وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
BADJI MOKHTAR UNIVERSITY ANNABA

جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Année : 2014/2015

Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option

Analyse Fonctionnelle

Titre

Etude de l'existence de solutions et de l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour des problèmes paraboliques non linéaires avec obstacle

Par

Bellal Nabila

DIRECTEUR DE THESE :	**Mokrane Abdelhafid**	**Prof.**	**E.N.S Kouba, Alger**
CO-DIRECTRICE DE THESE:	**Amiar Rachida**	**MCA.**	**U.B.M. ANNABA**

Devant le jury

PRESIDENT :	**Rebbani Faouzia**	**Prof.**	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEURS :	**Moussaoui Mohand**	**Prof.**	**E.N.S Kouba, Alger**
	Aibeche Aissa	**Prof.**	**U. de SETIF**
	Djellit Ali	**Prof.**	**U.B.M. ANNABA**

Résumé

L'objectif de cette thèse est de prouver l'existence d'au moins une solution pour un problème non linéaire parabolique unilatéral avec obstacle $\psi \neq 0$ de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(u) + g\big(u,\, Du\big) - f = \mu \ \text{ dans } \ Q = \Omega \times]0, T[\\ u \geq \psi \,,\ \mu \geq 0 \ \ \mu\big(u - \psi\big) = 0 \ \text{ dans } \ Q \\ u\big(x,\, t\big) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ u\big(x,\, 0\big) = u_0(x) \ \text{ dans } \ \Omega \end{cases}$$

A est un opérateur de type Leray-Lions qui opère de $L^p\Big(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\Big)$ dans son dual, f est donnée dans $L^{p'}(Q)$, $g(x,t,u,Du)$ est un terme non linéaire de la forme $u\,|Du|^q$ avec $q < p-1$.

Ce travail est une généralisation des résultats obtenus par A. MOKRANE [M] pour $\psi = 0$. Il constitue l'essentiel du chapitre 3. Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à des rappels respectivement, sur certaines notions et résultats utiles pour notre travail et sur la méthode de pénalisation.

Enfin, le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour le cas particulier d'un problème parabolique linéaire avec obstacle, quelques difficultés sont soulignées aussi dans ce chapitre. Nous terminons cette thèse par des perspectives, une conclusion et une bibliographie.

Abstract

The main goal of this thesis is to prove the existence of at least one solution to a nonlinear parabolic unilateral problem with obstacle $\psi \neq 0$ in the form:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(u) + g\big(u,\, Du\big) - f = \mu \ \text{ in } \ Q = \Omega \times]0, T[\\ u \geq \psi \ , \ \mu \geq 0 \ \ \mu\big(u - \psi\big) = 0 \ \text{ in } \ Q \\ u\big(x,\, t\big) \ = \ 0 \text{ on } \Sigma \\ u\big(x,\, 0\big) \ = \ u_0(x) \ \text{ in } \Omega \end{cases}$$

A is a Leray-Lions type operator acting from $L^p\Big(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\Big)$ into its dual, $f \in L^{p'}(Q)$, g is a nonlinear lower order term having growth of order q $(q < p - 1)$ with respect to $|Du|$.

This result can be seen as a generalization of the result of A. MOKRANE [M] obtained in the case where the obstacle is zero. This is the main subject of chapter 3. In Chapter 1and

2, respectively, we recall some notions and result about the penalization method.

Finally, chapter 4 is devoted to the study of the Lewy-Stampacchia's inequality for the particular case of a linear parabolic problem with obstacle, some difficulties are also highlighted in this chapter. We end this thesis by prospects, conclusion and bibliography.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة الوجود و متباينة ليقي - ستامباكيا للمتراجحة التغيرية غير الخطية المكافئة ذات حاجز غير معدوم $\psi \neq 0$ ، التالية :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) + g\left(u,\, Du\right) - f = \mu \text{ في } Q = \Omega \times]0, T[\\ u \geq \psi \,,\, \mu \geq 0 \quad \mu\left(u - \psi\right) = 0 \text{ في } Q \\ u\left(x,\, t\right) = 0 \text{ على } \Sigma \\ u\left(x,\, 0\right) = u_0(x) \text{ في } \Omega \end{cases}$$

حيث A مؤثر للوري - ليونس من الفضاء $L^p\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ في $L^{p'}\left(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)\right)$ ، و $f \in L^{p'}(Q)$ و g حد غير خطي يتزايد مثل $u|Du|^q$ ، حيث $q < p - 1$.

نثبت وجود حل للمتراجحة التغيرية أعلاه ، و بذلك نكون قد عممنا النتائج التي تحصل عليها [M] A. MOKRANE ، في حالة الحاجز , $\psi = 0$ ذلك هو محتوى الفصل الثالث .

أما الفصلان الأول و الثاني ، يذكران على التوالي بعض المفاهيم و النتائج و طريقة الإعاقة.

و أخيرا نقدم في الفصل الرابع متباينة ليفي - ستامباكيا , $\mu \leq f^-$ حيث نقدم برهانا لهذه المتباينة

في حالة متراجحة خطية مكافئة ، و نقدم كذلك بعض المحاولات و الصعوبات المصادفة و كذلك بعض التوقعات في الحالة العامة للمتراجحات المكافئة غير الخطية .

ننهي هذه الأطروحة ببعض الإقتراحات للعمل المستقبلي، بخاتمة و مراجع .

Table des Matières

Introduction générale

L'objet de cette thèse est de montrer qu'il existe au moins une solution pour le problème non linéaire parabolique unilatéral suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) + g(u, Du) - f = \mu \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[\tag{1.1}$$

$$u \geq \psi, \ \ \mu \geq 0 \text{ et } \mu(u - \psi) = 0 \text{ dans } Q \tag{1.2}$$

$$u(x, t) = 0 \ \ \text{sur } \Sigma \tag{1.3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \ \ \text{dans } \Omega. \tag{1.4}$$

A est un opérateur de type Leray-Lions qui opère de $L^p\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ dans son dual. f est donnée dans $L^{p'}(Q)$ et $g(x, t, u, Du)$ est un terme non linéaire dont le prototype est de la forme $u|Du|^q$ avec $q < p - 1$.

Nous supposerons tout au long de notre travail que : $p > 2$.

Dans cette thèse nous montrons que pour un obstacle ψ qui est non nul et dépendant du temps, la solution cherchée, satisfait l'équation après modification par une fonction μ positive, et qui vérifie l'égalité complémentaire. Le terme unilatéral provient du fait que u est une solution forte au sens de l'inéquation variationnelle parabolique (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4).

Dans les cinquante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil remarquable dans l'étude mathématique de nombreux problèmes non linéaires issus de la physique et la mécanique. La complexité des conditions aux limites et la diversité des équations constitutives conduisent à des formulations variationnelles de type inéquations.

Les bases de la théorie des inéquations variationnelles ont été introduites à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par SIGNORINI [S] et FICHERA [F]. Signalons par ailleurs les travaux de TING [T] concernant les problèmes d'élastoplasticité. Les fondements mathématiques de la théorie ont été élargis par les contributions précieuses de STAMPACCHIA [St2], LIONS et STAMPACCHIA [LiS] et puis développés par l'école française et italienne: BREZIS [Br2], [Br1], STAMPACCHIA [St4], LIONS [L], MOSCO [Mo2], KINDERLEHRER et STAMPACCHIA [KS]. Concernant l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, pour citer quelques unes, les contributions de MOSCO [Mo1], GLOWINSKI, LIONS ET TRÉMOLIÈRES [GLT] et GLOWINSKI [G].

La modélisation de phénomènes dépendant du temps conduit à considérer des problèmes d'évolution tenant compte d'éventuelles interactions entre objets et évènements. La préoccupation première du mathématicien confronté à ce genre de problèmes est de lui donner un sens dans des espaces fonctionnels appropriés et d'y démontrer l'existence et l'unicité d'une solution.

La démonstration présentée dans cette thèse utilise la méthode classique de pénalisation et un nouveau théorème de compacité (voir [BM2]) qui assure que les gradients des solutions des problèmes paraboliques non linéaires associés à des opérateurs de type Leray-Lions sont compacts dans $L^q(Q)$ $\forall q < p$, lorsque les données sont bornées dans $L^1(Q)$.

Un résultat similaire a été établi dans le cas où g est nulle (voir par exemple [Do]). D'autre part le cas où dans l'équation associée au problème unilatéral (1.1), (1.3) et (1.4) la mesure complémentaire est absentée (i.e. le cas où $\mu = 0$ dans (1.1), les contraintes (1.2) étant omises) a été traité dans [BM1].

Signalons que d'après [M] le problème $(1.1) - (1.4)$ admet une solution pour $\psi = 0$. Notre travail consiste à généraliser les résultats obtenus dans [M] en employant d'autres types de techniques de résolution. Notons que plusieurs auteurs (voir par exemple [AAR], [ABBM], [KKS] ont traité ce genre de problème mais avec divers types d'hypothèses sur l'opérateur A, la fonction g ainsi que les données.

Cependant les travaux précédents n'ont pas étudié « l'égalité complémentaire » $\mu(u - \psi) = 0$ ainsi que l'existence d'une fonction positive μ comme c'est le cas pour notre problème.

Dans le chapitre 1 de cette thèse on rappelle les définitions de certains espaces fonctionnels et quelques résultats utiles pour notre travail. Au chapitre 2 nous rappellerons la méthode de pénalisation ainsi que les outils nécessaires pour une bonne compréhension de cette approche.

La contribution principale de cette thèse est présentée au chapitre 3 où nous établirons un théorème d'existence pour notre problème.

Nous étudions au chapitre 4 l'inégalité de Lewy-Stampacchia dans le cas particulier d'un problème linéaire parabolique avec obstacle.
Nous y formulerons également des remarques et des perspectives pour un travail futur.

Cette thèse se termine par une conclusion dans laquelle nous récapitulons les résultats de notre travail.

CHAPITRE 1

RAPPELS

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de cette thèse. Nous commençons en premier lieu, par introduire quelques notations générales. Ensuite nous rappelons certains espaces fonctionnels et quelques résultats qui nous seront utiles par la suite.

1 Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^N$

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω

$x = (x_1, \ldots, x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$

$dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω

Q : $(0,T) \times \Omega, t \in (0,T), t$ variable de temps, $T > 0$

$\sum$: $(0,T) \times \partial\Omega$

Du : gradient de u

f^+, f^- : $\max(f,0)$, $\max(-f,0)$

$D(\Omega), D(Q), \ldots$: espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans $\Omega, Q, \ldots$

$C^k(\Omega), C^k(Q)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω, Q

$C(\Omega), C(Q)$: espace des fonctions continues dans Ω, Q

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p- ième intégrables sur Ω pour la mesure de Lebesgue

muni de la norme $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), Du \in (L^p(\Omega))^N\}; \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$

$W_0^{1,p}(\Omega)$: adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

$W^{-1,p'}(\Omega)$: espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

$\langle , \rangle$: le produit de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$

Si X un espace de Banach on pose:

$$L^p(0,T;X) = \left\{ f : (0,T) \to X \text{ fortement mesurable}; \int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty \right\}$$

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ f : (0,T) \to X \text{ fortement mesurable}; \ \underset{t \in]0,T[}{\sup ess} \ \|f(t)\|_X < \infty \right\}$$

$C^k\big([0,T];\, X\big)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables de $[0,T] \to X$.

2 Espaces L^p

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme usuelle:

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)| dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

On définit aussi l'espace $L^\infty(\Omega)$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable}, \ \exists c > 0 \text{ , tel que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \right\}$$

Il sera muni de la norme du sup-essentiel

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x \in \Omega}{\text{supess}} \ |u(x)| = \text{Inf}\{c; |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f|_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Remarque 2.1

L'espace L^2 muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg \, dx, f, \ g \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 2.1 (de Vitali)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\Omega)$, $f_n \to f$ p.p sur Ω, si $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ p.p sur Ω, et , si $g_n \to g$ sur $L^1(\Omega)$ fort, alors $f_n \to f$ sur $L^1(\Omega)$ fort.

Remarque 2.2

Si $g_n = g$ indépondamment de n, alors c'est le théorème de Lebesgue. On a le même résultat si on remplace $L^1(\Omega)$ par $L^2(\Omega)$ ou $L^1(\Omega)$ par $L^p(\Omega)$, mais faux pour $p = \infty$.

Définition 2.1

On dit que la suite f^ε est équi-intégrable si

$$\forall \eta, \exists \delta > 0, \text{ tq : } |E| \leq \delta \Rightarrow \int_E |f^\varepsilon| dx \leq \eta.$$

Ici E désigne un sous ensemble mesurable de mesure $|E|$.

Lemme 2.1

Si

$$\begin{cases} f^\varepsilon \to f \text{ p.p sur } \Omega, \text{ quand } \varepsilon \to 0 \\ f^\varepsilon, f \in L^1(\Omega), \\ f^\varepsilon \text{ bornée dans } L^1(\Omega), \\ f^\varepsilon \text{ est équi-intégrable} \end{cases}$$

alors $f^\varepsilon \to f$ dans $L^1(\Omega)$ fort.

La démonstration de ce lemme repose sur celui de Fatou et le théorème d'Egorov.

Lemme 2.2 (de Fatou)

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 telle que pour tout n, $f_n(x) \geqslant 0$ p.p. sur Ω et

$$\sup_n \int f_n < \infty.$$

Pour tout $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$.

Théorème 2.2 (inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f.g \in L^1$ et on a

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \tag{2.1}$$

Remarque 2.3

On utilise souvent aussi (2.1) sous la forme:

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^{p'} \; \forall a \geqslant 0, \forall b \geqslant 0 \text{ avec } C_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{p-1}} \; . \tag{2.2}$$

C'est la forme généralisée de l'inégalité de Young.

3 Espaces de Sobolev

Nous reprenons dans cette section certains énoncés de H. BREZIS [Br3] et J.L. LIONS [L] sur le sujet. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter l'ouvrage de R.A. ADAMS [A].

3.1 Dérivée faible

Définition 3.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $1 \leq i \leq N$, une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$:

s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u(x)\, \partial_i\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f_i(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Cela revient à dire que f_i est la dérivée partielle par rapport à la i-ème variable, au sens des distributions de $u \in L^1_{loc}$. On posera

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

3.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^N$, et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $w^{1,p}(\Omega)$ est défini par:

$w^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \partial_i u \in L^p(\Omega),\ 1 \leq i \leq N\}$ où ∂_i est la i-ème dérivée faible de la fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

On posera également:

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Théorème 3.1 (de Fréchet-Kolmogorov)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\omega \subset \Omega$.

