



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-
ANNABA**

**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

Faculté des Sciences

Année : 2018

Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

Sur quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problèmes de Cauchy inverses

Option

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par :

KHELILI BESMA

DIRECTEURS DE THÈSE : REBBANI Faouzia Prof. ESTI. ANNABA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE : BOUSSETILA Nadjib Prof. U. GUELMA

Devant le jury :

PRESIDENT : DJELLIT Ali Prof U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : DJEBABLA Abdelhak M.C.A U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : ZOUYED Fairouz M.C.A U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : NOUAR Ahmed M.C.A U. SKIKDA



Université Badji Mokhtar-Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées

Thèse de Doctorat

Présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Par : KHELILI Besma

**Sur quelques méthodes de régularisation
appliquées à une classe de problèmes de
Cauchy inverses**

Directeurs de Thèse :

Prof. REBBANI Faouzia (ESTI-Annaba) IIPP, LMA, U. Annaba
Prof. BOUSSETILA Nadjib (U. Guelma) IIPP, LMA, U. Annaba



Année Universitaire 2018



Résumé

La présente thèse est consacrée à l'étude d'une classe de problèmes inverses de type Cauchy. La nature de ces problèmes est instable (mal posé), et demande un traitement spécifique. Pour traiter ces problèmes, on doit passer par une procédure de régularisation pour pouvoir tirer de ces modèles des informations significatives. Dans ce but, on propose une méthode simple, basée sur une perturbation non-locale des données, dite, méthode des conditions auxiliaires. Cette approche sera appliquée à un problème elliptique posé sur une géométrie bornée et non-bornée, ainsi qu'un problème biparabolique abstrait. On démontre le caractère stable des solutions approchées, ainsi que leurs convergences vers les solutions des problèmes originaux. Des estimations d'erreurs seront aussi données sous une certaine régularité des solutions des problèmes considérés.

Mots clés : *Problèmes de Cauchy inverses, Problèmes mal posés, Méthode des conditions auxiliaires, régularisation.*

Abstract

This thesis is devoted to study a class of inverse problems of the Cauchy type. The nature of these problems is unstable (ill-posed), and requires specific treatment. To deal with these problems, one must go through a regularization procedure in order to be able to derive meaningful information from these models. For this purpose, we propose a simple method, based on a non-local data perturbation, known as the auxiliary conditions method. This approach will be applied to an elliptic problem posited on a bounded and unbounded geometry, as well as an abstract biharmonic problem. The stable nature of the approximate solutions is shown, as well as their convergence towards the solutions of the original problems. Error estimates will also be given under a certain regularity of the solutions of the considered problems.

Key words : *Inverse Cauchy problems, ill-posed problems, Quasi-boundary value method, regularization.*

ملخص

في هذه الأطروحة ندرس صنفين من المسائل المعتلة بمفهوم هادمار لجملة من المعادلات التفاضلية الجزئية. النوع الأول هو مسألة عكسية ذات معادلة جزئية ناقصة مجردة. وهدفنا هو استكمال البيانات الحدية الناقصة من خلال القياسات الداخلية المطبقة على الحل. في الصنف الثاني درسنا مسألة عكسية ثنائية التكافئية ذات معادلة تفاضلية مجردة من الدرجة الثانية.

في دراستنا اخترنا طريقتين للتعديل:

طريقة القيم الحدية المضافة وطريقة القيم الحدية المضافة المعدلة. فكرة الطريقتين هي استبدال المسألة المعتلة ب مسألة جيدة الطرح بحيث تستبدل الشروط الحدية بشروط حدية غير موضعية مرتبطة بوسيط α من أجل الحصول على حلول تقريبية مستقرة للحلول الأصلية. ننهي هذه الدراسة بتبيان تقارب الحلول المعدلة نحو الحلول الأصلية كما برهنا بعض نتائج التقارب لكلتا الطريقتين.

الكلمات الاستدلالية: مسائل عكسية، مسائل معتلة، طرق التعديل، المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصة، مسألة عكسية ثنائية التكافئية، التقريب والاستقرار، طريقة القيم الحدية المضافة.

Dédicace

To my parents and my family, for their love, support and encouragement

Remerciements

Au terme de ce travail, je remercie tout d'abord DIEU, qui m'a donné la force, et le courage pour réaliser cette thèse.

