وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA
UNIVERSITY BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option : Equations différentielles et applications

ETUDE DE L'EXISTENCE DE SOLUTIONS ET DE LA STABILITE POUR CERTAINES EQUATIONS DIFFERENTIELLES FONCTIONNELLES INTEGRO-DIFFERENTIELLES A RETARD PAR LA TECHNIQUE DE POINT FIXE

Par:

Gabsi Hocine

ENCADREUR :	DJOUDI Ahcène	Prof	U.B.M. ANNABA
Co. ENCADREUR :	ARDJOUNI Abdelouaheb	MCA	U.M.M. SOUK-AHRAS

Devant le jury

PRESIDENT:	KELAIAIA Smail	Prof	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEURS :	BENTRAD Ali	Prof	U. REIMS, FRANCE
	SELMI Abdelouahab	MCA	U.B.M. ANNABA

Année : 2017/2018

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier certaines propriétés quantitatives et qualitatives de larges classes de systèmes et d'équations intégro-différentielles non linéaires à retard fonctionnel de type neutre et de présenter des extensions de résultats antérieurs. Ces extensions s'appliquent à des classes plus étendues d'équations à retard fonctionnel non borné. Les techniques de point fixe et du degré de coïncidence de Mawhin sont utilisés pour établir des résultats de stabilité asymptotique et d'existence de solutions périodiques et positives pour certains systèmes à retard. Des exemples d'applications sont fournis pour illustrer les travaux établis dans cette thèse.

Mots clés : Equations différentielles à retard. Point fixe. Degré Topologie

Abstract

The purpose of this thesis is to study some quantitative and qualitative properties of large classes of systems and nonlinear intégro-differential equations with functional delay of neutral type in the hope to establish extensions of some anterior results for a large class of equations and systems with unbounded functional delay. The technique of fixed point theory and the degree of coincidence due to Mawhin are mainly used to establish asymptotic stability results and existence of positive and periodic solutions of certain system of equation with delay. Examples are given to illustrate our claims.

Key words: Differential time equations. Fixed point. Degree Topology

ملخص

الهدف من هذه لأطروحة هو دراسة بعض الخصائص النوعية والكمية لجملة معادلات تفاضلية وبعض معادلات التفاضلية من نمط التكامل الغير الخطية ذات تأخر غير ثابة وتكمن الخلاصة في تمديد وتحسين بعض الشروط . هذه النتائج المتحصل عليها يمكن تطبيقها بشكل أوسع على المعادلات التفاضلية ذات تأخر غير محدود. اعتماد على تقنية النقطة الثابتة و درجة الطبولوجيا نبرهن نظرية الاستقرار المتقارب ونظرية الوجود للحلول الدورية الموجبة لجملة معادلة التفاضلية ذات تأخر . وأخيرا نقدم أمثلة لتوضيح نتائجنا.

الكلمات المفتاحية :المعادلات التفاضلية ذات تأخر . النقط الثابة. درجة الطبولوجيا

Sommaire

Introduction

Les premiers travaux sur la stabilité ne retenaient, des équations différentielles ordinaires (EDO), que leurs approximations linéaires du premier ordre. Il a fallu attendre quelques années pour que Lyapunov justifie et étend les propriétés locales déduites du modèle linéarisé. L'un des résultats principaux est la première méthode de Lyapunov qui s'énonce

-si l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéarisé alors il est localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire.

Cependant il ne donne aucun renseignement quantitatif sur le domaine de stabilité asymptotique. Cette lacune fut contournée par l'introduction des fonctions ou fonctionnelles de Lyapunov. C'était là la seconde méthode de Lyapunov connu sous le nom de la méthode directe de Lyapounov. D'autre part, ces fonctions ont une relation directe avec la physique des systèmes puisque très souvent elles ne sont rien de plus que l'expression de l'énergie totale du système qui, s'il est dissipatif, décroît au cours du temps afin que le système rejoigne une configuration à énergie minimale.

Les premiers résultats sont apparus avec Lyapunov à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle et au début du $20^{\text{ème}}$ siècle. Il donne alors une condition suffisante pour la stabilité des systèmes non linéaires. Chetaev, quant à lui, démontra un théorème d'instabilité en 1934. Puis, Massera établi une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Hahn et Lefschetz achèveront alors dans les années 1960 cette théorie.

Ces dernières années, la théorie de point fixe a été introduite par les investigateurs et elle s'est révélée un outil puissant pour la plupart des études de l'existence de solutions périodiques, stabilité et stabilité asymptotique de la solution de certains problèmes linéaires ou non linéaires associés à des équations différentielles et/ou intégro–différentielles à retard fonctionnel non borné. La technique de point fixe a montré aussi d'autres avantages sur celle de Lyapounov, les conditions de la première méthode sont en moyenne, cependant celles de Lyapounov sont ponctuelles. Dans plusieurs études la méthode de point fixe s'est montré viable et incontournable.

Toutes les équations considérées dans ce projet sont des équations à retard. Dans la description mathématique d'un grand nombre de phénomènes, en biologie, en médecine, en chimie, en physique, en technologie, et en sciences économiques, ... etc, on a l'habitude de supposer que l'évolution du système dépend uniquement de son état actuel. Mais il existe des situations où l'évolution d'un processus dépend non seulement de son état actuel, mais aussi des états antérieurs. On rencontre de tels phénomènes dans de nombreux domaines, en particulier dans des systèmes de dynamique de population. Parmi les modèles mathématiques qui peuvent décrire de telles situations, on rencontre des équations différentielles à retard, et des équations de type neutre. On trouve alors des équations dont les termes temporels sont, d'une manière générale, des termes non locaux, faisant intervenir les valeurs de l'état à des instants antérieurs, discrets ou distribués. Ces termes non locaux sont soit d'ordre 0 (équations à retard), soit d'ordre 1 (équations de type neutre). Enfin, les problèmes étudiés peuvent se placer dans des domaines spatiaux ou autres et se modélisent sous forme d'équations aux dérivées partielles. D'une manière générale, les retards apparaissent à cause du temps nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. L'introduction des retards dans les modèles entraîne l'apparition de fluctuations avec des phases d'explosion, suivies de phases latentes ou même des phases d'extinctions. On peut grossièrement situer les équations à retard comme étant à mi-chemin entre les équations ordinaires et les équations aux dérivées partielles. La différence avec les équations ordinaires est que les données initiales sont elles mêmes des fonctions. Ceci nécessite une étude mathématique plus élaborée que pour les équations différentielles ordinaires. La nature du retard (discret, continu, infini, dépendant de l'état, ...) complique potentiellement l'étude de l'équation.

De manière générale, les équations à retard apparaissent de plus en plus fréquemment dans la modélisation de l'évolution des populations. Les phénomènes à **" retard "** s'observent également en physique, en mécanique des matériaux, dans la modélisation des chocs de particules, ... etc. Dans la plupart des situations de la physique ou de la mécanique, le retard est considéré comme petit et estimé sans effet qualitatif, il est donc le plus souvent ignoré. Dans l'étude des populations vivantes, la nécessité de tenir compte du retard s'est imposée progressivement. Elle est introduite en écologie par V. Volterra, elle a été étendue dans les années 70 à la biologie (prolifération de certains constituants du sang, Glass et Mackey [72]), production cellulaire, Arino et Kimmel [13], à la théorie des épidémies Yorke [92] et Cooke [31] et a, peu à peu, fait son chemin dans ces domaines.

Dans le contexte des dynamiques des populations et de la biologie mathématique en général, nous citons le livre de Bellman et Cooke [16] dans lequel nous pouvons trouver les motivations pour étudier les systèmes à retard. Des motivations biologiques, pour modéliser et étudier théoriquement les systèmes à retard, peuvent être trouvées aussi dans les livres de May [73], Smith [74] et de Pielou [80]. Des exemples concrets de modèles à retard en biologie mathématiques sont contenus dans les livres de Cushing [32], Mac Donald [71] et Gopalsamy [50]. Nous citons aussi le livre de Hale [54, 87] et Yang Kuang [63] qui ont poussé l'étude des équations à retard à un niveau très avancé, motivé par une application biologique.

Volterra considéra en 1928 dans [89] le modèle suivant

$$x'(t) = \int_{t-r}^{t} a(t-s)x(s)ds. \tag{1}$$

avec un retard constant $r > 0$. Volterra a proposé une méthode pour construire une fonctionnelle de Liapunov pour cette équation et son œuvre a servi pour plateforme pour tous les investigateurs venus après lui. En 1963, motivé par les remarques de Volterra, Levin [65] a construit une fonctionnelle de Liapunov pour l'analogue non linéaire de (1). Il révisa ensuite ce travail conjointement avec Nohel [66] et inclura dans ses études l'équation

$$x'(t) = -\int_{t-r}^{t} a(t,s)g(x(s))\,ds \tag{2}$$

avec la valeur initiale

$$x(t) = \psi(t) \text{ sur } I$$

On observe que si $t = 0$ l'équation (2) devient

$$x'(0) = -\int_{-r}^{0} a(0,s)g(x(s))\,ds.$$

Ceci nécessite la donnée initiale d'une fonction définie sur tout l'intervalle $[-r, 0]$ de $\mathbb{R}$.

Lorsque $I = [-r, 0]$, il s'agit là d'équations différentielles à retard fini auquel cas l'espace de phase C_r est l'espace des fonctions continues de $[-r, 0]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la convergence uniforme. Donc la solution x de (2) doit dépendre d'un retard fonctionnel telle que $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-r, 0]$. Lorsque $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ et $x(t) = \psi(t)$, $t \in (-\infty, 0]$, alors pour résoudre l'équation (2) pour $t \geq 0$, nous allons lui associer un retard fonctionnel infini qui n'est pas nécessairement constant. On observe que lorsque le retard est non borné, on parlera d'équations différentielles à retard infini et cette propriété a permis de développer une théorie complète des équations différentielles à retard sur des espaces multi dimensionnels. Néanmoins, l'investigation des équations avec retard infini sur de tels espaces exige et nécessite le développement d'autres outils d'analyse fonctionnelle pour faire face aux problèmes liés à l'aspect qualitatif des solutions. Les EDR et EIDR ont des applications dans une très grande variété de domaines. Nous donnerons quelques exemples d'EDR et EIDR appliquées à la biologie et à l'écologie ainsi à l'électricité. D'autres exemples peuvent se trouver dans la littérature foisonnante de ce domaine des mathématiques.

Dans le premier chapitre de cette thèse nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons en particulier quelques résultats fondamentaux sur la théorie de la point fixe et degré topologique pris en majorité du fameux livres [86] et [75] . Un rappel sur les équations différentielles à retard et les équations différentielles de type neutre est donné et pour de amples détails on renvoi aux références [50, 52, 53, 54, 63, 87].

Dans le deuxième chapitre, nous allons étudier l'existence d'une solution périodique positive pour un système d'équations différentielles non linéaire de type neutre à retard donné sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \pm x(t)\left[G(t, x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_n(t))) - \varphi(t)x'(t-r(t))\right], \\[2ex] \dfrac{du}{dt} = a(t)u(t) - \lambda b(t) f(t, u(t-\delta(t))) - c(t)x(t-\sigma(t)), \end{cases} \tag{3}$$

Avec, $G(t, x_1, \ldots, x_n) \in C\left(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}\right)$, $G(t+\omega, x_1, \ldots, x_n) = G(t, x_1, \ldots, x_n)$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $\varphi, a, b, c \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $r, \sigma, \delta, \tau_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $i = 1, n$. sont des fonctions continues ω–périodiques et $\omega > 0$ est une constante de $\mathbb{R}$. Où $\lambda > 0$ est un paramètre de $\mathbb{R}$. L'étude des systèmes à retard appartenant au type neutre ne sera pas abordée. Cependant, il est important de signaler la différence avec le type retardé. En effet, pour ce type, les arguments du champ de vecteurs G font intervenir la dérivée de l'état x_t et par conséquent des dérivées retardées.

Dans le troisième chapitre nous allons étudier une équation intégro-différentielle non linéaire de type neutre à retards, $\tau_j(t) \geq 0$ $j = \overline{1,N}$. Elle s'identifie à la forme

$$\ddot{x} + f(t,x,\dot{x})\dot{x} + \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} a_j(t,s) g_j(s,x(s))\, ds + \sum_{j=1}^{N} b_j(t) x'\Big(t - \tau_j(t)\Big) = 0. \tag{4}$$

Ainsi, nous associons à cette équation une condition initiale,

$$x(t) = \psi(t), t \in [m(t_0), t_0],$$

où

$$\psi \in C([m(t_0), t_0], \mathbb{R}),\ m_j(t_0) = \inf\{t - \tau_j(t),\ t \geq t_0\},$$
$$m(t_0) = \min\Big\{m_j(t_0) \mid 1 \leq j \leq N\Big\},$$

et

$$\tau_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ b_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions différentiables avec $t - \tau_j(t) \longrightarrow \infty$, $j = \overline{1,N}$ lorsque $t \longrightarrow \infty$ et $a_j : \mathbb{R}^+ \times [m(t_0), \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, sont des fonctions continues.

Beaucoup d'investigateurs des cas particuliers de (4) ont étudié la bornitude et la stabilité de l'équation (4) par la technique de point fixe, Par exemple, T.A. Burton dans [18] et D.Pi dans [79]

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov. Les résultats que nous développerons de ce Chapitre s'appuierons sur ces concepts pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes à retards étudiés.

Dans le dernier chapitre nous considérons l'équation intégro-différentielle de second ordre non linéaire à retard variable $\tau(t) > 0$.

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x^3(t) = \int_{-\infty}^{t} D(t,s) f(s, x(s - \tau(s)))\, ds, \tag{5}$$

et nous allons proposer des conditions pour qu'une solution périodiques puisse exister. L'idée consiste à faire une analyse sur les fonctions p, q de sorte que l'équation (5) admette l'inversion pour produire une nouvelle, mais équivalente, équation intégrale ayant les mêmes propriétés. Cette nouvelle équation se met sous forme d'une somme de deux applications, la première est une contraction et l'autre continue à image compact. Un choix convenable des hypothèses permet de valider les conditions de ce dernier théorème de sorte qu'une solution périodique du problème étudié est conclue. Malheureusement, les conditions qui permettent d'aboutir à l'unicité de cette solution restent encore à trouver.

Le but principal dans la suite est d'étudier quelques propriétés qualitatives et quantitatives des solutions comme la stabilité, stabilité asymptotique et l'existence de solutions périodiques. Nous nous intéressons à la stabilité asymptotique de la solution zéro. Dans un premier temps on va présenter sommairement la théorie de la stabilité des équations intégro-différentielles à retard fonctionnel de type neutre. Dans une deuxième étape on présente deux exemples d'équations intégro-différentielles, la première étant linéaire et l'autre non linéaire. Ces exemples font parties des problèmes qui ont résisté à l'étude par la méthode de Lyapounov.

Les résultats établis dans ce projet de thèse constituent, ce que l'on souhaite, une étape avancée dans ce domaine de recherche car l'étude que nous proposons ici prend en charge des équations intégro-différentielles totalement non linéaires de type neutre non traitées jusqu'ici. En outre notre méthode de point fixe améliore nettement les résultats antérieurs particulièrement ceux de Becker et Burton [15, 17] avec beaucoup moins de restrictions et avec plus de rigueurs.

La méthode de point fixe utilisée pour des fins de stabilité a été utilisé dans un certain nombre de travaux récents comme [1]–[11], [15], [17]–[27], [35]–[38], [40], [45]–[44], [56]–[58], [77]–[79], [81]–[83], [95, 96]. Cette méthode repose sur trois éléments fondamentaux. A savoir,

- ☛ une application de point fixe,
- ☛ un espace fonctionnel convenable apte à contenir les solutions souhaitables,
- ☛ un théorème de point fixe convenable.

Cette méthode a montré des avantages significatifs sur celle de Liapunov. En particulier lorsque les coefficients sont non bornés et/ou si le retard est non borné la méthode directe de Liapunov a montré ses limites contrairement à celle du point fixe. De plus, les conditions de la méthode de point fixe sont en moyenne par contre celles de la deuxième sont toujours ponctuelles.

I Préliminaires

Mots clés.
Point Fixe, Krasnoselskii, Contraction large, Degré topologique, Équation à retard.

Le but de ce premier chapitre est de présenter et rappeler un certain nombre d'outils d'analyse, comme la théorie de point fixe, et degré topologique, les équations différentielles à retard fonctionnel ainsi que l'essentiel des éléments qui seront utilisés dans ce manuscrit. Nous en profiterons également pour introduire les principales notations. Nous donnerons aussi la définition de la stabilité d'équations à retard. Pour de plus amples détails nous renvoyons le lecteur par exemple aux documents suivants [14, 16, 31, 32, 33, 39, 50, 52, 53, 54, 63, 71, 74, 76, 86, 87] et pour degré topologique nous citons ici quelques références dans ce contexte [42], [43], [49], [75].

I.1 Outils et notions fondamentales

Les définitions peuvent être données pour des fonctions à valeurs complexes. Mais, dans notre contexte, on parlera seulement des fonctions à valeurs réelles.

I.1.1 Distances et normes

Définition 1

Le couple $(\mathbb{S},\rho)$ est dit un espace métrique si $\mathbb{S}$ un ensemble arbitraire non vide et ρ : $\mathbb{S}\times\mathbb{S}\longrightarrow\mathbb{R}^{+}$ une application vérifiant pour tout x,y et z de $\mathbb{S}$,
$(\rho 1)$ $\rho(x;y)\geq 0$, $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,y)=0 \implies x=y$,
$(\rho 2)$ $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (symétrie) et
$(\rho 3)$ $\rho(x,y)\leq\rho(y,z)+\rho(z,y)$ (inégalité triangulaire).

Définition 2

Un espace métrique $(\mathbb{S},\rho)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de points de $\mathbb{S}$ est convergente dans $\mathbb{S}$.

Proposition 3

Dans un espace métrique $(\mathbb{S}, \rho)$, toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Définition 4

Soit $\mathbb{S}$ un espace vectoriel. On appelle norme sur $\mathbb{S}$ toute application de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{R}^+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{S}$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$,
n1 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, (homogénéité),
n2 $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ et
n3 $\left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$ (inégalité triangulaire).

Exemple 5

Soient $X = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ et $Y = C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ le sous espace de $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ des fonctions continument différentiables. Alors, le nombre $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ où $|\cdot|$ est une quelconque norme sur $\mathbb{R}^n$, constitue une norme sur X mais elle ne l'est pas sur Y. Cependant, les nombres
$\|f\|_0 = \|f'\|_\infty + |f(0)|$ et $\|f\|_1 = |f(0)| + \int_{[0,1]} |f(t)|\,dt$, définissent des normes sur Y.

Définition 6

Un espace vectoriel normé est un couple $(\mathbb{S}, \|\cdot\|)$ où $\mathbb{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{S}$.

Si $(\mathbb{S}, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé alors $\rho(x, y) := \left\|x - y\right\|$ définit une distance sur $\mathbb{S}$ dite la métrique associée à cette norme.

Définition 7

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(\mathbb{S}, \|\cdot\|)$ complet pour la métrique associée à cette norme.

Exemple 8

Muni de la norme $\|f\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach. On peut également vérifier que $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ est un Banach lorsqu'il est muni d'une des normes $\|\cdot\|_0$ ou $\|\cdot\|_1$ qui sont en fait équivalentes sur $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Théorème 9

Un sous espace fermé d'un espace de Banach est lui–même de Banach.

Exemple 10

Soit $h : \mathbb{R}^+ \to]0, \infty[$ une fonction continue donnée (un "poids "). Considérons

$$\mathbb{S}_h = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \text{ telles que } \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \{h(x) |f(x)|\} < \infty \right\}$$

muni de la norme $\|f\|_{\infty,h} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \{h(x) |f(x)|\}$. Alors, $\mathbb{S}_h$ est un espace de Banach pour cette norme.

Exemple 11

Soit $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue donnée avec $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\mathbb{S}$ l'espace de fonctions continues et bornées $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, telles que $f(t) = \psi(t)$ pour $a \leq t \leq b$. Pour $f, g \in \mathbb{S}$, on pose

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [a, \infty)} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty .$$

Alors, $(\mathbb{S}, \rho)$ est un espace métrique complet.
Dénotons par $C := C(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2)$ l'espace de fonctions continues allant de $\mathbb{S}_1$ à $\mathbb{S}_2$. Posons

$$\mathbb{M} := \{\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C, \ |\varphi(t)| \leq 1, \ \varphi(t) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty\},$$

et

$$\mathbb{Q} := \{\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R} \ \mid \varphi \in C, \ \ |\varphi(t)| \leq 1\}$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme du supremum et soit $|\cdot|_h$ une norme poids définie par la donnée d'une fonction $h : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty), \ h(0) = 1, \ h(t) \longrightarrow \infty$ pour $\varphi \in \mathbb{M}$ ou $\mathbb{Q}$ comme suit

$$|\varphi|_h := \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)| / |h(t)|.$$

Exemple 12

$(\mathbb{M}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Exemple 13

$(\mathbb{Q}, |\cdot|_h)$ est un espace de Banach.

Exemple 14

$(\mathbb{M}, |\cdot|_h)$ n'est pas un espace de Banach.

Preuve. Soit $\{\phi_n\}$ la suite de fonctions continue définie par

$$\begin{array}{rcl} \phi_n(t) & = & 1, \quad 0 \leq t \leq n, \\ \phi_n(t) & = & 0, \quad n+1 \leq t < \infty, \end{array}$$

ϕ_n est linéaire et continue sur $[n, n+1]$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre choisi arbitrairement. On doit trouver un indice N tel que $n, m \geq N$ et $t \in \mathbb{R}$ implique que

$$\left|\phi_n(t) - \phi_m(t)\right| < \varepsilon h(t). \tag{I.1}$$

Choisissons T tel que $\varepsilon h(T) > 2$. De toute évidence, pour tout n, m et pour tout $t \geq T$ on a (I.1). Le choix de $N > T$ implique que pour $n, m \geq N$ et $0 \leq t \leq N$ on aura $\phi_n(t) = \phi_m(t) = 1$ de sorte que (I.1) est valide. Cela démontre que la suite de, en effet, est Cauchy. Cependant pour un t fixé on a $\phi_n(t) \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, or 1 n'est pas un élément de M. D'ou la conclusion. ∎

I.2 Théorèmes de point fixe

Dans ce paragraphe on rappelle les théorèmes de point fixe qu'on va utiliser dans ce travail. Pour plus de détails sur les théorèmes de point fixe on réfère au fameux livre de Smart [86].

Définition 15

Soit P une application d'un ensemble $\mathbb{S}$ dans lui–même. On appelle point fixe de P tout point u tel que $Pu = u$. Si un tel u existe on dit que P possède un point fixe. Il est clair que la recherche d'un point fixe pour P est équivalent à la recherche d'un $u \in \mathbb{S}$ tel que $Pu - u = 0$.

Exemple 16

Si $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ est une fonction continue alors f admet un point fixe au moins sur $[a,b]$.

Pour résoudre un problème de point fixe relativement compliqué, on doit identifier trois éléments fondamentaux, à savoir,

1. Un ensemble convenable $\mathbb{S}$ apte à contenir les solutions du problème ;
2. Une application $P : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème ;
3. Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de P sur $\mathbb{S}$.

Il est donc naturel d'introduire des théorèmes de points fixe. La théorie de point fixe aujourd'hui à pris des dimensions considérables. Ici, on va se contenter des théorèmes utiles pour notre analyse.

I.2.1 Le principe de l'application contractante

En 1922 Stefan Banach établi un théorème qui s'applique aux fonctions contractantes définies sur des espaces métriques complets. Ce théorème a fait preuve d'une grande utilité en analyse. En particulier il a donné des résultats concluant dans le domaine de l'existence de solutions et le calcul approché pour de nombreux problèmes émanant de l'analyse non linéaire. Ici on va découvrir une autre dimension de ce théorème de Banach.

Théorème 17 (Principe de l'application contractante)

Soit $(\mathbb{S}, d)$ un espace métrique complet non vide et soit $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ une contraction i.e., il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que $d(fx, fy) \leq kd(x,y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{S}$. Alors f admet un et seul point fixe $x^* \in \mathbb{S}$ ($fx^* = x^*$).

Remarque 18

1) L'hypothèse $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ n'implique pas que f est une contraction.
2) L'hypothèse $\mathbb{S}$ complet est fondamentale. Par exemple, si $\mathbb{S} =]0,1]$ et $f(x) = x/2$, alors f est contractante et n'a pas de point fixe dans $\mathbb{S}$.