Soit F un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta < \ dist\,(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \text{ tel que} \\ \|f(.+h) - f(.)\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon\ \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |h| < \delta \text{ et } \forall f \in F. \end{cases}$$

Alors $F_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Théorème 3.2 (de Rellich-Kondrachov)

On suppose Ω borné de classe C^1. Si $p < N$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [1,p^*[, \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

avec injection compacte. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec injection compacte pour tout p.

Voici une inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev:

Inégalité de Poincaré

Soient $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on ait

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier, $\|Du\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à celle de $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est définie par:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 3.2

Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si et seulement si $1 < p < \infty$.
$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Remarque 3.1

$C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Autrement dit on peut utiliser indifféremment $C_c^\infty(\Omega)$ au lieu de $C_c^1(\Omega)$ dans la définition de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (certains auteurs utilisent la notation $D(\Omega)$ ou bien $C_0^\infty(\Omega)$ au lieu de $C_c^\infty(\Omega)$).

Les fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ sont « en gros » les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ qui « s'annulent » sur $\partial\,\Omega$.

Définition 3.3

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual, mais en générale on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual. On a le schéma

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

avec injections continues et denses.

Si Ω est borné on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \text{ si } \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty$$

avec injections continues et denses.

Si Ω n'est pas borné on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \text{ si } \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2.$$

On peut caractériser les éléments de $W^{-1,p'}$ par la

Proposition 3.1

Soit $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors, il existe $f_0, f_1, \ldots f_N \in L^{p'}(\Omega)$ telle que

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f_0 v + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i \frac{dv}{dx_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

et

$$\|F\| = \max_{0 \leq i \leq N} \|f_i\|_{L^{p'}}.$$

Si Ω est borné, on peut prendre $f_0 = 0$.

3.3 Les espaces $L^p(0,T;X)$

On introduit maintenant des espaces de fonctions en x et t. Si $x,\ t \to \varphi(x,t)$ est une fonction définie dans Q, on posera

$$\varphi(t) : «x \to \varphi(x,t)»,$$

et φ sera alors considérée comme fonction (ou distribution) en t à valeurs dans un espace de fonctions (ou distributions) en x.

De façon générale, X étant un espace de Banach, on désigne par $L^p(0,T;X)$ l'espace des (classes de) fonctions $t \to f(t)$ de $]0,T[\to X$ qui sont fortement mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty ; \tag{3.1}$$

Si $p = \infty$, on remplace la norme (3.1) par

$$\|f\|_{L^\infty(0,T\,;\,X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \ \|f(t)\|_X;$$

Naturellement, on a pour $1 \leq p < \infty$:

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q), \text{où } Q =]0,T[\times \Omega$$

$$C([0,T];X) = \left\{u : [0,T] \to X \text{ continue}\right\}.$$

Voici comment on définit, un peu plus généralement, $\partial f/\partial t$ pour $f \in L^p(0,T;X)$.

On désigne par $D'(0,T;X)$ l'espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans X, défini par (cf. L. SCHWARTZ [Sc]):

$$D'(0,T;X) = L(D(]0,T[);X)$$

De façon générale $L(E;F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Si $f \in D'(0,T;X)$, sa dérivée au sens des distributions est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi) = -f\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad \forall \varphi \in D(]0,T[). \tag{3.2}$$

Si $f \in L^p(0,T;X)$, il lui correspond une distribution encore notée f sur $]0,T[$ à valeurs dans X, par:

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in D(]0,T[),$$

qui est une intégrale à valeurs dans X. On peut encore définir $\partial f/\partial t$ comme élément de $D'(0,T;X)$

Nous rappelons également ci-dessous quelques résultats que nous utiliserons par la suite

Proposition 3.2

Supposons $X \subset B \subset Y$ tel que l'injection de X dans B est compact $\big(X, B$ et Y sont des espaces de Banach$\big)$

Soit F un borné de $L^p(0,T;X)$ avec $1 \leq p < +\infty$, tel que $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t} : f \in F\right\}$ est borné dans $L^1(0,T;Y)$.

Alors F est relativement compact dans $L^p(0,T;B)$

Soit F un borné de $L^\infty(0,T;X)$ tel que $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ est borné dans $L^r(0,T;Y)$ (avec $r > 1$).

Alors F est relativement compact dans $C(0,T;B)$.

Proposition 3.3

Soit B un espace de Banach. Un sous-ensemble F de $C(0,T;B)$ est relativement compact si et seulement si :

$$F(t) = \{f(t) : f \in F\} \text{ est relativement compact dans } B, \forall\ 0 < t < T, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} F \text{ est uniformément equicontinu c'est à dire :} \\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \eta \text{ tel que:} \\ \|f(t_2) - f(t_1)\|_B \leq \varepsilon, \forall f \in F, \\ \forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \text{ tel que: } |t_2 - t_1| \leq \eta \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour une preuve de ces deux propositions on peut consulter [**Si**] .

Théorème 3.3 [BM2]

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $T > 0$ fixé

On considère l'équation non linéaire

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}\ a(x,t,u_n,Du_n) = f_n + g_n \text{ dans } D'(Q) \tag{3.5}$$

Où : $A(u) = -\operatorname{div}\ a(x,t,u,Du)$

est un opérateur de Leray-Lions défini dans $L^p(0,T;W^{1,p})(\Omega)$ par la function de Carathéodory $a : \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui satisfait

$$\begin{cases} |a(x,t,s,\xi)| \leq c(x,t) + K_1|s|^{p-1} + K_2|\xi|^{p-1} \\ \text{tel que: } c \in L^{p'}(Q),\ c \geqslant 0, \text{ et } K_1,\ K_2 \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{3.6}$$

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } L^p\left(0,T;W^{1,p}(\Omega)\right) \text{ faible} \tag{3.7}$$

$$f_n \to f \text{ dans } L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right) \text{ fort} \tag{3.8}$$

$$[a(x,t,s,\xi)-a(x,t,s,\xi^*)][\xi-\xi^*] \geqslant \begin{cases} \alpha|\xi-\xi^*|^p & \text{si } p>2 \\ \alpha\dfrac{\left|\xi-\xi^*\right|^2}{\left(d(x,t)+|\xi|+|\xi^*|\right)^{2-p}} & \text{si } p\leq 2 \\ \text{p.p.}(x,t)\in Q,\ \forall\, s\in\mathbb{R}, \forall\, \xi,\ \xi^*\in\mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.9}$$

pour un certain $\alpha > 0$, avec $d \in L^p(Q),\ d \geqslant 0$.

$$g_n \text{ mesure de Radon bornée} \tag{3.10}$$

Alors

$$Du_n \to Du \text{ dans } (L^q(Q))^N \text{ fort} \quad \forall q < p. \tag{3.11}$$

Proposition 3.4

Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et si $t \to G(t)$ est une fonction uniformément lipschitzienne (c.à.d.:$|G(t') - G(t'')| \leq K|t' - t''|$)

définie pour $t \in R$, telle que $G(0) = 0$, alors $G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\frac{\partial G(u)}{\partial x_i} = G'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

la démonstration de cette proposition se trouve, par exemple dans [St1].

Une conséquence de cette proposition est que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $|u|$, $u^+ = \max(0,u)$ et $u^- = \max(0,-u)$sont dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

CHAPITRE 2

MÉTHODE DE PÉNALISATION

La pénalisation est un concept simple qui permet de transformer un problème d'optimisation avec contraintes en un problème ou en une suite de problèmes d'optimisation sans contrainte. C'est un concept qui a une utilité à la fois théorique et numérique.

En analyse, l'approche par pénalisation est parfois utilisée pour étudier un problème d'optimisation dont les contraintes sont difficiles à prendre en compte, alors que le problème pénalisé a des propriétés mieux comprises ou plus simples à mettre en évidence. Si on a de la chance ou si la pénalisation est bien choisie, des passages à la limite parfois délicates permettent d'obtenir des propriétés du problème originale (l'existence de solution par exemple).

Cette méthode intervient dans la résolution des inéquations variationnelles notamment celles qui sont étudiées aux chapitres trois et quatre. A cet effet nous avons consacré ce chapitre à rappeler la méthode classique de pénalisation ainsi que les outils nécessaires pour une bonne présentation de cette approche. Nous nous sommes basés sur l'ouvrage de J.L. LIONS [L] pour la rédaction .

1 Opérateurs monotones

Soit V un espace de Banach réflexif séparable, V' sont dual.

Définition 1.1

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est

- monotone si

$$\forall u, v \in V, \quad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

- borné de V dans V' si l'image d'un borné est un borné.

- Coercif si

$$\frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|_V} \to \infty \; si \; \|v\|_V \to \infty. \tag{1.2}$$

- hémicontinu si

$$\forall u, v \in V, \quad , t \in \mathbb{R}, \; t \mapsto \langle A(u + tv) - A(v), v \rangle \quad \text{est continu.} \tag{1.3}$$

Théorème 1.1

Soit V un espace de Banach réflexif, A un opérateur monotone, borné, hémicontinu et coercif. Alors A est surjectif: c'est-à-dire quel que soit $f \in V'$ il existe $u \in V$ tel que $A(u) = f$.

Exemple 1.1

$$V = W_0^{1,p}(\Omega), \quad V' = W^{-1,p'}(\Omega) \quad 1 < p < +\infty \text{ et } A(u) = -div(|Du|^{p-2}Du)$$

Conséquence

$\forall f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $-div(|Du|^{p-2}Du) = f$

Remarque 1.1

pour $p = 2$ on a résolu $-\triangle u = f$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Démonstration du théorème 1.1

On utilise la méthode d'approximation de Galerkin

Première étape: **Problème approché**

Comme V est un espace séparable, il existe une base de Galerkin de V; $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots$ dénombrable telle que les combinaisons linéaires finies soient denses et $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_m\}$ soient linéairement indépandantes.

Proposition 1.1

Il existe une solution approchée $u_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j$, $\alpha_{jm} \in R$, telle que:

$$\langle A(u_m), w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Deuxième étape: **Estimations à priori et passage à la limite**

On multiplie par α_{jm} et en sommant de $j = 1$ à $j = m$, on obtient:

$$\langle A(u_m), u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|_V$$

d'où de la coercivité

$$\|u_m\|_V \leq C.$$

En extrayant une sous suite, on a $u_m \rightharpoonup u$ dans V faible, comme A est borné, alors $A(u_m)$ est borné dans V', en extrayant encore une sous suite on aura $A(u_m) \rightharpoonup \psi$ dans V' faible et par suite

$$\langle A(u_m), w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle, \quad \forall j \text{ fixé}, \quad m > j.$$

d'où: $\langle \psi, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle$. Comme les combinaisons linéaires des w_j sont dense dans V cela implique que $\psi = f$.

A est monotone, donc, $\forall v \in V$, on a

$$\begin{cases} 0 \leq \langle A(u_m) - A(v), u_m - v \rangle \\ = \langle A(u_m), u_m \rangle - \langle A(v), u_m \rangle - \langle A(u_m), v \rangle + \langle A(v), v \rangle \\ = \langle f, u_m \rangle - \langle A(v), u_m \rangle - \langle A(u_m), v \rangle + \langle A(v), v \rangle \end{cases}$$

à la limite on obtient

$$\langle f, u \rangle - \langle A(v), u \rangle - \langle \psi, v \rangle + \langle A(v), v \rangle \geq 0$$

et comme $f = \psi$ on obtient:

$$\langle \psi - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

On utilise une idée qui s'appelle (Astuce de Minty):

posons $v = u - tw$, pour $t \in \mathbb{R}$, $w \in V$, $t > 0$, on a

$$\langle \psi - A(tw), tw \rangle \geq 0.$$

on divise par t pour avoir

$$\langle \psi - A(u - tw), w \rangle \geq 0.$$

En utilisant le faite que A est hémicontinu, et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\langle \psi - A(u), w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in V$$

donc

$$\langle \psi - A(u), w \rangle = 0,$$

ce qui donne $\psi = A(u)$, i.e. il existe $u \in V$, tel que $A(u) = f$.

Troisième étape: **Démonstration de la proposition 1.1**

On utilise la variante du théorème de Brouwer, $\mathbb{R}^m$ de dimension finie; $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, tel que $\alpha \mapsto P(\alpha)$, (il suffit de savoir que P est définie sur $|\alpha| \leq \rho_0$), continue, et tel que $P(\alpha) \cdot \alpha \geq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^m, |\alpha| = \rho_0$. Alors il existe α, $|\alpha| \leq \rho_0$ tel que: $P(\alpha) = 0$.

Ici $\alpha = \{\alpha_{jm} / \quad j = 1, \ldots. m\}$, $P(\alpha)/_j = \langle A(u_m) - f, w_j \rangle, (u_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j)$.

pour démontrer ça on aura besoin du lemme suivant:

Lemme 1.1

Si A est monotone borné hémicontinu, alors A est continu de V fort dans V' faible.

Démonstration du Lemme 1.1

Soit $u_n \to u$ dans V fort, on veut démontrer que $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ dans V' faible. Comme A est borné on peut extraire une sous suite telle que $A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi$ dans V' faible, si on démontre maintenant que $\xi = A(u)$ c'est fini.

En effet A monotone entraine que pour tout $v \in V$, on a:

$$\langle A(u_{n'}) - A(v), u_{n'} - v \rangle = \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v \rangle - \langle A(v), u_{n'} - v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V,$$

c'est-à-dire que

$$\langle A(v), u_{n'} - v \rangle \to \langle A(v), u - v \rangle$$

et comme $A(u_{n'}) \to \xi$ dans V' faible et $u_{n'} \to u$ dans V fort, leur crochet de dualité converge:

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - v \rangle \to \langle \xi, u - v \rangle.$$

Par conséquent, on a:

$$\forall v \in V, \quad 0 \leq \langle \xi - A(v), u - v \rangle. \tag{1.4}$$

En utilisant un procédé caractéristique des opérateurs monotone et appelé "Astuce de Minty" on montre que (1.4) détermine ξ. Soit $w \in V$ quelconque et $t \in R_+^\star$. Appliquant à (1.4), $v = u + tw, \quad u - v = -tw$ et divisant l'inégalité par $t > 0$ on obtient:

$$\langle \xi - A(u + tw), w \rangle \leq 0.$$

Faisons tendre t vers 0 , comme A est hémicontinu, il vient:

$$\forall w \in V, \quad \langle \xi - A(u), w \rangle \leq 0.$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $-w$, donc en fait

$$\forall w \in V, \quad \langle \xi - A(u), w \rangle = 0,$$

soit

$$\xi = A(u).$$

On conclut par unicité de la limite faible des sous suite extraite de $A(u_n)$ et faiblement convergente.