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse ont été réalisés au Laboratoire de Mathématiques Appliquées (U. Annaba). Je voudrais en profiter pour remercier chaleureusement tous les membres et le personnel administratif de cette structure de recherche.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à mes deux directeurs de thèse : Prof. Boussetila Nadjib et Prof. Rebbani Faouzia. Si j'ai mené cette thèse à terme, c'est grâce à eux. Ils ont su me transmettre leur motivation et leur intérêt pour la recherche mathématique. J'ai beaucoup appris d'eux. Ils ont été à l'origine de mon évolution scientifique. Pendant cette période de recherche ils n'ont pas cessé de me pousser à aller de l'avant montrant une grande rigueur dans tout ce qu'ils entreprenaient, ce fut un réel plaisir de travailler avec eux. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance pour leur aide, leur soutien, leur conseils ainsi que la confiance qu'ils m'ont fait en acceptant de m'encadrer.

Je remercie Monsieur DJELLIT Ali, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba qui m'a fait l'honneur en présidant mon jury, ainsi que

Docteur : ZOUYED Fairouz, Maître de conférences, U. Annaba,

Docteur : DJEBBABA Abdelhak, Maître de conférences, U. Annaba,

Docteur : NOUAR Ahmed, Maître de conférences, U. Skikda,

qui ont accepté d'examiner ma thèse et faire partie de ce jury. Je les remercie pour leurs remarques constructives.

Je tiens à remercier tous les membres du Département de Mathématiques, pour toute l'aide qui m'a été accordée.

Je souhaite remercier spécialement mon frère docteur Khelili Farid pour son aide et son soutien moral.

Je remercie chaleureusement mes collègues de l'université 20 Août 1955-Skikda et mes amis particulièrement Far Zina, Yessaad Mokhtari Sabah, Mourah Nawel, Belyacine Zahia, Saci Fateh, Boulfoule Bilel, pour leur soutien moral.

Je remercie beaucoup toute ma famille, particulièrement mes parents chère(s) sœurs et frères Nadjiba, Hiba, Farid, Halim, Kamel, Ahmed, Mehdi, Karim pour leur amour, leur soutien constant, et leurs encouragements.

Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Khelili Bisma

Table des matières

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction | 1 |
| Contenu de la thèse | 3 |
| 1 Rappels d'analyse fonctionnelle | 5 |
| 1.1 Éléments de la théorie spectrale | 5 |
| 1.1.1 Opérateurs linéaires bornés | 5 |
| 1.1.2 Spectre d'un opérateur linéaire et décomposition spectrale | 6 |
| 1.1.3 Opérateurs non bornés | 7 |
| 1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné | 9 |
| 1.2 Théorie de Riesz-Fredholm | 9 |
| 1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts | 9 |
| 1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité | 10 |
| 1.2.3 Fonction d'opérateurs auto-adjoint | 12 |
| 1.3 Problèmes inverses, problème mal-posés et théorie de régularisation | 12 |
| 1.3.1 Problèmes inverses et problèmes mal-posés | 12 |
| 1.3.2 Notions de problème inverse | 13 |
| 1.3.3 Exemples des problèmes inverses mal-posés | 13 |
| 1.3.4 Théorie de régularisation | 17 |
| 1.3.5 Choix optimal : | 18 |
| 2 Régularisation d'un problème inverse elliptique dans un domaine non borné par la méthode des conditions aux limites auxiliaire | 20 |
| 2.1 Formulation du problème | 20 |
| 2.1.1 Problème direct et problème inverse | 20 |
| 2.2 Méthode de régularisation | 24 |
| 3 Méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée pour une classe de problèmes elliptiques mal-posés | 42 |
| 3.1 Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace | 42 |
| 3.1.1 Introduction : | 42 |
| 3.1.2 Méthode de régularisation et estimation de la convergence | 44 |
| 4 Régularisation d'un problème inverse elliptique abstrait par la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée | 57 |
| 4.1 Formulation du problème | 57 |
| 4.1.1 Problème direct et problème inverse | 57 |

Table des matières

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2 | Résultats préliminaires fondamentaux | 59 |
| 4.3 | Analyse du problème | 61 |
| 4.4 | Approximation et stabilisation | 66 |
| 4.4.1 | Description de la méthode | 66 |
| 5 | Régularisation d'un problème de Cauchy biparabolique abstrait par la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée | 82 |
| 5.1 | Introduction | 82 |
| 5.1.1 | Formulation du problème | 83 |
| 5.2 | Analyse du problème | 84 |
| 5.2.1 | Caractère mal posé du problème inverse et résultat de stabilité conditionnelle | 84 |
| 5.2.2 | Caractère mal posé du problème inverse (5.1.8) | 86 |
| 5.2.3 | Approximation et stabilisation | 87 |
| 5.2.4 | Régularisation et estimations d'erreurs | 88 |
| | Conclusion et perspectives | 101 |

Introduction

Problématique de la thèse

En 1923, le mathématicien français J. HADAMARD a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [31]. Cet ouvrage fut le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique¹ mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique et dépend continûment des données (stabilité). Dans ce même livre J. HADAMARD laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. PETROVSKY²) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.