I.2.2 Compacité et applications compactes

Soit $(\mathbb{S}, d)$ un espace métrique. Un sous ensemble $\mathbb{M}$ de $\mathbb{S}$ est dit compact ssi de tout recouvrement ouvert de $\mathbb{M}$ on peut extraire un sous recouvrement fini. D'une manière équivalente, un sous ensemble $\mathbb{M}$ de $\mathbb{S}$ est compact si et seulement si tout suite de $\mathbb{M}$ admet une sous suite convergeant dans $\mathbb{M}$.

Un sous ensemble $\mathbb{M}$ de $\mathbb{S}$ est dit totallement borné si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini de points $x_1, x_2, ..., x_n$ dans $\mathbb{S}$ tels que $\mathbb{M} \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$.

Remarque 19

1) Tout sous ensemble d'un ensemble totalement borné est totalement borné.
2) Tout ensemble totalement borné est borné. Cependant, un sous ensemble borné n'est pas totalement borné en général.

Proposition 20

Soit $\mathbb{S}$ un espace métrique. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes,
i) $\mathbb{S}$ est compact.
ii) Toute suite de $\mathbb{S}$ admet une sous suite convergente.
iii) $\mathbb{S}$ est complet et totalement borné.

Proposition 21

Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble d'un espace métrique complet $\mathbb{S}$. Alors,
a) $\mathbb{M}$ est compact si et seulement si $\mathbb{M}$ est fermé et totalement borné.
b) $\overline{\mathbb{M}}$ est compact si et seulement si $\mathbb{M}$ est totallement borné.

Un sous ensemble $\mathbb{M}$ d'un espace métrique est dit relativement compact si son adhérence est compacte, i.e., $\overline{\mathbb{M}}$ est compact. En particulier, on a la proposition suivante.

Proposition 22

Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble fermé d'un espace métrique complet. Alors, $\mathbb{M}$ est compact ssi il est relativement compact.

Définition 23

Soit $\{f_n\}$ suite de fonctions réelles $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
a) $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur $[a,b]$ s'il existe un $l > 0$ tel que $|f_n(t)| \leq l$ pour tout n et tout $t \in [a,b]$.
b) $\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $t_1, t_2 \in [a,b]$ et $|t_1 - t_2| < \delta$ implique $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \epsilon$ pour tout n.

Le théorème suivant fourni la meilleure méthode pour prouver la compacité dans les espaces de fonctions continues.

Théorème 24

(**d'Ascoli-Arzela**) Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions réelles uniformément bornée et équicontinue sur $[a,b]$. Alors, il existe une sous-suite $\left\{f_{n_k}\right\}_k$ de $\{f_n\}_n$ et une fonction f continue dans $[a,b]$ telles que $\left\{f_{n_k}\right\}_k$ converge uniformément vers f dans $[a,b]$.

Il existe une version qui étend ce dernier théorème d'Ascoli Arzelà lorsque on travaille sur des intervalles non compacts. Cette extension se trouve dans ([28], Théorèm 1.2.2 p. 20) dont l'énoncé est comme suit.

Théorème 25

Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $q(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Si $\{\varphi_n(t))\}_n$ une suite équicontinue de fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^N$ avec $|\varphi_n(t))| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, alors il existe une sous suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction $\varphi(t)$ avec $|\varphi(t))| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, où $|\cdot|$ dénote la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

Soit X et Y deux espaces vectoriels normés et Ω un sous ensemble de X.

Définition 26

Une application continue $T : X \to Y$ est dite compacte si lorsque Ω est borné implique $T(\Omega)$ est relativement compact i.e.,$\overline{T(\Omega)}$ est compact. C'est à dire si pour toute suite bornée $\{x_n\}$ dans X, la suite $T(x_n)$ possède une sous suite convergeant dans Y.
T est dite complètement continue si elle est compacte et continue.

I.2.3 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 27 (Schauder)

[86] Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach $(\mathbb{S}, \|\cdot\|)$. Alors, toute application complètement continue $T : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ admet un point fixe.

Le théorème de Schauder s'applique en particulier aux équations différentielles non linéaires. Cependant, le théorème ne garantit pas l'unicité de la solution lorsque celle-ci existe. Il existe beaucoup de problèmes pour lesquels on peut conclure l'unicité de la solution obtenue par le théorème de Schauder avec des conditions moins restrictives que des conditions de Lipschitz.

I.2.4 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

Nous rappelons ici le théorème hybride de point fixe due à Krasnoselskii dont la preuve peut être cherchée dans (voir [86]).

Théorème 28

Soit $(\mathbb{S}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit $\mathbb{M}$ une partie non vide, convexe, bornée et fermée de $\mathbb{S}$. Si $A, B : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{S}$ sont deux applications satisfaisant,
i) $Ax + By \in \mathbb{M}$, $\forall x, y \in \mathbb{M}$,
ii) A est coplètement continue et
iii) B est une contraction de constante $\alpha < 1$.
alors, il existe un point $x \in \mathbb{M}$ solution de l'équation $Ax + Bx = x$.

Indiquons enfin un lemme très utile lorsque l'on cherche à prouver que l'existence et la positivité d'une solution d'un problème périodique.

Lemme 29

Soit X un espace de Banach,et K est un cône de X. on suppose que Ω_1,Ω_2, sont des ouverts de X avec $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subseteq \Omega_2$ et soit $A : K \cap \left(\overline{\Omega_2} - \Omega_1\right) \to K$ est un opérateur complètement continue tel que
(i) $\|Ax\| \leq \|x\|$ pour $x \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Ax\| \geq \|x\|$ pour $x \in K \cap \partial\Omega_2$ ou
(ii) $\|Ax\| \geq \|x\|$ pour $x \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Ax\| \leq \|x\|$ pour $x \in K \cap \partial\Omega_2$.
Alors A admet au moins un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} - \Omega_1\right)$.

I.3 Degré topologique

Les éléments qu'on va exposer ci-dessous ont été cueilli de plusieurs ouvrages de l'analyse et certains livres de spécialisés sur Degré topologique et la plupart se trouve dans la bibliographie suivante [75, 49, 42]

I.3.1 Homotopie

L'homotopie est une notion de topologie algébrique. Elle formalise la notion de déformation continue d'un objet a un autre. Deux lacets sont dits homotopes lorsqu'il est possible de passer continument de l'un a l'autre. Ce concept se généralise à bien d'autres objets que des lacets.

L'homotopie fournit des informations sur la nature topologique d'un espace. Une bande circulaire d'un plan ne peut être équivalente, au sens de l'homéomorphisme, a un disque. Dans un disque, tout lacet est homotope a un point. Dans une bande circulaire, ce n'est pas le cas. Cette remarque est source de démonstrations, comme celles du théorème de d'Alembert-Gauss, du point fixe de Brouwer, de Borsuk-Ulam ou encore celle du théorème du sandwich au jambon qui précise par exemple que, trois solides mesurables et de mesures finies de l'espace usuel étant donnes, il existe un plan qui sépare chacun des solides en deux parties de mesures égales.

Définition 30 (Applications homotopes)

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \to Y$ deux applications continues. On dit que f et homotope à g s'il existe une application continue $\Psi : [0;1] \times X \to Y$ telle que

$$\forall \in x \in X, \Psi(0,x) = f(x) \text{ et } \Psi(1,x) = g(x)$$

On dit alors que Ψ une **homotopie** de f à g.

De manière imagée, en représentant le segment $[0;1]$ verticalement, la tranche inférieure donne f, la tranche supérieure donne g et les tranches intermédiaires des fonctions qui font passer continûment de f à g. On définit même une notion un peu plus générale **Invariance par homotopie**.

Définition 31 (Invariance par homotopie)

Soit X un espace de Banach. Si Ψ est une application compacte de $[0;1] \times \bar{\Omega}$, avec Ω un sous-ensemble ouvert de X, soit $y \notin \Psi(\partial\Omega, [0,1])$, on a alors

$$d(\Psi(\cdot,\theta), y) = d(\Psi(\cdot,0), \Omega, y) \text{ pour tout } 0 \leq \theta \leq 1.$$

I.3.2 Degré de Mawhin

Ici X, Z sont des espaces vectoriels normés. On s'intéressera par l'étude des équations opérationnelles de la forme

$$Lx = Nx \tag{I.2}$$

où $L : D(L) \subset X \to Z$ est un opérateur linéaire et $N : X \to Z$ est une application non nécessairement linéaire. L'équation (I.2) représente une grande classe de problèmes, y compris des équations différentielles non linéaires à retard. Il n'y a aucun problème si le noyau de la partie linéaire de cette équation ne contient que zéro, car dans ce cas L est surjective. L'équation peut être réduite à un problème de point fixe pour l'opérateur $L^{-1}N$; et pour le résoudre, on utilisera un théorème convenable (par exemple celui de Schauder si $L^{-1}N$ est compact ou de Banach si $L^{-1}N$ est contractant et $X = Z$ est un Banach).

Dans le cas où L^{-1} n'existe pas (i.e $\ker L \neq \{0\}$) et X, Z sont des espaces de Banach. En 1972, Mawhin a répondu à cette question dans son célèbre article "Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations" [75] où il a supposé que L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. En effet, dans ce cas on a

$$\dim\ker L = co\dim ImL) = n < \infty$$

Par conséquent, il existe deux projections continues $P : X \to X$ et $Q : Z \to Z$ telles que

$$ImP = \ker L \text{ et } \ker Q = ImL$$

et un isomorphisme $J : \ker L \to Y_0$ où Y_0 est le supplémentaire topologique de ImL. Mawhin a montré que l'application $L + JP$ est bijective et que

$$(L + JP)^{-1} = J^{-1}Q + L_P^{-1}(I - Q)$$

avec $L_P = L\big|_{D(L)\cap \ker P}$, alors l'équation (I.2) prend la forme

$$x = (P + J1QN + L_P^{-1}(I - Q)N)x$$

c'est à dire que l'équation donné, est équivalente à un problème de point fixe pour l'opérateur

$$M = P + J^{-1}QN + L_P^{-1}(I - Q)N,$$

qui est indépendant du choix des projections P et Q. Si M est compact, alors à partir du degré de Leray- Schauder, il a développé une nouvelle théorie de degré topologique connu sous le nom de degré de coincïdence pour les couples (L, N).

Définition 32 (Opérateurs de Fredholm)

Soit X et Z deux $\mathbb{R}$–espaces vectoriels normés ; on dit qu'une application linéaire $L : D(L) \to Z$, est de Fredholm si elle vérife les conditions suivantes
(i) $\ker L = L^{-1}\{0\}$ est de dimension finie.
(ii) $ImL = L(D(L))$ est fermé et de codimension finie.

Définition 33 (Indice d'un opérateur de Fredholm)

L'indice d'un opérateur de Fredholm L est l'entier

$$Ind(L) = \dim \ker L - co\dim ImL.$$

Définition 34 (Opérateur correcteur de L)

Toute application $A : X \to Z$ linéaire, continue et de rang fini telle que $(L + A) : D(L) \to Z$ soit bijective s'appelle **correcteur** de L.
On note par $\mathcal{F}(L)$ l'**ensemble des correcteurs** de L, d'après ce qui précède $\mathcal{F}(L) \neq \emptyset$

Définition 35 (Opérateur L–compact)

[75] On dit que $N : \Omega \to Z$ est L–compact sur Ω, s'il existe un opérateur $A \in \mathcal{F}(L)$ tel que $(L+A)^{-1} N$ est compact sur Ω.

Définition 36 (Défnition équivalente)

[75] On dit que $N : \Omega \to Z$ est L–compact sur Ω si est seulement si l'opérateur $M = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$ est compact sur Ω.

Remarque 37

La définition de la L–compacité ne dépend ni du choix des projecteurs P et Q, ni de l'isomorphisme J et comme P, $J^{-1}Q$ sont des opérateurs linéaires continus de rang fini alors, pour que N soit L–compact sur $\bar{\Omega}$, il faut et il suffit que $QN : \bar{\Omega} \to Z$ soit continue, $QN\left(\bar{\Omega}\right)$ soit borné et $(I-Q)N : \bar{\Omega} \to X$ soit compact.

I.3.3 Théorème de continuation de Mawhin

Les propriétés d'existence et d'invariance par homotopie, conduisent à des théorèmes d'existence trés importants souvent utilisés pour résoudre des problèmes non linéaires. Tous ces théorèmes sont des conséquences de la théorie du degré de Leray-Schauder. Le théorème suivant a été démontré par Gaines et Mawhin pour plus détail voir ([49], page 40). Soient X, Z deux espace vectoriels normé réels et $L : D(L) \subset X \to Z$ un opérateur de Fredholm.

Théorème 38

Soit X et Z deux espaces de Banach réels, L un opérateur de Fredholm d'indice 0. On suppose que $N : \bar{\Omega} \to Z$ est L–compact sur $\bar{\Omega}$ avec Ω un ouvert borné de X. Si les conditions suivantes sont satisfaites
(a) pour tout $\eta \in (0,1)$ et tout $x \in \partial\Omega \cap DomL$ on a

$$Lx \neq \eta Nx.$$

(b) pour tout $x \in \partial\Omega \cap \ker L$,on ait

$$QNx \neq 0,$$

et

$$\deg\{QNx, \partial\Omega \cap \ker L, 0\} \neq 0.$$

Alors l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solution dans $\bar{\Omega} \cap DomL$.

I.4 Équations différentielles à retard et de type neutre

Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée par rapport au temps présent de la solution dépend d'une donnée (de cette solution) sur un temps antérieur. Une équation différentielle à retard est un modèle spécifique d'équations différentielles fonctionnelles dans lesquelles la partie fonctionnelle de l'équation est l'évaluation d'une fonctionnelle sur une étape antérieure (le passé) au processus ([39], [52, 53], [63]). Ce type d'équations a connu ces dernières décennies un grand intérrêt. Les investigateurs de toute les disciplines, physique, biologie, économie, logistiques, informatique et autres, trouvent leurs models bien exprimés par des équations à retard qu'avec des EDO.

I.4.1 Equations différentielles à retard

Étant donné un nombre $r > 0$. Soit $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach de fonctions continues définies sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a,b] = [-r,0]$ on pose

$$C_0 = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$$

et on désigne la norme d'un élément ψ de C_0 par

$$\|\psi\| = \sup\left\{\left|\psi(s)\right|, -r \le s \le 0\right\}$$

où $|\cdot|$ est une quelconque norme sur $\mathbb{R}^n$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ et soit

$$x \in C([t_0 - r, t_0 + \sigma],\ \mathbb{R}^n),\ t \in [t_0, t_0 + \sigma].$$

Définissons la fonction x_t de C_0 par

$$x_t(s) = x(t+s), s \in [-r,0].$$

Remarque 39

Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t-r,t]$, translaté de $[-r,0]$.

Exemple 40

$x(t) = t^2 + 1$, $t_0 = 0$, $\sigma = 2$, $r = 1$ alors $t \in [0,2]$, $s \in [-1,0]$, $x_t(s) = x(t+s) = (t+s)^2 + 1$, pour $t = 1$ on a $x_t(s) = (s+1)^2 + 1$,

Définition 41

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard égal r sur U une relation de la forme

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{I.3}$$

où

$$x_t(s) := x(t+s),\ s \in [-r, 0].$$

On la *désigne parfois par* EDR(f). Le nombre r est appelé le retard. En clair, le cas $r = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires.

Définition 42

On dit que l'équation (I.3) est autonome si la fonction f ne dépend pas de t. Dans ce cas on écrit $f(u)$ au lieu de $f(t, u)$.

Il est évident qu'une condition initiale appropriée au temps $t = t_0$ exige la détermination de la fonction x sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$, i.e.,

$$x(t) = \psi(t),\ t \in [t_0 - r, t_0],$$

où $\psi : [t_0 - r, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée supposée continue appelée la condition initiale de l'équation à retard (I.3). Ainsi, l'équation (I.3) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) \quad &: \ = f(t, x_t),\ \ t \geq t_0 \\ x(t) \quad &= \ \psi(t),\ t \in [t_0 - r, t_0], \end{aligned} \tag{I.4}$$

avec ψ une fonction donnée continue sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$.

L'équation (I.3) est dite linéaire si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi$, où $L(t)$ est linéaire en chaque t. L'équation (I.3) est dite non homogène si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi + h(t)$, où $h(t) \neq 0$. L'équation (I.3) est dite autonome si $f(t, \varphi) = g(\varphi)$, g indépendante de t. A titre d'exemple, les équations suivantes sont des équations différentielles à retard

$$x'(t) = 2x(t) + 5x(t-1), \tag{I.5}$$

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t - r(t)) + h(t), \tag{I.6}$$

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} x(t+s)\,ds, \tag{I.7}$$

$a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ sont des fonctions continues. L'équation (I.5) représente une équation différentielle linéaire autonome à retard constant $r = 1$, l'équation (I.6) est une équation différentielle linéaire à retard fonctionnel non homogène non autonome et l'équation (I.7) représente une équation intégro-différentielle linéaire à retard.

Définition 43

Étant donnés $\psi \in C_0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, une solution du problème à valeur initiale

$$x' = f(t, x_t),\ t \geq t_0,\ x_{t_0} = \psi \tag{I.8}$$

est une fonction notée $x(t)$ telle que $x(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0 - r; t_0]$ et satisfait (I.3) pour $t \in [t_0; t_0 + \sigma]$, $\sigma > 0$. Une telle fonction $x(\cdot)$ est dite *solution de* (I.3) *à travers* (t_0, ψ) et est notée souvent par $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, \psi)$.

Etant données une fonction $\psi \in C_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f(t, \psi)$ une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation (I.3) à travers (t_0, ψ) ([52]) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale

$$x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(u, x_u)du,\ \ t \geq t_0,\ \ x_{t_0} = \psi.$$

Définissons l'application A par l'expression

$$\begin{aligned} Ax(t) \ &: = f(t, x_t),\ t \geq t_0, \\ x_{t_0} \ &= \ \psi. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'existence d'une solution de cette équation à travers $(t_0, \psi) \in \mathbb{R} \times C$, on considère un nombre $\sigma > 0$, et toutes les fonctions définies sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ qui sont continues et qui coïncident avec ψ sur $[t_0 - r, t_0]$ i.e., $x_{t_0} = \psi$. On demande que les valeurs de ces fonctions sur $[t_0, t_0 + \sigma]$ répondent à la condition $\left|x(t) - \psi(0)\right| \leq \beta$. La fonction obtenue A correspondant à l'équation intégrale est bien définie et on démontre que σ et β peuvent être choisis de sorte que A envoie cette classe (de fonctions continues) dans elle-même, qu'elle est continue et à image compacte. Dans ce contexte, le théorème du point fixe de Schauder peut s'appliquer pour conclure l'existence d'une probable solution (pour de amples détails on renvoi aux livres ([52] et [63]).

Remarque 44

Dans le cas où il y a unicité de la solution de (I.3) à valeur initiale ψ en t_0 (c-à-d. la solution du problème (I.8) celle-ci est notée par $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, \psi)$.

L'équation (I.3) est d'un type qui inclut aussi bien les EDO

$$x' = f_1(t, x),$$

que les équations différentielles à retard

$$x'(t) = f_2(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), ..., x(t - \tau_n(t)))$$

avec $0 \le r_i(t) \le r$, $i = 1,\dots,n$ puisqu'il suffit de poser

$$f(t,u) = f_2(t,u(0),u(-\tau_1(t)),\dots,u(-\tau_n(t))).$$

Nous rappelons, dans ce paragraphe, les théorèmes de base sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (I.3).

Théorème 45 (Existence)

Considérons l'équation (I.3) et supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f(t,\varphi)$ une application continue sur Ω. Si $(t_0,\psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation (I.3) passant par (t_0,ψ).

Définition 46

On dit que la fonction $f(t,\varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times C_0$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $(t,\varphi_i) \in K$, $i = 1,2$ on a

$$|f(t,\varphi_1) - f(t,\varphi_2)| \le k|\varphi_1 - \varphi_2|. \tag{I.9}$$

Théorème 47 (Unicité)

Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}\times C_0$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, $f(t,\varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur tout sous ensemble compact de Ω. Si $(t_0,\psi) \in \Omega$, alors il existe une unique solution pour l'équation (I.3) passant par (t_0,ψ).

I.4.2 Equations différentielles de type neutre

On donne ici la définition d'une équation différentielle de type neutre avec quelques exemples. Ici aussi on conseille de voir ([52] et [63]) pour plus d'informations sur ce type d'équations.

Définition 48

Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}\times C_0$, $D : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions données continues. La relation

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t) = f(t,x_t) \tag{I.10}$$

est dite une équation différentielle de type neutre EDTN.

Définition 49

Une fonction x est dite solution de l'équation (I.10) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$, s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tels que

$$x \in C\left([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n\right), \ (t, x_t) \in \Omega, \ t \in [t_0, t_0 + \sigma],$$

$D(t, x_t)$ est continument différentiable et satisfait (I.10) sur $[t_0, t_0 + \sigma]$.
Etant donnés $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in C_0$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$ on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (I.10) passant par (t_0, ψ) s'il existe $\sigma > 0$ telle que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (I.10) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$; on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (I.10) sur $[t_0 - r, \infty)$ si pour tout $\sigma > 0$, $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (I.10) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$.

Théorème 50 (Existence)

Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution pour l'équation (I.10) passant par (t_0, ψ).

Théorème 51 (Existence et Unicité)

Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne sur tout sous ensemble compact Ω, alors pour tout $(t_0, \psi) \in \Omega$ il existe une unique solution pour l'équation (I.10) passant par (t_0, ψ).

Exemple 52

Les équations suivantes

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x'(t-1), \ r(t) = 1 \\ x'(t) &= x(t-1) + \left[x'(t-3) + 1\right]^3, \ r_1(t) = 1, r_1(t) = 1, r_2(t) = 3, \\ x''(t) &= x\left(\frac{t}{2}\right) + x'(t-1) - x''(t-3), \ r_1(t) = \frac{t}{2}, r_2(t) = 1, r_3(t) = 3, \end{aligned}$$

sont des équations différentielles à retard de type neutre.

I.5 Stabilité de solutions pour des équations à retard

La théorie de la stabilité a été créé à la fin du XIXème siècle par Liapounov. Cette théorie a trouvé une large application dans divers domaines de la physique et des sciences mathématiques. D'un point de vue mathématique, la théorie de la stabilité présente un cas particulier de la théorie qualitative des équations différentielles. La méthode de Liapounov a été l'ultime objet permettant d'étudier la stabilité pour les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Néanmoins, cette méthode a rencontré de sérieux obstacles et il existe encore un tas de problèmes qui résistent à cette technique. Ce travail contient des résultats de stabilité pour une classe d'équations totalement non linéaires de type neutre à retard fonctionnel. Cette classe d'équations fait partie du nombre de problèmes qui ont résisté à la méthode directe de Liapounov. En général l'inefficacité de la méthode de Liapounov se manifeste lorsque les fonctions utilisées dans les équations ne sont pas bornées en temps ([52, 53, 87]), si le délai n'est pas borné ou si sa dérivée n'est pas petite ([22, 85]).

Récemment, un nombre d'investigateurs de ce domaine, comme Burton, Furumuchi, Zhang, Hatvani, Djoudi, Ardjouni et autres, se sont penchés sur le problème dans l'espoir de trouver une autre issue pour contourner ces difficultés. Ils ont constaté, en utilisant des exemples concrets, que la technique de point fixe peut servir pour alternative à la méthode directe. Ils ont remarqué aussi que cette dernière méthode ne résout pas uniquement des problèmes qui ont jusque–là frustré les investigateurs en fréquentant la méthode directe de Liapounov, mais la méthode possède aussi d'autres avantages. En particulier, les conditions de la dernière méthode sont souvent exprimées en moyenne par contre ceux de Liapounov se présentent sous des formes ponctuelles (voir Ardjouni [2]–[11], Becker [15], Burton [17]–[27], Djoudi [35]–[38], Gabsi [45]–[44], Jin [56]–[58], Pi [77]–[79]).

Pour $r > 0$, considérons $C_0 = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ l'espace de fonctions continues sur $[-r,0]$ a valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ce dernier espace est de Banach lorsque on le muni de la norme $\|\psi\| = \sup_{-r\leq t\leq 0}|\psi(t)|$, $\psi \in C_0$. On considère le problème à valeur initiale à retard (voir I.3) est

$$x'(t) = f(t,x_t) \text{ pour } t \geq t_0, \tag{I.11}$$
$$x(t) = \psi(t) \text{ pour } t_0 - r \leq t \leq t_0 \tag{I.12}$$

où $\psi : [t_0 - r, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, supposée continue et $f : \mathbb{R}\times C_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La fonction $f(t,x)$ est supposée satisfaire les conditions nécessaires qui garantissent l'existence de la solution $x(t,t_0,\psi)$ à travers (t_0,ψ) du problème (I.11)-(I.12) et d'être continue en (t,t_0,ψ) du domaine de définition de f (voir Hale [52]).