2 Opérateurs pseudo-monotones

Définition 2.1

On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est:

- de type M si on a pour toute suite u_ε telle que:

$$\left.\begin{array}{c} u_\varepsilon \rightharpoonup u, \text{ faible dans } V \\ A(u_\varepsilon) \rightharpoonup \psi \text{ faible dans } V' \\ \limsup \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle \leq \langle \psi, u \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \psi = A(u).$$

- pseudomonotone au sens 1 si on a pour toute suite u_ε telle que:

$$\left.\begin{array}{c} u_\varepsilon \rightharpoonup u, \text{ faible dans } V \\ A(u_\varepsilon) \rightharpoonup \psi \text{ faible dans } V' \\ \limsup \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle \leq \langle \psi, u \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \psi = A(u) \;\; et \;\; \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle \to \langle A(u), u \rangle.$$

Théorème 2.1

1- A est pseudomonotone $\Rightarrow A$ de type M.

2- A monotone, hémicontinu $\Rightarrow A$ pseudomonotone.

Théorème 2.2

A de type M, borné coercif, alors $\forall f \in V'$, il existe $u \in V$ tel que $A(u) = f$.

Remarque 2.1

Pour résoudre les équations la bonne notion c'est: A de type M.

Pour résoudre les inéquations la bonne notion c'est: A est pseudomonotone.

Démonstration du Théorème 2.2

On refait la démonstration par la méthode de Galerkin, et on prouve l'existence d'au moins d'une solution u telle que:$A(u) = f$.

Autre définition de la pseudomonotonie

On dit que $A : V \to V'$ est pseudomonotone au sens 2 si pour toute suite u_ε on a :

$$\left.\begin{array}{r} u_\varepsilon \rightharpoonup u, \text{ faible dans } V \\ \\ \limsup \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle \leq \langle \psi, u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \forall v \in V, \ \liminf \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle..$$

Remarque 2.2

On peut donner cette définition (et aussi la précédente) pour des opérateurs non définis sur V entier.

$$A : K \subset V \to V'.$$

Proposition 2.1

Si $A : V \to V'$ est borné, alors les deux définitions de A pseudomonotone sont équivalentes.

3 Inéquations variationnelles (I.V)

Soit V un espace de Banach réflexif séparable, K un convexe fermé non vide de V et soit $A : K \to V'$ un opérateur pseudomonotone, borné et $f \in V'$. Sous ces hypothèses on a les deux résultats d'existence suivants:

Théorème 3.1

Si K est borné, alors il existe au moins u, $u \in K$ tel que

$$\langle A(u) - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Théorème 3.2

Si K n'est plus nécessairement borné, mais A est supposé coercif au sens suivant:

$$\exists v_0 \in V \text{ telque } \frac{\langle A(v), v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} \to +\infty, \text{ si } \|v\|_V \to +\infty.$$

Alors il existe au moins une solution u de l'I.V :

$$u \in K, \quad \langle A(u) - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Démonstration du Théorème 3.2

On suppose que le Théorème 3.1 est démontré et on approxime le convexe K non borné par un convexe K_R (si R est assez grand), fermé non vide , défini par:

$$K_R = \{v \in K / \|v\|_V \leq R\}$$

d'après le Théorème 3.1, il existe $u_R \in K_R$ solution de l'I.V:

$$\langle A(u_R) - f, v - u_R \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K_R,$$

R assez grand pour que $v_0 \in K_R$ (v_0 de la coercivité), $R \geq \|v_0\|$

$$\langle A(u_R) - f, v - u_R \rangle \leq \|f\|(\|v_0\| + \|u_R\|), \quad \|u_R\| \leq C_0, \quad \forall R.$$

Donc une solution u_R pour $R > C_0$ fournit bien une solution du Théorème 3.2.

Remarque importante

Dans les inéquations variationnelles il y a toujours deux choses à vérifier

1- La fonction appartient au convexe K_R.

2- L'inéquation est vérifiée pour toutes les fonctions tests de K_R.

En effet,

1- soit $v \in K$ fixé, $w_\theta = \theta v + (1-\theta)u_{R_0}$, $0 < \theta < 1$.

Montrons que $w_\theta \in K_{R_0}$, on a

$$\|w_\theta\|_V \leq \theta\|v\| + (1-\theta)\|u_{R_0}\|,$$

comme θ est assez petit et $\|u_R\| \leq R_0$, alors $\|w_\theta\|_V \leq R_0$, donc $w_\theta \in K_{R_0}$.

2- Montrons que l'inéquation est vérifiée pour toutes les fonctions tests du convexe, $\langle A(u_{R_0}) - f, v - u_{R_0}\rangle \geq 0$, soit $w_\theta - u_{R_0} = \theta v - \theta u_{R_0} = \theta(v - u_{R_0})$, comme $\theta > 0$, alors l'I.V. suivante est vérifié

$$\begin{cases} u_{R_0} \in K \\ \langle A(u_{R_0}) - f, v - u_{R_0}\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

Reste à montrer le Théorème 3.1

Théorème 3.1

Soit $A : V \to V'$ borné, hémicontinu et monotone et soit K un convexe fermé borné non vide de V. Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telque :} \\ \langle A(u) - f, v - u\rangle \geq 0, \ \forall v \in K, \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Démonstration du Théorème 3.1

Par la méthode de Galerkin:

V séparable alors il existe une famille dénombrable de sous espace de dimension finie V_i tel que:

$$V_i \subset V_{i+1}, \text{ et } \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i \quad \text{est dense dans } V.$$

En fait, on peut prendre pour la construction de ces espaces une famille dénombrable w_i dense dans K. De cette façon, les convexes $K_i = K \cap V_i$ sont tels que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$ est dense dans K.

Lemme 3.1

L'inéquation variationnelle:

Trouver $u_i \in K_i$ tel que: $\forall v \in K_i, \quad \langle A(u_i) - f, v - u_i \rangle \geq 0$ admet au moins une solution.

Démonstration

On munit V_i d'une structure euclidienne, dont on note le produit scalaire par $(.,.)_i$. Par le théorème de représentation de Riesz dans V_i, il existe une application linéaire continue J_i de V' faible dans V_i telle que:

$$\forall g \in V', \quad \forall v \in V_i, \quad \langle g, v \rangle = (J_i g, v)_i.$$

Par définition, K_i est un convexe fermé, borné, non vide de V_i pour tout i. On introduit la projection sur K_i, noté par $Pr_i(v) \in K_i$ et

$$\forall w \in K_i, \quad (v - Pr_i(v), Pr_i(v) - w_i)_i \geq 0. \tag{3.1}$$

C'est une application (non linéaire) en général continue de V_i dans K_i. On définit alors une application:

$$T_i : K_i \to K_i, \text{ par}$$

$$\forall v \in K_i, \quad T_i(v) = Pr_i(v - JA(v) + Jf) \tag{3.2}$$

Comme A est continue de V fort dans V' faible, T_i est continue comme composé d'applications continues. D'après le théorème de Brouwer, T_i admet au moins un point fixe $u_i \in K_i$, donc d'après (3.1) et (3.2) on a pour tout $v \in K_i$,

$$(u_i - JA(u_i) + Jf - T_i(u_i), T_i(u_i) - v)_i \geq 0.$$

Soit, comme u_i est un point fixe,

$$\langle f - A(u_i), u_i - v \rangle = (Jf - JA(u_i), u_i - v)_i \geq 0$$

par définition de J.

Notons que la monotonie ne joue aucun rôle dans l'existence d'une solution de l'inéquation variationnelle en dimension finie (elle n'intervient que pour la continuité de A).

Le lemme 3.1 donne l'existence d'une telle solution si V est de dimension finie, sans autre hypothèses sur A que la continuité.

Comme $K_i \subset K$, qui est borné, u_i est borné dans V. Comme A est borné la suite $A(u_i)$ est borné dans V' donc $u_i \rightharpoonup u$ dans V faible et $A(u_i) \rightharpoonup \xi$ dans V' faible. De plus comme K est convexe fermé, $u \in K$.

Lemme 3.2

$\liminf \langle A(u_i), u_i \rangle \geq \langle \xi, u \rangle$.

Démonstration

En utilisant la monotonie de A ($\langle A(u_i) - A(v), u_i - v \rangle \geq 0$) et la convergence faible de u_i et $A(u_i)$ on obtient $\liminf \langle A(u_i), u_i \rangle - \langle \xi, v \rangle - \langle A(v), u \rangle + \langle A(v), v \rangle \geq 0$, d'ou le résultat en prenant $v = u$.

Lemme 3.3

On a aussi $\limsup \langle A(u_i), u_i \rangle \leq \langle \xi, u \rangle$.

Démonstration

On utilise l' I.V en dimension finie.

Lemme 3.4

On a: $\langle A(u_i), u_i \rangle \to \langle \xi, u \rangle, A(u) = \xi$ et u est solution de l'inéquation variationnelle.

Remarque 3.1

La difficulté essentielle: la suite u_i converge faiblement, mais A est non linéaire. Il n'y a donc aucune raison en général pour que $A(u_i)$ tende en dans un sens quelconque vers $A(u)$. Il est remarquable que l'astuce de Minty et la monotonie permettent à elles seules ce passage à la limite quand u_i est solution de l'I.V sur une suite de convexe dont la réunion est dense dans K.

Théorème 3.3

Si A est strictement monotone alors la solution de l'I.V est unique.

Démonstration

$u_1, u_2 \in K$ deux solutions. Pour tous $v_1, v_2 \in K$, $\langle A(u_1) - f, v_1 - u_1 \rangle \geq 0$ et $\langle A(u_2) - f, v_2 - u_2 \rangle \geq 0$ on prend $v_1 = u_2$ et $v_2 = u_1$, d'ou $\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle \leq 0$. Par conséquent, comme A est monotone, $\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

Cas d'un convexe non borné (il faut la coercivité)

Définition 3.1

On dit que A est coercif s'il existe $v_0 \in K$ ($v_0 = 0$ si $K = V$) tel que :

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{\langle A(v), v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} = +\infty.$$

Théorème 3.4

Soit $A : V \to V'$ borné, hémicontinu, monotone et coercif et soit K un convexe fermé, non vide. Alors pour tout $f \in V'$, l'I.V admet au moins une solution.

Démonstration

(voir J.L. LIONS [L] p 247)

Corollaire 3.1

Soit $A : V \to V'$ borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors A est surjectif.

Démonstration

On prend $K = V$, $\forall f \in V', \exists u \in V, \forall v \in V$ on a $\langle A(u) - f, v - u \rangle \geq 0$.

Prenant $v = u + w$, on en déduit que pour tout $w \in V$, $\langle A(u) - f, w \rangle \geq 0$ d'ou, comme cette inégalité a aussi lieu pour $-w$, $\langle A(u) - f, w \rangle \leq 0$, d'ou: $A(u) = f$ et A est surjectif.

4 Résolution des inéquations variationnelles par la méthode de pénalisation

Soit V un espace de Banach réflexif, sa norme et celle de son dual sont strictement convexes, et soit K un convexe fermé de V.

Définition 4.1

On appelle opérateur de pénalisation (attaché à K) tout opérateur $\beta : V \to V'$ ayant les propriétés suivantes:

$$\beta \quad \text{est monotone borné et hémicontinu de } V \text{ dans } V' \tag{4.1}$$

$$\{v/v \in V, \beta(v) = 0\} = K. \tag{4.2}$$

(Il existe toujours un tel opérateur: voir J.L. LIONS [L] p 370).

Exemple 4.1

1) Soit A une matrice symétrique à coefficients L^∞, coercive et $f \in H^{-1}(\Omega)$,

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq \psi = 0 \quad \text{dans } \Omega\}.$$

On considère l'application

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega ADv\,Dudx - \langle f, v\rangle.$$

Alors on a J atteint son minimum sur K, i.e.

$$\exists u \in K, \quad J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K.$$

Ce u est caractérisé par l'inéquation variationnelle:

$$\begin{cases} u \in K \\ \int_\Omega A\,Du\,D(v-u)dx \geq \langle f, v-u\rangle, \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

On peut choisir

$$\beta(v) = l(v - P_k(v)),$$

(existe grâce à J.L. LIONS [L] p 370), l c'est l'opérateur de dualité de V dans V',

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega\},$$

$l = Id$ et $P_k(v) = v^+$ (i.e. on projette sur $L^2(\Omega)$), donc $\beta(v) = -v^-$, par suite l'équation pénalisé correspondante s'écrit

$$\begin{cases} A(u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- = f \\ \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

2) $V = W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 < p < +\infty, A$ donné par

$$A(v) = -\sum_{i=1}^{n} \Big(|\frac{\partial v}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big),$$

$K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ v \geq 0 \ \ p.p. dans\ \Omega\}$. On projette sur $L^p(\Omega)$ et en choisissant l'opérateur de dualité: $l(v) = |v|^{p-2}v$, on obtient:

$$\beta(v) = l(v - P_k(v)) \ = -|v^-|^{p-2}v^-,$$

et l'équation pénalisée correspondante est alors:

$$\begin{cases} A(u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} |u_\varepsilon^-|^{p-2} u_\varepsilon^- = f \\ \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Applications

Proposition 4.1

Soit $A : V \to V'$, borné, pseudomonotone et coercif au sens suivant:

$$\exists v_0 \in K \text{ telque } \frac{\langle A(v), v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} \to +\infty, \text{ si } \|v\|_V \to +\infty.$$

Alors pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ tel que:

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Démonstration

On démontre cette proposition par la méthode de pénalisation. Soit β un opérateur de pénalisation attaché à K,

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \text{il existe } u_\varepsilon \in K, \text{ telque :} \\ \\ A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f. \end{cases}$$

Pour cela on utilise les remarques suivantes:

i) l'opérateur $v \longrightarrow A(v) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(v)$ est pseudomonotone.

ii)

$$\begin{cases} \langle A(v), v - v_0\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v), v - v_0\rangle \\ \\ = \langle A(v), v - v_0\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v) - \beta(v_0), v - v_0\rangle \geq \langle A(v), v - v_0\rangle, \\ \\ (\text{car } v_0 \in K \Rightarrow \beta(v_0) = 0, \text{ et } \beta \text{ est monotone}) \end{cases}$$

et donc

$$\frac{1}{\|v\|}[\langle A(v), v - v_0\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v), v - v_0\rangle] \longrightarrow +\infty, \text{ si } \|v\| \rightarrow +\infty.$$

d'ou l'existence de u_ε qui vérifie: $A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f$, (qui est dit: problème pénalisé associé à $\langle A(u), v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle$, donc, on peut choisir u_ε solution du problème pénalisé telle que: u_ε demeure dans un borné de V lorsque $\varepsilon \to 0$. Comme A est borné, $A(u_\varepsilon)$ demeure dans un borné de V' et

$$\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon(f - A(u_\varepsilon)) \rightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } V'.$$

On a même $\|\beta(u_\varepsilon)\|_{V'} \leq C_1\varepsilon$. On peut extraire une sous-suite, encore noté u_ε, telle que

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \text{faible dans } V \\ \\ A(u_\varepsilon) \rightharpoonup \xi, \quad \text{faible dans } V'. \end{cases}$$

Vérifions que $\beta(u) = 0$, on déduit de $\langle \beta(u_\varepsilon) - \beta(\varphi), u_\varepsilon - \varphi\rangle \geq 0$, pour tout φ que $-\langle \beta(\varphi), u - \varphi\rangle \geq 0$, pour tout φ. Prenant $\varphi = u - \lambda\psi$, $\lambda > 0$, $\psi \in V$, on en déduit que $\langle \beta(u - \lambda\psi), \psi\rangle \leq 0$. Faisant tendre λ vers 0, on a donc $\langle \beta(u), \psi\rangle \leq 0$, pour tout ψ, d'où $\beta(u) = 0$, donc $u \in K$.

