.31)$$

$$M^{1/n} < (1/2)^{1/n} \text{ et } N^{1-1/n} < (1/2)^{1-1/n}, \quad (2.32)$$

par conséquent  $\lambda < 1$ , ce qui contredit le fait que  $\lambda > 1$ . Via l'alternative de Leray-Schauder, il s'ensuit que l'opérateur  $T$  a un point fixe  $u^* \in \overline{\Omega}$  et alors le problème aux limites (2.1) – (2.2) a une solution non triviale  $u^* \in E$ .

La preuve de la compacité de l'ensemble des solutions est similaire à celle du cas  $\alpha \in [0, 1[$ . ■

## 2.4 Exemples

**Exemple 2.1** *On considère le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{3}u^{\frac{1}{4}}(t^3 + \cos t) + \arcsin t = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = \int_0^1 u(t) dt, & u(1) = \int_0^1 tu(t) dt. \end{cases} \quad (2.33)$$

On a  $f(t, u) = \frac{1}{3} \left(u^{\frac{1}{4}}\right) (t^3 + \cos t) + \arcsin t$ ,  $f(t, 0) \neq 0$ ,  $0 < \alpha = \frac{1}{4} < 1$ , ainsi

$$|f(t, u)| \leq \frac{1}{3} (t^3 + \cos t) |u|^{\frac{1}{4}} + \arcsin t = k(t) |u|^{\frac{1}{4}} + h(t).$$

En utilisant le théorème 2.2, on conclut que le problème aux limites (2.33) a au moins une solution non triviale  $u^*$  dans  $E$ .

**Exemple 2.2** On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u'' + \frac{3u^4}{10(1+u^2)} \sin t + e^{-2t} \cos(1+t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = \int_0^1 u(t) dt, & u(1) = \int_0^1 tu(t) dt. \end{cases} \quad (2.34)$$

On a  $f(t, u) = \frac{3u^4}{10(1+u^2)} \sin t + e^{-2t} \cos(1+t)$ , ainsi

$$|f(t, u)| \leq k(t) |u|^2 + h(t), \alpha = 2, k(t) = \frac{3 \sin t}{10}, h(t) = e^{-2t} \cos(1+t).$$

$$M = \int_0^1 \sin s ds = 0.45970 < \frac{1}{2},$$

$$N = \frac{10}{3} \int_0^1 e^{-2s} \cos(1+s) ds = 0.31655 < \frac{1}{2}.$$

D'où du théorème 2.4, on conclut que le problème aux limites (2.34) a au moins une solution non triviale  $u^*$  dans  $E$ .

## Chapitre 3

# Existence et positivité des solutions d'un problème aux limites du second ordre avec une condition intégrale

Ce chapitre est concerné par l'étude de l'existence, l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites avec une condition intégrale engendré par une équation différentielle du second ordre. Au fait, on donne une généralisation des résultats obtenus dans le chapitre précédent où le terme de non linéarité dépend aussi de la première dérivée. Le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de Guo-Krasnosel'skii sont principalement les approches utilisées. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale :

A.Guezane-Lakoud, N. Hamidane, R.Khaldi, "*Existence and positivity of solutions for a second order boundary value problem with integral condition*" International Journal of Differential Equations, vol. 2012, Article ID 471975, 14 pages, 2012.

## 3.1 Introduction

Ce chapitre exposera une généralisation des résultats obtenus dans le chapitre précédent, où le terme non linéaire dépend aussi de  $u'$ . Autrement dit, le problème aux limites considéré dans le présent chapitre sera engendré par une équation différentielle du second ordre de la forme suivante :

$$u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0. \quad (3.1)$$

La dépendance de  $u'$  est rencontré dans de nombreux phénomènes en physique, par exemple le problème de répartition de la température à l'état stable pour une barre, dont on trouve les détails dans [25].

Les problèmes aux limites engendrés par l'équation différentielle (3.1) ont été l'objet d'un nombre important d'articles. En utilisant une méthode itérative en présence de la méthode de sous et sur solutions, Cherpion et al [10] ont établi l'existence de solutions de l'équation (3.1) avec les conditions aux limites

$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad (3.2)$$

où  $f$  est continue et lipchitzienne par rapport à  $u$  et  $u'$ , celle par rapport à  $u'$  est unilatérale. De leurs côté, Khan et webb [43] ont utilisé la théorie du degré pour avoir un résultat concernant l'existence de solutions multiples pour l'équation (3.1) soumise aux conditions aux limites

$$u(0) = 0, u(1) = \delta u(\eta), \quad (3.3)$$

avec  $0 < \delta\eta < 1$ ,  $0 < \eta < 1$  et  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Dans [16] Du et Zhao ont également, été intéressé par l'étude de l'existence et l'unicité de solutions positives pour

la même équation (3.1) mais cette fois ci elle a été assujettie aux conditions aux limites

$$u(0) = \sum_{k=1}^{k=m-2} \alpha_k u(\eta_k), \quad u(1) = 0, \quad (3.4)$$

où  $0 < \alpha_k < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-2$ ,  $0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{m-2} < 1$ ,  $\sum_{k=1}^{k=m-2} \alpha_k < 1$ ,  $m \geq 3$ ,  $f(t, u, v) : (0, 1) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$  est continue, croissante par rapport à  $u$  et décroissante par rapport à  $v$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , tout en vérifiant d'autres inégalités.

Motivé par les travaux évoqués ci-dessus, il sera intéressant d'étudier un problème aux limites engendré par l'équation (3.1) avec des conditions intégrales.

Ce chapitre est organisé comme suit. D'abord, on présente notre problème aux limites et on introduit quelques résultats préliminaires. Puis, on énonce les résultats d'existence et d'unicité de la solution. Après, une section sera consacrée pour l'étude de la positivité de la solution, dont l'outil essentiel sera le théorème de Guo-Krasnosel'skii et on achèvera ce chapitre par quelques exemples d'applications.

## 3.2 Position du problème et préliminaires

On s'intéresse dans le présent chapitre à établir des résultats d'existence, d'unicité et de la positivité de la solution pour le problème aux limites du second ordre suivant :

$$u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.5)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 t u(t) dt, \quad (3.6)$$

où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory, vérifiant certaines inégalités plus générale que celles données dans le chapitre précédent.

On considère l'espace de Banach  $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme

$\|u\|_1 = \|u\| + \|u'\|$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme  $\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$  dans l'espace de Banach

$C([0, 1], \mathbb{R})$ . Comme on désigne par  $E^+$  l'ensemble  $\{u \in E, u(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [0, 1]\}$

On rappelle ci-dessous la définition d'une fonction  $L^1$ -Carathéodory, ainsi que le théorème bien connu de Guo-Krasnosel'skii.

**Définition 3.1** Une fonction  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $L^1$ -Carathéodory si

- (i) La fonction  $t \rightarrow f(t, u, v)$  est mesurable pour tout  $u, v \in \mathbb{R}$ .
- (ii) La fonction  $(u, v) \rightarrow f(t, u, v)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  presque pour tout  $t \in [0, 1]$ .
- (iii) Pour chaque  $r > 0$ , il existe  $\psi_r \in L^1[0, 1]$  telle que

$$|f(t, u, v)| \leq \psi_r(t) \text{ presque pour tout } t \in [0, 1] \text{ et } |u| + |v| \leq r. \quad (3.7)$$

**Lemme 3.1** (*Théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii*) Soit  $E$  un espace de Banach,  $K \subset E$  un cône,  $\Omega_1, \Omega_2$  deux sous ensembles ouverts de  $E$  avec  $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$  et

$$T : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$$

un opérateur complètement continu qui satisfait l'une des conditions suivantes :

- (i)  $\|Tu\| \leq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , and  $\|Tu\| \geq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_2$ ,
  - (ii)  $\|Tu\| \geq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , and  $\|Tu\| \leq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_2$ .
- Alors  $T$  a un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ .

Le Lemme suivant étudie un problème auxiliaire pour avoir la forme de la solution du problème aux limites (3.5)-(3.6).