Définition 53

Supposons que $f(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La solution triviale $x = 0$ de (I.11) est dite stable en t_0 ($t_0 \in \mathbb{R}$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que si $\left\|\psi\right\| < \delta$, la solution (I.11)–(I.12) existe sur $[t_0 - r, \infty)$ et $\left|x(t, t_0, \psi)\right| < \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$. Dans le cas contraire on dira que la solution est instable en t_0. La solution $x = 0$ de (I.11) est dite uniformément stable si le nombre δ est indépendant de t_0.

Définition 54

La solution triviale $x = 0$ de (I.11) est dite asymptotiquement stable en t_0 si elle est stable en t_0 et s'il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ tel que toutes les fois que $\left\|\psi\right\| < \delta_1$, la solution du problème (I.11)–(I.12) satisfait

$$\lim x(t, t_0, \psi) = 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty.$$

La solution triviale $x = 0$ de (I.11) est dite uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et si il existe un $\delta_1 > 0$ (indépendant de t_0) tel que pour tout t_0 et $\left\|\psi\right\| < \delta_1$ la solution x du problème (I.11)–(I.12) satisfait la condition $x(t, t_0, \psi) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$ de la manière suivante : pour tout $\eta > 0$ il existe un $T = T(\eta) > 0$ tel que $\left|x(t, t_0, \psi)\right| < \eta$ pour $t \geq t_0 + T$.

Exemple 55

Considérons, pour $t \geq 1$, l'équation différentielle à retard

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{t}x(t) - \frac{27t}{(t+2)^3}x^3\left(\frac{t+2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{t}x(t) - \frac{27t}{(t+2)^3}x^3(t-\tau(t)), \end{aligned}$$

avec $\tau(t) = \frac{2}{3}(t-1)$, avec la condition initiale $x(1) = x_0$. On vérifie facilement que la solution unique de ce problème est

$$x(t) = x_0 t e^{-x_0^2(t-1)}, \ t \geq 1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ pour tout x_0. Supposons que $|x_0| = \delta$, alors

$$\left|x\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)\right| = \frac{1}{e}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) \geq \frac{2}{e}.$$

Par conséquent, pour tout δ la solution se trouve en dehors de la boule $|x| = \dfrac{2}{e}$ en temps $t = 1 + \frac{1}{\delta^2}$, et la solution est donc instable.

I.6 Résolution d'une équation à retard

L'objet de cette partie est de proposer une introduction à l'étude des équations différentielles à retard ordinaires (EDR) et de certaines équations intégro–différentielles à retard (EIDR).

Il n'y a pas de méthode générale pour calculer les solutions des EDR et EIDR. On ne sait résoudre explicitement que des types bien particuliers d'EDR, dont nous traitons ci-après les cas les plus fondamentaux. Pour les cas plus sophistiqués on renvoi par exemple à [52, 63]. Beaucoup de résultats existent dans ce domaine, il est possible de trouver des solutions explicites à ces équations, mais elles ne sont pas nombreuses. La résolution explicite de la plupart des EDR et EIDR reste encore un problème ouvert. Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude plus théorique qui permettait de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité, stabilité par exemple,) sans les connaître explicitement. Cette partie sera un mélange des deux parce qu'il semble nécessaire de savoir non seulement prouver que des solutions existent et que le cas échéant elles peuvent être unique mais également être capable de résoudre "à la main" certaines EDR et EIDR classiques.

I.6.1 La méthode des étapes

i) Pour résoudre une équation différentielle à retard $\tau > 0$. On se propose une fonction initiale ψ de $C([-\tau;0];\mathbb{R})$.

ii) On peut procéder de la même façon pour construire la solution sur l'intervalle $[\tau;2\tau]$ et par itération sur n'importe quel intervalle $[(k-1)\tau;k\tau]$, $k>1$. L'idée est simple et consiste alors à déterminer la solution finale en intégrant d'un intervalle à un autre, les EDOs. Cette méthode est appelée la méthode « pas-par-pas » (ou la méthode d'intégration séquentielle). La fonction $x(t)$ ainsi construite est une fonction continue et différentiable sur chaque intervalle $[t_0+(k-1)\tau;t_0+k\tau]$, $k>1$. Au point t_0 seule la dérivée à droite existe.

Exemple 56

On considère l'EDR de la forme

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -x(t-\tau)\\ x(t) &= \psi(t)=1 \text{ sur } [-\tau;0]\end{aligned}$$

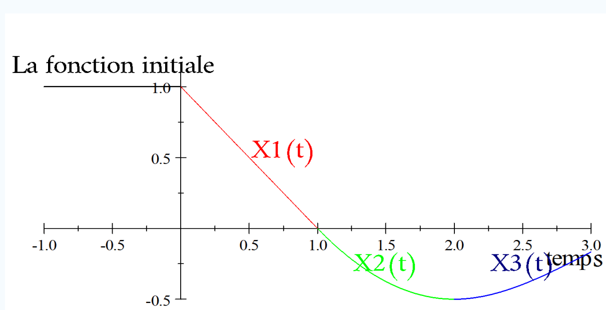
On a déjà remarqué que pour $t\in[0;\tau]$. On obtient par simple intégration entre 0 et t

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \psi(0)-\int_0^t x(s-\tau)\,ds=\psi(0)-\int_{-\tau}^{t-\tau}\psi(\theta)\,d\theta\\ &= 1-t\end{aligned}$$

On obtient une solution élémentaire $x_1(t)$ sur $t\in[0;\tau]$. Et pour $t\in[\tau;2\tau]$,

$$\begin{aligned}x_2(t) &= x_1(\tau)-\int_\tau^t x(s-\tau)\,ds=x_1(\tau)-\int_0^{t-\tau}x_1(s)\,ds\\ &= (1-\tau)-(t-\tau)+\frac{1}{2}(t-\tau)^2.\end{aligned}$$

Ainsi de suite, on peut résoudre l'équation sur l'intervalle $[2\tau;3\tau]$ en prenant comme donnée initiale $x(t)=x_2(t)$ sur $[\tau;2\tau]$. Par itérations successives, on peut résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^+$. On suppose par exemple que $\tau=1$ ici on voit que la solution générale



I.6.2 La Méthode d'équations caractéristiques

On s'intéresse exclusivement la forme la plus générale d'une équation différentielle linéaire de type neutre à retard $\tau > 0$ (ou DDENs en sigle) à coefficients constants est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t-\tau) = 0 \tag{I.13}$$

où $x(t)$ est une fonction inconnue de la variable t.

Pour résoudre l'équation (I.13), on cherche une solution sous la forme $ce^{\lambda t}$. Alors on obtient l'équation caractéristique

Définition 57

L'équation caractéristique du système (I.13) est définie par

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k \right) e^{-\lambda \tau} = 0. \tag{I.14}$$

De plus, les racines de (I.14) sont appelées les valeurs propres (ou racines caractéristiques) de (I.13).

Exemple 58

On considère l'équation différentielle à retard $\tau > 0$ de la forme suivante

$$\frac{dx(t)}{dt} + \alpha \frac{dx(t-\tau)}{dt} + \beta x(t) + \gamma x(t-\tau) = 0. \tag{I.15}$$

Pour l'équation (I.15) on associe l'équation caractéristique de la forme

$$\lambda + \alpha \lambda e^{-\lambda \tau} + \beta + \gamma e^{-\lambda \tau} = 0$$

Où α, β et γ sont des constantes.

Exemple 59

Soit

$$x'(t) = x(t) - x(t-1) + x'(t-1),$$

l'équation caractéristique de cette EDRN est donnée par

$$(\lambda - 1)\left(1 - e^{-\lambda}\right) = 0.$$

I.7 Quelques modèles d'équations à retard

On vient de voir que les équations différentielles à retard sont des équations différentielles dans lesquelles la dérivée à un moment t dépend de la fonction (et de la dérivée dans le cas des équations de type neutre) à des moments antérieurs $t-\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Autrement dit ces équations tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur, pour plus de détails voir [3], [12], [54], [56], [63] et [92]. Les systèmes d'équations différentielles à retard occupent désormais une place de première importance dans tous les domaines de la science, en particulier dans la modélisation des phénomènes biologiques. Les problèmes à retard sont innombrables en littérature. Certains de ces problèmes ont connu un intérêt particulier. On a choisi dans cette thèse quelques modèles intervenant dans des domaines différents monde réel.

I.7.1 Un modèle en logistique

Le premier modèle de développement démographique est introduit par Malthus

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(t), \lambda > 0 \text{ (équation Malthus).}$$

Il traduit l'accroissement exponentiel d'une population au cours du temps. Dans sa simplicité, il oublie en particulier que de nombreuses populations ont un plafond démographique imposé par les contraintes extérieures comme l'espace, les ressources, etc.... Pour remédier à ce problème, un des moyens les plus simples est d'évaluer la capacité maximum K de la population et de remplacer le taux de croissance λ par une quantité qui sera d'autant plus petite qu'elle s'approche de K. Encore une fois, le souci de simplification amène à proposer le modèle suivant :

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \text{ (équation logistique).}$$

Même si ce modèle paraît plus réaliste, il présente encore un défaut de principe. Ainsi, il se peut que la capacité maximale soit atteinte et même dépassée (situation que le modèle ne peut pas prévoir). Cette situation ne se manifeste qu'à travers l'apparition de problèmes, tels que l'apparition des maladies, le manque d'espace, le manque des ressources, ...etc. On peut déduire au moins une remarque intéressante ; le taux de croissance de la population à l'instant t dans l'équation logistique ne fait pas intervenir la taille de la population à cet instant mais il est fonction de la taille de la population précédente. Une traduction mathématique simple de ce qui précède est l'équation logistique retardée, connue aussi sous le nom de l'équation de Hutchinson suivante

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \text{ (équation logistique à retard).}$$

Où r est le taux de croissance de la population, K est la capacité de charge du milieu et $\tau > 0$ est le retard.

L'équation de Hutchinson suppose que l'effet de régulation dépend de la population au temps $t-\tau$ plutôt qu'à l'instant t. Dans un modèle réaliste, l'effet du retard devrait être une moyenne distribuée sur tout le passé de la population ou sur une partie de ce passé (voir Kuang [63]). Ceci a comme conséquence une équation à retard distribué ou à retard infini. Le premier travail utilisant une équation à retard distribué est dû à Volterra. Ce travail fut ensuite étendu par Kostitzin [62]. Volterra [88]) a utilisé un terme intégral où il a distribué le retard pour examiner l'effet cumulatif du taux de mortalité d'une espèce. Le modèle qui a été considéré est une équation intégro-différentielle

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{1}{K}\int_0^{+\infty} F(t-s)\,x(s)\,ds\right) \text{ (logistique à retard distribué).}$$

Où F représente le noyau retard, correspondant à une pondération du retard. Généralement, le noyau retard est normalisé de sorte que

$$\int_0^{+\infty} F(s)\,ds = 1$$

Considérons à titre d'exemple l'évolution d'une population animale ne tenant compte que de la natalité et de la mortalité naturelles. En supposant que la mortalité est instantanée dans la population, par rapport à l'échelle de temps considérée (typiquement, la semaine ou le mois), la description de l'évolution de cette population nécessite de connaître le nombre d'individus à l'instant t, que l'on peut noter $N(t)$, mais également le nombre d'individus à l'instant $t-\tau$, où τ est la durée de gestation moyenne de la population. On peut alors écrire l'équation linéaire à retard discret suivante,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= -\alpha N(t) + \beta N(t-\tau), \qquad t>0 \\ N(t) &= \psi(t) \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned}$$

Où α et β sont respectivement les taux de mortalité et de naissance de la population, et ψ une condition initiale, définie sur l'intervalle $[-\tau, 0]$.

I.7.2 Réaction chimique avec recirculation

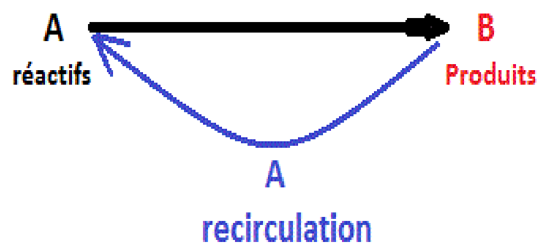
On considère un réacteur chimique où se produit la réaction

$$A \to B$$

Au fur et à mesure de l'avancement de la réaction, on admet à l'entrée une solution de réactif A, dont la concentration est notée A_0. Si on note $A(t)$ la concentration en le produit A au temps, t un modèle mathématique simple s'écrit

$$\frac{d}{dt}A(t) = \alpha\left[A_0 - A(t)\right] - kA(t) \tag{I.16}$$

où k est la constante de la réaction (I.16) et α un paramètre lié au débit d'admission. La transformation du réactif A en le produit B n'est pas instantanée, si bien qu'à la sortie du réacteur, on retrouve une partie du produit A, non transformée. Afin d'améliorer le rendement de la réaction, on procède à une recirculation (voire Fig.1)



Le modèle (I.16) régissant l'évolution de $A(t)$ devient

$$\frac{d}{dt}A(t) = \alpha\left[(1-\lambda)A_0 + \lambda A(t-\tau) - A(t)\right] - kA(t), \tag{I.17}$$

où $\lambda \in [0,1]$ désigne le taux de recirculation et t le retard dû au transport dans la boucle de recirculation. Lorsque t est strictement positif, l'équation différentielle (I.17) ne relève pas de la théorie générale des équations différentielles ordinaires (EDO) car elle comporte le terme de retard $A(t-\tau)$. Toutefois, on peut utiliser les résultats sur les EDO pour étudier l'équation (I.17).

I.7.3 Contrôle d'un Bateau (Minorsky)

En 1962 Minorsky (voir [24]) a conçu un dispositif pour le contrôle automatique de la direction pour un bateau. Le modèle se décrit comme suit. Soit $x(t)$ une position angulaire fixée du gouvernail de direction du bateau et supposons qu'il existe une force de frottement proportionnelle à la vitesse, $c\dot{x}(t)$. On suppose qu'il existe un dispositif qui indique la direction du mouvement du bateau en temps réel et qu'il existe aussi un autre dispositif qui pointe la direction désirée. Ces deux instruments sont reliés à un appareil connecté à un moteur électrique qui produit une certaine force agissant sur le gouvernail dans le but de le faire pivoter (orienter) pour ramener le bateau sur le chemin désiré. De toute évidence il y a un décalage (retard) de magnitude $r > 0$ en temps entre le moment ou le moteur électrique exerce la force pour redresser le bateau et le moment ou le bateau réagit pour se réorienter. Minorsky décrit cela par l'équation suivante donnée sur $x(t)$

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + g(x(t-r)) = 0 \tag{I.18}$$

où il considère que $xg(x) > 0$, si $x = 0$ et c une constante positive. L'objectif du problème est de chercher des conditions qui assurent le maintien de $x(t)$ près de zéro de sorte que le bateau suivra étroitement son cours approprié pour arriver à sa destination fixée.

I.7.4 Contre-réaction (système contrôlé par boucle fermée)

(Dans [14] Page.88) La commande de rétroaction retardée par temps présentée par Socolar (voir [76], ETDAS) est montrée dans la couleur rouge (**Fig.2**). Dans les composants électricité, considérons par exemple (un circuit fermé) le schéma principal de la boucle de contre-réaction est représenté ci–dessous

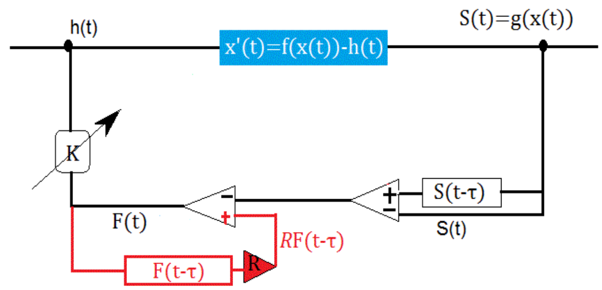


Fig.2 Diagramme de la méthode à retard de temps d'autosynchronisation.

Les différentes lois de l'électricité conduisent à un système d'équations

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) + \omega(y) - K[x(t) - x(t-\tau)]$$
$$\dot{y}(t) = -\omega x(t) + \lambda y(t) - K[y(t) - y(t-\tau)]$$

Avec λ et ω sont des constantes réelles positives. On peut écrire ce système sous la forme matricielle

$$\dot{X}(t) = AX(t) - F(t),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } F(t) = K[X(t) - X(t-\tau)].$$

Le but de la méthode de contrôle est de changer le signe de la partie réelle de la valeur propre de la matrice A.

La couleur rouge montre la prolongation de la commande originale de Pyragas comprenant les retards multiples où $F(t)$ désigne la force de commande donnée par

$$F(t) = K[X(t) - X(t-\tau)]$$

avec $K \in \mathbb{R}$ le gain de rétroaction, $\tau > 0$ est le retard de temps et R est le paramètre de mémoire, $X(t)$ désigne l'état du système au temps t et $S(t)$ est le signal de commande, c–à–d., un certain composant de $x(t)$ mesuré par $g(x(t))$ où la fonction $h(t)$ décrit l'accouplement de F au système dynamique $X(t)$.

I.8 Stabilité par la méthode de point fixe

Lorsqu'on veut étudier la stabilité de la solution triviale d'une équation différentielle à retard par la méthode de point fixe il va falloir procéder comme suit

(i) Une équation différentielle à retard exige avant tout une donnée (une fonction) initiale ψ définie sur un intervalle initiale approprié I_{t_0} i.e., $\psi : I_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On doit choisir aussitôt après un espace convenable $\mathbb{S}$ de fonctions $\varphi : I_{t_0} \cup [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui coïncident sur I_{t_0} avec ψ. Selon les cas de besoins on peut toujours ajouter d'autres restrictions aux fonctions φ de $\mathbb{S}$ comme la bornitude par exemple ou la condition $\varphi(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Cette dernière condition s'impose si on souhaite étudier la stabilité asymptotique.

(ii) Ensuite on doit inverser l'équation différentielle pour définir ce qu'on appelle une application de point fixe i.e., une application $P : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ dont le point fixe est solution de l'équation à retard donnée (l'équation originale). Néanmoins, cette inversion est inévitable pour la méthode de point fixe et elle peut s'avérer une tâche délicate dans plusieurs cas. Par exemple si l'équation ne possède pas un EDO terme linéaire dans sa structure on pourra pas utiliser la variation des paramètres. Il est donc indispensable d'agir autrement et essayer si une transformation de cette équation est possible.

(iii) A l'image de l'application $P : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ obtenue en ii., un théorème de point fixe doit être choisi permettant à l'équation $Px = x$ d'avoir une solution. En particulier si P est une contraction on pourra appliquer le théorème de point fixe de Banach, si P est compacte alors on appliquera le théorème de Schauder ou et si P se met sous forme d'une somme d'une contraction et d'une application compacte alors le théorème hybride de Krasnoselskii peut donner satisfaction.

Il devient donc clair que la méthode de stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois choses essentielles, la variation des paramètres, un espace complet et un Théorème de fixe. En une étape on peut conclure l'existence (voire l'unicité) et la stabilité. En outre, on verra que cette méthode exige toujours des conditions en moyenne cependant les conditions de la méthode de Lyapounov sont toujours ponctuelles.

La méthode de point fixe utilisée ici repose sur trois éléments fondamentaux

– La construction d'une application de point fixe P associée à une équation différentielle à retard

– Un espace fonctionnel convenable apte à contenir les solutions souhaitables

– Le Théorème de point fixe de Banach.

L'application de cette méthode a aussi montré des avantages significatifs de cette méthode sur celle de Liapunov. Les conditions de la première méthode sont en moyenne par contre celles de la deuxième sont toujours ponctuelles.

II Existence de solution périodique positive pour un système d'équations différentielles non linéaire de type neutre à retard,

Sommaire

Mots clés.
Degré de coïncidence, point fixe, solution périodique positive, système d'équations différentielles de type neutre, retard variable.

Le resultat suivant a fait l'objet d'un article publié dans (voir [44]),

Gabsi H., Ardjouni A., Djoudi A., Existence of positive periodic solutions of nonlinear neutral differential systems with variable delays, Ann Univ Ferrara, Springer p 1-15(2017).

II.1 Le système et un peu d'histoire

Le modèle qui a été considéré est un système d'équations différentielles à retards du type neutre motivé par une application biologique

$$\frac{dx}{dt} = \pm x(t)\left[G(t, x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_n(t))) - \varphi(t)x'(t-r(t))\right], \tag{II.1}$$

$$\frac{du}{dt} = a(t)u(t) - \lambda b(t)f(t, u(t-\delta(t))) - c(t)x(t-\sigma(t)), \tag{II.2}$$

Où, $G(t,x_1,...,x_n) \in C\left(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}\right)$, $G(t+\omega,x_1,...,x_n) = G(t,x_1,...,x_n)$ et $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, $\varphi,a,b,c \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, $r,\sigma,\delta,\tau_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i = 1,...,n$ sont des fonctions continues ω–périodiques et $\omega > 0$ est une constante. Ici $\lambda > 0$ est un paramètre.

Dans ce chapitre on va établir un résultat sur l'existence d'une solution périodique positive du système (II.1)–(II.2) à retards, par en employant deux opérateurs disponibles et en appliquant le théorème de degré de coïncidence et le théorème de point fixe. La difficulté de cette étude provient du fait que ce système est totalement non linéaire en (x,u). Pour contourner cette situation nous utilisons alors une méthode différente, on donne la preuve par étapes, dont chacune représentant un lemme à démontrer qui présentent l'une des difficultés principales pour conclure notre résultat. Le principe consiste à identifier les étapes de construction un théorème d'existence de solution périodique positive.

Avant d'entamer le cas général, nous rappelons d'abord que Yongkun Li dans [68] a proposé une méthode pour établir un théorème d'existence d'une solution périodique pour l'équation

$$x'(t) = x(t)F(t,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t))). \tag{II.3}$$

Cette équation, motivée par une application biologie, en particulier dans [94] si $\tau(t) = m\omega$ avec m est un nombre entier non négatif alors l'équation (II.3) se réduit à l'équation bien connu dite l'équation logistique de croissance simple à retard

$$x'(t) = r(t)x(t)\left[1 - \frac{x(t-\tau(t))}{R(t)}\right]. \tag{II.4}$$

alors (II.4) admet une solution ω–périodique positive. Ainsi l'équation suivante est représente un modèle de croissance démographique (voir [94]). Dans [51] si $\tau(t) = m\omega$, alors l'équation

$$x'(t) = r(t)x(t)\left[\frac{R(t)-x(t-\tau(t))}{R(t)+r(t)c(t)x(t-\tau(t))}\right],$$

admet une solution ω–périodique positive. Des cas particuliers de système (II.1)–(II.2) ont été étudiés par de nombreux auteurs. Par exemple, dans [55] Hai-Feng Huo Il révisa ensuite ce travail avec Li ont étudié et établis l'existence d'une solution périodique positive du système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \pm x(t)G(t,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t)),u(t-\delta(t))), \\ \\ \dfrac{du}{dt} = -a(t)u(t)+b(t)x(t-\sigma(t)), \end{cases}$$

Où a,b et G sont des fonctions ω–périodique et $\omega > 0$ est une constante avec des hypothèses sur G.

II.2 Degré de coïncidence Périodicité et positivité pour l'Eq(II.1)

Dans cette étape le procédé utilisé est basée sur le théorème de continuation de Mawhin. Nous donnons quelques notions et notations utilisées dans la théorie de théorème de degré de coïncidence en particulier le théorème de continuation de Mawhin (voir [42], [49] et [75]).

Pour voir l'existence de solution ω–périodique de (II.1) nécessite une préparation alors pour $\omega > 0$, soit X l'ensemble de fonctions continues périodiques relativement à t de période ω, $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|$ la norme du supremum.

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t\in[0,\omega]} |x(t)|.$$

Alors, $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. Soit X et Z deux espaces vectoriels normés et Ω un ouvert de X. On s'intéressera par l'étude des équations opérationnelles de la forme

$$Lx = \eta Nx, \ \eta \in (0,1), \tag{II.5}$$

avec $L : X \cap DomL \to Z$ est un opérateur linéaire et η est un paramèter. Soit P et Q deux projections continues telles que

$$P : X \cap DomL \to \ker L \text{ et } Q : Z \to Z/ImL.$$

Rappelons qu'une application linéaire $L : X \cap DomL \to Z$ avec $\ker L = L^{-1}(0)$ et $ImL = L(DomL)$, est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes

(i) $\ker L = L^{-1}\{0\}$ est de dimension finie.