Si l'on prend alors $v \in K$, on déduit de $A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f$, comme $(\beta(v) = 0)$:

$$\langle A(u_\varepsilon) - f, v - u_\varepsilon \rangle \geq \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(v) - \beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon \rangle \geq 0. \tag{4.3}$$

On en déduit

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u \rangle \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \langle f, u_\varepsilon - u \rangle = 0. \tag{4.4}$$

Donc comme u_ε converge faiblement vers u dans V et d'après (4.4) on a $\limsup_{\varepsilon \to 0} \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u \rangle \leq 0$, ce qui implique (car A est pseudomonotone) que:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle.$$

d'où d'après (4.3), $\langle f, v - u \rangle \geq \langle A(u), v - u \rangle$, $\forall v \in K.$, i.e.

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Remarque 4.1

Cette démonstration fournit un procédé d'approximation de u par u_ε. A vrai dire ce procédé n'est constructif que si u_ε et u sont définis de façons unique. Ce qui est le cas si, par exemple A est strictement monotone.

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE LA SOLUTION

1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons montrer qu'il existe au moins une solution du problème non linéaire parabolique unilatéral suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) + g(u, Du) - f = \mu \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[\tag{1.1}$$

$$u \geq \psi,\ \ \mu \geq 0 \text{ et } \mu(u - \psi) = 0 \text{ dans } Q \tag{1.2}$$

$$u(x,t) = 0 \ \text{ sur } \Sigma \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ dans } \Omega. \tag{1.4}$$

Où A est un opérateur du type Leray-Lions qui opère de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ dans son dual, $f \in L^{p'}(Q)$, $g(x,\ t,\ u,\ Du\ )$ est un terme non linéaire de la forme $u|Du|^q$ avec $q < p - 1$.Nous supposons ici $p > 2$.

Nous employons dans cette démonstration la méthode de pénalisation et un nouveau théorème de compacité (voir [BM2]) qui affirme que les gradients des solutions des problèmes paraboliques non linéaires associés à des opérateurs de Leray-Lions sont compacts dans $L^q(Q)$ pour tout $q < p$, lorsque les seconds membres de ces équations sont bornés dans $L^1(Q)$.

Un résonnement analogue a déja été utilisé dans le cas où g est nulle (voir par exemple [Do]). D'autre par l'équation associée au problème unilatérale (1.1), (1.3) et (1.4) (i.e. le cas où $\mu = 0$ dans (1.1), les contraintes (1.2) étant omises) a été traitée dans [BM1].

Signalons que d'après [M] le problème $(1.1) - (1.4)$ admet au moins une solution pour $\psi = 0$. Notre travail consiste à généraliser les résultats obtenus dans [M] en employant d'autres techniques de résolutions.

Notons que Plusieurs auteurs (voir par exemple [AAR], [ABBM], [KKS]) ont traité ce genre de problème mais avec divers types d'hypothèses sur l'opérateur A, la fonction g ainsi que les données.

Cependant les travaux précédents n'ont pas étudié l'égalité complémentaire $\mu\ (u - \psi) = 0$ ainsi que l'existence d'une fonction positive μ qui la vérifie .

Le chapitre est organisé comme suit :

en premier lieu, nous introduisons les hypothèses nécessaires pour montrer le théorème 2.1 qui représente l'originalité de notre travail.

Ensuite nous présentons une démonstration de ce théorème basée sur la méthode de pénalisation qui consiste à construire une famille de solution approchée et de montrer a partir des estimations a priori qu'une suite extraite converge vers une solution de notre problème.

2 Hypothèse et résultat principale

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, ayant une frontière lipchitzienne notée $\partial\Omega$ (i.e. Ω est de frontière "suffisamment régulière"). On désigne par Q le cylindre de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; Q = \Omega \times]0, T[$, ($T$ fini) et par $\sum$ la frontière latérale de Q : $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$.

Soit A L'opérateur non linéaire défini de $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ avec $2 < p < +\infty$ dans son dual $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ (p' désigne l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), A est défini par :

$$A(u) = -div(a(x, t, u, Du))$$

où A est de type Leray-Lions, et $a(x, t, s, \xi)$ est une fonction de Carathéodory vérifiant :

(i) :$\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $(x, t) \to a(x, t, s, \xi)$ est mesurable.

(ii): Pour presque tout (x, t) dans Q, $(s, \xi) \to a(x, t, s, \xi)$ est continue.

On supposera vérifiées les hypothèses ci-dessous

$$\begin{cases} a(x, t, s, \xi) \leq \beta[|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k(x, t)], \; k(x, t) \in L^{p'}(Q), \; \beta > 0 \\ [a(x, t, s, \xi) - a(x, t, s, \eta)][\xi - \eta] > 0, \quad \forall \xi \neq \eta, \\ a(x, t, s, \xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p, \quad \alpha > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

$g(x, t, u, Du)$ est un terme non linéaire qui possède une croissance d'ordre $q, (q < p - 1)$ en $|Du|$, et une autre d'ordre m $(1 < m < p - q)$ et qui vérifie également une condition de signe. Plus précisément nous supposons que g est une fonction de Carathéodory telle que :

$$\begin{cases} \left|g\left(x,\ t,\ s,\ \xi\right)\right| \leq b(|s|)\left(h\left(x,\ t\right) + |\xi|^q\right) \\ \text{où } 1 < q < p-1,\ h \in L^\infty(Q), \text{et } b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \\ \text{une fonction croissante continue non négative qui possède une} \\ \text{croissance d'ordre} \\ m(1 < m < p-q) \text{ en } |u| : \end{cases} \tag{2.2}$$

$$b(|u|) \leq \rho + |u|^m; \rho > 0;\ 1 < m < p-q \tag{2.3}$$

$$g(x,t,s,\xi)s \geq 0\ \ \forall(x,t,s,\xi) \in\ \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Les hypothèses sur $u_0,\ f,\ \psi$ sont :

$$u_0 \in L^2(\Omega) \tag{2.5}$$

$$f \in L^{p'}(Q) \tag{2.6}$$

$$\psi \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \text{ avec } \psi \leq 0 \text{ sur } \Sigma \tag{2.7}$$

$$\psi(0) \leq u_0 \ \ \text{p.p.sur } \Omega \tag{2.8}$$

$$\psi^+ \in L^\infty(Q) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^{p'}(Q) \tag{2.10}$$

Finalement nous donnons la condition supplémentaire suivante sur a et ψ :

$$\begin{cases} div\big(a(x,\ t,\ u,\ D\psi)\big) \in L^{p'}(Q) \text{ pour } u \in L^p(0,\ T,\ W_0^{1,p}(\Omega)) \\ \text{et est borné dans } L^{p'}(Q) \text{ sur tout ensemble borné de} \\ L^p(0,\ T,\ W_0^{1,p}(\Omega)). \end{cases} \tag{2.11}$$

Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 2.1

Sous les hypothèses $(2.1)-(2.11)$ il existe au moins u et μ solution du problème $(1.1)-(1.4)$ vérifiant

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ avec } \lambda_1 \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \text{ et } \lambda_2 \in L^1(Q) \tag{2.13}$$

$$u \geq \psi \text{ dans } Q \tag{2.14}$$

$$\mu \in L^{p'}(Q) \tag{2.15}$$

$$\mu \geq 0 \tag{2.16}$$

$$g\,\big(x,\ t,\ u,\ Du\big) \in L^1(Q) \text{ et } ug\,\big(x,\ t,\ u,\ Du\big) \in L^1(Q) \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) + g\,(x,t,u,Du) - f = \mu \text{ dans } Q \tag{2.18}$$

$$\mu(u-\psi) = 0 \text{ dans } Q. \tag{2.19}$$

$$u \in C\big(0,T;W^{-1,r}(\Omega)\big) \text{ pour } r < \inf\left(p, \frac{p}{p-1}, \frac{N}{N-1}\right). \tag{2.20}$$

$$u\,(x,0) = u_0(x) \text{ sur } \Omega. \tag{2.21}$$

3 Démonstration du theoreme 2.1

3.1 Approximations et pénalisation

Pour tout $\varepsilon > 0$ nous définissons la fonction

$$g_\varepsilon\left(x,\ t,\ s,\ \xi\right) = \frac{g\left(x,\ t,\ s,\ \xi\right)}{1+\varepsilon\left|g\left(x,\ t,\ s,\ \xi\right)\right|} \tag{3.1}$$

Désignons par u_ε la solution du problème approché et pénalisé suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div(a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)) + g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) \\ \\ -\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}|(u_\varepsilon-\psi)^-|^{p-2}(u_\varepsilon-\psi)^- = f, \text{ dans } Q. \\ \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \\ \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \\ u_\varepsilon \in L^p\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Le problème (3.2) admet une solution faible d'après un résultat classique (voir par exemple J.L. LIONS [L], F. DONATI [Do])

u_ε est une solution de (2.1) au sens suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_\varepsilon \in L^p(]0,T[\,, W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0,T], L^2(\Omega)), \\[2ex]
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)) \\[2ex]
\text{et} \quad u_\varepsilon(x,0) = u_0(x), \\[2ex]
\int_0^T \langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v \rangle dt + \int_Q a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) Dv dx dt \\[2ex]
+ \int_Q g_\varepsilon(x,t,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) v dx dt \\[2ex]
- \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_Q ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-2} (u_\varepsilon - \psi)^- v dx dt \\[2ex]
= \int_Q f v \, dx dt, \quad \forall v \in L^p(]0,T[,\ W_0^{1,p}(\Omega))
\end{array}
\right. \tag{3.3}
$$

3.2 Estimation de u_ε dans $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$

Multiplions l'équation (3.2) par la fonction test $(u_\varepsilon - \psi^+)$ et intégrons de 0 à $t < T$.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\int_0^t \left\langle \frac{\partial (u_\varepsilon - \psi^+)}{\partial t}, u_\varepsilon - \psi^+ \right\rangle dt' + \int_0^t \int_\Omega a(x,\ t',\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) D(u_\varepsilon - \psi^+) dx dt' \\[2ex]
+ \int_0^t \int_\Omega g_\varepsilon(x,\ t',\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)(u_\varepsilon - \psi^+) dx dt' \\[2ex]
- \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_0^t \int_\Omega |(u_\varepsilon - \psi)^-|^{p-2} (u_\varepsilon - \psi)^- (u_\varepsilon - \psi^+) dx dt' \\[2ex]
= \int_0^t \int_\Omega (f - \frac{\partial \psi^+}{\partial t})(u_\varepsilon - \psi^+) dx dt'.
\end{array}
\right. \tag{3.4}
$$

Ceci implique

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ \|u_\varepsilon(t)-\psi^+(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\int_\Omega a\Big(x,t',u_\varepsilon\ ,Du_\varepsilon\Big)\ Du_\varepsilon dxdt'\\
&+\int_0^t\int_\Omega u_\varepsilon g_\varepsilon(x,t',u_\varepsilon,Du_\varepsilon)dxdt'+\tfrac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_0^t\|(u_\varepsilon-\psi)^-(t')\|^p_{L^p(\Omega)}dt'\\
&+\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\ \int_0^t\int_\Omega|(u_\varepsilon-\psi)^-|^{p-1}\ \psi^- dxdt'\\
&=\ \frac{1}{2}\ \|(u_0-\psi^+(0))\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\int_\Omega\ \left(f-\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\right)\ u_\varepsilon dx\ dt'\\
&-\int_0^t\int_\Omega\left(f-\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\right)\psi^+dxdt'+\int_0^t\int_\Omega a(x,t',u_\varepsilon,Du_\varepsilon)D\psi^+dxdt'\\
&+\int_0^t\int_\Omega\psi^+g_\varepsilon(x,t',u_\varepsilon,Du_\varepsilon)dxdt'
\end{aligned}
\right.
\tag{3.5}
$$

D'après les conditions $(2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.9)$, nous pouvons avoir les estimations suivantes en utilisant les inégalités de Hölder et de Poincaré.

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_Q|a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)D\psi^+|dxdt\\
&\leq\ \beta\int_Q|u_\varepsilon|^{p-1}|D\psi^+|dxdt+\beta\int_Q|Du_\varepsilon|^{p-1}|D\psi^+|dxdt\\
&+\beta\int_Q|k(x,t)||D\psi^+|dxdt\\
&\quad\leq\theta\int_Q|Du_\varepsilon|^p dxdt+M_1+M_2,\\
&\text{et}\\
&\left|\int_Q\psi^+g_\varepsilon\ (x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)\ dxdt\right|\leq 3\theta\int_0^t\|Du_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)}dt'+M_3
\end{aligned}
\right.
\tag{3.6}
$$

D'après la condition de coercivité de la fonction a (voir(2.1)) nous avons

$$
\begin{cases}
\int_0^t \int_\Omega a\big(x,\, t',\, u_\varepsilon,\, Du_\varepsilon\big)\; Du_\varepsilon \; dxdt' \\[2ex]
\geq \alpha \int_0^t \int_\Omega |Du_\varepsilon|^p dxdt' \;=\; \alpha \int_0^t \| Du_\varepsilon \|^p_{L^p(\Omega)} dt'.
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

où θ est un nombre réel positif et M_1, M_2 et M_3 sont fonctions de θ de T ainsi que des données.