**Lemme 3.2** Soit  $y \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors la solution du problème aux limites auxiliaire suivant :

$$u''(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.8)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 tu(t) dt, \quad (3.9)$$

est donnée par

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds, \quad (3.10)$$

où

$$G(t, s) = \begin{cases} s + \frac{st}{4}(3 - s^2), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t + \frac{st}{4}(3 - s^2), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

**Preuve.** En intégrant l'équation différentielle  $u''(t) = -y(t)$ , deux fois sur l'intervalle  $[0, t]$ , on obtient

$$u(t) = - \int_0^t (t - s)y(s)ds + C_1t + C_2. \quad (3.12)$$

L'utilisation de la première condition  $u(0) = 0$ , permet d'avoir  $C_2 = 0$ , tandis que la deuxième condition  $u'(1) = \int_0^1 tu(t) dt$  implique que

$$C_1 = \int_0^1 su(s)ds + \int_0^1 y(s) ds. \quad (3.13)$$

En substituant  $C_1$  et  $C_2$  par leurs valeurs dans (3.12), on trouve

$$u(t) = - \int_0^t (t - s)y(s)ds + t \int_0^1 su(s)ds + t \int_0^1 y(s) ds. \quad (3.14)$$

Par la suite, en multipliant (3.14) par  $t$  puis en intégrant l'inégalité résultante sur  $[0, 1]$  on arrive à

$$\int_0^t tu(t)dt = \frac{-1}{4} \int_0^1 (1 - s)^2 (2 + s)y(s)ds + \frac{1}{2} \int_0^1 y(s)ds. \quad (3.15)$$

En substituant le second terme du côté droit de (3.14) par (3.15), il en résulte que

$$u(t) = - \int_0^t (t - s)y(s)ds - \frac{t}{4} \int_0^1 (1 - s)^2 (2 + s)y(s)ds + \frac{3t}{2} \int_0^1 y(s)ds, \quad (3.16)$$

et par conséquent, on a

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds$$

où  $G(t, s)$  est définie par (3.11). ■

### 3.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, on donne un résultat sur l'unicité et un autre sur l'existence. La contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder sont les principaux outils utilisés dans les démonstrations. En fait, on transforme le problème (3.5)-(3.6) à un problème de point fixe, pour lequel on définit l'opérateur  $T : E \longrightarrow E$ , par

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, u(s), u'(s)) ds, \forall t \in [0, 1]. \quad (3.17)$$

Donc le problème aux limites (3.5)-(3.6) a une solution si et seulement si l'opérateur  $T$  a un point fixe.

#### 3.3.1 Unicité

**Théorème 3.1** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites.*

(H1)  *$f$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory,*

(H2) *il existe deux fonctions positives  $g_1, g_2 \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  telles que pour tout  $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$  on a*

$$|f(t, x, \bar{x}) - f(t, y, \bar{y})| \leq g_1(t) |x - y| + g_2(t) |\bar{x} - \bar{y}|, \quad (3.18)$$

(H3)  *$l = 4(\|g_1\|_{L^1} + \|g_2\|_{L^1}) < 1$ .*

*Alors le problème aux limites (3.5)-(3.6) a une solution unique  $u$  dans  $E$ .*

**Preuve.** La démonstration est analogue à celle du théorème 2.1, en considérant l'opérateur défini par (3.17) et en tenant compte de  $|G(t, s)| \leq 3/2$ .

Pour  $u, v \in E$ , et en utilisant l'hypothèse (H2) et (H3), on obtient

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{3}{2} \|u - v\|_1 (\|g_1\|_{L^1} + \|g_2\|_{L^1}), \quad (3.19)$$

$$|Tu(t) - Tv(t)| < \frac{3}{8} l \|u - v\|_1 \quad (3.20)$$

D'autre part, on a pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} T'u(t) &= - \int_0^t f(s, u(s), u'(s)) ds \\ &+ \int_0^1 \left( -\frac{1}{4} (1-s)^2 (2+s) + \frac{3}{2} \right) f(s, u(s), u'(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.21)$$

ainsi, l'hypothèse (H2) entraîne que

$$\begin{aligned} |T'u(t) - T'v(t)| &\leq \frac{5}{2} \int_0^1 |f(s, u(s), u'(s)) - f(s, v(s), v'(s))| ds \\ &\leq \frac{5}{2} \|u - v\|_1 (\|g_1\|_{L^1} + \|g_2\|_{L^1}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

puis, par l'hypothèse (H3), on trouve

$$|T'u(t) - T'v(t)| < \frac{5}{8} l \|u - v\|_1. \quad (3.23)$$

En vue des inégalités (3.20) et (3.23) on aboutit au résultat

$$\|Tu - Tv\|_1 < l \|u - v\|_1, \quad (3.24)$$

Donc  $T$  est une contraction, par conséquent elle a un unique point fixe qui est l'unique solution du problème aux limites (3.5)-(3.6). ■

### 3.3.2 Existence

**Théorème 3.2** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(P1)  *$f$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory et  $f(t, 0, 0) \neq 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .*

(P2) *Il existe trois fonctions positives  $h, g, k \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , telles que*

$$|f(t, x, y)| \leq h(t)|x|^\alpha + g(t)|y|^\beta + k(t), \quad \forall (t, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2. \quad (3.25)$$

(P3)

$$\|h\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} < \frac{1}{8}, \quad \|k\|_{L^1} < \frac{1}{8}. \quad (3.26)$$

*Alors le problème aux limites (3.5)-(3.6) a au moins une solution non triviale  $u^* \in E$ .*

**Preuve.** En considérant toujours l'opérateur défini par (3.17) et en procédant de la même façon que celle dans la section précédente, on trouve que  $T$  est un opérateur complètement continu.

Dés lors, on peut passer à l'application de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

On définit d'abord les constantes suivantes :

$$M = \|h\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}, \quad N = \|k\|_{L^1}. \quad (3.27)$$

De l'hypothèse (P3), on sait que  $M < 1/8$ . On pose  $m = \frac{M}{N}$  et  $\Omega = \{u \in E : \|u\|_1 < 1\}$ .

On prend  $u \in \partial\Omega$ ,  $\lambda > 1$ , telles que  $Tu(t) = \lambda u(t)$ . A l'aide de (3.25), on obtient

$$\lambda \|u\|_1 = \|T(u)\|_1 \leq 4 \left( \|h\|_{L^1} \|u\|_1^\alpha + \|g\|_{L^1} \|u\|_1^\beta + \|k\|_{L^1} \right). \quad (3.28)$$

comme  $\|u\|_1 = 1$  donc  $\lambda \leq 4(M + N)$ . Primo si  $m \leq 1$  alors

$$\lambda \leq 8N < 1, \quad (3.29)$$

d'où  $\lambda < 1$ , ce qui contredit le fait que  $\lambda > 1$ . En vertu de l'alternative non linéaire de

Leray-Schauder on conclut que  $T$  à un point fixe  $u^* \in \overline{\Omega}$  et alors le problème aux limites (3.5)-(3.6) a une solution non triviale  $u^* \in E$ .

Seconda, si  $m \geq 1$  alors

$$\lambda \leq 8M < 1. \quad (3.30)$$

Similairement au raisonnement ci-dessus, on trouve  $\lambda < 1$ , alors  $T$  a un point fixe  $u^* \in \overline{\Omega}$  qui est une solution non triviale pour le problème aux limites (3.5)-(3.6). ■

### 3.4 Positivité de la solution

Cette section, est consacrée pour l'étude de la positivité de la solution du problème aux limites (3.5)-(3.6).

**Lemme 3.3** *Pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $t \in [\tau, 1]$  avec  $0 < \tau < 1$ , les fonction  $G$  et  $G'$  vérifient les propriétés suivantes :*

$$\frac{2}{7}\tau\varphi(s) \leq G(t, s) \leq \varphi(s), \quad (3.31)$$

et

$$\frac{2}{7}\varphi(s) \leq G'_t(t, s) \leq \frac{1}{7} \left( 3 + \frac{4}{\tau} \right) \varphi(s), \quad (3.32)$$

où

$$G'_t(t, s) = \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{s}{4}(3 - s^2), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 1 + \frac{s}{4}(3 - s^2), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

et  $\varphi(s) = (7/4)s$ .