(ii) $ImL = L(Dom(L))$ est fermé et de codimension finie.

Par la suite, si l'espace quotient Z/ImL est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé ImL de Z est de codimension finie dans Z et on écrit

$$co\dim ImL = \dim(Z/ImL)$$

i.e, le codimension de ImL est le dimension de $Z/$ImL, anisi que l'indice d'un opérateur de Fredholm L est l'entier

$$Ind(L) = \dim\ker L - co\dim ImL.$$

On dit qu'une application N est L–compact sur Ω si l'application $QN : \bar{\Omega} \to Z$ est continue, $QN\left(\bar{\Omega}\right)$ est borné, et $K_P(I-Q)N : \bar{\Omega} \to X$ est compact i.e., elle est continue et $K_P(I-Q)N\left(\bar{\Omega}\right)$ est relativement compacte, avec $K_P : ImL \to DomL \cap \ker P$ est l'inverse de L_p de telle L_P la restriction de L à $DomL \cap \ker P$, de sotre que $LK_P = I$ et $K_PL = I - P$.

D'abord nous commençons par introduire la notation

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega u(t)\,dt,$$

d'où u est une fonction continue périodique à période ω. On considère l'équation différentielle non linéaire à retard de type neutre

$$\frac{dx}{dt} = -x(t)\left[G(t, x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_n(t))) - \varphi(t)x'(t-r(t))\right], \tag{II.6}$$

On suppose que $G(t, x_1, ..., x_{n+1}) \in C\left(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}\right)$, $G(t+\omega, x_1, ..., x_n) = F(t, x_1, ..., x_n)$, $r', \varphi' \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $r, \varphi, \tau_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ pour $i = 1, ..., n$ sont toutes des fonctions continues et ω–périodiques. nous prouvons que sous certaines conditions sur les fonctions G et φ, il admet au moins une solution positive périodique de (II.6).

En opérant le changement de variable suivant

$$y(t) = \ln(x(t)), \tag{II.7}$$

d'où on conclut que

$$x(t)y'(t) = x'(t),$$

et

$$x(t-r(t))y'(t-r(t)) = x'(t-r(t)).$$

Alors, y satisfait l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\left[G(t, x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_n(t))) - \varphi(t)x'(t-r(t))\right] \\ &= -\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, ..., e^{y(t-\tau_n(t))}\right) - \varphi(t)y'(t-r(t))e^{y(t-r(t))}\right], \end{aligned} \tag{II.8}$$

où

$$r'(t) \neq 1 \text{ pour } t \in [0, \omega]. \tag{II.9}$$

On observe que l'existence d'une solution périodique de (II.6) est équivalente à l'existence d'une solution de l'équation (II.8).

Dans ce qui suit, nous allons donner le lemme nécéssaire pour la preuve

Lemme 60

Supposons que la condition *(II.9)* est satisfaite. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées
(i) Il existe une constante $C > 0$ telle que si y est une fonction continue ω–périodique et satisfait

$$\int_0^{\omega}\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t)\, e^{y(t-r(t))}\right] dt = 0,$$

on ait

$$\int_0^{\omega}\left|G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t)\, e^{y(t-r(t))}\right| dt \leq C.$$

(ii) Il existe une constante $H > 0$ telle que, quand $v_i \geq H$, $i = 1, \ldots, n+1$,

$$G\left(t, e^{v_1}, \ldots, e^{v_n}\right) + \psi(t)\, e^{v_{n+1}} > 0,\ G\left(t, -e^{v_1}, \ldots, -e^{v_n}\right) - \psi(t)\, e^{v_{n+1}} < 0,$$

est uniformément sur $[0, \infty)$, avec

$$\psi(t) = \left(\frac{\varphi'(t)(1 - r'(t)) + \varphi(t)\, r''(t)}{[1 - r'(t)]^2}\right). \tag{II.10}$$

est une fonction positive continue et ω–périodique. Alors l'équation (II.6) admet au moins une solution positive ω–périodique.

Preuve. Il suffit donc d'appliquer le théorème 38. En effet, en prenant

$$X = Z := \{y \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : y(t+\omega) = y(t)\},$$

on utilisera dans ce qui suit la norme suivante

$$\|y\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)| = \sup_{t \in [0,\omega]} |y(t)|.$$

Alors, X et Z deux espaces de Banach sont induites par la norme $\|\cdot\|$. Définissons les applications N, L, P et Q comme suit pour $y \in X$ on a

$$Ny = -\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) - \varphi(t)\, y'(t - r(t))\, e^{y(t-r(t))}\right],$$

et

$$Ly = y',\ Py = Qy = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} y(t)\, dt,\ y \in X.$$

On remarque que, $\ker L = \{y \mid y \in X,\ y = \xi,\ \xi \in \mathbb{R}\}$ et $ImL = \left\{y \mid y \in X,\ \int_0^{\omega} y(t)\, dt = 0\right\}$ sont fermées dans X et $\dim \ker L = co\dim ImL$ on conclure que L est une application de Fredholm d'indice zéro.

En outre pour $y \in ImL$ on a l'inverse $K_P : ImL \to \ker P \cap DomL$ de L peut s'exprimer sous la forme

$$K_P(y) = \int_0^t y(s)\, ds - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t y(s)\, ds dt.$$

et

$$(QN)(y) = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) - \varphi(t)\, y'(t-r(t))\, e^{y(t-r(t))}\right] dt,$$

et le fait que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{\omega}\varphi(t)\, y'(t-r(t))\, e^{y(t-r(t))} dt\\
&= -\int_0^{\omega}\left[\frac{\varphi(t)}{1-r'(t)}\frac{d}{dt}\left(e^{y(t-r(t))}\right)\right] dt\\
&+\int_0^{\omega}\left[\frac{\varphi'(t)(1-r'(t)) + \varphi(t)(r''(t))}{[1-r'(t)]^2} e^{y(t-r(t))}\right] dt\\
&= \int_0^{\omega}\psi(t)\, e^{y(t-r(t))} dt,
\end{aligned}$$

ce qui conduit que

$$(QN)(y) = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t)\, e^{y(t-r(t))}\right] dt,$$

et

$$\begin{aligned}
&K_P(I-Q)N(y)\\
&= -\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t)\, e^{y(t-r(t))} dt.\\
&+\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^{t}\left[G\left(s, e^{y(s-\tau_1(s))}, \ldots, e^{y(s-\tau_n(s))}\right) + \psi(s)\, e^{y(s-r(s))}\right] ds dt\\
&+\left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\int_0^{\omega}\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t)\, e^{y(t-r(t))}\right] dt.
\end{aligned}$$

Il est évident que QN et $K_P(I-Q)N$ sont continues et de plus $QN\left(\bar{\Omega}\right)$ et $K_P(I-Q)N\left(\bar{\Omega}\right)$ sont relativement compactes pour tout borné $\Omega \subset X$ et N est L–compact sur $\bar{\Omega}$. On construit facilement un sous–ensemble de X pour lequel le théorème 38 peut être appliqué à l'équation (II.8). En effet, l'équation correspondant à l'équation (II.8) est donnée par

$$Ly = \eta N y, \eta \in (0,1)$$

donc on a

$$y'(t) = -\eta\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) - \varphi(t)\, y'(t-r(t))\, e^{y(t-r(t))}\right]. \tag{II.11}$$

On suppose que $y \in X$ est une solution de (II.11) pour un certain $\eta \in (0,1)$. par intégration (II.11) sur $[0,\omega]$, on obtient

$$\int_0^{\omega}\left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, \ldots, e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t)\, e^{y(t-r(t))}\right] dt = 0, \tag{II.12}$$

Par suite, en utilisant (II.11), (II.12) et la condition (i) on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^\omega \left|y'(t)\right| dt \\ &\leq \eta \int_0^\omega \left|G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, ..., e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t) e^{y(t-r(t))}\right| dt \leq C.\end{aligned} \tag{II.13}$$

D'un autre coté on observe que par (II.12) et (ii) il existe un entier (fixé) $i_0 \in \{1, .., n\}$, $t^* \in [0, \omega]$ et une constante $l_1 > 0$ telle que

$$y\left(t^* - \tau_{i_0}(t^*)\right) < l_1, y(t^* - r(t^*)) < l_1. \tag{II.14}$$

D'autre part si pour tout $l_1 > 0$ et $t \in [0, \omega]$, on a

$$y(t^* - \tau_i(t^*)) \geq l_1,\ i = 1, .., n \text{ and } y(t - r(t)) \geq l_1.$$

on remarque à partie de (ii) qui représente une contradiction avec (II.12), ce qui revient à dire que (II.14) est satisfait. Notons $t^* - \tau_{i_0}(t^*) = \zeta_1 + k\omega$, $\zeta_1 \in [0, \omega]$ avec k est un nombre entier alors,

$$y(\zeta_1) < l_1. \tag{II.15}$$

En suivant la même procédure on conclure à partie de (II.12) et (ii) que il existe $i_1 \in \{1, .., n\}$, $\zeta_1 \in [0, \omega]$ et une constante $l_2 > 0$ telle que

$$y(\zeta_2) > -l_2. \tag{II.16}$$

Par suite de (II.13), (II.15) et (II.16) on arrive facilement à

$$y(t) \leq y(\zeta_1) + \int_0^\omega \left|y'(t)\right| dt < l_1 + C,$$

et

$$y(t) \geq y(\zeta_2) - \int_0^\omega \left|y'(t)\right| dt > -(l_2 + C).$$

alors

$$\left\|y\right\| < \max\{l_1 + C, l_2 + C\} := l.$$

Maintenant, on définit l'ensemble

$$\Omega = \left\{y \in X \mid \left\|y\right\| < J\right\},$$

avec $J = \max\{l, H\}$. Il est clair que Ω est un sous-ensemble convexe, borné et non vide d'un espace de Banach X, alors Ω satisfait la condition (a) du théorème 38. Pour $y \in \partial\Omega \cap \ker L = \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, y est une constante dans $\mathbb{R}$ avec $\left\|y\right\| = J$ alors,

$$\begin{aligned}&(QN)(y) \\ &= -\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left[G\left(t, e^{y(t-\tau_1(t))}, ..., e^{y(t-\tau_n(t))}\right) + \psi(t) e^{y(t-r(t))}\right] dt \neq 0.\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'homotopie

$$\Psi(\theta, y) = \theta y + (1-\theta) QNy,\ 0 \leq \theta \leq 1.$$

le fait que pour $y \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, $\theta \in [0,1]$ et $y\Psi(\theta, y) > 0$ on a $\Psi(\theta, y) \neq 0$, alors par la propriété d'invariance par homotopie du degré on obtient

$$\deg\{QNy, \partial\Omega \cap \mathbb{R}, 0\}$$

$$\deg\{\Psi(\theta, y), \partial\Omega \cap \mathbb{R}, 0\} = \deg\{QNy, \partial\Omega \cap \mathbb{R}, 0\} \neq 0.$$

Cela montre que toutes les hypothèses du théorème 38 sont satisfaites alors, (II.8) admet une solution ω–périodique y. Par conséquent d'après (II.7) on conclut que l'équation (II.6) est aussi admet une solution positive ω–périodique donnée par $x(t) = e^{y(t)}$. ∎

On recommence la même procédure pour étudier l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\left[G(t, x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_n(t))) - \varphi(t) x'(t-r(t))\right]. \tag{II.17}$$

Remarquons que la déférence entre les équations (II.6) et (II.17) est seulement le signe alors le traitement est comme le premier cas. On peut conclure de manière analogue comme dans (II.6) on trouve le Lemme suivant

Lemme 61

Sous les hypothèses du lemme 60 alors, l'équation (II.17) admet au moins une solution positive ω–périodique.

II.3 Point fixe, Périodicité et positivité pour l'Eq (II.2)

Le fait que l'équation (II.1) admet une solution positive ω–périodique alors on souhaite déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de sorte que l'équation (II.17) admet une solution ω–périodique positive

Cette tache repose sur le choix d'hypothèses sur a, b, c et f, de sorte que pour une application de point fixe T associée à (II.17) est construite sur un sous–ensemble Ω de X. vers ce but on suppose que pour $t \in [0, \omega]$ et une fonction positive $x \in X$ l'on a

(H1) $a, b, c \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ sont des fonctions ω–périodiques avec $\int_0^\omega a(t)\,dt > 0$ et $\int_0^\omega b(t)\,dt > 0$.

(H2) $\delta, \sigma \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est ω–périodique.

(H3) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue et ω–périodique.

(H4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(t,x)}{x} = N \in (0, +\infty]$ uniformément sur $[0, \omega]$.

En utilisant les résultats précédents, on déduit que le problème (II.1)–(II.2) est exprimé

comme suit
$$\frac{du}{dt} = a(t)u(t) - \lambda b(t) f(t, u(t - \delta(t))) - c(t)x(t - \sigma(t)). \tag{II.18}$$
Dans cette partie nous employons une méthode différente pour établir l'existence d'une solution ω–périodique de (II.18). L'équation peut être réduite à un problème de point fixe pour l'opérateur T et pour le résoudre, on utilisera un théorème convenable. Alors on définit la fonction ϕ par
$$\phi(t) := c(t)x(t - \sigma(t)). \tag{II.19}$$
Alors, l'équation (II.19) peut être réduite à une équation différentielle à retard comme suit
$$\frac{du}{dt} = a(t)u(t) - \lambda b(t) f(t, u(t - \delta(t))) - \phi(t). \tag{II.20}$$
Admettrons que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue ω–périodique et u est une solution de l'équation (II.20). En appliquant la méthode de variations des paramètres, par la multiplication les deux cotés de la dernière équation (II.20) par le facteur $e^{-\int_0^t a(s)ds}$ et en intégrant de t à $t+\omega$, on obtient que la solution de l'équation (II.20) est exactement
$$u(t) = \lambda \int_t^{t+\omega} b(s)F(t,s) f(s, u(s - \delta(s)))\,ds + \int_t^{t+\omega} F(t,s)\phi(s)\,ds,$$
d'où
$$F(t,s) := \frac{\exp\left(-\int_t^s a(v)\,dv\right)}{1 - \exp\left(-\int_0^\omega a(v)\,dv\right)}. \tag{II.21}$$
D'abord nous commençons par introduire les notations necéssaires pour la preuve

(N1) $R(t) := \int_t^{t+\omega} F(t,s)\phi(s)\,ds$ et $R_0 = \|R(t)\|$,

(N2) $\mu = \exp\left(-\int_0^\omega a(v)\,dv\right)$,

(N3) $M = \max\{f(t,x) : (t,x) \in [0,\omega] \times [0, R_0(\mu+1)/\mu]\}$.

Il est clair que la fonction R satisfait l'équation
$$R'(s) = -a(s)R(s) + \phi(s). \tag{II.22}$$
En prenant le changement de variable suivant $u(t) = z(t) + R(t)$ alors l'équation (II.20) peut se mettre sous la forme
$$z'(t) = a(t)z(t) - \lambda b(t) f(t, z(t - \delta(t)) + R(t - \delta(t))). \tag{II.23}$$
On observera que l'existence d'une solution ω–périodique et positive u de (II.20) basée sur l'existence d'une solution ω–périodique de (II.23) de la forme $z(t) = u(t) - R(t)$ pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue ω–périodique vérifiant $z(t) + R(t) > 0$ sur $t \in [0,\omega]$. Néanmoins, on a bien montré que la solution de (II.23) est donnée par
$$z(t) = \lambda \int_t^{t+\omega} b(s)F(t,s) f(s, z(s - \delta(s)) + R(s - \delta(s)))\,ds.$$

Lemme 62

Admettons que les hypothèses (H1)–(H4) et (N3) sont satisfaites et supposons que

$$A < \lambda < B. \tag{II.24}$$

Alors (II.20) admet au moins une solution positive ω–périodique, où A et B sont définis par

$$A = \frac{2}{\mu N}\frac{1-\mu}{\mu\int_0^\omega b(s)\,ds} \text{ et } B = \frac{R_0}{M}\frac{1-\mu}{\mu\int_0^\omega b(s)\,ds}. \tag{II.25}$$

Preuve. Rappelons la fonction $F(.,.)$. Il est facile de voir que

$$F(t,s) \le \frac{1}{1-\mu} \text{ et } F(t,s) \ge \frac{\mu}{1-\mu}, \tag{II.26}$$

pour $t \le s \le t+\omega$ on en déduit

$$z(t) \le \|z\| \le \frac{\lambda}{1-\mu}\int_t^{t+\omega} b(s)\,f(s, z(s-\delta(s)) + R(s-\delta(s)))\,ds,$$

et

$$z(t) \ge \mu\frac{\lambda}{1-\mu}\int_t^{t+\omega} b(s)\,f(s, z(s-\delta(s)) + R(s-\delta(s)))\,ds \ge \mu\|z\|.$$

Ceci montre que

$$z(t) \ge \mu\|z\| \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Considérons X l'espace de fonctions continues réels et ω–périodiques définies sur $[m(t_0), +\infty)$ muni de la norme du supremum $\|\cdot\|$, i.e

$$\|z\| = \max\{z(t) : t \in [0,\omega]\}$$

Alors X est un espace de Banach. Soit

$$K = \{z \in X : z(t) \ge \mu\|z\|,\ t \in [0,\omega]\}.$$

alors K est un cône dans l'espace X. Soit l'opérateur T définie par : pour $z \in X$ on a

$$(Tz)(t) = \lambda\int_t^{t+\omega} b(s)\,F(t,s)\,f(s, z(s-\delta(s)) + R(s-\delta(s)))\,ds, \tag{II.27}$$

Clairement T est complètement continue et $TK \subset K$ (d'après la condition de la périodicité).

Le fait que $\lambda < B$ on choisit $\alpha > 1$ tel que $\lambda \le B/\alpha$. Notons

$$\Omega_1 := \{z \in X : \|z\| < R_0/\mu\}.$$

alors on a

$$u(t) = z(t) + R(t) \leq \|z + R\| \leq \|z\| + \|R\| = R_0/\mu + R_0 = R_0(\mu+1)/\mu,$$

et comme $z(t) \geq \mu\|z\|$ on arrive à

$$u(t) = z(t) + R(t) \geq \mu\|z\| - \|R\| = \mu R_0/\mu - R_0 = 0, \tag{II.28}$$

pour $z \in X \cap \partial\Omega_1$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
(Tz)(t) &\leq \frac{\lambda}{1-\mu}\max\{f(t,u) : (t,u) \in [0,\omega]\times[0,R_0(\mu+1)/\mu]\}\int_0^\omega b(s)\,ds \\
&\leq \frac{\lambda M}{1-\mu}\int_0^\omega b(s)\,ds \\
&\leq \frac{B}{\alpha}\frac{\lambda M}{1-\mu}\int_0^\omega b(s)\,ds \leq \frac{BM}{1-\mu}\int_0^\omega b(s)\,ds \\
&\leq \frac{R_0}{\mu} = \|z\|,
\end{aligned}$$

Autrement dit $\|Tz\| \leq \|z\|$ pour tout $z \in X \cap \partial\Omega_1$. D'autre part choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lambda\frac{\mu^2(N-\varepsilon)}{2(1-\mu)}\int_0^\omega b(s)\,ds > 1, \tag{II.29}$$

En ayant en esprit la condition $\lambda > A$, on peut choisir un $H > \frac{R_0}{\mu}$ tel que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x} = N \text{ pour } t \in [0,\omega] \text{ et } x \geq H. \tag{II.30}$$

Par suite, soit

$$\Omega_2 := \{z \in X : \|z\| < (H+R_0)/\mu\}.$$

il en découle que

$$u(t) = z(t) + R(t) \geq \mu\|z\| - R_0 \geq \mu(H+R_0)/\mu - R_0 = H. \tag{II.31}$$

D'après (II.30) et (II.31) on obtient

$$|f(t, z(t-\delta(t)) + R(t-\delta(t)))| \geq (N-\varepsilon)\|z+R\| \geq (N-\varepsilon)H. \tag{II.32}$$

D'après la condition (II.24) et les résultats (II.26), (II.29) et (II.32) on a

$$\begin{aligned}
(Tz)(t) &\geq H\lambda\frac{\mu(N-\varepsilon)}{1-\mu}\int_0^\omega b(s)\,ds \\
&\geq \frac{H+R_0}{\mu}\left(\lambda\frac{\mu^2(N-\varepsilon)}{2(1-\mu)}\int_0^\omega b(s)\,ds\right) \\
&\geq (H+R_0)/\mu = \|z\|.
\end{aligned} \tag{II.33}$$

on déduit que $\|Tz\| \geq \|z\|$ pour tout $z \in X \cap \partial\Omega_2$. Par conséquent T admet au moins un point fixe z vérifiant $\frac{R_0}{\mu} < \|z\| \leq \frac{H+R_0}{\mu}$ qui est solution ω–périodique de (II.23). Clairement on a $R_0 < \|z\|$. En effet, S'il existe t_0 tel que $\frac{R_0}{\mu} = z(t_0) = (Tz)(t_0) < \frac{R_0}{\alpha\mu}$ d'où une contradiction. D'autre part

$$u(t) = z(t) + R(t) \geq \mu\|z\| - R_0 = \mu\frac{R_0}{\mu} - R_0 = 0. \tag{II.34}$$

alors $u(t) = z(t) + R(t)$ est une solution ω–périodique et positive de l'équation (II.23). ■

II.4 Existence de solution périodique positive de système (II.1-II.2)

Théorème 63

Sous les hypothèses des lemmes 60, 61 et 62. Alors le système (II.1)–(II.2) admet au moins une solution positive ω–périodique (x, u).

Théorème 64

Sous les hypothèses des lemmes 60, 61 et 62. On suppose que f vérifiant la condition suivante

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(t,x)}{x} = N = +\infty, \tag{II.35}$$

uniformément sur $[0, \omega]$ et

$$0 < \lambda < B. \tag{II.36}$$

alors le système (II.1)–(II.2) admet au moins une solution positive ω–périodique (x, u).

Preuve. Le fait que le théorème 63 est aussi valide si on remplace (H9) par (II.35) et (II.24) par (II.36) alors nous utilisons les lemmes 60, 61 et 62 on peut conclure la preuve par une procédure analogue utilisée dans Théorème 63. ■

Exemple 65

Soit $r(t) \equiv r$ une constante positive. On considère le modèle de logistique à retard

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t)\left[\eta(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x(t-\tau_i(t)) - \varphi(t)x'(t-r(t))\right], \\ \\ \dfrac{du}{dt} = a_0(t)u(t) - \lambda b(t)u^2(t-\delta(t)) - c(t)x(t-\sigma(t)), \end{cases} \tag{II.37}$$

avec $\tau_i, \sigma, \delta \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $i = 1, ..., n$ et $\eta, \varphi, \varphi', a_0, c, b, a_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ sont des fonctions ω–périodique. Si

$$0 < \lambda < \frac{R_0(1-\mu)}{\mu M \int_0^{\omega} b(s)\,ds}, \tag{II.38}$$

d'ou R_0, μ et M sont définis respectivement par (N1), (N2) et (N3). Alors, le système (II.37) admet au moins une solution positive ω–périodique.

Preuve. Soit y est une solution continue ω–périodique et satisfait

$$\int_0^{\omega} \left[\eta(t) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)e^{y(t-\tau_i(t))} - \varphi'(t)e^{y(t-r(t))}\right)\right] dt = 0, \tag{II.39}$$

d'où $\varphi'(t) = \psi(t)$ est définie par (II.10) dans Lemme 60. Alors,

$$\int_0^{\omega} \eta(t)\,dt = \int_0^{\omega} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(t)e^{y(t-\tau_i(t))} - \varphi'(t)e^{y(t-r(t))}\right] dt.$$

D'une autre part

$$\begin{aligned} &\int_0^{\omega} \left|\eta(t) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)e^{y(t-\tau_i(t))} - \varphi'(t)e^{y(t-r(t))}\right)\right| dt \\ &\leq \int_0^{\omega} |\eta(t)|\,dt + \int_0^{\omega} \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(t)e^{y(t-\tau_i(t))} - \varphi'(t)e^{y(t-r(t))}\right| dt \\ &\leq 2\int_0^{\omega} |\eta(t)|\,dt = C > 0. \end{aligned}$$

Soit v_i, $i = 1, ..., n+1$ sont des fonctions continues telles que

$$\lim_{\{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\} \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)e^{v_i} - \varphi'(t)e^{v_{n+1}}\right) = +\infty,$$

avec $v_i = v(t - \tau_i(t))$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $v_{n+1} = v(t - r(t))$. Alors, on trouve

$$\lim_{\{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\} \to +\infty} \left(\eta(t) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t) e^{v_i} - \varphi'(t) e^{v_{n+1}} \right) \right) = -\infty,$$

et la limite

$$\lim_{\{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\} \to -\infty} \left(\eta(t) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t) e^{v_i} - \varphi'(t) e^{v_{n+1}} \right) \right) = \eta(t) > 0,$$

est uniformément pour $t \in [0, \omega]$. Clairement, la fonction $f : (t, u) \mapsto u^2(t - \delta(t))$ est positive sur $\mathbb{R}$ et satisfait la condition (II.35) de Théorème 64. le fait que

$$0 < \lambda < B = \frac{R_0(1 - \mu)}{\mu M \int_0^{\omega} b(s)\, ds}.$$

Par conséquent toutes les hypothèses du Théorème 64 sont satisfaites. Cela montre que le système (II.37) admet au moins une solution ω–périodique positive. ■

III Stabilité asymptotique d'une classe d'équations non linéaires intégro-différentielles à retard de type Liénard

Sommaire

Mots clés.
Point Fixe, Équation intégro-différentielle à variables retards de type neutre.