Comme $f,\ \dfrac{\partial \psi^+}{\partial t} \in L^{p'}(Q)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ nous déduisons d'après (2.9) et l'inégalité de Hölder

$$
\begin{cases}
\int_0^t \int_\Omega \left(f - \dfrac{\partial \psi^+}{\partial t} \right) u_\varepsilon \; dxdt' - \int_0^t \int_\Omega \left(f - \dfrac{\partial \psi^+}{\partial t} \right) \Psi^+ dx \; dt' \\[2ex]
+ \dfrac{1}{2} \| (u_0 - \psi^+(0)) \|^2_{L^2(\Omega)} \\[2ex]
\leq M_4 + \theta \int_0^t \| Du_\varepsilon \|^p_{L^p(\Omega)} dt'.
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

En résumé $(3.6), (3.7), (3.8)$ nous permettent d'écrire (3.5) comme suit

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2} \; \| u_\varepsilon(t) - \psi^+(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \; + (\alpha - 5\theta) \int_0^t \| u_\varepsilon \|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} dt' \\[2ex]
+ \int_0^t \int_\Omega u_\varepsilon g_\varepsilon \big(x,\, t',\, u_\varepsilon,\, Du_\varepsilon\big) \; dx \; dt' \\[2ex]
+ \dfrac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_0^t \| (u_\varepsilon - \psi)^-(t') \; \|^p_{L^p(\Omega)} dt' \\[2ex]
+ \; \dfrac{1}{\varepsilon^{p-1}} \; \int_0^t \int_\Omega |(u_\varepsilon - \psi)^-|^{p-2} (u_\varepsilon - \psi)^- \; \psi^- dxdt' \\[2ex]
\leq M_1 + M_2 + M_3 + M_4.
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

On choisit alors θ assez petit de sorte que $\alpha - 5\theta > 0$. (par exemple $\theta = \frac{\alpha}{10}$)

Ainsi nous pouvons déduire les estimations suivantes :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)} \leq C_1 \tag{3.10}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_2 \tag{3.11}$$

$$\int_Q u_\varepsilon\, g_\varepsilon(x,t',u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\, dx\, dt \leq C_3 \tag{3.12}$$

Remarque :

notons que θ, M_i et C_i sont des constantes positives qui ne dépendent pas de ε

D'après (3.10) et (3.11) on peut extraire une sous-suite encore notée par u_ε tel que :

$$u_\varepsilon \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.13}$$

tel que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right) \text{ faible} \tag{3.14}$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{faible étoile} \tag{3.15}$$

ce qui prouve (2.12).

3.3 Estimation de $\frac{(u_\varepsilon-\psi)^-}{\varepsilon}$ dans $L^p(Q)$

Reprenons l'équation pénalisée (3.2)

$$
\begin{cases}
\frac{\partial(u_\varepsilon-\psi)}{\partial t} - div[(a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) - a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ D\psi))] \\
+ g_\varepsilon\ (x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}|(u_\varepsilon-\psi)^-|^{p-2}(u_\varepsilon-\psi)^- \\
= f - \frac{\partial\psi}{\partial t} + div\ (a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ D\psi)), \text{dans } Q.
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

Multiplions l'équation (3.16) par la fonction test $-\frac{(u_\varepsilon-\psi)^-}{\epsilon}$ et intègrons de 0 à T.

$$
\begin{cases}
-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left\langle\frac{\partial(u_\varepsilon-\psi)}{\partial t}\ ,(u_\varepsilon-\psi)^-\right\rangle dt \\
-\frac{1}{\varepsilon}\int_Q[(a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) - a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ D\psi))]D(u_\varepsilon-\psi)^- dx\, dt \\
-\frac{1}{\varepsilon}\int_Q(u_\varepsilon-\psi)^-\ g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right)dxdt \\
+\frac{1}{\varepsilon^p}\int_Q|(u_\varepsilon-\psi)^-|^p dxdt \\
= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left\langle f - \frac{\partial\psi}{\partial t} + div(a(x,t,u_\varepsilon,D\psi)), (u_\varepsilon-\psi)^-\right\rangle dt.
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

En utilisant (2.6), (2.10), (2.11) nous avons: $f - \frac{\partial\psi}{\partial t} + div\ (a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ D\psi)) \in L^{p'}(0,\ T;\ L^{p'}(\Omega))$; alors en appliquant l'inégalité de Young le second membre de (3.17) est absorbé par le quatrième terme du membre du gauche.

De plus et grâce à la stricte monotonie de a (voir (2.1)) le second terme de (3.17) est positif sur l'ensemble où $u_\varepsilon \leq \psi$.

Concernant le troisième terme de (3.17) nous pouvons écrire

$$
\begin{cases}
I = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{u_\varepsilon\leq\psi,\ u_\varepsilon<0\}}(u_\varepsilon-\psi)^- g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)dxdt \\
-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{0\leq u_\varepsilon\leq\psi\}}(u_\varepsilon-\psi)^-\ g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)\ dxdt = I_1 + I_2,
\end{cases}
$$

D'après la condition de signe sur g, I_1 est positif

Pour I_2 nous pouvons utiliser les conditions de croissance de $g,\ h,\ b$ et ψ^+.

Alors nous avons

$$|g(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)|\ \leq K_1 + K_2\ |Du_\varepsilon|^q.$$

Ainsi nous pouvons avoir les estimations suivantes pour I_2 :

$$|I_2|\ \leq K_1 \int_{\{0 \leq u_\varepsilon \leq \psi\}} \frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon}\ dxdt + K_2 \int_{\{0 \leq u_\varepsilon \leq \psi\}} |Du_\varepsilon|^q \frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon}\ dxdt\ =\ A_1 + A_2.$$

Il est clair que

$$|A_1|\ \leq C\ \| \frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon} \|_{L^p(Q)}.$$

En ce qui concerne A_2 nous utilisons (3.10) et l'inégalité de Hölder

$$A_2\ =\ K_2 \int_{\{0 \leq u_\varepsilon \leq \psi\}} |Du_\varepsilon|^q\ \frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon}\ dxdt \leq K_2 \int_{\{0 \leq u_\varepsilon \leq \psi\}} (|Du_\varepsilon|^{qr})^{\frac{1}{r}} \left((\frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon})^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} dxdt$$

où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\ =\ 1.$

Choisissons r tel que : $qr\ =\ p$ alors $r'\ =\ \frac{p}{p-q}$, alors $A_2\ \leq\ C\| \frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon} \|_{L^{r'}(Q)}$

Comme $q < p-1$ et ainsi $r' < p$, nous obtenons $|A_2|\ \leq\ C\| \frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon} \|_{L^p(Q)}$.

Finalement nous avons

$$\left\| \frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon} \right\|^p_{L^p(Q)}\ \leq C \tag{3.18}$$

Quand $\varepsilon\ \to 0$ nous avons

$$(u_\varepsilon - \psi)^- \to 0 \text{ dans } L^p(Q) \text{ fort} \tag{3.19}$$

Par conséquent

$$u \geq \psi \text{ p.p dans } Q \tag{3.20}$$

Ainsi (2.14) est démontré.

3.4 Équi-intégrabilité de $g_\varepsilon(x,t,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)$

Nous adaptons une méthode dans [W] pour la démonstration de l'équi-intégrabilité de $g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right)$.

Soit $\delta > 0$ et soit E un sous-ensemble mesurable inclus dans Q

On définit les ensembles :

$$F_\delta = \left\{\left(x,\ t\right) \in Q : |u| \leq \delta\right\}$$

$$G_\delta = \left\{\left(x,\ t\right) \in Q : |u| > \delta\right\}$$

En utulisant les estimations (3.10) et (3.12) de u_ε et g_ε ainsi que les conditions $(2.2), (2.3)$ et (2.4) nous obtenons les majorations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_E \left| g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right)\right| dxdt \\
&= \int_{E\cap F_\delta} \left| g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right)\right| dxdt \\
&+ \int_{E\cap G_\delta} \left| g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right)\right| dx\,dt \\
&\leq \int_{E\cap F_\delta} (\rho + |u_\varepsilon|^m)\left(h\left(x,\ t\right) + |Du_\varepsilon|^q\right) dxdt \\
&+ \frac{1}{\delta}\int_{E\cap G_\delta} u_\varepsilon\, g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right) dxdt \\
&\leq (\rho + \delta^m)\int_E \left(h\left(x,\ t\right) + |Du_\varepsilon|^q\right) dxdt \\
&+ \frac{1}{\delta}\int_E u_\varepsilon\, g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right) dx\,dt \\
&\leq (\rho + \delta^m)\left(\|h\|_{L^\infty(Q)}|E| + C_1^{q/p}(|E|)^{1-\frac{q}{p}}\right) + \frac{1}{\delta}C_3.
\end{aligned}\right. \tag{3.21}$$

Nous déduisons alors de (3.21) en choisissant un ensemble E de mesure suffisamment petite et la première valeur delta suffisamment grande que

$$g_\varepsilon\big(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\big) \ \text{ est équi-intégrable.} \tag{3.22}$$

En prenant $E = Q$ dans (3.21) nous obtenons

$$g_\varepsilon\big(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\big) \ \text{ est borné dans } L^1(Q). \tag{3.23}$$

3.5 Convergence presque partout de u_ε et Du_ε

D'après (3.2) nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = div\ (a\ (x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\ |(u_\varepsilon - \psi)^-|^{p-2}\ (u_\varepsilon - \psi)^- \\ \\ + f - g_\varepsilon\ (x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) = \lambda_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon \end{cases}$$

avec :

$$\lambda_2^\varepsilon = g_\varepsilon\ (x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon).$$

Comme u_ε est borné dans $L^p(0,\ T;\ W_0^{1,p}(\Omega))$ (voir (3.10)) et $\frac{(u_\varepsilon - \psi)^-}{\varepsilon}$ est borné dans $L^p(Q)$ (voir (3.18)) nous déduisons alors d'après (3.23)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon \\ \\ \text{avec:} \\ \\ \lambda_1^\varepsilon \ \text{ est borné dans } L^{p'}(0,\ T;\ W^{-1,p'}(\Omega)) \\ \\ \text{et } \ \lambda_2^\varepsilon \quad \text{est borné dans } L^1(Q). \end{cases} \tag{3.24}$$

Comme λ_1^ε est borné dans $L^1(Q)$, $g_\varepsilon\big(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\big)$est équi-intégrable.

Donc nous pouvons extraire les sous-suites encore notées par λ_1^ε et λ_2^ε tel que :

$$\lambda_1^\varepsilon \rightharpoonup \lambda_1 \ \text{ dans } \ L^{p'}(0,\ T;\ W^{-1,p'}(\Omega)) \text{ faible} \tag{3.25}$$

$$\lambda_2^\varepsilon \rightharpoonup \lambda_2 \text{ dans } \ L^1(Q) \text{ faible.} \tag{3.26}$$

Ce qui implique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 + \lambda_2 \in L^{p'}(0,\ T;\ W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q) \tag{3.27}$$

Ce qui prouve (2.13).

D'après (3.24) et l'estimation (3.10) sur u_ε nous avons

$$\begin{cases} u_\varepsilon \ \text{ est borné dans } \ L^p(0,\ T;\ W_0^{1,p}(\Omega)) \\ \text{avec:} \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \text{ est bornée dans} \\ L^{p'}(0,\ T;\ W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1\big(0,\ T;\ L^1(\Omega)\big) \subset L^1\big(0,\ T;\ W^{-1,r}(\Omega)\big) \\ \forall\ r < \inf\left\{\dfrac{N}{N-1}, \dfrac{p}{p-1}\right\}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Comme $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset W^{-1,r}(\Omega)$ pour $p > r$, la première injection étant compacte ainsi d'après un lemme de type Aubin (voir par exemple proposition 3.2 chapitre 1) u_ε est relativement compact dans $L^p(Q)$ alors on peut extraire une sous-suite encore notée par u_ε tel que :

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } L^p\big(0, T;\ L^p(\Omega)\big) \text{ fort} \tag{3.29}$$

Ce qui entraine

$$u_\varepsilon \to u \text{ p.p dans } Q. \tag{3.30}$$

Pour la convergence presque partout de Du_ε nous appliquons un nouveau théorème de compacité dans [BM1] et [BM2] plus précisément le théorème 3.3 [BM2] (voir chapitre 1).

Comme u_ε est borné dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ et comme

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\left(a\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right)\right) = f + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\ |(u_\varepsilon-\psi)^-|^{p-2}\ (u_\varepsilon-\psi)^- \\ \\ -g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) = \lambda_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon \text{ est borné dans } L^{p'}(Q) + L^1(Q) \end{cases} \tag{3.31}$$

En raison du fait que l'approximation $g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)$ est faiblement compacte dans $L1(Q)$ voir (3.22), (3.23)et (3.18), ainsi pour une sous-suite encore indicée par epsilon nous avons

$$Du_\varepsilon \to Du \text{ dans } L^q(Q) \text{ fort } \forall q < p, \tag{3.32}$$

Par conséquent

$$Du_\varepsilon \to Du \text{ p.p dans } Q. \tag{3.33}$$

3.6 Passage à la limite dans l'équation

D'après (3.1) nous avons

$$g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) \to g(x,\ t,\ u,\ Du) \text{ p.p dans } Q, \tag{3.34}$$

D'après (3.30), (3.33) et (3.22), nous déduisons alors d'après le théorème de Vitali

$$g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) \to g(x,\ t,\ u,\ Du) \text{ dans } L^1(Q) \text{ fort }. \tag{3.35}$$

Comme $u_\varepsilon g_\varepsilon\left(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon\right) \geq 0$ p.p dans Q alors d'après (3.12), et le lemme de Fatou on a :

$$ug\big(x,\ t,\ u,\ Du\big)\ \in L^1(Q). \tag{3.36}$$

Ainsi (2.17) est démontrée. De même comme u_ε est borné dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ (voir (3.10)) et comme u_ε et Du_ε tendent vers u et Du p.p dans Q nous avons

$$a(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) \rightharpoonup a(x,\ t,\ u,\ Du) \text{ dans } L^{p'}(Q) \text{ faible} \tag{3.37}$$

Enfin comme $\frac{(u_\varepsilon-\psi)^-}{\varepsilon}$ est borné dans $L^p(Q)$ (voir (3.18)) nous avons

$$\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\ |(u_\varepsilon-\psi)^-|^{p-2}\ (u_\varepsilon-\psi)^- \rightharpoonup \mu \text{ dans } L^{p'}(Q) \text{ faible.} \tag{3.38}$$

Ainsi $\mu \in L^{p'}(Q),\ \mu \geq 0$ ce qui prouve (2.15), (2.16)

À présent nous pouvons passer à la limite dans l'équation (3.2), nous retrouverons ainsi l'équation (2.18).