La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et se manifeste dans une très large classe de problèmes, dits "Problèmes inverses"³, et motive de nombreuses recherches en mathématiques.

La non-unicité de la solution constitue un problème sérieux : en effet, lorsque plusieurs solutions sont possibles, il devient nécessaire de trouver un moyen de choisir la meilleure, c'est-à-dire la plus exacte d'un point de vue physique.

L'instabilité la plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème mal-posé, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données réelles[42].

Les problèmes mal-posés apparaissent dans de nombreuses branches des sciences et techniques comme les problèmes géophysiques, le problème du corps supersonique, le contrôle non destructif, la corrosion, l'imagerie médicale, le traitement d'images, et d'autres domaines pratiques.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien été adaptées pour les solutions des problèmes bien-posés, cependant, ce n'était pas clair dans quel sens les problèmes mal-posés peuvent avoir des solutions. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, John, Lavrentiev, Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes mal-posés. Ils ont pu donner une définition mathématique précise "des solutions approchées" pour des classes générales de ces problèmes. Aujourd'hui, ces problèmes sont un cadre de recherche très riche. Pour plus de détails du traitement des problèmes mal-posés, on réfère à deux excellents livres de D. Colton, H.W. Engel, A.K. Louis [19] et de H. W.Engl, M.

1. J.HADAMARD, Lectures on Cauchy's problem in linear PDEs, Yale University Press, New Haven (1923).
2. I.G. PTEROVSKY, Lecture on Partial Differential Equations, New York : International Publishers (1954).
3. Un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

Hanke et A. Neubauer [29],[74].

Les problèmes inverses sont un domaine trop vaste pour que nous puissions en donner un exposé exhaustif. Cette thématique a connu un essor considérable ces dernières décennies, parallèlement au développement de techniques numériques et de moyens de calcul permettant leur résolution. On peut les classer en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

Le problème inverse est un problème dans lequel, à partir des observations expérimentales, on cherche à déterminer la cause d'un phénomène. Les problèmes inverses sont multiples et leurs applications, se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, la détection des fissures, le contrôle non destructif, la mécanique des structures,...

Dans ce travail, on étudie deux classes de problèmes inverses : les problèmes inverses elliptiques de type « complétion de données » et les problèmes biparaboliques mal posés.

Dans le premier cas : il s'agit de reconstituer une donnée au bord, inaccessible à la mesure à partir d'une mesure interne. Le modèle physique est donné par un problème de Cauchy de type elliptique à données manquantes. Ce problème est qualifié de mal posé au sens d' Hadamard et de nature extrêmement instable ; les solutions, lorsqu'elles existent, ne dépendent pas de manière continue des données, de sorte qu'une petite erreur sur ces dernières peut induire des erreurs importantes sur les solutions calculées.

Les problèmes inverses elliptiques intervenant dans la reconstitution de sources et/ou de conditions aux limites sur le bord ou une partie du bord, ont été largement étudiés et expérimentés dans plusieurs applications : la détection des fissures, le contrôle non destructif, la corrosion, l'imagerie médicale, et d'autres domaines pratiques. Voir : [[1], [25], [40], [54]], [[29], [18],[36]], ainsi que les références qui y sont citées.

Le problème inverse biparabolique est utilisé dans la modélisation mathématique pour décrire les caractéristiques spéciales de la dynamique des milieux poreux déformables saturé d'eau pendant leur consolidation et leur filtration soumises à des charges appliquées.

On sait aussi que, l'équation de la chaleur classique ne décrit pas de manière précise la conduction de la chaleur. De nombreux modèles ont été proposés pour mieux décrire ce phénomène. Parmi ceux-ci, on peut citer le modèle biparabolique proposé dans [38] et le modèle biparabolique fractionnaire. Pour une description mathématique plus adéquate des processus de chaleur et de diffusion par rapport à l'équation classique de la chaleur. Pour la motivation physique et d'autres modèles, nous renvoyons le lecteur à [[5], [16], [62], [79].