Le contenu de ce chapitre est le travail publié dans [46] par :

Gabsi H., Ardjouni A., Djoudi A. fixed points and stability of a class of nonlinear delay integro-differential equations with variable delays. Facta Universitatis, Series : Mathematics and Informatics, 32(1), 031-057 (2017).

L'objectif dans ce travail est de présenter une extension des résultats et une amélioration des conditions utilisées dans [78]. Cette extension établie dans [46] s'applique à une classe plus large d'équations intégro-différentielles linéaire à retard fonctionnel de type neutre présentée dans (III.1). Cette tache repose sur la définition d'une bonne fonction continue H (voir Théorème 73 ci-dessous) et sur le choix des hypothèses sur cette fonction, sans restrictions sur l'inverse de $t-\tau_j(t)$ $j=1,\ldots,N$, de sorte que, pour une fonction ψ continue initialement donnée une application de point fixe P associée à (III.1) est construite sur un espace métrique complet $\mathbb{S}_\psi$ dans lui-même permettant à P d'avoir un point fixe. Cette démarche va permettre d'établir et prouver un Théorème de stabilité asymptotique de la solution zéro de (III.1) avec des conditions nécessaires et suffisantes moins restrictives. On s'intéresse à l'équation intégro–différentielle à retards suivante

$$\begin{aligned}\ddot{x} + f(t,x,\dot{x})\,\dot{x} + \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} a_j(t,s) g_j(s,x(s))\,ds \\ + \sum_{j=1}^{N} b_j(t) x'\left(t - \tau_j(t)\right) = 0,\end{aligned} \tag{III.1}$$

pour $t \geq 0$. Où $\tau_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $a_j(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^+ \times \left[-\tau_j(0), \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $b_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_j(\cdot,\cdot) : \left[-\tau_j(0), \infty\right) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On observe que si $t = 0$ l'équation (III.1) devient

$$\begin{aligned}\ddot{x}(0) + f(0,x(0),\dot{x}(0))\,\dot{x}(0) + \sum_{j=1}^{N} \int_{-\tau_j(0)}^{0} a_j(0,s) g_j(s,x(s))\,ds \\ + \sum_{j=1}^{N} b_j(0) x'\left(\tau_j(0)\right) = 0,\end{aligned}$$

Ceci nécessite des fonctions initiales données sur $\left[-\tau_j(0), 0\right]$ à valeurs $\mathbb{R}$, donc la solution x de (III.1) doit dépendre d'un retard fonctionnel telle que $x(t) = \psi(t)$, $t \in \left[-\tau_j(0), 0\right]$ dans le cas $t - \tau_j(t)$ est minorée. Ainsi, pour $\psi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que $x(t) = \psi(t)$, $t \in (-\infty, 0]$, alors pour résoudre l'équation (III.1) pour $t \geq 0$, nous allons lui associer un retard infini. On suppose que

$$\tau_j'(t) \neq 1 \text{ pour tout } t \geq 0, \tag{III.2}$$

et

$$t - \tau_j(t) \longrightarrow \infty \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty,\ j = \overline{1,N}. \tag{III.3}$$

Pour chaque $t_0 \geq 0$, nous notons $m_j(t_0) =: \inf\left\{s - \tau_j(s) : s \geq t_0\right\}$, $j = \overline{1,N}$ et $m(t_0) = \min\{m_j(t_0),$ $j = \overline{1,N}\}$.

Comme au premier chapitre, on désigne par $\mathcal{C}(t_0) := \mathcal{C}([m(t_0), t_0], \mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues muni de la norme du supremum $\|\cdot\|$, c'est-à-dire, pour $\psi \in \mathcal{C}(t_0)$, $\left\|\psi\right\| := \sup\left\{\left|\psi(t)\right| : m(t_0) \leq t \leq t_0\right\}$. Notons $A(t) := f((t,x(t),y(t))$. On écrit (III.1) comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -A(t)\,y(t) - \sum\limits_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} a_j(t,s) g_j(s,x(s))\,ds - \sum\limits_{j=1}^{N} \omega_j(t) \frac{d}{dt} x\left(t - \tau_j(t)\right), \end{cases} \tag{III.4}$$

avec

$$\omega_j(t) = \frac{b_j(t)}{1 - \tau_j'(t)}. \tag{III.5}$$

Dans [18] **T. Burton** est développé une méthode, basée sur la notion de point fixe pour étudier l'équation

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})\dot{x}+b(t)g(x(t-L))=0. \tag{III.6}$$

En suivant dans [77, 78] **D. Pi** est appliqué même idée pour les équations

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})\dot{x}+b(t)g(x(t-r(t)))=0, \tag{III.7}$$

et

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})\dot{x}+_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}a_j(t,s)g_j(s,x(s))\,ds=0. \tag{III.8}$$

Cette méthode elle a été ensuite utilisée par exemple voir [25] [11]-[37], [58], [79]-[78].

III.1 Inversion et transformation de l'équation

Selon ce qu'on a vu au premier chapitre, pour chaque fonction $\psi\in C([m(t_0),t_0],\mathbb{R})$, une solution de (III.1) à travers (t_0,ψ) existe. C'est une fonction continue $x:[m(t_0),\sigma)\longrightarrow\mathbb{R}$, pour une constante positive $\sigma>0$, telle que x satisfait (III.1) sur $[0,\sigma)$ et coïncide avec ψ sur $[m(t_0),t_0]$. Elle est notée par $x(t)=x(t,t_0,\psi)$.

Cependant, le calcul de cette solution n'est pas une chose facile. Pire encore, l'absence d'un EDO terme non trivial complique la recherche d'une telle solution. On a besoin donc de faire des préparations si on veut aboutir à un quelconque résultat. Une transformation de l'équation (III.1) s'impose dans notre situation.

La méthode directe de Lyapunov n'a donné que de maigre résultats de stabilité et avec beaucoup de restrictions sur le noyau. Il s'est avéré donc que l'espoir d'obtenir des améliorations avec la méthode de Lyapounov semble une tentative vaine. C'est pourquoi, les investigateurs se sont penchés sur la méthode de point fixe qui s'est plus concluante pour ce type d'équations. Dans la suite on va utiliser le Théorème de point fixe de Banach pour conclure la stabilité asymptotique de la solution zéro. En particulier, on souhaite définir un espace convenable et une application P associée à (III.1) sur un espace métrique complet $\mathbb{S}_\psi$ de sorte que pour une solution de (III.1) sera un point fixe de P. L'espace $\mathbb{S}_\psi$ possède toute les caractéristiques qui fait de la solution bornée, stable et/ou asymptotiquement stable.

Avant tout on rappelle que la fonction gamma d'Euler $\Gamma(s)$ est définie par l'intégrale pour plus détail voir [84]

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt,\ s>0$$

Le théorème suivant dû sera très utile dans la stabilité asymptotique du modèle que nous allons étudier qu'est montré dans [41].

Théorème 66

Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, $\varphi : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit la fonction

$$F(\lambda) := \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda\varphi(t)} f(t)\, dt.$$

i) On admet qu'il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que pour $\lambda \geq \lambda_0$ on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda\varphi(t)} |f(t)|\, dt < +\infty,$$

ii) supposons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta[$, $\varphi'(t) > 0$ sur $[\alpha, \beta[$ et que f est une fonction continue en α et $f(\alpha) \neq 0$, alors

$$F(\lambda) \sim \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\varphi(\alpha)} \quad (\lambda \longrightarrow +\infty).$$

Preuve. (a) Supposons d'abord que, $\varphi(t) = t$, $\alpha = 0$,

$$F(\lambda) = \int_{0}^{\beta} e^{-\lambda t} f(t)\, dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe η tel que, si $0 \leq t \leq \eta$, alors

$$|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Décomposons l'intégrale,

$$F(\lambda) = f(0) \int_{0}^{\eta} e^{-\lambda t} dt + \int_{0}^{\eta} e^{-\lambda t} (f(t) - f(0))\, dt + \int_{\eta}^{\beta} e^{-\lambda t} f(t)\, dt.$$

Le résultat annoncé se déduit des estimations suivantes

$$\int_{0}^{\eta} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\eta}\right),$$

$$\int_{0}^{\eta} e^{-\lambda t} (f(t) - f(0))\, dt \leq \varepsilon \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

et pour $t \geq \eta$ on a $(\lambda - \lambda_0)(t - \eta) \geq 0$ donc

$$\int_{\eta}^{\beta} e^{-\lambda t} f(t)\, dt \leq e^{-\eta(\lambda - \lambda_0)} \int_{\eta}^{\beta} e^{-\lambda_0 t} f(t)\, dt.$$

(b) La fonction $t \longmapsto \varphi(t) - \varphi(\alpha)$ est une bijection de $[\alpha, \beta[$ sur $[0, \beta_0[$, avec $\beta_0 = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$. Soit ψ la fonction réciproque. En effectuant le changement de variable défini par $t = \psi(u)$

nous obtenons

$$F(\lambda) = e^{-\lambda\varphi(\alpha)} \int_0^{\beta_0} e^{-\lambda u} f(\psi(u))\psi'(u)\,du.$$

et nous trouvons la situation étudiée en (**a**) avec

$$\frac{d\psi(u)}{dt} = \psi'(\varphi(t) - \varphi(\alpha))\varphi'(t) = 1 \text{ et } \psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(\alpha)}.$$

Alors, le résultat découle immédiatement du (**a**) ■

Avant d'expliciter cette construction, nous énonçons les définitions de la stabilité et stabilité asymptotique

Définition 67

La solution triviale de (III.1) est stable en $t = t_0$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ telle que si $\left[\psi \in \mathcal{C}(t_0),\ y_0 \in \mathbb{R}, \left\|\psi\right\| + \left|y_0\right| < \delta\right]$ alors $\left|x(t, t_0, \psi)\right| + \left|y(t, t_0, \psi)\right| < \varepsilon$ quel que soit $t \geq m(t_0)$.

Définition 68

La solution triviale de (III.1) est asymptotiquement stable si elle stable en $t = t_0$ et il existe un $\delta > 0$ telle pour toute fonction $\left[\psi \in \mathcal{C}(t_0), y_0 \in \mathbb{R}, \left\|\psi\right\| + \left|y_0\right| < \delta_1\right]$, la solution x satisfaisante $x = \psi$ sur $[m(t_0), t_0]$ tend vers zéro lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Il est clair que les notions de stabilité, énoncées ci-dessus, ne diffèrent pas trop de celles des systèmes sans retard, sauf pour les hypothèses concernant les conditions initiales.

On commence par transformer (III.1) pour obtenir une équation moins délicate pour être inverser.

Lemme 69

En Appliquant la formule de la variation de paramètre à seconde équation de (III.4), on trouve

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = B(t) - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(u)du} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} a_j(s,v) g_j(v, x(v))\,dv\,ds \\ - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(u)du} \omega_j(s) \frac{d}{ds} x\left(s - \tau_j(s)\right) ds,\end{aligned} \tag{III.9}$$

où

$$B(t) := \dot{x}(t_0) e^{-\int_{t_0}^t A(u)du}. \tag{III.10}$$

Preuve. En effet, en multipliant les deux côtés de (III.1) par le facteur $e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}$ et en intégrant par rapport à s de t_0 à t, on obtient

$$y(t) = y(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} A(v)dv} - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} A(v)dv} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} a_j(s,v) g_j(v, x(v))\, dv ds$$
$$- \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} A(v)dv} \omega_j(s) \frac{d}{ds} x\left(s - \tau_j(s)\right) ds. \tag{III.11}$$

En substituant $\dot{x}(t)$ dans (III.11), on trouve

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{x}(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} A(v)dv} \\ &- \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} A(v)dv} \sum_{j=1}^{N} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} a_j(s,v) g_j(v, x(v))\, dv ds \\ &- \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} A(v)dv} \sum_{j=1}^{N} \omega_j(s) \frac{d}{ds} x\left(s - \tau_j(s)\right) ds.\end{aligned}$$

■

Lemme 70

L'équation

$$\sigma(t) = -\sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} a_j(t,s) g_j(s, x(s))\, ds, \tag{III.12}$$

est équivalente à

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dt} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} C_j(t,s) g_j(s, x(s))\, ds$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} C_j(t, t-\tau_j(t))(1-\tau_j'(t)) g_j\left(t-\tau_j(t), x(t-\tau_j(t))\right), \tag{III.13}$$

où

$$C_j(t,s) = \int_{t}^{s} a_j(u,s)du \text{ et } C_j(t, t-\tau_j(t)) = \int_{t}^{t-\tau_j(t)} a_j(u, t-\tau_j(t))du.$$

Preuve. Par la différentiation du terme intégral dans (III.12) on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{t-\tau_j(t)}^{t} C_j(t,s)g_j(s,x(s))\,ds \\
&= \int_{t-\tau_j(t)}^{t} \frac{\partial}{\partial t}C_j(t,s)g_j(s,x(s))\,ds + C_j(t,t)g_j(t,x(t)) \\
&- C_j(t,t-\tau_j(t))(1-\tau_j'(t))g_j\left(t-\tau_j(t),x(t-\tau_j(t))\right),
\end{aligned}$$

par suite, on voit que l'équation (III.12) devient équivalente (III.13) si C_j satisfait les deux conditions suivantes

$$C_j(t,t) = 0 \ \text{ et } \frac{\partial C_j(t,s)}{\partial t} = -a_j(t,s),$$

alors, pour une certaine fonction $C_j(t,s)$ doit répondre à ces conditions si et seulement si

$$C_j(t,s) = \int_t^s a_j(u,s)du \text{ et } C_j(t,t-\tau_j(t)) = \int_t^{t-\tau_j(t)} a_j(u,t-\tau_j(t))du.$$

En conséquence, (III.12) est équivaut à (III.13). ■

Lemme 71

Soient $h_j : \left[m_j(t_0),\ \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,N$ sont des fonctions arbitraires continues. Supposons que τ_j sont de classe C^2 et $\tau_j'(t) \neq 1$ pour $j = 1,\ldots,N$. Si x est une solution de l'équation (III.1) et (III.4) sur un intervalle $[t_0, T)$ et satisfait la condition initiale $x(t) = \psi(t)$ sur $[m(t_0), t_0]$ alors x est solution de l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned}
x(t) \ = \ & \left[x(t_0) - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} h_j(v)x(v)\,dv\right] e^{-\int_{t_0}^{t} H(v)dv} \\
& + \left[\dot{x}(t_0) + \sum_{j=1}^{N} \left(\omega_j(t_0)x\left(t_0 - \tau_j(t_0)\right) - \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} C_j(t_0, v)g_j(v, x(v))\,dv\right)\right] \\
& \times \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} e^{-\int_{t_0}^{u} A(v)dv}\,du \\
& + \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} h_j(v)x(v)\,dv - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} H(u) \int_{u-\tau_j(u)}^{u} h_j(v)x(v)\,dv\,du \\
& + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \left[\left(1 - \tau_j'(u)\right)h_j\left(u - \tau_j(u)\right) - \frac{b_j(u)}{1 - \tau_j'(u)}\right] x\left(u - \tau_j(u)\right)du \\
& + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{u-\tau_j(u)}^{u} C_j(u, v)g_j(v, x(v))\,dv\,du \\
& - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} A(s)e^{-\int_s^u A(v)dv} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} C_j(s, v)g_j(v, x(v))\,dv\,ds\,du \\
& + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} C_j(s, s - \tau_j(s))(1 - \tau_j'(s))g_j\left(s - \tau_j(s), x(s - \tau_j(s))\right)ds\,du \\
& + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} r_j(s)\,x\left(s - \tau_j(s)\right)ds\,du, \qquad \text{(III.14)}
\end{aligned}$$

sur $[t_0, T)$, d'où $r_j(\cdot)$ et H sont données respectivement par

$$r_j(t) = \left[\left(b_j(t)A(t) + b_j'(t)\right)\left(1 - \tau_j'(t)\right) + b_j(t)\tau_j''(t)\right] / \left(1 - \tau_j'(t)\right)^2, \qquad \text{(III.15)}$$

$$H(t) := \sum_{j=1}^{N} h_j(t), \qquad \text{(III.16)}$$

Réciproquement, si une fonction arbitrairement x est coïncide avec ψ sur $[m(t_0), t_0]$ et solution de (III.14) sur un intervalle $[t_0, T_1]$, alors x est une solution de (III.4) sur $[t_0, T_1]$.

Preuve. En utilisant le lemme 70 pour mettre (III.9) sous cette autre, mais équivalente, forme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = B(t) &+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(v)dv} \frac{d}{ds} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} C_j(s,v) g_j(v, x(v))\, dv ds \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(v)dv} \left[C_j(s, s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s)) g_j\left(s-\tau_j(s), x(s-\tau_j(s))\right)\right] ds \\ &- \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(v)dv} \omega_j(s) \frac{d}{ds} x\left(s-\tau_j(s)\right) ds. \end{aligned} \tag{III.17}$$

En multipliant les deux côtés de (III.17) par le facteur $e^{\int_{t_0}^t H(v)dv}$ et en intégrant de 0 à n'importe quel $t \in [0, T)$, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) e^{-\int_{t_0}^t H(v)dv} + \int_{t_0}^{t} B(u) e^{-\int_u^t H(v)dv} du \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \frac{d}{du} \int_{u-\tau_j(u)}^{u} h_j(v) x(v)\, dv du \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} (1-\tau_j'(u)) h_j(u-\tau_j(u)) x\left(u-\tau_j(u)\right) du \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} \frac{d}{ds} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} C_j(s,v) g_j(v, x(v))\, dv ds du \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} C_j(s, s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s)) \times g_j\left(s-\tau_j(s), x(s-\tau_j(s))\right) ds du \\ &- \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} \omega_j(s) \frac{d}{ds} x\left(s-\tau_j(s)\right) ds du. \end{aligned}$$

D'après (III.5), (III.10) et les définitions de $r_j(t)$ en effectuant une intégration par parties il vient

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left[x(t_0) - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} h_j(v)x(v)\,dv\right] e^{-\int_{t_0}^{t} H(v)dv} \\
&+ \left[\dot{x}(t_0) + \sum_{j=1}^{N} \left(\omega_j(t_0)x\Big(t_0-\tau_j(t_0)\Big) - \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} C_j(t_0,v)g_j(v,x(v))\,dv\right)\right] \\
&\times \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} e^{-\int_{t_0}^{u} A(v)dv}\,du \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} h_j(v)x(v)\,dv - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} H(u) \int_{u-\tau_j(u)}^{u} h_j(v)x(v)\,dvdu \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \left[(1-\tau_j'(u))h_j\Big(u-\tau_j(u)\Big) - \frac{b(u)}{1-\tau_j'(u)}\right] x\Big(u-\tau_j(u)\Big)\,du \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{u-\tau_j(u)}^{u} C_j(u,v)g_j(v,x(v))\,dvdu \\
&- \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} A(s)e^{-\int_s^u A(v)dv} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} C_j(s,v)g_j(v,x(v))\,dvdsdu \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} C_j(s,s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s)) \times g_j\Big(s-\tau_j(s),x(s-\tau_j(s))\Big)\,dsdu \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} r_j(t)x\Big(s-\tau_j(s)\Big)\,dsdu,
\end{aligned}
$$

ce qui donne exactement (III.14). Inversement, supposons qu'une fonction continue x coïncide avec ψ sur $[m(t_0), t_0]$ et satisfait (III.14) sur un intervalle $[t_0, T_1)$ alors, x est différentiable sur $[t_0, T_1)$ alors en dérivant (III.14) on aboutit à (III.1). ■

III.2 Bornitude et stabilité asymptotique de solutions

Nous allons a partie de l'équation (III.14) on extraire une application de point fixe P correspondant à (III.1). Le défi ici est le choix d'un espace et des hypothèses formulées au début du cette partie ainsi une métrique est définie sur un espace bien spécifié. Pour cela considérons $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ l'espace de fonctions continues et bornées à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[m(t_0), \infty)$ muni de la norme du supremum i.e.,

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi(t)| : t \in [m(t_0), \infty)\},\ \phi \in \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ est un espace de Banach. En d'autres expressions on va s'installer dans l'espace métrique $(\mathcal{C},\rho)$, avec ρ est la distance induite par la norme ci-dessus, c'est-à-dire

$$\rho(x,y) := \sup_{t\geq m(t_0)} |x(t)-y(t)| = \|x-y\|, \text{ pour tout } x,y \in \mathcal{C},$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}([m(t_0),t_0],\mathbb{R})$ une fonction donnée. Définissons

$$\mathbb{S}_\psi := \{\varphi \in [m(t_0),\infty) \to \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathcal{C},\ \varphi(t) = \psi(t) \text{ sur } [m(t_0),t_0]\}.$$

Il est clair que $\left(\mathbb{S}_\psi, \|\cdot\|\right)$ est un sous espace fermé de $(\mathcal{C},\|\cdot\|)$ et donc il est de Banach lui aussi.

Dans la suite à l'aide du lemme 71 on définit explicitement l'application P sur l'ensemble $\mathbb{S}_\psi$ et nous donnons des conditions importantes et nécessaires de sorte que l'application P soit envoie $\mathbb{S}_\psi$ dans lui-même pour vers ce but on suppose l'on a

i) Pour $t \geq t_0$ on a

$$\liminf_{t\longrightarrow\infty} \int_{t_0}^{t} H(s)ds > -\infty. \tag{III.18}$$

ii) Il existe des fonctions $R_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ telles que, pour x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$\left|g_j(t,x_1) - g_j(t,x_2)\right| \leq R_j(t)|x_1 - x_2|,\ j = 1,...,N \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \tag{III.19}$$

$$g_j(t,0) = 0,\ j = 1,...,N \text{ pout } t \in \mathbb{R}^+. \tag{III.20}$$

iii) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} \left|h_j(v)\right| dv + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} |H(u)| \int_{u-\tau_j(u)}^{u} \left|h_j(v)\right| dv du \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \left|(1-\tau_j'(u))h_j\left(u-\tau_j(u)\right) - \frac{b_j(u)}{1-\tau_j'(u)}\right| du \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{u-\tau_j(u)}^{u} \left|C_j(u,v)\right| R_j(v) dv du \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} A(s) e^{-\int_s^u A(v)dv} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} \left|C_j(s,v)\right| R_j(v) dv ds du \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} \left|C_j(s,s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))\right| R_j\left(s-\tau_j(s)\right) ds du \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} \left|r_j(s)\right| ds du \\
&\leq \alpha.
\end{aligned} \tag{III.21}$$

iv) Il existe des constantes $a_0 > 0$, $\gamma > 0$, $Q_0 > 0$ et une fonction continue $A_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$

telles que pour tout $t \geq t_0$ on ait

$$f(t,x,y) \geq A_1(t) \geq 0 \text{ pour } x,y \in \mathbb{R}, \tag{III.22}$$

et pour $t \geq u \geq Q_0$ on a

$$\int_u^t H(v)\,dv + \int_{t_0}^u A_1(v)\,dv \geq a_0 u^\gamma + b,\ b \in \mathbb{R}. \tag{III.23}$$

v) Il existe une constante $\beta > 0$ de sorte que

$$\sum_{j=1}^N \frac{|b_j(t)|}{|1-\tau_j'(t)|} + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t A(u)du}\left(\int_{s-\tau_j(s)}^s |a_j(s,v)| R_j(v)\,dv + |r_j(s)|\right)ds \leq \beta. \tag{III.24}$$

Maintenant on définit l'application P sur $\mathbb{S}_\psi$ comme suit, pour $\phi \in \mathbb{S}_\psi$ $(P\phi)(t) = \psi(t)$ sur $[m(t_0), t_0]$, cependant $t > t_0$ on pose

$$\begin{aligned}
P\varphi(t) &= \left[\psi(t_0) - \sum_{j=1}^N \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} h_j(v)\psi(v)\,dv\right] e^{-\int_{t_0}^t H(v)dv} \\
&+ \left[\dot{x}(t_0) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{b_j(t_0)}{1-\tau_j'(t_0)}\psi\big(t_0-\tau_j(t_0)\big) - \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} C_j(t_0,v) g_j(v,\psi(v))\,dv\right)\right] \\
&\times \int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv} e^{-\int_{t_0}^u A(v)dv}\,du \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j(t)}^t h_j(v)\varphi(v)\,dv - \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv} H(u) \int_{u-\tau_j(u)}^u h_j(v)\varphi(v)\,dv\,du \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv}\left[(1-\tau_j'(u))h_j\big(u-\tau_j(u)\big) - \frac{b_j(u)}{1-\tau_j'(u)}\right]\varphi\big(u-\tau_j(u)\big)\,du \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{u-\tau_j(u)}^u C_j(u,v) g_j(v,\varphi(v))\,dv\,du \\
&- \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^u A(s) e^{-\int_s^u A(v)dv} \int_{s-\tau_j(s)}^s C_j(s,v) g_j(v,\varphi(v))\,dv\,ds\,du \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^u e^{-\int_s^u A(v)dv} C_j(s,s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s)) \times g_j\big(s-\tau_j(s), x(s-\tau_j(s))\big)\,ds\,du \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{t_0}^u e^{-\int_s^u A(v)dv} r_j(s)\varphi\big(s-\tau_j(s)\big)\,ds\,du,
\end{aligned} \tag{III.25}$$

Lemme 72

On admet que les hypothèses (III.18)–(III.23) sont vérifiées, alors $P:\mathbb{S}_\psi \to \mathbb{S}_\psi$.