Reste à montrer (2.19) c'est-à-dire

$$\mu\ (u-\psi) = 0 \quad \text{p.p dans } Q,$$

qui résulte de (3.29), (3.38), (3.18) et de l'équation suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\ |(u_\varepsilon-\psi)^-|^{p-2}\ (u_\varepsilon-\psi)^-\ (u_\varepsilon-\psi) = -\,\varepsilon \left\| \frac{(u_\varepsilon-\psi)^-}{\varepsilon} \right\|^p \tag{3.39}$$

3.7 Condition initiale

Il reste à montrer (2.20) et (2.21) du théorème.

Si pour $r < \inf\left\{\frac{N}{N-1},\ \frac{p}{p-1}\right\}$ nous avons

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } C(0,T;W^{-1,r}(\Omega)) \text{ fort .} \tag{3.40}$$

Alors nous pouvons passer a la limite dans l'équation $u_\varepsilon(x,0) = u_0(x)$ et u vérifie la condition initiale.

Rappelons que $g_\varepsilon(x,t,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)$ converge dans la topologie forte de $L^1(Q)$, (voir (3.35)).

Nous pouvons alors améliorer comme suit (3.24)

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon \text{ avec } \lambda_1^\varepsilon \text{ borné dans } L^{p'}\left(0,\ T; W^{-1,p'}(\Omega)\right) \\ \text{et } \lambda_2^\varepsilon \text{ relativement compact dans } L^1\left(0,\ T;\ L^1(\Omega)\right) \end{cases} \tag{3.41}$$

Comme on a l'injection continue

$$W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega) \subset W^{-1,r}(\Omega) \tag{3.42}$$

Alors pour tout $h > 0$ nous avons

$$\begin{cases} \| u_\varepsilon\ (t+h) - u_\varepsilon(t) \|_{W^{-1,r}(\Omega)} \\ = \left\| \int_t^{t+h} (\lambda_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon)\ dt' \right\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \\ \leq C \int_t^{t+h} \| \lambda_1^\varepsilon \|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\ dt' + C \int_t^{t+h} \| \lambda_2^\varepsilon \|_{L^1(\Omega)} dt' \\ \leq C\, h^{\frac{1}{p}} \| \lambda_1^\varepsilon \|_{L^{p'}\left(0,\ T;\ W^{-1,p'}(\Omega)\right)} + C \| \lambda_2^\varepsilon \|_{L^1\left(t,\ t+h;\ L^1(\Omega)\right)}. \end{cases} \tag{3.43}$$

Ce qui implique que u_ε est uniformément équi-continue dans $C\left(0,\ T;\ W^{-1,r}(\Omega)\right)$.

Sachant que u_ε est bornée dans $L^\infty\left(0,\ T;\ L^2(\Omega)\right)$, (voir (3.11)), alors d'après le théorème d'Ascoli (voir par exemple proposition 3.3 chapitre 1) u_ε est relativement compact dans $C\left(0,\ T;\ W^{-1,r}(\Omega)\right)$ ce qui prouve (3.40).

4 Commentaires sur la démonstration

1) Nous avons supposé $\frac{\partial\psi}{\partial t} \in L^{P'}(Q)$ ainsi que $\frac{\partial\psi^+}{\partial t} \in L^{P'}(Q)$ (voir (2.10)) d'après proposition 3.4 chapitre 1.

2) Nous avons supposé dans cette démonstration $p > 2$. Cette méthode nous semble difficile à étendre pour le cas où $p < 2$.

3) Il est difficile d'affaiblir l'hypothèse (2.11) car celle-ci semble indispensable pour mener cette démonstration. On retrouvera dans [Do], (voir, hypothèses (9), (10), pp. 4) une condition similaire.

La condition (2.11) peut être considérée comme suit:

Nous définissons pour $u \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ la fonction
$G = f - \frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{div} a(x, t, u, D\psi)$.

Les hypothèses sur a, ψ sont fixées afin d'avoir $G \in L^{p'}(Q)$. Dans le cas où a est indépendant de u, il est nécessaire d'avoir une condition de régularité sur l'obstacle ψ.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque a dépend de u il nous semble préférable d'avoir une condition sur la dérivée de $a(x, t, s, \xi)$ par rapport à x, s, ξ. Ainsi (2.11) est vérifiée pour une fonction a de la forme $a(x, t, s, \xi) = b(x, t, s)\,|\xi|^{p-2}\xi$.

CHAPITRE 4

INÉGALITÉ DE LEWY – STAMPACCHIA PAR PÉNALISATION

1 Introduction

Notre but dans ce chapitre est l'étude de l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour l'inéquation variationnelle parabolique, traité dans le troisième chapitre.

On commence par présenter quelques résultats obtenus pour cette inégalité dans le cas elliptique où la partie principale est un opérateur de Leray-Lions.

D'abord nous présentons des résultats démontrés récemment par pénalisation, puis on donne une démonstration de cette inégalité dans un cas linéaire parabolique simple avec un obstacle $\psi = 0$ et enfin on donne comme perspective les étapes à suivre avec les difficultés rencontrées pour l'obtention de cette inégalité dans le cas général.

L'inégalité de Lewy-Stampacchia a d'abord été démontrée par Lewy-Stampacchia dans [LeS] pour le problème de Laplace avec obstacle. Elle a ensuite été généralisée à de nombreux cas de problèmes du deuxième ordre avec obstacle, car elle constitue un outil puissant pour démontrer des résultats d'existence et de régularité.

Il serait vain d'essayer de donner une bibliographie complète de l'ensemble de ces travaux. A. MOKRANE et F. MURAT ont récemment repris l'étude de cette inégalité, et ils ont donné une nouvelle démonstration, basée sur la pénalisation "naturelle". Cette nouvelle méthode leur a permis de démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour une classe d'opérateurs pseudomonotones et non pas seulement pour des opérateurs monotones. Dans un premier temps ils ont obtenu cette inégalité pour un problème unilatéral [MM1].

Ensuite, ils ont poursuivi cette étude dans le cas du problème bilatéral avec un opérateur de type Leray-Lions assez général [MM2], puis le cas d'un problème quasilinéaire où l'opérateur comporte un terme avec croissance quadratique par rapport au gradient [MM3]. Enfin ils ont traité le cas d'un problème non linéaire où l'opérateur comporte un terme avec croissance d'ordre p par rapport au gradient [MM4]. Chacune de ces extensions a présenté ses difficultés et elles sont notables.

Pour illustrer la méthode de pénalisation utilisée par A. MOKRANE & F. MURAT, on considère un problème linéaire avec obstacle 0 [MM1]. On considère une fonction u dans $H_0^1(\Omega)$ et une mesure de Radon μ qui vérifient:

$$\begin{cases} -\Delta u - f = \mu & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ u \geq 0, & \text{dans} \quad \Omega, \\ \mu \geq 0, & \text{dans} \quad \Omega, \\ \langle \mu, u \rangle = 0, & \end{cases} \tag{1.1}$$

ou le problème équivalent: u solution de l'inéquation variationelle

$$\begin{cases} \int_\Omega Du D(v-u)dx \geq \langle f, v-u \rangle, & \forall v \in K(0), \\ u \in K(0), & \end{cases}$$

avec

$$K(0) = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Quand le second membre f est dans le dual d'ordre V_2^* de $H_0^1(\Omega)$, où

$$V_2^* = (H^{-1}(\Omega))^+ - (H^{-1}(\Omega))^+,$$

on démontre que la mesure μ satisfait l'inégalité de Lewy-Stampacchia:

$$\mu \leq f^-. \tag{1.2}$$

La nouveauté dans ces travaux est dans la méthode utilisée pour démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia. En effet on part du problème pénalisé

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- = f^+ - \hat{f}_\varepsilon & \text{dans} \quad D'(\Omega), \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), & \end{cases}$$

où $\hat{f}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $\hat{f}_\varepsilon \geq 0$ est une approximation de la partie négative f^- de f (l'existence d'une telle approximation existe, voir [MM1]). On définit

$$z_\varepsilon = \hat{f}_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-.$$

Le résultat principal est alors de démontrer que

$$z_\varepsilon^- \to 0 \qquad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega).$$

Pour cela on pose

$$\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-,$$

et on a, par définition de z_ε

$$\hat{f}_\varepsilon - \mu_\varepsilon = z_\varepsilon = z_\varepsilon^+ - z_\varepsilon^- \geq -z_\varepsilon^-,$$

Par passage à la limite on obtient

$$f^- - \mu \geq 0,$$

i.e. l'inégalité de Lewy-Stampacchia (1.2).

Cette démonstration est directe et relativement simple (au moins dans le cas linéaire). Elle n'exige pas l'hypothèse de monotonie sur A comme dans F. DONATI [Do] et U. MOSCO [Mo3] où a été supposé la stricte monotonie de l'opérateur A (remarquons qu'en général A n'est pas monotone quand $a(x, s, \xi)$ dépend de s). Enfin notons aussi que les hypothèses de régularité sur a, f et sur l'obstacle ψ, pour l'étude des inéquations variationnelles, sont dans un sens minimales.

On aura besoin aussi pour démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia, d'un lemme de densité : le cône positif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est dense dans le cône positif de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Ce lemme a été démontré par F. DONATI.& M. MATZEU [DoMa], F. DONATI [Do] par utilisation de l'inégalité de Lewy-Stampacchia. A. Mokrane. & F. MURAT [MM1], le démontrent ici sans utiliser l'inégalité de Lewy-Stampacchia, mais aussi par la méthode de pénalisation naturelle.

En fait, l'inégalité de Lewy-Stampacchia, à savoir

$$\mu = A(u) - f \leq (f - A(\psi))^-, \tag{1.3}$$

est satisfaite dans le cadre général des problèmes elliptiques non linéaires avec obstacle du type.

$$\begin{cases} \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, & \forall v \in \quad K(\psi), \\ \\ u \in \quad K(\psi), \end{cases} \tag{1.4}$$

où

$$K(\psi) = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \quad v \geq \psi \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega\}.$$

Ici l'inconnue est la fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Les données sont l'opérateur pseudomonotone de Leray-Lions $A(v) = -div\,(a(x, v, Dv))$, qui opère de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, l'obstacle ψ, qui appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ avec $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$, et le second membre f, qui est supposé tel que $g = f - A(\psi)$ est dans le dual d'ordre $V_{p'}^* = (W^{-1,p'}(\Omega))^+ - (W^{-1,p'}(\Omega))^+$. Sur la fonction $a(x, s, \xi)$ on met l'hypothèse de forte monotonie, localement Lipschitz (ou continuité Hölderienne) en ξ et continuité Hölderienne locale en s ; ces hypothèses n'impliquent pas que le problème (1.4) admet une solution unique.

La démonstration de (1.3) est alors similaire à celle faite dans le cas linéaire, mais elle est plus technique.

Posons

$$g = f - A(\psi) \in V_{p'}^*,$$

d'abord, on s'intéresse au cas des données régulières où

$$\begin{cases} g^- \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{(et non pas seulement à } W^{-1,p'}(\Omega)), \\ \psi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{(et non pas seulement à } W^{1,p}(\Omega)), \\ \text{avec } \psi \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

On considère donc le problème pénalisé

$$A(u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^- = f = g^+ - g^- + A(\psi).$$

Posons

$$z_\varepsilon = g^- - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^-,$$

on obtient comme dans le cas linéaire

$$z_\varepsilon^- \to 0 \quad \text{fort dans} \quad L^1(\Omega).$$

On définit

$$\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^-,$$

et en passant à la limite dans

$$g^- - \mu_\varepsilon = z_\varepsilon = z_\varepsilon^+ - z_\varepsilon^- \geq -z_\varepsilon^-,$$

qui découle de la définition de z_ε, on obtient que

$$g^- - \mu \geq 0, \tag{1.6}$$

i.e. l'inégalité de Lewy-Stampacchia (1.3) sous les hypothèses précédentes (1.5) sur g^- et ψ.

Ensuite on considère le cas général où g^- appartient seulement à $W^{-1,p'}(\Omega)$ et ψ seulement dans $W^{1,p}(\Omega)$ avec $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$. On approche g^- par $\hat{g}_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\hat{g}_n \geq 0$ (l'existence d'une telle approximation est démontrée aussi par pénalisation, voir [MM1] et ψ par $\psi_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $\psi_n \leq 0$ sur $\partial\Omega$.

On passe à la limite dans (1.6), i.e. dans $\hat{g}_n - \mu_n \geq 0$, et en déduit l'inégalité de Lewy-Stampacchia dans le cas général. Par ailleurs A. MOKRANE & F. MURAT [MM2] ont considéré l'inéquation variationnelle avec deux obstacles pour un opérateur de Leray-Lions

$$\begin{cases} u \in K(\psi_1, \psi_2), \\ \int_\Omega a(x, u, Du)(Dv - Du)\,dx + \int_\Omega a_0(x, u)(v - u)\,dx \geq \langle f, v - u\rangle, \\ \forall v \in K(\psi_1, \psi_2), \end{cases}$$

et ils ont démontré, sous des hypothèses minimales, assez faibles sur les données Ω, p, a, a_0, f, ψ_1 et ψ_2, que toute solution de ce problème vérifie l'inégalité de Lewy-Stampacchia

$$\begin{cases} -\big(-\operatorname{div}(a(x, \psi_2, D\psi_2)) + a_0(x, \psi_2) - f(x)\big)^- \\ \leq -\operatorname{div}(a(x, u, Du)) + a_0(x, u) - f(x) \\ \leq \big(-\operatorname{div}(a(x, \psi_1, D\psi_1)) + a_0(x, \psi_1) - f(x)\big)^+. \end{cases}$$

Cependant, ces hypothèses de régularité assez faibles sur les fonctions a et a_0 et sur les obstacles ψ_1 et ψ_2 n'entraînent pas l'unicité de la solution de l'inéquation (ni de la solution de l'équation correspondante) (voir [BGM], [CC], [CM]), Ils démontrent néanmoins l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour toute solution de ce problème, et non seulement pour une seule solution comme dans [MM1] pour le problème unilatéral.

