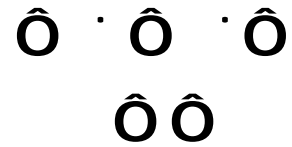


Université Badji Mokhtar  
Annaba

Badji Mokhtar University -  
Annaba



Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Doctorat en Mathématiques  
Option : Mathématiques et Applications

# RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE CLASSE DE PROBLEMES ISSUS DU CONTROLE OPTIMAL DE L'OBSTACLE

Par

ZIREG BILLEL

Sous la direction de

Ghanem Radouen

Devant le jury

**PRESIDENTE : Rebbani Faouzia**, Professeur U.B.M. Annaba

**ENCADREUR : Ghanem Radouen**, M.C.A U.B.M. Annaba

**CO-ENCADREUR : Sissaoui Hocine**, Professeur U.B.M. Annaba

**EXAMINATEUR : Jean-Bernard Baillon**, Professeur U. Paris 1 Panthéon- Sorbonne

**EXAMINATEUR: Aissaoui Mohamed Zine**, M.C.A U. Geulma

**EXAMINATEUR: Laouar Abdelhamid**, M.C.A U.B.M. Annaba

Année : 2014

# Table des matières

Résumé (en français)	5
Résumé (en anglais)	7
Résumé (en arabe)	8
<b>1 Introduction générale</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Problème de contrôle optimal . . . . .	10
1.3 Contrôle optimal de problèmes gouvernés par des inéquations variationnelles . .	17
1.4 Méthode d'approximation de l'opérateur multivoque (Barbu-Friedman) . . . . .	19
1.5 Transformation en un problème de contrôle d'une équation aux dérivées partielles avec contraintes sur l'état et contrainte mixte état et contrôle . . . . .	20
1.6 Notations . . . . .	31
1.7 Le problème de l'obstacle . . . . .	37
<b>2 Problème de contrôle optimal de l'obstacle</b>	<b>39</b>
2.1 Etude numérique du problème de contrôle optimal de l'obstacle . . . . .	46
2.1.1 Algorithme itératif pour le système d'optimalité ( $\mathcal{S}^\delta$ ) . . . . .	46
<b>3 Implementation numérique</b>	<b>75</b>
3.1 Approximation par la méthode des différences finies . . . . .	75
3.2 Calcul numérique . . . . .	79

<b>Table des matières</b>	<b>2</b>
3.2.1 Tests numériques en dimension une . . . . .	79
3.2.2 Tests numériques en dimension deux . . . . .	91
<b>Conclusion</b>	<b>101</b>
<b>Annexe 1</b>	<b>103</b>
<b>Annexe 2</b>	<b>105</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>105</b>

# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier profondément mon directeur de thèse Dr. Ghanem Radouen. Sa disponibilité, ses mots de soutien quand j'avais des difficultés ou des problèmes de motivation, et pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie également de m'avoir donné l'opportunité d'assister à plusieurs congrès internationaux pendant ces longues années de thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Prof. Sissaoui Hocine pour les nombreuses remarques qu'il a fait sur mon travail.

J'adresse mes remerciements aux professeur Rebbani Faouzia et Monsieur Jean-Bernard Baillon pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Je tiens également à remercier Dr. Aissaoui Mohamed Zine et Dr. Laouar Abdelhamid, de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury de thèse.

Je voudrais ajouter mes remerciement à toute ma famille, à mes amis, pour m'avoir toujours encouragée et s'être inquiétés du bon déroulement de mes études.



# Résumé (en français)

Dans ce travail, nous nous intéressons à résoudre numériquement un système d'optimalité d'un problème de contrôle optimal où la fonction d'état vérifie une inéquation variationnelle unilatérale et la fonction de contrôle est l'obstacle [R. Ghanem (Positivity 13 :321-338, 2009)]. Nous avons discrétisé le système d'optimalité par un schéma aux différences finies. Nous avons aussi proposé un algorithme itératif pour la résolution numérique du système d'optimalité. L'algorithme proposé est basé sur la méthode de Gauss-Seidel qui est la combinaison entre la méthode de Newton-Raphson relaxée et la méthode directe. Cette combinaison génère à chaque étape une équation linéaire et construit une suite itérative qui converge vers la solution. La convergence de la méthode et les résultats numériques en dimensions une et deux sont donnés.

**Mots-clés :** Inéquation variationnelle elliptique, Contrôle optimal, Différences finies, Méthode itérative de Newton-Raphson.



# Résumé (en anglais)

We are interested in the numerical solution of the optimality system of an unilateral obstacle control problem where the control function is the obstacle [R. Ghanem (Positivity 13 :321-338, 2009)]. We describe the optimality system by a finite differences scheme. We also propose an iterative algorithm for the numerical solution of the optimality system. The proposed algorithm is based on the Gauss-Seidel method which combines the Newton-Raphson relaxed method and the direct method. This combination generates at each step a linear equation and build an iterative sequence which converges to the solution. The convergence of the method and the numerical results in one and two dimensions are given.

**Keywords :** Elliptic variational inequality, Optimal control, Finite differences, Newton-Raphson iterative method.

# ملخص

في هذا العمل نهتم بالدراسة الرقمية لنظام المثالية لمشكل مراقبة العائق المثالي, أين تكون دالة الحال هي حل لمراجعة التغيرات الأحادية حيث دالة المراقبة هي العائق.

قمنا بتقريب النظام بطريقة فروق المنتهية [R.Ghanem (Positivity 13:321-338, 2009)] قمنا بوضع خوارزمية تراجعية للحل الرقمي لنظام المثالية, و الخوارزمية المقترحة تعتمد على طريقة قوس-سيدال التي هي موافقة بين طريقة نيوتن-رافسون المسترخية والطريقة المباشرة, هذه الموافقة تولد في كل مرحلة معادلة خطية و متتالية تراجعية التي تقترب من الحل, تقارب الطريقة برهن و وجدنا نتائج رقمية في البعد الأول و الثاني.

**الكلمات المفتاحية :** مراجعة التغيرات, المراقب المثالي, الفروق المنتهية, طريقة نيوتن-رافسون التراجعية.

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Introduction

Nous allons présenter quelques techniques et résultats en contrôle optimal des problèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Il faut savoir que ce qui va suivre est bien entendu loin d'être exhaustif, puisque nous l'aborderons essentiellement du point de vue des équations aux dérivées partielles [36]. Le sujet est largement étudié et dans une certaine mesure encore très ouvert et notre motivation est essentiellement numérique. Il faut, bien sûr, au préalable étudier ces questions du point de vue théorique, en établissant des résultats d'existence, d'unicité, de stabilité, des conditions d'optimalité etc...

L'école d'analyse convexe et d'analyse non lisse a largement étudié ce type de problème mais nous n'évoquerons pas les résultats. On constatera toutefois que ce domaine mêle très étroitement les techniques classiques d'analyse fonctionnelle des équations aux dérivées partielles, les techniques d'analyse convexe et variationnelle et d'analyse non lisse (sous-différentiel, approximation de Moreau-Yosida ). Nous ne parlerons pas en particulier des inclusions différentielles générales [4].

## 1.2 Problème de contrôle optimal

### Formulation générale

Soit le problème générique suivant posé sous la forme :

$$\min \{J(y, u), A(y, u) = 0, u \in \mathcal{U}_{ad} \subset U, y \in K \subset Y\},$$

où  $U$  est un espace de Hilbert,  $Y$  un espace de Banach,  $\mathcal{U}_{ad}$  et  $K$  sont des sous ensembles convexes, fermés non vides de  $U$  et  $Y$  respectivement,  $J$  est une fonction coût de  $Y \times U$  dans  $\mathbb{R} \cup \infty$ , semi-continue inférieurement et convexe (en général).  $A$  est un opérateur différentiel elliptique ou parabolique, linéaire ou non (par exemple  $A(y, u) := -\Delta y - u$  qui est une équation en fonction de l'état et le contrôle), où la fonction  $y$  est la fonction d'état et  $u$  la fonction de contrôle. Ce problème peut être aussi vu comme un problème de programmation mathématique (c'est-à-dire un problème d'optimisation sous contraintes) dans des espaces de dimension infinies. Souvent, d'après certaines hypothèses d'existence et d'unicité de la solution, l'équation d'état  $A(y, u) = 0$  admet une solution unique. On peut alors définir un opérateur  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{U}$  dans  $Y$  qui à  $u$  associe  $y := \mathcal{T}(u)$ . Le problème de contrôle optimal s'écrit alors comme fonction de la seule variable  $u$  sous la forme

$$\min \{J(\mathcal{T}(u), u), u \in \mathcal{U}_{ad}, \mathcal{T}(u) \in \mathcal{K}\}.$$

D'après la littérature mathématique, la démarche classique pour résoudre ce genre de problème est en général la suivante :

1. Etablir l'existence et, si possible, l'unicité de la solution de ce problème en faisant appel à des techniques d'estimation a priori et de compacité. Il faut, bien sûr, pour cela avoir une régularité minimale de l'opérateur  $\mathcal{T}$  (par exemple, la continuité faible).

2. On essaie ensuite de caractériser la ou les solutions, ou, à défaut, de trouver des conditions nécessaires d'optimalité (voir par exemple [6], [48]). Souvent, ces conditions sont des conditions différentielles du premier ordre, ceci impose donc des propriétés de différentiabilité de  $J$  et de  $\mathcal{T}$  (Si la régularité le permet, on peut aussi établir des conditions suffisantes du second ordre).

3. Enfin, on utilise les conditions précédentes pour établir des algorithmes permettant de calculer numériquement la ou les solutions.

On sait établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en dimension finie pour des problèmes d'optimisation sous contraintes, moyennant des hypothèses de régularité (dites aussi conditions de qualification) sur l'ensemble des contraintes. Ce sont les célèbres conditions de Karush-kuhn-Tucker, qui permettent d'associer à chaque contrainte un vecteur appelé multiplicateur de Lagrange et de définir une fonction de Lagrange ou Lagrangien. L'analogie en dimension infinie est bien plus délicat du fait de la non équivalence des normes et de la nécessaire introduction de topologies faibles et de propriétés de compacité.

Afin de fixer les idées, on va donner un exemple simple (voir [37]) pour illustrer un problème de contrôle optimal gouverné par une équation aux dérivées partielles. Le problème que nous envisageons est le suivant : on pose  $\mathcal{K} = H_0^1(\Omega)$  et  $\mathcal{U} = L^2(\Omega)$ . L'état  $y$  et le contrôle  $u$  sont couplés par l'équation d'état :  $\Delta y = u$ . L'opérateur  $\mathcal{T}$  est ici  $-(\Delta)^{-1}$ . Il est continu, linéaire et bijectif de  $H^{-1}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et de  $L^2(\Omega)$  dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . La fonctionnelle coût est définie par

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} u^2 dx \right),$$

où  $z$  est donnée dans  $L^2(\Omega)$ . Ainsi le problème peut être posé sous la forme

$$\{\min J(v), v \in \mathcal{U}_{ad}\},$$

admet une solution unique  $\bar{u}$ . Comme  $J$  est convexe et dérivable, la condition nécessaire et suffisante d'optimalité est donnée d'après [27], par

$$\nabla J(\bar{u})(v - \bar{u}) = \int_{\Omega} (\bar{y} - z)(y(v) - z) dx + \nu \left( \int_{\Omega} \bar{u}(v - \bar{u}) dx \right) \geq 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.1)$$

$\bar{y}$  désignant l'état  $\mathcal{T}(\bar{u})$  associé à  $\bar{u}$  et  $y(v) = \mathcal{T}(v)$ . Pour déterminer les conditions d'optimalité, on travaille par dualité en introduisant l'état adjoint  $\bar{p}$  comme étant la solution de l'équation adjointe définie par :

$$-\Delta \bar{p} = \bar{y} - z, \text{ avec } \bar{p} \text{ dans } H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

Grâce à cette définition et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} (\bar{u} - z)(y(v) - z) dx = \int_{\Omega} \bar{p}(\Delta(y(v) - \bar{y})) dx,$$

et pour tout  $v$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$ , il vient

$$- \int_{\Omega} \bar{p}(-\Delta(y(v) - \bar{y})) dx + \nu \left( \int_{\Omega} \bar{u}(v - \bar{u}) dx \right) \geq 0,$$

et avec l'équation d'état, on déduit

$$\int_{\Omega} (v\bar{u} - \bar{p})(v - \bar{u}) dx \geq 0 \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}.$$

Finalement, on obtient

$$\bar{u} = P_{\mathcal{U}_{ad}} \left( \frac{\bar{u}}{v} \right),$$

$P_{\mathcal{U}_{ad}}$  est l'opérateur de projection de  $L^2(\Omega)$  sur  $\mathcal{U}_{ad}$ . La solution du problème de contrôle optimal est donc caractérisée par le système de conditions d'optimalité du premier ordre, sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta \bar{y} = \bar{u} \text{ dans } \Omega, \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta \bar{p} = \bar{y} - z \text{ dans } \Omega, \bar{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \bar{u} = P_{\mathcal{U}_{ad}} \left( \frac{\bar{p}}{v} \right). \end{cases} \quad (1.3)$$

On peut aussi définir le Lagrangien du problème sur  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  par :

$$L(y, u, p) := J(y, u) + (p, -\Delta y - u)_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}.$$

On peut montrer que  $(\bar{y}, \bar{u})$  est solution du problème de contrôle optimal si et seulement si  $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})$  est un point-selle de  $L$  sur  $H_0^1(\Omega) \times \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire,

$$\forall (z, v, q) \in H_0^1(\Omega) \times \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega), L(\bar{y}, \bar{u}, q) \leq L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) \leq L(y, u, \bar{p}), \quad (1.4)$$

où l'état adjoint  $p$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte donnée par l'équation  $-\Delta y = u$ . Bien entendu, si on ajoute d'autres contraintes sur l'état et le contrôle, la question essentielle est de prouver l'existence de multiplicateurs de Lagrange associés de façon à incorporer les contraintes dans le Lagrangien pour obtenir un problème plus simple

([13],[19]). Ce principe est à la base de tous les algorithmes de type Lagrangien et Lagrangien augmenté. De manière générale, les conditions d'optimalité sont le fondement de la majorité des algorithmes d'optimisation. Ce qui n'apparaît pas dans l'exemple précédent est la difficulté d'obtenir des multiplicateurs de Lagrange dans le cas général et, en particulier, quand on rajoute des contraintes sur l'état  $y$ . Supposons que l'ensemble des contraintes sur  $y$  soit  $\mathcal{K}$  (convexe, fermé, non vide pour fixer les idées). Le domaine admissible du problème sera défini par

$$D := \{v \in \mathcal{U}_{ad} \mid y := \mathcal{T}(v) \in \mathcal{K}\}.$$

Il est clair qu'il faut que  $D$  soit non vide. Mais, si l'on pense qu'il faut dériver pour obtenir des multiplicateurs, il faut que des perturbations (convexes) de  $v \in D$  restent dans  $D$  : cela implique, pour parler de manière très formelle et générale que l'intérieur de  $D$  soit non vide (au sens bien sûr d'une topologie à préciser puisque nous travaillons en dimension infinie). Cette condition que l'on peut décliner sous des formes plus au moins faibles est une condition dite de qualification ([19],[22],[46]). Si  $D$  vérifie une telle condition, le problème est dit qualifié.

Enfin, il existe une alternative aux conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre lorsque qu'on manque de régularité pour dériver. Il s'agit du principe de Pontryagin, que l'on peut énoncer dans l'exemple précédent de la manière suivante, où il s'agit de définir le Hamiltonien du système sur  $\mathbb{R}^4$  par

$$H(x, y, u, p) := \underbrace{\frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{v}{2}u^2}_{\text{Terme intervenant dans l'intégrale de } J} + p + \underbrace{u}_{\text{Second membre de l'EDP}}.$$

En appliquant le membre de droite de (1.4) à  $y = \bar{y}$ , on obtient,

$$\forall u \in \mathcal{U}_{ad}, J(\bar{y}, \bar{u}) + (\bar{p}, -\Delta \bar{y} - \bar{u})_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \leq J(\bar{y}, u) + (\bar{p}, -\Delta \bar{y} - u)_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}$$

c'est-à-dire pour tout  $u$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}(\bar{y} - z)^2(x) + \frac{v}{2}\bar{u}(x)^2 - \bar{p}(x)\bar{u}(x) \right) dx &\leq \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}(\bar{y} - z)^2(x) + \frac{v}{2}u(x)^2 - \bar{p}(x)u(x) \right) dx, \end{aligned}$$

ou encore

$$\text{pour tout } u \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}, H(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), -\bar{p}(x)) \leq H(x, \bar{y}(x), u(x), -\bar{p}(x)).$$

Ceci entraîne que, pour tout  $v$  dans  $\mathbb{R}$  tel qu'il existe  $u$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$  vérifiant  $u(x) = v$ ,

$$H(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), -\bar{p}(x)) \leq H(x, \bar{y}(x), v, -\bar{p}(x)) \text{ p.p dans } \Omega.$$

Cette relation qui est bien sûr plus faible que les précédentes est le principe de Pontryagin qui conduit à étudier des équations de Hamilton-Jacobi [10]. Noton, qu'on peut obtenir directement le principe de Pontryagin ([14],[23]), lorsqu'on n'est pas en mesure d'obtenir des multiplicateurs de Lagrange par dérivation.

### Formulation générale d'une inéquation variationnelle

Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert réels tels que  $V$  est dense dans  $H$  et  $V \subset H \subset V'$  algébriquement et topologiquement où  $V'$  est le dual de  $V$ , de plus l'injection  $V \subset H$  est supposée compacte. Un choix typique est  $V := H_0^1(\Omega)$  et  $H := L^2(\Omega)$ . Le crochet de dualité entre  $V$  et  $V'$  sera noté par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et le produit scalaire de  $H$  est  $(\cdot, \cdot)_H$ ; de même  $\| \cdot \|_V$  est la norme de  $V$ . On se donne

- $A$  de  $V$  dans  $V'$  un opérateur linéaire, continu, vérifiant la condition de coercivité

$$\text{il existe } \sigma > 0 \text{ et pour tout } y \text{ dans } V, \text{ on a } \quad \langle Ay, y \rangle \geq \sigma \| y \|_V; \quad (1.5)$$

- Une fonction convexe  $\Phi$ , propre et semi-continue inférieurement de  $V$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , et on note par

$$\text{dom}\Phi := \{y \in V \mid \Phi(y) \leq +\infty\}$$

le domaine  $\Phi$  (qui est également convexe et  $V$ -fermé). Rappelons que le sous-différentiel de  $\Phi$  en  $y_0$  dans  $V$  et (voir [9],[23],[5],[26])

$$\partial\Phi(y_0) := \{z^* \text{ dans } V' \mid \text{pour tout } y \text{ dans } V \quad \Phi(y) - \Phi(y_0) - \langle z^*, y - y_0 \rangle \geq 0\} \quad (1.6)$$

Le problème suivant est appelé inéquation variationnelle où il s'agit de trouver  $y$  dans  $\text{dom}(\Phi)$  tel que

$$\langle Ay + u, z - y \rangle + \Phi(z) - \Phi(y) \geq 0, \text{ pour tout } z \text{ dans } V, \quad (1.7)$$

où la formulation équivalente en terme de sous-différentiel s'écrit sous la forme

$$y \text{ dans } \text{dom}(\Phi) \text{ et } Ay + (u \text{ dans } \partial\Phi(y)) \quad (1.8)$$

Soit le théorème suivant qui généralise le théorème de Stampacchia donné dans [38].

**Théorème 1.2.1** *Sous l'hypothèse (1.5), pour tout  $u$  dans  $V'$ , l'inéquation variationnelle*

$$Ay + (u \text{ dans } \partial\Phi(y))$$

*a une solution unique  $y(u)$  dans  $V$  et l'opérateur  $\mathcal{T} : u \rightarrow y(u)$  est de Lipschitz de  $V'$  dans  $V$ .*

Pour simplifier la compréhension, nous prendrons dans ce qui suit l'exemple du problème dit de l'obstacle. On suppose que,  $\Omega$  est un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^N$  avec  $N \leq 3$  et l'opérateur  $A$  est l'opposé du Laplacien, à savoir  $-\Delta$ , avec  $V := H_0^1(\Omega)$ ,  $H := L^2(\Omega)$  et

$$\mathcal{K}(\varphi) := \{y \mid y \text{ dans } H_0^1(\Omega), y \geq \varphi \text{ presque partout dans } \Omega\}. \quad (1.9)$$

Alors, l'inéquation variationnelle s'écrit sous la forme, où il s'agit de trouver  $y$  dans  $\mathcal{K}(\varphi)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla y(x) \nabla (v - y(x)) dx \geq \int_{\Omega} (f(x) + u(x)) (v - y(x)) dx, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi),$$

où  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ . On peut interpréter cette inéquation de plusieurs façons différentes mais strictement équivalentes qui conduisent à des familles de méthodes différentes.

1. On remarque que cette inéquation variationnelle provient de la condition d'optimalité obtenue quand on minimise la fonctionnelle

$$J(y) := \int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 dx - \int_{\Omega} (f + u)(x)y(x)dx, \quad (1.10)$$

sous la contrainte  $y \geq \varphi$ . On note par  $\xi$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $y \geq \varphi$ . C'est a priori un élément de  $H^{-1}(\Omega)$ . Lorsque  $u$  est dans  $L^2(\Omega)$ , on

peut montrer que la solution  $y$  est dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  (voir [28]) et que  $\xi$  est dans  $L^2(\Omega)$ . C'est ainsi qu'on peut affirmer que l'inéquation variationnelle (1.8) est équivalente à

$$-\Delta y = f + u + \xi, \quad y \geq \varphi, \quad \xi \geq 0, \quad (\xi, y - \varphi) = 0. \quad (1.11)$$

Ce point de vue conduit à utiliser les méthodes d'analyse classiques du contrôle optimal des problèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles et de la programmation mathématique dans les espaces de Banach.

2. On écrit l'inéquation variationnelle comme une inclusion différentielle en introduisant le sous-différentiel de la fonction indicatrice de  $\mathcal{K}(\varphi)$  de la manière suivante :

$$-\Delta y + (f + u \text{ dans } \partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}(y - \varphi))$$

où

$$I_{\mathcal{K}(\varphi)}(y - \varphi) := \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

tel que  $\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de  $\mathcal{K}(\varphi)$  et ce point de vue conduit à utiliser les méthodes d'analyse convexe et d'analyse non lisse.

Le sous-différentiel  $\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}$  peut aussi s'écrire sous la forme

$$\partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}(y - \varphi) := \{v(x) \text{ dans } L^2(\Omega) \mid v(x) \text{ dans } \beta_0(y - \varphi) \text{ presque partout dans } \Omega\}$$

où  $\beta_0(\cdot)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $2^{\mathbb{R}}$  est le graphe maximal monotone défini par

$$\beta_0(r) := \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ \mathbb{R}^- & \text{si } r = 0 \\ \emptyset & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

On se donne une approximation régulière  $\beta_\delta$  de  $\beta_0$  qui peut être par exemple l'approximation de Yosida de  $\beta_0$ . Une approximation possible de  $\beta_0 = \partial I_{\mathcal{K}(\varphi)}$  est la suivante

$$\beta_\delta(r) := \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -r^2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq r < 0 \\ r + \frac{1}{4} & \text{si } r < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient alors un problème approché

$$\begin{cases} \min J(y, u) \\ -\Delta y + \beta_\delta(y - \varphi) = u + f \text{ dans } \Omega \text{ et } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \text{ dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

La démarche est la suivante : on étudie le problème approché et on exhibe si possible un système d'optimalité. On tente ensuite de passer à la limite.

### 1.3 Contrôle optimal de problèmes gouvernés par des inéquations variationnelles

#### Problématique et difficultés

Les problèmes de contrôle des inéquations variationnelles s'écrivent aussi sous la forme générale

$$\min\{J(y, u), y := \mathcal{T}(u), u \in \mathcal{U}_{ad} \subset U, y \in K \subset \mathcal{K}\},$$

où  $\mathcal{T}$  est un opérateur qui à  $u$  associe  $y$  la solution (si elle existe et est unique) et l'inéquation variationnelle est donnée par

$$\langle A(y, u), z - y \rangle \geq 0, \text{ pour tout } z \text{ dans } \mathcal{K},$$

qui dépend de la fonction contrôle et la fonction d'état.

Ces problèmes sont intéressants car ils permettent de contrôler certaines frontières libres via l'inéquation variationnelle associée (voir [20]) et débouchent sur des questions d'optimisation de forme. Les résultats d'existence et d'unicité sont nombreux (voir Barbu [9]). En ce qui concerne les conditions d'optimalité, plusieurs difficultés se présentent, en effet, même si l'opérateur  $A$  est linéaire, l'opérateur  $\mathcal{T}$  est lui toujours non-linéaire. Il suffit de considérer la forme (1.11) de l'inéquation variationnelle pour constater qu'il y a une contrainte bilinéaire cachée.

La seconde difficulté est rédhibitoire, en ce sens qu'il est impossible d'assurer une quelconque propriété de différentiabilité (même de Gâteaux) de l'application  $\mathcal{T} : (\text{contrôle} \rightarrow \text{état})$ . La seule différentiabilité faible utilisable est la notion de différentiabilité conique proposée par

Mignot et que l'on retrouve dans [42]. Il est donc exclu de trouver des multiplicateurs de Lagrange (au sens où nous l'avons défini dans la section précédente) et un système d'optimalité du premier ordre. Des contre-exemples ont été donnés en dimensions finie et infinie (Bergounioux-Mignot [16]). Nous pouvons alors adopter plusieurs points de vue, l'idée étant toujours de se ramener à un problème gouverné par une équation variationnelle. La technique de base est l'approximation de l'opérateur  $\mathcal{T}$  qui peut se faire de plusieurs manières à peu près équivalentes. Une méthode consiste à utiliser la forme équivalente de l'inéquation variationnelle (1.11). A notre connaissance, ce sont Mignot [42] et Haraux [32] qui ont effectué les premiers travaux en contrôle des inéquations variationnelles en étudiant précisément les opérateurs de projection. En effet, l'étude de la différentiabilité de l'opérateur  $\mathcal{T}$  conduit à définir les notions de différentiabilité conique (Mignot [42]).

**Définition 1.3.1** L'opérateur  $\mathcal{T}$  défini de  $\mathcal{U}$  dans  $V$  admet une différentielle conique en  $u$  égale à  $Q$  si  $Q$  est un opérateur positivement homogène :

$$- \text{pour tout } v \in \mathcal{U}, \text{ pour tout } t > 0, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(u + tv) - \mathcal{T}(u)}{t} - Q(v) = 0 \quad (1.12)$$

La différentiabilité conique de l'opérateur  $\mathcal{T}$  permet d'obtenir un système d'optimalité général (de type Pontryagin par exemple) mais ne donne pas l'existence de multiplicateurs de Lagrange. Dans tout ce qui suit, nous prendrons comme exemple le problème de l'obstacle en dimension deux, que nous rappelons (on prendra  $f = 0$  pour simplifier) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (u)^2 dx \\ -\Delta y + (u \in \partial I_{\mathcal{K}}(y)) \\ u \text{ dans } \mathcal{U}_{ad} \equiv L^2(\Omega) \text{ (les difficultés ne viennent pas des contraintes sur le contrôle),} \\ \mathcal{K} := \{y \in H_0(\Omega), y \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega\} \end{array} \right. \quad (\mathcal{P})$$

On peut considérer  $\partial I_{\mathcal{K}} = \beta_0$  comme une multifonction et les techniques que nous présentons ci-dessous sont, bien sûr, adaptables à des cas plus généraux.

## 1.4 Méthode d'approximation de l'opérateur multivoque (Barbu-Friedman)

C'est la méthode la plus ancienne et de loin la méthode la plus utilisée puisqu'il s'agit d'approcher l'opérateur multivoque (dans notre exemple  $\partial I_{\mathcal{K}}$ ) de l'inéquation variationnelle, pour obtenir un problème de contrôle approché gouverné par une équation. Nous la détaillons sur l'exemple choisi (Barbu [9]). Le problème d'obstacle s'écrit  $-\Delta y + (u \in \partial I_{\mathcal{K}}(y))$  où le sous-différentiel  $\partial I_{\mathcal{K}}$  peut aussi s'écrire

$$\partial I_{\mathcal{K}}(y(x)) := \{v(x) \text{ dans } L^2(\Omega) \mid v(x) \text{ dans } \beta_0(y(x)) \text{ presque partout dans } \Omega\}$$

où  $\beta_0(\cdot)$ , défini de  $\mathbb{R}$  dans  $2^{\mathbb{R}}$ , est le graphe maximal monotone.

On obtient alors un problème approché sous la forme

$$\begin{cases} \min J(y, u) \\ -\Delta y + \beta_{\delta}(y) = u \text{ dans } \Omega \text{ et } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \text{ dans } L^2(\Omega) \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{P}}_{\delta})$$

La démarche est la suivante : on étudie le problème approché et on exhibe si possible un système d'optimalité. On essaie ensuite de passer à la limite. Le résultat obtenu dans ce cas là est le suivant :

**Théorème 1.4.1** *Le système d'optimalité obtenu dans [9] est de la forme suivante : soit  $(\bar{y}, \bar{u})$  la solution de  $(\mathcal{P})$ , il existe  $\bar{p}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  avec  $-\Delta \bar{p}$  dans  $(L^\infty(\Omega))'$  et  $\bar{\mu}$  dans  $(L^2(\Omega))$  tel que*

$$\begin{cases} (-\Delta \bar{p} + \bar{\mu})\bar{y} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \bar{p}(-\Delta \bar{y} - \bar{u}) = 0 \text{ p.p dans } \Omega \\ \langle -\Delta \bar{p} + \bar{\mu}, \chi \bar{y} \rangle = 0 \text{ pour tout } \chi \in C^1(\Omega) \\ \langle -\Delta \bar{p} + \bar{\mu}, \bar{p} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \leq 0 \\ \bar{p} = \alpha \bar{u}. \end{cases}$$

## 1.5 Transformation en un problème de contrôle d'une équation aux dérivées partielles avec contraintes sur l'état et contrainte mixte état et contrôle

### Écriture équivalente du problème de contrôle optimal

Pour cette technique, on peut se référer [21]. Comme indiqué précédemment le problème ( $\mathcal{P}$ ) est équivalent au problème de contrôle optimal gouverné par une équation aux dérivées partielles, mais avec des contraintes sur l'état et une contrainte de complémentarité supplémentaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(y, u) \\ -\Delta y = u + \xi \text{ dans } \Omega \text{ et } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \xi \geq 0, y \geq 0, \text{ presque partout } (y, \xi) = 0 \end{array} \right. \quad (\tilde{\mathcal{P}})$$

Le système d'optimalité, qu'on espère, si les multiplicateurs de Lagrange existent est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } \bar{p} \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ état adjoint, multiplicateur associé à l'équation d'état,} \\ \text{il existe } \bar{\lambda} \geq 0 \text{ dans } (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))', \text{ multiplicateur associé à la contrainte } y \geq 0 \\ \text{c'est une mesure positive ( dans } \mathcal{M}(\Omega)) \\ \text{il existe } \bar{\mu} \geq 0 \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ multiplicateur associé à la contrainte } \xi \geq 0 \\ u \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \text{il existe } \bar{r} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ multiplicateur associé à la contrainte } (y, \xi) = 0, \\ \text{tel que } (\bar{y}, \bar{u}, \bar{\xi}) \text{ est solution de } (\tilde{\mathcal{P}}) \\ \nabla_{(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\xi})} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\xi}, \bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{r}) = 0 \\ (\bar{\mu}, \bar{\xi})_2 = 0, \langle \bar{\lambda}, \bar{y} \rangle_{\mathcal{M}, \mathcal{C}} = 0, \bar{r}(\bar{y}, \bar{\xi})_2 = 0 \text{ (relations de complémentarité avec)} \\ \mathcal{L}(y, u, \xi, p, \lambda, \mu, r) := J(y, u) + \langle p, -\Delta y - u - \xi \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + \langle \mu, \xi \rangle, \langle \lambda, y \rangle_{\mathcal{M}, \mathcal{C}}, r(y, \xi)_2 \end{array} \right. \quad (\tilde{\mathcal{C}})$$

Malheureusement, on peut montrer que ce système peut ne pas avoir de solution (en d'autres termes les multiplicateurs de Lagrange  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{r})$  n'existent pas), ni en dimension infinie comme ci-dessus, ni même en dimension finie (après discrétisation), (voir [16]) pour un contre exemple.

### Utilisation de la différentiabilité conique

En introduisant une fonction coût généralisée qui prend en compte la contrainte de complémentarité  $(y, \xi) = 0$  et en utilisant une méthode variationnelle avec des fonctions tests admissibles, on peut obtenir un système d'optimalité avec des multiplicateurs de Lagrange et un état adjoint dans le cône critique à la solution optimale, grâce à la différentiabilité conique de l'opérateur  $\mathcal{T}$ . On peut montrer que ce système est équivalent au système de Lagrange (classique) en dimension finie.

**Théorème 1.5.1** *Le système d'optimalité obtenu dans [15] est de la forme suivante : soit  $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\xi})$  la solution de  $(\tilde{\mathcal{P}})$ , alors il existe  $\bar{p}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  tel que*

$$\begin{cases} \bar{p} \text{ dans } S\bar{y} \\ \text{pour tout } \psi \text{ dans } S\bar{y}, \langle -\Delta\bar{p} + \bar{z} - \bar{y}, \psi \rangle \leq 0 \\ \bar{p} = -\alpha\bar{u} \end{cases}$$

où

$$S\bar{y} = \{\psi | \psi \in H_0^1(\Omega), \psi \geq 0, \text{ sur } \{x \in \Omega | \bar{y} = 0\} \text{ et } \langle \bar{\xi}, \psi \rangle = 0\}.$$

L'utilisation d'une fonction de Lagrange et de conditions du premier ordre permet d'obtenir un point selle. Toutefois le système d'optimalité obtenu n'est pas qualifié (certains multiplicateurs peuvent être infinis) et donc peu exploitable numériquement. En dimension finie, on peut exhiber une classe de problèmes pour lesquels le système est qualifié, avec existence de multiplicateurs de Lagrange classique. Toutefois dans le cas général ce n'est pas possible. En dimension infinie, il est très difficile d'assurer une condition de qualification.

On peut donc constater qu'en considérant le problème sous sa forme originale, on ne peut pas trouver de système d'optimalité sans un procédé d'approximation. En utilisant la forme équivalente  $(\tilde{\mathcal{P}})$ , on peut établir des résultats intéressants pour l'exploitation numérique.

### Approximation de la contrainte de complémentarité

Le premier point de vue est que l'une des raisons profondes pour laquelle on ne peut pas obtenir de multiplicateurs de Lagrange est l'absence de réalisation de condition de qualification même très faible comme dans [49]. Cela provient du fait que l'ensemble des contraintes est

d'intérieur vide même pour des normes faibles . Cela tient à la condition de complémentarité qui est bilinéaire. L'idée qui s'impose alors est celle d'une relaxation de cette contrainte  $(y, \xi) = 0$  en la contrainte  $0 \leq (y, \xi) \leq \delta$  où  $\delta \geq 0$ . Cette relaxation permet d'obtenir un problème approché

$$\begin{cases} \min J(y_\delta, u_\delta) \\ -\Delta y_\delta = u_\delta + \xi_\delta \text{ dans } \Omega \text{ et } y_\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u_\delta \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \xi_\delta \geq 0, y_\delta \geq 0 \text{ p.p.}, \langle \xi_\delta, y_\delta \rangle \leq \delta, \xi_\delta \in \mathcal{B}_2(0, R) \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\delta)$$

où  $\mathcal{B}_2(0, R)$  est la boule de  $L^2(\Omega)$  de rayon  $R$  pour  $R$  arbitrairement grand. On montre que la solution  $(y_\delta, \nu_\delta, \xi_\delta)$  converge bien (dans les bons espaces) vers la solution du problème  $(\mathcal{P})$  et on peut établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du premier ordre avec multiplicateurs de Lagrange, par des techniques éprouvées [18]. Le système d'optimalité de Lagrange du problème relaxé ne peut pas être utilisé d'un point de vue théorique car on n'est pas en mesure de passer au système limite quand  $\delta \rightarrow 0$ . En revanche, il est exploitable d'un point de vue numérique puisque numériquement une contrainte égale à 0 se traduit par  $[-\delta, \delta]$  avec  $\delta$  petit.