Preuve. Premièrement, supposons que (III.18) est vérifiée et posons

$$M = \sup_{t\geq t_0} e^{-\int_{t_0}^{t} H(v)dv}, \tag{III.26}$$

il est évidemment que $(P\varphi)(t)$ est continue parce que φ est une fonction continue et $(P\varphi)$ coïncide avec ψ sur l'intervalle initiale. Aussi, pour $t > t_0$, compte tenu des condition (III.18), (III.21), (III.19) et (III.20) on a

$$\begin{aligned}|P\varphi(t)| = &\left\|\psi\right\|\left[1+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0}\left|h_j(v)\right|dv\right]M\\ &+\left[|\dot{x}(t_0)|+\left\|\psi\right\|\sum_{j=1}^{N}\left(\left|\frac{b_j(t_0)}{1-\tau_j'(t_0)}\right|+\int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0}\left|C_j(t_0,v)\right|R_j(t)dv\right)\right]\\ &\times\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A(v)dv}du+\alpha\left\|\varphi\right\|.\end{aligned}$$

Pour voire $P:\mathbb{S}_\psi \to \mathbb{S}_\psi$, il suffit de montrer que la quantité réelle $\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A(v)dv}du$ est bornée. En effet, d'après la condition III.22 on a $A(t)\geq A_1(t)\geq 0$ pour $t\geq t_0$, ce qui implique

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A(v)dv}du \leq \int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A_1(v)dv}du.$$

On décompose le terme du second membre de manière suivante

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A_1(v)dv}du = &\int_{t_0}^{J} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A_1(v)dv}du\\ &+\int_{J}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A_1(v)dv}du,\end{aligned} \tag{III.27}$$

pour $J\geq Q_0$, la dernière égalité découle que le premier terme dans le second membre de (III.27) est borné. Par suite, en utilisant la condition (III.23) on remarque que

$$\int_{J}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}e^{-\int_{t_0}^{u}A_1(v)dv}du \leq e^{-b}\int_J^t e^{-a_0u^\gamma}du. \tag{III.28}$$

On définit la fonctions F par

$$F(J) := \int_J^\infty e^{-a_0u^\gamma}du \tag{III.29}$$

alors, le changement de variable $u = \theta^{\frac{1}{\gamma}}$ donne

$$F(J) = \frac{1}{\gamma} \int_{J^\gamma}^{\infty} e^{-a_0\theta} \theta^{\frac{1}{\gamma}-1} d\theta \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-a_0\theta} \theta^{\frac{1}{\gamma}-1} d\theta = \frac{\Gamma(1/\gamma)}{\gamma a_0^{1/\gamma}}. \tag{III.30}$$

Alors la fonction $F(J)$ est bornée pour $\gamma > 0$, ceci démontre que $(P\varphi)$ est aussi bornée. Cela veut dire que P applique $\mathbb{S}_\psi$ dans lui-même. ■

À partir de lemmes (71) et (72) et sous les hypothèses (i)–(vi) on prouve que pour une fonction continue donnée $\psi : [m(t_0), t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ il existe une fonction unique continue x qui est solution de (III.1) sur $[m(t_0), \infty)$ et coïncide avec ψ sur $[m(t_0), t_0]$. Ensuite on va montrer que la solution zéro de (III.1) satisfait les axiomes de la définition 68, cette conclusion est résumée par le théorème suivant.

Théorème 73

Sous les hypothèses du lemme (72). Supposons que R_j, g_j (pour $j = \overline{1,N}$), H et A_1 répondent aux conditions (III.18)–(III.24) alors, pour toute fonction continue $\psi : [m(t_0), t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une fonction unique $x : [m(t_0), \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $x = \psi$ sur $[m(t_0), t_0]$, qui est solution de (III.1) sur $[t_0, \infty)$. En outre, cette solution x est bornée par l sur $[m(t_0), \infty)$. En plus, la solution triviale de (III.1) est stable en t_0.

Preuve. On considère l'ensemble $\mathbb{S}_\psi$ engendrée par la fonction continue (donnée initialement) $\psi : [m(t_0), t_0] \to \mathbb{R}$. Le lemme 72 donne que $P : \mathbb{S}_\psi \to \mathbb{S}_\psi$. On affirme que l'application P est une contraction sur $\mathbb{S}_\psi$. En effet, soient $\phi, \eta \in \mathbb{S}_\psi$ alors pour $t > t_0$ on a

$$\begin{aligned}
&\left\|P\varphi - P\phi\right\| \leq \\
&\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}\left|h_j(v)\right|dv + \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}|H(u)|\int_{u-\tau_j(u)}^{u}\left|h_j(v)\right|dvdu\right.\\
&+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}\left|(1-\tau_j'(u))h_j\left(u-\tau_j(u)\right)-\frac{b_j(u)}{1-\tau_j'(u)}\right|du\\
&+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}\int_{u-\tau_j(u)}^{u}\left|C_j(u,v)\right|R_j(v)\,dvdu\\
&+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}\int_{t_0}^{u} A(s)e^{-\int_s^u A(v)dv}\int_{s-\tau_j(s)}^{s}\left|C_j(s,v)\right|R_j(v)\,dvdsdu\\
&+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}\int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv}\left|C_j(s,s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))\right|R_j\left(s-\tau_j(s)\right)dsdu\\
&\left.+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv}\int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv}\left|r_j(s)\right|dsdu\right]\left\|\varphi-\phi\right\|\\
&\leq \alpha\left\|\varphi-\phi\right\|,
\end{aligned}$$

pour $t \geq t_0$. Clairement cette inégalité est aussi valide sur $[m(t_0), t_0]$. Conséquemment, d'après le lemme 72 $P : \mathbb{S}_\psi \to \mathbb{S}_\psi$ et comme $\alpha < 1$, on conclut que P est une contraction sur l'espace complet $(\mathbb{S}_\psi, \rho)$. Par conséquent, par le principe de l'application contractante (voir [86, p. 2]), P possède un et seul point fixe $x \in \mathbb{S}_\psi$ qui est solution de (III.14) sur $[m(t_0), \infty)$ à cause du lemme 71. On conclut que x est l'unique fonction continue bornée vérifiant (III.4) et (III.1) en même temps sur $[m(t_0), \infty)$ et coïncide avec ψ sur $[m(t_0), t_0]$.

Tournons-nous enfin vers, la stabilité de la solution zéro de (III.1) pour vers cette point, notons

$$L := \sup_{t\geq t_0}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} e^{-\int_{t_0}^u A_1(v)dv}du. \tag{III.31}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $0 < \delta < \varepsilon$, $\dot{x}(t_0)$ et $\left\|\psi\right\| < \delta$ de sorte que

$$\begin{aligned}
&\delta\left[1+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0}\left|h_j(v)\right|dv\right]M\\
&+\left[|\dot{x}(t_0)|+\delta\sum_{j=1}^{N}\left(\left|\frac{b_j(t_0)}{1-\tau_j'(t_0)}\right|+\int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0}\left|C_j(t_0,v)\right|R_j(t)\,dv\right)\right]L\\
&\leq (1-\alpha)\varepsilon.
\end{aligned} \tag{III.32}$$

Si $(x(t), y(t))$ est une solution de (III.4) avec $y = \dot{x}$ on $[m(t_0), \infty)$ et $y(t_0) = \dot{x}(t_0)$ alors, $x = Px$ où P désigne l'application définie dans (III.25). On affirme que $|x(t)| + \left|y(t)\right| < \varepsilon$

pour tout $t \geq t_0$. Le fait que $|x(t)| = |\psi(t)| < \varepsilon$ sur $[m(t_0), t_0]$ il est claire que $|x(t)| < \varepsilon$ sur $t \in [m(t_0), t_0]$. D'autre part si x est une solution de (III.4) et coïncide avec ψ sur $[m(t_0), t_0]$ alors, en utilisant la condition (III.25) il vient

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \left[\delta + \delta \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} \left|h_j(v)\right| dv\right] M \\ &+ \left[|\dot{x}(t_0)| + \delta \sum_{j=1}^{N} \frac{\left|b_j(t_0)\right|}{\left|1-\tau_j'(t_0)\right|} + \delta \int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0} \left|C_j(t_0, v)\right| R_j(v)\, dv\right] L + \varepsilon\alpha \\ &\leq (1-\alpha)\varepsilon + \varepsilon\alpha \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{III.33}$$

Rappelons la formule (III.9) du lemme 69, on a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} A(v) dv} \\ &- \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(v) dv} \int_{s-\tau_j(s)}^{s} a_j(s, v) g_j(v, x(v))\, dv ds \\ &- \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(v) dv} \omega_j(s) \frac{d}{ds} x\left(s - \tau_j(s)\right) ds. \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration par partie on conclut que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} A(v) dv} &\left(\dot{x}(t_0) + \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j(t_0)}{1-\tau_j'(t_0)} x\left(t_0 - \tau_j(t_0)\right)\right) - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j(t)}{1-\tau_j'(t)} x\left(t - \tau_j(t)\right) \\ + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(v) dv} &\sum_{j=1}^{N} \left(r_j(s) x\left(s - \tau_j(s)\right) - \int_{s-\tau_j(s)}^{s} a_j(s, v) g_j(v, x(v))\, dv\right) ds. \end{aligned}$$

On peut garantir par les conditions (III.24) et (III.32) l'estimation suivante

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leq |\dot{x}(t_0)| + \delta \sum_{j=1}^{N} \frac{\left|b_j(t_0)\right|}{\left|1-\tau_j'(t_0)\right|} \\ &+ \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\left|b_j(t)\right|}{\left|1-\tau_j'(t)\right|} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A(u) du} \left(\left|r_j(s)\right| + \int_{s-\tau_j(s)}^{s} \left|a_j(s, v)\right| R_j(v)\, dv\right) ds\right] \\ &\leq \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{L} + \varepsilon\beta \leq \varepsilon\left(\frac{1}{L} + \beta\right). \end{aligned}$$

On voit finalement que la solution triviale est stable en $t = t_0$. ■

On va chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour affirmer qu'une solution triviale de (III.1) sera asymptotiquement stabile. Vers cette fin, en supposant que les hypothèses du Théorème 73 et la condition (III.34) sont valides. Cela est possible si on se laisse shifter vers l'espace de fonctions de $\mathbb{S}_\psi$ qui s'annulent à l'infini i.e,

$$\mathbb{S}_\psi^0 = \left\{\phi \in \mathbb{S}_\psi \mid \phi(t) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty\right\}.$$

Ici aussi $\mathbb{S}_\psi^0$ est fermé dans $\mathbb{S}_\psi$, alors l'espace métrique $\left(\mathbb{S}_\psi^0, \rho\right)$ est complet.

Théorème 74

Supposons que toutes hypothèses du Théorème 73 sont valides. Alors, la solution zéro de (III.1) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\int_{t_0}^{t} H(s)ds \longrightarrow \infty, \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty. \tag{III.34}$$

Preuve. Tout d'abord on va essayer de montrer que pour $\varphi \in \mathbb{S}_\psi^0$ on ait $P\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. En effet, notons les neuf termes dans le second membre de (III.25) respectivement par I_1,I_2,...,I_9 et soit $\varphi \in \mathbb{S}_\psi^0$. Il est bien évident que le terme I_1 tend vers zéro quand $t \longrightarrow \infty$, d'après la condition (III.34). Par suite pour $\varepsilon > 0$ choisissons $T_0 > t_0$ plus grand tel que si $t - \tau_j(t) \geq T_0$, $j = \overline{1, N}$ on aura $|\varphi(s)| < \varepsilon$ pour tout $s \geq T_0$, d'où I_3 va satisfaire

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} |\varphi(v)| \left|h_j(v)\right| dv \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} \left|h_j(v)\right| dv \\ &\leq \alpha\epsilon < \epsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, $I_3 \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$. Soit I_2 alors à partir de la décomposition dans (III.27) on a

$$\int_{t_0}^{J} e^{-\int_u^t H(v)dv} e^{-\int_{t_0}^u A_1(v)dv} du = e^{-\int_J^t H(v)dv} \int_{t_0}^{J} e^{-\int_u^J H(v)dv} e^{-\int_{t_0}^u A_1(v)dv} du, \tag{III.35}$$

Donc (III.35) tend vers 0 si $t \longrightarrow \infty$, d'après la condition (III.34). on remarque déjà que le dernier terme de (III.27) exiger une étude détaillée alors rappelons la formule (III.29) et nous remplaçons u par $J\theta$ dans cette formule elle devient

$$F(J) = J \int_{1}^{\infty} e^{-(a_0 J^\gamma)\theta^\gamma} d\theta. \tag{III.36}$$

La fonction $G(\lambda) := \int_1^\infty e^{-\lambda\theta^\gamma} d\theta$ est vérifié toutes les hypothèses du théorème 66 avec

$$\lambda = a_0 J^\gamma, \ \ \alpha = 1, \ \ \varphi(\theta) = \theta^\gamma, \quad f \equiv 1 \ \ \varphi'(\alpha) = \gamma\alpha^{\gamma-1} = \gamma, \ \ f(\alpha) = 1.$$

On calculera par la suite

$$G(\lambda) \sim \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\varphi(\alpha)} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda}, \quad (\lambda \longrightarrow +\infty).$$

On écrit
$$F(J) \sim \frac{1}{\gamma a_0} J^{1-\gamma} e^{-a_0 J^{\gamma}}, \quad (J \longrightarrow +\infty).$$
En effectuant le changement de variable $z = a_0 J^{\gamma}$ On obtient
$$\frac{1}{\gamma a_0} J^{1-\gamma} e^{-a_0 J^{\gamma}} = \frac{1}{\gamma a_0^{1/\gamma}} z^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-z} \leq \frac{1}{\gamma a_0^{1/\gamma}} z^{m} e^{-z} \longrightarrow 0 \text{ as } z \longrightarrow \infty.$$
D'où $m := [1/\gamma] + 1$. Donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut choisir une constante suffisamment grande $J^* \gg Q_0$ telle que pour $J \geq J^*$ on ait
$$\frac{e^{-b}}{\gamma a_0} J^{1-\gamma} e^{-a_0 J^{\gamma}} \leq \varepsilon. \tag{III.37}$$
Clairement, l'expansion (III.27) est valide si on remplace J par J^*. Au vu de (III.27), (III.35), (III.36) et (III.37) il est naturel I_2 tend vers zéro lorsque $t \longrightarrow \infty$. Il reste à montrer que les termes I_4, I_4 et I_9 tendent, également, vers zéro à l'infini. Vers cette fin. Notons $I = |I_4| + ... + |I_9|$ et soit
$$\begin{aligned} V(u) := & \sum_{j=1}^{N} \int_{u-\tau_j(u)}^{u} \Big[\big| h_j(v) H(u) \big| + \big| C_j(u,v) \big| R_j(v) \Big] dv \\ & + \sum_{j=1}^{N} \left| (1-\tau_j'(u)) h_j\big(u-\tau_j(u)\big) - \frac{b_j(u)}{1-\tau_j'(u)} \right| \\ & + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} \Big| C_j(s, s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s)) \Big| R_j\big(s-\tau_j(s)\big) ds \\ & + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{u} e^{-\int_s^u A(v)dv} \left(A(s) \int_{s-\tau_j(s)}^{s} \big| C_j(s,v) \big| R_j(v) dv + \big| r_j(s) \big| \right) ds. \end{aligned} \tag{III.38}$$

De même pour $\varepsilon > 0$, il existe $T^* > t_0$ tel que $s \geq T^*$ implique que $\big|\varphi(s-\tau_j(s))\big| < \varepsilon$ pour $j = \overline{1, N}$. Clairement $|\varphi(s)| < \varepsilon$ (car $s > s - \tau_j(s)$, $j = \overline{1,\ N}$).

le fait que $t - \tau_j(t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$, pour $j = 1, 2, \cdots, N$, donc en utilisant les conditions (III.19), (III.20) alors I satisfait l'inégalité suivante
$$\begin{aligned} I \leq & \ \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} \big| h_j(v) \big| dv + \varepsilon \int_{T^*}^{t} V(u) e^{-\int_u^t H(v)dv} du \\ & + \sup_{\zeta \geq m(t_0)} |\varphi(\zeta)| \int_{t_0}^{T^*} V(u) e^{-\int_u^t H(v)dv} du \\ & \leq 2\alpha\epsilon + \sup_{\zeta \geq m(t_0)} |\varphi(\zeta)| \int_{t_0}^{T^*} V(u) e^{-\int_u^t H(v)dv} du \end{aligned}$$

pour $t \geq T^*$. De plus l'hypothèse (III.34) implique que, il existe $T^{**} > T^*$ de sorte que pour

$t \geq T^{**}$ on ait

$$e^{-\int_{T^{**}}^{t} H(v)dv} \sup_{\zeta \geq m(t_0)} |\varphi(\zeta)| \int_{T^*}^{t} V(u) e^{-\int_{u}^{T^{**}} H(v)dv} du \leq \varepsilon.$$

On en déduit que, $I \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow \infty$ et il résulte que, $(P\varphi)(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$. Par conséquent,P applique $\mathbb{S}_{\psi}^{0}$ dans lui-même.

En conclusion, pour une fonction continue $\psi : [m(t_0), t_0]$, P possède un point fixe unique $x \in \mathbb{S}_{\psi}^{0}$. Du Lemma 71, x est l'unique solution continue de (III.1) sur $[t_0, \infty)$ satisfaisant $x(t) = \psi(t)$ sur $[m(t_0), t_0]$. L'appartenance de x à $\mathbb{S}_{\psi}^{0}$, oblige $x(t)$ de s'annuler lorsque $t \longrightarrow \infty$ En outre du Théorème 73, la solution zéro est stable en $t = t_0$. Ceci prouve que la solution zéro de (III.1) est asymptotiquement stable si (III.34) est valide.

Réciproquement, On raisonne par l'absurde supposons que la condition (III.34) n'est pas valide. Alors, par la condition (III.18) il existe une suite réelle $\{t_n\}_{n\geq 1}$, $t_n \longrightarrow \infty$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} H(u)du = l \in \mathbb{R}^+.$$

On peut choisir aussi par la condition (III.34) une constante positif $\mu > 0$ satisfaisant,

$$-\mu \leq \int_{t_0}^{t_n} H(v)dv \leq \mu, \text{ pour } n \geq 1.$$

Pour simplifier les notations, définissons, pour tout $s \geq t_0$,

$$C_0 := \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\left|b_j(t_0)\right|}{\left|1 - \tau_j'(t_0)\right|} \left|\psi\left(t_0 - \tau_j(t_0)\right)\right| + \int_{t_0 - \tau_j(t_0)}^{t_0} \left|C_j(t_0, v)\right| R_j(v) \left|\psi(v)\right| dv \right).$$

Rappelons la formule (III.38) et considérons

$$W(u) := V(u) + C_0 e^{-\int_{t_0}^{u} A(v)dv}.$$

En vertu les hypothèses (III.21), (III.22) et (III.23) on obtient

$$\int_{t_0}^{t_n} e^{-\int_{t_0}^{t_n} H(v)dv} W(u) du \leq (\alpha + C_0 L),$$

ceci entraîne ce qui suit

$$T_n = \int_{t_0}^{t_n} e^{\int_{t_0}^{u} H(v)dv} W(u) du \leq (\alpha + C_0 L) e^{\mu}.$$

Pour $n \geq 1$, donc la suite $\{T_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, alors il existe une sous–suite noté $\{T_n\}$ convergente vers un certaine limite $\sigma > 0$ i.e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n = \sigma.$$

Choisissons n_0 assez grand tel que

$$\int_{t_{n_0}}^{t_n} e^{\int_{t_0}^{u} H(v)dv} W(u)\,du < \frac{\delta_0}{8M},$$

pour tout $n \geq n_0$, où $\varepsilon > \delta_0 > 0$ satisfit

$$\begin{aligned}&\left[\left|\psi\left(t_{n_0}\right)\right| + \delta_0 \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{n_0}-\tau_j(t_{n_0})}^{t_{n_0}} \left|h_j(v)\right| dv\right] M \\ &+ \left(\left|\dot{x}\left(t_{n_0}\right)\right| + \delta_0 \sum_{j=1}^{N} \frac{\left|b_j(t_{n_0})\right|}{\left|1-\tau_j'\left(t_{n_0}\right)\right|} + \delta_0 \int_{t_{n_0}-\tau_j(t_{n_0})}^{t_{n_0}} \left|C_j(t_{n_0}, v)\right| R_j(v)\,dv\right) L \\ &\leq (1-\alpha).\end{aligned}$$

Considérons maintenant la solution $x(t) = x(t, t_{n_0}, \psi)$ de (III.1) avec le choix des conditions initiales

$$\psi\left(t_{n_0}\right) = \frac{3\delta_0}{4}, \ \dot{x}\left(t_{n_0}\right) = \frac{\delta_0}{4}$$
$$\left|\psi(s)\right| + \left|\dot{x}(s)\right| \leq \delta_0, \quad s \leq t_{n_0}.$$

On peut choisir ψ et $\dot{x}\left(t_{n_0}\right)$ de sorte que

$$\psi\left(t_{n_0}\right) - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{n_0}-\tau_j(t_{n_0})}^{t_{n_0}} h_j(v)\,\psi(v)\,dv \geq \frac{\delta_0}{4}.$$

De manière similaire à (III.33) avec $\varepsilon = 1$ on trouve $|x(t)| \leq 1$ de plus $x = Px$ donc, pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}&\left|x(t_n) - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_n-\tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(v)\,x(v)\,dv\right| \\ &\geq \left|e^{-\int_{t_{n_0}}^{t_n} H(v)dv}\left(\psi\left(t_{n_0}\right) - \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{n_0}-\tau_j(t_{n_0})}^{t_{n_0}} h_j(v)\,\psi(v)\,dv\right)\right. \\ &\left. + \dot{x}\left(t_{n_0}\right) \int_{t_{n_0}}^{t_n} e^{-\int_u^{t_n} H(v)dv} e^{-\int_{t_{n_0}}^{u} A(v)dv}\,du\right| - \left|\int_{t_{n_0}}^{t_n} e^{-\int_u^{t_n} H(v)dv} W(u)du\right| \\ &\geq e^{-\int_{t_{n_0}}^{t_n} H(v)dv} \frac{\delta_0}{4} - \int_{t_{n_0}}^{t_n} e^{-\int_u^{t_n} H(v)dv} W(u)du \\ &\geq e^{-\int_{t_{n_0}}^{t_n} H(v)dv}\left[\frac{\delta_0}{4} - e^{-\int_0^{t_{n_0}} H(v)dv} \int_{t_{n_0}}^{t_n} e^{\int_0^{u} H(v)dv} W(u)du\right] \geq \frac{\delta_0}{8} e^{-2\mu} > 0. \end{aligned} \tag{III.39}$$

D'autre part, la solution zéro est asymptotiquement stable on ait $x(t) = x\left(t, \psi, \dot{x}(t_{n_0})\right) \longrightarrow 0$, as $t \longrightarrow \infty$. Toujours par la condition (III.21) et grâce au théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer que

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_n-\tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(v)\,x(v)\,dv\right| = \left|x\left(\eta_{t_n}\right)\right|\left|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_n-\tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(v)\,dv\right|$$
$$\leq \alpha\left|x\left(\eta_{t_n}\right)\right| \leq \left|x\left(\eta_{t_n}\right)\right|.$$

Comme t_n et $t_n-\tau_j(t_n)\to\infty$ quand $n\to\infty$, alors $\eta_{t_n}\longrightarrow\infty$. Par suite

$$\lim_{t_n\longrightarrow\infty}\left(x(t_n)-\sum_{j=1}^{N}\int_{t_n-\tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(v)\,x(v)\,dv\right)=0,$$

lorsque $n\longrightarrow\infty$. Or ceci est une contradiction avec (III.39). Par conséquent la condition (III.34) est nécessaire pour la stabilité asymptotique de la solution zéro de (III.1). ■

Dans cet exemple on va donner une illustration numérique de la situation présentée dans le Théorème 74

Exemple 75

Considérons l'équation intégro-différentielle non linéaire à retard de type neutre

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})\,\dot{x}+\sum_{j=1}^{2}\int_{t-\tau_j(t)}^{t} a_j(t,s)g_j(s,x(s))\,ds+\sum_{j=1}^{2} b_j(t)x'(t-\tau(t))=0, \tag{III.40}$$

pour $t\geq 0$, Avec $A(t):=f(t,x(t),\dot{x}(t))=\dfrac{1-0.5\cos(\dot{x}(t)x(t))}{5(t+1)^{\frac{1}{5}}}+2\tanh t$, $g_1(t,x(t)):=0.2t\sin x(t)$, $g_2(t,x(t)):=0.4t\cos x(t)$, $a_1(t,s)=a_2(t,s):=e^{-3(t+s)}$, $\tau_1(t)=0.5t$, $\tau_2(t):=0.5t$ et $b_1(t):=\lambda\dfrac{0.125t}{0.25t^2+1}$, $b_2(t):=\sigma\dfrac{0.125t}{0.25t^2+1}$ où $0<(\lambda+\sigma)\leq 1/7$. On affirme la solution nulle. Alors, la solution zéro de (III.40) est asymptotiquement stable.