Enfin cette méthode de pénalisation naturelle a permis de démontrer indépendamment les deux parties de l'inégalité de Lewy-Stampacchia.

Par la suite ils ont considéré dans [MM3], l'inéquation variationnelle avec obstacle unilatéral pour le problème quasilinéaire avec un terme non linéaire à croissance quadratique par rapport au gradient

$$\begin{cases} u \in K(\psi) \cap L^{\infty}(\Omega), \\ \int_{\Omega} A(x)Du(Dv - Du)\,dx + \lambda \int_{\Omega} u(v-u)\,dx \\ \geq \int_{\Omega} H(x,u,Du)(v-u)\,dx + \int_{\Omega} f(v-u))\,dx, \\ \forall v \in K(\psi) \cap L^{\infty}(\Omega), \end{cases}$$

pour laquelle ils ont démontré, sous certaines hypothèses sur les données, l'inégalité de Lewy-Stampacchia:

$$\begin{cases} 0 \leq -\operatorname{div}(A(x)Du) + \lambda u - H(x,\ u,\ Du) - f(x) \\ \leq \big(-\operatorname{div}(A(x)D\psi) + \lambda\psi - H(x,\ \psi,\ D\psi) - f(x)\big)^{+}. \end{cases}$$

Enfin, ils considèrent dans [MM4] un problème avec obstacle pour un opérateur du second ordre du type Leray-Lions perturbé par une non linéarité à croissance d'ordre p par rapport au gradient:

$$\begin{cases} u \in K(\psi) \cap L^{\infty}(\Omega), \forall v \in K(\psi) \cap L^{\infty}(\Omega), \\ \int_{\Omega} a(x,\ u,\ Du)(Dv - Du)\,dx + \lambda \int_{\Omega} u(v-u)\,dx \\ -\int_{\Omega} H(x,\ u,\ Du)(v-u)\,dx \geq 0, \end{cases}$$

où $K(\psi) = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) :\ v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\}$, $a(x,\ s,\ \xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory qui est p-coercive et qui vérifie certaines hypothèses de croissance , de monotonie en ξ, de locale lipschitzianité en ξ et s.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, avec $\lambda > 0$, $\psi^{+} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, et soit $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory qui vérifie

$$(|H(x,\ s,\ \xi)| \ \leq C\,(1+|\xi|^p)$$

et $(|H(x,\ s,\ \xi) - H(x,\ \psi(x),\ D\psi(x))| \ \leq C\,(|s-\psi(x)| \ + |\xi - D\psi(x)| \ + |\xi - D\psi(x)|^p)$.

On définit l'opérateur

$$B\ :\ W^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega)$$

par

$$B(v) = -\ \mathrm{div}\ a(x,\ v,\ Dv) + \lambda v - H(x,\ v,\ Dv),$$

$\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$, et on suppose que $B(\psi) \in V_{p'}^{\star}$ avec

$$B(\psi)^+ \in L^\infty(\Omega).$$

Sous ces hypothèses, et par l'utilisation de la pénalisation naturelle, ils démontrent que l'inégalité de Lewy-Stampacchia:

$$0 \leq B(u) \leq B(\psi)^+,$$

pour au moins une solution du problème avec obstacle est vérifiée.

2 Inégalité de Lewy-Stampacchia pour une inéquation variationnelle parabolique linéaire avec obstacle $\psi = 0$

Nous présentons dans cette section une démonstration de l'inégalité de Lewy-Stampacchia par la méthode de pénalisation pour une inéquation variationnelle parabolique linéaire avec obstacle $\psi = 0$ suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f = \mu \text{ dans } Q = \Omega \times]0,T[\\ u \geq 0,\ \ \mu \geq 0,\ \text{ et } \mu.u = 0 \text{ dans } Q \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Cette démonstration consiste à prouver que la mesure μ vérifie l'inégalité de Lewy-stampacchia

$$\mu \leq f^-. \tag{2.2}$$

où f est supposée appartenir au dual d'ordre V^* de $L^2\big(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\big)$ qui est définie par

$$V^* = \Big(L^2\big(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)\big)\Big)^+ - \Big(L^2\big(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)\big)\Big)^+.$$

La preuve de l'inégalité de Lewy-Stampacchia (2.2) sera alors effectuée en quatre étapes

1- Pénalisation et estimation a priori

2- Preuve du résultat d'existence

3 - Convergence forte dans $L^2(Q)$ de z_ε^-

4- Preuve de l'inégalité de Lewy-Stampacchia

L'idée de cette démonstration est inspirée de l'article [MM1], dans lequel cette preuve a été effectuée pour le cas elliptique.

2.1 Pénalisation et estimation a priori

Comme $f \in V^*$

$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ \text{où } f^+ \text{ et } f^- \text{sont des éléments non négatifs de } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{cases} \tag{2.3}$$

Nous approchons f^- par une suite $\hat{f}_\varepsilon$ qui satisfait

$$\hat{f}_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \hat{f}_\varepsilon \geq 0, \frac{\partial \hat{f}_\varepsilon}{\partial t} \geq 0,\quad \hat{f}_\varepsilon \to f^- \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ fort;} \tag{2.4}$$

une telle approximation existe, selon le lemme 5. 1 démontré dans [MM1].

Nous supposerons également que

$$\varepsilon \left\| \hat{f}_\varepsilon \right\|^2_{L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))} \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0. \tag{2.5}$$

Le problème pénalisé correspondant à (2.1) est

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- = f^+ - \hat{f}_\varepsilon \quad \text{dans } Q, \\ u_\varepsilon \in L^2\big(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\big) \\ u_\varepsilon\big(x,\ 0\big) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

le problème (2.6) admet une solution d'après un résultat classique (voir J.L. LIONS [L] p 69).

Multipliant l'équation pénalisée par la fonction test u_ε et intégrant de 0 à $t < T$ on obtient:

$$\begin{cases} \int_0^t \langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t},\ u_\varepsilon \rangle dt' + \int_0^t \int_\Omega |Du_\varepsilon|^2 dx\, dt' \\ +\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_\Omega \left| u_\varepsilon^- \right|^2 dxdt' = \int_0^t \langle f^+ - \hat{f}_\varepsilon,\ u_\varepsilon \rangle dt' \end{cases} \tag{2.7}$$

Comme

$$\int_0^t \langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon \rangle\, dt' = \frac{1}{2} \int_\Omega \|u_\varepsilon\|^2 dx \geq 0$$

et que de plus

$$\begin{cases} \int_0^t \big\langle f^+ - \hat{f}_\varepsilon,\ u_\varepsilon \big\rangle dt' \leq \int_0^t \int_\Omega \left| f^+ - \hat{f}_\varepsilon \right| |u_\varepsilon| dxdt' \\ \leq \|f^+ - \hat{f}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ \leq c\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}, \end{cases}$$

il en résulte alors

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq c\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).}$$

Donc

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_1 \tag{2.8}$$

$$\|u_\varepsilon^-\|_{L^2(Q)}^2 \leq \varepsilon \ C_2. \tag{2.9}$$

2.2 Preuve du résultat d'existence

Définissons

$$\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-. \tag{2.10}$$

Il vient d'après (2.4) et (2.6) et de l'estimation (2.8) que:
$\mu_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon - f^+ + \hat{f}_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$ et ainsi nous pouvons extraire une sous suite (encore notée par ε) telle que :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } L^2\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right) \text{ faible,} \\ \\ \mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu \text{ dans } L^2\left(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)\right) \text{ faible} \end{cases} \tag{2.11}$$

Par conséquent

$$u \in L^2\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right),\ \mu \in L^2\left(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)\right).$$

En passant à la limite dans l'équation (2.6) on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \mu = f^+ - f^- \ = f \text{ dans } (Q). \tag{2.12}$$

D'après (2.9), nous déduisons que $u_\varepsilon^- \to 0$ dans $L^2(Q)$ fort et comme $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-$ il en résulte que: $u \geq 0$ p.p. dans Q.

La propriété $\mu \geq 0$ suit de (2.10).

Pour obtenir "l'égalité complémentaire" $\mu.u = 0$ p.p dans Q" nous utilisons $(v - u_\varepsilon)$ avec $v \in L^2\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right)$, avec : $v \geq 0$ p.p dans Q, comme fonction test dans (2.6)

Ainsi (u, μ) est une solution de (2.1).

2.3 Convergence forte de z_ε^- dans $L^2(Q)$

Définissons à présent

$$z_\varepsilon = \hat{f}_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-. \tag{2.13}$$

Comme $\hat{f}_\varepsilon \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$ $z_\varepsilon \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$

L'équation (2.6) peut être réécrite comme

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon + z_\varepsilon = f^+ \quad \text{dans} \quad Q. \tag{2.14}$$

Multiplions l'équation (2.14) par la fonction test $-z_\varepsilon^-$ et intégrons de 0 à T:

$$\int_0^T \langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, -z_\varepsilon^- \rangle dt + \int_0^T \langle -\Delta u_\varepsilon, -z_\varepsilon^- \rangle dt + \int_0^T \langle z_\varepsilon, -z_\varepsilon^- \rangle dt = \int_0^T \langle f^+, -z_\varepsilon^- \rangle dt.$$

Comme

$$f^+ \geq 0 \text{ dans } L^2\left(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)\right) \Rightarrow \left\langle f^+, -z_\varepsilon^- \right\rangle \leq 0.$$

Ainsi

$$\begin{cases} \int_0^T \langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, -z_\varepsilon^- \rangle\, dt + \int_Q D u_\varepsilon D(-z_\varepsilon^-) dx dt \\ \\ + \int_Q |z_\varepsilon^-|^2 dx dt = \int_0^T \langle f^+, -z_\varepsilon^- \rangle\, dt \leq 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Montrons que $z_\varepsilon^- \to 0$ dans $L^2(Q)$ fort.

Définissons

$$E_\varepsilon = \left\{ \left(x,\ t\right) \in Q : z_\varepsilon\left(x,\ t\right) < 0 \right\}. \tag{2.16}$$

Comme $\hat{f}_\varepsilon \geq 0$, il en résulte d'après les définitions (2.13) et (2.16):

$$u_\varepsilon < 0 \text{ sur } E_\varepsilon. \tag{2.17}$$

D'après (2.4) et (2.17) nous avons

$$\begin{cases} \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, -z_\varepsilon^- \right\rangle dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(-z_\varepsilon^-) dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\, z_\varepsilon\, dx\, dt \\ = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\left(\hat{f}_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-\right) dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\, \hat{f}_\varepsilon\, dx\, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^- dx\, dt \\ = -\int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon \frac{\partial \hat{f}_\varepsilon}{\partial t}\, dx\, dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega |u_\varepsilon(x,T)|^2 dx \geq 0 \end{cases}$$

Comme

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-,$$

alors (2.16) et (2.17) donnent

$$\int_Q Du_\varepsilon^+ D(-z_\varepsilon^-)\, dx\, dt = \int_Q u_\varepsilon^+ \Delta z_\varepsilon^-\, dx\, dt = 0$$

Ainsi (2.15) s'écrit

$$\int_Q -Du_\varepsilon^- D(-z_\varepsilon^-)\, dx\, dt + \int_Q |z_\varepsilon^-|^2 dxdt \leq 0.$$

Utilisons la définition (2.13) de z_ε : $-u_\varepsilon^- = \varepsilon(z_\varepsilon - \hat{f}_\varepsilon)$ et calculons le gradient:

$$-Du_\varepsilon^- = \varepsilon D\left(z_\varepsilon - \hat{f}_\varepsilon\right) \text{ p.p. dans } Q.$$

Nous obtenons alors

$$\varepsilon \int_Q D(z_\varepsilon - \hat{f}_\varepsilon)\, D(-z_\varepsilon^-) dxdt + \int_Q |z_\varepsilon^-|^2 dxdt \leq 0. \tag{2.18}$$

Par l'inégalité de Young à (2.18) il vient:

$$\begin{cases} \varepsilon \int_Q |Dz_\varepsilon^-|^2\, dx\, dt + \int_Q \left| z_\varepsilon^- \right|^2 dx\, dt \leq \varepsilon \int_Q D\hat{f}_\varepsilon D(-z_\varepsilon^-) dxdt \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_Q \left| D\hat{f}_\varepsilon \right|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_Q |Dz_\varepsilon^-|^2 dxdt. \end{cases}.$$

Donc

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_Q \left|Dz_\varepsilon^-\right|^2 dxdt + \int_Q \left|z_\varepsilon^-\right|^2 dxdt \le \frac{\varepsilon}{2}\int_Q \left|D\hat{f}_\varepsilon\right|^2 dxdt$$

Comme

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_Q \left|Dz_\varepsilon^-\right|^2 dxdt \ge 0$$

et que de plus

$$\|z_\varepsilon^-\|^2_{L^2(Q)} \le \frac{\varepsilon}{2}\int_Q \left|D\hat{f}_\varepsilon\right|^2 dxdt = \frac{\varepsilon}{2}\|D\hat{f}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} \to 0$$

et ceci d'après (2.5) alors

$$z_\varepsilon^- \text{ converge fortement vers } 0 \text{ dans } L^2(Q). \tag{2.19}$$

2.4 Preuve de l'inégalité de Lewy-Stampacchia

D'après les définitions (2.13) et (2.10) de z_ε et μ_ε on a:

$$\hat{f}_\varepsilon - \mu_\varepsilon = z_\varepsilon.$$

Comme

$$z_\varepsilon \ge -z_\varepsilon^-$$

alors

$$\hat{f}_\varepsilon + z_\varepsilon^- \ge \mu_\varepsilon. \tag{2.20}$$

Il en résulte alors $f^- \ge \mu$ qui est le résultat voulu, et ceci grâce à l'hypothèse (2.4) sur $\hat{f}_\varepsilon$ et la convergence forte (2.19) de z_ε^-.

3 Idées pour l'obtention de l'inégalité de Lewy-Stampacchia dans le cas général

Notre but dans cette section c'est de donner une idée et des pistes possibles en vue de montrer cette inégalité de Lewy-Stampacchia pour une inéquation variationnelle parabolique et plus précisément pour le problème qui a été traité dans le **chapitre 3** de cette thèse. D'abord pour un obstacle $\psi = 0$, puis pour $\psi \neq 0$.