**Théorème 1.5.2** *Le système d'optimalité obtenu pour  $(\mathcal{P}_\delta)$  est de la forme suivante : soit  $(y_\delta, u_\delta, \xi_\delta)$  la solution de  $(\mathcal{P}_\delta)$ , alors, il existe  $(p_\delta, r_\delta)$  dans  $H_0^1(\Omega) \cap \mathbb{R}^+$  tel que*

$$\begin{cases} -\Delta p_\delta + z - y_\delta = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{pour tout } y \text{ dans } \mathcal{K}, \langle p_\delta + \alpha v_\delta, -\Delta(y - y_\delta) \rangle + r_\delta \langle \xi_\delta, y - y_\delta \rangle \geq 0 \\ \text{pour tout } \xi \text{ dans } \mathcal{B}_2(0, R), \langle r_\delta y_\delta - \alpha v_\delta, \xi - \xi_\delta \rangle \geq 0 \\ r_\delta (\langle y_\delta, \xi_\delta \rangle - \delta) = 0 \end{cases}$$

Un deuxième point de vue consiste à remplacer les contraintes

$$y \geq 0, \xi \geq 0, \text{ p.p. } (y, \xi) = 0$$

par leur forme équivalente

$$\xi := \max(0, \xi - cy) \text{ pour tout } c > 0 \quad (1.13)$$

Le problème s'écrit alors

$$\begin{cases} \min J(y_\delta, u_\delta) \\ -\Delta y = u + \xi \text{ dans } \Omega \text{ et } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \xi := \max(0, \xi - cy) \\ u \text{ dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

La contrainte (1.13) est approchée par une approximation classique. Concrètement, l'opérateur de projection max est régularisé de la manière suivante :

$$\max(0, x)_c = \begin{cases} x \text{ si } x \geq \frac{1}{2c} \\ \frac{c}{2}(x + \frac{1}{2c})^2 \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2c} \\ 0 \text{ si } x \leq -\frac{1}{2c} \end{cases}$$

On obtient alors un problème approché sous la forme

$$\begin{cases} \min J(y, u) \\ -\Delta y - \max_c(0, \xi - cy) = u \text{ dans } \Omega \text{ et } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \xi \geq 0, (u, \xi) \text{ dans } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases} \quad (\mathcal{P}_c)$$

ainsi, on obtient un système d'optimalité approché dans lequel on peut passer à la limite : toutefois le système limite ne permet pas de conclure à l'existence de multiplicateurs de Lagrange.

**Théorème 1.5.3** *Le système d'optimalité obtenu dans [35] est de la forme suivante : soit  $(\bar{y}, \bar{u})$  la solution de  $(\mathcal{P}_c)$ , il existe  $(\bar{p}, \bar{\mu}) \in H_0^1(\Omega) \times (L^\infty(\Omega))'$  vérifiant*

$$\begin{cases} -\Delta \bar{p} - \bar{\mu} + z - \bar{y} = 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \times (L^\infty(\Omega))' \\ \langle \bar{\mu}, \chi \bar{y} \rangle = 0 \text{ pour tout } \chi \in \mathcal{C}^1(\Omega) \\ \bar{\mu} \bar{y} = 0 \text{ p.p dans } \Omega \\ \langle \bar{\mu}, \bar{p} \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} \geq 0 \\ \bar{p} = -\alpha \bar{u}. \end{cases}$$

Néanmoins, cette approximation est très utile du point de vue numérique puisque ces auteurs [35] ont développé une méthode de résolution fondée sur une stratégie primale-duale d'ensembles actifs pour résoudre ( $\mathcal{P}$ ) directement.

On peut utiliser les méthodes d'analyse non lisse et d'analyse variationnelle et les travaux dans cette direction sont très nombreux, mais nous ne détaillons pas ces méthodes car ce n'est pas le but de notre travail. Une inéquation variationnelle est un cas particulier d'inclusion différentielle. On peut trouver des résultats analogues à ceux qui précèdent exprimés en termes de sous-différentiel au sens de Clarke [26] et de cônes (normal, polaire, tangent, etc ...). Nous renvoyons par exemple à Frankowska [29] et Mordukhovich [43] et aux références de ces articles. La plupart des conditions d'optimalité obtenues le sont sous forme de principe de Pontryagin.

Dans cet ordre d'idée, on peut aussi remplacer l'inéquation variationnelle par une contrainte en égalité  $\mathcal{C}^1$  grâce à des techniques de dualité et de régularisation convexes. Les résultats obtenus sont proches de ceux de Wenbin-Rubio [45]. On peut trouver un système d'optimalité sous des hypothèses raisonnables pour une large classe de problèmes d'obstacles (non linéaires) mais on ne peut pas assurer l'existence de multiplicateurs de Lagrange classiques.

Nous avons présenté quelques techniques d'obtention de conditions d'optimalité, sans toutefois prétendre à l'exhaustivité. On peut constater que les différents systèmes obtenus sont relativement voisins. Ils sont en général peu exploitables en tant que tels mais permettent d'établir des résultats de convergence pour des algorithmes de calcul des solutions.

Comme nous l'avons souligné, c'est souvent la forme approchée qui est utile pour le calcul numérique. C'est le cas dans [17] où une méthode de Lagrangien augmenté est utilisée pour résoudre le problème ( $\mathcal{P}^\delta$ ). Barbu et Neittaanmäki [7] ont utilisé la forme approchée développée dans la sous-section (1.4.2). Dans [35], Ito et Kunisch utilisent une stratégie primale-duale d'ensembles actifs pour proposer un algorithme. Enfin, il faut mentionner qu'après discrétisation le problème ( $\tilde{\mathcal{P}}$ ) est un problème d'optimisation avec contraintes de complémentarité et qu'il existe une abondante littérature sur les méthodes de résolution numérique de tels problèmes.

Dans les problèmes de contrôle optimal de l'obstacle qu'on a introduit plus haut, on peut remarquer que le contrôle figure dans l'inéquation variationnelle et que l'obstacle qui définit la

contrainte imposée sur l'état est une fonction connue. dans la suite, on considère des problèmes légèrement différents des précédents dans la mesure où la fonction contrôle est l'obstacle lui même. Sauf mentionné explicitement, on considère l'ensemble  $\mathcal{K}(\varphi)$  fermé et convexe déjà défini par (1.9).

A notre connaissance, ce sont Adams et al dans [3] en 1998, qui ont introduit les premiers ce type de problèmes et qui a été défini sous la forme : soit  $\varphi$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et considèrent le problème de l'obstacle suivant : Trouver  $y$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , tel que

$$\int_{\Omega} \nabla y \nabla (v - y) \geq 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi) \quad (1.14)$$

où  $\mathcal{K}(\varphi)$  est donné par (1.9) et la fonction objectif est définie par

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx \quad (1.15)$$

où  $\nu$  est une constante positive et  $z$  dans  $L^2(\Omega)$ . Ainsi, le problème de contrôle optimal peut être réécrit sous la forme

$$\min \{ J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx, \varphi \in H_0^1(\Omega) \} \quad (1.16)$$

Ensuite, Adams et al dans [3], ont exhibé le système des conditions d'optimalité approché (qui dépend du paramètre de pénalisation  $\delta$ ) sous la forme

**Théorème 1.5.4** *Soit  $(y^\delta, \varphi^\delta)$  une solution optimale du problème approché et  $y^\delta = \mathcal{T}^\delta(\varphi^\delta)$ , il existe un état adjoint  $p^\delta$  dans  $H_0^1(\Omega)$  tel que le système suivant, soit satisfait*

$$\begin{cases} -\Delta y^\delta + \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } y^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ -\Delta p^\delta + \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = y^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } p^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ -\Delta \varphi^\delta + \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et en passant à la limite (en faisant tendre  $\delta$  vers 0), les auteurs ont obtenu le système limite suivant :

**Théorème 1.5.5** *Soit  $\bar{y}$  l'état optimal du problème approché, alors il existe un état adjoint  $\bar{p}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $\bar{\mu}$  dans  $E^+(\Omega)$  tel que le triplet  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{\mu})$  est unique et appartient à*

$\mathcal{H}^+(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times E^+(\Omega)$  et satisfait le système suivant

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{y} &= \bar{\mu} \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ -\Delta \bar{p} &= \bar{\mu} - z \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \bar{p} &\geq p.p. \text{ dans } \Omega \\ \int_{\Omega} d\bar{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

où  $E^+(\Omega)$  est l'ensemble des mesures positives de Borel et  $\mathcal{H}^+(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions superharmoniques de  $H_0^1(\Omega)$ .

En 2004, Bergounioux et al [11], ont étudié le problème de l'obstacle suivant : Trouver  $y$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , tel que

$$a(y, v - y) + \langle g(u) - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi)$$

où la fonction  $g(u)$  est de classe  $C^\infty$  et vérifie la condition suivante

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, \exists \nu \geq 0, \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R} \quad |g(y)| \leq \gamma + \nu |y|$$

où  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ , et la fonction objectif est la suivante

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - y)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx$$

où  $\nu$  est une constante positive et  $z$  dans  $L^2(\Omega)$ . Par suite, le problème de contrôle optimal est défini sous la forme

$$\min \left\{ J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - y)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx, \varphi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad} \right\},$$

où  $\mathcal{U}_{ad}$ , l'ensemble des contrôles admissible, est défini par

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ \varphi \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mid \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq R \}$$

Ensuite, Bergounioux et al dans [11], ont trouvé le système approché (qui dépend du paramètre de pénalisation  $\delta$ ) sous la forme

**Théorème 1.5.6** Soit  $(y^\delta, \varphi^\delta)$  une solution optimale du problème, alors il existe un état adjoint  $p^\delta$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $q^\delta$  dans  $L^2(\Omega)$  tel que le triplet  $(y^\delta, \varphi^\delta, p^\delta)$  satisfait le système suivant

$$-\Delta y^\delta + g(y^\delta) + \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) = f \text{ dans } \Omega \text{ et } y^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.18a)$$

$$-\Delta p^\delta + g'(y^\delta) + \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = y^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } p^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.18b)$$

$$(\beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta - \Delta \varphi^\delta + \varphi^\delta - \bar{\varphi}, \varphi - \bar{\varphi}) \geq 0 \text{ pour tout } \varphi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.18c)$$

En passant à la limite (en faisant tendre  $\delta$  vers 0), les auteurs ont trouvé le système limite suivant :

**Théorème 1.5.7** Soit  $(\bar{y}, \bar{\varphi})$  une solution optimale du problème. Alors il existe un état adjoint  $\bar{p}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $\bar{q}$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  tel que le triplet  $(\bar{y}, \bar{\varphi}, \bar{p})$  satisfait le système suivant

$$-\Delta \bar{y} + g(\bar{y}) + \bar{q} = f \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.19a)$$

$$-\Delta p^\delta + g'(y^\delta) + \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = y^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.19b)$$

$$(\bar{q} - \Delta \bar{\varphi}, \varphi - \bar{\varphi}) \geq 0 \text{ pour tout } \bar{\varphi} \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.19c)$$

Vers la fin 2004, Ye et al [47], ont étudié le problème de l'obstacle suivant : Trouver  $y$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , tel que

$$\int_{\Omega} A(x, \nabla y) \nabla (v - y) dx \geq 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi), \quad (1.20)$$

où  $A(x, \eta) = (a_1(x, \eta), \dots, a_n(x, \eta))$  et pour tout  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $a(\cdot, \eta)$  est une fonction mesurable dans  $\Omega$  avec  $a_j(\cdot, 0) = 0$  et pour tout  $x$  dans  $\Omega$ ,  $a_j(x, \cdot)$  est dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $j = 1 \dots n$

- Pour tout  $\xi, \eta$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(x, \eta) \xi_i \xi_j \geq \Lambda_1 |\xi|^2 \quad (1.21)$$

$$\sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(x, \eta) \right| \geq \Lambda_2 \quad (1.22)$$

où  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont deux constantes positives.

Ensuite, les auteurs ont trouvé le système approché (qui dépend du paramètre de pénalisation  $\delta$ ) sous la forme

**Théorème 1.5.8** *Soit  $(y^\delta, \varphi^\delta)$  une solution optimale du problème. Alors il existe un état adjoint  $p^\delta$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $q^\delta$  dans  $L^2(\Omega)$  tel que le triplet  $(y^\delta, \varphi^\delta, p^\delta)$  satisfait le système suivant*

$$\int_{\Omega} A(x, \nabla y^\delta) \nabla w dx + \int_{\Omega} \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) w dx = 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } H_0^1(\Omega) \quad (1.23a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi^t \frac{\partial A}{\partial \eta}(x, \nabla y^\delta)^t \nabla p^\delta dx + \int_{\Omega} \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta \varphi dx = \int_{\Omega} (y^\delta - z) \varphi dx, \text{ dans } \Omega \text{ et } p^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.23b)$$

$$\int_{\Omega} (\varphi^\delta - \bar{\varphi}) \psi dx + \int_{\Omega} \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta \psi + \int_{\Omega} \Delta \varphi^\delta \psi dx = 0 \text{ pour tout } \psi, \text{ dans } H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (1.23c)$$

En passant à la limite Ye et al (en faisant tendre  $\delta$  vers 0) ont obtenu le système limite suivant :

**Théorème 1.5.9** *Soit  $(\bar{y}, \bar{\varphi})$  une solution optimale du problème qui appartient à  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Alors il existe un état adjoint  $\bar{p}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $\mu$  dans  $H^{-1}(\Omega) \times \mathcal{M}(\bar{\Omega})$  tel que le triplet  $(\bar{y}, \bar{\varphi}, \bar{p})$  satisfait le système suivant*

$$\int_{\Omega} A(x, \nabla \bar{y}) \nabla (v - \bar{y}) dx \geq 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\bar{\varphi}) \quad (1.24a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi^t \frac{\partial A}{\partial \eta}(x, \nabla \bar{y})^t \nabla \bar{p} dx = \int_{\Omega} \varphi d\mu + \int_{\Omega} (\bar{y} - z) \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \text{ dans } H_0^1(\Omega) \quad (1.24b)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta\varphi^\delta)\Delta\psi dx = \int_{\Omega} \psi d\mu, \text{ pour tout } \psi \text{ dans } H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (1.24c)$$

où  $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$  est un ensemble de mesure signée et régulière.

En 2009, Ghanem a étudié dans [30] le problème de l'obstacle défini par

$$\langle \nabla y, \nabla(v - y) \rangle \geq (f, v - y) \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi)$$

et

$$\mathcal{K}(\varphi) = \{y \in H_0^1(\Omega) \mid y \geq \varphi \text{ sur } \Omega\}, \quad (1.25)$$

et a introduit la fonction objectif

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dx \right) \quad (1.26)$$

Ainsi, le problème de commande optimale ( $\mathcal{P}$ ) est défini par

$$\min\{J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dx \right), \varphi \in \mathcal{U}\} \quad (1.27)$$

où  $\nu$  est une constante positive et  $z \in L^2(\Omega)$ .

**Remarque 1.5.1** Le fait d'ajouter  $\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$  permet de dire que si  $\varphi_n$  est une suite minimisante alors  $\|\Delta\varphi_n\|_{L^2(\Omega)}$  est borné. Comme  $\varphi_n$  est dans  $H_0^1(\Omega)$  et que  $\|\Delta\varphi_n\|_{L^2(\Omega)}$  est une norme équivalente à la norme de  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  cela veut dire que la suite  $\varphi_n$  est bornée dans  $H^2(\Omega)$ , donc converge faiblement vers  $\bar{\varphi}$  (contrôle optimal) dans  $H^2(\Omega)$  et fortement vers  $\bar{\varphi}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Donc le terme  $\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$ , permet d'assurer la compacité.

Dans ce cas, l'auteur a trouvé le système des conditions d'optimalité approché (qui dépend du paramètre de pénalisation  $\delta$ ) sous la forme

**Théorème 1.5.10** Soit  $(y^\delta, \varphi^\delta)$  une solution optimale du problème. Alors il existe un état adjoint  $p^\delta$  dans  $H_0^2(\Omega)$  tel que le triplet  $(y^\delta, \varphi^\delta, p^\delta)$  satisfait le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta y^\delta + \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) = f \text{ dans } \Omega, \text{ et } y^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta p^\delta + \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = y^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } p^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\nu \Delta^2 \varphi^\delta - \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi^\delta = \Delta\varphi^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En passant à la limite (en faisant tendre  $\delta$  vers 0), Ghanem a trouvé le système limite suivant (qui est plus complet que les autres systèmes déjà obtenus par Adams, Ye et Bergounioux).

**Théorème 1.5.11** *Soit  $\bar{\varphi}$  une solution optimale du problème. Alors  $\bar{\varphi}$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  et il existe  $\bar{p}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ ,  $\bar{\xi} \leq 0$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $\bar{\mu}$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  tel que le système suivant soit satisfait*

$$\begin{cases} -\Delta \bar{y} + \bar{\xi} = f \text{ dans } \Omega, \text{ et } \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta \bar{p} + \bar{\mu} = \bar{y} - z \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\nu \Delta^2 \bar{\varphi} + \bar{\mu} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{\varphi} = \Delta \bar{\varphi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \langle \bar{\mu}, \bar{y} - \bar{\varphi} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0 \\ \langle \bar{\chi}, \bar{p} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0 \\ \langle \bar{p}, \bar{\mu} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0 \\ \langle -\Delta \bar{p}, \bar{p} \rangle - (z - \bar{y}, \bar{p}) \leq 0 \end{cases}$$

- En 2010, Admas et al [1], ont étudié le problème défini sous la forme : Soit  $\varphi$  dans  $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  où il s'agit de minimiser la fonction objectif définie par

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\nabla \Delta \varphi)^2 dx \right) \quad (1.28)$$

où il s'agit de trouver  $y$  dans  $H^3(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ , tel que

$$\int_{\Omega} \Delta y \Delta(v - y) \geq 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi) \quad (1.29)$$

où l'ensemble fermé et convexe  $\mathcal{K}(\varphi)$  est défini sous la forme

$$\mathcal{K}(\varphi) = \{v \in H_0^2(\Omega) \mid v \geq \varphi \text{ sur } \Omega\}, \quad (1.30)$$

Par suite, le problème de contrôle optimal est défini sous la forme

$$\min\{J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\nabla \Delta \varphi)^2 dx \right), \varphi \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\} \quad (1.31)$$

Dans ce cas, les auteurs ont trouvé le système approché (qui dépend du paramètre de pénalisation  $\delta$ ) sous la forme

**Théorème 1.5.12** Soit  $(y^\delta, \varphi^\delta)$  une solution optimale du problème. Alors il existe un état adjoint  $p^\delta$  dans  $H_0^2(\Omega)$  tel que le triplet  $(y^\delta, \varphi^\delta, p^\delta)$  satisfait le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta^2 y^\delta + \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) = f \text{ dans } \Omega, \text{ et } y^\delta = \frac{\partial y^\delta}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta^2 p^\delta + \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = y^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } p^\delta = \frac{\partial p^\delta}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\nu \Delta^3 \varphi^\delta - \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi^\delta = \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \eta} = \frac{\partial(\Delta \varphi^\delta)}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Finalement, en passant à la limite (en faisant tendre  $\delta$  vers 0) les auteurs ont obtenu le système limite suivant :

**Théorème 1.5.13** Soit  $(\bar{y}, \bar{\varphi})$  une solution optimale du problème qui appartient à  $H_0^2(\Omega) \times H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ . Alors il existe un état adjoint  $\bar{p}$  dans  $H_0^2(\Omega)$  et  $\bar{q}$  dans  $H^{-2}(\Omega)$  tel que le triplet  $(\bar{y}, \bar{\varphi}, \bar{p})$  satisfait le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta^2 \bar{y} + \bar{q} = f \text{ dans } \Omega, \text{ et } \bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta^2 \bar{p} + \bar{q} = y^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{p} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \nu \Delta^3 \bar{\varphi} + \bar{q} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \bar{\varphi} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} = \frac{\partial(\Delta \bar{\varphi})}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il est bien clair que les techniques utilisées pour l'approximation des problèmes précédents reposent sur l'approximation de l'opérateur multivoque  $\partial I_K$  introduit par Barbu. Cependant les auteurs n'ont pas résolu numériquement ces problèmes et se sont contentés de trouver le système de conditions d'optimalité approché et le système limite associé.

## 1.6 Notations

Nous présentons pour le moment les notations utilisées dans ce travail. On rappelle ici les espaces dans lesquels les solutions vont être cherchées, plus généralement tous les espaces utilisés pour l'analyse numérique du problème (propriétés de régularité, approximation, ...). Les notations utilisées pour les espaces de Sobolev sont classiques ainsi que les démonstrations

peuvent être trouvées dans [25]. Dans ce qui suit, nous désignons par  $x$  le point générique de  $\Omega$  qui est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , à frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne où  $N \leq 3$ . On rappelle que  $D(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans  $\Omega$ , le dual  $D'(\Omega)$  de  $D(\Omega)$  est l'espace des distributions sur  $\Omega$ . On introduit également l'espace  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ . Soit  $p$  tel que  $1 \leq p < +\infty$ . On note par  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $v$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  mesurables tel que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} < +\infty,$$

où  $\|v\|_{L^p(\Omega)}$  désigne la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |v(x)|.$$

L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour cette norme, qui est réflexif si et seulement si  $1 \leq p < +\infty$ . On sait également que

- Pour  $1 \leq p < +\infty$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  contient l'espace  $D(\Omega)$  comme sous-espace dense.
- Pour  $1 \leq p < +\infty$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  est continu dans l'espace  $D'(\Omega)$ . Dans le cas particulier  $p = 2$ ,  $L^p(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) \rightarrow \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

La théorie des distributions permet de définir, pour les espaces de  $L^p(\Omega)$ , des dérivées d'ordre quelconque à valeur dans  $D'(\Omega)$  : pour tout  $d$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  de  $\mathbb{N}^d$ ,  $|\alpha|$  représente la longueur  $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$  et on note  $\partial^\alpha$  la dérivée partielle d'ordre total  $|\alpha|$  et d'ordre  $\alpha_j$  par rapport à  $j$ -ième variable,  $1 \leq j < n$ .

**Définition 1.6.1** Soit  $p$  tel que  $1 \leq p < +\infty$ , et  $m$  un entier positif, on définit l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  par

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^\alpha, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\}.$$

Soient  $p$  un nombre réel,  $1 \leq p < +\infty$ , et  $m$  un entier positif. On note par  $W_0^{m,p}(\Omega)$  l'adhérence de l'espace  $D(\Omega)$  dans l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$ , on le munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty. \tag{1.32}$$

Il est facile de vérifier que l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach, réflexif lorsque  $1 \leq p < +\infty$ . Dans le cas particulier  $p = 2$ , l'espace  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.32) :

$$(u, v) \rightarrow \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)(x) (\partial^\alpha v)(x) dx.$$

**Corollaire 1.6.1** Pour tout nombre réel  $p$ , tel que  $1 \leq p < +\infty$ , et tout entier positif  $m$ , la semi-norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

est une norme sur l'espace  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , équivalente à la norme  $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ .

**Définition 1.6.2** Soient  $p$  un nombre réel, tel que  $1 \leq p < +\infty$ , et  $m$  tout entier positif. On définit le nombre réel  $p'$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . On note par  $W^{-m,p'}(\Omega)$  le dual de l'espace  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , et on le munit de la norme duale

$$\|f\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} := \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $W^{-m,p'}(\Omega)$  et  $W_0^{m,p}(\Omega)$ . Dans le cas particulier  $p = 2$ , on voit que  $p' = 2$ . On note respectivement par  $H_0^m(\Omega)$  et  $H^{-m}(\Omega)$  les espaces  $W_0^{m,2}(\Omega)$  et  $W^{-m,2}(\Omega)$ , et on utilise la même notation pour les normes associées ; on pose

$$H^{-m}(\Omega) := (H_0^m(\Omega))';$$

alors

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega),$$

où les inclusions précédentes sont considérées algébriquement et topologiquement.

Soient  $\alpha_i, i = 1, 2$  deux constantes positives telle que  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ . On définit la forme bilinéaire  $\sigma(\cdot, \cdot)$  par

$$\sigma(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sigma_0(x) u(x) v(x) dx + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_{\partial\Omega} u(\sigma) v(\sigma) d\sigma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Si  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ , où  $\sigma_0$  et  $\sigma_{ij}$  satisfait l'hypothèse

$$\begin{cases} \sigma_0, \sigma_i, \sigma_{ij} \in L^\infty(\Omega), \\ \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \theta_i \theta_j \geq m \sum_{i=0}^n \theta_i^2, \quad m > 0, \quad p, p \text{ dans } \Omega, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (H)$$

Dans le cas où,  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0$ , la forme bilinéaire  $\sigma(., .)$  est définie par

$$\sigma(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sigma_0(x) u(x) v(x) dx,$$

on a alors  $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$ , où

$$Av := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sigma_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \right) + \sigma_0(x) v.$$

On appelle  $A$  dans  $(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  l'opérateur linéaire (elliptique) associé à  $\sigma(., .)$ . On dit que la forme bilinéaire  $\sigma(., .)$  est continue sur  $H^1(\Omega)$  si elle satisfait la condition de continuité  $(H_1)$  donnée par la section 1.7. L'hypothèse  $(H)$ , revient à dire

$$\exists c > 0, \forall u \in H^1(\Omega), \sigma(u, u) \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (1.33)$$

Dans ce cas, on dit que la forme bilinéaire  $\sigma(., .)$  est coercive et la constante  $c$  sera appelée la constante de coercivité.

Le mémoire est divisé comme suit : dans le premier chapitre on a présenté les outils théoriques nécessaires pour la compréhension des chapitres ultérieurs. Dans le chapitre 2, on étudie le problème de l'obstacle ainsi que le problème de contrôle optimal à étudier. Ensuite on passe à l'étude de l'approximation du problème de contrôle optimal déjà introduit (existence et unicité de la solution, régularité,...). Le chapitre 3 est consacré à l'étude et l'implémentation numérique (discrétisation par différences finies, représentations graphiques,...).

Soit le problème de contrôle optimal de l'obstacle étudié par Bergounioux [11],

$$\min \left\{ J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx \right), \quad \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right\} \quad (1.34)$$

où l'obstacle  $\varphi$  (le contrôle) est dans  $\mathcal{U}_{ad}$ , avec  $y$  est la solution correspondante (l'état) du problème de l'obstacle suivant

$$\sigma(y, v - y) + (g(y) - f, v - y) \geq 0, \quad \text{pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi), \quad (1.35)$$

tel que

$$\mathcal{K}(\varphi) = \{y \in H_0^1(\Omega) \mid y \geq \varphi \text{ dans } \Omega\},$$

et  $g$  est une fonction réelle non décroissante telle que

$$\exists r \in \mathbb{R}, \exists \phi \geq 0 \text{ tel que } , \forall y \in \mathbb{R}, |g(y)| \leq r + \phi |y| .$$

La forme bilinéaire  $\sigma(\cdot, \cdot)$  peut être considérée comme un opérateur elliptique qui satisfait les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  données dans la section 1.7. La fonction  $z$  est dans  $L^2(\Omega)$ , et désigne un état cible, et  $\nu$  est une constante positive donnée.

$\mathcal{U}_{ad}$  est l'ensemble des commandes admissibles  $H^2(\Omega)$ -bornés dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  convexe et fermé dans  $H^2(\Omega)$

$$\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{B}_{H^2}(0, R) = \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid \|\varphi\|_{H^2} \leq R\}$$

où  $R$  est un nombre réel positif suffisamment grand. Il est bien connu que l'inéquation variationnelle (1.35) admet une unique solution  $y = \mathcal{T}(\varphi)$  qui appartient à  $H_0^1(\Omega)$ . En plus, si  $\varphi$  appartient à  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , alors  $y$  appartient à  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  (voir [38]). Puis, si on suppose que  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante et  $\mathcal{U}_{ad}$  est  $H^2$ - bornée, alors  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est  $H^2$ - borné. Alors  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une certaine  $\varphi$  dans  $H^2(\Omega)$  (et fortement dans  $H_0^1(\Omega)$ ).

L'ensemble des commandes admissibles  $\mathcal{U}_{ad}$  est  $H^2$ -borné, et peut être considéré comme une contrainte définie sur le contrôle  $\varphi$ . Mais ce choix conduit à des difficultés techniques en levant un système d'optimalité, et complique la résolution numérique (avant optimisation) du problème de contrôle optimal ci-dessus. Pour surmonter ces difficultés, un outil théorique équivalent pour obtenir les mêmes résultats de régularité du problème donné ci-dessus (voir [11]) est de définir la  $H_2$ - norme dans la fonction objectif, et on considère le problème de contrôle optimal donné par Ghanem [30], où l'objectif était de minimiser la fonction

$$\min \left\{ J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx \right), \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right\}, \quad (1.36)$$

où l'obstacle  $\varphi$  est dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , avec la solution associée  $y$ , de l'inéquation variationnelle

$$\sigma(y, v - y) \geq (f, v - y), \quad \text{pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi), \quad (1.37)$$

où  $\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$  a été ajouté, pour être en mesure de dire que, si  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante, alors  $\|\Delta\varphi_k\|_{L^2(\Omega)}$  est bornée et si la suite  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  telle que  $\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$  est une norme équivalente à la norme de  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , alors la suite  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^2(\Omega)$ , ensuite la suite  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est faiblement convergente vers  $\bar{\varphi}$  dans  $H^2(\Omega)$  et fortement convergente vers  $\bar{\varphi}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

La difficulté principale de ce type de problème est la suivante, l'application  $\mathcal{T}$  entre la commande et l'état n'est pas différentiable, mais seulement de Lipschitz. Il n'est donc pas facile d'obtenir des conditions d'optimalité de premier ordre exploitable numériquement [40]. Pour surmonter cette difficulté, nous approchons le problème de l'obstacle (1.35) et (1.6) par une équation régularisée pénalisée [9] par l'introduction du paramètre d'approximation  $\delta$ , où la méthode de pénalisation consiste à remplacer le problème d'obstacle par une famille de problèmes non linéaires.

Ensuite, nous obtenons un système des conditions d'optimalité, voir Ghanem ([30]) et [11] :

$$\begin{cases} Ay = \chi_1(y, \varphi, \delta) \\ A^*p = \chi_2(p, y, \varphi, \delta) \\ (\nabla J(\varphi), v - y) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

où  $\chi_1$ , (respectivement  $\chi_2$ ) est non linéaire (respectivement linéaire), et  $\delta$  est un paramètre d'approximation (paramètre de pénalisation), tel que  $\delta$  est strictement positif et tend vers zéro.

Le but principal de notre travail est la résolution numérique du système d'optimalité ( $\mathcal{S}^\delta$ ) donné dans Ghanem ([30]), où l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}_{ad}$  est égal à  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{cases} -\Delta y^\delta + \beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) = f \text{ dans } \Omega, \text{ et } y^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta p^\delta + \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = y^\delta - z \text{ dans } \Omega \text{ et } p^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\nu \Delta^2 \varphi^\delta - \beta'_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) p^\delta = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi^\delta = \Delta\varphi^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour l'étude numérique en ce problème ( $\mathcal{P}^\delta$ ), nous avons discrétisé le système d'optimalité ( $\mathcal{S}^\delta$ ) par le schéma aux différences finies. Ensuite, nous avons proposé un algorithme itératif pour la résolution numérique en ce système ( $\mathcal{S}^\delta$ ), où l'algorithme proposé est basé sur la méthode de Gauss-Seidel qui est la combinaison entre la méthode de Newton-Raphson relaxée,

et la méthode directe. Cette combinaison génère à chaque étape une équation linéaire et construit une suite itérative qui converge vers la solution.

Cet algorithme est facilement mis en oeuvre et une bonne précision est obtenue. Toutefois, le taux de cette itération dépend du raffinement du pas de maillage  $h$  et le paramètre de pénalisation  $\delta$ .

## 1.7 Le problème de l'obstacle

Dans cette section, on introduit une formulation du problème de l'obstacle en donnant quelques résultats importants. Pour ce faire, nous considérons la forme bilinéaire  $\sigma(\cdot, \cdot)$  définie sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , où l'on suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites

( $H_1$ ) **Continuité**

$$\exists C > 0, \forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega), |\sigma(\varphi, \psi)| \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.39)$$

( $H_2$ ) **Coercivité**

$$\exists c > 0, \forall \varphi \in H^1(\Omega), \sigma(\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (1.40)$$

$A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  est un opérateur linéaire elliptique (voir [39]) associé à  $\sigma(\cdot, \cdot)$  tel que  $\langle Au, v \rangle = \sigma(u, v)$ . Nous faisons remarquer que l'hypothèse de coercivité (1.40) sur  $\sigma(\cdot, \cdot)$  donne

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , on définit

$$\mathcal{K}(\varphi) = \{y \in H_0^1(\Omega) \mid y \geq \varphi \text{ sur } \Omega\}, \quad (1.41)$$

et on considère l'inéquation variationnelle suivante :

$$\sigma(y, v - y) \geq \langle f, v - y \rangle, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi), \quad (1.42)$$

où  $f$  appartient à  $L^2(\Omega)$  comme terme source. A partir de maintenant, nous définissons l'opérateur  $\mathcal{T}$  (contrôle vers l'état) de  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  à  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , tel que  $y = \mathcal{T}(\varphi)$  est

l'unique solution du problème de l'obstacle (1.42)–(1.41) (voir [38]). Maintenant, nous allons scinder l'ensemble  $\Omega$  en deux ensembles  $I(y)$  et  $\Omega - I(y) = N(y)$ . Le premier, est appelé l'ensemble de coïncidence, sera fermé et sera un sous-ensemble de  $\Omega$  où  $y = \varphi$  :

$$I(y) = \{x \in \Omega \mid y(x) = \varphi(x)\}.$$

le deuxième,  $N(y)$ , est le complément de  $I(y)$  :

$$N(y) = \{x \in \Omega \mid y(x) > \varphi(x)\},$$

est appelé l'ensemble de non-coïncidence et déterminé comme étant l'ensemble des points  $x$  où  $y(x) > \varphi(x)$ , l'ensemble  $F = \partial I(y) \cap \Omega$ , est appelé la frontière libre (voir [44]).

## Chapitre 2

# Problème de contrôle optimal de l'obstacle

On considère le problème de contrôle optimal  $(\mathcal{P})$ , défini comme suit

$$\min \left\{ J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dx \right), \varphi \text{ dans } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right\}, \quad (\mathcal{P})$$

où  $\nu$  est une constante strictement positive donnée qu'on appelle contrôle bon marché et  $z$  dans  $L^2(\Omega)$ . On cherche un obstacle (contrôle optimal)  $\bar{\varphi}$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$ , de telle sorte que l'état correspondant est proche d'un état cible  $z$  et dans la suite on prend le domaine des contrôles admissibles  $\mathcal{U}_{ad} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

Pour obtenir les conditions nécessaires pour un contrôle optimal on doit dériver l'opérateur  $\varphi \mapsto \mathcal{T}(\varphi)$ , où l'opérateur  $\varphi \mapsto y = \mathcal{T}(\varphi)$  nous donne la solution de l'équation (2.1) qui va suivre qui n'est pas différentiable. L'idée consiste à approcher l'opérateur  $\mathcal{T}(\varphi)$  par une famille d'opérateurs  $\mathcal{T}_{\delta}(\varphi)$  et de remplacer le problème de l'obstacle (1.42)-(1.41) par l'équation semi-linéaire suivante (voir par exemple [41], [25])

$$Ay + \beta_{\delta}(y - \varphi) = f \text{ dans } \Omega, \quad y = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.1)$$

Dans ce cas, l'opérateur  $\varphi \mapsto \mathcal{T}_{\delta}(\varphi)$  admet une dérivée au sens faible et on peut exhiber les conditions d'optimalité. Par ailleurs,

$$\beta_\delta(r) = \frac{1}{\delta} \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -r^2 & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ r + \frac{1}{4} & \text{si } r \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

où,  $\beta(\cdot)$  est une fonction négative appartenant à  $C^2(\mathbb{R})$  par morceaux, tel que  $\delta$  est strictement positif et tend vers 0 et  $\beta'_\delta(\cdot)$  est donné par

$$\beta'_\delta(r) = \frac{1}{\delta} \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -2r & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1 & \text{si } r \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comme  $\beta_\delta(\cdot - \varphi)$  est croissante, on sait, d'après [31], que le problème aux limites (2.1) admet une solution unique  $y^\delta$  dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  pour un  $\varphi$  fixe dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ . Dans la suite, on pose  $y^\delta := \mathcal{T}^\delta(\varphi)$  et on désigne par  $C$  une constante positive générique indépendante du paramètre  $\delta$ . Par suite, on définit le problème de contrôle optimal sous la forme

$$J_\delta(\varphi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}^\delta(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dx \right).$$

Ainsi le problème de contrôle optimal approché  $(\mathcal{P}^\delta)$  s'écrit sous la forme

$$\min \{ J_\delta(\varphi), \varphi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad} \}. \quad (2.2)$$

Le problème  $(\mathcal{P}^\delta)$  (voir [30]) a au moins une solution notée par  $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$  caractérisée par le théorème suivant.

**Théorème 2.0.1** *Si  $\varphi^\delta$  est une solution optimale de  $(\mathcal{P}^\delta)$  et  $y^\delta = \mathcal{T}^\delta(\varphi^\delta)$ , il existe un état adjoint  $p^\delta$  dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et  $\mu^\delta$  dans  $L^2(\Omega)$  tel que le système suivant  $(\mathcal{S}^\delta)$  soit satisfait*

$$\sigma(y^\delta, v) + (\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta), v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{U}, \quad (2.3a)$$

$$\sigma^*(p^\delta, w) + (\mu^\delta, w) = (y^\delta - z, w), \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{U}, \quad (2.3b)$$

$$\nu \tilde{\sigma}(\varphi^\delta, u) = (\mu^\delta, u), \text{ pour tout } u \text{ dans } \mathcal{W}. \quad (2.3c)$$

où  $\mathcal{W} = \{u \mid u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}$  et  $\sigma^*(.,.)$  désigne la forme adjointe de  $\sigma$  (associée à l'opérateur adjoint  $A^*$ ), et  $\tilde{\sigma}(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$ .