**Preuve.** On commence par la démonstration de (3.31). En effet, si  $0 \leq s \leq t \leq 1$ , alors

$$G(t, s) = \frac{s}{4}(4 + 3s - ts^2) \leq \frac{7}{4}s, \quad (3.34)$$

et si  $0 \leq t \leq s \leq 1$ , alors

$$G(t, s) = \frac{t}{4}(4 + 3s - s^3) \leq \frac{7}{4}s, \quad (3.35)$$

il en résulte que

$$\forall s, t \in [0, 1] : G(t, s) \leq \varphi(s). \quad (3.36)$$

D'autre part, si  $s \leq t$  et  $t \geq \tau$ , alors

$$G(t, s) = s + \frac{st}{4} (3 - s^2) \geq \frac{2}{7} \tau \varphi(s), \quad (3.37)$$

et si  $s \geq t \geq \tau$ , alors

$$G(t, s) = t + \frac{st}{4} (3 - s^2) \geq \frac{st}{4} (3 - s^2) \geq \frac{2}{7} \tau \varphi(s), \quad (3.38)$$

ce qui donne

$$\forall s \in [0, 1], \forall t \in [\tau, 1] : G(t, s) \geq \frac{2}{7} \tau \varphi(s). \quad (3.39)$$

En combinant les inégalités (3.36) et (3.39), il en découle que

$$\forall s \in [0, 1], \forall t \in [\tau, 1] : \frac{2}{7} \tau \varphi(s) \leq G(t, s) \leq \varphi(s). \quad (3.40)$$

De même, on va démontrer (3.32). En fait, si  $0 \leq s \leq t \leq 1$ , alors

$$G'_t(t, s) = \frac{s}{4} (3 - s^2) \leq \frac{3}{4} s = \frac{3}{7} \varphi(s), \quad (3.41)$$

et si  $s \geq t \geq \tau$ , alors

$$G'_t(t, s) = 1 + \frac{s}{4} (3 - s^2) \leq 1 + \frac{3}{4} s \leq \frac{1}{7} \left( 3 + \frac{4}{\tau} \right) \varphi(s), \quad (3.42)$$

des inégalités (3.41) et (3.42), il vient que

$$\forall s \in [0, 1], \forall t \in [\tau, 1] : G'_t(t, s) \leq \frac{1}{7} \left( 3 + \frac{4}{\tau} \right) \varphi(s). \quad (3.43)$$

D'autre part, si  $0 \leq s \leq t \leq 1$ , alors

$$G'_t(t, s) = \frac{s}{4} (3 - s^2) \geq \frac{1}{2} s = \frac{2}{7} \varphi(s), \quad (3.44)$$

et si  $s \geq t \geq \tau$ , alors

$$G'_t(t, s) = 1 + \frac{s}{4} (3 - s^2) \geq \frac{s}{4} (3 - s^2) \geq \frac{2}{7} \varphi(s), \quad (3.45)$$

des inégalités (3.44) et (3.45), on obtient

$$\forall s \in [0, 1], \forall t \in [\tau, 1] : G'_t(t, s) \geq \frac{2}{7} \varphi(s). \quad (3.46)$$

Maintenant en combinant (3.43) et (3.46), on aboutit à

$$\frac{2}{7} \varphi(s) \leq G'_t(t, s) \leq \frac{1}{7} \left( 3 + \frac{4}{\tau} \right) \varphi(s). \quad (3.47)$$

Ce qui termine la preuve. ■

Dés lors, on pose les hypothèses suivantes :

Q1)  $f(t, u, v) = a(t) f_1(u, v)$ , où  $a \in C((0, 1), \mathbb{R}_+)$  et  $f_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ .

Q2)  $0 < \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds < \infty$ .

**Lemme 3.4** *Si  $u \in E^+$ , alors la solution du problème aux limites (3.1)-(3.2) est positive et satisfait*

$$\min_{t \in [\tau, 1]} (u(t) + u'(t)) \geq \gamma \|u\|_1, \quad (3.48)$$

où  $\gamma = \min \left\{ \frac{2}{7} \tau, \frac{2\tau}{3\tau+4} \right\}$ .

**Preuve.** En tenant compte des membres droits des inégalités (3.31) et (3.32), on obtient

$$u(t) \leq \int_0^1 \varphi(s) a(s) f_1(u(s), u'(s)) ds, \quad (3.49)$$

$$u'(t) \leq \frac{1}{7} \left( 3 + \frac{4}{\tau} \right) \int_0^1 \varphi(s) a(s) f_1(u(s), u'(s)) ds, \quad (3.50)$$

d'où

$$\int_0^1 \varphi(s) a(s) f_1(u(s), u'(s)) ds \geq \|u\|, \quad (3.51)$$

$$\int_0^1 \varphi(s) a(s) f_1(u(s), u'(s)) ds \geq \frac{7\tau}{3\tau + 4} \|u'\|. \quad (3.52)$$

En outre, en regardant les membres gauches des inégalités (3.31) et (3.32), on trouve

$$u(t) \geq \frac{2}{7} \tau \|u\|, \quad (3.53)$$

$$u'(t) \geq \frac{2\tau}{3\tau + 4} \|u'\|. \quad (3.54)$$

Finalement en combinant (3.53) and (3.54), il en résulte que

$$\min_{t \in [\tau, 1]} (u(t) + u'(t)) \geq \min \left\{ \frac{2}{7} \tau, \frac{2\tau}{3\tau + 4} \right\} \|u\|_1. \quad (3.55)$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Pour la suite on a besoin de définir les quantités suivantes :

$$A_0 = \lim_{(|u|+|v|) \rightarrow 0} \frac{f_1(u, v)}{|u| + |v|}, \quad A_\infty = \lim_{(|u|+|v|) \rightarrow \infty} \frac{f_1(u, v)}{|u| + |v|}.$$

Lorsque  $A_0 = 0$  et  $A_\infty = \infty$  on est placé dans le cas sur-linéaire, par ailleurs si  $A_0 = \infty$  and  $A_\infty = 0$  il s'agit du cas sous-linéaire.

**Théorème 3.3** *Sous les hypothèses (Q1)-(Q2), le problème aux limites (3.5)-(3.6) a au moins une solution positive dans les deux cas, le sur-linéaire ainsi que dans le sous-linéaire.*

On démontre ce résultat via le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii.

**Preuve.** D'abord on définit l'ensemble suivant :

$$K = \left\{ u \in E^+, \min_{t \in [\tau, 1]} (u(t) + u'(t)) \geq \gamma \|u\|_1 \right\}, \quad (3.56)$$

Comme  $K$  est un sous ensemble non vide fermé et convexe dans  $E$ , on déduit que  $K$  est un cône. En plus, on peut vérifier que  $T(K) \subset K$ . De la démonstration du théorème 3.2, on conclut que  $T$  est complètement continu dans  $E$ .

On commence par le cas sur-linéaire. Puisque  $A_0 = 0$ , donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists R_1 > 0$ , tels que

$$f_1(u, v) \leq \varepsilon (|u| + |v|),$$

pour  $0 < |u| + |v| \leq R_1$ . On pose  $\Omega_1 = \{u \in E, \|u\|_1 < R_1\}$ , alors pour tout  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , on a

$$Tu(t) \leq \varepsilon \|u\|_1 \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds. \quad (3.57)$$

et

$$Tu'(t) \leq \frac{1}{7} \left( 3 + \frac{4}{\tau} \right) \varepsilon \|u\|_1 \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds. \quad (3.58)$$

De ces deux dernières inégalités, on déduit que

$$\|Tu\|_1 \leq \frac{2}{7} \left( 5 + \frac{2}{\tau} \right) \varepsilon \|u\|_1 \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds. \quad (3.59)$$

En vue de l'hypothèse (Q<sub>2</sub>), on peut choisir  $\varepsilon$  telle que

$$\varepsilon \leq \frac{1}{\frac{2}{7} \left( 5 + \frac{2}{\tau} \right) \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds}. \quad (3.60)$$

Alors, il en résulte que  $\|Tu\|_1 \leq \|u\|_1, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ .

Maintenant, si  $A_\infty = \infty$ , on a  $\forall L > 0, \exists R_2 > 0$ , tel que  $f_1(u, v) \geq L(|u| + |v|)$  pour  $|u| + |v| \geq R_2$ .

Soit  $\Omega_2 = \{u \in E : \|u\|_1 < R\}$ , où  $R = \max\left\{2R_1, \frac{R_2}{\gamma}\right\}$ . Si  $u \in K \cap \partial\Omega_2$  alors

$$\min_{t \in [\tau, 1]} (u(t) + u'(t)) \geq \gamma \|u\|_1 = \gamma R \geq R_2. \quad (3.61)$$

A l'aide des membres gauches des inégalités (3.31) et (3.32), il vient que

$$Tu(t) \geq \frac{2}{7}\tau \int_0^1 \varphi(s) a(s) f_1(u(s), u'(s)) ds,$$

ainsi

$$Tu(t) \geq \frac{2}{7}\tau \gamma L \|u\|_1 \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds. \quad (3.62)$$

De plus,

$$T'u(t) \geq \frac{2}{7}\gamma L \|u\|_1 \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds. \quad (3.63)$$

En vue des inégalités (3.62) et (3.63), on peut écrire

$$Tu(t) + T'u(t) \geq \frac{2}{7}(\tau + 1) L \gamma \|u\|_1 \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds. \quad (3.64)$$

En choisissant  $L$  telle que

$$L \geq \left[ \frac{2}{7}(\tau + 1) \gamma \int_0^1 \varphi(s) a(s) ds \right]^{-1}, \quad (3.65)$$

il en découle que

$$\|Tu\|_1 \geq \|u\|_1, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_2. \quad (3.66)$$

Alors l'opérateur  $T$  à un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$  tel que  $R_2 \leq \|u\|_1 \leq R$ .