On reprend ici les hypothèses du théorème d'existence dans le chapitre 3 sur les données a , g , f.

On part du problème pénalisé avec l'opérateur de pénalisation $-\frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^-$ et on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \text{ div } a(x, t, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) + g_\varepsilon(x, t, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^- = h_1^\varepsilon - h_2^\varepsilon \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Omega \times]0,T[\\ u_\varepsilon \in L^p\Big(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\Big), \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour ε fixé $|g_\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad g_\varepsilon(x,t,s,\xi) \cdot s \geq 0$. Ainsi $g_\varepsilon \in L^\infty$ ce qui donnera:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^{p'}\big(0, T, W^{-1,p'}(\Omega)\big).$$

L'existence est démontré par N. BELLAL [Be], même dans le cas $\psi \neq 0$.

Notre but est de donner une idée pour démontrer cette inégalité de Lewy- Stampacchia, i.e., de démontrer le théorème suivant avec

$$|g_\varepsilon(x, t, s, \xi)| \leq b\ (|s|)\ (h(x,t) + |\xi|^q), \quad h \in L^q(Q), \quad q < p.$$

Théorème 3.1

Si $f^+, f^- \in L^{p'}(O,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ et si les hypothèses sur a, g assurent que le problème:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \text{ div } a(x, t, u, Du) + g(x, t, u, Du) - f = \mu \text{ dans } Q = \Omega \times]0,T[\\ u \geq 0,\ \mu \geq 0, \text{ et } \mu . u = 0 \text{ dans } Q \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

admet une solution, alors cette dernière vérifie l'inégalité de Lewy-Stampacchia:

$$0 \leq \mu \leq f^{-}.$$

C'est l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour une solution de l'inéquation variationnelle (I.V.). Cette solution est une solution forte.

L'existence de solutions pour l'I.V. a été démontré par A. MOKRANE [M] et a été généralisée récemment au cas où l'obstacle $\psi \neq 0$ par N. BELLAL [Be] .

Pour démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia, on utilise des techniques élémentaires, mais on refait plusieurs fois la même chose et on reprend des idées de DONATI [Do] et de MOKRANE & MURAT [MM1].

Schéma à suivre pour la démonstration de l'inégalité de Lewy-Stampacchia

Première étape : On considère le cas où a est définie à partir d'un opérateur de Leray-Lions,

$$h_1^{\varepsilon} = f^{+},$$

$$g_{\varepsilon} = \frac{g}{1+\varepsilon|g|}.$$

$$h_2^{\varepsilon} \geq 0, \quad h_2^{\varepsilon} \quad \text{régulière}, \quad h_2^{\varepsilon} \to f^{-}.$$

Deuxième étape : (Lemme de densité)

On démontre que pour f^{-} donnée ,

$$f^{-} \geq 0, \quad f^{-} \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)),$$

Il existe un h_2^{ε}, tel que $h_2^{\varepsilon} \to f^{-}$.

Pour cela aussi on reprend les idées de DONATI [Do] et MURAT & MOKRANE [MM1], avec
$g = 0$ et $a\,(x,\ t,\ s,\ \xi) = |\xi|^{p-2}\xi$.

On multiplie l'équation (3.1) par la fonction test $-z_{\varepsilon}$ où

$$z_\varepsilon = h_2^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-,$$

et on intègre par parties, ce qui demandera à h_2^ε assez de régularité en espace et en temps qui serait éventuellement d'avoir:

$$h_2^\varepsilon \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)), \quad \frac{\partial h_2^\varepsilon}{\partial t} \in L^{p'}(Q),$$

par contre

$$h_1^\varepsilon = f^+ \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)),$$

devrait être suffisant.

On effectue les calculs comme dans le cas elliptique (voir MOKRANE & MURAT [MM1]).

Il y a deux termes supplémentaires :

1) Le terme en g_ε, qui ne pose aucun problème, car

$$g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)(-z_\varepsilon^-) \neq 0,$$

seulement si $z_\varepsilon < 0$, ce qui implique $u_\varepsilon < 0$, donc $g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon) < 0$;

$$\int_Q g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)(-z_\varepsilon^-)dxdt = \int_{E_\varepsilon} g_\varepsilon(x,\ t,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)(-z_\varepsilon^-)dxdt$$

où

$$E_\varepsilon = \{(x,t) \in Q, /\ \ z_\varepsilon(x,t) < 0\},$$

par suite

$$\int_{E_\varepsilon} g_\varepsilon(x,t,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)(-z_\varepsilon^-)dxdt \geq 0.$$

2) Le deuxième terme est:

$$\langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, -z_\varepsilon^- \rangle,$$

comme

$$z_\varepsilon = h_2^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-,$$

on a

$$u_\varepsilon^- = \varepsilon(z_\varepsilon - h_2^\varepsilon),$$

par suite (formellement)

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \cdot (-z_\varepsilon^-) = \frac{\partial(u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-)}{\partial t} \cdot (-z_\varepsilon^-) = -\frac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial t} \cdot z_\varepsilon^- + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(z_\varepsilon - h_2^\varepsilon)(-z_\varepsilon^-).$$

Et on essaierait de montrer que pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\int_0^T \langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, -z_\varepsilon^- \rangle dt = \int_0^T \int_\Omega \varepsilon \, \frac{\partial h_2^\varepsilon}{\partial t} \, z_\varepsilon^- \, dxdt + \text{(un terme positif)} \qquad (3.3)$$

On approche

$$u_\varepsilon \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$$

par une suite

$$\varphi_n \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \in L^{p'}(Q).$$

On travaille à ε fixé on obtient de (3.3) :

$$\int_0^T \langle \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}, -z_\varepsilon^- \rangle dt = \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial h_2^{\varepsilon n}}{\partial t} \, z_{\varepsilon n}^- \, dxdt + \text{ (un terme positif)} \qquad (3.4)$$

Dans ce cas les calculs sont licites dans (3.4) et on fait le passage à la limite en n d'où (3.3) pour ε. Ceci nécessite la densité de $H^1(Q)$ dans

$$W = \{u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))\},$$

On utilise alors le lemme de densité pour obtenir la convergence :

$$h_2^\varepsilon \to h^- \quad \text{fort dans} \quad L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)).$$

Perspectives :

La démonstration de l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour le problème que nous avons traité est l'une de nos principales perspectives. Elle a été prouvée, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, dans divers contextes. Mais il semble que pour les équations ou les inéquations d'évolution un obstacle de structure persiste.

Cet obstacle est analogue à celui qui fait que divers chercheurs dans le domaine ont été amenés à ajouter une hypothèse de régularité en temps sur la fonction ψ qui définit l'obstacle et qui ne semble pas, a priori, tout à fait naturelle (voir [BC], [BGM], [CC], [Do], [LeS], [MM1], [MM2], [MM3], [MM4]).

Conclusion et perspective

Dans cette thèse, en utilisant la méthode de pénalisation et des outils de l'analyse fonctionnelle non linéaire, nous avons établi un théorème d'existence pour une inéquation variationnelle parabolique avec obstacle $\psi \neq 0$, dont la partie principale est un opérateur de Leray-Lions qui opère de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ dans son dual, et avec une perturbation non linéaire à croissance d'ordre $q < p - 1$. Ce résultat généralise les résultats obtenus dans le cas d'un obstacle $\psi = 0$.

Nous avons aussi obtenu par la méthode de pénalisation une inégalité de Lewy-Stampacchia pour une inéquation variationnelle parabolique dans le cas linéaire.

Quelques perspectives :

Il serait intéressant de songer à étendre l'étude de l'inégalité de Lewy-Stampacchia aux inéquations variationnelles paraboliques non linéaires. Il serait aussi souhaitable d'obtenir les résultats de notre théorème sous des hypothèses plus faibles et plus générales (en particulier sur p et sur le second membre f).

Bibliographie

[A] R.A. ADAMS, Sobolev spaces, Academic Press, Pure and Applied Mathma-tics, New York-London, vol. 65, 1975.

[AAR] L. AHAROUCH, E. AZROUL. & M. RHOUDAF, Existence result for variational degenerated parabolic problems via pseudo-monotonicity Oujda International Conference on Nonlinear Analysis. Electronic Journal of Differential Equations ISSN:1072-6691. http://ejde.math.unt.edu, Conference 14, (2006), pp. 9-20.

[ABBM] Y. AKDIM, J. BENNOUNA, A. BOUAJAJA. & M. MEKKOUR, Strongly nonliear parabolic unilateral problems without sign conditions and three unbounded non linearities IJCSI International Journal of Computer Science Issues, Vol. 9, Issue 6, No 2, November (2012).

[Be] N. BELLAL, Existence of solutions to nonlinear parabolic unilateral problems with an obstacle depending on time. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 229, pp. 1-10.ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu ftp ejde.math.txstate.edu.

[Bo] BOURBAKI, Intégration, Chap.1/4,Act. Sc. Ind. Paris Hermann,1966.

[Br1] H. BREZIS, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[Br2] H. BREZIS, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[Br3] H. BREZIS, Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications, Masson,1993.

[BB] H. BREZIS. & F. E. BROWDER, Strongly nonlinear parabolic variational inequalities. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 77 (1980), pp. 713-715.

[BC] L. BOCCARDO. & G. R. CIRMI, Non smooth unilateral problems, in *Nonsmooth optimization: Methods and applications (Proceedings, Erice, 1991)*, ed. by F. Giannessi, Gordon and Breach, New York, 1992, pp. 1-10.

[BGM] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT. & F. MURAT, Unicité de la solution pour des équations elliptiques non linéaires, C.R. Acad. Sci. Paris Série I, 315, 1992, pp. 1159-1164.

[BLP] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS. & G. PAPANICOLAOU, Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland, Amsterdam (1978).

[BM1] L. BOCCARDO. & F. MURAT, Strongly nonlinear Cauchy problems with gradient dependent lower order nonlinearity; in Recent Advances in Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems, (Proceedings, Nancy, 1988) ed. by P. BENILAN, M. CHIPOT, L.C. EVANS, M. PIERRE, Pitman Research Notes in Mathematics series 208 (1989),Longman, Harlow, pp. 247-254.

[BM2] L. BOCCARDO. & F. MURAT, Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations , Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 19, No. 6, (1992), pp. 581-597.

[CC] J. Carrillo. & M.Chipot , On nonlinear elliptic equations involving derivatives of the nonlinearity, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 100A, 1985, pp. 86-128.

[CM] M. CHIPOT. & G MICHAILLE, Uniqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities, niqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 16, 1989, pp.137-166.

[CT] P. CHARRIER. & G.M. TROIANIELLO, On strong solutions to parabolic unilateral problems with obstacle dependent on time, J. Math. Anal. Appl. 65 (1978),

pp. 110-125.
[Do] F. DONATI, A penality method approach to strong solutions of some nonlinear parabolic unilateral problems. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 6 (1982), pp. 285-297.
[Dr] J. DRONIOU, Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles, htt://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/gm3-02.pdf.
[Do Ma] F. DONATI. & M. ATZEU, 'On the strong solutions of some nonlinear evolution problems in ordered Banach spaces', Boll. Un. Mat. Ital. 16(5) (1979), 54–73.
[F] G. FICHERA, Problemi elastostatici non vincoli unilaterali; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.
[G] R. GLOWINSKI, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidel- berg New York, Springer, 1984.
[GLT] R. GLOWINSKI, J. L. LIONS. & R. TRÉMOLIÈRES, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.
[KKS] R. KORTE, T. KUUSI. & J. SILJANDER, Obstacle problem for nonlinear parabolic equations J. Differential Equations 246 (9), (2009), pp. 3668 -3680.
[KS] D. KINDERLEHRER. & G. STAMPACCHIA, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.
[L] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, (1969).
[LeS] H. LEWY. & G. STAMPACCHIA, On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem, J. Analyse Math., 23, 1970, pp. 227-236.
[LiS] J. L. LIONS. & G. STAMPACCHIA, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.
[M] A. MOKRANE, An existence result via penalty method for some nonlinear parabolic unilateral problems. Bolletino della Unione Matematica Italiana, 8B, (1994), pp. 405-417.
[Mo1] U. MOSCO, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.
[Mo2] U. MOSCO, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.
[Mo3] U. MOSCO, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities', in J.-P. Gossez,E. J. Lami Dozo, J. Mawhin and L.Waelbroeck (eds.), Nonlinear operators and the calculus of variations (Proceedings Bruxelles 1975), Lecture Notes in Math. 543, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 83–156.
[MM1] A. MOKRANE. & F. MURAT, A proof of Lewy-stampacchia's inequality by a penalization method .Pot .Anal .,9.1998, pp. 105-142.
[MM2] A. MOKRANE. & F. MURAT, The Lewy-Stampacchia inequality for bilateral problems, Ric. Mat., 53, 2004, pp. 139-182.
[MM3] A. MOKRANE. & F. MURAT, The Lewy-Stampacchia inequality for the obstacle problem with quadratic growth in the gradient, Ann. Mat. pura appl., 184, 2005, pp. 347-360.
[MM4] A. MOKRANE. & F. MURAT, Lewy-Stampacchia's inequality for a Leray-Lions operator with natural growth in the gradient, Boollettino dell'Unione Matematica Italiana, March 2014, Volume 7, Issue 1, pp 55-85.
[MP] F. MIGNOT. & J.P. PUEL, Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Application aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ai-ch. Rat. Mech. Analysis 64 (1977), pp. 59-91.

[S] A. SIGNORINI, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Pro- gresso della Scienze, 1933.

[Sc] L. SCHWARTZ, Distribution à valeurs vectorielles.I.II Annales institat Fourier .7(1957)1-141;8(1958).1-209.

[Si] J. SIMON, Compact set in the space $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Aplicata 146 (1987), pp. 65-96.

[St1] G. STAMPACCHIA, Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Séminaire sur les équations aux dérivées partielle, Collège de France (Mai 1964).

[St2] G. STAMPACCHIA, Formes bilineaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[St3] G. STAMPACCHIA, Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Presses de l'Université de Montréal, (1966).

[St4] G. STAMPACCHIA, Variational inequalities, Theory and application of monotone opera- tors, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[T] T. W. TING, Elasic-plastic torsion problem III., Archive Rat. Mech. Anal., 34, 1969.

[W] J. WEBB, Boundary value problems for Strongly nonlinear elliptic equations, J. London Math. Soc. 21 (1980), pp. 123-132.