**Preuve.** Voir [30] ■

Dans la suite, on donne quelques résultats fort importants pour les chapitres ultérieurs.

**Théorème 2.0.2** *Pour tout couple  $(y_i^\delta, \varphi_i^\delta)$  dans  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ , satisfaisant le système d'optimalité  $(\mathcal{S}^\delta)$  pour  $i = 1, 2$ , tel que  $\delta \leq C$ , on trouve*

$$\|y_2^\delta - y_1^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq l_1 \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)}.$$

où  $l_1 := \frac{C}{\delta}$ . Ceci signifie que l'application  $y^\delta := \mathcal{T}^\delta(\varphi^\delta)$ , est Lipschitzienne, avec une constante de Lipschitz  $l_1$ .

**Preuve.** D'après l'équation (2.3a) du système des conditions d'optimalité  $(\mathcal{S}^\delta)$ , et pour  $y = y_1$  et  $\varphi = \varphi_1$ , on a

$$\sigma(y_1^\delta, v) + (\beta_\delta(y_1^\delta - \varphi_1^\delta), v) = (f, v) \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

et pour  $y = y_2$  et  $\varphi = \varphi_2$ , on a également

$$\sigma(y_2^\delta, v) + (\beta_\delta(y_2^\delta - \varphi_2^\delta), v) = (f, v) \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

par suite d'après les deux équations précédentes, on a

$$\sigma(y_2^\delta - y_1^\delta, v) + (\beta_\delta(y_2^\delta - \varphi_2^\delta) - \beta_\delta(y_1^\delta - \varphi_1^\delta), v) = 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Si on pose  $v = y_2^\delta - y_1^\delta$ , on obtient

$$\sigma(y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta) = -(\beta_\delta(y_2^\delta - \varphi_2^\delta) - \beta_\delta(y_1^\delta - \varphi_1^\delta), y_2^\delta - y_1^\delta),$$

et dans l'égalité de droite en ajoutant  $(\varphi_2 - \varphi_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)$ , il vient

$$\sigma \left( y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta \right) = - \left( \beta_\delta \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \beta_\delta \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right), \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) + \left( \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sigma \left( y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta \right) &= - \left( \beta_\delta \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \beta_\delta \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right), \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right) - \\ &\quad - \left( \beta_\delta \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \beta_\delta \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right), \left( \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right). \end{aligned}$$

D'après les propriétés de  $\beta_\delta(\cdot)$ , on a  $-\left( \beta_\delta \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \beta_\delta \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right), \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right) \leq 0$ . On déduit alors

$$\sigma \left( y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta \right) \leq - \left( \beta_\delta \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \beta_\delta \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right), \left( \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right).$$

D'après la condition de coercivité  $(H_2)$  de  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , on trouve

$$C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sigma \left( y_2^\delta - y_1^\delta, y_2^\delta - y_1^\delta \right) \leq \left| \left( \beta_\delta \left( y_2^\delta - \varphi_2^\delta \right) - \beta_\delta \left( y_1^\delta - \varphi_1^\delta \right), \left( \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \right) \right) \right|.$$

Par l'application du Théorème des accroissement finis sur l'intervalle d'extrémités  $(y_2^\delta - \varphi_2^\delta)$  et  $(y_1^\delta - \varphi_1^\delta)$  et d'après la définition de  $\beta_\delta(\cdot)$ , on trouve

$$C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\delta} \| \max | \beta'(\cdot) | \|_{L^2(\Omega)} \| (y_2^\delta - y_1^\delta) - (\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta) \|_{L^2(\Omega)} \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left( C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)} \right) \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.4)$$

Ainsi, d'après l'inégalité (2.4), on déduit qu'on a deux cas

1. Si  $C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)}$ ,

on a

$$\| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq C \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)}.$$

2. Si  $\| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)}$ ,

on a

$$C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left( C \| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)} \right) \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)} .$$

Alors

$$\| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)} .$$

Finalement, on déduit que

$$\| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \max\left\{C, \frac{C}{\delta}\right\} \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)} .$$

Comme  $\delta$  tend vers 0, par suite, on déduit qu'à partir d'un certain rang, on a

$$\| y_2^\delta - y_1^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq l_1 \| \varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta \|_{L^2(\Omega)}$$

où  $l_1 := \frac{C}{\delta}$ .

■

**Lemme 2.0.1** Pour tout couple  $(y^\delta, \varphi^\delta)$  dans  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$  satisfaisant le système d'optimalité  $(\mathcal{S}^\delta)$ , on a

$$\| y^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq C \| \varphi^\delta \|_{H^1(\Omega)} + C, \quad (2.5)$$

et si  $\varphi^\delta$  est dans  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \rho_1) \cap \mathcal{W}$ , on déduit que

$$\| y^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \rho_2. \quad (2.6)$$

Ceci signifie que  $y^\delta$  est dans  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \rho_2) \cap \mathcal{U}$ , où  $\rho_2 := C\rho_1 + C$ .

**Preuve.** Soit  $v$  dans  $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$ , où  $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$  est donné par

$$\mathcal{K}(\varphi^\delta) := \left\{ u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \mid u \geq \varphi^\delta \text{ sur } \Omega \right\} .$$

D'après la définition de  $\beta_\delta(\cdot)$ , on a deux cas suivant le signe de  $y^\delta - \varphi^\delta$

- Si  $y^\delta - \varphi^\delta \geq 0$ , on trouve

$$\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) = 0.$$

- Si  $y^\delta - \varphi^\delta < 0$ , on déduit

$$\beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) (y^\delta - \varphi^\delta) \geq 0.$$

Pour tout  $v$  dans  $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$ , on a  $v - y^\delta > v - \varphi^\delta \geq 0$ , alors, il vient

$$\beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta) (v - y^\delta) \leq 0.$$

Par suite, d'après l'équation d'état (2.3a) et en posant  $v = v - y^\delta$ , tel que  $v - y^\delta$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\sigma(y^\delta, v - y^\delta) + (\beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta), v - y^\delta) = (f, v - y^\delta), \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi^\delta).$$

D'après ce qui précède, on déduit que

$$\sigma(y^\delta, v - y^\delta) - (f, v - y^\delta) = -(\beta_\delta (y^\delta - \varphi^\delta), v - y^\delta) \geq 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi^\delta).$$

Alors pour tout  $v$  dans  $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$ , on obtient que

$$\sigma(y^\delta, y^\delta) - (f, y^\delta - v) \leq \sigma(y^\delta, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi^\delta),$$

et pour  $v = \varphi^\delta$ , on trouve

$$\sigma(y^\delta, y^\delta) \leq \sigma(y^\delta, \varphi^\delta) + (f, y^\delta - \varphi^\delta).$$

D'après les conditions de coercivité ( $H_2$ ) et de continuité ( $H_1$ ) de  $\sigma(.,.)$ , on obtient

$$\begin{aligned} C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sigma(y^\delta, \varphi^\delta) + (f, y^\delta - \varphi^\delta) \\ &\leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} (\|y^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} (C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité ci-dessus, on déduit deux cas

1. Si  $\|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|y^\delta\|_{L^2(\Omega)}$  alors

$$C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)},$$

On obtient

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. Si  $C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , alors on a

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , on déduit que

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned} \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq \max \left\{ C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)}, C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\leq C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C.$$

■

**Lemme 2.0.2** Pour tout couple  $(p^\delta, y^\delta)$  dans  $\mathcal{U} \times (\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{H^1}(0, \rho_2))$ , satisfaisant le système des conditions d'optimalité  $(\mathcal{S}^\delta)$ , on a

$$\|p^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C, \quad (2.7)$$

et d'après les conditions du lemme précédent, on obtient

$$\|p^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho_3. \quad (2.8)$$

Ce qui signifie que  $p^\delta$  appartient à  $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{H^1}(0, \rho_3)$ , où  $\rho_3 := C\rho_2 + C$ .

**Preuve.** D'après l'équation (2.3b) du système des conditions d'optimalité  $(\mathcal{S}^\delta)$ , on a

$$\sigma^* \left( p^\delta, w \right) + \left( \beta'_\delta \left( y^\delta - \varphi^\delta \right) p^\delta, w \right) = \left( y^\delta - z, w \right), \text{ pour tout } w \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Par suite, si on prend  $w = p^\delta$ , on trouve

$$\sigma^* \left( p^\delta, p^\delta \right) + \left( \beta'_\delta \left( y^\delta - \varphi^\delta \right) p^\delta, p^\delta \right) = \left( y^\delta - z, p^\delta \right).$$

D'après la condition de coercivité  $(H_2)$  de  $\sigma^*(., .)$ , on obtient

$$C \| p^\delta \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \| y^\delta - z \|_{L^2(\Omega)} \| p^\delta \|_{H^1(\Omega)},$$

D'où

$$\begin{aligned} \| p^\delta \|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left( \| y^\delta \|_{L^2(\Omega)} + \| z \|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left( C \| y^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| z \|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\| p^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq C \| y^\delta \|_{H^1(\Omega)} + C.$$

■

## 2.1 Etude numérique du problème de contrôle optimal de l'obstacle

On doit remarquer que les équations (2.3a) et (2.3c) du système des conditions d'optimalité  $(\mathcal{S}^\delta)$  sont non linéaires en  $y^\delta$  et  $\varphi^\delta$  respectivement, et pour résoudre numériquement le système  $(\mathcal{S}^\delta)$ , on propose d'utiliser un algorithme itératif

### 2.1.1 Algorithme itératif pour le système d'optimalité $(\mathcal{S}^\delta)$

Dans cette section, nous donnons un algorithme pour résoudre le problème  $(\mathcal{P}^\delta)$ . Nous proposons un algorithme implicite pour résoudre les conditions nécessaires d'optimalité. On commence par présenter cet algorithme pour la forme continue du système des conditions d'optimalité  $(\mathcal{S}^\delta)$

---

**Algorithm 1** Algorithme de Gauss-Siedel (version continue)
 

---

- 1: **Données** :  $\{y_0^\delta, p_0^\delta, \varphi_0^\delta, \delta, \nu, \varepsilon\}$  choisir  $\varphi_0^\delta \in \mathcal{W}, \varepsilon$  et  $\delta$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;
  - 2: **Début** :
  - 3: **Résoudre**  $(Ay_n^\delta + \beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) = f)$  en  $y_n^\delta$ ,
  - 4: **Résoudre**  $(A + \beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) p_n^\delta = y_n^\delta - z$  en  $p_n^\delta$ .
  - 5: **Résoudre**  $-(\nu \Delta^2 \varphi_n^\delta + \beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta)$  en  $y_n^\delta$ .
  - 6: **Si** le critère d'arrêt est satisfait Stop
  - 7: **Donne** :  $s_n^\delta := (y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta)$  **est une solution**
  - 8: **Sinon** ;  $n \leftarrow n + 1$ , **Aller à Début.**
  - 9: **Fin si**
  - 10: **Fin algorithme.**
- 

Des différentes étapes de l'algorithme 1 donné ci-dessus, nous définissons les fonctions suivantes  $F_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$  sous les formes suivantes :

-D'après l'étape 1, on définit  $F_1 : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ , de sorte que

$$y_n^\delta := F_1 \left( \varphi_{n-1}^\delta \right), \quad (2.9)$$

Ceci signifie que  $F_1$  dépend de  $\varphi_{n-1}^\delta$ , et donne  $y_n^\delta$  comme solution de l'équation d'état

$$Ay_n^\delta + \beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) = f \text{ dans } \Omega, \text{ et } y_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.10)$$

-D'après l'étape 2, on définit  $F_2 : \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ , de sorte que

$$p_n^\delta := F_2 \left( y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta \right), \quad (2.11)$$

Ceci signifie que  $F_2$  dépend de  $\varphi_{n-1}^\delta$  et  $y_n^\delta$ , et donne  $p_n^\delta$  comme solution de l'équation d'état adjoint

$$A^* p_n^\delta + \beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) p_n^\delta = y_n^\delta - z \text{ dans } \Omega, \text{ et } p_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.12)$$

-Finalement, d'après l'étape 3, on définit  $F_3 : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ , de sorte que

$$\varphi_n^\delta := F_3 \left( y_n^\delta, p_n^\delta \right), \quad (2.13)$$

Ceci signifie que  $F_3$  dépend de  $p_n^\delta$  et  $y_n^\delta$ , et donne  $\varphi_n^\delta$  comme solution de l'équation de condition d'optimalité

$$-\nu \Delta^2 \varphi_n^\delta = \beta_\delta' (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta \text{ dans } \Omega, \text{ et } \varphi_n^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.14)$$

Puis, à partir des définitions ci-dessus de  $F_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , on définit l'application  $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ , sous la forme

$$\varphi_n^\delta := F(\varphi_{n-1}^\delta),$$

où

$$\varphi_n^\delta := F_3 \left( F_1(\varphi_{n-1}^\delta), F_2(F_1(\varphi_{n-1}^\delta), \varphi_{n-1}^\delta) \right), \quad (2.15)$$

telle que,

$$F(\varphi_{n-1}^\delta) = F_3 \left( F_1(\varphi_{n-1}^\delta), F_2(F_1(\varphi_{n-1}^\delta), \varphi_{n-1}^\delta) \right). \quad (2.16)$$

**Théorème 2.1.1** *Soit  $\varphi_{n-1}^\delta$  appartenant à  $\mathcal{W}$  et satisfaisant l'équation (2.10) et soit  $(y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta)$  le triplet qui satisfait (2.10), (2.12) et (2.14) associé au triplet  $(F_1, F_2, F_3)$ , avec  $\delta \leq C$ , alors, on a*

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \quad (2.17)$$

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.18)$$

et

$$\|\varphi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta\nu} \|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.19)$$

**Preuve.** D'après l'équation d'état (2.10), pour  $v = y_n^\delta$ , en ajoutant puis en retranchant  $(\beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))$

$$\sigma(y_n^\delta, y_n^\delta) + (\beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta), (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) + (\beta_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta), \varphi_{n-1}^\delta) = (f, y_n^\delta).$$

De la définition de  $\beta_\delta(\cdot)$ , on peut déduire que  $(\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta), (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) \geq 0$ . Alors il vient

$$\sigma(y_n^\delta, y_n^\delta) \leq (f, y_n^\delta) - (\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta), \varphi_{n-1}^\delta),$$

et d'après la condition de coercivité (H<sub>2</sub>) de la forme bilinéaire  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , on obtient

$$C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)},$$

L'application du Théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités 0 et  $(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$ , on obtient

$$C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{\delta} (\|y_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ensuite, d'après l'inégalité donnée ci-dessus, on distingue deux cas

1. Si  $\|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , alors il vient

$$C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)},$$

et

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}.$$

2. Si  $\|y_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , alors, il vient

$$C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et

$$C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 - C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} - \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Par suite, on déduit que

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{(C \|f\|_{L^2(\Omega)})^2 + 4 \left(\frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\right)}}{2C}$$

ou encore

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{C}{\delta}} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}}{2C}.$$

Finalement, on trouve

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \max \left\{ C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \frac{C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{C}{\delta}} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}}{C} \right\}.$$

Ou

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \max \left\{ C + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}, C + \frac{C}{\sqrt{\delta}} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right\}.$$

D'où

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}.$$

- D'après l'équation d'état adjoint (2.12), pour  $w = p_n^\delta$ , on obtient

$$\sigma^*(p_n^\delta, p_n^\delta) + \left( \beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) p_n^\delta, p_n^\delta \right) = (y_n^\delta - z, p_n^\delta).$$

D'après la condition de continuité ( $H_1$ ) de  $\sigma^*(\cdot, \cdot)$ , on déduit que

$$C \|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|y_n^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)},$$

et

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|z\|_{L^2(\Omega)} + C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Enfin, on obtient

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

- De l'équation (2.14), pour  $u = \varphi_n^\delta$ , il vient

$$\nu \tilde{\sigma}(\varphi_n^\delta, \varphi_n^\delta) = \left( \beta'_\delta (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta, \varphi_n^\delta \right),$$

alors, d'après la condition de coercivité ( $\tilde{H}_2$ ) de  $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , et par la définition de  $\beta_\delta(\cdot)$ , on déduit que

$$C \|\varphi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|p_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$\|\varphi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu} \|\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|p_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}.$$

Par suite, il vient

$$\|\varphi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta\nu} \|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

■

**Corollaire 2.1.1** Si  $\varphi_{n-1}^\delta$  est dans  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W}$ , alors

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_2. \quad (2.20)$$

Ce qui signifie que  $y_n^\delta$  appartient à  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}$ , où  $\tilde{\rho}_2 := \left(C + \frac{C}{\delta}\tilde{\rho}_1\right)$ .

**Preuve.** En utilisant l'équation (2.17), on obtient

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}.$$

Par suite, on trouve

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_2,$$

où  $\tilde{\rho}_2 := C + \frac{C}{\delta}\tilde{\rho}_1$ . ■

**Corollaire 2.1.2** Si les hypothèses du corollaire (2.1.1) sont satisfaites, nous obtenons

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_3. \quad (2.21)$$

Ce qui signifie que  $p_n^\delta$  appartient à  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_3) \cap \mathcal{U}$ , où  $\tilde{\rho}_3 := C + C\tilde{\rho}_2$ .

**Preuve.** D'après les inégalités (2.18) et (2.20), on déduit que

$$\| p_n^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq C + C\tilde{\rho}_2,$$

ou encore,

$$\| p_n^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_3,$$

avec  $\tilde{\rho}_3 := C + C\tilde{\rho}_2$ . ■

**Corollaire 2.1.3** Si les hypothèses du corollaire (2.1.2) sont vérifiées, on trouve

$$\| \varphi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_4. \quad (2.22)$$

Ce qui signifie que  $\varphi_n^\delta$  appartient à  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_4) \cap \mathcal{W}$ , et  $\tilde{\rho}_4 := \frac{C}{\delta\nu}\tilde{\rho}_3$ , où  $\tilde{\rho}_3$  est donné par le corollaire 2.1.2, et  $\tilde{\rho}_2$  est donné par le corollaire 2.1.1.

**Preuve.** D'après les deux inégalités (2.19) et (2.21), on a

$$\| \varphi_n^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta\nu}\tilde{\rho}_3.$$

Par suite, il vient

$$\| \varphi_n^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_4,$$

où  $\tilde{\rho}_4 := \frac{C}{\delta\nu}\tilde{\rho}_3$ . ■

Pour montrer que l'application  $F$  est localement lipschitzienne, on donne le théorème suivant

**Théorème 2.1.2** Si  $\delta \leq C$ , alors la fonction  $F$  est localement lipschitzienne de  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W}$  dans  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_4) \cap \mathcal{W}$ , avec la constante de Lipschitz  $l := l_1l_4 + l_2l_4 + l_1l_2l_4$ , où  $\tilde{\rho}_4 = \frac{C}{\delta\nu} + \frac{C}{\delta^2\nu}\tilde{\rho}_1$ ,  $l_1 := \frac{C}{\delta}$ ,  $l_2 := \left(C + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta}\right)$ ,  $l_4 := \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}$ , et  $\tilde{\rho}_3$  est donné par le corollaire 2.1.2.

Pour démontrer le théorème précédent, on donne les lemmes suivants

**Lemme 2.1.1** La fonction  $F_1$  définie par l'équation (2.9) est localement lipschitzienne de  $\mathcal{W}$  dans  $\mathcal{U}$ , avec la constante de Lipschitz  $l_1 := \frac{C}{\delta}$ .

**Preuve.** Soit  $y_n^\delta = F_1(\varphi_{n-1}^\delta)$  et  $z_n^\delta = F_1(\psi_{n-1}^\delta)$ , où  $(y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $(z_n^\delta, \psi_{n-1}^\delta)$  appartiennent à  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ , on peut déduire que

$$\sigma(y_n^\delta - z_n^\delta, y_n^\delta - z_n^\delta) + (\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta), y_n^\delta - z_n^\delta) = 0,$$

par la condition de coercivité ( $H_2$ ) de  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , il vient

$$C \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \|\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après la définition de  $\beta_\delta(\cdot)$  et le Théorème des accroissements finis appliqué sur l'intervalle d'extrémités  $(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)$ , il vient

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} (\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}).$$

Et d'après l'inégalité précédente, on déduit qu'on peut avoir deux cas

1. Si  $\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , on a

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. Si  $\|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , on trouve

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement, on déduit

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

**Lemme 2.1.2** La fonction  $F_2$  définie par (2.11) est localement Lipschitzienne de  $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}) \times (\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W})$  dans  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_3) \cap \mathcal{U}$ , avec la constante de Lipschitz  $l_2 := \left(C + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta}\right)$ , où  $\tilde{\rho}_3$  est donné par le corollaire 2.1.2.

**Preuve.** Soit  $p_n^\delta := F_2(y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $q_n^\delta := F_2(z_n^\delta, \psi_{n-1}^\delta)$ , où  $(y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $(z_n^\delta, \psi_{n-1}^\delta)$  appartiennent respectivement à  $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}) \times (\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W})$ . D'après l'équation d'état adjoint (2.12), on trouve

$$\sigma^*(p_n^\delta, v) + (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta, v) = (y_n^\delta - z, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

et

$$\sigma^*(q_n^\delta, v) + (\beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)q_n^\delta, v) = (z_n^\delta - z, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Par soustraction des deux équations précédentes, on déduit

$$\sigma^*(p_n^\delta - q_n^\delta, v) + (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)q_n^\delta, v) = (y_n^\delta - z_n^\delta, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Et dans le cas où on pose  $v = p_n^\delta - q_n^\delta$ , il vient

$$\sigma^*(p_n^\delta - q_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta) + (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)q_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta) = (y_n^\delta - z_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta).$$

D'après la condition de coercivité  $(H_2)$  de  $\sigma^*(\cdot, \cdot)$ , on trouve

$$C \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq -(\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)q_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta) + (y_n^\delta - z_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta).$$

Par addition et soustraction de  $\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)q_n^\delta$ , on obtient

$$C \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq -(\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)(p_n^\delta - q_n^\delta) + (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta))q_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta) + (y_n^\delta - z_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta),$$

où

$$(\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)(p_n^\delta - q_n^\delta), p_n^\delta - q_n^\delta) \geq 0.$$

Ainsi, on trouve

$$C \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq -((\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta))q_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta) + (y_n^\delta - z_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta).$$

et par l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , on déduit

$$C \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \|q_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après le Théorème des accroissements finis de  $\beta'_\delta(\cdot)$  appliqué sur l'intervalle d'extrémités  $(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)$ , on trouve

$$\|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \frac{1}{\delta} \|q_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\max |\beta''(\cdot)|\|_{L^2(\Omega)} \left( \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left( C + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left( C + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \left( \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Finalement, il vient

$$\|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \left( C + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \left( \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

■

**Lemme 2.1.3** Si la condition suivante,

$$\tilde{\rho}_3 \leq \delta\nu C,$$

est satisfaite, alors, la fonction  $F_3$  donnée par (2.13) est localement Lipschitzienne de  $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}) \times (\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_3) \cap \mathcal{U})$  dans  $(\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_4) \cap \mathcal{W})$ , avec la constante de Lipschitz

$$l_4 := \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}.$$

**Preuve.** D'après l'équation (2.14), on a

$$\nu\tilde{\sigma}(\varphi_n^\delta, w) = \left( \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)p_n^\delta, w \right), \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{W},$$

et

$$\nu\tilde{\sigma}(\psi_n^\delta, w) = \left( \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_n^\delta)q_n^\delta, w \right), \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{W}.$$

Par soustraction des deux équations précédentes, il vient

$$\nu \tilde{\sigma} \left( \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta, w \right) = \left( \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_n^\delta) q_n^\delta, w \right), \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{W}.$$

Pour  $w = \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta$ , on obtient,

$$\nu \tilde{\sigma} \left( \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right) = \left( \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_n^\delta) q_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right).$$

D'après la condition de coercivité ( $\tilde{H}_2$ ) de  $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , on trouve

$$C \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\nu} \left( \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_n^\delta) q_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right).$$

En ajoutant et en retranchant  $(\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) q_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta)$  dans l'inégalité de droite, on déduit

$$C \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\nu \delta} (\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta + (\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'(z_n^\delta - \psi_n^\delta)) q_n^\delta - \beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) q_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta)$$

ou

$$C \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\nu \delta} (\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'(z_n^\delta - \psi_n^\delta)) q_n^\delta + \beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) (p_n^\delta - q_n^\delta), \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta,$$

alors, on a

$$C \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\nu \delta} \left( (\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'(z_n^\delta - \psi_n^\delta)) q_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \right) + \frac{1}{\nu \delta} (\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) (p_n^\delta - q_n^\delta), \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$C \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu \delta} \|\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'(z_n^\delta - \psi_n^\delta)\|_{L_2(\Omega)} \|q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \frac{C}{\nu \delta} \|\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)\|_{H^2(\Omega)} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\nu\delta} \|\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'(z_n^\delta - \psi_n^\delta)\|_{L_2(\Omega)} \|q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \frac{C}{\nu\delta} \|\max |\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)|\|_{L_2(\Omega)} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par application du Théorème des accroissements finis sur l'intervall d'extrémités  $(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)$  et  $(z_n^\delta - \psi_n^\delta)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\nu\delta} \|\max |\beta''(\cdot)|\|_{L_2(\Omega)} \|(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - (z_n^\delta - \psi_n^\delta)\|_{L_2(\Omega)} \|q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \frac{C}{\nu\delta} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta} \|(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - (z_n^\delta - \psi_n^\delta)\|_{L_2(\Omega)} + \frac{C}{\nu\delta} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Minkowski, il vient

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta} \left( \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} + C \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right) + \frac{C}{\nu\delta} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}.$$

On obtient également

$$\left(1 - \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta}\right) \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta} \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \frac{C}{\nu\delta} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}.$$

Pour que la dernière inégalité ait un sens, il faut imposer  $\left(1 - \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta}\right) \geq 0$ ,  
ou encore

$$\nu\delta C - C\tilde{\rho}_3 \geq 0.$$

Par suite, il vient

$$\tilde{\rho}_3 \leq C\nu\delta.$$

Finalement, on trouve

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta - C\tilde{\rho}_3} \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \frac{C}{\nu\delta - C\tilde{\rho}_3} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}, \quad (2.23)$$

ou encore

$$\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq l_4 \left( \| y_n^\delta - z_n^\delta \|_{L_2(\Omega)} + \| p_n^\delta - q_n^\delta \|_{L_2(\Omega)} \right),$$

avec

$$l_4 = \max \left\{ \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta - C\tilde{\rho}_3}, \frac{C}{\nu\delta - C\tilde{\rho}_3} \right\}.$$

Finalement, il vient

$$\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta\nu - C\tilde{\rho}_3} \left( \| y_n^\delta - z_n^\delta \|_{L_2(\Omega)} + \| p_n^\delta - q_n^\delta \|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (2.24)$$

■

Maintenant, on donne la démonstration du Théorème (2.1.2)

**Preuve.** D'après la définition de l'application  $F_3$  on a  $\varphi_n^\delta := F_3(p_n^\delta, y_n^\delta)$  et  $\psi_n^\delta := F_3(q_n^\delta, z_n^\delta)$  par suite, il vient

$$\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} = \| F_3(p_n^\delta, y_n^\delta) - F_3(q_n^\delta, z_n^\delta) \|_{H^2(\Omega)}.$$

Par l'application du lemme (2.1.3), on déduit

$$\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq l_4 \left( \| y_n^\delta - z_n^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| p_n^\delta - q_n^\delta \|_{H^1(\Omega)} \right).$$

où

$$p_n^\delta := F_2(\varphi_{n-1}^\delta, y_n^\delta), q_n^\delta := F_2(\psi_{n-1}^\delta, z_n^\delta), y_n^\delta := F_1(\varphi_{n-1}^\delta), \text{ et } z_n^\delta := F_1(\psi_{n-1}^\delta).$$

Et d'après les lemmes (2.1.1) et (2.1.2), il vient

$$\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq (l_2 l_4 + l_4) \| y_n^\delta - z_n^\delta \|_{H^1(\Omega)} + (l_2 l_4) \| \varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta \|_{L_2(\Omega)},$$

ou encore

$$\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq l_1 l_2 l_4 \| \varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta \|_{L_2(\Omega)} + (l_2 l_4 + l_1 l_4) \| \varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta \|_{L_2(\Omega)}.$$

Finalement, on a

$$\| \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq l \| \varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta \|_{L_2(\Omega)},$$

où  $l := l_1 l_2 l_4 + l_2 l_4 + l_1 l_4$  est la constante de Lipschitz de la fonction  $F$ . ■

On peut remarquer qu'il est très difficile d'obtenir une bonne estimation de la constante de Lipschitz  $l$  de la fonction  $F$ . Mais d'après l'aspect numérique et un choix approprié de  $\tilde{\rho}_1$  et  $\delta$  (très petit) pourra rendre cette constante strictement inférieure à 1. Dans la suite, nous illustrons comment la méthode de Newton relaxée peut être utilisée pour la résolution du système d'optimalité  $(\mathcal{S}_\delta)$ . L'idée principale est de linéariser (2.3a) et (2.3c). Pour la résolution numérique des équations (2.10), (2.12) et (2.14), nous utilisons la méthode itérative de Newton relaxée (voir [24]) aux les deux applications  $F_1$  et  $F_3$ .

---

**Algorithm 2** Algorithme de Newton relaxé (version continue)
 

---

- 1: **Données** :  $\{y_0^\delta, p_0^\delta, \varphi_0^\delta, \delta, \nu, \omega_y, \omega_\varphi, \varepsilon\}$  choisir  $\varphi_0^\delta \in \mathcal{W}, \varepsilon$  et  $\delta$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;
  - 2: **Début** :
  - 3: **Calculer**  $J_{n-1} \leftarrow J_{n-1}(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$
  - 4: **Si**  $(A + \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))$  n'est pas inversible **Stop**.
  - 5:       **Sinon**
  - 6:       **Résoudre**  $(A + \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) r_n^\delta = -\omega_y(Ay_{n-1}^\delta + \beta_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - f)$  en  $r_n^\delta$ ,
  - 7:       **Alors**  $y_n^\delta = y_{n-1}^\delta + r_n^\delta$ .
  - 8: **Fin si**
  - 9: **Si**  $(A + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))$  n'est pas inversible **Stop**.
  - 10:       **Sinon**
  - 11:       **Résoudre**  $(A + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) p_n^\delta = y_n^\delta - z$  en  $p_n^\delta$ .
  - 12: **Fin si**
  - 13: **Si**  $(-\nu\Delta^2 + \beta''_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) p_n^\delta$  n'est pas inversible **Stop**.
  - 14:       **Sinon**
  - 15:       **Résoudre**  $((-\nu\Delta^2 + \beta''_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) p_n^\delta) \cdot r_n^\delta = \omega_\varphi(\nu A_h^d A_h^d \varphi_{n-1}^\delta + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) p_n^\delta)$   
en  $r_n^\delta$ .
  - 16:       **Alors**  $\varphi_n^\delta = \varphi_{n-1}^\delta + r_n^\delta$
  - 17: **Calculer**  $J_n \leftarrow J_{n-1}(y_n^\delta, \varphi_n^\delta)$
  - 18: **Fin si**
  - 19: **Si**  $|J_n - J_{n-1}| \leq \varepsilon$  **Stop**.
  - 20: **Faire** :  $s_n^\delta := (y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta)$  est une solution
  - 21:       **Sinon** ;  $n \leftarrow n + 1$ , **Aller à Début**.
  - 22: **Fin si**
  - 23: **Fin algorithme**.
- 

**Théorème 2.1.3** Si  $\bar{\varphi}^\delta$  est une solution de l'équation suivante

$$\bar{\varphi}^\delta - F(\bar{\varphi}^\delta) = 0, \quad (2.25)$$

alors, le triplet  $(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta, \bar{p}^\delta)$  satisfait le système d'optimalité  $(\mathcal{S}_\delta)$ .

**Preuve.** Si  $\bar{\varphi}^\delta$  satisfait l'équation (2.25), où  $\bar{\varphi}^\delta$  est défini par

$$\bar{\varphi}^\delta := F_3 \left( \bar{y}^\delta, \bar{p}^\delta \right), \quad (2.26)$$

où  $\bar{y}^\delta$  et  $\bar{p}^\delta$  peuvent être définis respectivement par

$$\bar{y}^\delta := F_1 \left( \bar{\varphi}^\delta \right), \quad (2.27)$$

et

$$\bar{p}^\delta := F_3 \left( \bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta \right). \quad (2.28)$$

D'après les définitions des applications  $F_1, F_2$  et  $F_3$ , les relations (2.26), (2.27) et (2.28) sont écrites respectivement sous la forme

$$A\bar{y}^\delta + \beta_\delta \left( \bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) = f, \quad (2.29)$$

$$A^*\bar{p}^\delta + \beta'_\delta \left( \bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \bar{p}^\delta = \bar{y}^\delta - z, \quad (2.30)$$

et

$$\nu \Delta^2 \bar{\varphi}^\delta + \beta'_\delta \left( \bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \bar{p}^\delta = 0. \quad (2.31)$$

On remarque que les équations (2.29), (2.30) et (2.31) sont les mêmes équations du système des conditions d'optimalité  $(\mathcal{S}_\delta)$ , où le triplet  $(y^\delta, \varphi^\delta, p^\delta)$  est remplacé par  $(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta, \bar{p}^\delta)$ . ■

**Remarque 2.1.1** D'après le lemme 2.1.2, et quand on remplace  $z_n^\delta, \psi_{n-1}^\delta$  et  $q_n^\delta$  respectivement par  $\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta$  et  $\bar{p}^\delta$ , on déduit

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 \left( \| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (2.32)$$

**Lemme 2.1.4** Soit  $\bar{\varphi}^\delta$  la solution de l'équation (2.31), tel que

$$\| \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_3, \quad (2.33)$$

et soit  $\omega_\varphi > 0$ , tel que

$$\frac{\delta\nu C + C\tilde{\rho}_3}{(C + \delta\nu C - C\tilde{\rho}_3)} \leq \omega_\varphi \leq 1, \quad (2.34)$$

et

$$\omega_\varphi < \frac{\delta^2\nu C - C\delta\tilde{\rho}_3}{C\delta + C\tilde{\rho}_3}.$$

Alors on a

$$\|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq k_3 \left( \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \right), \quad (2.35)$$

où  $k_3$  est une constante positive et  $\tilde{\rho}_3 \leq C\delta\nu$ , tel que  $k_3 := \omega_\varphi \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}$ .