*Idem*, pour le cas sous-linéaire. ■

### 3.5 Exemples

Afin d'illustrer nos résultats, on considère les exemples suivants :

**Exemple 3.1** *On considère le problème aux limites*

$$u''(t) = \frac{u}{2(t+3)\ln(t+3)} + \frac{e^{-t}}{8(1+t^4)} \sin u', \quad 0 < t < 1, \quad (3.67)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 tu(t) dt.$$

*On choisit  $g_1(t) = 1/2(t+3)\ln(t+3)$ ,  $g_2(t) = e^{-t}/8(1+t^4)$ . On peut vérifier facilement que  $\|g_1\|_{L^1} + \|g_2\|_{L^1} = 0.185 < 1/4$  ainsi que les hypothèses  $(H_1) - (H_3)$  du théorème 3.1 sont satisfaites, alors, le problème aux limites (3.67) admet une solution unique dans  $E$ .*

**Exemple 3.2** *Le problème aux limites suivant*

$$u''(t) = \frac{1}{10(t+2)} \ln(t+2) \frac{1 + |u(t)|^{1/5}}{1 + |u(t)|} - \frac{1}{2(3t+1)^4} \frac{|u'(t)|^{4/3}}{1 + |u(t)|^2} \quad (3.68)$$

$$+ \frac{1}{10(t+2)} \ln(t+2), \quad 0 < t < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 tu(t) dt,$$

*admet au moins une solution dans  $E$ . En effet, on a*

$$|f(t, u, u')| \leq h(t) |u(t)|^{1/5} + g(t) |u'(t)|^{4/3} + k(t),$$

*où  $h(t) = k(t) = 1/10(t+2)\ln(t+2)$ ,  $g(t) = 1/2(3t+1)^4$ , avec  $\|h\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} \approx 0.09 < 1/8$  et  $\|k\|_{L^1} = \int_0^1 (1/10(t+2)) \ln(t+2) dt = 0.0363 < 1/8$ . En vertu du théorème 3.2, on déduit l'existence d'au moins une solution dans  $E$ .*

## Chapitre 4

# Existence de solutions d'un problème aux limites multipoints par la méthode de sous et sur solutions

Ce chapitre est dévoué à l'étude d'existence de solutions d'un problème aux limites multipoints engendré par une équation différentielle du second ordre, le terme non linéaire dépend de la première dérivée et satisfait la condition de Nagumo, comme il peut être régulier ou bien singulier. La technique essentielle utilisée est la méthode de sous et sur solutions. Les résultats de ce chapitre sont soumis pour publication.

## 4.1 Introduction

L'étude des problèmes aux limites multipoints engendrés par des équations différentielles ordinaires linéaire du second ordre a été considérée pour la première fois par Il'in et Moiseev [38]. Depuis lors, de nombreux auteurs ont également étudié des problèmes aux limites multipoints non linéaires du second ordre. Dans ce chapitre on s'intéressera particulièrement, par ceux avec des termes non linéaires dépendants de la première dérivée. Ces derniers ont été considérés par plusieurs auteurs, dans la plupart des travaux le terme de non linéarité prend l'une des formes suivantes :

$$u''(t) = \mu f(t, u(t), u'(t)), \quad (4.1)$$

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) + e(t), \quad (4.2)$$

$$\text{et } u''(t) = q(t) f(t, u(t), u'(t)). \quad (4.3)$$

Ntouyas et Tsamatos [49] ont considéré la première forme de la fonction  $f$ , ils ont démontré les résultats d'existence pour le problème aux limites :

$$u''(t) = \mu f(t, u(t), u'(t)), \quad 0 < t < 1, \quad (4.4)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k), \quad (4.5)$$

où  $f : [0, 1] \times (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $L^1$ -Carathéodory,  $0 < \eta_k < 1$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ , ( $k = 1, \dots, m$ ),

$\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \eta_k \neq 1$  et  $\mu \in (0, \mu_0]$ , tel que  $\mu_0$  est une constante appropriée, sous l'hypothèse

$$|f(t, u, v)| \leq M_1(t) \zeta_1(|u|) + M_2(t) \zeta_2(|v|), \quad (4.6)$$

où  $\zeta_1, \zeta_2$  sont des fonctions croissantes et  $M_1, M_2 \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$ . Les preuves ont été fondées sur la valeur interdite.

Przeradzki et Stańczy [53] ont étudié la première forme, pour  $\mu = 1$  avec les conditions

aux limites considérées dans [49], où  $f : [0, 1] \times (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,  $\lambda_k \in (0, \infty)$ ,  $0 < \eta_k < 1$ , ( $k = 1, \dots, m$ ),  $0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < 1$ , avec  $\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \eta_k = 1$  (dans ce cas il s'agit d'un problème avec résonance). Ils ont appliqué le théorème de continuation de Mawhin pour prouver les résultats d'existence pour les deux versions, scalaire et multidimensionnelle.

La deuxième forme a été également étudiée par plusieurs auteurs assujettis aux différents types de conditions aux limites multipoints, où  $f$  peut être continue, Carathéodry ou  $L^1$ -Carathéodory et la fonction  $e(t)$  est dans  $L^1[0, 1]$ . Pour plus de détails, voir [35, 21, 47]. En ce qui concerne la dernière forme, on peut consulter [62].

Le plan de ce chapitre est le suivant. On commence par la présentation de notre problème aux limites en exprimant la cause motivante de cette étude, après on donne quelques lemmes et définitions préliminaires, à savoir les sous et sur solutions, la condition de Nagumo, le problème modifié, le théorème du point fixe de Schauder et le lemme concernant la forme de la solution du problème aux limites considéré. Par la suite, on énonce et on démontre les résultats d'existence de solutions dans le cas régulier. La dernière section sera consacrée pour les résultats d'existence de solutions dans le cas singulier.

## 4.2 Position du problème et motivation

Dans ce chapitre, on va utiliser la méthode de sous et sur solutions pour démontrer l'existence d'au moins une solution pour le problème aux limites :

$$u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.7)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k), \quad (4.8)$$

où  $f$  est une fonction continue et vérifiant la condition de Nagumo, comme elle peut être régulière ou bien singulière aux points  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $u = 0$  tels que  $0 < \eta_k < 1$ ,  $\lambda_k > 0$

$(k = 1, \dots, m)$ ,  $0 < \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \leq 1$  et  $\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \eta_k \neq 1$ . De plus, dans le cas singulier  $u = 0$ , on donne quelques conditions tout en construisant les sous et sur solutions afin d'obtenir une solution positive.

L'équation différentielle (4.7) assujettie à des conditions aux limites périodiques, Dirichlet, non locales ou d'autres a été l'objet de beaucoup d'articles. On cite ici, en particulier les travaux qui ont utilisé la méthode de sous et sur solutions.

Jiang [40] a étudié (4.7) avec les conditions aux limites  $u(0) = u(1) = 0$  à l'intermédiaire de la méthode de sous et sur solutions, en admettant que la singularité peut apparaître au point  $t = 0$ ,  $t = 1$  et  $u = 0$ , et que la fonction  $f$  peut être sur-linéaire à  $u = \infty$  et qu'elle change de signe.

dans [39] Jia et Liu ont considéré (4.7) avec les conditions aux limites  $u'(0) = a$ ,  $u(1) = b$ , où  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ils ont obtenu l'existence et l'unicité de la solution via la méthode de sous et sur solutions en considérant un cône spécial.

Dans d'autres travaux on trouve une combinaison de la méthode citée ci-dessus avec d'autres techniques. Minghe et Chang [48] ont associé la méthode de sous et sur solutions avec le degré de Leray-Schauder pour la résolution de l'équation (4.7), avec les conditions aux limites :

$$\psi(u(0), u'(0)) = 0, \quad \psi^*(u(1), u'(1)) = g(u(\eta)),$$

où  $\psi$  et  $\psi^*$  sont deux fonctions continues, puis ils ont appliqué la méthode de quasi linéarisation pour la même équation différentielle (4.7) avec ces conditions aux limites

$$au(0) - bu'(0) = c, \quad u(1) = g(u(\eta)),$$

où  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $a + b > 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

En fait, il y a des résultats considérables avec l'emploi de la méthode de sous et sur solutions pour différents problèmes aux limites. On remarque que dans la littérature, la plupart des auteurs se sont concentrés sur les problèmes réguliers et seulement quelques-uns entre eux qui ont traité ceux avec des singularités, lorsque  $f$  dépend de la première

dérivée. Motivé par ce fait, on va se concentrer d'une façon particulière dans ce chapitre sur le cas singulier.