Preuve. On a évidemment que (III.19), (III.20) et (III.22) sont satisfaites, avec $R_1(t)=R_2(t):=t$ et $A_1(t):=\dfrac{0.5}{5(t+1)^{\frac{1}{5}}}+2\tanh t$, pour $t\geq 0$. Choisissons $h_1(t):=\lambda\dfrac{t+1}{t^2+1}$ et $h_2(t):=\sigma\dfrac{t+1}{t^2+1}$. Il est clair que les conditions (III.18) et (III.34) sont vérifiées. En outre, les calculs montrent que pour $t\geq u\geq 0$ on a

$$\int_u^t H(v)\,dv+\int_0^u A_1(t)\,dv\geq\int_0^u A_1(t)\,dv\geq 0.5\int_0^u\frac{1}{5(v+1)^{\frac{1}{5}}}dv$$
$$\geq\frac{1}{8}u^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{8}, \tag{III.41}$$

donc, la condition (III.23) est valide avec $a_0=1/8$, $b_0=-1/8$ et $\gamma=4/5$. Il reste à prouver la condition (III.21). En effet remarquons que

$$\int_{0.5t}^{t} H(v)\,dv = \int_{0.5t}^{t} |h_1(v)|\,dv + \int_{0.5t}^{t} |h_2(v)|\,dv = (\lambda+\sigma)\int_{0.5t}^{t} \frac{t+1}{t^2+1}dv$$
$$\leq (\lambda+\sigma)\,0.84. \tag{III.42}$$

Le fait que $H(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ et d'après (III.42). On obtient ainsi

$$\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} |H(u)| \int_{u-\tau_1(u)}^{u} |h_1(v)|\,dv\,du$$
$$\leq \left(\sup_{u\geq 0}\int_{0.5u}^{u} |h_1(v)|\,dv\right)\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} |H(u)|\,dv\,du$$
$$\leq (\lambda+\sigma)\,0.84. \tag{III.43}$$

Par suite,

$$\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \left|(1-\tau_1'(u))h_1(u-\tau_1(u)) - \frac{b_1(u)}{1-\tau_1'(u)}\right| du$$
$$= \int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \left|\frac{\lambda 0.25u + 0.5\lambda}{0.25u^2+1} - \frac{\lambda 0.25u}{0.25u^2+1}\right| du$$
$$= 0.5\lambda \int_0^t \frac{1}{0.25}\frac{1}{u^2+4}du = \lambda \arctan\frac{1}{2}t \leq \lambda\frac{\pi}{2}. \tag{III.44}$$

et

$$\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \left|(1-\tau_2'(u))h_2(u-\tau_2(u)) - \frac{b_2(u)}{1-\tau_2'(u)}\right| du$$
$$= 0.5\sigma \int_0^t \frac{1}{0.25}\frac{1}{u^2+4}du = \sigma \arctan\frac{1}{2}t \leq \sigma\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$|C_1(u,v)| = \left|\int_u^v a_1(w,v)\,dw\right| = \left|e^{-3v}\int_u^v e^{-3w}dw\right|$$
$$= \frac{1}{3}\left|e^{-3v}\left(e^{-3u} - e^{-3v}\right)\right|. \tag{III.45}$$

Comme $\left(e^{-3v} - e^{-3u}\right) \geq 0$, pour $0 \leq v \leq u$ ce qui donne,

$$\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{u-\tau_1(u)}^{u} |C_1(u,v)| R_1(v)\,dv\,du$$
$$\leq \int_0^t \int_{0.5u}^{u} |C_1(u,v)||R_1(v)|\,dv\,du$$
$$\leq 0.2\frac{1}{3}\int_0^t \int_{0.5u}^{u} \left(e^{-6v} - e^{-3v-3u}\right) v\,dv\,du := N(t) \leq 0.00026 \tag{III.46}$$

Puisque, la fonction $N(\cdot)$ est strictement positif et croissante sur $[0,\infty)$ et que $N(t) \rightarrow 0.00027$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. On recommence la même procédure on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_{u-\tau_1(u)}^u |C_2(u,v)| R_2(v)\, dvdu &\leq \int_0^t \int_{0.5u}^u |C_2(u,v)||R_2(v)|\, dvdu \\ &\leq 0.00052.\end{aligned}$$

Aussi, on observe que

$$A(t) \leq \frac{1}{5(t+1)^{\frac{1}{5}}} + 2\tanh t \leq 2.3,$$

Par le calcul directement on ait

$$e^{-\int_s^u A(v)dv} \leq e^{-\int_s^u A_1(v)dv} \leq e^{-2\int_s^u \left(\frac{\sinh v}{\cosh v}\right)dv} = \frac{\cosh^2 s}{\cosh^2 u}.$$

ce qui signifie que

$$\begin{aligned}&{}_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_0^u A(s) e^{-\int_s^u A(v)dv} \int_{s-\tau_1(s)}^s |C_1(s,v)||R_1(v)|\, dvdsdu \\ &\leq (0.2)2.3 \int_0^t \int_0^u e^{-2\int_s^u \tanh v dv} \frac{1}{3} \int_{0.5s}^s \left(e^{-6v} - e^{-3v-3s}\right) vdsdvdu \\ &\leq \frac{0.461}{3}\frac{1}{4} \int_0^t \frac{1}{\cosh^2 u}{}_0^u \left(e^{2s} + 2 + e^{-2s}\right) \int_{0.5s}^s \left(e^{-6v} - e^{-3v-3s}\right) vdsdvdu \\ &\leq \frac{0.46}{12} \sup_{u\geq 0} \left|\bar{N}(u)\right| \int_0^t \frac{1}{\cosh^2 u} du \\ &\leq \frac{0.46}{12} 0.09 \int_0^t \frac{1}{\cosh^2 u} du = \frac{0.46}{12} 0.09 \tanh t \leq 0.46 \frac{0.09}{12} = 0.00345. \qquad \text{(III.47)}\end{aligned}$$

Puisque, la fonction $\bar{N}(u) :=_0^u \left(e^{2s} + 2 + e^{-2s}\right)_{0.5s}^s \left(e^{-6v} - e^{-3v-3s}\right) vdvds$ est strictement positive et croissante sur $[0,\infty)$ et $\bar{N}_1(u) \leq 0.09$ pour $u \geq 0$. On recommence la même procédure on trouve

$$\begin{aligned}&{}_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_0^u A(s) e^{-\int_s^u A(v)dv} \int_{s-\tau_2(s)}^s |C_2(s,v)||R_2(v)|\, dvdsdu \\ &\leq 0.0069\end{aligned}$$

avec $\bar{N}_2(u) = \bar{N}_1(u)$. Par un calcul analogue, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_0^u e^{-\int_s^u A(v)dv} |C_1(s, s-\tau_1(s))| \left|(1-\tau_1'(s)\right| |R_1(s-\tau(s))|\, dsdu \\ &\leq 0.2 \int_0^t \frac{1}{\cosh^2 u} \int_0^u \frac{1}{4}\left(e^{2s} + 2 + e^{-2s}\right) \frac{0.25}{3} \left(e^{-3s} - e^{-4.5s}\right) sdsdu \\ &\leq 0.2 \frac{0.25}{12} \int_0^t \frac{1}{\cosh^2 u} \int_0^u \left(e^{2s} + 2 + e^{-2s}\right)\left(e^{-3s} - e^{-4.5s}\right) sdsdu \leq 0.0041666 \qquad \text{(III.48)}\end{aligned}$$

et

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_0^u e^{-\int_s^u A(v)dv} |C_2(s,s-\tau_2(s))| \left|(1-\tau_2'(s)\right| |R_2(s-\tau(s))| dsdu$$
$$\leq 0.0083332.$$

On sait d'autre part que pour $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
r_1(t) &= \frac{\left(b_1(t)A(t)+b_j'(t)\right)}{0.5} \\
&\lambda 0.125\left(\frac{t}{t^2+1}A(t)+\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\right) \\
&= \lambda 0.125\frac{1}{t^2+1}\left(\frac{0.5t}{5(t+1)^{\frac{1}{5}}}+2t\tanh t+\frac{1-t^2}{t^2+1}\right) \\
&\geq \lambda 0.125\left(\frac{1}{t^2+1}\right).
\end{aligned} \tag{III.49}$$

Il est clair que la fonction $r_1(\cdot)$ est strictement positive et $H(t) \geq (\lambda+\sigma)\dfrac{t}{t^2+1}$ pour $t \geq 0$ donc on ait

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_0^u e^{-\int_s^u A(v)dv} |r_1(s)| dsdu \\
&= \int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} b_1(u) du = \int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \frac{\lambda 0.125u}{0.25u^2+1} du \\
&= \frac{0.125}{0.25}\frac{\lambda}{\lambda+\sigma}\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \frac{(\lambda+\sigma)u}{u^2+4} du \\
&\leq \frac{\lambda}{\lambda+\sigma}\frac{0.125}{0.25}\int_0^t e^{-\int_u^t \frac{(\lambda+\sigma)v}{v^2+1}dv} \frac{(\lambda+\sigma)u}{u^2+1} du \leq \frac{0.125}{0.25} = \frac{\lambda}{\lambda+\sigma}0.5.
\end{aligned} \tag{III.50}$$

et

$$\int_0^t e^{-\int_u^t H(v)dv} \int_0^u e^{-\int_s^u A(v)dv} |r_2(s)| dsdu \leq \frac{\sigma}{\lambda+\sigma}0.5.$$

Il faut maintenant justifier que $\alpha < 1$

$$\begin{aligned}
\alpha &:= (\lambda+\sigma)0.84+(\lambda+\sigma)0.84+(\lambda+\sigma)\frac{\pi}{2}+0.00052.+0.00026 \\
&+0.0083332+0.0041666+\frac{\lambda}{\lambda+\sigma}0.5+\frac{\sigma}{\lambda+\sigma}0.5 \\
&= (\lambda+\sigma)\left(1.68+\frac{\pi}{2}\right)+0.51276 \\
&\leq \frac{3.2508}{7}+0.51276 = 0.97716.
\end{aligned}$$

De plus la condition (III.24) est vérifiée, car on a $0 \leq 2(b_1(t)+b_2(t))+\dfrac{1}{12}\left(\bar{N}_1(t)+\bar{N}_2(t)\right) <$

$+\infty$. En clair, toutes les conditions du Théorème 74 sont vérifiées. En conclusion, la stabilité asymptotique de la solution zéro de (III.40) s'en déduit immédiatement du Théorème 74. ■

Remarque 76

Clairement, dans le cas $b \equiv 0$ alors la solution triviale de (III.40) est asymptotiquement stabile. Néanmoins, que cette conclusion est n'est peut pas obtenir dans [78]. Car, dans [78], la fonction $R(\cdot)$ est considérée bornée mais dans notre travail nous supposons que non bornée. En outre, la condition **(iii)** du théorème **2** dans [78] n'est pas valide dans ce cas. Par conséquent notre résultat c'est une généralisation du problème étudié dans [18] et [78].

IV Existence de solutions périodiques d'une équation différentielle à retard de second ordre

Sommaire

Mots clés.
Solution périodique, Point fixe, Contraction large, équation intégro-différentielle non linéaire a retard variable.

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter le travail qu'on a publié dans [45], a sa voir,

H.Gabsi, A.Ardjouni, A.Djoudi, Existence of periodic solutions of second-order nonlinear integro-differential equations with variable delay, Journal of Nonlinear Functional Analysis 2016 (2016), Article ID 34.

IV.1 Introduction à l'étude d'existence

Dans ce chapitre, Nous allons donner un résultat d'existence de la solution du problème périodique pour cela nous utilisons alors le théorème de Krasnoselskii qui est très robuste et efficace pour montrer l'existence d'une solution périodique de (IV.1). Comme souvent les hypothèses physiques/biologique/$\cdots$, prises sur les données du problème ne permettent pas d'avoir terme EDO de (IV.1) qui est nécessaire pour avoir l'existence de la solution de problème non linéaire, alors l'idée consiste à faire une analyse sur les fonctions p,q de sorte que l'équation IV.1 admette l'inversion pour produire une nouvelle, mais équivalente, équation intégrale ayant les mêmes propriétés.

Vers cet objet, nous commençons d'abord par une définition d'un espace de Banach X et une sous-ensemble $\mathbb{M}$ de X. Nous proposons ensuite quelques des hypothèses suffisantes sur f,p,q de sorte que l'équation (IV.1) sera équivalente à une équation intégrale se met sous forme somme de deux applications $P_1, P_2 : \mathbb{M} \longrightarrow X$ la première est une contraction large et l'autre est continue à image compact telles que $P_1 x + P_2 y \in \mathbb{M}$, pour $x, y \in \mathbb{M}$.

Un choix convenable des hypothèses permet de valider les conditions de ce dernier théorème de sorte qu'une solution périodique du problème étudié est concluée. Beaucoup d'investigateurs ont étudié l'existence d'une solution périodique par la technique de point fixe. Par exemple [1], [3], [5], [8], [9], [34], [36], [55], [69], [81], [90] et [93]. Malheureusement, les conditions qui permettent d'aboutir à l'unicité de cette solution restent encore à trouver.

Soit l'équation intégro–différentielle à retard

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x^3(t) = \int_{-\infty}^{t} D(t,s) f(s, x(s-\tau(s)))\, ds, \tag{IV.1}$$

On suppose que

(I) $p, q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et $\tau \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. p, q et τ sont des fonctions continues et T–périodiques où $T > 0$ est une constante fixée de $\mathbb{R}$.

(II) $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $t \geq s$, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, avec τ est une fonction continue et satisfait $\tau(t) \geq \tau^* > 0$.

(III) Pour une suite $x_n \to x$ convergente dans C_T on a $|f(t, x_n) - f(t, x)| \to 0$ est converge uniformément sur $\mathbb{R}$, quand $n \to \infty$.

IV.2 Inversion et transformation de l'équation

Avant de passer à notre objectif nous énoncerons quelques notations et des hypothèses. Soit $T > 0$, Comme au premier chapitre, on désigne par $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues périodiques de période T, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|$ la norme du supremum.

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t \in [0,T]} |x(t)|.$$

Alors, $(C_T, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On définit sous-ensemble C_T^J de C_T comme suit,

$$C_T^J := \{\varphi \in C_T : \|\varphi\| \leq J\}, \tag{IV.2}$$

il est clair que l'espace $\left(C_T^J, \|\cdot\|\right)$ est un Banach, nous supposons que

$$D(t+T, s+T) = D(s,t) \text{ et } f(t+T, x) = f(t, x). \tag{IV.3}$$

et

$$\int_0^T p(u)\, du > 0 \text{ et } \int_0^T q(u)\, du > 0. \tag{IV.4}$$

Il existe une fonction continue $F_J(t) \geq |f(t,x)|$ pour $x \in C_T^J$ et une constante $E_1 > 0$ telles que

$$\int_{-\infty}^{t} \left|D(t,s) F_J(s)\right| ds \leq E_1,\ E_1 \leq \frac{J}{\alpha T}, \tag{IV.5}$$

avec α est définie par (IV.8). Cette condition très importante sera souvent utilisée dans la suite. On écrit plus simplement

$$\sigma = \max\{q(t),\ 0 \leq t \leq T\},$$

et que

$$R_1 = \max_{t\in[0,T]} \left| \int_t^{t+T} \frac{\exp \int_t^s p(u)\,du}{\exp\left(\int_0^T p(u)\,du\right) - 1} q(s)\,ds \right|,\ Q_1 = \left(1 + \exp \int_0^T p(u)\,du\right)^2 R_1^2.$$

Lemme 77

[70] Sous les hypothèses (IV.4), (IV.3) et (**I**). On suppose que

$$\frac{R_1\left(\exp\left(\int_0^T p(u)\,du\right) - 1\right)}{Q_1 T} \geq 1,$$

alors, il existe deux fonctions continues périodiques a et b telles que $b(t) > 0$, $\int_0^T a(u)\,du > 0$ et

$$a(t) + b(t) = p(t) \text{ et } b'(t) + b(t)a(t) = q(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Lemme 78

[91] Soient, $A = \int_0^T p(v)\,dv$ et $B = T^2 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln q(v)\,dv\right)^2$. On pose

$$A^2 \geq 4B. \tag{IV.6}$$

Alors, A et B sont vérifient les propriétés

$$\begin{aligned} \min\left\{\int_0^T a(v)\,dv, \int_0^T b(v)\,dv\right\} &\geq \frac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - 4B}\right) := l, \\ \max\left\{\int_0^T a(v)\,dv, \int_0^T b(v)\,dv\right\} &\leq \frac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - 4B}\right) := m. \end{aligned}$$

Lemme 79

[91]Sous les conditions du lemme 77. Soit $\phi \in C_T$ alors l'équation suivante

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)g(x(t)) = \phi(s),$$

admet une solution $T-$périodique, donnée par

$$x(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)\phi(s)\,ds,$$

d'où

$$G(t,s) = \frac{\int_t^s \left(e^{\int_t^u b(v)dv} + e^{\int_u^s a(v)dv}\right)du + \int_s^{t+T}\left(e^{\int_t^u b(v)dv} + e^{\int_u^{s+T} a(v)dv}\right)du}{\left(\exp\left(\int_0^T a(u)\,du\right) - 1\right)\left(\exp\left(\int_0^T b(u)\,du\right) - 1\right)}.$$

En outre la fonction de Green G est satisfait les propriétés suivantes

$$G(t,t+T) = G(t,t),\ G(t+T,s+T) = G(t,s), \tag{IV.7}$$

et

$$\frac{T}{(e^m-1)^2} \leq G(t,s) \leq \frac{T\exp\left(\int_0^T p(u)du\right)}{\left(e^l-1\right)^2} = \alpha. \tag{IV.8}$$

et il est facile de vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = -b(t)G(t,s) + K(t,s),$$

avec $K(t,s) = \frac{\exp\left(\int_t^s a(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(v)dv\right)-1}$.

Lemme 80

Supposons que les hypothèses du lemme 77 sont vraies. Alors si x est solution $T-$périodique de l'équation (IV.1) si et seulement si x est solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} x(t) = &\int_t^{t+T} G(t,s)q(s)H(x(s))\,ds \\ &+ \int_t^{t+T} G(t,s)\int_{-\infty}^{s} D(s,u)f(u,x(u-\tau(u)))\,du\,ds. \end{aligned} \tag{IV.9}$$

Preuve. En effet, tout d'abord on prend $H(x) = x - x^3$ et soit $x \in C_T$ et on écrit (IV.1) sous la forme

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = q(t)H(x(t)) + \int_{-\infty}^{t} D(t,s) f(s, x(s - \tau(s)))\,ds.$$

Alors, en utilisant Lemme 79 on conclut que toute solution $x \in C_T$ de (IV.1) s'écrit sous la forme

$$x(t) = \int_{t}^{t+T} G(t,s)\left(q(s)H(x(s)) + \int_{-\infty}^{s} D(s,u) f(u, x(u - \tau(u)))\,du\right)ds.$$

■

On définit maintenant des opérateurs $P_1, P_2 : C_T \to C_T$ par

$$(P_1 x)(t) := \int_{t}^{t+T} G(t,s)\,q(s)H(x(s))\,ds, \tag{IV.10}$$

et

$$(P_2 x)(t) := \int_{t}^{t+T} G(t,s) \int_{-\infty}^{s} D(s,u) f(u, x(u - \tau(u)))\,du\,ds. \tag{IV.11}$$

On observe que à partie de (IV.9), (IV.10) et (IV.11) l'existence d'une solution périodique de (IV.1) est équivalente à l'existence d'une solution de l'équation opérationnelle qui peut se mettre sous la forme

$$P_1 x + P_2 x = x \text{ dans } C_T. \tag{IV.12}$$

IV.3 Existence d'une solution périodique

Lemme 81

Soit $\mathcal{B}$ une application définie sur $\mathbb{M}$ par

$$(\mathcal{B}\varphi)(t) := \varphi(t) - \varphi^3(t), \text{ pour tout } \varphi \in \mathbb{M},$$

où

$$\mathbb{M} := \left\{\varphi \in C_T : \|\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

alors, $\mathcal{B}$ est contraction large sur $\mathbb{M}$.

Preuve. En effet, soient $\phi, \varphi \in \mathbb{M}$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{B}\varphi)(t) - (\mathcal{B}\phi)(t)\right| &= \left|\varphi(t) - \phi(t) - \left\{\varphi^3(t) - \phi^3(t)\right\}\right| \\
&= \left|(\varphi(t) - \phi(t))\right|\left|1 - \left\{\varphi^2(t) + \phi^2(t) + \left|\phi(t)\varphi(t)\right|\right\}\right|,
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$(\varphi(t)-\phi(t))^2=\varphi^2(t)+\phi^2(t)-2\phi(t)\varphi(t)\leq 2\left(\varphi^2(t)+\phi^2(t)\right).$$

Le fait que $\varphi^2(t)+\phi^2(t)\leq 1$ il en découle que

$$\left|(\mathcal{B}\varphi)(t)-(\mathcal{B}\phi)(t)\right|\leq\left|\varphi(t)-\phi(t)\right|\left|1-\frac{\left(\varphi^2(t)+\phi^2(t)\right)}{2}\right|\leq\left\|\varphi-\phi\right\|. \tag{IV.13}$$

Par suite, soit $\varepsilon\in(0,1)$ et soient $\phi,\varphi\in\mathbb{M}$ de sorte que $\left\|\varphi-\phi\right\|\geq\varepsilon$. Supposons d'abord que pour un certain t

$$\frac{\varepsilon}{2}\leq\left|\varphi(t)-\phi(t)\right|,$$

donc

$$\varphi^2(t)+\phi^2(t)\geq\frac{\varepsilon^2}{8},$$

dès lors (IV.13) on obtient que

$$\left\|\mathcal{B}\varphi-\mathcal{B}\phi\right\|\leq\left\|\varphi-\phi\right\|\left(1-\frac{\varepsilon^2}{16}\right)\leq\left\|\varphi-\phi\right\|. \tag{IV.14}$$

D'autre part, pour un certain t on a

$$\left|\varphi(t)-\phi(t)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour $\phi,\varphi\in\mathbb{M}$

$$\left|(\mathcal{B}\varphi)(t)-(\mathcal{B}\phi)(t)\right|\leq\frac{1}{2}\left|\varphi(t)-\phi(t)\right|\leq\frac{1}{2}\left\|\varphi-\phi\right\| \tag{IV.15}$$

et dès lors (IV.14) et (IV.15) on déduit que

$$\left\|\mathcal{B}\varphi-\mathcal{B}\phi\right\|\leq\max\left\{\frac{1}{2},\left(1-\frac{\varepsilon^2}{16}\right)\right\}\left\|\varphi-\phi\right\|.$$

alors on prend $\delta=\max\left\{\frac{1}{2},1-\frac{\varepsilon^2}{16}\right\}$, ce qui conclut la preuve. ∎

Lemme 82

Soit P_1 l'application qui définit dans (IV.11). On suppose que

$$\alpha\sigma T\leq 1 \tag{IV.16}$$

alors, $P_1:\mathbb{M}\to\mathbb{M}$ est contraction large.