**Preuve.** D'après l'étape 3, de la version continue de l'algorithme 2, on obtient

$$\left(-\nu\Delta^2 + \beta_\delta''(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta\right) \left(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta + \bar{\varphi}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right) = \bar{\omega}_\varphi \left(\nu\Delta^2\varphi_{n-1}^\delta + \beta_\delta'(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta\right)$$

où  $\omega_\varphi$  est une constante positive inférieure à 1. Par suite, il vient

$$\begin{aligned} -\nu\Delta^2(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) &= -\beta_\delta''(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) + \\ &\quad + \left(-\nu\Delta^2 + \beta_\delta''(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta\right) \cdot (\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) - \\ &\quad - \omega_\varphi(-\nu\Delta^2\varphi_{n-1}^\delta - \beta_\delta'(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta + \nu\Delta^2\bar{\varphi}^\delta + \\ &\quad + \beta_\delta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\bar{p}^\delta - \beta_\delta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)p_n^\delta + \beta_\delta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)p_n^\delta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu\tilde{\sigma}(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) &= -\left(\beta_\delta''(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta), (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\right) + \\ &\quad + \nu(1 - \omega_\varphi)\tilde{\sigma}(\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) + \\ &\quad + \left(\beta_\delta''(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta(\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta), (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\right) + \\ &\quad + \omega_\varphi\left(\left(\beta_\delta'(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\right)p_n^\delta + \beta_\delta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)(p_n^\delta - \bar{p}^\delta), (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\right). \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités  $(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$ , avec

$$r^\delta(\theta) = \theta \left( y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) + (1 - \theta) \left( \bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \text{ et } 0 \leq \theta \leq 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \nu \tilde{\sigma} \left( \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) = & - \left( \beta_\delta'' \left( y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) p_n^\delta \left( \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), \left( \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right) + \\ & + \nu (1 - \omega_\varphi) \tilde{\sigma} \left( \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) + \\ & + \left( \beta_\delta'' \left( y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) p_n^\delta \left( \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), \left( \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right) + \\ & + \omega_\varphi \left( \beta_\delta'' \left( r^\delta(\theta) \right) \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) p_n^\delta, \left( \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right) - \\ - \omega_\varphi \left( \beta_\delta'' \left( r^\delta(\theta) \right) \left( \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) p_n^\delta, \left( \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right) & + \omega_\varphi \left( \beta_\delta' \left( \bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \left( p_n^\delta - \bar{p}^\delta \right), \left( \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right). \end{aligned}$$

Par la condition de coercivité  $(\tilde{H}_2)$  et la condition de continuité  $(\tilde{H}_1)$  de  $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , il vient

$$\begin{aligned} \nu C \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq & \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \nu (1 - \omega_\varphi) C \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \\ & + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \\ & + \omega_\varphi \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \\ & + \omega_\varphi \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \\ & + \omega_\varphi \frac{C}{\delta} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} \left( \nu C - \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq & \left( (1 - \omega_\varphi) \nu C + (1 + \omega_\varphi) \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \\ & + \omega_\varphi \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \omega_\varphi \frac{C}{\delta} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour que l'inégalité précédente ait un sens, il faut qu'on ait  $\left( \nu C - \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \geq 0$ , ce qui implique

$$\tilde{\rho}_3 \leq \nu \delta C. \quad (2.36)$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} &\leq \left( \frac{(1 - \omega_\varphi)\delta\nu C + (1 + \omega_\varphi)C\tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \\ &+ \omega_\varphi \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \omega_\varphi \frac{C}{\delta} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} &\leq \left( \frac{(1 - \omega_\varphi)\delta\nu C + (1 + \omega_\varphi)C\tilde{\rho}_3}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3} \right) \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \\ &+ \omega_\varphi \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \omega_\varphi \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.1.2** D'après l'estimation (2.36), on a

$$\tilde{\rho}_3 \leq C\nu\delta,$$

alors  $\tilde{\rho}_3 \leq C$  puisque  $\delta$  est très petit. Ensuite, on obtient

$$\omega_\varphi \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3} \leq \omega_\varphi \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}.$$

En posant

$$k_3 := \max \left\{ \frac{(1 - \omega_\varphi)\delta\nu C + (1 + \omega_\varphi)C\tilde{\rho}_3}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}, \omega_\varphi \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3} \right\},$$

avec

$$\frac{(1 - \omega_\varphi)\delta\nu C + (1 + \omega_\varphi)C\tilde{\rho}_3}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3} \leq \omega_\varphi \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}.$$

et

$$\frac{\delta\nu C + C\tilde{\rho}_3 + \omega_\varphi(C\tilde{\rho}_3 - \delta\nu C)}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3} \leq \omega_\varphi \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3},$$

on trouve

$$\delta\nu C + C\tilde{\rho}_3 \leq \omega_\varphi(C - C\tilde{\rho}_3 + \delta\nu C).$$

D'où

$$\frac{\delta\nu C + C\tilde{\rho}_3}{(C + \delta\nu C - C\tilde{\rho}_3)} \leq \omega_\varphi \leq 1.$$

**Lemme 2.1.5** Soit  $y_n^\delta$  la solution de l'équation (2.29), telle que la condition (2.33) du lemme précédent soit satisfaite, avec

$$\left( \frac{\delta C + C - \delta}{\delta C + C} \right) < \omega_y \leq \frac{(\delta C + C)}{(\delta C + 2C)} \leq 1. \quad (2.37)$$

On trouve

$$\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq k_1 \left\{ \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\} \quad (2.38)$$

où  $k_1 := (1 - \omega_y) \left( C + \frac{C}{\delta} \right) < \frac{1}{4}$ ,  $e_{n-1}^\delta := (y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $\bar{e}^\delta := (\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$ .

**Preuve.** D'après l'étape 1 de l'algorithme 2, on a

$$\left( A + \beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) \right) (y_n^\delta - y_{n-1}^\delta) = -\omega_y \left( A y_{n-1}^\delta + \beta_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - f \right).$$

En ajoutant et en retranchant  $\bar{y}^\delta$  dans le premier membre, on trouve

$$\begin{aligned} \left( A + \beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) \right) (y_n^\delta - \bar{y}^\delta + \bar{y}^\delta - y_{n-1}^\delta) &= -\omega_y \left( A y_{n-1}^\delta + \beta_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - f \right) - \\ &\quad - \left( A \bar{y}^\delta + \beta_\delta (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right) + f, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A (y_n^\delta - \bar{y}^\delta) + \beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) (y_n^\delta - \bar{y}^\delta) &= A (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta) + \beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta) - \\ &\quad - \omega_y \left[ A (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta) + \beta_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \right]. \end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned} \sigma (y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) &= - \left( \beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) (y_n^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \right) + \sigma (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) + \\ &\quad + \left( \beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \right) - \omega_y \sigma (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) - \\ &\quad - \omega_y \left( \beta_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \right). \end{aligned}$$

Et d'après les propriétés de  $\beta'_\delta(\cdot)$ , on a

$$-\left(\beta'_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right) \leq 0,$$

par suite, on déduit

$$\begin{aligned} \sigma\left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right) &\leq (1 - \omega_y) \sigma\left(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right) + \\ &+ \left(\beta'_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\left(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right) - \\ &- \omega_y \left(\beta_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right) - \beta_\delta\left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right). \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrêmités  $(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  et  $(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \sigma\left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right) &\leq (1 - \omega_y) \sigma\left(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right) + \\ &+ \left(\beta'_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\left(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right) - \\ &- \omega_y \left(\beta'_\delta\left(r^\delta(\theta)\right)\left(\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right) - \left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\right)\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right), \end{aligned}$$

où

$$r^\delta(\theta) = \theta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right) + (1 - \theta)\left(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\right) \text{ et } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Par suite, on écrit

$$\begin{aligned} \sigma\left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right) &\leq (1 - \omega_y) \sigma\left(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right) + \\ &+ \left(\beta'_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\left(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right) - \\ &- \omega_y \left(\beta'_\delta\left(r^\delta(\theta)\right)\left(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right) + \\ &+ \omega_y \left(\beta'_\delta\left(r^\delta(\theta)\right)\left(\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\right), \left(y_n^\delta - \bar{y}^\delta\right)\right). \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant  $\beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \sigma \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) &\leq (1 - \omega_y) \sigma \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \\ &+ \left( \beta'_\delta \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) - \\ &- \omega_y \left( \left( \beta'_\delta \left( r^\delta(\theta) \right) - \beta'_\delta \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) + \beta'_\delta \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) \right) \right. \\ &\left. \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) + \\ &+ \omega_y \left( \beta'_\delta \left( r^\delta(\theta) \right) \left( \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right). \end{aligned}$$

L'application du Théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités  $(r^\delta(\theta))$  et  $(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$ , donne

$$\begin{aligned} \sigma \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) &\leq (1 - \omega_y) \sigma \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \\ &+ \left( \beta'_\delta \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) + \\ &+ \omega_y \left( \left( \beta''_\delta \left( s^\delta(\theta) \right) \left[ (1 - \theta) \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) - (1 - \theta) \left( \bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right] \right) \right. \\ &+ \left. \beta'_\delta \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) + \\ &+ \omega_y \left( \beta'_\delta \left( r^\delta(\theta) \right) \left( \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right), \end{aligned}$$

où

$$s^\delta(\theta) := \theta \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) + (1 - \theta) r^\delta(\theta).$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) &\leq (1 - \omega_y) \sigma \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) + \\ &+ (1 - \bar{\omega}_y) \left( \beta'_\delta \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) + \\ &+ \omega_y \left( \left[ \beta''_\delta \left( s^\delta(\theta) \right) \left[ (1 - \theta) \left( y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \right) - (1 - \theta) \left( \bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right] \right] \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \right), \right. \\ &\left. \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right) + \omega_y \left( \beta'_\delta \left( r^\delta(\theta) \right) \left( \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right), \left( y_n^\delta - \bar{y}^\delta \right) \right). \end{aligned}$$

D'après la condition de coercivité ( $H_2$ ) et la condition de continuité ( $H_1$ ) de  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , on obtient

$$\begin{aligned} C \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq (1 - \omega_y) C \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \\ &\quad + (1 - \omega_y) \frac{1}{\delta} C \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \\ &\quad + \omega_y \frac{1}{\delta} C (1 - \theta) \left\| \left( y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \right) - \left( \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \\ &\quad + \omega_y \frac{1}{\delta} C \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq (1 - \omega_y) \left( C + \frac{1}{\delta} C \right) \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \omega_y \frac{1}{\delta} C (1 - \theta) (\|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}) + \omega_y \frac{1}{\delta} C \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et par l'application de l'inégalité de Young, on déduit

$$\begin{aligned} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq (1 - \omega_y) \left( C + \frac{1}{\delta} C \right) \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \\ &\quad + \omega_y \frac{1}{\delta} C (1 - \theta) (\|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2) + \omega_y \frac{1}{\delta} C \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq (1 - \omega_y) \left( C + \frac{1}{\delta} C \right) \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \omega_y \frac{1}{\delta} C (1 - \theta) \left( \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) + \\ &\quad + \omega_y \frac{1}{\delta} C (1 - \theta) \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \omega_y \frac{1}{\delta} C \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq k_1 \left\{ \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \right\}, \end{aligned}$$

où

$$k_1 := \max \left\{ (1 - \omega_y) \left( C + \frac{1}{\delta} C \right), \omega_y \frac{1}{\delta} C (1 - \theta), \omega_y \frac{1}{\delta} C \right\}.$$

■

**Remarque 2.1.3** Comme on a  $(1 - \theta) \leq 1$ , il vient alors

$$k_1 := \max \left\{ (1 - \omega_y) \left( C + \frac{C}{\delta} \right), \omega_y \frac{1}{\delta} C \right\}.$$

Si on suppose que

$$\omega_y \frac{1}{\delta} C \leq (1 - \omega_y) \left( C + \frac{C}{\delta} \right),$$

on déduit que  $\omega_y \left( C + 2\frac{C}{\delta} \right) \leq \left( C + \frac{C}{\delta} \right)$ . Par suite, on obtient

$$\omega_y \leq \frac{(\delta C + C)}{(\delta C + 2C)},$$

et dans ce cas, on déduit

$$k_1 := (1 - \omega_y) \left( C + \frac{C}{\delta} \right) < \frac{1}{4}.$$

Alors, on a  $(1 - \omega_y) < \frac{\delta}{\delta C + C}$ , ce qui implique alors

$$\left( \frac{\delta C + C - \delta}{\delta C + C} \right) < \omega_y.$$

**Théorème 2.1.4** Soit  $e_n^\delta := (y_n^\delta, \varphi_n^\delta)$ , où  $y_n^\delta$  et  $\varphi_n^\delta$  sont respectivement les solutions des équations (2.10) et (2.14) et  $\bar{e}^\delta := (\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$ , où  $\bar{y}^\delta$  et  $\bar{\varphi}^\delta$  sont respectivement les solutions des équations (2.29) et (2.31), alors on a

$$\| e_n^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \leq k \max \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2, \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}, \quad (2.39)$$

où

$$k := 2 \left( k_1 + \tilde{k}_3 \right), \quad \tilde{k}_3 := k_3 \left( k_1 + \tilde{l}_2 + 1 \right) \quad \text{et} \quad \tilde{l}_2 = l_2 (Ck_1 + C).$$

**Preuve.** D'après le résultat (2.38) du lemme 2.1.5 et l'inégalité (2.32), on trouve

$$\| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq k_1 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\},$$

et

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 \left( \| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Par l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 \left( C \| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)} + C \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \right).$$

On a aussi

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 \left( C \left[ k_1 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\} \right] + C \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \right).$$

D'où

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 \left( C \left[ k_1 \left\{ \| (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta) \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \right\} \right] + C \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \right),$$

et

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq l_2 (Ck_1 + C) \left\{ \| (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta) \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \right\}.$$

On obtient

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{l}_2 \left\{ \| y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \right\}.$$

Finalement, il vient

$$\| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{l}_2 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}, \quad (2.40)$$

où

$$\tilde{l}_2 := l_2 (Ck_1 + C).$$

Alors par le résultat (2.35) du lemme 2.1.4, on trouve

$$\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq k_3 \left( \| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} + \| p_n^\delta - \bar{p}^\delta \|_{H^1(\Omega)} \right),$$

D'après le résultat (2.38) du lemme 2.1.5 et l'inégalité (2.40), on trouve

$$\begin{aligned} \| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} &\leq k_3 (k_1 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\} + \\ &\quad \| \varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} + \\ &\quad + \tilde{l}_2 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}). \end{aligned}$$

D'où

$$\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq k_3 \left( k_1 + \tilde{l}_2 + 1 \right) \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\},$$

et

$$\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq \tilde{k}_3 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}.$$

Par suite, il vient

$$\| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} \leq \tilde{k}_3 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}, \quad (2.41)$$

où

$$\tilde{k}_3 := k_3 \left( k_1 + \tilde{l}_2 + 1 \right).$$

D'après le résultat (2.38) du lemme 2.1.5 et l'inégalité (2.41), on trouve

$$\begin{aligned} \| y_n^\delta - \bar{y}^\delta \|_{H^1(\Omega)} + \| \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta \|_{H^2(\Omega)} &\leq k_1 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\} \\ &\quad + \tilde{k}_3 \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}, \end{aligned}$$

alors, on déduit

$$\begin{aligned} \| e_n^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} &\leq (k_1 + \tilde{k}_3) \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\} \\ &\leq 2 (k_1 + \tilde{k}_3) \max \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2, \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\| e_n^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \leq k \max \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2, \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\}, \quad (2.42)$$

où

$$k := 2 (k_1 + \tilde{k}_3).$$

■

**Remarque 2.1.4** D'après le résultat (2.39) du Théorème 2.1.4 , on a

$$\| e_n^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \leq k \max \left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2, \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\},$$

où  $k$  est une constante inférieure à 1.

Alors  $(e_n^\delta - \bar{e}^\delta)$  est une suite fortement convergente vers 0 dans l'espace  $H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ .

Par suite, il vient que  $(y_n^\delta, \varphi_n^\delta)$  est une suite fortement convergente vers  $(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$  dans l'espace  $H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ .

On déduit alors que la suite  $\varphi_n^\delta$  converge fortement vers  $\bar{\varphi}^\delta$  dans  $H^2(\Omega)$  et que la suite  $y_n^\delta$  converge fortement vers  $\bar{y}^\delta$  dans  $H^1(\Omega)$ .

**Remarque 2.1.5** Comme on a l'estimation suivante

$$\| e_n^\delta - e_{n-1}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \leq \| e_n^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} + \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)},$$

alors, d'après la remarque précédente, on déduit que  $(e_n^\delta - e_{n-1}^\delta)$  converge fortement vers 0 dans  $H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ .

Dans ce cas, il vient que la suite  $(y_n^\delta - y_{n-1}^\delta)$  converge fortement vers 0 dans l'espace  $H^1(\Omega)$  et que la suite  $(\varphi_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  converge fortement vers 0 dans l'espace  $H^2(\Omega)$ .

**Théorème 2.1.5** *Si on suppose que  $(y_n^\delta - y_{n-1}^\delta)$  est une suite fortement convergente vers 0 dans l'espace  $H^1(\Omega)$  et si  $(\varphi_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  est une suite fortement convergente 0 dans l'espace  $H^2(\Omega)$  alors, on obtient que*

$$|J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| \text{ converge fortement vers 0}$$

**Preuve.** On a

$$J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y_n^\delta - z)^2 dx + \nu \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi_n^\delta)^2 dx \right)$$

et

$$J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y_{n-1}^\delta - z)^2 dx + \nu \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi_{n-1}^\delta)^2 dx \right)$$

Par soustraction, on trouve

$$\begin{aligned} |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} (y_n^\delta - z)^2 dx + \nu \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi_n^\delta)^2 dx \right) - \right. \\ &\left. - \left( \int_{\Omega} (y_{n-1}^\delta - z)^2 dx + \nu \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi_{n-1}^\delta)^2 dx \right) \right) \right| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| &= \frac{1}{2} \left( \|y_n^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|y_{n-1}^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ &\left. + \nu \left( \|\Delta \varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned} |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| &= \frac{1}{2} (\|y_n^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} - \|y_{n-1}^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad (\|y_n^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} + \|y_{n-1}^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}) + \\ &\quad \nu (\|\Delta \varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} - \|\Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad (\|\Delta \varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| &\leq \frac{1}{2} (\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) (\|y_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + 2\|z\|_{L^2(\Omega)}) + \nu (\|\Delta \varphi_n^\delta - \Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) (\|\Delta \varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned} |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| &\leq \frac{1}{2}(\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)})(\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\|y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + 2\|z\|_{L^2(\Omega)}) + \nu(\|\Delta\varphi_n^\delta - \Delta\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad (\|\Delta\varphi_n^\delta - \Delta\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\Delta\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

D'après le résultat du corollaire 2.1.1, on a  $\|y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_2$  et  $\|\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_1$ , alors, il vient

$$\begin{aligned} |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| &\leq \frac{1}{2}(\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} (\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\tilde{\rho}_2 + C) + \\ &\quad \nu(\|\Delta\varphi_n^\delta - \Delta\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} (\|\Delta\varphi_n^\delta - \Delta\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\tilde{\rho}_1))) \end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| &\leq \frac{1}{2}(\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} (2\tilde{\rho}_2 + C) + \\ &\quad \nu(\|\Delta\varphi_n^\delta - \Delta\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta\varphi_n^\delta - \Delta\varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} (2\tilde{\rho}_1))) \end{aligned}$$

D'après la remarque 2.1.5, on déduit que

$$|J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)|$$

converge fortement vers 0

■

## Chapitre 3

# Implementation numérique

### 3.1 Approximation par la méthode des différences finies

Pour calculer la solution discrète, en utilisant la méthode des différences finies, on doit commencer par discrétiser le système des conditions d'optimalité ( $\mathcal{S}^\delta$ ). On calcule alors les valeurs  $y^{\delta,h} := (y_0^\delta, y_1^\delta, \dots, y_N^\delta)$ ,  $\varphi^{\delta,h} := (\varphi_0^\delta, \varphi_1^\delta, \dots, \varphi_N^\delta)$  et  $p^{\delta,h} := (p_0^\delta, p_1^\delta, \dots, p_N^\delta)$ , où les vecteurs  $y^{\delta,h}$ ,  $\varphi^{\delta,h}$  et  $p^{\delta,h}$  sont les solutions discrètes du système des conditions d'optimalité ( $\mathcal{S}^\delta$ ) tels que  $y_i^\delta := y^\delta(x_i)$ ,  $\varphi_i^\delta := \varphi^\delta(x_i)$ , et  $p_i^\delta := p^\delta(x_i)$ .

Pour l'approximation par la méthode des différences finies, on utilise la méthode à trois points et à cinq points respectivement pour la discrétisation du Laplacien en dimension un, et en dimension deux. Dans la suite on a  $x_i = ih$  avec  $0 \leq i \leq N+1$  où  $N$  est le nombre des points intérieurs et  $h = \frac{1}{N+1}$  est la distance entre deux points consécutifs du maillage.

A partir des conditions aux limites, on déduit que  $y_0^\delta = y_{N+1}^\delta = 0$ ,  $p_0^\delta = p_{N+1}^\delta = 0$ , et  $\varphi_0^\delta = \varphi_{N+1}^\delta = 0$ . Nous avons donc  $3N$  valeurs inconnues à calculer. Ainsi, en appliquant la méthode des différences finies sur  $y^{(2)}(x)$  en dimension une (respectivement  $\Delta y(x)$  en dimension deux), on trouve respectivement

$$-y^{(2)}(x) := \frac{1}{h^2}(-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}), \text{ où } 0 \leq i \leq N+1, \quad (3.1)$$

et

$$-(\Delta y)_{ij} := \frac{1}{h^2}(-y_{i+1,j} + 4y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j-1}), \text{ où } 0 \leq i, j \leq N+1. \quad (3.2)$$

Par suite, pour  $i = 1, \dots, N$ , nous obtenons le système d'équations en dimension une sous la forme

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} (-y_{i+1}^\delta + 2y_i^\delta - y_{i-1}^\delta) + \beta_\delta (y_i^\delta - \varphi_i^\delta) = f_i, \text{ et } y_0^\delta = y_{N+1}^\delta = 0, \\ \frac{1}{h^2} (-p_{i+1}^\delta + 2p_i^\delta - p_{i-1}^\delta) + \beta'_\delta (y_i^\delta - \varphi_i^\delta) p_i^\delta = y_i^\delta - z_i, \text{ et } p_0^\delta = p_{N+1}^\delta = 0, \\ \frac{1}{h^2} (-\phi_{i+1}^\delta + 2\phi_i^\delta - \phi_{i-1}^\delta) = \frac{1}{\nu} \beta'_\delta (y_i^\delta - \varphi_i^\delta) p_i^\delta, \text{ et } \phi_0^\delta = \phi_{N+1}^\delta = 0, \\ \frac{1}{h^2} (-\varphi_{i+1}^\delta + 2\varphi_i^\delta - \varphi_{i-1}^\delta) = \phi_i^\delta, \text{ et } \varphi_0^\delta = \varphi_{N+1}^\delta = 0. \end{cases}$$

et pour  $0 \leq i, j \leq N+1$ , on obtient le système d'équations en dimension deux comme suit

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} (-y_{i+1,j}^\delta + 4y_{i,j}^\delta - y_{i-1,j}^\delta - y_{i,j+1}^\delta - y_{i,j-1}^\delta) + \beta_\delta (y_{i,j}^\delta - \varphi_{i,j}^\delta) = f_{i,j}, \\ \text{et } y_{0,j}^\delta = y_{N+1,j}^\delta = y_{i,0}^\delta = y_{i,N+1}^\delta = 0, \\ \frac{1}{h^2} (-p_{i+1,j}^\delta + 4p_{i,j}^\delta - p_{i-1,j}^\delta - p_{i,j+1}^\delta - p_{i,j-1}^\delta) + \beta'_\delta (y_{i,j}^\delta - \varphi_{i,j}^\delta) p_{i,j}^\delta = y_{i,j}^\delta - z_{i,j}, \text{ et } \\ p_{0,j}^\delta = p_{N+1,j}^\delta = p_{i,0}^\delta = p_{i,N+1}^\delta = 0, \\ \frac{1}{h^2} (-\phi_{i+1,j}^\delta + 4\phi_{i,j}^\delta - \phi_{i-1,j}^\delta - \phi_{i,j+1}^\delta - \phi_{i,j-1}^\delta) = \frac{1}{\nu} \beta'_\delta (y_{i,j}^\delta - \varphi_{i,j}^\delta) p_{i,j}^\delta, \\ \text{et } \phi_{0,j}^\delta = \phi_{N+1,j}^\delta = \phi_{i,0}^\delta = \phi_{i,N+1}^\delta = 0 \\ \frac{1}{h^2} (-\varphi_{i+1,j}^\delta + 4\varphi_{i,j}^\delta - \varphi_{i-1,j}^\delta - \varphi_{i,j-1}^\delta - \varphi_{i,j+1}^\delta) = \phi_{i,j}^\delta, \\ \text{et } \varphi_{0,j}^\delta = \varphi_{N+1,j}^\delta = \varphi_{i,0}^\delta = \varphi_{i,N+1}^\delta = 0 \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on peut écrire les systèmes précédents sous une forme matricielle comme suit

$$\begin{cases} A_h^d y_n^{\delta,h} + \beta_\delta (y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h}) = f^h, \\ (A_h^d + \beta'_\delta (y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})) p_n^{\delta,h} = y_n^{\delta,h} - z^h, \\ A_h^d \phi_n^{\delta,h} = \frac{1}{\nu} \beta'_\delta (y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h}) p_n^{\delta,h}, \\ A_h^d \varphi_n^{\delta,h} = \phi_n^{\delta,h}. \end{cases}$$

avec  $d = 1, 2$  où  $f^h := (f_0, f_1, \dots, f_{N+1})$ ,  $z^h := (z_0, z_1, \dots, z_{N+1})$ ,  $\phi^{\delta,h} := (\phi_0^\delta, \phi_1^\delta, \dots, \phi_{N+1}^\delta)$  et  $\varphi^{\delta,h} := (\varphi_0^\delta, \varphi_1^\delta, \dots, \varphi_{N+1}^\delta)$  tel qu'en dimension une la matrice  $A_h^1$  est une matrice bi-diagonale symétrique définie positive de dimensions  $(N+2)(N+2)$ , où  $A_h^1$  est donné par la matrice suivante :

$$A_h^1 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{symétrique} & & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix},$$

et en dimension deux,  $A_h^2$  est une matrice symétrique tridiagonale par blocs de dimensions  $(N + 2)^2(N + 2)^2$ , où  $A_h^2$  est donné par la matrice suivante

$$A_h^2 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \text{symétrique} & & & \dots & \dots & \dots & -1 & \\ & & & & 4 & -1 & 0 & \\ & & & & & 4 & -1 & \\ & & & & & & & 4 \end{pmatrix}.$$

Nous donnons, ci-dessous, la version discrète de l'algorithme continu,

---

**Algorithm 3** Algorithme Newton Gauss-Seidel relaxé ( version discrete )
 

---

- 1: **Donner** :  $\left\{ y_0^{\delta,h}, p_0^{\delta,h}, \varphi_0^{\delta,h}, \delta, \nu, \omega_y, \omega_\varphi, \varepsilon \right\}$  choisir  $\varphi_0^{\delta,h} \in \mathcal{W}, \varepsilon$  et  $\delta$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;
  - 2: **Début** :
  - 3: **Calculer**  $J_{n-1} \leftarrow J_{n-1} \left( y_{n-1}^{\delta,h}, \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right)$
  - 4: **Si**  $\left( A_h^d + \mathbf{diag} \left( \beta'_{\delta,h} \left( y_{n-1}^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) \right) \right)$  n'est pas inversible **Stop**.
  - 5:     **Sinon**
  - 6: **Résoudre**  $\left( A_h^d + \mathbf{diag} \left( \beta'_{\delta,h} \left( y_{n-1}^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) \right) \right) \cdot r_n^{\delta,h} = -\omega_y \left( A_h^d y_{n-1}^{\delta,h} + \beta_\delta \left( y_{n-1}^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) - f^h \right)$   
en  $r_n^{\delta,h}$ ,
  - 7:     **Alors**  $y_n^{\delta,h} = y_{n-1}^{\delta,h} + r_n^{\delta,h}$ .
  - 8: **Fin si**
  - 9: **Si**  $\left( A_h^d + \mathbf{diag} \left( \beta'_{\delta,h} \left( y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) \right) \right)$  n'est pas inversible **Stop**.
  - 10:     **Sinon**
  - 11: **Résoudre**  $\left( A_h^d + \mathbf{diag} \left( \beta'_\delta \left( y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) \right) \right) p_n^{\delta,h} = y_n^{\delta,h} - z^h$  en  $p_n^{\delta,h}$ .
  - 12: **Fin si**
  - 13: **Si**  $\left( -\nu A_h^d A_h^d + \mathbf{diag} \left( \beta''_{\delta,h} \left( y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) p_n^{\delta,h} \right) \right)$  n'est pas inversible **Stop**.
  - 14:     **Sinon**
  - 15: **Résoudre**  $\left( -\nu A_h^d A_h^d + \mathbf{diag} \left( \beta''_{\delta,h} \left( y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) p_n^{\delta,h} \right) \right) r_n^{\delta,h} =$   
 $\omega_\varphi \left( \nu A_h^d A_h^d \varphi_{n-1}^{\delta,h} + \beta'_\delta \left( y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h} \right) p_n^{\delta,h} \right)$  en  $r_n^{\delta,h}$ .
  - 16:     **Alors**  $\varphi_{n,h}^{\delta,h} = \varphi_{n-1}^{\delta,h} + r_n^{\delta,h}$
  - 17: **Calculer**  $J_n \leftarrow J_n \left( y_n^{\delta,h}, \varphi_n^{\delta,h} \right)$
  - 18: **Fin si**
  - 19: **Si**  $|J_n - J_{n-1}| \leq \varepsilon$  **Stop**.
  - 20: **Faire** :  $s_n^\delta := \left( y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta \right)$  est une solution
  - 21:     **Sinon**;  $n \leftarrow n + 1$ , **Aller à Début**.
  - 22: **Fin si**
  - 23: **Fin algorithme**.
-

## 3.2 Calcul numérique

### 3.2.1 Tests numériques en dimension une

Dans cette section, nous proposons des exemples pour le calcul numérique en dimension une basés sur l'algorithme 3 précédent. Nous donnons par la suite des résultats de calcul numérique qui ont été réalisés à l'aide de Matlab. On va effectuer plusieurs tests numériques où dans chaque test on fait varier l'un des paramètres suivants  $\omega, \delta, N$  et  $\nu$  où on prend  $f(x) = 100x \cos(3\pi x)$ ,  $z(x) = \cos(4\pi x^2)$  et  $\Omega = [0, 1]$  et on suppose pour simplifier que  $\omega = \omega_y = \omega_\varphi$ .

#### Etude de la dépendance par rapport au paramètre $\omega$

Dans ce test, numérique on fixe les paramètres  $\delta, \nu$  et on choisit  $N = 200$ , et on fait varier le paramètre de relaxation  $\omega$ . Les résultats numériques présentés dans le Tableau 3.1 dépendent de la variation de  $\omega$ . La Figure 3.1, représente la fonction contrôle et la fonction état. La Figure donnée par 3.2 représente la région de contact  $I(y)$  entre l'état et le contrôle. Finalement, la Figure 3.3 représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans le repère log-log en fonction du nombre d'itérations  $n$ .

**Remarque 3.2.1** Le Tableau 3.1 montre qu'on a une convergence rapide de la fonction coût et on a une erreur avec une précision de 13 places décimales. On peut remarquer que la variation du paramètre  $\omega$  n'influence pas les calculs.

**Remarque 3.2.2** Les Figures 3.1, 3.2 et 3.3 montrent respectivement que le contrôle  $\varphi$  converge rapidement vers une solution  $\bar{\varphi}$  en décroissant proportionnellement à  $\omega$ , que l'état  $y$  converge rapidement en croissant vers une solution  $\bar{y}$  proportionnellement à  $\omega$  et la fonction objectif  $J$  converge rapidement vers une valeur  $\bar{J}$  en décroissant proportionnellement à  $\omega$ . Finalement, on remarque une oscillation de l'erreur avec une précision supérieure strictement à  $1e - 15$  et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

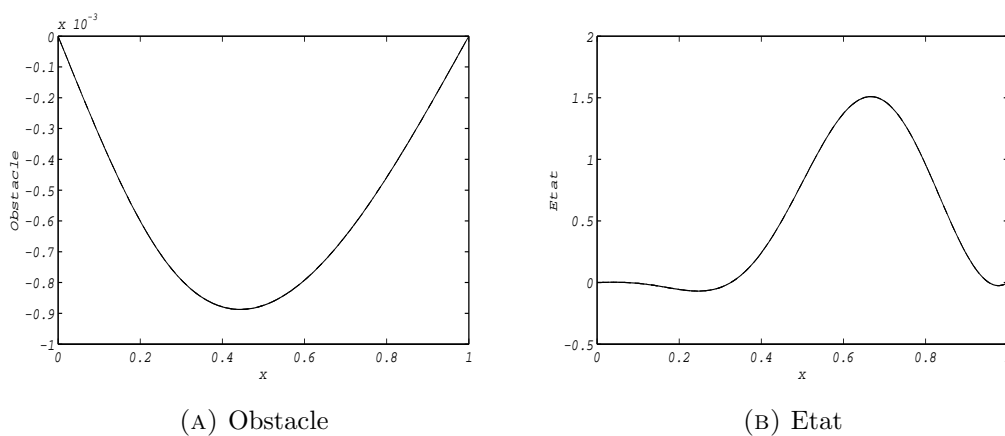


FIG. 3.1: gauche (obstacle), droite (état), ligne continue  $\omega = 0.25$ , ligne tiré  $\omega = 0.75$ , ligne tiré-point  $\omega = 1$

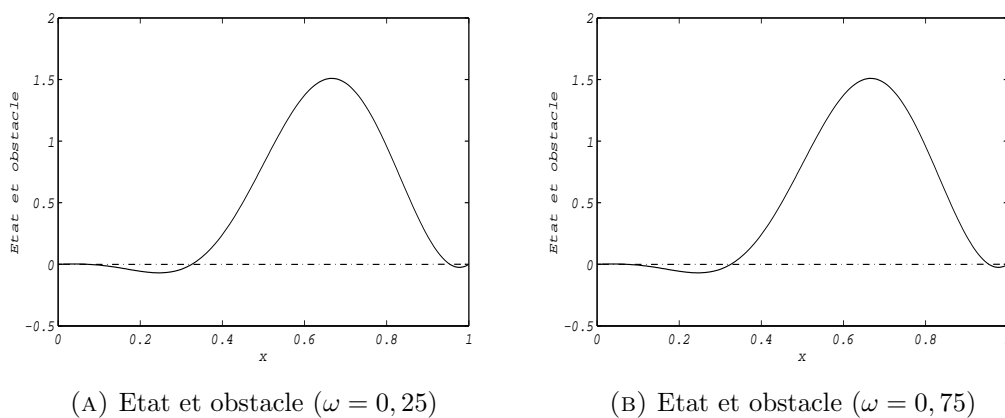


FIG. 3.2: gauche (état et obstacle ( $\omega = 0,25$ )), droite (état et obstacle ( $\omega = 0,75$ ))

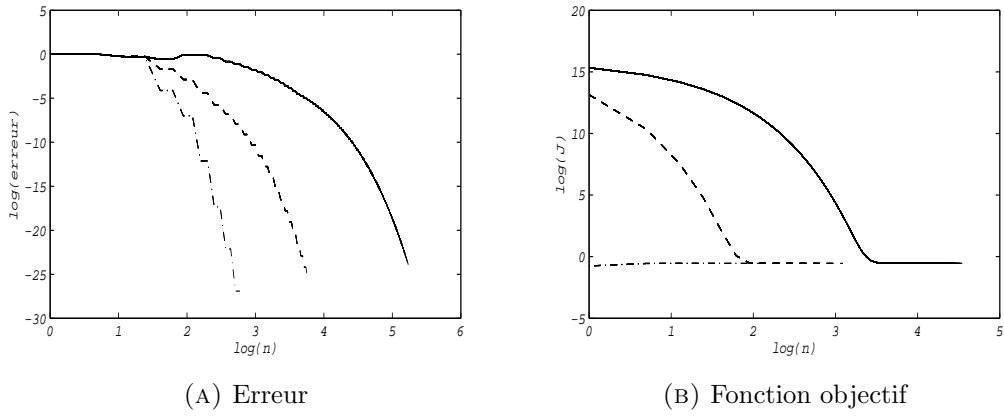


FIG. 3.3: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne continue  $\omega = 0.25$ , ligne tiré  $\omega = 0.75$ , ligne tiré-point  $\omega = 1$

$\omega$	# Ité	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
0.25	94	0.589998980447379	8.4665607e-013	1.966770856217395	9.040472e-016
0.3	81	0.589998980447380	9.2874659e-013	1.966770856217398	2.140928e-015
0.35	68	0.589998980447381	9.3827483e-013	1.966770856217400	8.866982e-015
0.4	55	0.589998980447381	8.8736489e-013	1.966770856217400	2.419594e-015
0.45	45	0.589998980447380	9.3848576e-013	1.966770856217399	7.753095e-015
0.55	37	0.589998980447379	8.3748392e-013	1.966770856217395	6.478504e-015
0.6	33	0.589998980447382	7.6478392e-013	1.966770856217402	5.348833e-015
0.65	30	0.589998980447380	7.3764892e-013	1.966770856217398	7.098409e-015
0.7	25	0.589998980447378	7.8376453e-013	1.966770856217394	7.250698e-016
0.75	22	0.589998980447380	7.1609385e-013	1.966770856217400	2.054733e-015
0.8	17	0.589998980447380	6.1383847e-013	1.966770856217398	2.379252e-015
0.85	14	0.589998980447379	5.2684965e-013	1.966770856217396	2.186126e-015
0.9	11	0.589998980447377	3.9684965e-013	1.966770856217391	3.43001e-015

TAB. 3.1: Résultats numériques en dimension une suivant  $\omega$ .

### Etude de la dépendance par rapport au paramètre $N$

Dans ce test numérique, on fixe les paramètres  $\delta$ ,  $\nu$  et on pose  $\omega = 0,75$ . Les résultats numériques présentés par le Tableau 3.2 ont été obtenus suivant la variation de  $N$ . La Figure 3.4, représente la fonction contrôle et la fonction état; la Figure donnée par 3.5 représente la région de contact  $I(y)$  entre l'état et le contrôle. Finalement, la Figure 3.6 représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans le repère log-log en fonction du nombre d'itérations  $n$ .

**Remarque 3.2.3** D'après les résultats donnés dans le Tableau 3.2, on remarque qu'on a une convergence lente de la fonction coût en fonction de  $N$ , par contre, on a une convergence rapide de l'erreur avec une précision de 15 places décimales. On remarque que le paramètre  $N$  a une influence sur les calculs.