Il est à mentionner que le plus grand pas dans l'étude des problèmes aux limites avec singularités a été pris par Habets et Zanolin [36] pour l'équation d'emden-fowler généralisée :

$$\begin{aligned} u''(t) + f(t, u(t)) &= 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

où les singularités de la fonction  $f$  sont aux points  $t = 0$ ,  $t = 1$  et  $u = 0$ .

Par la suite, De Coster et Habets [12] ont apporté plus de conditions que celles supposées par Habets and Zanolin [36]. D'autres travaux qui traitent des problèmes aux limites avec des singularités, via la méthode de sous et sur solutions, peuvent être trouvés dans [56, 57, 62].

### 4.3 Préliminaires

Tout au long de ce chapitre la norme considérée est  $\|u\|_1 = \max\{\|u\|, \|u'\|\}$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme  $\|u\| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|$ .

On commence tout d'abord par la présentation du lemme qui étudie un problème auxiliaire pour avoir la forme de la solution du problème aux limites (4.7) – (4.8).

**Lemme 4.1** *Soit  $y \in C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \eta_k \neq 1$ , alors la solution du problème aux limites auxiliaire suivant :*

$$\begin{cases} u''(t) = -y(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k), \end{cases} \quad (4.9)$$

est donnée par :

$$u(t) = \omega t \int_0^1 (1-s)y(s) ds - \int_0^t (t-s)y(s) ds - \omega t \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)y(s) ds, \quad (4.10)$$

où  $\omega = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \eta_k}$ . De plus,

$$u'(t) = \omega \int_0^1 (1-s)y(s) ds - \int_0^t y(s) ds - \omega \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)y(s) ds. \quad (4.11)$$

**Preuve.** En intégrant l'équation différentielle  $u''(t) = -y(t)$ , deux fois sur l'intervalle  $[0, t]$ , on obtient

$$u(t) = - \int_0^t (t-s)y(s) ds + C_1 t + C_2. \quad (4.12)$$

A partir de la première condition au bord  $u(0) = 0$ , on trouve  $C_2 = 0$ .

Puis en prenant compte de  $\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \eta_k \neq 1$  et à l'aide de la deuxième condition au bord  $u(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k)$ , il vient que

$$C_1 = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \eta_k} \left( \int_0^1 (1-s)y(s) ds - \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)y(s) ds \right). \quad (4.13)$$

Alors, il en résulte que

$$u(t) = \omega t \int_0^1 (1-s)y(s) ds - \int_0^t (t-s)y(s) ds - \omega t \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)y(s) ds. \quad (4.14)$$

■

Le théorème du point fixe suivant sera combiné avec la méthode de sous et sur solutions pour établir tous les résultats d'existence de solutions de ce chapitre.

**Lemme 4.2 (Théorème du point fixe de Schauder)**[13] *Soit  $\Omega$  un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach  $E$ . Soit  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  un opérateur complètement continu. Alors  $T$  a un point fixe dans  $\Omega$ .*

**Définition 4.1 (Sous solution)**[11]. Une fonction  $\alpha \in C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1)$  est une sous solution du problème aux limites (4.7)-(4.8) si :

- (a)  $\alpha(0) \leq 0, \alpha(1) \leq \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \alpha(\eta_k),$
- (b) pour tout  $t \in (0, 1),$

$$\alpha''(t) + f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \geq 0.$$

**Définition 4.2 (Sur solution)**[11]. Une fonction  $\beta \in C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1)$  est une sur solution du problème aux limites (4.7)-(4.8) si :

- (a)  $\beta(0) \geq 0, \beta(1) \geq \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \beta(\eta_k),$
- (b) pour tout  $t \in (0, 1),$

$$\beta''(t) + f(t, \beta(t), \beta'(t)) \leq 0.$$

**Définition 4.3 (Modification du terme non linéaire)** Soient  $\alpha, \beta \in C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1)$  respectivement les sous et sur solutions du problème aux limites (4.7)-(4.8) telles que  $\alpha(t) \leq \beta(t), \forall t \in [0, 1]$  et soit  $b > 0$  tel que  $b > \max\{|\alpha'(t)|, |\beta'(t)| / t \in [0, 1]\} + a,$  où  $a = \max\{\beta(1) - \alpha(0), \beta(0) - \alpha(1)\}.$  On définit

$$f^*(t, u, u') = \begin{cases} f(t, u, -b), & \text{si } u' < -b, \\ f(t, u, u'), & \text{si } -b \leq u' \leq b, \\ f(t, u, b), & \text{si } u' > b, \end{cases} \quad (4.15)$$

et

$$F(t, u, u') = \begin{cases} f^*(t, \alpha(t), u') + \frac{\alpha(t)-u}{|\alpha(t)-u|+p}, & \text{si } u < \alpha(t), \\ f^*(t, u, u'), & \text{si } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ f^*(t, \beta(t), u') + \frac{\beta(t)-u}{|\beta(t)-u|+p}, & \text{si } u > \beta(t), \end{cases} \quad (4.16)$$

avec  $p \geq 1.$  La fonction  $F(t, u, u')$  est dite la modification de  $f(t, u, u')$  associée au triplé  $\alpha, \beta, b.$

A partir de la définition de  $F(t, u, u')$ , on déduit qu'elle est continue et bornée sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$  et que  $|F(t, u, u')| \leq M$ , avec  $M = M_0 + 1$  où

$$M_0 = \max \{ |f(t, u, u')| : t \in [0, 1] / \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), |u'(t)| \leq b \}.$$

Dés lors, on considère le problème modifié suivant :

$$u''(t) + F(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.17)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k),$$

On peut vérifier facilement que les solutions du problème modifié (4.17) coïncident avec celles du problème (4.7)-(4.8).

### Condition de Nagumo

Lorsque le terme non linéaire dépend de  $u'$ , l'existence uniquement des sous et sur solutions ne suffit pas pour garantir l'existence de la solution. La condition de Nagumo permet a priori de déduire des bornes sur la dérivée. On présente les deux versions de la condition de Nagumo, la régulière ainsi que la singulière.

**Définition 4.4** (*Condition de Nagumo dans le cas régulier*) Soient  $\alpha, \beta$  respectivement les sous et sur solutions du problème aux limites (4.7)-(4.8) telles que  $\alpha(t) \leq \beta(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  et  $D$  l'ensemble défini par

$$D = \{ (t, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2 / \alpha(t) \leq u \leq \beta(t) \}.$$

On dit qu'une fonction continue  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait la condition de Nagumo sur  $D$  s'il existe une fonction continue  $H \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+)$  telle que

$$|f(t, u, v)| \leq H(|v|), \quad \forall (t, u, v) \in D \text{ avec } |v| \geq a, \quad (4.18)$$

et

$$\int_a^{+\infty} \frac{s ds}{H(s)} > \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t). \quad (4.19)$$

Où

$$a = \max \{ \beta(1) - \alpha(0), \beta(0) - \alpha(1) \}. \quad (4.20)$$

**Définition 4.5** (*Condition de Nagumo dans le cas singulier*) Soient  $\alpha, \beta$  respectivement les sous et sur solutions du problème aux limites (4.7)-(4.8) telles que  $\alpha(t) \leq \beta(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  et  $D^*$  l'ensemble défini par

$$D^* = \{ (t, u, v) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^2 / \alpha(t) \leq u \leq \beta(t) \}.$$

On dit qu'une fonction continue  $f : (0, 1) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait la condition de Nagumo sur  $D^*$  s'il existe deux fonctions  $K \in L^1((0, 1), \mathbb{R}_+^+)$  et  $H \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^+)$  telles que

$$|f(t, u, v)| \leq K(t) H(|v|), \quad \forall (t, u, v) \in D^* \text{ avec } |v| \geq a, \quad (4.21)$$

où

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{H(s)} = +\infty. \quad (4.22)$$

## 4.4 Résultats d'existence de solutions dans le cas régulier

Dans cette section, on établit un résultat d'existence de la solution lorsque le terme non linéaire  $f$  est régulier. Cependant, on présente d'abord le lemme qui fournit a priori une borne de  $u'$ .

**Lemme 4.3** Soient  $\alpha, \beta$  respectivement les sous et sur solutions du problème aux limites (4.7)-(4.8) telles que  $\alpha \leq \beta$  et  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant la

condition de Nagumo sur l'ensemble  $D$ , alors pour chaque solution  $u$  de (4.7) vérifiant  $\alpha \leq u \leq \beta$ , il existe  $b > 0$ , tel que

$$\|u'\| < b. \quad (4.23)$$

**Preuve.** Soit  $u$  une solution de (4.7) vérifiant  $\alpha \leq u \leq \beta$ . A partir de la définition de  $a$ , on peut conclure qu'il existe  $\theta \in [0, 1]$  tel que  $|u'(\theta)| \leq a$ .