Preuve. Il est claire que $(P_1\varphi)(t)$ est continue, on va montrer que $P_1\varphi \in C_T$ alors, soit $\varphi \in C_T$ on a

$$\begin{aligned}
|(P_1\varphi)(t)| &= \int_t^{t+T} |G(t,s)||q(s)|\left|\varphi(s) - \varphi^3(s)\right| ds \\
&\leq \max_{0\leq t\leq T}\{|q(s)|\} \int_t^{t+T} |G(t,s)||\mathcal{B}\varphi(s)| ds \\
&\leq \alpha\sigma T \left\|\varphi - \varphi^3\right\|.
\end{aligned}$$

Puisque $\|\varphi\| \leq J$ et de (IV.13) on déduit que

$$|(P_1\varphi)(t)| \leq \alpha\sigma T \|\mathcal{B}\varphi\| \leq \alpha\sigma T \|\varphi\| \leq \alpha\sigma T J \leq J,$$

ce qui donne $P_1\varphi \in \mathbb{M}$. Conséquence, P_1 envoie $\mathbb{M}$ dans lui-même c'est-à-dire $P_1 : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$. Il reste à montrer que P_1 est contraction large. Pour cela, soit $\varepsilon \in (0,1)$ et soient $\varphi, \phi \in \mathbb{M}$ de sorte que $\left\|\varphi - \phi\right\| \geq \varepsilon$. dès lors (IV.16) et revenons à la preuve du lemme 81 il existe $\delta < 1$ tel que

$$\left|(P_1\varphi)(t) - (P_1\phi)(t)\right| \leq \alpha\sigma T\delta \left\|\varphi - \phi\right\| \leq \delta \left\|\varphi - \phi\right\|,$$

alors, $\left\|P_1\varphi - P_1\phi\right\| \leq \delta \left\|\varphi - \phi\right\|$, ce qui nous donne le résultat attendu. ∎

Lemme 83

Sous les hypothèses de les Lemmes 77, 78. Supposons que les conditions (IV.3), (IV.5) sont vérifiées. Alors, $P_2 : M \to \mathcal{M}$ est continue, de plus l'image de P_2 est contenue dans partie compacte, où P_2 est définie dans (IV.11).

Preuve. Premièrement, $P_2\varphi$ est continue. Il est facile de voir que $(P_2\varphi)(t+T) = (P_2\varphi)(t)$. En fait, si l'on observe la condition (IV.5) on peut donc conclure que pour $\varphi \in \mathbb{M}$ on ait

$$\begin{aligned}
|(P_2\varphi)(t)| &\leq \int_t^{t+T} |G(t,s)| \int_{-\infty}^{s} |D(s,u)||f(u,\varphi(u-\tau(u)))| du ds \\
&\leq \int_t^{t+T} |G(t,s)| \int_{-\infty}^{s} |D(s,u)|\left|F_J(u)\right| du ds \\
&\leq \alpha E_1 T \leq J.
\end{aligned} \tag{IV.17}$$

c'est-à-dire, $P_2\varphi \in \mathbb{M}$. Pour voir que P_2 est continue sur C_T^J il suffit donc de montrer que, pour toute suite $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ de points de $\mathbb{M}$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ lorsque $n \to \infty$ implique que la suite $(P_2\varphi_n)_{n\geq 1}$de points de $\mathbb{M}$ est convergente dans $\mathbb{M}$ quand $n \to \infty$. En effet le fait que

$\varphi_n \to \varphi \in \mathbb{M}$, donc $P_2\varphi_n \in C_T$, par suite, soit $r > 0$ est donnée, comme

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+T} |G(t,s)| \int_{s-r}^{s} |D(s,u)||f(u,\varphi_n(u-\tau(u)))|\,duds \\
&\leq \int_t^{t+T} |G(t,s)| \int_{s-r}^{s} |D(s,u)| F_J(u)\,duds \\
&\leq \int_t^{t+T} |G(t,s)| \int_{-\infty}^{s} |D(s,u)| F_J(u)\,duds \leq J,
\end{aligned}$$

alors, pour $n \geq 0$ et $r > 0$ on a

$$\int_t^{t+T} |G(t,s)| \int_{s-r}^{s} |D(s,u)||f(u,\varphi_n(u-\tau(u)))|\,duds \leq J. \tag{IV.18}$$

Il résulte de l'hypothèse (III) et le théorème de convergence dominée que

$$\int_t^{t+T} |G(t,s)| \int_{s-r}^{s} |D(s,u)||f(u,\varphi_n(u-\tau(u))) - f(u,\varphi(u-\tau(u)))|\,duds \to 0$$

quand $n \to \infty$. Autrement dit que $P_2\varphi_n \to P_2\varphi \in \mathbb{M}$.

Par suite, en effectuant (IV.18), (IV.8) et (IV.7) et par la différentiation du $(P_2\varphi_n)(t)$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(P_2\varphi_n)(t) &= \int_t^{t+T} \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,s)\right) \int_{-\infty}^{s} D(s,u) f(u,\varphi_n(u-\tau(u)))\,duds \\
&= -b(t) \int_t^{t+T} G(t,s) \int_{-\infty}^{s} D(s,u) f(u,\varphi_n(u-\tau(u)))\,duds \\
&+ \int_t^{t+T} K(t,s) \int_{-\infty}^{s} D(s,u) f(u,\varphi_n(u-\tau(u)))\,duds. \\
&= -b(t)(P_2\varphi_n)(t) + \int_t^{t+T} K(t,s) \int_{-\infty}^{s} D(s,u) f(u,\varphi_n(u-\tau(u)))\,duds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\| \frac{d}{dt}(P_2\varphi_n) \right\| = J \max\{b(t), 0 \leq t \leq T\} + TE_1 \frac{\exp\left(\int_0^T a(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(v)dv\right) - 1} = E_2,$$

pour une certaine constante E_2, ce qui montre que la suite de fonctions $(P_2\varphi_n)$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$. Cela prouve que $\{P_2\varphi : \varphi \in \mathbb{M}\}$ est équicontinue. En lui appliquant le théorème d'Ascoli et par (IV.17) on conclut que $\{P_2\varphi : \varphi \in \mathbb{M}\}$ est une partie compacte de $\mathbb{M}$. ∎

Théorème 84

Considérons $\mathbb{M} := \{\varphi \in C_T : \|\varphi\| \leq J\}$. Soit $(C_T, \|\cdot\|)$ un Banach (espace de fonctions continues et T-périodiques). Supposons que les conditions (IV.2)–(IV.4), (IV.6) et (IV.16) sont vérifiées. On remplace l'hypothèse (IV.5) par

$$E_1 \leq \frac{1}{3\alpha T} J,$$

alors, l'équation (IV.1) admet une solution T-périodique $x \in \mathbb{M}$. où $J = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Preuve. D'après le lemme 82 l'application $P_2 : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ est complètement continue de plus, le lemme 81 montre que l'application $P_1 : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ est une contraction large. Par suite, pour $\varphi, \phi \in \mathbb{M}$, on a $|(P_1\varphi)(t)| \leq \alpha\sigma T \|\mathcal{B}\varphi\| \leq \alpha\sigma T \|\varphi\|$ et le fait que $\left\|\varphi - \varphi^3\right\| \leq \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$ d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \left\|P_1\varphi + P_2\phi\right\| &\leq \|P_1\varphi\| + \left\|P_2\phi\right\| \leq \alpha\sigma T \left\|\varphi - \varphi^3\right\| + \alpha E_1 T \\ &\leq \alpha\sigma T \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} + \alpha E_1 T \leq \frac{2}{3}J + \frac{1}{3}J = J, \end{aligned}$$

ce qui conduit que $P_1\phi + P_2\varphi \in \mathbb{M}$. Cela montre que toutes les hypothèses du Théorème 28 sont satisfaites alors, il existe un point fixe $x \in \mathbb{M}$ tel que $P_1 x + P_2 x = x$, d'après l'équation opérationnelle (IV.12) et par le lemme 80 cette point fixe est aussi solution de (IV.1). Par conséquent, l'équation (IV.1) admet une solution T-périodique dans $\mathbb{M}$. ■

Conclusion et Perspectives

Les travaux de cette thèse représentent des généralisations qui émanent de systèmes différentielles à retards du type neutre et d'équations non linéaires intégro-différentielles à retard non borné de type Liénard qui sont motivés par des application biologiques du monde réel. Nous avons abordé des questions sur l'existence de solutions périodiques et la stabilité asymptotique par la technique de point fixe de la solution triviale de ces équations et systèmes. Cette étude montre une fois de plus l'efficacité de cette technique dans les domaines des équations et des systèmes à retard non bornés. En outre les conditions de cette technique sont en moyenne contrairement à ceux de Liapunov qui sont ponctuelles. Cette remarque est fondamentale, car les problèmes du monde réel sont incertains et chaotiques et par conséquent, des conditions en moyennes semblent plus convenables. Aussi, les espaces utilisés par la méthode sont des espaces fonctionnels de dimension infinie permettant de contenir des solutions raisonnables pour une variété de problèmes de la vie courante. La littérature contemporaine montre aussi que la méthode de point fixe reste applicable pour les problèmes à retard perturbés pour des termes stochastiques. De ce point de vue-là, cette technique semble avoir de bon jours devant elle. Dans plusieurs études la méthode de point fixe s'est montré incontournable comme pour les système d'équations différentielles non linéaire de type neutre à retard. Néanmoins, il reste encore beaucoup de problèmes pour lesquels la littérature n'a pas encore tranché. A titre d'exemple on a pas pu conclure l'unicité de la solution obtenue pour l'équation du chapitre (4) via le théorème de Krasnoselskii. Faut-il encore rajouter des conditions pour garantir l'unicité. Généralement la plupart des systèmes d'équations différentielles à retards reste encore un problème ouvert.

Bibliographie

[1] Adivar M., Raffoul Y. N. Existence of periodic solutions in totally nonlinear delay dynamic equations, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Spec. Ed. I, 2009, No. 1, 1-20, (2009).

[2] Ardjouni A. A Contribution to the existence, boundedness and stability by fixed point theory in delay functional differential equations. A doctoral thesis presented at the Badji- Mokhtar university of Annaba in 2013.

[3] Ardjouni A., Djoudi A. A existence of periodic solutions for a second order nonlinear neutral differential equation with functional delay Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations , No. 31, 1-9, (2012)

[4] Ardjouni A., Djoudi A. and Soualhia I. Stability for linear neutral integro-differential equations with variable delays, Electron. J. Differ. Equ. Vol. 2012 , No. 172, pp. 1–14, (2012).

[5] Ardjouni A., Djoudi A. Existence of periodic solutions for a second-order nonlinear neutral differential equation with variable delay, General Mathematics, submitted.

[6] Ardjouni A., Djoudi A. Fixed point and stability in neutral nonlinear differential equations with variable delays, Opuscula Mathematica, VoL. 32, No. 1, 2012, pp. 5-19.

[7] Ardjouni A., Djoudi A. Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays, Nonlinear Analysis 74 2062-2070, (2011).

[8] Ardjouni A., Djoudi A. Periodic solutions for a second-order nonlinear neutral differential equation with variable delay, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2011, No. 128, pp. 1-7, (2011).

[9] Ardjouni A., Djoudi A. Periodic solutions in totally nonlinear dynamic equations with functional delay on a time scale, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino Vol. 68, 4, 349-359, (2010).

[10] Ardjouni A., Djoudi A. Stability in nonlinear neutral differential with variable delays using fixed point theory, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2011, No. 43, 1-11.

[11] Ardjouni A., Djoudi A. Stability in nonlinear neutral integro-differential equations with variable delay using fixed point theory, J. Appl. Math. Comput. 44 :317–336. DOI 10.1007/s12190-013-0695-8, (2014).

[12] Arino O., Hbid M. L., Dads E. A. Delay Differential Equations and Applications, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Marrakech, Morocco, September 2002. Springer Science & Business Media, Vol. 205 pages 9-21 (2007).

[13] Arino O., Kimmel M. A nondifferentiable semigroup generated by a model of cell population dynamics. In Appl. Math. Comput. Sci, volume 4(2), pages 211–221, (1986).

[14] Atay F. M. Complex time-delay systems : theory and applications. Springer, (2010).

[15] Becker L. C., Burton T. A. Stability, fixed points and inverse of delays, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 136A 245-275, (2006).

[16] Bellman, R. E., Cooke K. L. Differential-difference equations, volume 6. Academic press INC (londo), Elsevier (1963).

[17] Burton T. A. Fixed points and stability of a nonconvolution equation, Proceedings of the American Mathematical Society 132, 3679–3687, (2004).

[18] Burton T. A. Fixed points, stability, and exact linearization, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications,vol.61,no. 5, pp. 857–870, (2005).

[19] Burton T. A. Furumochi ; A note on stability by Schauder's theorem, Funkcialaj Ekvacioj 44, 73–82, (2001).

[20] Burton T. A. Furumochi ; Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, Dynamic Systems and Applications 11 499–519, (2002).

[21] Burton T. A. Furumochi ; Fixed points and problems in stability theory, Dynamical Systems and Applications 10, 89–116, (2001).

[22] Burton T. A. Furumochi ; Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, Nonlinear Analysis 49 445–454, (2002).

[23] Burton T. A. Liapunov functionals, fixed points, and stability by Krasnoselskii's theorem, Nonlinear Studies 9, 181–190, (2001).

[24] Burton T. A. Stability and periodic solutions of ordinary functional differential equations, Academic Press. NY, (1985).

[25] Burton T. A. Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations, Dover Publications, New York, (2006).

[26] Burton T. A. Stability by fixed point theory or Liapunov's theory : A comparison, Fixed Point Theory 4, 15–32 (2003).

[27] Burton T. A. The case for stability by fixed point theory, Dynamics of continuous, Discrete and impulsive Systems, Ser. A Math. Anal. 13B, suppl, 253-263 (2006).

[28] Burton T. A., Stability by fixed point theory for functional differential equations, is a new work, first published by Dover Publications, Inc, in (2006).

[29] Chen F. D. Positive periodic solutions of neutral Lotka-Volterra system with feedback control, Appl. Math. Comput. 162 , no. 3, 1279-1302, (2005).

[30] Chen. F. D., Shi J. L. Periodicity in a nonlinear predator-prey system with state dependent delays, Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 21 , no. 1, 49-60, (2005).

[31] Cooke K. L. Stability analysis for a vector disease model. Journal of Mathematics 9.1 pages 31-42, (1979).

[32] Cushing J. M. Integro–differential equations and delay models in population dynamics. Vol. 20. Springer Science & Business Media, (2013).

[33] Cushing J. M., Time delays in single species growth models, Journal of mathematical biology 4.3 pages 257-264, (1977).

[34] Dib Y. M., Maroun M. R., Raffoul Y. N. Periodicity and stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay, *Electronic* Journal of Differential Equations, Vol. 2005, No. 142, pp. 1-11, (2005).

[35] Djoudi A., Deham H. Existence of periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with variable delay, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010, No. 127, pp. 1-8, (2010).

[36] Djoudi A., Deham H. Periodic solutions for nonlinear differential equation with functional delay, Georgian Mathematical Journal 15 No. 4, 635-642, (2008).

[37] Djoudi A., Khemis R. Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, Georgian Mathematical Journal, Vol. 13 No. 1, 25-34, (2006).

[38] Djoudi A., Khemis R. Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, Georgian Math. J. Vol 13 No. 1 , 25-34, (2006).

[39] Driver, Rodney David. Ordinary and delay differential equations. Vol. 20. Springer Science & Business Media, 2012.

[40] Fan M., Wang K., Wong, P. J. and Agarwal R. P. Periodicity and stability in periodic n-species Lotka-Volterra competition system with feedback controls and deviating arguments, Acta Math. Sin. Engl. Ser. 19 , no. 4, 801-822, (2003).

[41] Faraut J. Calcul intégral (L3M1). Collection enseignement sup–Mathématiques EDP sciences, (2006).

[42] Fitzpatrick.P., Martelli.M., Mawhin.J., Nussbaum.R. Topological methods for ordinary differential equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (p 74-142) (1993).

[43] James.I.M, General Topology and Homoto theory, Springer-Verlag (1984).

[44] Gabsi H., Ardjouni A., Djoudi A. Existence of positive periodic solutions of nonlinear neutral differential systems with variable delays, Ann Univ Ferrara, Springer (2017).

[45] Gabsi H., Ardjouni A., Djoudi A. Existence of periodic solutions of second-order nonlinear integro-differential equations with variable delay, Journal of Nonlinear Functional Analysis 2016 , Article ID 34, (2016).

[46] Gabsi H., Ardjouni A., Djoudi A. fixed points and stability of a class of nonlinear delay integro-differential equations with variable delays. Facta Universitatis, Series : Mathematics and Informatics, 32(1), 031-057 (2017).

[47] Gabsi H., Ardjouni A., Djoudi A. New stability conditions for the delayed Liénard nonlinear equation via fixed point technique, Azerbaijan Journal of Mathematics Vol 8, NO 1 (2018).

[48] Gabsi H., Ardjouni A., Djoudi A. Nonlinear neutral integro-differential equations, stability by fixed point and inverses of delays. Novi Sad J. Math. Vol.47, No.1, 89-113 (2017).

[49] Gaines.J.L., Mawhin.R.E, Coincidence degree and nonlinear differential equations, Springer, Berlin, (1977).

[50] Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, In Kluwer Academic Publishers, Volume 74 (1992).

[51] Gopalsamy.K., Kulenovic.M.R.S., Ladas.G., Environmental periodicity and time delays in a "food-limited" population model, J. Math. Anal. Appl. 147 545-555 (1990).

[52] Hale J. K. Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. Journal of Differential Equations 1.4, 452-482 (1965).

[53] Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, Vol 3 Spring-Verleg New York Inc, (1977).

[54] Hale J. K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay. Funkcial Ekwac, 21 pages 11–41, (1978).

[55] Huo.H.F., Li.W.T. Positive periodic solutions of a class of delay differential system with feedback control, Applied Mathematics and Computation 148, 35–46 (2004).

[56] Jin C. H., Luo J. W. Fixed points and stability in neutral differential equations with variable delays, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 136, Nu. 3 909-918, (2008).

[57] Jin C. H., Luo J. W. Stability in functional differential equations established using fixed point theory, Nonlinear Anal. 68 3307-3315, (2008).

[58] Jin C. H., Luo J. W. Stability of an integro-differential equation, Computers and Mathematics with Applications 57 1080-1088, (2009).

[59] Kaufmann E. R. A nonlinear neutral periodic differential equation, Electron. J. Differential Equations 2010 , no. 88 pages 1–8, (2010).

[60] Kaufmann E. R., Raffoul Y. N. Periodic solutions for a neutral nonlinear dynamical equation on a time scale, J. Math. Anal. Appl. 319 no. 1, 315–325, (2006).

[61] Kaufmann E. R., Raffoul Y. N. Periodicity and stability in neutral nonlinear dynamic equations with functional delay on a time scale, Electron. J. Differential Equations 2007 , no. 27, 1–12, (2007).

[62] Kostitzin V. A. Sur les équations intégrodifférentielles de l'action toxique du milieu. In Compte rendu de l'AC des Sciences, volume 208, pages 1545–1547, (1939).

[63] Kuang Y. Delay differential equations : with applications in population dynamics. Vol. 191. Academic Press, (1993).

[64] Levin J. J., Nohel J. A. Global asymptotic stability for nonlinear systems of differential equations and applications to reactor dynamics, Archive for Rational Mechanics and Analysis 5.1 pages 194-211, (1960).

[65] Levin J. J. The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation. Proceedings of the American Mathematical Society 14.4 pages 534-541, (1963).

[66] Levin J. J., Nohel J. A. On a nonlinear delay equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications 8.1 pages 31-44 (1964).

[67] Lalli.B.S., Zhang.B.G., On a periodic delay population model, Quart. Appl. Math., 1994, LII :35.W. C. Allee, Animal aggregations, Quart Reviews of Biology, 2 :367 (1927).

[68] Li Y.K. Existence and global attractivity of a positive periodic solution of a class of delay differential equation, Sci. China (Ser. A) 41 (3) 273–284 (1998).

[69] Li W. G., Shen Z. H. An constructive proof of the existence Theorem for periodic solutions of Duffing equations, Chinese Sci. Bull. 42 pages 1591-1595, (1997).

[70] Liu Y., Ge W. Positive periodic solutions of nonlinear duffing equations with delay and variable coefficients, Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 20 pages 235-255, (2004).

[71] MacDonald N. Time Lags in Biological Models, Lecture Notes in Biomathematics Vol 27, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1978).

[72] Mackey, M. C., Glass. Oscillation and chaos in physiological control systems. Science 197.4300 pages 287-289 (1977).

[73] May, Robert M. Biological populations obeying difference equations : stable points, stable cycles, and chaos. Journal of Theoretical Biology 51.2 pages 511-524, (1975).

[74] Maynard Smith J. Models in ecology, cambridge univercity press, (1978).

[75] Mawhin.J.L, Topologiral degree methods in nonlinear boundary value problems, Providence AMS, (1979).

[76] Michiels W. Stability and Stabilization of Time-Delay Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics U.S, (2007).

[77] Pi D. Stability conditions of second order integro–differential equations with variable delay, Abstract and Applied Analysis, Vol 2014 , Article ID 371639, 11 pages, (2014).

[78] Pi. D. Fixed points and stability of a class of integrodifferential equations, Mathematical Problems in Engineering, Vol 2014 Article ID 286214, 10 pages, (2014).

[79] Pi. D. Study the stability of solutions of functional differential equations via fixed points, Nonlinear Analysis : Theory, Methods &Applications, Vol. 74, no. 2, pp. pages 639–651, (2011).

[80] Pielou E. C. Mathematical Ecology, John Wiley and Sons, New York (1977).

[81] Raffoul Y. N. Periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with functional delay, Electron. J. Differential Equations 2003 no. 102 pages 1–7, (2003).

[82] Raffoul Y. N. Positive periodic solutions in neutral nonlinear differential equations, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. 2007 no. 16, 1–10, (2007).

[83] Raffoul Y. N. Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory, Math. Comput. Modelling 40 , no. 7-8, 691–700, (2004).

[84] Schiff J. L. The Laplace transform : theory and applications, Undergraduate Texts in Mathematics. Springe, (1999).

[85] Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for for stability and boundness of functional differential equations of Volterra type, Journal of Differential equations 14 pages 424-430 (1973).

[86] Smart D. R., Fixed Point Theorems, Cambridge tracts in mathematics, University Press, vol 66, (1974).

[87] Smith H. An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. Texts in Applied Mathematics Vol. 57. Springer-Verlag New York, (2011).

[88] Volterra V. Remarques sur la note de m.roger et mlle lambin (etude d'un cas d'antagonisme microbien). In Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, volume 199, pages 1684–1686, (1934).

[89] Volterra V. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires, Journal de mathématiques pures et appliquées, 7 pages 249-298, (1928).

[90] Wang Q. Positive periodic solutions of neutral delay equations (in Chinese), Acta Math. Sinica (N.S.) 6 pages 789-795, (1996).

[91] Wang Y., Lian, H. and Ge W. Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation, Applied Mathematics Letters 20 pages 110-115, (2007).

[92] Yorke J. A. Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations, Journal of Differential equations 7.1 pages 189-202, (1970).

[93] Zeng W. Almost periodic solutions for nonlinear Duffing equations, Acta Math. Sinica (N.S.) 13 pages 373-380, (1997).

[94] Zhang.R.G., Gopalsamy.K. Global attractivity and oscillations in a periodic delay-logistic equation, J. Math. Anal. Appl, 150 274 (1990).

[95] Zhang B. Contraction mapping and stability in a delay differential equation. Dyn. Syst. Appl.4, pages 183–190, (2004).

[96] Zhang B.Fixed points and stability in differential equations with variable delays. Nonlinear Anal. 63, e233–e242, (2005).