**Remarque 3.2.4** Les Figures 3.4, 3.5 et 3.6 montrent respectivement que la fonction contrôle

$\varphi$  converge proportionnellement à  $N$  rapidement vers une solution  $\bar{\varphi}$  en décroissant, par contre, l'état  $y$  converge lentement en croissant vers une solution  $\bar{y}$  proportionnellement à  $N$ . D'autre par, la fonction objectif  $J$  converge rapidement vers une valeur  $\bar{J}$  en croissant proportionnellement à  $N$ .

Finalement, la variation de l'erreur oscille avec un ordre supérieur strictement à  $1e - 15$  et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

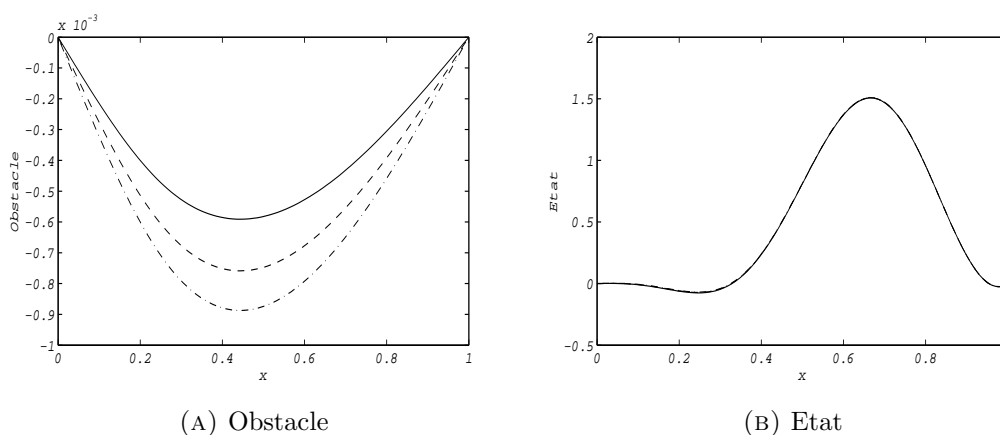
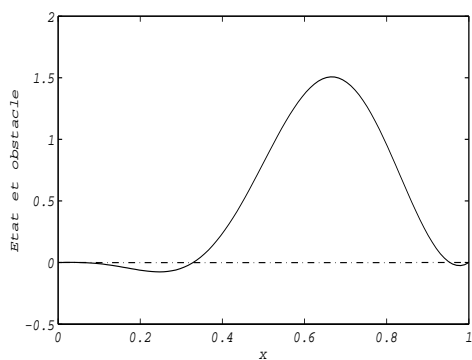
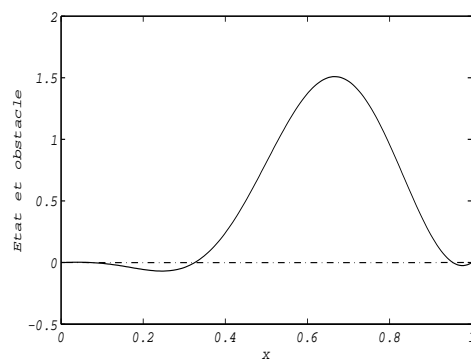


FIG. 3.4: gauche (obstacle), droite (état)

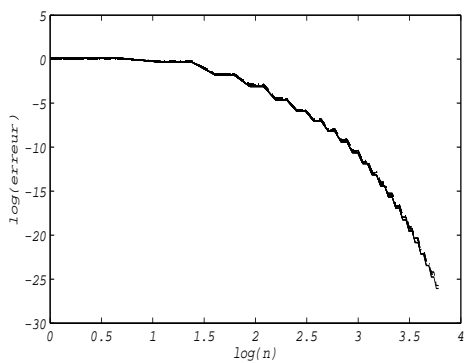


(A) Etat et obstacle ( $N = 100$ )

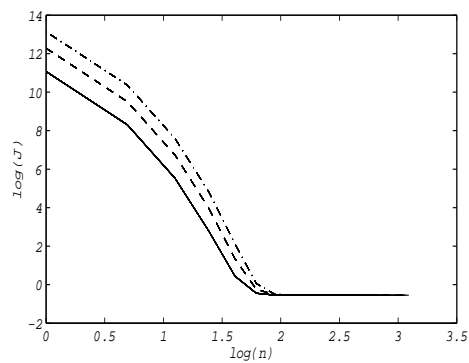


(B) Etat et obstacle ( $N = 200$ )

FIG. 3.5: gauche (état et obstacle ( $N = 100$ )), droite (état et obstacle ( $N = 200$ ))



(A) Erreur



(B) Fonction objectif

FIG. 3.6: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne continue  $N = 100$ , ligne tiré  $N = 150$ , ligne tiré-point  $N = 200$

N	Ité	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
25	22	0.56757700515	1.4746374e-013	1.932402234301	1.966656e-015
50	22	0.57346355808	1.8273637e-013	1.923617171318	9.636089e-016
75	22	0.57629946965	2.3493829e-013	1.927246145906	8.402815e-016
100	22	0.57798506477	2.9964919e-013	1.929031917415	6.212617e-015
125	22	0.57999018395	4.7362848e-013	1.931199500905	1.193505e-015
150	22	0.57998481839	5.0448534e-013	1.932831421556	5.280541e-015
175	22	0.58119942565	6.8374639e-013	1.932948958946	6.257629e-015
200	22	0.58165894477	7.1609385e-013	1.933749307458	4.452329e-015
225	22	0.58135568377	8.8364839e-013	1.933975674586	5.068026e-015
250	22	0.58205428424	9.3836050e-013	1.934209324935	5.036967e-015
275	22	0.58240038552	9.7374950e-013	1.935222607444	9.397116e-015

TAB. 3.2: Résultats numériques en dimension une suivant  $N$ .

### Etude de la dépendance par rapport à $\nu$

Dans ce test numérique on fixe les paramètres  $\delta$ ,  $\omega$  et on pose  $N = 200$ . Les résultats numériques présentés par le Tableau 3.3 ont été trouvés suivant la variation de  $\nu$ . Dans la Figure 3.7, on représente la fonction contrôle et la fonction état. La Figure donnée par 3.8 représente la région de contact  $I(y)$  entre l'état et le contrôle. Finalement, la Figure 3.9 représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans le repère log-log en fonction du nombre d'itérations  $n$ .

**Remarque 3.2.5** D'après les résultats donnés dans le Tableau 3.3 on remarque qu'on a une convergence lente de la fonction coût et une convergence rapide de l'erreur avec une précision de 15 places décimales. On peut remarquer également que le paramètre  $\nu$  a une influence sur les calculs.

**Remarque 3.2.6** Les Figures 3.7, 3.8 et 3.9 montrent respectivement que la fonction contrôle  $\varphi$  converge rapidement en croissant proportionnellement à  $\nu$ . D'autre par, l'état  $y$  converge

lentement en croissant proportionnellement à  $\nu$ . La fonction objectif  $J$  converge rapidement en croissant proportionnellement à  $\nu$  et finalement, on remarque que l'erreur oscille avec une précision d'ordre supérieur strictement à  $10^{-11}$  et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

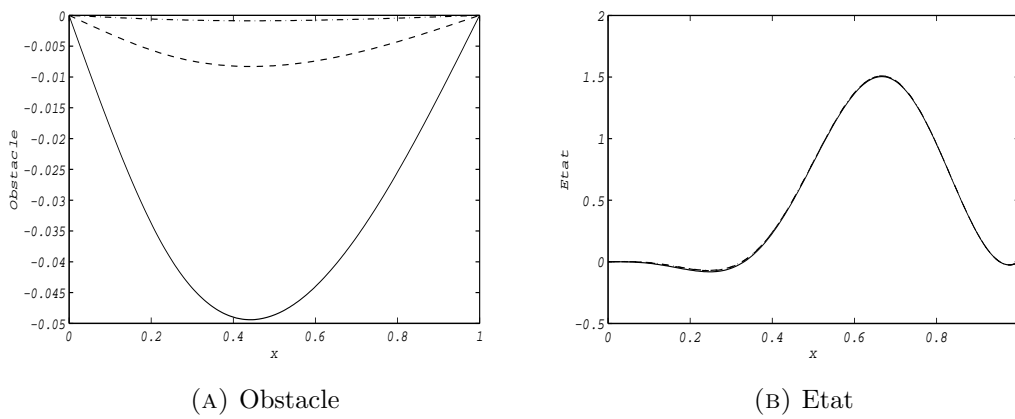


FIG. 3.7: gauche (obstacle), droite (état), ligne continue  $\nu = 0.01$ , ligne tiré  $\nu = 0.1$ , ligne tiré-point  $\nu = 1$

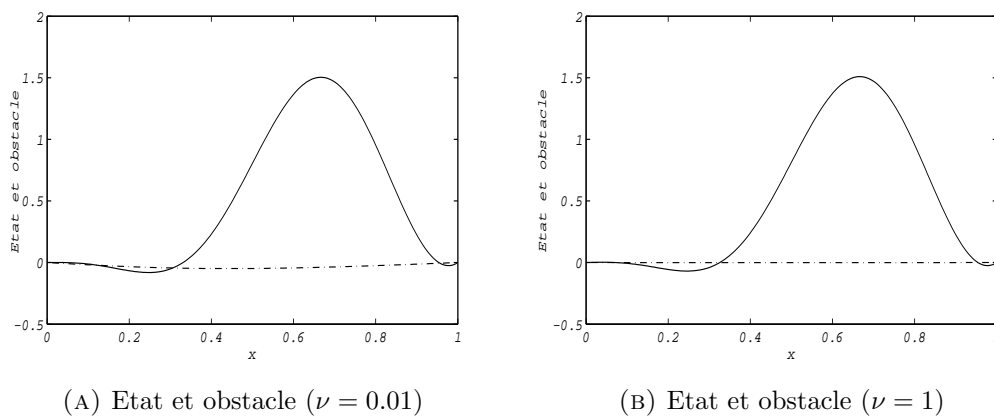


FIG. 3.8: gauche (état et obstacle ( $\nu = 0.01$ )), droite (état et obstacle ( $\nu = 1$ ))

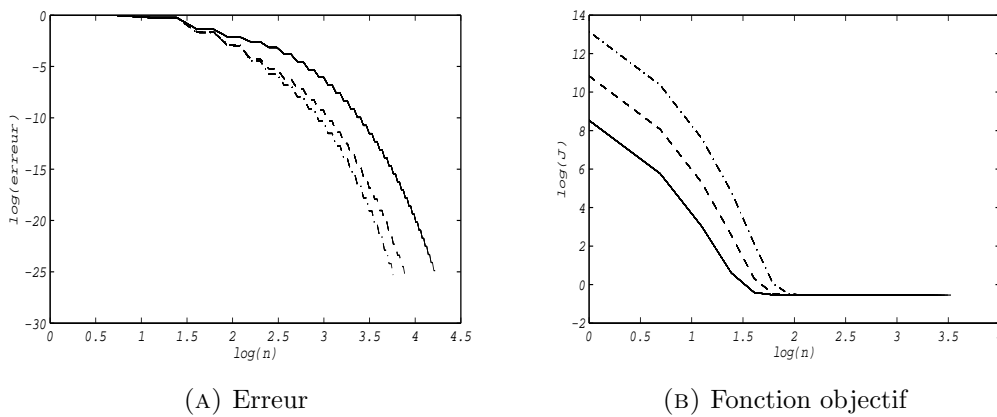


FIG. 3.9: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne tiré  $\nu = 0.1$ , ligne continue  $\nu = 0.01$ , ligne tiré-point  $\nu = 1$

$\nu$	Ité	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
0.01	34	0.579995423	8.4654505627e-013	1.9250785123	1.5603184373e-011
0.1	25	0.581018535	8.1978868138e-013	1.9314109680	7.7810032927e-012
0.2	24	0.589358007	8.3647346373e-013	1.9623102251	2.7103440464e-015
0.25	23	0.589514637	8.8473957593e-013	1.9633945920	2.8819271210e-015
0.3	22	0.589620392	8.9485739585e-013	1.9641289613	4.6226154895e-015
0.35	22	0.589696586	8.0384736473e-013	1.9646590969	3.7589219193e-016
0.4	22	0.589754091	8.2938475746e-013	1.9650597445	1.3512397316e-015
0.45	22	0.589799030	7.9346834896e-013	1.9653731605	3.8211272195e-015
0.5	22	0.589835115	8.1827364783e-013	1.9656250269	4.1491395606e-015
0.55	22	0.589864728	8.3748578293e-013	1.9658318468	8.2987261425e-015
0.6	22	0.589889467	8.0847583748e-013	1.9660047110	5.7498768854e-015
0.65	22	0.589910444	7.8494857493e-013	1.9661513455	2.3979101420e-015
0.7	22	0.589928455	7.7857845839e-013	1.9662772981	7.0478092450e-015
0.75	22	0.589944089	7.6738475838e-013	1.9663866559	4.1156764259e-015
0.8	22	0.589957786	7.3746283748e-013	1.9664824942	4.6138423096e-015
8.5	22	0.589969886	7.2938473637e-013	1.9665671749	7.7927905417e-015
9	22	0.589980653	7.2837463747e-013	1.9666425387	1.5802625258e-015
9.5	22	0.5899902954	7.1934683489e-013	1.9667100430	2.7815502828e-016
1	22	0.5899989804	7.1609385088e-013	1.9667708562	3.430013363e-015

TAB. 3.3: Résultats numériques en dimension une suivant  $\nu$ .

### Etude de la dépendance par rapport au paramètre $\delta$

Dans ce test numérique, on fixe les paramètres  $\nu$ ,  $\omega$  et on pose  $N = 200$ . On fait varier le paramètre  $\delta$ . Les résultats numériques donnés dans le Tableau 3.4 ont été trouvés par rapport la variation de  $\delta$ . Dans la Figure 3.10, on représente la fonction contrôle et la fonction état. La Figure donnée par 3.11 représente la région de contact  $I(y)$  entre l'état et le contrôle . Finalement, la figure 3.12 représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans le repère log-log en fonction

du nombre d'itérations  $n$ .

**Remarque 3.2.7** D'après les données du Tableau 3.4, on remarque qu'on a une convergence lente de la fonction coût et une convergence rapide de l'erreur avec une précision de 15 places décimales. On peut remarquer que le paramètre  $\delta$  a une influence sur les calculs.

**Remarque 3.2.8** Les Figures 3.10, 3.11 et 3.12 montrent respectivement que la fonction contrôle  $\varphi$  converge rapidement en décroissant proportionnellement à  $\delta$ , par contre l'état  $y$  converge lentement en croissant proportionnellement à  $\delta$ . D'autre part, la fonction objectif  $J$  converge lentement en croissant proportionnellement à  $\delta$ . Finalement, on remarque que l'erreur oscille avec une précision d'ordre supérieur strictement à  $1e-15$  et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

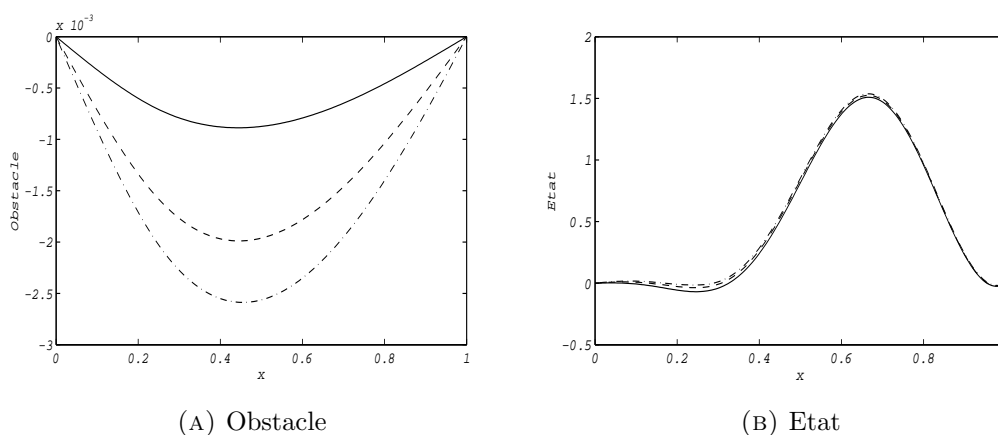


FIG. 3.10: gauche (obstacle), droite (état), ligne continue  $\delta = h^1$ , ligne tiré  $\delta = h^{1.5}$ , ligne tiré-point  $\delta = h^2$

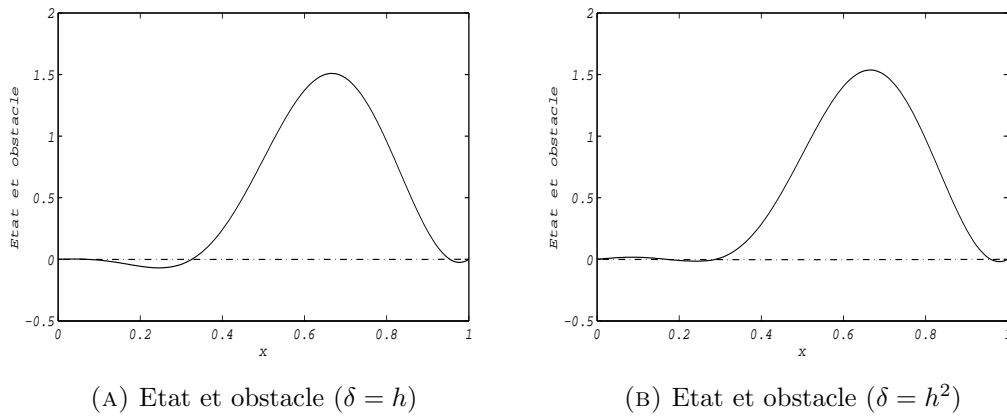


FIG. 3.11: gauche (état et obstacle ( $\delta = h$ )), droite (état et obstacle ( $\delta = h^2$ ))

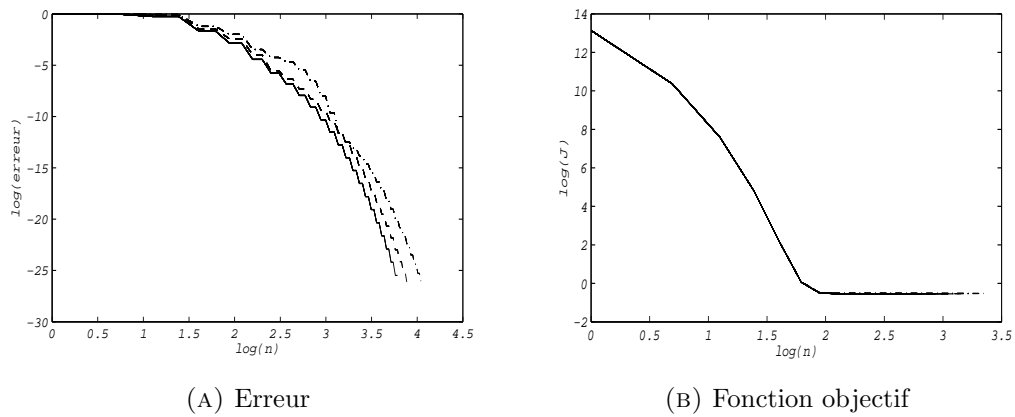


FIG. 3.12: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne continue  $\delta = h$ , ligne tiré  $\delta = h^{1.5}$ , ligne tiré-point  $\delta = h^2$

$\delta$	Itération	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
$h^1$	22	0.579984818	7.16093850e-013	1.931199500	1.19350508e-015
$h^{1.2}$	23	0.581796590	3.82804898e-013	1.938545002	8.09610389e-015
$h^{1.4}$	24	0.583953672	3.75485845e-013	1.946953388	8.14444372e-016
$h^{1.6}$	25	0.586096482	8.85624906e-013	1.954825791	7.43959517e-015
$h^{1.8}$	27	0.588087173	5.49857485e-013	1.961417127	1.60823954e-015
$h^2$	29	0.589998980	4.74398298e-013	1.966770856	3.43001336e-015
$h^{2.2}$	30	0.591900143	4.84785457e-013	1.971172581	3.64754047e-016
$h^{2.4}$	32	0.593705224	5.84457457e-013	1.974761201	1.94978021e-015
$h^{2.6}$	34	0.595178384	2.87584573e-013	1.977463200	9.97875101e-016
$h^{2.8}$	35	0.596302246	3.75847584e-013	1.979421251	2.56797728e-015
$h^3$	38	0.597109845	4.84756484e-013	1.980780972	5.67333902e-015

TAB. 3.4: Résultats numériques en dimension une quand on varie  $\delta$ .

### 3.2.2 Tests numériques en dimension deux

Dans cette section, nous proposons des exemples pour le calcul numérique en dimension deux basés sur l'algorithme 3. Nous donnons, par la suite, des résultats qui ont été réalisés à l'aide de Matlab. On va effectuer plusieurs tests numériques où dans chaque test on fait varier l'un des paramètres suivants  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $N$  et  $\nu$ . On prend  $f(x, y) = \pi x^2 \sin(2\pi x^2)y \cos(2\pi y^2)$ ,  $z(x, y) = \sin(2\pi x^2) \cos(2\pi y^2)$  et  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  et on suppose pour simplifier que  $\omega = \omega_y = \omega_\varphi$ .

#### Etude de la dépendance par rapport au paramètre $\omega$

Dans ce test numérique, on fixe les paramètres  $\nu$ ,  $\delta$  et on prend  $N = 20$  tout en faisant varier le paramètre  $\omega$ . Les résultats numériques donnés dans le Tableau 3.5 sont trouvés suivant la variation de  $\omega$ . Dans la Figure 3.13, on représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans un repère log-log en fonction du nombre d'itérations  $n$ . La Figure 3.14 représente la fonction contrôle et la fonction état.

**Remarque 3.2.9** D'après les résultats donnés dans le Tableau 3.5, on remarque qu'on a une convergence rapide de la fonction coût et une convergence rapide de l'erreur avec une précision de 10 places décimales. On peut remarquer que le paramètre  $\omega$  n'influence pas les calculs.

**Remarque 3.2.10** Les Figures 3.13 et 3.14 montrent respectivement que la fonction objectif  $J$  converge lentement vers une valeur  $\bar{J}$  en croissant proportionnellement à  $\omega$ . La variation de l'erreur oscille, avec un ordre  $> 1e - 9$ , et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

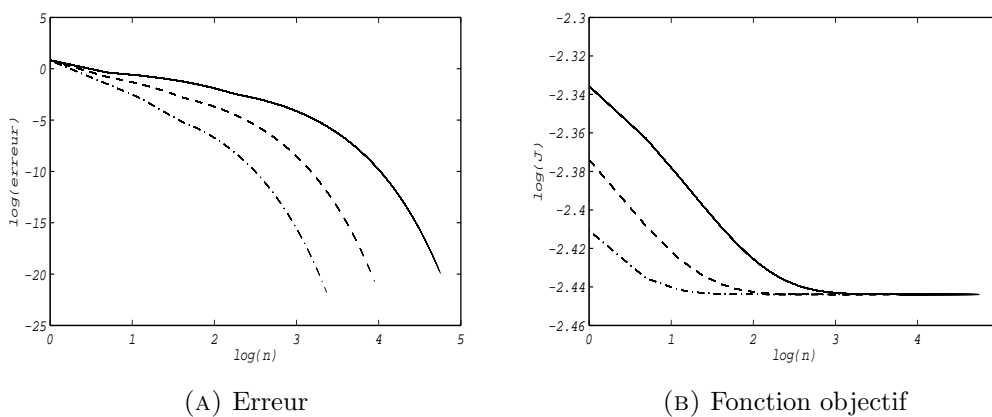


FIG. 3.13: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne continue  $\omega = 0.25$ , ligne tiré  $\omega = 0.5$ , ligne tiré-point  $\omega = 0.75$

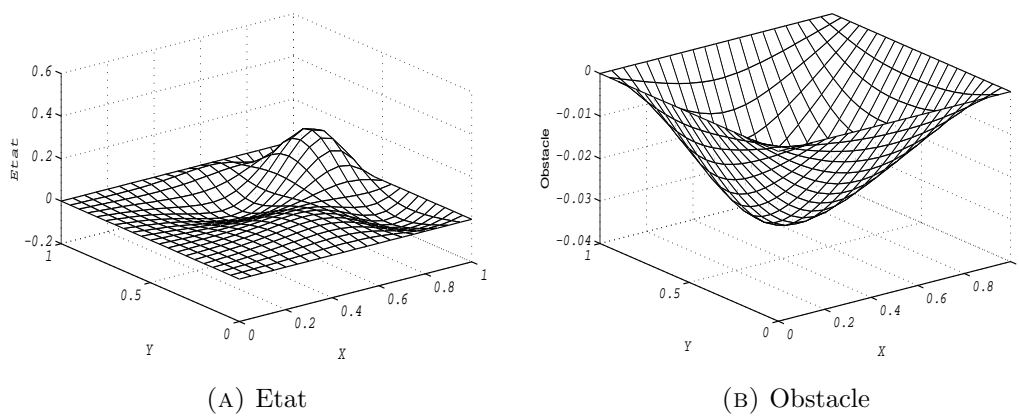


FIG. 3.14: gauche (état), droite (obstacle)

$\omega$	Ité	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
0.2	146	0.086820212055	$9.959949e - 013$	0.9883769832269	$3.057007e - 009$
0.25	116	0.086820212053	$8.937295e - 013$	0.9883769832330	$2.149613e - 009$
0.3	95	0.086820212052	$9.158229e - 013$	0.9883769832355	$1.796565e - 009$
0.35	80	0.086820212051	$8.943540e - 013$	0.9883769832377	$1.470629e - 009$
0.4	69	0.086820212050	$7.752687e - 013$	0.9883769832401	$1.089694e - 009$
0.45	60	0.086820212050	$7.434330e - 013$	0.9883769832413	$9.064009e - 010$
0.5	52	0.086820212050	$9.192646e - 013$	0.9883769832411	$9.831409e - 010$
0.55	46	0.086820212050	$8.684303e - 013$	0.9883769832366	$8.218483e - 010$
0.6	41	0.086820212049	$7.731870e - 013$	0.9883769832431	$6.519285e - 010$
0.65	36	0.086820212049	$9.766354e - 013$	0.9883769832429	$7.374637e - 010$
0.7	32	0.086820212049	$9.539452e - 013$	0.9883769832434	$6.476934e - 010$
0.75	29	0.086820212049	$5.605793e - 013$	0.9883769832447	$3.432269e - 010$
0.8	25	0.086820212049	$5.283828e - 013$	0.9883769832450	$2.922029e - 010$
0.85	22	0.086820212048	$7.839978e - 013$	0.9883769832474	$3.919135e - 010$
9	21	0.086820212048	$8.333056e - 013$	0.9883769832472	$3.763511e - 010$
1	18	0.086820212048	$3.874817e - 013$	0.9883769832464	$2.009848e - 010$

TAB. 3.5: Résultats numériques en dimension deux quand on varie  $\omega$ .

### Etude de la dépendance par rapport au paramètre $N$

Dans ce test numérique, on fixe les paramètres  $\nu$ ,  $\delta$  et on prend  $\omega = 0,5$ , tout en faisant varier le paramètre  $N$ . Les résultats numériques donnés dans le Tableau 3.6 sont donnés par rapport à la variation de  $N$ . Dans la Figure 3.15, on représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans le repère log-log en fonction du nombre d'itérations  $n$ . La Figure donnée par 3.16 représente la fonction contrôle et la fonction état.

**Remarque 3.2.11** D'après les résultats donnés dans le Tableau 3.6 on remarque qu'on a une convergence lente de la fonction coût et une convergence rapide de l'erreur avec une précision de 10 places décimales. On remarque que le paramètre  $N$  a une influence sur les calculs.

**Remarque 3.2.12** Les Figures 3.15 et 3.16 montrent respectivement que la fonction objectif  $J$  converge rapidement proportionnellement à  $N$  en croissant et l'erreur oscille avec un ordre de précision  $> 1e - 9$  et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

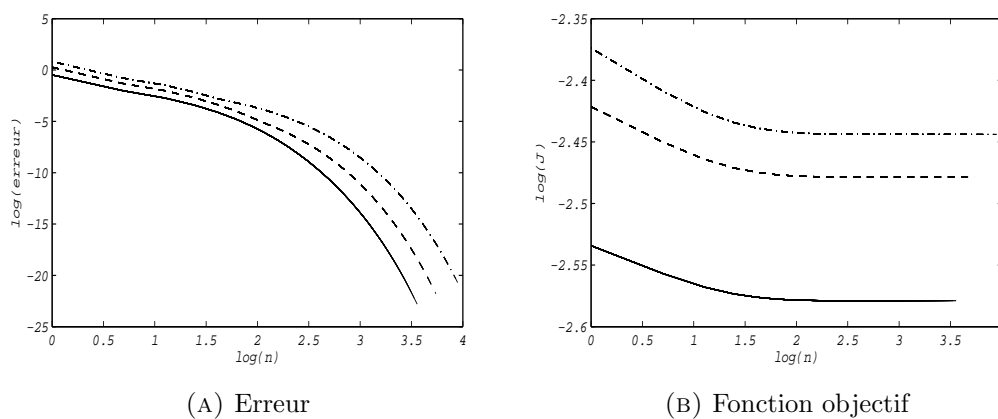


FIG. 3.15: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne continue  $N = 10$ , ligne tiré  $N = 15$ , ligne tiré-point  $N = 20$

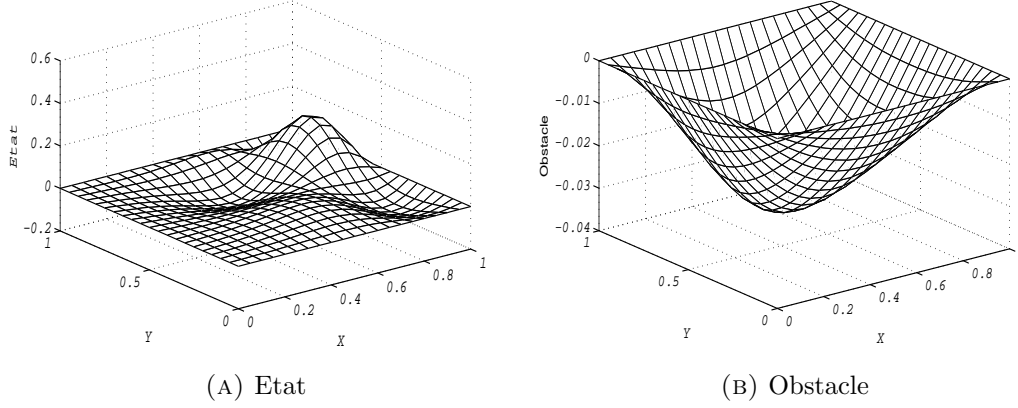


FIG. 3.16: gauche (état), droite (obstacle)

$N$	Ité	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
5	32	0.051739540	$9.056991268e - 013$	0.808871014	$4.526804011e - 011$
10	35	0.075854792	$5.687950117e - 013$	0.986416338	$1.246120069e - 010$
15	42	0.083865712	$6.501466032e - 013$	0.979830277	$3.428540776e - 010$
20	52	0.086820212	$9.192646643e - 013$	0.988376983	$9.831409520e - 010$
25	84	0.087588505	$9.122702593e - 013$	0.980996252	$1.664681019e - 009$
30	113	0.087240140	$9.862943795e - 013$	0.988656229	$2.677378536e - 009$
35	135	0.086267604	$9.811040868e - 013$	0.984850353	$3.682972735e - 009$
40	95	0.084932671	$8.764516890e - 013$	0.988851076	$4.270347499e - 009$

TAB. 3.6: Résultats numériques en dimension deux quand on varie  $N$ .

### Etude de la dépendance par rapport au paramètre $\nu$

Dans ce test numérique, on fixe les paramètres  $\omega$ ,  $\delta$  et on pose  $N = 20$ , tout en faisant varier le paramètre  $\nu$ .

Les résultats numériques donnés dans le Tableau 3.7 sont obtenus par rapport à la variation de

$\nu$ . Dans la Figure 3.17, on représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans le repère log-log en fonction du nombre d'itérations  $n$  et la Figure 3.18 représente la fonction contrôle et la fonction état.

**Remarque 3.2.13** D'après les résultats donnés dans le Tableau 3.7, on remarque qu'on a une convergence lente de la fonction coût et une convergence rapide de l'erreur avec une précision de 10 places décimales. On remarque que le paramètre  $\nu$  a une influence sur les calculs.

**Remarque 3.2.14** Les Figures 3.17 et 3.18 montrent respectivement que la fonction objectif  $J$  converge lentement proportionnellement à  $\nu$  en croissant. On remarque que l'erreur oscille avec un ordre de grandeur  $> 1e - 9$  et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

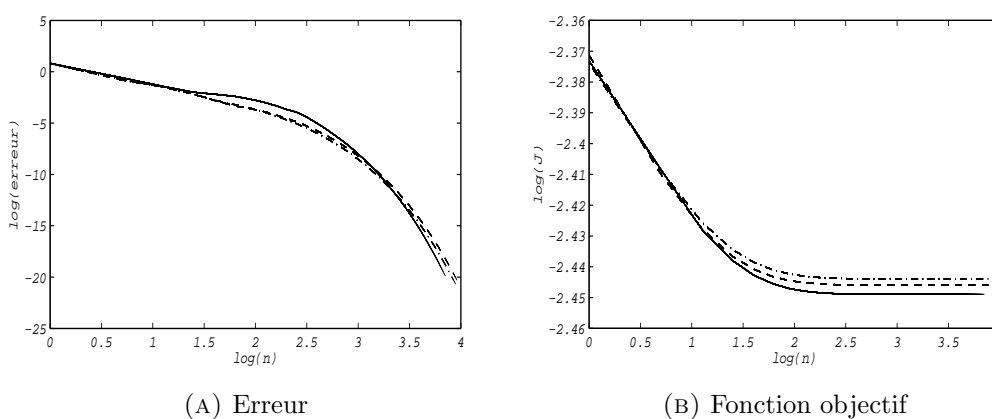


FIG. 3.17: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne continue  $\nu = 0.1$ , ligne tiré  $\nu = 0.5$ , ligne tiré-point  $\nu = 1$

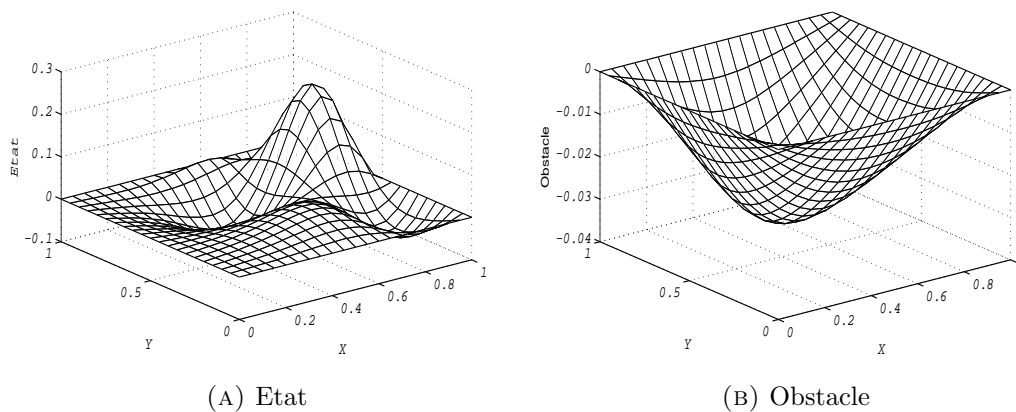


FIG. 3.18: gauche (état), droite (obstacle)

$\nu$	Ité	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
0.1	47	0.0863866736	$7.5164874324e - 013$	0.988956805	$2.239353223e - 009$
0.2	66	0.0865952184	$8.1637474558e - 013$	0.988462208	$3.870197993e - 009$
0.3	141	0.0868057204	$9.8328289954e - 013$	0.987449016	$5.630147897e - 009$
0.4	47	0.0865873551	$8.1087914161e - 013$	0.988787641	$1.371988419e - 009$
0.5	53	0.0866430341	$8.2213402752e - 013$	0.988707251	$1.289902475e - 009$
0.6	54	0.0866899296	$7.9392048490e - 013$	0.988631657	$1.154115477e - 009$
0.7	54	0.0867299038	$7.9419804066e - 013$	0.988560742	$1.064091467e - 009$
0.8	54	0.0867642953	$6.9177996664e - 013$	0.988494698	$8.572290839e - 010$
0.9	53	0.0867941323	$7.9102002725e - 013$	0.988433430	$9.036876222e - 010$
1	52	0.0868202120	$9.1926466438e - 013$	0.988376983	$9.831409520e - 010$

TAB. 3.7: Résultats numériques pour l'espace de dimension deux quand on varie  $\nu$ .

**Etude de la dépendance par rapport au le paramètre  $\delta$**

Dans ce test numérique, on fixe les paramètres  $\omega, \nu$  et on pose  $N = 20$ , tout en faisant varier le paramètre  $\delta$ .