De (4.19), on peut choisir une constante  $b > a$  qui vérifie l'inégalité

$$\int_a^b \frac{s ds}{H(s)} > \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t).$$

Maintenant, on suppose qu'il existe un intervalle  $I = [t_1, t_2]$  (ou  $I = [t_2, t_1]$ ) de sorte que  $u'(t) \geq a, \forall t \in I$ ,  $u'(t_1) = a$  et  $u'(t_2) = b$ . En posant  $s = u'(t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{s ds}{H(s)} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'(t) u''(t)}{H(u'(t))} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'(t) f(t, u(t), u'(t))}{H(u'(t))} d\omega \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} u'(t) dt \right| \\ &= |u(t_2) - u(t_1)| \leq \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t) < \int_a^b \frac{s ds}{H(s)}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

on a ainsi une contradiction, donc  $u'(t) < b$ . De même, on peut démontrer que  $u'(t) > -b, \forall t \in I$ . ■

**Théorème 4.1** Soit  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant la condition de Nagumo sur  $D$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les sous et sur solutions du problème aux limites (4.7)-(4.8),  $\alpha(t) \leq \beta(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $0 < \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \leq 1$ .

Alors le problème aux limites (4.7)-(4.8) a au moins une solution  $u \in C^2[0, 1]$  et

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Preuve.** En effet, on cherche l'existence de solutions pour le problème modifié, donné par (4.17).

La preuve s'opère en deux étapes.

**Etape 1 :** Existence de la solution. On pose  $F(s) = F(s, u(s), u'(s))$ .

On définit l'opérateur  $T : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$  par

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \omega t \int_0^1 (1-s) F(s) ds - \int_0^t (t-s) F(s) ds \\ &\quad - \omega t \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s) F(s) ds, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.25)$$

et au lieu de chercher une solution pour le problème (4.17), on cherche l'existence d'un point fixe pour  $T$ .

D'abord, on doit montrer que  $T$  est complètement continu.

Soit  $M$  la borne de  $F$  sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ . Il s'ensuit que

$$|Tu(t)| \leq (2\omega + 1) M, \quad (4.26)$$

ainsi que

$$|T'u(t)| \leq (2\omega + 1) M, \quad (4.27)$$

Alors,  $T$  envoie l'ensemble fermé, borné et convexe

$$B = \{u \in C^1[0, 1] : |u(t)| \leq (2\omega + 1) M, |u'(t)| \leq (2\omega + 1) M, \} \quad (4.28)$$

dans lui même. En outre, pour tout  $u \in C^1[0, 1]$  et  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $t_1 < t_2$  tels que  $|t_1 - t_2| < \epsilon$ , on a

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq 2(t_2 - t_1)(\omega + 1) M, \quad (4.29)$$

et

$$|T'u(t_1) - T'u(t_2)| \leq (t_2 - t_1) M, \quad (4.30)$$

par passage à la limite, lorsque  $t_1 \rightarrow t_2$ , on a  $|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \rightarrow 0$  et  $|T'u(t_1) - T'u(t_2)| \rightarrow 0$ . Donc  $\{Tu\}$  est équicontinu et par conséquent  $T$  est un opérateur complètement continu,

en vue du théorème d'Arzela -Ascoli. Le théorème du point fixe de Schauder, permet de conclure que  $T$  a un point fixe qui est une solution du problème aux limites modifié.

**Etape 2 :** Localisation de la solution. On doit montrer que si  $u$  est une solution, elle doit satisfaire

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \forall t \in [0, 1].$$

En supposant le contraire, on admet qu'il existe  $t_0 \in [0, 1]$  tel que

$$\min_{t \in [0, 1]} (u(t) - \alpha(t)) = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0, \quad (4.31)$$

par conséquent, on a certains cas à considérer comme suit :

**Cas 1 :** Si  $t_0 \in (0, 1)$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq u''(t_0) - \alpha''(t_0) \\ &= -f(t_0, \alpha(t_0), \alpha'(t_0)) - \frac{\alpha(t_0) - u(t_0)}{|\alpha(t_0) - u(t_0)| + p} + f(t_0, \alpha(t_0), \alpha'(t_0)) < 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

qui est une contradiction, donc le minimum de  $u - \alpha$  n'est pas atteint au point  $t_0$ .

**Cas 2 :** Si  $t_0 = 0$ , on a

$$u(0) - \alpha(0) < 0. \quad (4.33)$$

D'un autre côté, puisque  $u$  est une solution, on a  $u(0) = 0$  et par conséquent  $\alpha(0) > 0$ , ce qui contredit le fait que  $\alpha$  est une sous solution.

**Cas 3 :** Si  $t_0 = 1$ , il s'ensuit que,

$$u(1) - \alpha(1) < 0. \quad (4.34)$$

Comme  $\alpha$  est une sous solution et  $u$  est une solution, alors

$$\alpha(1) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha(\eta_k), \quad u(1) = \sum_{k=1}^m \lambda_k u(\eta_k). \quad (4.35)$$

Ainsi, on obtient

$$u(1) - \alpha(1) \geq \sum_{k=1}^m \lambda_k u(\eta_k) - \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha(\eta_k). \quad (4.36)$$

Du fait que  $0 < \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \leq 1$  et  $(u(1) - \alpha(1))$  est un minimum de  $u - \alpha$  alors, on obtient

$$u(1) - \alpha(1) > \sum_{k=1}^m \lambda_k (u(1) - \alpha(1)) \geq u(1) - \alpha(1), \quad (4.37)$$

donc, on a une contradiction. Appliquant ce même raisonnement une autre fois, on prouve que  $u(t) \leq \beta(t), \forall t \in [0, 1]$ . ■

## 4.5 Résultats d'existence de solutions dans le cas singulier

Dans cette section, on va se pencher sur le cas où le terme non linéaire  $f$  peut avoir des singularités au niveau de ses deux premières variables.

**Lemme 4.4** *Soient  $\alpha, \beta$  respectivement les sous et sur solutions du problème aux limites (4.7)-(4.8) telles que  $\alpha \leq \beta$  et  $f : (0, 1) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant la condition de Nagumo sur l'ensemble  $D^*$ , alors pour chaque solution  $u$  (4.7) vérifiant  $\alpha \leq u \leq \beta$ , il existe  $b^* > 0$ , tel que*

$$\|u'\| < b^*. \quad (4.38)$$

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du lemme 4.3. ■

Maintenant, on donne un théorème d'existence où la fonction  $f$  a des singularités aux points  $t = 0$  et  $t = 1$ .

**Théorème 4.2** *Soit  $f : (0, 1) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant la condition de Nagumo sur  $D^*$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les sous et sur solutions du problème aux limites (4.7)-(4.8), telles que  $\alpha(t) \leq \beta(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$  avec  $0 < \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \leq 1$ .*

Alors le problème aux limites (4.7)-(4.8) a au moins une solution  $u \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$  et

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Preuve.** On définit les suites  $(a_n)_n, (b_n)_n \subset (0, 1)$  et  $(A_n)_n, (B_n)_n \subset \mathbb{R}$ , telles que  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 1, A_n \rightarrow 0$  et  $B_n \rightarrow \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k), a_1 \leq \eta_k \leq b_1, \alpha(a_n) \leq A_n \leq \beta(a_n)$  et  $\alpha(b_n) \leq B_n \leq \beta(b_n)$ . On considère le problème modifié suivant

$$u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.39)$$

$$u(a_n) = A_n, \quad u(b_n) = B_n. \quad (4.40)$$

En appliquant le théorème 4.1, on conclut que ce problème modifié possède une solution  $u_n$  sur le compact  $[a_n, b_n]$  vérifiant  $\alpha(t) \leq u_n \leq \beta(t)$  et  $|u'_n(t)| < b$ . En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli on montre qu'on peut extraire une sous suite qui converge vers une fonction  $u$  sur tout compact de  $(0, 1)$  et qui vérifie  $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$  et  $|u'(t)| < b$ . En écrivant les limites des suites  $(a_n)_n, (b_n)_n, (A_n)_n, (B_n)_n$  on montre que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 1^-} u(t) = u(1)$ . ■

Maintenant, on donne un théorème d'existence de solution positive, où la singularité de  $f$  peut apparaître aux points  $t = 0, t = 1$  et  $u = 0$ .

**Théorème 4.3** *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

**(H<sub>1</sub>)** *La fonction  $f : (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et satisfait la condition de Nagumo par rapport aux sous et sur solutions données.*

**(H<sub>2</sub>)** *Pour chaque  $V > 0$  fixé, il existe une constante positive  $C_V$  et pour tout ensemble compact  $J \subset (0, 1)$ , il existe  $\varepsilon_J > 0$  tel que*

$$f(t, u, v) \geq C_V, \quad \forall (t, u, v) \in J \times (0, \varepsilon_J] \times [-V, V]. \quad (4.41)$$

**(H<sub>3</sub>)** Il existe  $\rho > 0$  et  $h \in C((0, 1), \mathbb{R}_*^+) \cap L^1[0, 1]$ , telles que

$$|f(t, u, v)| \leq h(t), \quad \forall (t, u, v) \in (0, 1) \times [\rho, +\infty) \times \mathbb{R}. \quad (4.42)$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \eta_k^2 \geq \frac{1}{2} + \frac{\tau_2}{2\tau_1}, \quad (4.43)$$

où  $\tau_1 = \sup h(t)$ ,  $\tau_2 = \inf h(t)$ .

$$\mathbf{(H_4)} \quad \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k = 1.$$

Alors, le problème aux limites (4.7)-(4.8) a au moins une solution positive

$$u \in C([0, 1], \mathbb{R}^+) \cap C^2((0, 1), \mathbb{R}_*).$$

**Preuve.** La démonstration se composera de 5 étapes.

**Étape 1 :** La définition d'une suite de problèmes aux limites.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , on considère l'ensemble compact

$$J_n = \left[ \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right], \quad (4.44)$$

$$\sigma_n(t) = \max \left\{ \frac{1}{2^{n+1}}, \min \left( t, 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right\}, \quad t \in (0, 1), \quad (4.45)$$

et

$$g_n(t, u, v) = \max \{ f(\sigma_n(t), u, v), f(t, u, v) \}, \quad (4.46)$$

on a

$$g_n(t, u, v) = f(t, u, v), \quad (t, u, v) \in J_n \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.47)$$

Comme on définit aussi

$$f_n(t, u, v) = \min \{ g_1(t, u, v), \dots, g_n(t, u, v) \}. \quad (4.48)$$

Il est clair que  $(f_n)$  est une suite continue et décroissante sur  $(0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$  et que

$$f_n(t, u, v) = f(t, u, v), \quad (t, u, v) \in J_n \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad (4.49)$$

ce qui implique que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout sous-ensemble compact de  $(0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ .

On introduit également une suite décroissante  $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_*^+$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0. \quad (4.50)$$

Dés lors, on peut définir la suite des problèmes approximatifs  $(BVP)_n$  :

$$u''(t) + f_n(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.51)$$

$$u(0) = \varepsilon_n, \quad u(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u(\eta_k). \quad (4.52)$$

**Etape 2 :** Construction de la sous solution de  $(BVP)_n$  (4.51)-(4.52) :

$\alpha(t) = \varepsilon_n$  est une sous solution de  $(BVP)_n$ . On a

$$\alpha''(t) + f_n(t, \alpha(t), \alpha'(t)) = f_n(t, \alpha(t), \alpha'(t)) = \min_{1 \leq i \leq n} g_i(t, \alpha, \alpha'), \quad (4.53)$$

$$g_i(t, \alpha, \alpha') \geq f(t, \alpha, \alpha') \geq C_{\varepsilon_n} > 0, \quad (4.54)$$

ce qui implique

$$\alpha''(t) + f_n(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \geq 0. \quad (4.55)$$

En plus

$$\alpha(0) = \varepsilon_n, \quad \alpha(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \varepsilon_n = \varepsilon_n. \quad (4.56)$$

**Etape 3 :** Construction de la sur solution de  $(BVP)_1$ .

De  $(\mathbf{H}_3)$ , on peut choisir  $\rho$  tel que

$$\rho \geq \alpha(t), \quad (4.57)$$

et des hypothèses de l'étape 1, on a

$$f_1(t, u, v) = \max \{f(\sigma_1(t), u, v), f(t, u, v)\}. \quad (4.58)$$

On voit bien que

$$f(\sigma_1(t), u, v) \leq h(\sigma_1(t)) \leq \sup_{t \in [0,1]} h(t) = \tau_1, \quad (4.59)$$

et

$$f(t, u, v) \leq h(t), \quad (4.60)$$

ce qui entraîne que

$$f_1(t, u, v) \leq h(t) + \tau_1. \quad (4.61)$$

Ainsi, on remarque que la solution du problème aux limites suivant

$$z''(t) + h(t) + \tau_1 = 0, \quad (4.62)$$

$$z(0) = \rho, \quad z(1) = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k z(\eta_k), \quad (4.63)$$

qui est donnée par

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \rho - \int_0^t (t-s)(h(s) + \tau_1) ds \\ & + \omega t \int_0^1 (1-s)(h(s) + \tau_1) ds - \omega t \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)(h(s) + \tau_1) ds, \end{aligned} \quad (4.64)$$

est une sur solution de  $(BVP)_1$ . En effet

$$\beta''(t) + f_1(t, \beta, \beta') \leq \beta''(t) + h(t) + \tau_1 = 0, \quad (4.65)$$

et

$$\beta(0) \geq \rho > 0, \quad \beta(1) \geq \sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k \beta(\eta_k). \quad (4.66)$$

D'autre part, de (4.43), on obtient la positivité de l'expression suivante

$$\begin{aligned} & - \int_0^t (t-s)(h(s) + \tau_1) ds + \omega t \int_0^1 (1-s)(h(s) + \tau_1) ds - \\ & - \omega t \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)(h(s) + \tau_1) ds, \end{aligned} \quad (4.67)$$

et a partir de (4.57) et (4.67) on peut confirmer que  $\alpha(t) \leq \beta(t)$ .

En utilisant le théorème 4.2, on conclut que  $(BVP)_1$  a au moins une solution

$u_1 \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$  telle que

$$\alpha(t) \leq u_1(t) \leq \beta(t). \quad (4.68)$$

**Etape 4 :** L'existence d'au moins une solution de  $(BVP)_n$ (4.51)-(4.52).

Il est clair que,  $\forall n \geq 1$

$$\alpha(t) \leq u_n(t) \leq u_{n-1}(t) \leq \dots \leq u_1(t). \quad (4.69)$$

Après avoir pris en compte le fait que  $\alpha(t)$  et  $u_{n-1}(t)$  sont les sous et sur solutions et en appliquant le théorème 4.2 une autre fois, on constate que  $(BVP)_n$  a au moins une solution  $u_n$ .

**Etape 5 :** L'existence d'au moins une solution de BVP (4.7)-(4.8).

Considérons la limite ponctuelle

$$\tilde{u}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t), \quad (4.70)$$

en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli on montre que  $\tilde{u}$  est une solution du problème avec conditions aux limites (4.7)-(4.8) et

$$\tilde{u} \in C((0, 1), \mathbb{R}^+) \cap C^2(0, 1), \mathbb{R}_*). \quad (4.71)$$

En outre, on peut vérifier la continuité de  $\tilde{u}$  aux points  $t = 0$  et  $t = 1$ .

On remarque que

$$\tilde{u}(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad (4.72)$$

$$\tilde{u}(1) = \sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\eta_k) = \sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k \tilde{u}(\eta_k), \quad (4.73)$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

# Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal, Focal Boundary Value Problems for Differential and Difference Equations, vol. 436 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.
- [2] R.A. Agarwal and D. O'Regan, *Infinite interval problems modelling phenomena which arise in the theory of plasma and electrical theory*, Studies. Appl. Math. 111 (2003) 339–358.
- [3] D. R. Anderson, “Green’s function for a third-order generalized right focal problem,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 288, no. 1, pp. 1–14, 2003.
- [4] D. Anderson and R. Avery, “Multiple positive solutions to third-order discrete focal boundary value problem,” Computers & Mathematics with Applications, vol. 42, no. 3–5, pp. 333–340, 2001.
- [5] D. R. Anderson and J. M. Davis, “Multiple solutions and eigenvalues for third-order right focal boundary value problems,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 267, no. 1, pp. 135–157, 2002.
- [6] M. Benchohra, J.J. Nieto, A. Ouahab, *Second order boundary value problem with integral boundary conditions*, Boundary Value Problem, Vol 2011, Article ID 260309, 9 p, 2011.
- [7] S. R. Bernfeld and V. Lakshmikantham, An introduction to nonlinear boundary value problems, Academic Press, Inc., New York and London (1974).