Les résultats numériques donnés dans le Tableau 3.8 sont obtenus suivant la variation de  $\delta$ . Dans la Figure 3.19, on représente la variation de  $J_n$  et  $\varepsilon_n$  dans le repère log-log en fonction du nombre d'itérations  $n$ . La Figure 3.20 représente la fonction obstacle et la fonction état.

**Remarque 3.2.15** D'après les résultats numériques donnés dans le Tableau 3.8, on remarque qu'on a une convergence lente de la fonction coût et une convergence rapide de l'erreur avec une précision de 10 places décimales. On remarque que le paramètre  $\delta$  a une influence sur les calculs.

**Remarque 3.2.16** Les Figures 3.19 et 3.20 montrent respectivement que la fonction objectif  $J$  converge lentement proportionnellement à  $\delta$  en croissant et l'erreur oscille avec un ordre de précision  $> 1e - 10$  et décroît rapidement avec de fortes perturbations au moment où l'état  $y$  touche l'obstacle  $\varphi$ .

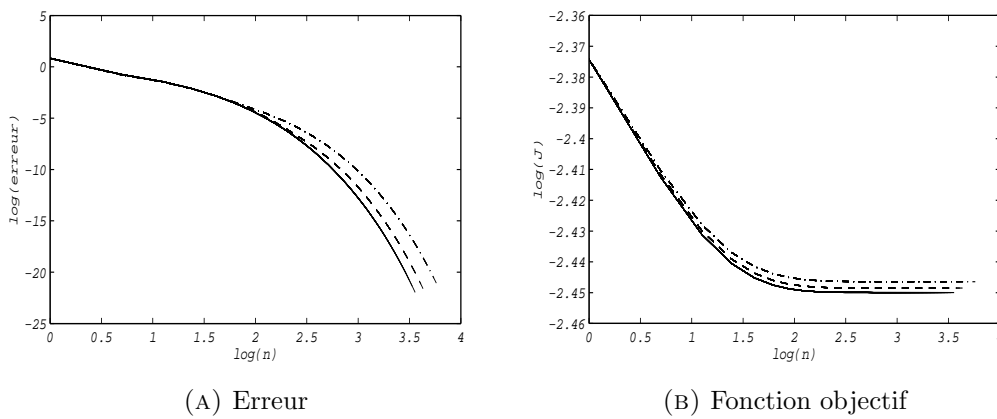


FIG. 3.19: gauche (erreur), droite (fonction objectif), ligne continue  $\delta = h^{0.5}$ , ligne tiré  $\delta = h^{0.75}$ , ligne tiré-point  $\delta = h^1$

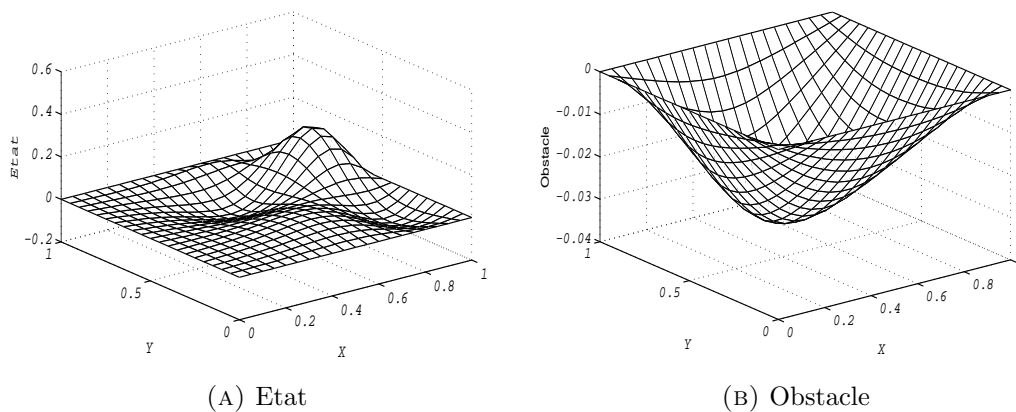


FIG. 3.20: gauche (état), droite (obstacle)

$\delta$	Ité	Fonction coût	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	Erreur
$h^{0.15}$	35	0.0862617508	$5.8494875e - 013$	0.9889559538	$1.6188800e - 010$
$h^{0.25}$	35	0.0862982194	$7.7825246e - 013$	0.9889022420	$2.8687245e - 010$
$h^{0.35}$	36	0.0863424180	$6.4849514e - 013$	0.9888419913	$3.1438940e - 010$
$h^{0.5}$	38	0.0864241844	$5.9323379e - 013$	0.9887420852	$3.6522153e - 010$
$h^{0.55}$	38	0.0864556075	$9.5901064e - 013$	0.9887068055	$6.1085594e - 010$
$h^{0.65}$	41	0.0865245276	$6.3310467e - 013$	0.9886338425	$4.6587398e - 010$
$h^{0.75}$	43	0.0866011025	$8.6559925e - 013$	0.9885599289	$7.0666490e - 010$
$h^{0.85}$	46	0.0866845097	$9.5103092e - 013$	0.9884862024	$8.6301401e - 010$
$h$	52	0.0868202120	$9.1926466e - 013$	0.9883769832	$9.8314095e - 010$

 TAB. 3.8: Résultats numériques en dimension deux en faisant varier  $\delta$ .

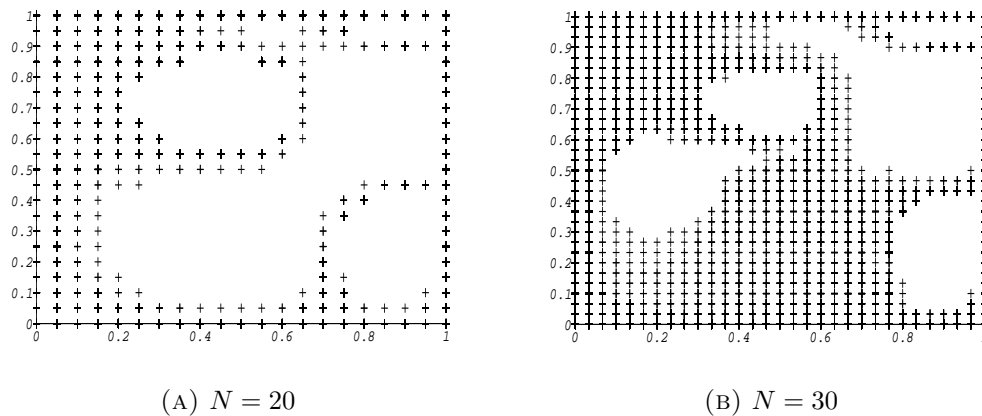


FIG. 3.21: La région de contact

## Conclusion

Nous faisons remarquer que les résultats numériques obtenus à l'aide de l'algorithme 2 sont acceptables pour des applications pratiques. La convergence de cet algorithme est linéaire. Cependant, on peut constater qu'il est difficile de trouver une bonne estimation de la constante de Lipschitz du Théorème 2.1.2. En outre, on remarque que malgré l'élimination de la contrainte d'inégalité (C), le Théorème 2.1.2 donne une convergence locale implicite par la condition  $\|\varphi_n^\delta\|_{H^2} \leq R$ . Nous pensons que l'algorithme peut être complété et amélioré par un choix optimal du paramètre de relaxation.



# Annexe 1

Dans cette partie, on donne la démonstration du lemme suivant, qui est utilisé dans la construction du système des conditions d'optimalité ( $\mathcal{S}^\delta$ ), la démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [30]. On suppose que  $\mathcal{U} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$  est un sous ensemble convexe et fermé.

**Lemme 3.2.1** Si  $\varphi^\delta$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$  est une solution optimale de ( $\mathcal{P}^\delta$ ) et  $\mu^\delta$  dans  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\left( \mu^\delta + \varphi^\delta - \varphi^*, \varphi - \varphi^\delta \right)_2 + \nu \left( \Delta \varphi^\delta, \Delta (\varphi - \varphi^\delta) \right)_2 \geq 0 \text{ pour tout } \varphi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}.$$

Si de plus  $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ , alors, on trouve

$$\mu^\delta + \nu \Delta^2 \varphi^\delta = 0 \text{ et } \varphi^\delta \text{ dans } \mathcal{W},$$

où  $\mathcal{W} := \{u \mid u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}$ .

**Preuve.** Soit  $\varphi^\delta$  une solution optimale de ( $\mathcal{P}^\delta$ ),  $\mu^\delta$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\mathcal{U} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$  un sous ensemble convexe et fermé, alors, on a

$$\left( \mu^\delta + \varphi^\delta - \varphi^*, \varphi - \varphi^\delta \right)_2 + \nu \left( \Delta \varphi^\delta, \Delta (\varphi - \varphi^\delta) \right)_2 \geq 0 \text{ pour tout } \varphi \text{ dans } \mathcal{U}_{ad}.$$

Considérons maintenant le cas où le domaine des contrôles admissible  $\mathcal{U}_{ad}$  est égal à tout l'espace  $\mathcal{U}$ . Soit  $\chi$  dans  $\mathcal{U}$  tel que  $\chi = \varphi - \varphi^\delta$  appartient à  $\mathcal{U}$ , alors on obtient

$$\left( \mu^\delta + \varphi^\delta - \varphi^*, \chi \right)_2 + \nu \left( \Delta \varphi^\delta, \Delta \chi \right)_2 = 0 \text{ pour tout } \chi \text{ dans } \mathcal{U}. \quad (3.3)$$

Poson  $h^\delta = \Delta \varphi^\delta$  dans  $L^2(\Omega)$ , l'équation (3.3) s'écrit

$$\left( \mu^\delta + \varphi^\delta - \varphi^*, \chi \right)_2 + \nu \left( h^\delta, \Delta \chi \right)_2 = 0 \text{ pour tout } \chi \text{ dans } \mathcal{U}. \quad (3.4)$$

Pour tout  $\chi$  appartenant à l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$ , on a donc

$$\left(h^\delta, \Delta\chi\right)_2 = \left(\Delta h^\delta, \chi\right)_2 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.5)$$

par suite, l'équation (3.4) donne

$$-\nu\Delta h^\delta = \mu^\delta + \varphi^\delta - \varphi^* \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (3.6)$$

Comme  $\mu^\delta + \varphi^\delta - \varphi^*$  appartient à  $L^2(\Omega)$ , on a

$$h^\delta \in \mathcal{V} := \{h \in L^2(\Omega), | \Delta h \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.7)$$

Par conséquent, les traces  $h^\delta|_{\partial\Omega}$  et  $\frac{\partial h^\delta}{\partial\eta}|_{\partial\Omega}$  peuvent être définies dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et  $H^{-3/2}(\partial\Omega)$ , respectivement. En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\left(h^\delta, \Delta\chi\right)_2 = \left(\Delta h^\delta, \chi\right)_2 + \int_{\partial\Omega} h^\delta \frac{\partial\chi}{\partial\eta} d\sigma. \quad (3.8)$$

Pour tout  $\chi$  appartenant à  $\mathcal{U}$ , et en utilisant la relation (3.5), on obtient

$$\text{Pour tout } \chi \in \mathcal{U}, \int_{\partial\Omega} h^\delta \frac{\partial\chi}{\partial\eta} d\sigma = 0, \quad (3.9)$$

avec la surjectivité de l'application trace, on trouve

$$\text{Pour tout } \zeta \in H^{1/2}(\Omega), \int_{\partial\Omega} h^\delta \zeta d\sigma = 0. \quad (3.10)$$

Ce qui implique que  $h^\delta|_{\partial\Omega} = 0$ . Par conséquent,  $h^\delta$  appartient à  $\mathcal{U}$  et est l'unique solution de

$$-\nu\Delta h^\delta = \mu^\delta + \varphi^\delta - \varphi^* \text{ dans } L^2(\Omega), \quad h^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.11)$$

où

$$-\nu\Delta^2\varphi^\delta = \mu^\delta \text{ dans } \Omega, \quad \varphi^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.12)$$

en reprenant l'équation (3.12), écrite sous une forme variationnelle, il vient

$$-\nu \left(\Delta^2\varphi^\delta, u\right) = \left(\mu^\delta, u\right) \text{ pour tout } u \text{ dans } \mathcal{U}. \quad (3.13)$$

Par suite, en appliquant la formule de Green, il vient

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta^2\varphi^\delta u dx - \left(\mu^\delta, u\right) = \int_{\Omega} \Delta\varphi^\delta \Delta u dx - \int_{\partial\Omega} \left(\Delta\varphi^\delta \frac{\partial u}{\partial\eta} - u \frac{\partial\Delta\varphi^\delta}{\partial\eta}\right) - \left(\mu^\delta, u\right), \quad (3.14)$$

et on remarque pour avoir la même equation (3.13), on doit imposer que  $\Delta\varphi^\delta$  doit être nul sur le bord  $\partial\Omega$  et donc  $\varphi^\delta \in \mathcal{W} := \{u | u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}$ . ■

## **Annexe 2**

# On the numerical study of an obstacle optimal control problem with source term

R. Ghanem · B. Zireg · H. Sissaoui · T. Boubehziz

Received: 15 June 2013

© Korean Society for Computational and Applied Mathematics 2013

**Abstract** In the present work, we study the numerical aspect of the optimality system given by R. Ghanem (Positivity 13:321–338, 2009). A numerical algorithm is given and its practical feasibility is investigated by several numerical tests in one and two dimensional spaces.

**Keywords** Elliptic variational inequality · Optimal control · Finite differences · Newton iterative method

**Mathematics Subject Classification (2010)** 35J87 · 49J20 · 65L12 · 49M15

## 1 Introduction

Before dealing with our main contribution, a few comments on a related work is deemed necessary. Let us consider the optimal control of obstacle problem given in Bergounioux [3], where it is about to minimize the functional

$$J(\varphi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx \right), \quad (1)$$

over the obstacle  $\varphi$  (the control function) in  $\mathcal{U}_{ad} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , with corresponding solution  $y$  (the state function) of the obstacle problem

$$\sigma(y, v - y) + (g(y) - f, v - y) \geq 0, \quad \text{for all } v \text{ in } \mathcal{K}(\varphi), \quad (2)$$

---

R. Ghanem (✉) · B. Zireg · H. Sissaoui · T. Boubehziz  
Laboratoire d'analyse numérique, optimisation et statistique (LANOS), Université Badji Mokhtar,  
Annaba, B.P. 12, 23000 Annaba, Algérie  
e-mail: [radouen.ghanem@univ-annaba.org](mailto:radouen.ghanem@univ-annaba.org)

where

$$\mathcal{K}(\varphi) := \{y \in H_0^1(\Omega) \mid y \geq \varphi \text{ in } \Omega\}, \tag{3}$$

and  $g$  is a nondecreasing real valued function, such that

$$\exists r \in \mathbb{R}, \exists \phi \geq 0 \text{ such that, } \forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq r + \phi|y|.$$

The continuous bilinear form  $\sigma(\cdot, \cdot)$  may be considered as an elliptic operator that satisfies the hypotheses  $(H_1)$  and  $(H_2)$  given below. The function  $z$  is given in  $L^2(\Omega)$  denoting a target profile and  $\nu$  is a given positive constant while  $\mathcal{U}_{ad}$  is the set of admissible controls  $H^2$ -bounded in  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , convex and closed in  $H^2(\Omega)$  defined by

$$\mathcal{U}_{ad} := \mathcal{B}_{H^2}(0, R) = \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid \|\varphi\|_{H^2} \leq R\}, \tag{4}$$

where  $R$  is a positive real number and can be chosen large enough. It is well known that the variational inequality (2) has a unique solution  $y := \mathcal{T}(\varphi)$  that belongs to  $H_0^1(\Omega)$ . In addition if  $\varphi$  belongs to  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , then  $y$  belongs to  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  (see [11]). As  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  is a minimizing sequence and  $\mathcal{U}_{ad}$  is  $H^2$ -bounded, and because of the cost functional (1), therefore  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  is  $H^2$ -bounded, and hence,  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge weakly to some  $\varphi$  in  $H^2(\Omega)$  (and strongly in  $H_0^1(\Omega)$ ).

From above, the admissible control set  $\mathcal{U}_{ad}$  is  $H^2$ -bounded, and can be seen as a constraint on the function control  $\varphi$ . However this choice leads to technical difficulties for obtaining an optimality system. This system is also difficult to use for getting the numerical solution (before optimization) of the above optimal control problem given by (1) and (2). To overcome these technical difficulties, an equivalent theoretical trick to get the same regularity results as for the above problem given in [3] is to involve the  $H^2$ -norm of  $\varphi$  in the objective function. We also consider the optimal control problem as given by Ghanem in [6], where the objective is to minimize the functional

$$J(\varphi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dx \right), \tag{4}$$

over the obstacle  $\varphi$  in  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , with corresponding solution  $y$ , of the variational inequality

$$\sigma(y, v - y) \geq (f, v - y), \quad \text{for all } v \text{ in } \mathcal{K}(\varphi), \tag{5}$$

where  $\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$  has been added so that when  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  is a minimizing sequence, therefore  $\|\Delta\varphi_k\|_{L^2(\Omega)}$  is bounded and since  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  belongs to  $H_0^1(\Omega)$  such that  $\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$  is a norm equivalent to the  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  norm. Hence the sequence  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  is bounded in  $H^2(\Omega)$ , and consequently it is weakly convergent to  $\bar{\varphi}$  (optimal control solution) in  $H^2(\Omega)$  and strongly convergent to  $\bar{\varphi}$  in  $H_0^1(\Omega)$ .

The main difficulty of this type of problems comes from the fact that the mapping  $\mathcal{T}$  (control to state) is not differentiable and so it is not easy to get optimality conditions numerically exploitable (see [12]). To overcome this difficulty, the main

idea is to approximate the obstacle problem (5) by a penalized regularized equation (see [2]) by introducing an approximating parameter  $\delta$ , where the penalization method consists in replacing the obstacle problem by a family of non-linear boundary value problem. Then the optimal control problem given above can be set as follows

$$\min\{J(\varphi^\delta), \varphi^\delta \text{ in } \mathcal{U}_{ad}\}. \tag{\mathcal{P}^\delta}$$

Then, we obtain an approximate optimality conditions system given in Ghanem [6] and Bergounioux [3] as

$$\begin{cases} Ay^\delta = \chi_1(y^\delta, \varphi^\delta, \delta) \\ A^*p^\delta = \chi_2(p^\delta, y^\delta, \varphi^\delta, \delta) \\ (\nabla J(\varphi^\delta), v^\delta - y^\delta) \geq 0 \text{ for all } v^\delta \text{ in } \mathcal{U}_{ad} \end{cases} \tag{6}$$

where  $\chi_1$  (respectively  $\chi_2$ ) is a nonlinear (respectively linear) equation, and  $\delta$  is an approximation parameter (penalization parameter), such that  $\delta$  is strictly positive and goes to 0.

The numerical study of this kind of problems was given by Ito et al. [9], we think that this reference is the only relevant work. It uses the primal-dual active set strategy. However the algorithm given by Ito et al. requires further investigation of the convergence.

The main goal of this paper is the numerical solution of the optimality system ( $\mathcal{S}^\delta$ ) given in Ghanem [6] when the admissible control set  $\mathcal{U}_{ad}$  is equal to  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , by

$$\begin{cases} -\Delta y^\delta + \beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) = f \text{ in } \Omega, & \text{and } y^\delta = 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ -\Delta p^\delta + \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta)p^\delta = y^\delta - z \text{ in } \Omega & \text{and } p^\delta = 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ -\nu\Delta^2\varphi^\delta - \beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta)p^\delta = 0 \text{ in } \Omega & \text{and } \varphi^\delta = \Delta\varphi^\delta = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

For the numerical study of the optimal control problem ( $\mathcal{P}^\delta$ ) we have discretized the optimality system ( $\mathcal{S}^\delta$ ) by finite differences schemes. We have also discussed an iterative algorithm for the numerical solution of the above optimality system ( $\mathcal{S}^\delta$ ), when the proposed algorithm is based on Gauss–Seidel method which is a combination between relaxed-Newton–Raphson and direct method. This combination generates at each iterative step a linear equation, and constructs an iterative sequence converging towards the solution.

This algorithm is easily implemented and acceptable accuracy is obtained. However, the rate of convergence depends on the mesh refinement  $h$  and the penalization parameter  $\delta$ . This paper is organized as follows: after stating the precise assumptions and some well-known results in Sect. 2, we introduce the iterative algorithm and we give convergence results to solve the optimality system ( $\mathcal{S}^\delta$ ) in Sect. 3. Section 4 displays some numerical examples that illustrate the theoretical findings.

## 2 Preliminaries

### 2.1 Notation and assumptions

Let  $\Omega$  be an open bounded set in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$ ), with Lipschitz boundary  $\partial\Omega$ . We adopt the standard notation  $H^m(\Omega)$  for the Sobolev space of order  $m$  in  $\Omega$  with norm  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ , where

$$H^m(\Omega) := \{v \mid v \in L^2(\Omega), \partial^q v \in L^2(\Omega) \forall q, |q| \leq m\},$$

and

$$H_0^m(\Omega) := \left\{ v \mid v \in H^m(\Omega), \frac{\partial^k v}{\partial \eta^k} \Big|_{\partial\Omega} = 0, 0 \leq k \leq m-1 \right\},$$

is defined as the closure of  $\mathcal{D}(\Omega)$  in the space  $H^m(\Omega)$ , and  $\mathcal{D}(\Omega)$  is the space of  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -functions, with compact support in  $\Omega$  (see [1]). We shall denote by  $\|\cdot\|_V$ , the Banach space  $V$  norm, and  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  the  $p$ -summable functions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  endowed with the norm  $\|u\|_{L^p(\Omega)} := (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{1/p}$  for  $1 \leq p < \infty$ . In the same way,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the duality product between  $H^{-s}(\Omega)$  and  $H^s(\Omega)$ , where  $s$  is a positive integer constant, and  $(\cdot, \cdot)_{L^p(\Omega)}$  the  $L^p(\Omega)$  inner product. In the sequel we denote by  $\mathcal{B}_V(o, r)$  the  $V$ -ball around  $o$  of radius  $r$  and generic positive constants are denoted by  $C$ .

### 2.2 Known results

In this section, we introduce some known results concerning the obstacle problem and the optimal control problem ( $\mathcal{P}^\delta$ ).

We consider the bilinear form  $\sigma(\cdot, \cdot)$  defined on  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , where we assume that the followings conditions are fulfilled

**(H<sub>1</sub>)** Continuity:

$$\exists C > 0, \forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega), \quad |\sigma(\varphi, \psi)| \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \tag{8}$$

**(H<sub>2</sub>)** Coercivity:

$$\exists c > 0, \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \sigma(\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \tag{9}$$

We call  $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  the linear self-adjoint elliptic operator (see [10]) associated to  $\sigma$  such that  $\langle Au, v \rangle := \sigma(u, v)$ .

For any  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , we define

$$\mathcal{K}(\varphi) := \{y \in H_0^1(\Omega) \mid y \geq \varphi \text{ a.e. in } \Omega\}, \tag{10}$$

and consider the following variational inequality

$$\sigma(y, v - y) \geq (f, v - y), \quad \text{for all } v \text{ in } \mathcal{K}(\varphi), \tag{11}$$

where  $f$  belongs to  $L^2(\Omega)$  is a source term. From now on, we define the operator  $\mathcal{T}$  (control-to-state operator) from  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  to  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , such that  $y := \mathcal{T}(\varphi)$  is the unique solution to the obstacle problem given by (11) and (10) (see [11]). Now, we are going to split the set  $\Omega$  into two sets  $I(y)$  and  $N(y) := \Omega - I(y)$ . The first set is called the coincidence set, will be closed and roughly speaking will be the subset of  $\Omega$  where  $y = \varphi$ :

$$I(y) := \{x \in \Omega \mid y(x) = \varphi(x)\}.$$

The second set  $N(y)$  is the complementary of  $I(y)$ :

$$N(y) := \{x \in \Omega \mid y(x) > \varphi(x)\},$$

is called the noncoincidence set and is determined as the set of the points  $x$  where  $y > \varphi$ . The set  $F := \partial I(y) \cap \Omega$ , is called the free boundary separating these two sets, for more details (see [14]).

Now, we consider the optimal control problem ( $\mathcal{P}$ ) defined as follows

$$\min \left\{ J(\varphi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx \right), \varphi \in \mathcal{U} \right\}, \quad (\mathcal{P})$$

where  $\nu$  is a strictly given positive constant,  $z$  in  $L^2(\Omega)$  and  $\mathcal{U} := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . We seek an obstacle (optimal control)  $\bar{\varphi}$  in  $\mathcal{U}$ , such that the corresponding state is close to a target profile  $z$ . In the sequel we set  $\mathcal{U}_{ad} := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

To derive necessary conditions for an optimal control, we would like to differentiate the map  $\varphi \mapsto \mathcal{T}(\varphi)$ . Since the map  $\varphi \mapsto \mathcal{T}(\varphi)$  is not directly differentiable, the idea here consists in approximating the map  $\mathcal{T}(\varphi)$  by a family of maps  $\mathcal{T}_{\delta}(\varphi)$  and replacing the obstacle problem (10)–(11) by the following smooth semilinear equation (see [13], [5]):

$$Ay + \beta_{\delta}(y - \varphi) = f \text{ in } \Omega, \quad y = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (12)$$

Then, the approximation map  $\varphi \mapsto \mathcal{T}_{\delta}(\varphi)$  will then be differentiable and approximate necessary conditions will be derived, where

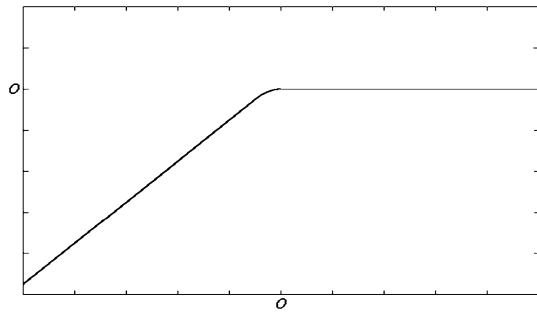
$$\beta_{\delta}(r) := \frac{1}{\delta} \begin{cases} 0 & \text{if } r \geq 0 \\ -r^2 & \text{if } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ r + \frac{1}{4} & \text{if } r \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

where,  $\beta$  is negative and belongs to  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , such that  $\delta$  is strictly positive and goes to 0. Then  $\beta'_{\delta}$  is given by

$$\beta'_{\delta}(r) := \frac{1}{\delta} \begin{cases} 0 & \text{if } r \geq 0 \\ -2r & \text{if } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1 & \text{if } r \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

and the graphics representation of  $\beta(\cdot)$  is given in Fig. 1.

**Fig. 1** Graphic representation of  $\beta$



As  $\beta_\delta(\cdot - \varphi)$  is nondecreasing, it is well known (see [7]), that boundary value problem (12) admits a unique solution  $y^\delta$  in  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  for a fixed  $\varphi$  in  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  and  $f$  in  $L^2(\Omega)$ . In the sequel, we set  $y^\delta := \mathcal{T}^\delta(\varphi)$  and in addition,  $c$  or  $C$  denotes a general positive constant independent of  $\delta$ . So for any  $\delta > 0$ , we define

$$J_\delta(\varphi) := \frac{1}{2} \int_\Omega (\mathcal{T}^\delta(\varphi) - z)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left( \int_\Omega (\Delta\varphi)^2 dx \right).$$

Then, the approximate optimal control problem  $(\mathcal{P}^\delta)$  is given by

$$\min\{J_\delta(\varphi), \varphi \text{ in } \mathcal{U}_{ad}\}, \tag{\mathcal{P}^\delta}$$

where the problem  $(\mathcal{P}^\delta)$  has at least one solution (see [6]) denoted by  $(y^\delta, p^\delta, \varphi^\delta)$  and characterized by the following theorem

**Theorem 1** *If  $\varphi^\delta$  is an optimal solution of  $(\mathcal{P}^\delta)$  and  $y^\delta := \mathcal{T}^\delta(\varphi^\delta)$ , there exist  $p^\delta$  in  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  and  $\mu^\delta$  in  $L^2(\Omega)$  such that the following system  $(\mathcal{S}^\delta)$  holds*

$$\sigma(y^\delta, v) + (\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta), v) = (f, v), \quad \text{for all } v \text{ in } \mathcal{U}, \tag{13a}$$

$$\sigma(p^\delta, w) + (\mu^\delta, w) = (y^\delta - z, w), \quad \text{for all } w \text{ in } \mathcal{U}, \tag{13b}$$

$$v\tilde{\sigma}(\varphi^\delta, u) = (\mu^\delta, u), \quad \text{for all } u \text{ in } \mathcal{W}, \tag{13c}$$

where  $\mathcal{W} := \{u \mid u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ and } \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}$  and  $\tilde{\sigma}(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx$ , where the bilinear form  $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$  satisfies the following conditions

$(\tilde{H}_1)$  Continuity:

$$\exists C > 0, \forall \varphi, \psi \in H^2(\Omega), \quad |\tilde{\sigma}(\varphi, \psi)| \leq C \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \tag{14}$$

$(\tilde{H}_2)$  Coercivity:

$$\exists c > 0, \forall \varphi \in H^2(\Omega), \quad \tilde{\sigma}(\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^2 \tag{15}$$

Now, we give some important results relevant for the sequel of this paper.

**Theorem 2** For any pair  $(y_i^\delta, \varphi_i^\delta)$  in  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ , that satisfies the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$  where  $i = 1, 2$ , such that  $\delta \leq C$ , we get

$$\|y_2^\delta - y_1^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq l_1 \|\varphi_2^\delta - \varphi_1^\delta\|_{L^2(\Omega)},$$

where  $l_1 := \frac{C}{\delta}$ . This means that the mapping  $y^\delta := \mathcal{F}^\delta(\varphi^\delta)$ , is Lipschitzian, with a Lipschitz constant  $l_1$ .

*Proof* See [6]. □

**Lemma 1** For any pair  $(y^\delta, \varphi^\delta)$  in  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ , satisfying the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$  we have

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C, \tag{16}$$

and when  $\varphi^\delta$  belongs to  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \rho_1) \cap \mathcal{W}$ , we deduce that

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho_2. \tag{17}$$

This means that  $y^\delta$  belongs to  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \rho_2) \cap \mathcal{U}$ , where  $\rho_2 := C\rho_1 + C$ .

*Proof* Let  $v$  in  $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$ , where  $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$  is given by

$$\mathcal{K}(\varphi^\delta) := \{u \text{ in } H_0^1(\Omega) \mid u \geq \varphi^\delta \text{ on } \Omega\}.$$

– If  $y^\delta - \varphi^\delta \geq 0$ , we get

$$\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta) = 0.$$

– If  $y^\delta - \varphi^\delta < 0$ , we deduce

$$\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta)(y^\delta - \varphi^\delta) \geq 0.$$

For all  $v$  in  $\mathcal{K}(\varphi^\delta)$ , we have  $v - y^\delta > v - \varphi^\delta \geq 0$ , then

$$\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta)(v - y^\delta) \leq 0.$$

Then, from the equation

$$\sigma(y^\delta, v - y^\delta) + (\beta_\delta(y^\delta - \varphi^\delta), v - y^\delta) = (f, v - y^\delta), \quad \text{for all } v \text{ in } \mathcal{K}(\varphi^\delta),$$

if we take  $v = \varphi^\delta$ , we get

$$\sigma(y^\delta, y^\delta) \leq \sigma(y^\delta, \varphi^\delta) + (f, y^\delta - \varphi^\delta).$$

By the coercivity and continuity conditions **(H2)** and **(H1)** of  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , we get

$$C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} (C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}).$$

From the above inequality, we deduce that we have two cases

1. If  $\|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|y^\delta\|_{L^2(\Omega)}$  therefore, we get

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. If  $C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , we then have

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finally, we get

$$\|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C. \quad \square$$

**Lemma 2** For any pair  $(p^\delta, y^\delta)$  in  $\mathcal{U} \times (\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{H^1}(0, \rho_2))$ , that satisfies the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$ , we have

$$\|p^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \tag{18}$$

and by the conditions of Lemma 1, we obtain

$$\|p^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho_3 \tag{19}$$

This means that  $p^\delta$  belongs to  $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{H^1}(0, \rho_3)$ , where  $\rho_3 := C\rho_2 + C$ .

*Proof* From equation (13b) of optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$ , we have

$$\sigma(p^\delta, w) + (\beta'_\delta(y^\delta - \varphi^\delta)p^\delta, w) = (y^\delta - z, w), \quad \text{for all } w \text{ in } H_0^1(\Omega).$$

If we take  $w = p^\delta$ , and by the coercivity condition  $(H_2)$  of  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , we obtain

$$\|p^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C. \quad \square$$

### 3 Convergence study of an iterative algorithm

In this section, we give an algorithm to solve the problem  $(\mathcal{P}^\delta)$ , roughly speaking, we propose an implicit algorithm to solve the necessary optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$ . The proposed algorithm is based on the Gauss–Seidel method and is given in Algorithm 1.

This algorithm can be seen as a successive approximation method to compute the five points of the function  $F$  that we are going to define. From the different steps of the above algorithm, we define the following functions  $F_i$ , for  $i = 1, 2, 3$  as

**Algorithm 1** Gauss–Seidel algorithm

- 1: **Input:**  $\{y_0^\delta, p_0^\delta, \varphi_0^\delta, \delta, \nu, \varepsilon\}$  choose  $\varphi_0^\delta \in \mathcal{W}$ ,  $\varepsilon$  and  $\delta$  in  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2: **Begin:**
- 3: **Solve**  $Ay_n^\delta + \beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) = f$  on  $y_n^\delta$ .
- 4: **Solve**  $(A + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))p_n^\delta = y_n^\delta - z$  on  $p_n^\delta$ .
- 5: **Solve**  $-\nu\Delta^2\varphi_n^\delta - \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)p_n^\delta = 0$  on  $\varphi_n^\delta$ .
- 6: **If** the stop criteria is fulfilled **Stop**.
- 7: **Ensure:**  $s_n^\delta := (y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta)$  is a solution
- 8:     **Else;**  $n \leftarrow n + 1$ , **Go to Begin**.
- 9: **End if**
- 10: **End algorithm.**

– From step 1, we define  $F_1 : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ , such that

$$y_n^\delta := F_1(\varphi_{n-1}^\delta), \tag{20}$$

it means that  $F_1$  depends on  $\varphi_{n-1}^\delta$ , and gives  $y_n^\delta$  as the solution of the state equation

$$Ay_n^\delta + \beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) = f \text{ in } \Omega, \quad \text{and } y_n = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{21}$$

– From step 2, we define  $F_2 : \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ , such that

$$p_n^\delta := F_2(y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta), \tag{22}$$

it means that  $F_2$  depends on  $\varphi_{n-1}^\delta$  and  $y_n^\delta$ , and gives  $p_n^\delta$  as the solution of the adjoint state equation

$$Ap_n^\delta + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta = y_n^\delta - z \text{ in } \Omega, \quad \text{and } p_n = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{23}$$

– Finally, from step 3, we define  $F_3 : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ , such that

$$\varphi_n^\delta := F_3(y_n^\delta, p_n^\delta), \tag{24}$$

it means that  $F_3$  depends on  $p_n^\delta$  and  $y_n^\delta$ , and gives  $\varphi_n^\delta$  as the solution of the optimality condition equation

$$-\nu\Delta^2\varphi_n^\delta = \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)p_n^\delta \text{ in } \Omega, \quad \text{and } \varphi_n = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{25}$$

Then according to the above definitions of  $F_i$ , where  $i = 1, 2, 3$ , let us define the map  $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ , as

$$\varphi_n^\delta := F(\varphi_{n-1}^\delta),$$

where

$$\varphi_n^\delta := F_3(F_1(\varphi_{n-1}^\delta), F_2(F_1(\varphi_{n-1}^\delta), \varphi_{n-1}^\delta)), \tag{26}$$

such that,

$$F(\varphi_{n-1}^\delta) = F_3(F_1(\varphi_{n-1}^\delta), F_2(F_1(\varphi_{n-1}^\delta), \varphi_{n-1}^\delta)). \tag{27}$$



Finally, we obtain

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}. \quad \square$$

From the adjoint state equation (23), and by the continuity and coercivity conditions of  $\sigma(\cdot, \cdot)$  given respectively by  $(\mathbf{H}_1)$  and  $(\mathbf{H}_2)$ , we get

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + C \|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

From the equation (25), and by the coercivity condition  $(\widetilde{\mathbf{H}}_2)$  of  $\widetilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , and the definition of  $\beta_\delta(\cdot)$ , we get

$$\|\varphi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta \nu} \|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Corollary 1** *Since  $\varphi_{n-1}^\delta$  belongs to  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W}$ , then*

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_2. \quad (32)$$

*This means that  $y_n^\delta$  belongs to  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}$ , where  $\tilde{\rho}_2 := (C + \frac{C}{\delta} \tilde{\rho}_1)$ .*

*Proof* By using the equation (28), we obtain

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)}.$$

Then, we get

$$\|y_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_2,$$

where  $\tilde{\rho}_2 := C + \frac{C}{\delta} \tilde{\rho}_1$ . □

**Corollary 2** *Since the hypotheses of Corollary 1 are fulfilled, we get*

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_3. \quad (33)$$

*This means that  $p_n^\delta$  belongs to  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_3) \cap \mathcal{U}$ , where  $\tilde{\rho}_3 := C + C \tilde{\rho}_2$ .*

*Proof* From the two inequalities (29) and (32), we obtain

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C + C \tilde{\rho}_2.$$

Then

$$\|p_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_3,$$

where  $\tilde{\rho}_3 := C + C \tilde{\rho}_2$ . □

**Corollary 3** *Since the hypotheses of Corollary 2 are fulfilled, we get*

$$\|\varphi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_4. \tag{34}$$

*This means that  $\varphi_n^\delta$  belongs to  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_4) \cap \mathcal{W}$ , and  $\tilde{\rho}_4 := \frac{C}{\delta v} \tilde{\rho}_3$ , where  $\tilde{\rho}_3$  is given by Corollary 2, and  $\tilde{\rho}_2$  is given by Corollary 1.*

*Proof* From the two inequalities (30) and (33), we obtain

$$\|\varphi_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta v} \tilde{\rho}_3.$$

Then we have

$$\|\varphi_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_4,$$

where  $\tilde{\rho}_4 := \frac{C}{\delta v} \tilde{\rho}_3$ . □

Let us give the following theorem to show that the mapping  $F$  is locally Lipschitzian.