- [8] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1987.
- [9] A. Cabada, *An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions*, *Boundary Value Problems*, Vol 2011, Article ID 893753, 18 p, 2011.
- [10] M. Cherpion, C. De Coster, and P. Habets, *A constructive monotone iterative method for second-order BVP in the presence of lower and upper solutions*, *Applied Mathematics and Computation*, 123 (2001), 75–91.
- [11] C.De Coster and P. Habets, *Two-Point Boundary Value Problems : Lower and Upper Solutions*, *Mathematics in Science and Engineering* , Vol 205, Series Editor : C.K. Chui, Elsevier, 2006.
- [12] C.De Coster and P. Habets, *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems : classical and recent results*, *Non linear analysis and boundary value problems for ordinary differential equations*, F. Zanolin, Ed., vol.371 of CISM Courses and Lectures, pp. 1-78, Springer, Verlag Wien New York, 1996.
- [13] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, Germany, 1985.
- [14] G.S. Dragoni, *II problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine*, *Giornale di Mat (Battaglini)* 69 (1931), 77-112.
- [15] G.S. Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*, *Mathematische Annalen*, Vol. 105(1931), 133-143.
- [16] X. Du, and Z. Zhao, *Existence and uniqueness of smooth positive solutions to a class of singular  $\alpha$ -point boundary value problems*, *Boundary Value Problems*, Vol 2009, Article ID 191627, 13 p, (2009).
- [17] H. Fan and R. Ma, *Loss of positivity in a nonlinear second order ordinary differential equations*, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 437–444.

- [18] M. Feng, *Existence of symmetric positive solutions for a boundary value problem with integral boundary conditions*, Appl. Math. Letters, 24 (2011), 1419-1427.
- [19] M. Feng, B. Du, W. Ge, *Impulsive boundary value problems with integral boundary conditions and one-dimensional  $p$ -Laplacian*, Nonlinear Anal. 70 (2009), 3119-3126.
- [20] M. Feng, W. Ge, *Positive solutions for a class of  $m$ -point singular boundary value problems*, Math. Comput. Modelling 46 (2007) 375-383.
- [21] W. Feng, J.R.L. Webb, *Solvability of  $m$ -point boundary value problems with nonlinear growth*, Journal of mathematical analysis and applications, 212 (1997), 467-480.
- [22] J.R. Graef, C. Qian, B. Yang, *A three point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 287 (2003)217-233.
- [23] J. R. Graef and B. Yang, "Positive solutions of a nonlinear third order eigenvalue problem," Dynamic Systems and Applications, vol. 15, no. 1, pp. 97-110, 2006.
- [24] J. R. Graef and B. Yang, "Existence and nonexistence of positive solutions of a nonlinear third order boundary value problem," in The 8th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, vol. 8 of Proceedings of The 8th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, no. 9, pp. 1-13, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, Hungary, 2008.
- [25] A. Granas, R. Guenther, J. Lee, *Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations*. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 244 (1985), 128 pp.
- [26] M. Gregus, *Third Order Linear Differential Equations*, Reidel, Dordrecht, 1987.
- [27] A. Guezane-Lakoud and S. Kelaiaia, "Solvability of a nonlinear boundary value problem," The Journal of Nonlinear Sciences and Applications, vol. 4, no. 4, pp. 247-261, 2011.
- [28] A. Guezane-Lakoud, S. Kelaiaia, *Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem*, EJDE, Vol. 2010, No. 139, (2010), 1-9.
- [29] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, *Study of a third-order three-point boundary value problem*, AIP Conf. Proc. November 11, Volume 1309, 329-335. 2010.

- [30] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [31] L. -J. Guo, J. -P. Sun, Y. -H. Zhao; Existence of positive solution for nonlinear third-order three-point boundary value problem, *Nonl. Anal.*, 68 (2008), 3151-3158.
- [32] C.P. Gupta, *Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order differential equation*, *J. Math. Anal. Appl.* 168 (1992), 540–551.
- [33] C.P. Gupta, *Existence and uniqueness theorem for a bending of an elastic beam equation*, *Appl. Anal.* 26 (1988) 289-304.
- [34] C.P. Gupta, *Existence and uniqueness results for some fourth order fully quasilinear boundary value problem*, *Appl. Anal.* 36 (1990) 169-175.
- [35] C.P. Gupta, *A generalized multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equation*, *Applied Mathematics and Computation*, 89(1998), 133-146.
- [36] P. Habets and F.Zanolin, *Upper and lower solutions for a generalized Emden-Fowler equation*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 181(1994), 684-700.
- [37] B. Hopkins and N. Kosmatov, *Third-order boundary value problems with sign-changing solutions*, *Nonlinear Analysis*, vol. 67, no. 1, pp. 126–137, 2007.
- [38] V.A. Il'in, E.I. Moiseev, *Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm–Liouville operator*, *Differential Equations*, 23 (1987), pp. 979–987
- [39] M. Jia and X. Liu, *The method of upper and lower solutions for second order non-homogeneous two-point boundary value problem*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2007(2007), No.116, 1-10.
- [40] D. Jiang, *Upper and lower solutions method and a superlinear singular boundary value problem*, *Computers and Mathematics with Applications*, 44(2002), 323-337.
- [41] P. Kang, Z. Wei, and J. Xu, *Positive solutions to fourth order singular boundary value problems with integral boundary conditions in abstract spaces*, *Applied Mathematics and Computation*, 206 (2008), 245-256.

- [42] R.A. Khan and N.A. Asif, *Positive solutions for a class of singular two point boundary value problems*, J. Nonlinear. Sci. Appl. 2 (2009), no 2, 126–135.
- [43] R. A. Khan and J. R. L. Webb, *Existence of at least three solutions of a second-order three-point boundary value problem*, Nonlinear Analysis, 64(2006), 1356–1366.
- [44] S. Li, “Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 323, no. 1, pp. 413–425, 2006.
- [45] B. Liu, *Positive solutions of fourth-order two point boundary value problem*, Appl. Math. Comput. 148 (2004) 407–420.
- [46] R. Ma, *A survey on nonlocal boundary value problems*. Appl. Math. E-Notes 7 (2007), 257–279.
- [47] R. Ma, D. O’Regan, *Solvability of singular second order  $m$ -point boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 301 (2005) 124–134.
- [48] P. Minghe and S. K. Chang, *The generalized quasilinearization method for second-order three-point boundary value problems*, Nonlinear Analysis, 68(2008), 2779–2790.
- [49] S. Ntouyas and P. Tsamatos, *Multi-point boundary value problems for ordinary differential equations*, Analele Stintifice Ale Universitatii "AL.I.CUZA" IASI Tomul XLV, s.I.a, Matematica, 1999, f.1.
- [50] D. O’Regan, *Theory of Singular Boundary Value Problems*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [51] Palamides et Stavrakakisp, *Existence and uniqueness of a positive solution for a third-order three-point boundary value problem*, electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), pp. 1–12.
- [52] E. Picard, *Sur l’application des methodes d’approximations successives à l’étude de certaines équations différentielles ordinaires*, J. de Math. 9 (1893), 217–271.
- [53] B. Przeradzki and R. Stańczy, *Solvability of  $m$ -point boundary value problems at resonance*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 264(2001), 253–261 .

- [54] L. Shuhong and Y-P. Sun, *Nontrivial solution of a nonlinear second order three point boundary value problem*, Appl. Math. J. **22** (1) (2007), 37-47.
- [55] Y. Sun, "Positive solutions of singular third-order three-point boundary value problem," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 306, no. 2, pp. 589–603, 2005.
- [56] Z. Wei, *Some necessary and sufficient conditions for existence of positive solutions for third order singular sublinear multi-point boundary value problem*, Acta Mathematica Scientia, 2014,34B(6) :1795-1810.
- [57] Z. Wei and C. Pang, *The method of lower and upper solutions for fourth order singular  $m$ -point boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006) 675–692.
- [58] B. Yang, *Positive solutions for a fourth order boundary value problem*, E. J. Qual. Theory Diff. Equ. 3 (2005) 1-17.
- [59] X. Zhang, M. Feng, W. Ge, *Existence result of second-order differential equations with integral boundary conditions at resonance*. J. Math. Anal. Appl., 353(2009) 311-319.
- [60] X. Zhang, M. Feng, W. Ge, *Symmetric positive solutions for  $p$ -Laplacian fourth-order differential equations with integral boundary conditions*. J. Comput. Appl. Math., 222(2008) 561-573.
- [61] X. Zhang, W. Ge, *Positive solutions for a class of boundary value problems with integral boundary conditions*, Computers and Mathematics with Applications, 58 (2009), 203-215.
- [62] Q. Zhang and D. Jiang, *Upper and lower solutions method and a second order three-point singular boundary value problem*, Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 1059–1070.

- [63] J. Zhao, P. Wang, W. Ge *Existence and nonexistence of positive solutions for a class of third order BVP with integral boundary conditions in Banach spaces*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 16 (2011), 402-413.