**Theorem 3** *If  $\delta \leq C$ , then the mapping  $F$  is locally Lipschitz-continuous from  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W}$  to  $\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_4) \cap \mathcal{W}$ , with the Lipschitz constant  $l := l_1 l_4 + l_2 l_4 + l_1 l_2 l_4$ , where  $\tilde{\rho}_4 = \frac{C}{\delta v} + \frac{C}{\delta^2 v} \tilde{\rho}_1$ ,  $l_1 = \frac{C}{\delta}$ ,  $l_2 := (C + \frac{C \tilde{\rho}_3}{\delta})$ ,  $l_4 := \frac{C}{\delta v C - C \tilde{\rho}_3}$ , and  $\tilde{\rho}_3$  is given by Corollary 2.*

For the proof of the previous theorem, we give the followings Lemmas.

**Lemma 3** *The function  $F_1$  defined by (20) is Lipschitz continuous from  $\mathcal{W}$  to  $\mathcal{U}$ , with a Lipschitz constant  $l_1 := \frac{C}{\delta}$ .*

*Proof* Let  $y_n^\delta = F_1(\varphi_{n-1}^\delta)$  and  $z_n^\delta = F_1(\psi_{n-1}^\delta)$ , where  $(y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $(z_n^\delta, \psi_{n-1}^\delta)$  belong to  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ , then we get

$$\sigma(y_n^\delta - z_n^\delta, y_n^\delta - z_n^\delta) + (\beta_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta), y_n^\delta - z_n^\delta) = 0.$$

By the coercivity condition (**H**<sub>2</sub>) of  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , and the definition of  $\beta_\delta(\cdot)$  and by the mean value theorem applied on the interval of sides  $(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)$ , we obtain

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} (\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}).$$

Then from the above inequality, we have two cases

1. When  $\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}$  then

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. When  $\|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , we get

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finally, we deduce

$$\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square$$

**Lemma 4** *The function  $F_2$  defined by (22), is locally Lipschitz continuous from  $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}) \times (\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W})$  to  $\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_3) \cap \mathcal{U}$ , with the Lipschitz constant  $l_2 := (C + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta})$ , where  $\tilde{\rho}_3$  is given by Corollary 2.*

*Proof* Let  $p_n^\delta := F_2(y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $q_n^\delta := F_2(z_n^\delta, \psi_{n-1}^\delta)$ , where  $(y_n^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $(z_n^\delta, \psi_{n-1}^\delta)$  belong to  $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}) \times (\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_1) \cap \mathcal{W})$ . Then by the adjoint state equation (23), we get

$$\begin{aligned} &\sigma(p_n^\delta - q_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta) + (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)q_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta) \\ &= (y_n^\delta - z_n^\delta, p_n^\delta - q_n^\delta). \end{aligned}$$

By the coercivity condition (**H**<sub>2</sub>) of  $\sigma(\cdot, \cdot)$  and the properties of  $\beta'_\delta(\cdot)$ , we get

$$\begin{aligned} C\|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\delta} \|q_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad \times \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

By the mean value theorem applied on the interval of sides  $(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $(z_n^\delta - \psi_{n-1}^\delta)$ , we obtain

$$\|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(C + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta}\right) (\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}). \quad \square$$

**Lemma 5** *Since the following condition,*

$$\tilde{\rho}_3 \leq \delta\nu C,$$

*is fulfilled, then the function  $F_3$  given by (24) is locally Lipschitz continuous from  $(\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_2) \cap \mathcal{U}) \times (\mathcal{B}_{H^1}(0, \tilde{\rho}_3) \cap \mathcal{U})$  to  $(\mathcal{B}_{H^2}(0, \tilde{\rho}_4) \cap \mathcal{W})$ , with Lipschitz constant*

$$l_4 := \frac{C}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}.$$

*Proof* From the equation (25), we obtain

$$\nu\tilde{\sigma}(\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta) = (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_n^\delta)q_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta).$$

By the coercivity condition  $(\widetilde{H}_2)$  of  $\widetilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , we get

$$C \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\nu} (\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) p_n^\delta - \beta'_\delta(z_n^\delta - \psi_n^\delta) q_n^\delta, \varphi_n^\delta - \psi_n^\delta),$$

adding and removing  $\beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) q_n^\delta$ , we obtain

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\nu\delta} \|\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - \beta'(z_n^\delta - \psi_n^\delta)\|_{L_2(\Omega)} \|q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C}{\nu\delta} \|\max|\beta'(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)|\|_{L_2(\Omega)} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

and by the mean value theorem applied on the interval of sides  $(y_n^\delta - \varphi_n^\delta)$  and  $(z_n^\delta - \psi_n^\delta)$ , we obtain

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\nu\delta} \max|\beta''(\cdot)| \| (y_n^\delta - \varphi_n^\delta) - (z_n^\delta - \psi_n^\delta) \|_{L_2(\Omega)} \|q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C}{\nu\delta} \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Then, we get

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq l_4 (\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}),$$

where

$$l_4 = \max \left\{ \frac{C\tilde{\rho}_3}{\nu\delta - C\tilde{\rho}_3}, \frac{C}{\nu\delta - C\tilde{\rho}_3} \right\}.$$

Finally, we obtain

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta\nu - C\tilde{\rho}_3} (\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{L_2(\Omega)}). \tag{35}$$

□

Now, we give the proof of Theorem 3.

*Proof* Let  $\varphi_n^\delta := F_3(p_n^\delta, y_n^\delta)$  and  $\psi_n^\delta := F_3(q_n^\delta, z_n^\delta)$  then we have

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} = \|F_3(p_n^\delta, y_n^\delta) - F_3(q_n^\delta, z_n^\delta)\|_{H^2(\Omega)}.$$

By Lemma 5, it implies

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq l_4 (\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|p_n^\delta - q_n^\delta\|_{H^1(\Omega)}),$$

where

$$\begin{aligned} p_n^\delta &:= F_2(\varphi_{n-1}^\delta, y_n^\delta), & q_n^\delta &:= F_2(\psi_{n-1}^\delta, z_n^\delta), \\ y_n^\delta &:= F_1(\varphi_{n-1}^\delta) & \text{and} & & z_n^\delta &:= F_1(\psi_{n-1}^\delta). \end{aligned}$$

By Lemmas 3, 4 and 5, we obtain

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq (l_2l_4 + l_4)\|y_n^\delta - z_n^\delta\|_{H^1(\Omega)} + l_2l_4\|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L_2(\Omega)},$$

then

$$\|\varphi_n^\delta - \psi_n^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq l\|\varphi_{n-1}^\delta - \psi_{n-1}^\delta\|_{L_2(\Omega)},$$

where  $l := l_1l_2l_4 + l_2l_4 + l_1l_4$  is the Lipschitz constant of the function  $F$ . □

From above, we have proven that the function  $F$  is locally Lipschitz. But we can see that it is very difficult to get a sharp estimate of the Lipschitz constant  $l$  of  $F$ . However we are convinced that appropriate choices of  $\tilde{\rho}_1$  and  $\delta$  (small enough) could make this constant strictly less than 1, so that  $F$  is contractive.

In the sequel, we illustrate how the combined direct and relaxed Newton methods can be used most effectively for solving the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$ . The main idea is to linearize (13a) and (13c), for the numerical solution of the set of equations (21), (23) and (25). We use the iterative relaxed Newton method (see [4]) on each mapping  $F_1$  and  $F_3$ , and prove the convergence of the proposed algorithm.

**Theorem 4** *Since  $\bar{\varphi}^\delta$  in  $\mathcal{W}$  is solution of the following equation*

$$\bar{\varphi}^\delta - F(\bar{\varphi}^\delta) = 0. \tag{36}$$

*Then the triplet  $(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta, \bar{p}^\delta)$  in  $\mathcal{U} \times \mathcal{W} \times \mathcal{U}$  satisfies the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$ , where in the sequel we put  $\bar{s}^\delta := (\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta, \bar{p}^\delta)$ .*

*Proof* Since  $\bar{\varphi}^\delta$  in  $\mathcal{W}$  satisfies the equation (36), where  $\bar{\varphi}^\delta$  is defined by

$$\bar{\varphi}^\delta := F_3(\bar{y}^\delta, \bar{p}^\delta), \tag{37}$$

where  $\bar{y}^\delta$  and  $\bar{p}^\delta$  in  $\mathcal{U}$  can be respectively defined by

$$\bar{y}^\delta := F_1(\bar{\varphi}^\delta), \tag{38}$$

and

$$\bar{p}^\delta := F_2(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta). \tag{39}$$

Then, by the definitions of the mappings  $F_1, F_2$  and  $F_3$ , the relations (37), (38) and (39) are respectively written as

$$A\bar{y}^\delta + \beta_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) = f \text{ in } \Omega, \quad \text{and} \quad \bar{y}^\delta = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{40}$$

$$A\bar{p}^\delta + \beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\bar{p}^\delta = \bar{y}^\delta - z \text{ in } \Omega, \quad \text{and} \quad \bar{p}^\delta = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{41}$$

and

$$\nu \Delta^2 \bar{\varphi}^\delta + \beta'_\delta(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)\bar{p}^\delta = 0 \text{ in } \Omega, \quad \text{and} \quad \bar{\varphi}^\delta = \Delta \bar{\varphi}^\delta = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{42}$$

---

**Algorithm 2** Relaxed Newton Gauss–Seidel algorithm (Continuous version)

---

- 1: **Input:**  $\{y_0^\delta, p_0^\delta, \varphi_0^\delta, \delta, \nu, \omega_y, \omega_\varphi, \varepsilon\}$  choose  $\varphi_0^\delta \in \mathcal{W}$ ,  $\varepsilon$  and  $\delta$  in  $\mathbb{R}_+^*$ ;
  - 2: **Begin:**
  - 3: **Calculate**  $J_{n-1} \leftarrow J_{n-1}(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$
  - 4: **If**  $(A + \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))$  is singular **Stop.**
  - 5:     **Else**
  - 6:     **Solve**  $(A + \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))r_n^\delta = -\omega_y(Ay_{n-1}^\delta + \beta_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - f)$  on  $r_n^\delta$ ,
  - 7:     **Then**  $y_n^\delta = y_{n-1}^\delta + r_n^\delta$ .
  - 8:     **End if**
  - 9: **If**  $(A + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))$  is singular **Stop.**
  - 10:    **Else**
  - 11:    **Solve**  $(A + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))p_n^\delta = y_n^\delta - z$  on  $p_n^\delta$ .
  - 12:    **End if**
  - 13: **If**  $(-\nu\Delta^2 + \beta''_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta)$  is not invertible **Stop.**
  - 14:    **Else**
  - 15:    **Solve**  $(-\nu\Delta^2 + \beta''_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta).r_n^\delta = \omega_\varphi(\nu A_h^d A_h^d \varphi_{n-1}^\delta + \beta'_\delta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta)$  on  $r_n^\delta$ .
  - 16:    **Then**  $\varphi_n^\delta = \varphi_{n-1}^\delta + r_n^\delta$
  - 17: **Calculate**  $J_n \leftarrow J_{n-1}(y_n^\delta, \varphi_n^\delta)$
  - 18: **End if**
  - 19: **If**  $|J_n - J_{n-1}| \leq \varepsilon$  **Stop.**
  - 20: **Ensure:**  $s_n^\delta := (y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta)$  is a solution
  - 21:    **Else;**  $n \leftarrow n + 1$ , **Go to Begin.**
  - 22: **End if**
  - 23: **End algorithm.**
- 

Hence, we remark that the set of equations (40), (41) and (42) is the set of the equations of the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$  when the triplet  $(y^\delta, \varphi^\delta, p^\delta)$  is replaced by  $(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta, \bar{p}^\delta)$ . □

The equations (13a) and (13c) of the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$  are respectively nonlinear with respect to  $y^\delta$  and  $\varphi^\delta$ . Therefore for the solution of the system  $(\mathcal{S}^\delta)$ , we propose the following iterative algorithm (Algorithm 2).

### 3.2 Convergence results

In this section, we search conditions on  $\delta$  and  $\omega$  to have the convergence of the latter algorithm.

*Remark 1* From Lemma 4, when we replace  $z_n^\delta$ ,  $\psi_{n-1}^\delta$  and  $q_n^\delta$  respectively by  $\bar{y}^\delta$ ,  $\bar{\varphi}^\delta$  and  $\bar{p}^\delta$ , we get

$$\|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq l_2(\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{L^2(\Omega)}). \tag{43}$$

**Lemma 6** Let  $\bar{\varphi}^\delta$  be the solution of (42), since

$$\|\bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_3, \tag{44}$$

where  $\omega_\varphi$  is strictly positive, such that

$$\frac{\delta\nu C + C\tilde{\rho}_3}{(C + \delta\nu C - C\tilde{\rho}_3)} \leq \omega_\varphi \leq 1, \tag{45}$$

and

$$\omega_\varphi < \frac{\delta^2\nu C - C\delta\tilde{\rho}_3}{C\delta + C\tilde{\rho}_3},$$

we obtain

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} &\leq k_3(\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}), \end{aligned} \tag{46}$$

where  $k_3$  is positive and  $\tilde{\rho}_3 \leq C\delta\nu$ , such that  $k_3 := \frac{C\omega_\varphi}{\delta\nu C - C\tilde{\rho}_3}$ .

*Proof* From step 3 of the continuous version of the algorithm, we obtain

$$\begin{aligned} \nu\tilde{\sigma}(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) &= -(\beta_\delta''(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta(\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta), (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta)) \\ &\quad + \nu(1 - \omega_\varphi)\tilde{\sigma}(\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta, \varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \\ &\quad + (\beta_\delta''(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)p_n^\delta(\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta), (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta)) \\ &\quad + \omega_\varphi((\beta_\delta'(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta))p_n^\delta \\ &\quad + \beta_\delta'(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)(p_n^\delta - \bar{p}^\delta), (\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta)). \end{aligned}$$

By the continuity and coercivity conditions  $(\widetilde{H}_1)$  and  $(\widetilde{H}_2)$  of  $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , and the mean value theorem applied on the interval of sides  $(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$ , where  $r^\delta(\theta) = \theta(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) + (1 - \theta)(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$  and  $0 \leq \theta \leq 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} \nu C \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \nu(1 - \omega_\varphi)C \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C\tilde{\rho}_3}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C\omega_\varphi\tilde{\rho}_3}{\delta} \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C\omega_\varphi\tilde{\rho}_3}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{C\omega_\varphi}{\delta} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Then, we get

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\delta \nu C - C \tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ & \leq \left( \frac{(1 - \omega_\varphi)\delta \nu C + (1 + \omega_\varphi)C \tilde{\rho}_3}{\delta} \right) \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ & \quad + \frac{C \omega_\varphi \tilde{\rho}_3}{\delta} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C \omega_\varphi}{\delta} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finally, we obtain

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} & \leq \left( \frac{(1 - \omega_\varphi)\delta \nu C + (1 + \omega_\varphi)C \tilde{\rho}_3}{\delta \nu C - C \tilde{\rho}_3} \right) \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ & \quad + \frac{C \omega_\varphi \tilde{\rho}_3}{\delta \nu C - C \tilde{\rho}_3} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\ & \quad + \frac{C \omega_\varphi}{\delta \nu C - C \tilde{\rho}_3} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 7** Let  $y_n^\delta$  be the solution of (40), since the condition (44) of previous Lemma 6 is fulfilled, where

$$\left( \frac{\delta C + C - \delta}{\delta C + C} \right) < \omega_y \leq \frac{(\delta C + C)}{(\delta C + 2C)} \leq 1, \tag{47}$$

we get

$$\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq k_1 \left\{ \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \right\} \tag{48}$$

where  $k_1 := (1 - \omega_y)(C + \frac{C}{\delta}) < \frac{1}{4}$ ,  $e_{n-1}^\delta := (y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $\bar{e}^\delta := (\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$ .

*Proof* From step 1 of the algorithm, we obtain

$$\begin{aligned} & (A + \beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))(y_n^\delta - y_{n-1}^\delta) \\ & = -\omega_y (Ay_{n-1}^\delta + \beta_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - f). \end{aligned} \tag{49}$$

Adding and removing  $\bar{y}^\delta$  in the first part of equation (49), we get

$$\begin{aligned} \sigma(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) & = -(\beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))(y_n^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \\ & \quad + \sigma(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \\ & \quad + (\beta'_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta))(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \\ & \quad - \omega_y \sigma(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \\ & \quad - \omega_y (\beta_\delta (y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) - \beta_\delta (\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta). \end{aligned}$$

Since  $-(\beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)(y_n^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta)) \leq 0$ , and by the mean value theorem applied on the interval of sides  $(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$  and  $(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)$ , we get

$$\begin{aligned} \sigma(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) &\leq (1 - \omega_y)\sigma(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \\ &\quad + (\beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta)) \\ &\quad - \omega_y((\beta'_\delta(r^\delta(\theta)) - \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) + \beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)) \\ &\quad \times (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta)) \\ &\quad + \omega_y(\beta'_\delta(r^\delta(\theta))(\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta)). \end{aligned}$$

where

$$r^\delta(\theta) = \theta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) + (1 - \theta)(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta) \quad \text{and} \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Again by the mean value theorem applied on the interval of sides  $r^\delta(\theta)$  and  $(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)$ , we obtain

$$\begin{aligned} \sigma(y_n^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) &\leq (1 - \omega_y)\sigma(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta, y_n^\delta - \bar{y}^\delta) \\ &\quad + (1 - \omega_y)(\beta'_\delta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta)(y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta)) \\ &\quad + \omega_y([\beta''_\delta(s^\delta(\theta))[(1 - \theta)(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) \\ &\quad - (1 - \theta)(\bar{y}^\delta - \bar{\varphi}^\delta)]] \\ &\quad \times (y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta)) \\ &\quad + \omega_y(\beta'_\delta(r^\delta(\theta))(\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta), (y_n^\delta - \bar{y}^\delta)). \end{aligned}$$

where,  $s^\delta(\theta) := \theta(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta) + (1 - \theta)r^\delta(\theta)$ .

By the coercivity condition **(H<sub>2</sub>)** and continuity condition **(H<sub>1</sub>)** of  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , we obtain

$$\begin{aligned} \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq k_1(\|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

where

$$k_1 := \max\left\{ (1 - \omega_y)\left(C + \frac{C}{\delta}\right), \frac{C\omega_y(1 - \theta)}{\delta}, \frac{C\omega_y}{\delta} \right\}. \quad \square$$

**Theorem 5** Let  $e_n^\delta := (y_n^\delta, \varphi_n^\delta)$  and  $\bar{e}^\delta := (\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta)$ , then we get

$$\begin{aligned} \|e_n^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \\ \leq k \max(\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2, \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}), \end{aligned} \quad (50)$$

where

$$k := 2(k_1 + \tilde{k}_3), \quad \tilde{k}_3 := k_3(k_1 + \tilde{l}_2 + 1) \quad \text{and} \quad \tilde{l}_2 = l_2(Ck_1 + C).$$

*Proof* From the equation (48) and (43), we get

$$\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq k_1(\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}),$$

and

$$\|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq l_2(C\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}),$$

then we get

$$\begin{aligned} & \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq l_2(C[k_1(\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}) \\ & \quad + C\|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}], \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} & \leq \tilde{l}_2(\|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \|y_{n-1}^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Finally, we get

$$\begin{aligned} \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)} & \leq \tilde{l}_2(\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}), \end{aligned} \tag{51}$$

where

$$\tilde{l}_2 := l_2(Ck_1 + C).$$

And by the equation (46), we get

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} & \leq k_3(\|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} \\ & \quad + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \|p_n^\delta - \bar{p}^\delta\|_{H^1(\Omega)}), \end{aligned}$$

then we obtain

$$\begin{aligned} & \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ & \leq k_3(k_1[\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}] \\ & \quad + \|\varphi_{n-1}^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ & \quad + \tilde{l}_2[\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}]), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ & \leq \tilde{k}_3 (\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}), \end{aligned} \tag{52}$$

where

$$\tilde{k}_3 := k_3(k_1 + \tilde{l}_2 + 1).$$

By the equations (48) and (52), we get

$$\begin{aligned} & \|y_n^\delta - \bar{y}^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_n^\delta - \bar{\varphi}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \\ & \leq k_1 (\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}) \\ & \quad + \tilde{k}_3 (\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2 + \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

then we deduce

$$\begin{aligned} & \|e_n^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \\ & \leq 2(k_1 + \tilde{k}_3) \max\{\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2, \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}\}. \end{aligned}$$

Finally, we get

$$\begin{aligned} & \|e_n^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)} \\ & \leq k \max\{\|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}^2, \|e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta\|_{H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)}\}, \end{aligned} \tag{53}$$

where

$$k := 2(k_1 + \tilde{k}_3). \tag{□}$$

As seen above, it is very difficult to give a sharp estimate of the constant  $k$  and to prove that this constant is less than 1 in order to get the convergence of the latter algorithm. However, we believe with suitable choices of  $\delta$  and  $\omega_\square$ , we can make this constant less than 1.

*Remark 2* From Theorem 5, we deduce that  $y_n^\delta$  converges strongly to  $\bar{y}^\delta$  in  $H_0^1(\Omega)$  and  $\varphi_n^\delta$  converges strongly to  $\bar{\varphi}^\delta$  in  $H^2(\Omega)$ .

**Corollary 4** *By the assumptions of Theorem 5, we deduce that*

$$|J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| \text{ goes to } 0.$$

*Proof* From the cost functional defined in  $(\mathcal{P}^\delta)$ , we can write

$$\begin{aligned}
 & |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} (y_n^\delta - z)^2 dx + v \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi_n^\delta)^2 dx \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \int_{\Omega} (y_{n-1}^\delta - z)^2 dx + v \left( \int_{\Omega} (\Delta \varphi_{n-1}^\delta)^2 dx \right) \right) \right|.
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 & |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| \\
 &= \frac{1}{2} (\|y_n^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|y_{n-1}^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
 &\quad + v (\|\Delta \varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2),
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 & |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| \\
 &= \frac{1}{2} [(\|y_n^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} - \|y_{n-1}^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}) (\|y_n^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} + \|y_{n-1}^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}) \\
 &\quad + v (\|\Delta \varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} - \|\Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}) (\|\Delta \varphi_n^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)})].
 \end{aligned}$$

From Corollary 1, we have  $\|y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_2$  and  $\|\varphi_{n-1}^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \tilde{\rho}_1$ , we then deduce that

$$\begin{aligned}
 & |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| \\
 &\leq \frac{1}{2} [\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} (\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\tilde{\rho}_2 + C) \\
 &\quad + v \|\Delta \varphi_n^\delta - \Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} (\|\Delta \varphi_n^\delta - \Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + 2\tilde{\rho}_1)],
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 & |J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)| \\
 &\leq \frac{1}{2} [\|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y_n^\delta - y_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)} (2\tilde{\rho}_2 + C) \\
 &\quad + v (\|\Delta \varphi_n^\delta - \Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\tilde{\rho}_1 \|\Delta \varphi_n^\delta - \Delta \varphi_{n-1}^\delta\|_{L^2(\Omega)})].
 \end{aligned}$$

Finally, we get that  $|J(y_n^\delta, \varphi_n^\delta) - J(y_{n-1}^\delta, \varphi_{n-1}^\delta)|$  strongly converges to 0. □

#### 4 Numerical implementation and computational aspects

Numerical experiments are carried out for one and two dimensional problems. We will attempt to compute a grid function consisting of values  $y^{\delta,h} := (y_0^\delta, y_1^\delta, \dots,$

$y_{N+1}^\delta$ ),  $\varphi^{\delta,h} := (\varphi_0^\delta, \varphi_1^\delta, \dots, \varphi_{N+1}^\delta)$ , and  $p^{\delta,h} := (p_0^\delta, p_1^\delta, \dots, p_{N+1}^\delta)$ , where  $y^{\delta,h}$ ,  $\varphi^{\delta,h}$ , and  $p^{\delta,h}$  are the vectors values of the discrete solutions of the optimality system  $(\mathcal{S}^\delta)$  such that  $y_i^\delta := y^\delta(x_i)$ ,  $\varphi_i^\delta := \varphi^\delta(x_i)$ , and  $p_i^\delta := p^\delta(x_i)$  for  $0 \leq i \leq N + 1$ , finite-differences approximations involving the three, respectively five, point approximation of the Laplacian in one dimensional space, respectively two dimensional space. Here  $x_i = ih$  for  $0 \leq i \leq N + 1$  and  $h := \frac{1}{N+1}$  is the distance between two successive grid points. From the boundary conditions  $y_0^\delta = y_{N+1}^\delta = 0$ ,  $p_0^\delta = p_{N+1}^\delta = 0$ , and  $\varphi_0^\delta = \varphi_{N+1}^\delta = 0$ , so we have  $3N$  unknown values to compute. Then, for example, if we replace  $y^{(2)}(x)$  (respectively  $\Delta y(x)$ ) in (13a) by the centered difference approximation, we get

$$-y^{(2)}(x) := \frac{1}{h^2}(-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}), \quad \text{where } 0 \leq i \leq N + 1, \tag{54}$$

and respectively

$$\begin{aligned}
 -(\Delta y)_{ij} &:= \frac{1}{h^2}(-y_{i+1,j} + 4y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j-1}), \\
 &\text{where } 0 \leq i, j \leq N + 1.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Then, we can write the previous systems under the matrix form, as

$$\begin{cases}
 A_h^d y_n^{\delta,h} + \beta_\delta (y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h}) = f^h, \\
 (A_h^d + \beta'_\delta (y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})) p_n^{\delta,h} = y_n^{\delta,h} - z^h, \\
 \nu A_h^d \varphi_n^\delta = \beta'_\delta (y_n^{\delta,h} - \varphi_n^{\delta,h}) p_n^\delta, \\
 A_h^d \varphi_n^{\delta,h} = \varphi_n^{\delta,h}.
 \end{cases} \tag{56}$$

We give the discrete algorithm of the continuous algorithm (Algorithm 3), where  $d = 1, 2$ ,  $f^h := (f_0, f_1, \dots, f_{N+1})$ ,  $z^h := (z_0, z_1, \dots, z_{N+1})$ , and  $\phi^{\delta,h} := (\phi_0^\delta, \phi_1^\delta, \dots, \phi_{N+1}^\delta)$ , and such that for one dimensional problem,  $A_h^1$  is  $(N + 2)(N + 2)$  symmetric positive definite matrix, where  $A_h^1$  is given in (54) and for two dimensional problem  $A_h^2$  is  $(N + 2)^2(N + 2)^2$  symmetric matrix, where  $A_h^2$  is given in (55).

*Remark 3* Theorem 5 is given for the continuous problem and it is clear that for the discrete form of the proposed algorithm, we must use the discretisation parameter  $h$ . But for this discrete form of the Algorithm 3, it is very difficult to give a sharp estimate of the Lipschitz constant  $k$  given by Theorem 5.

### 4.1 Numerical examples in one dimensional space

In this section, we take  $\Omega = [0, 1]$  and we describe some numerical experiments in one dimensional space based on the previous algorithm. We also give some numerical tests when in each test we vary one of the parameters  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $N$  and  $\nu$ , where  $f(x) = 100x \cos(3\pi x)$ ,  $z(x) = \cos(4\pi x^2)$  and  $\nu > 0$  are given. In the sequel, we note  $\epsilon_n$  by  $\max\{\|y_n - y_{n-1}\|_\infty, \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_\infty\}$  and  $\omega_y = \omega_\varphi = \omega$ .

**Algorithm 3** Relaxed Newton Gauss–Seidel algorithm (Discrete version)

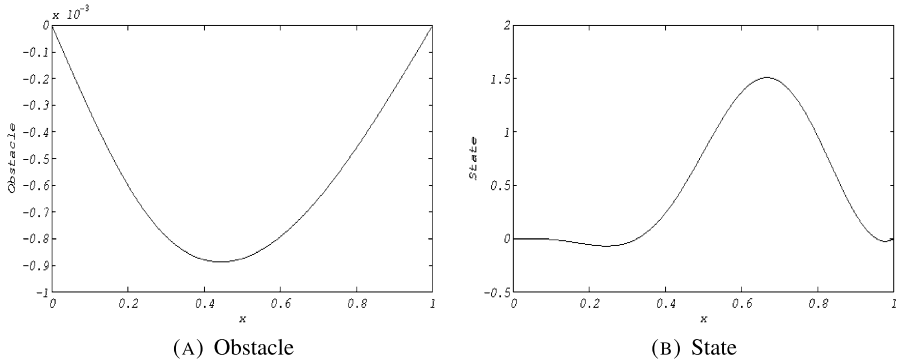
1: **Input:**  $\{y_0^{\delta,h}, p_0^{\delta,h}, \varphi_0^{\delta,h}, \delta, \nu, \omega_y, \omega_\varphi, \varepsilon\}$  choose  $\varphi_0^{\delta,h} \in \mathcal{W}, \varepsilon$  and  $\delta$  in  $\mathbb{R}_+^*$ ;  
 2: **Begin:**  
 3: **Calculate**  $J_{n-1} \leftarrow J_{n-1}(y_{n-1}^{\delta,h}, \varphi_{n-1}^{\delta,h})$   
 4: **If**  $(A_h^d + \text{diag}(\beta'_{\delta,h}(y_{n-1}^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})))$  is singular **Stop.**  
 5: **Else**  
 6: **Solve**  $(A_h^d + \text{diag}(\beta'_{\delta,h}(y_{n-1}^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})))r_n^{\delta,h} = -\omega_y(A_h^d y_{n-1}^{\delta,h} + \beta_\delta(y_{n-1}^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h}) - f^h)$  on  $r_n^{\delta,h}$ ,  
 7: **Then**  $y_n^{\delta,h} = y_{n-1}^{\delta,h} + r_n^{\delta,h}$ .  
 8: **End if**  
 9: **If**  $(A_h^d + \text{diag}(\beta'_{\delta,h}(y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})))$  is singular **Stop.**  
 10: **Else**  
 11: **Solve**  $(A_h^d + \text{diag}(\beta'_{\delta,h}(y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})))p_n^{\delta,h} = y_n^{\delta,h} - z^h$  on  $p_n^{\delta,h}$ .  
 12: **End if**  
 13: **If**  $(-\nu A_h^d A_h^d + \text{diag}(\beta''_{\delta,h}(y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})p_n^{\delta,h}))$  is not invertible **Stop.**  
 14: **Else**  
 15: **Solve**  $(-\nu A_h^d A_h^d + \text{diag}(\beta''_{\delta,h}(y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})p_n^{\delta,h}))r_n^{\delta,h} = \omega_\varphi(\nu A_h^d A_h^d \varphi_{n-1}^{\delta,h} + \beta'_\delta(y_n^{\delta,h} - \varphi_{n-1}^{\delta,h})p_n^{\delta,h})$  on  $r_n^{\delta,h}$ .  
 16: **Then**  $\varphi_n^{\delta,h} = \varphi_{n-1}^{\delta,h} + r_n^{\delta,h}$   
 17: **Calculate**  $J_n \leftarrow J_{n-1}(y_n^{\delta,h}, \varphi_n^{\delta,h})$   
 18: **End if**  
 19: **If**  $|J_n - J_{n-1}| \leq \varepsilon$  **Stop.**  
 20: **Ensure:**  $s_n^\delta := (y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta)$  is a solution  
 21: **Else;**  $n \leftarrow n + 1$ , **Go to Begin.**  
 22: **End if**  
 23: **End algorithm.**

4.1.1 Test 1: Study of the dependence on  $\omega$  with  $\delta = h, \nu = 1$  and  $N = 200$

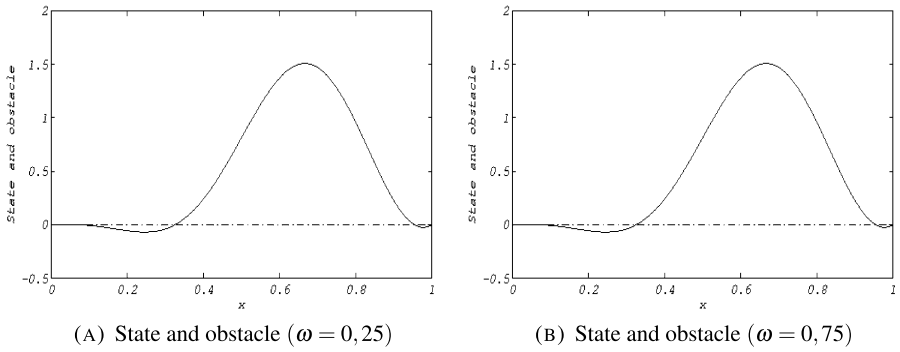
Numerical results are displayed in Table 1 according to the variation of  $\omega$ . In Fig. 2, curves corresponding to the control and state functions are shown. Curves given in Fig. 3 show the contact region  $I(y)$  between the state and the control functions. Finally, Fig. 4 gives graphical variations in a log – log scale of  $\varepsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ .

**Table 1** Numerical results for one dimensional space while varying  $\omega$

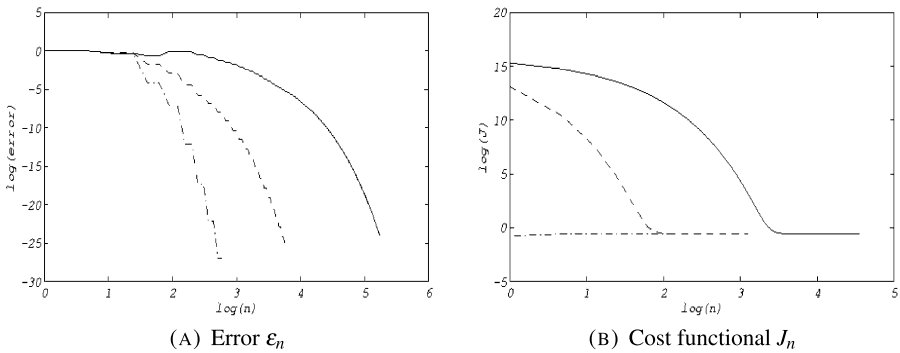
$\omega$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\varepsilon_n$
0.25	94	0.58119	8.46656e-013	1.93283	4.18579e-011
0.5	41	0.58119	9.86100e-013	1.93283	2.06999e-011
0.75	22	0.58119	7.16093e-013	1.93283	8.58703e-012
1	8	0.58119	3.26849e-013	1.93283	2.04949e-012



**Fig. 2** Left (obstacle), right (state) continuous line;  $\omega = 0.25$ , dashed line;  $\omega = 0.75$ , dashed-dot line;  $\omega = 1$



**Fig. 3** Left (state and obstacle ( $\omega = 0.25$ )), right (state and obstacle ( $\omega = 0.75$ ))



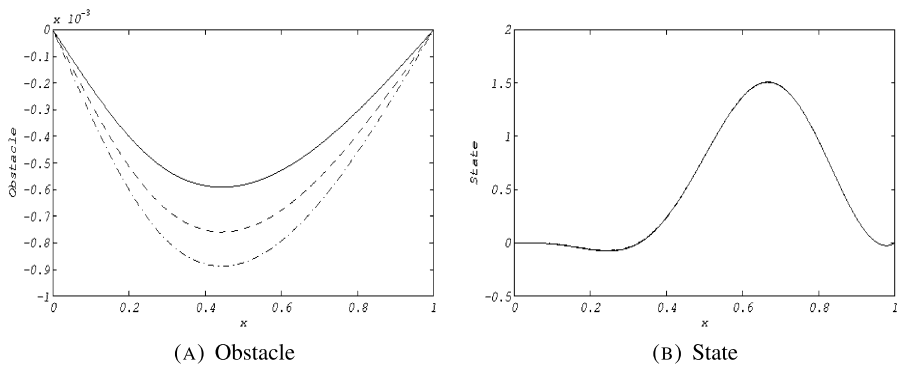
**Fig. 4** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line;  $\omega = 0.25$ , dashed line;  $\omega = 0.75$ , dashed-dot line;  $\omega = 1$

#### 4.1.2 Test 2: Study of the dependence on $N$ with $\delta = h$ , $\omega = 0,75$ and $\nu = 1$

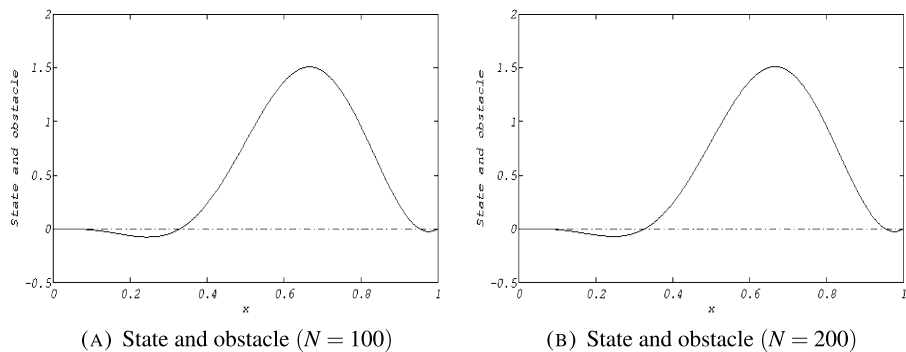
Numerical results are displayed in Table 2 according to the variation of  $N$ . In Fig. 5, curves corresponding to the control and state functions are shown. Curves given in Fig. 6 show the contact region  $I(y)$  between the state and the control functions. Finally, Fig. 7 gives graphical variations in a log – log scale of  $\epsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ .

**Table 2** Numerical results for one dimensional space while varying  $N$

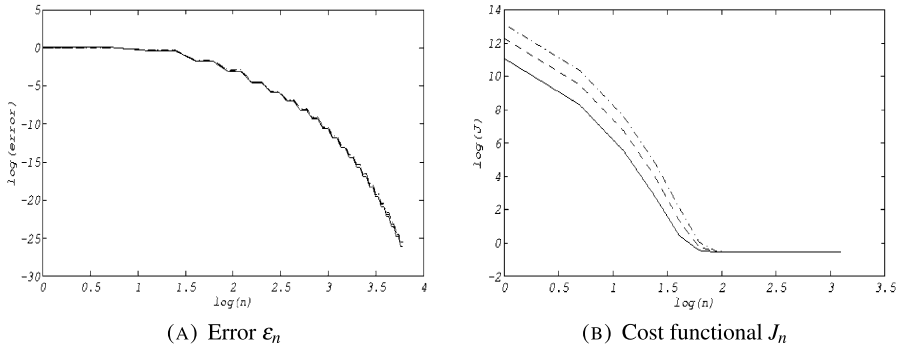
$N$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\epsilon_n$
100	22	0.57798	2.99649e-013	1.92903	4.77290e-012
150	22	0.57998	5.04485e-013	1.93119	6.68586e-012
200	22	0.58119	7.16093e-013	1.93283	8.58703e-012
250	22	0.58205	9.38360e-013	1.93420	1.05026e-011



**Fig. 5** Left (obstacle), right (state) continuous line;  $N = 100$ , dashed line;  $N = 150$ , dashed-dot line;  $N = 200$



**Fig. 6** Left (state and obstacle ( $N = 100$ )), right (state and obstacle ( $N = 200$ ))



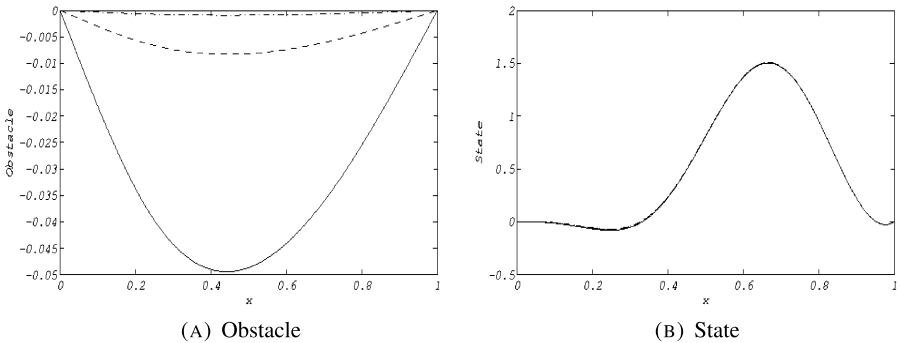
**Fig. 7** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line;  $N = 100$ , dashed line;  $N = 150$ , dashed-dot line;  $N = 200$

4.1.3 Test 3: Study of the dependence on  $\nu$  with  $\delta = h$ ,  $\omega = 0,75$  and  $N = 200$

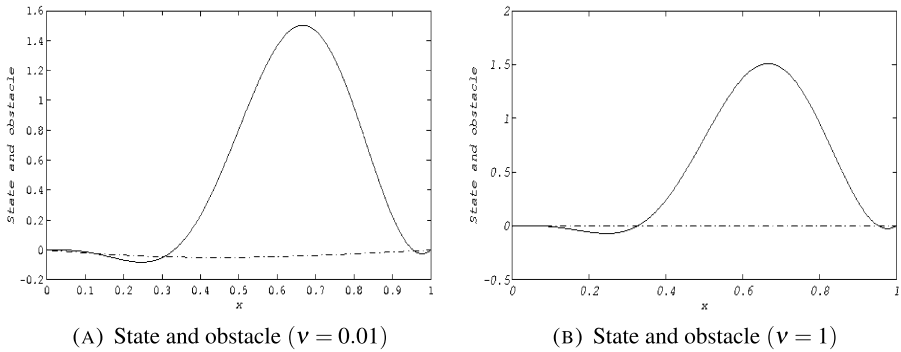
Numerical results are displayed in Table 3 according to the variation of  $\nu$ . In Fig. 8, curves corresponding to the control and state functions are shown. Curves given in Fig. 9 show the contact region  $I(y)$  between the state and the control functions. Finally, Fig. 10 gives graphical variations in a log – log scale of  $\epsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ .

**Table 3** Numerical results for one dimensional space while varying  $\nu$

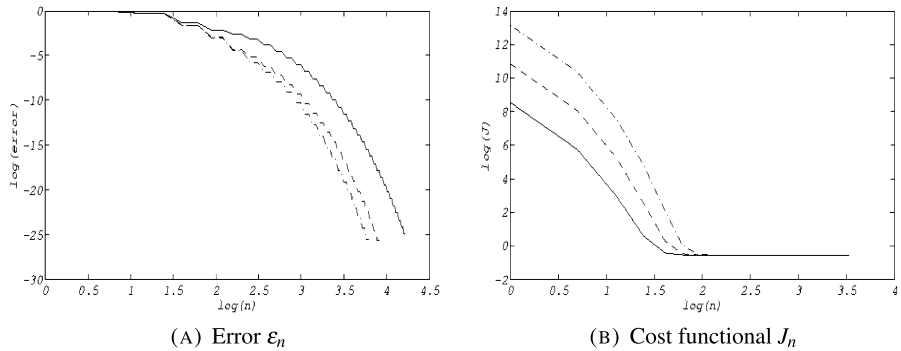
$\nu$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\epsilon_n$
0.01	34	0.57999	8.46545e-013	1.92507	1.56031e-011
0.1	25	0.58101	8.19788e-013	1.93141	7.78100e-012
1	22	0.58119	7.16093e-013	1.93283	8.58703e-012



**Fig. 8** Left (obstacle), right (state) continuous line;  $\nu = 0.01$ , dashed line;  $\nu = 0.1$ , dashed-dot line;  $\nu = 1$



**Fig. 9** Left (state and obstacle ( $\nu = 0.01$ )), right (state and obstacle ( $\nu = 1$ ))



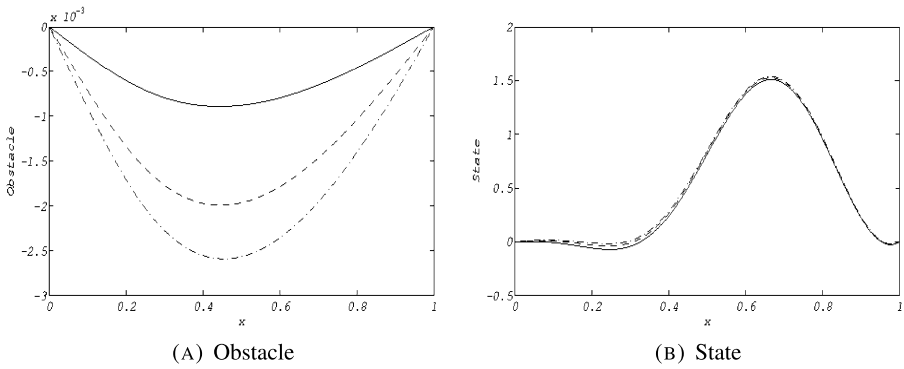
**Fig. 10** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line;  $\nu = 0.01$ , dashed line;  $\nu = 0.1$ , dashed-dot line;  $\nu = 1$

4.1.4 Test 4: Study of the dependence on  $\delta$  with  $N = 200$ ,  $\omega = 0,75$  and  $\nu = 1$

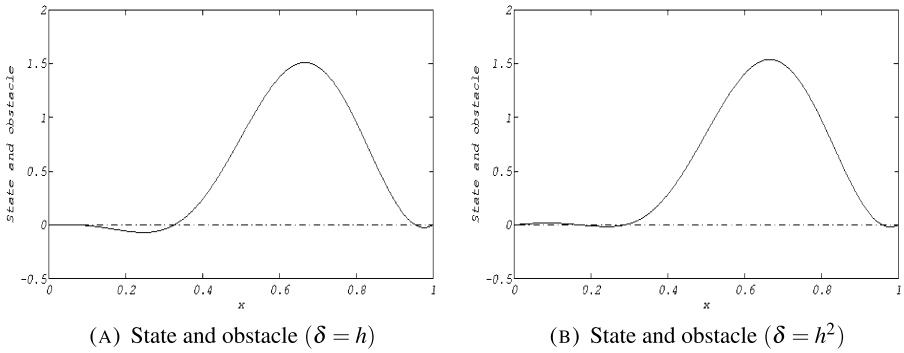
Numerical results are displayed in Table 4 according to the variation of  $\delta$ . In Fig. 11, curves corresponding to the control and state functions are shown. Curves given in Fig. 12 show the contact region  $I(y)$  between the state and the control functions. Finally, Fig. 13 gives graphical variations in a log – log scale of  $\epsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ .

**Table 4** Numerical results for one dimensional space while varying  $\delta$

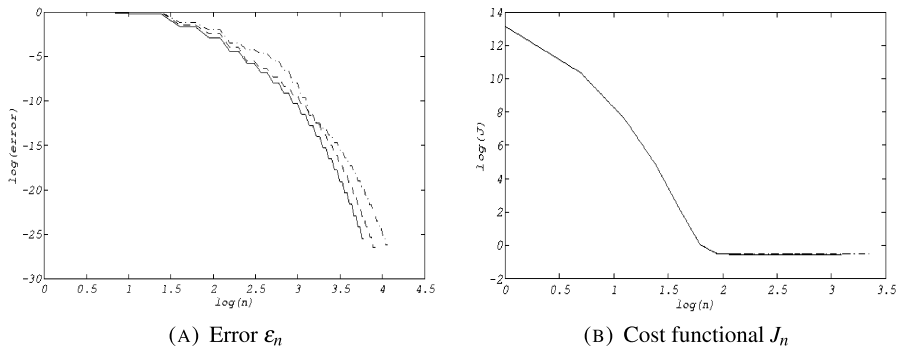
$\delta$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\epsilon_n$
$h$	22	0.58119	7.16093e-013	1.93283	8.58703e-012
$h^{1.25}$	23	0.58384	8.85624e-013	1.94336	8.19747e-012
$h^{1.5}$	25	0.58670	3.82804e-013	1.95400	3.27501e-012
$h^2$	29	0.59184	4.74398e-013	1.96908	4.30574e-012



**Fig. 11** Left (obstacle), right (state) continuous line;  $\delta = h$ , dashed line;  $\delta = h^{1.5}$ , dashed-dot line;  $\delta = h^2$



**Fig. 12** Left (state and obstacle ( $\delta = h$ )), right (state and obstacle ( $\delta = h^2$ ))



**Fig. 13** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line;  $\delta = h$ , dashed line;  $\delta = h^{1.5}$ , dashed-dot line;  $\delta = h^2$

### 4.2 Numerical examples in two dimensional space

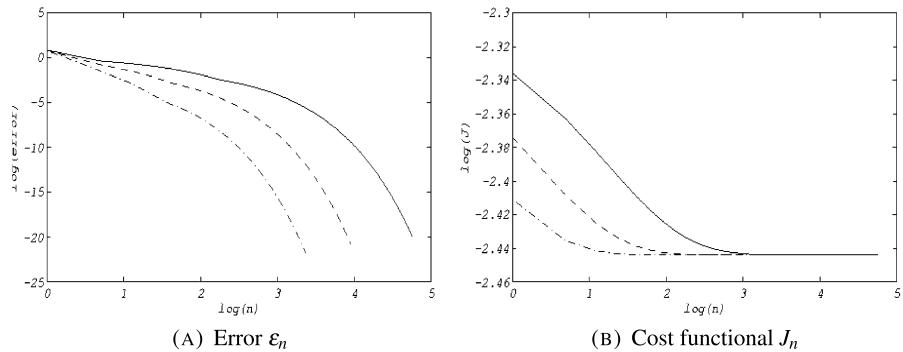
In this section, we describe some numerical experiments in a two dimensional space based on the previous algorithm. We also give some numerical tests when in each test we vary one of the parameters  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $N$  and  $\nu$ , where  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $f(x, y) = \pi x^2 \sin(2\pi x^2)y \cos(2\pi y^2)$  and  $z(x, y) = \sin(2\pi x^2) \cos(2\pi y^2)$  and  $\omega_y = \omega_\varphi = \omega$ .

#### 4.2.1 Test 1: Study of the dependence on $\omega$ with $\delta = h$ , $\nu = 1$ and $N = 20$

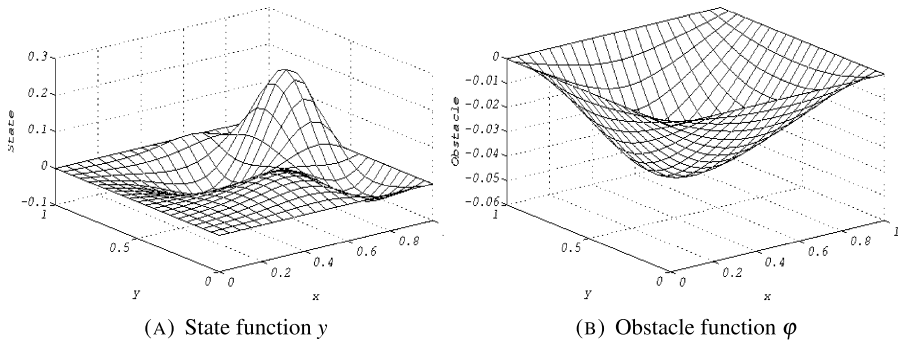
Numerical results are displayed in Table 5 according to the variation of  $\omega$ . Figure 14 gives graphical variations in a log – log scale of  $\epsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ . Curves given in Fig. 15 corresponding to the control and state functions are shown.

**Table 5** Numerical results for two dimensional space while varying  $\omega$

$\omega$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\epsilon_n$
0.25	116	0.08682	8.93729e-013	0.98837	2.14961e-009
0.5	52	0.08682	9.19264e-013	0.98837	9.83140e-010
0.75	29	0.08682	5.60579e-013	0.98837	3.43226e-010
1	18	0.08682	3.87481e-013	0.98837	2.00984e-010



**Fig. 14** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line;  $\omega = 0.25$ , dashed line;  $\omega = 0.5$ , dashed-dot line;  $\omega = 0.75$



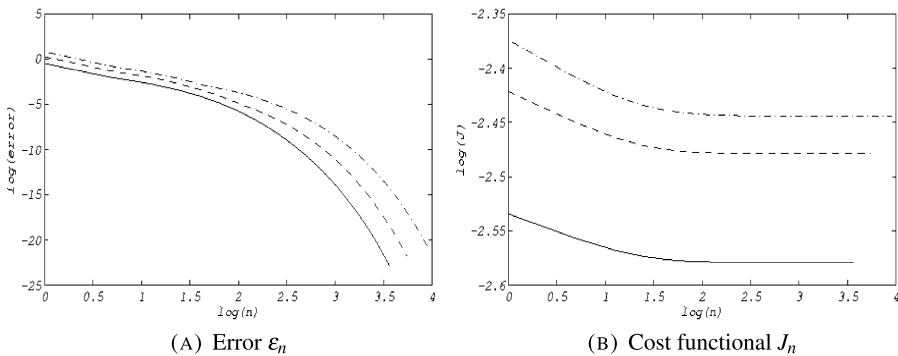
**Fig. 15** Left (state function  $y$ ), right (obstacle function  $\varphi$ )

4.2.2 Test 2: Study of the dependence on  $N$  with  $\delta = h$ ,  $\omega = 0, 5$  and  $\nu = 1$

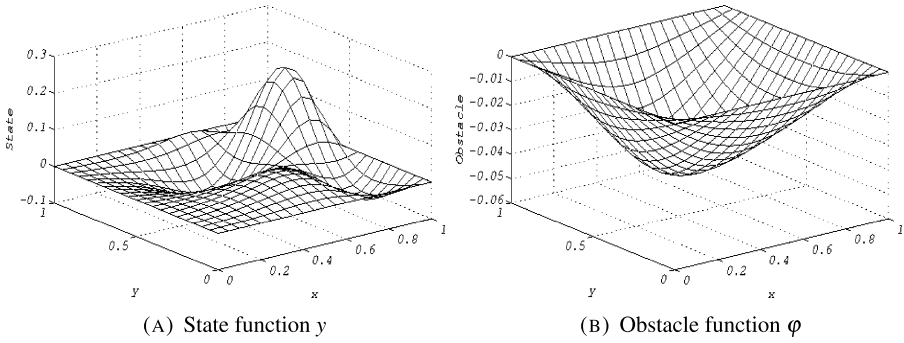
Numerical results are displayed in Table 6 according to the variation of  $N$ . Figure 16 gives graphical variations in a log – log scale of  $\epsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ . Curves given in Fig. 17 corresponding to the control and state functions are shown.

**Table 6** Numerical results for two dimensional space while varying  $N$

$N$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\epsilon_n$
10	35	0.07585	5.68795e-013	0.98641	1.24612e-010
15	42	0.08386	6.50146e-013	0.97983	3.42854e-010
20	52	0.08682	9.19264e-013	0.98837	9.83140e-010
25	84	0.08758	9.12270e-013	0.98099	1.66468e-009



**Fig. 16** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line;  $N = 10$ , dashed line;  $N = 15$ , dashed-dot line;  $N = 20$



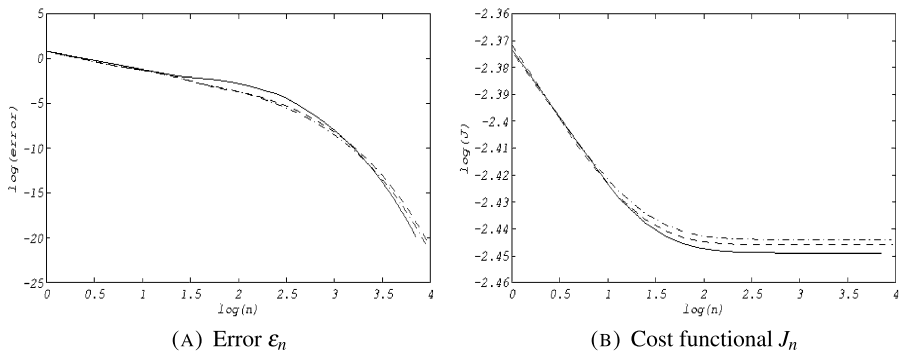
**Fig. 17** Left (state function  $y$ ), right (obstacle function  $\varphi$ )

4.2.3 Test 3: Study of the dependence on  $\nu$  with  $\delta = h$ ,  $\omega = 0, 5$  and  $N = 20$

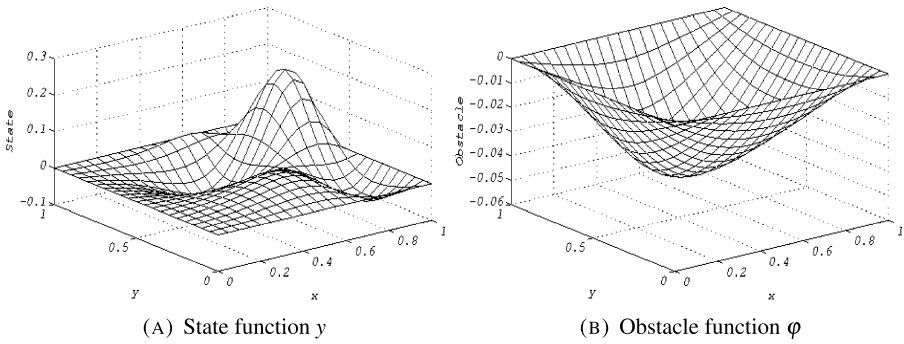
Numerical results are displayed in Table 7 according to the variation of  $\nu$ . Figure 18 gives graphical variations in a log – log scale of  $\epsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ . Curves given in Fig. 19 corresponding to the control and state functions are shown.

**Table 7** Numerical results for two dimensional space while varying  $\nu$

$\nu$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\epsilon_n$
0.1	47	0.08638	7.51648e-013	0.98895	2.23935e-009
0.5	53	0.08664	8.22134e-013	0.98870	1.28990e-009
1	52	0.08682	9.19264e-013	0.98837	9.83140e-010



**Fig. 18** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line  $\nu = 0.1$ ; dashed line  $\nu = 0.5$ ; dashed-dot line  $\nu = 1$



**Fig. 19** Left (state function  $y$ ), right (obstacle function  $\varphi$ )

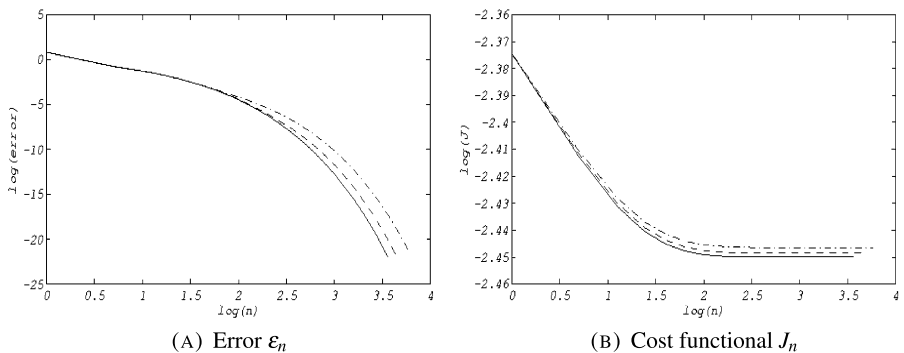
4.2.4 Test 4: Study of the dependence on  $\delta$  with  $N = 20$ ,  $\omega = 0, 5$  and  $\nu = 1$

Numerical results are displayed in Table 8 according to the variation of  $\delta$ . Figure 20 gives graphical variations in a log – log scale of  $\epsilon_n$  and  $J_n$  for each iteration  $n$ . Curves given in Fig. 21 corresponding to the control and state functions are shown.

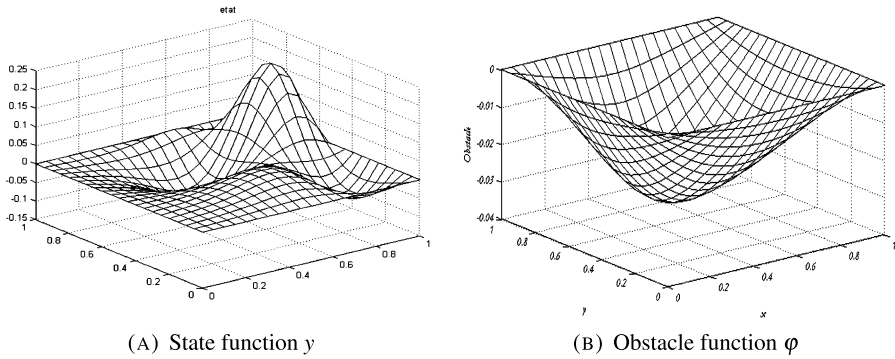
In Fig. 22 show the variation of the contact region  $I(y)$  between the state and the control functions for  $N = 20$  and  $N = 30$ .

**Table 8** Numerical results for two dimensional space while varying  $\delta$

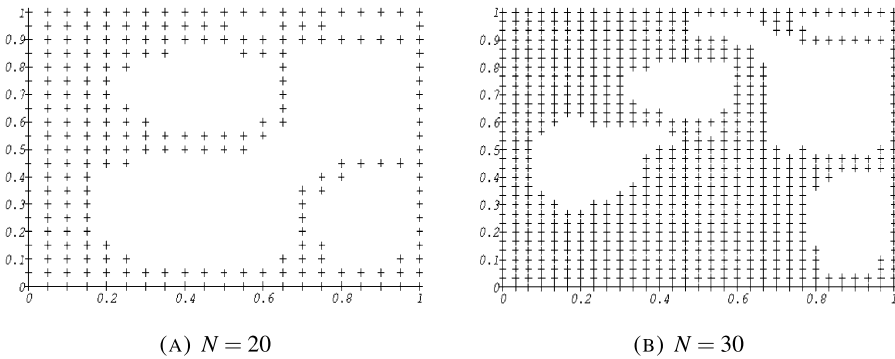
$\delta$	# Iteration	$J$	$ J_n - J_{n-1} $	$\ y - z\ _\infty$	$\epsilon_n$
$h^{0.25}$	35	0.08629	7.78252e-013	0.98890	2.86872e-010
$h^{0.5}$	38	0.08642	5.93233e-013	0.98874	3.65221e-010
$h^{0.75}$	43	0.08660	8.65599e-013	0.98855	7.06664e-010
$h^1$	52	0.08682	9.19264e-013	0.98837	9.83140e-010



**Fig. 20** Left (error  $\epsilon_n$ ), right (cost functional  $J_n$ ) continuous line;  $\delta = h^{0.5}$ , dashed line;  $\delta = h^{0.75}$ , dashed-dot line;  $\delta = h^1$



**Fig. 21** *Left* (state function  $y$ ), *right* (obstacle function  $\varphi$ )



**Fig. 22** Contact region (with plus sign)

### 5 Conclusion and remarks

We first observe that the numerical results obtained by the given algorithm are acceptable for all practical reasons. The convergence rate of this algorithm is linear. However, it should be noted that it is very difficult to give a sharp estimate of the Lipschitz constant given by Theorem 5.

We also remark that in spite of the elimination of the inequality constraint  $(\mathcal{C})$ , we still get from Theorem 5 a local convergence propriety implied by the constraint  $\|\varphi_n^\delta\|_{H^2} \leq R$ . Hence we are again confronted to the inequality constraint  $(\mathcal{C})$ . We think that the given algorithm need to be completed and improved. We may suggest, for example, to optimize the computation of the relaxation parameters.

Finally, another approach to solve the above system  $(\mathcal{S}^\delta)$  is to look for the steady state equation where we replace the described elliptic equations by the corresponding parabolic ones. We will show that the solution of the parabolic problem goes to the solution of the elliptic one as in [8] and the references therein.

## References

1. Adams, R.A.: Sobolev Spaces. Academic Press, San Diego (1975)
2. Barbu, V.: Optimal Control of Variational Inequalities. Pitman, London (1984)
3. Bergounioux, M., Lenhart, S.: Optimal control of the obstacle in semilinear variational inequalities. *Positivity* **8**, 229–242 (2004)
4. Bosarge, W.E. Jr.: Iterative continuation and the solution of nonlinear two-point boundary value problems. *Numer. Math.* **17**, 268–283 (1971)
5. Brézis, H., Kinderlehrer, D.: The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities. *Indiana Univ. Math. J.* **23**, 831–844 (1974)
6. Ghanem, R.: Optimal control of unilateral obstacle problem with a source term. *Positivity* **13**, 321–338 (2009)
7. Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd edn. Springer, Berlin (1983)
8. Huy, C.U., McKenna, P.J., Walter, W.: Finite difference approximations to the Dirichlet problem for elliptic systems. *Numer. Math.* **49**, 227–237 (1986)
9. Ito, K., Kunisch, K.: Optimal control of obstacle problems by  $H^1$ -obstacles. *Appl. Math. Optim.* **56**, 1–17 (2007)
10. Lions, J.L., Magenes, E.: Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications. Dunod, Paris (1968)
11. Lions, J.L., Stampacchia, G.: Variational inequalities. *Commun. Pure Appl. Math.* **20**, 493–519 (1967)
12. Mignot, F.: Contrôle dans les inéquations variationelles elliptiques. *J. Funct. Anal.* **22**, 130–185 (1976)
13. Mignot, F., Puel, J.P.: Optimal control in some variational inequalities. *SIAM J. Control Optim.* **22**, 466–476 (1984)
14. Rodrigues, J.F.: Obstacle Problems in Mathematical Physics. Elsevier, Amsterdam (1987)

# Bibliographie

- [1] ADAMS, R.A., HRYNKIV, V. AND LENHART, S. : *Optimal control of a biharmonic obstacle problem*. Around The Research of Vladimir Mazya. III : 1-24, Int. Math. Ser. (N. Y.), (13), Springer, New York, (2010).
- [2] ADAMS, R.A. : *Sobolev spaces*. Academic Press, New-York, San Francisco, London, 1975.
- [3] ADAMS, R.A., LENHART, S. AND YONG, J. : *Optimal control of the obstacle for an elliptic variational inequality*. Applied Mathematics and Optimization, (38) : 121-140, (1998).
- [4] AUBIN, J.P. AND CELLINA, A. : *Differential inclusions*. Springer Verlag, 1984.
- [5] BARBU, V. : *Analysis and control of non linear infinite dimensional systems*. Mathematics in Science and Engineering, 190, Academic Press, San Diego, 1993.
- [6] BARBU, V. : *Necessary conditions for nonconvex distributed control problems governed by elliptic variational inequalities*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, (80) : 566-597 (1981).
- [7] BARBU, V. NEITTAANMÄKI, P. AND NIEMISTÖ, A. : *Approximating optimal control problems governed by variational inequalities*. Numerical Functional Analysis and Optimization, (15) : 489-502, (1994).
- [8] BARBU, V. : *Analysis and control of non linear infinite dimensional systems*. Mathematics in Science and Engineering, 190, Academic Press, San Diego, 1993.
- [9] BARBU, V. : *Optimal control of variational inequalities*. Pitman, London, 1984.

- 
- [10] BARLES, G. : *Solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi*. Collection Mathématiques et Applications, 17, Springer-verlag, 1994.
- [11] BERGOUNIOUX, M. AND LENHART, S. : *Optimal control of the obstacle in semilinear variational inequalities*. Positivity, (8) : 229-242, (2004).
- [12] BERGOUNIOUX, M. AND LENHART, S. : *Optimal control of the bilateral obstacle problems*. SIAM Journal on Control and Optimization, 43, 249-255, (2004).
- [13] BERGOUNIOUX, M. AND KUNISCH, K. : *Lagrange multipliers structure for state constrained optimal control*. Systems and Control Letters, (48) : 169-176, (2002).
- [14] BERGOUNIOUX, M. AND ZIDANI, H. : *Pontryagin principle for problems governed by parabolic variational inequalities*. SIAM Journal on Control and Optimization, (37) : 1273-1290, (1999).
- [15] BERGOUNIOUX, M., ITO, K., AND KUNISCH, K. : *Primal-dual strategy for optimal control problems*. SIAM Journal on Control and Optimization, (37) : 1176-1194, (1999).
- [16] BERGOUNIOUX, M. ET MIGNOT, F. : *Contrôle dans les inéquations et multiplicateurs de Lagrange*. Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences, Paris, (329), Série I : 607-612, (1999).
- [17] BERGOUNIOUX, M. : *Use of lagrangian methods for optimal control of obstacle problems*. Journal of Optimization Theory and Applications, (95) : 101-126, (1997).
- [18] BERGOUNIOUX, M. : *Optimal control of an obstacle problem*. Applied Mathematics and Optimization, (36) : 147-172, (1997).
- [19] BERGOUNIOUX, M. AND TIBA, D. : *General optimality conditions for constrained convex control problems*. SIAM Journal On Control And Optimization, (34) : 698-711, (1996).
- [20] BERMUDEZ, A. AND SAGUEZ, C. : *Pointwise control of variational inequality*. In Free Boundary Problems : Theory and Applications, 475-478, Pitman Res, Notes Math, Ser, 186, 1987.
- [21] BERMUDEZ, A. AND SAGUEZ, C. : *Optimal control of variational inequalities*. Control and Cybernetics, (14) : 9-30, (1985).

- [22] BONNANS, F. AND SHAPIRO, A. : *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer, 2000.
- [23] BONNANS, F. AND CASAS, E. : *An extension of pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities* . SIAM Journal on Control Optimization, ( 33 ) : 274-298, (1995).
- [24] BOSARGE, W.E. : *Iterative continuation and the solution of nonlinear two-point boundary value problems*. Numer.Math. 17, 268-283 (1971).
- [25] BREZIS, H. AND KINDERLEHRER, D. : *The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities*. Indiana University Mathematics Journal, (23) : 831–844, (1974).
- [26] CLARKE, F.H. : *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM Classics in Applied Mathematics 5, Phi- ladelphia, 1990.
- [27] EKELAND, I. ET TEMAM, R. : *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [28] FRIEDMAN, A. : *Variational principles and free-boundary problems* . Wiley, New-York, 1982.
- [29] FRANKOWSKA, H. : *The maximum principle for optimal solutions to differential inclusions with end points constraints*. SIAM Journal Control Optimization, (25) : 147-157, (1987).
- [30] GHANEM, R. : *Optimal control of unilateral obstacle problem with a source term*. Positivity, (13),321- 338, (2009)
- [31] GILBARG, D. AND TRUDINGER, N. S. : *Elliptic partial differential equations of second order*. (second edition), Springer- Verlag, Berlin, 1983.
- [32] HARAUX, A. : *How to differentiate the projection on a convex set in Hilbert space. Some applications to variational inequalities*. Journal of Mathematical Society of Japan, (4), (1977).
- [33] HUY, C.U., MCKENNA, P.J., WALTER, W. : *Finite difference approximations to the Dirichlet problem for elliptic systems*. Numer. Math. (49), 227-237 (1986).
- [34] ITO, K. AND KUNISCH, K. : *Optimal control of obstacle problems by  $H^1$ -obstacles*. Applied Mathematics and Optimization, ( 56), (2007), 1-17.

- [35] ITO, K. AND KUNISCH, K. : *Optimal control of elliptic variational inequalities*. Applied Mathematics and Optimization, (3) : 343-364, (2000).
- [36] LIONS, J. L. : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 2002.
- [37] LIONS, J. L. : *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [38] LIONS, J. L. AND STAMPACHIA, G. : *Variational inequality*. Communications on Pure and Applied Mathematics, (20) : 493-519, (1967).
- [39] LIONS, J. L. AND MAGENES, E. : *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. (1), Dunod, Paris, 1968.
- [40] MIGNOT, F. : *Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques*. Journal of Functional Analysis, (22) : 466-476, (1976).
- [41] MIGNOT, F. AND PUEL, J.P. : *Optimal control in some variational inequalities*. SIAM Journal on Control and Optimization, (22) : 466-476, (1984).
- [42] MIGNOT, F. : *Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques*. Journal of Functional Analysis, (22) : 466-476, (1976).
- [43] MORDUKHOVICH, B.S. : *Optimal control of difference, differential and difference-differential inclusions, Research Report*. Wayne State University, 23, 1998.
- [44] RODRIGUES, J. F. : *Obstacle problems in mathematical physics*. (1), Elsevier, New York, 1987.
- [45] RUBIO, J. E. AND WENBIN, L. : *Maximum principles for optimal controls for elliptic variational inequalities of the second kind*. IMA J. Math. Control Inform, (3) : 211-230, (1991).
- [46] TROELTZSCH, F. : *Optimality conditions for parabolic control problems and applications*. TeubnerTexte, 62, Leipzig, 1984.
- [47] YE, Y. AND CHEN, Q. : *Optimal control of the obstacle in a quasilinear elliptic variational inequality*. Journal of Mathematical Analysis and Application, (294) : 258-272, (2004).

- 
- [48] YE, J.J. : *Necessary optimality conditions for control of strongly monotone variational inequalities*. In Control of distributed parameter and stochastic systems, 153-160. Kluwer Academic, (1998).
- [49] ZOWE, J. AND KURCYUSZ, S. : *Regularity and stability for the mathematical programming problem in banach spaces*. Applied Mathematics and Optimization, (5) : 49-62, (1979).