Lorsqu'il s'agit d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir des observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du problème direct). Cette inversion, qui est souvent mal posée et nécessite un traitement particulier des instabilités, par des techniques dites de régularisation qui consistent à perturber légèrement le problème, ou d'éliminer les hautes fréquences responsables de cette instabilité,

de manière à rendre le problème en question bien posé et numériquement résoluble.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy mal posés. Parmi elles, on cite :

1. La méthode de quasi-réversibilité, introduite par Lattes & Lions (1969) [49], qui consiste à transformer le problème de Cauchy mal posé d'ordre 2 en un problème différentiel bien posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4), en perturbant l'opérateur-coefficient de l'équation. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre le problème de Cauchy, notamment : Klibanov & Santosa [46] et plus récemment Bourgeois [11].
2. La méthode de quasi-réversibilité modifiée Elle a introduite par Gasjewski et développée par plusieurs auteurs : F. Rebbani et N. Boussetila [13].
3. La méthode de régularisation de Tikhonov [73] est la méthode de régularisation la plus ancienne. Elle consiste à transformer le problème original mal-posé en un problème de minimisation.
4. La méthode de la convexité logarithmique appliquée aux problèmes mal posés par Pucci (1955), Lavrentiev (1956) et Payne (1960).
5. La méthode itérative de Kozlov et al.[45] : Cette méthode est basée sur une procédure itérative qui consiste à résoudre une suite alternative de problèmes bien-posés aux conditions aux limites mêlées jusqu'à satisfaire un certain critère d'arrêt. La solution converge pour des données compatibles, vers la solution du problème de Cauchy considéré.
6. La méthode de régularisation par les conditions non locales «Quasi-Boundary-Value Method», a été introduite par Showalter [4]. L'idée dans cette méthode est de remplacer le problème mal-posé par un problème bien posé, où on perturbe la condition finale en la remplaçant par une condition non-locale dépendant d'un petit paramètre α . Elle a été utilisée par plusieurs auteurs dont D.N. Hào, Abdulkerimov, V.D. Nguyen and H. Sahli [32], Samariski [71].

Contenu de la thèse

Le but de ce travail est d'étudier quelques méthodes de régularisation appliquées a une classe de problèmes de Cauchy inverses.

La thèse est composée d'une introduction et de cinq chapitres.

Dans l'introduction on décrit les motivations et les objectifs de l'étude abordée, on développe la problématique, et on donne une description détaillée de la thèse.

Le premier chapitre est un rappel de certains outils d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'étude proposée, comme la théorie spectrale des opérateurs linéaires et la théorie de Riesz-Fredholm. On introduit aussi quelques notions de base des problèmes mal posés et des problèmes inverses, avec une illustration de quelques exemples de problèmes mal posés.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions un problème inverse elliptique mal-posé de complétion de données dans un domaine non borné. Pour régulariser le problème en question, on propose la méthode des conditions aux limites auxiliaires (Q.B.V. Method), et on étudie la convergence de la méthode.

Dans le troisième chapitre, nous étudions un problème de Cauchy pour l'équation de Laplace sur un domaine borné. Pour stabiliser le caractère mal posé du problème considéré, on adopte

une version modifiée de la méthode des conditions aux limites auxiliaires. On démontre la convergence des solutions régularisées produite par cette méthode, et on établit aussi quelques estimations d'erreur sous certaines conditions de régularité de la solution du problème original. Après l'approximation de la solution, on démontre certains résultats de convergence.

Le chapitre quatre est consacré à l'étude d'un problème elliptique mal posé dans un cadre abstrait. Toujours, dans le même contexte de la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée, on régularise le problème en question et on démontre quelques résultats de convergence et des estimations d'erreurs.

Quant au chapitre cinq, on y étudie un problème de Cauchy biparabolique abstrait. Pour régulariser le problème en question, on propose une variante modifiée abstraite de la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée et on démontre sa convergence.

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Ce chapitre est consacré pour rappeler quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés tout le long de ce travail.

Dans tout ce qui suit, nous désignons par H_i les espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , muni de la norme $|\cdot|_{H_i}$ et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, ($i = 1, 2$)

1.1 Éléments de la théorie spectrale

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1. (voir [76] [75] [41] [43] [14])

Un opérateur linéaire et continu est une application linéaire et continue $A : D(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$ linéaire, où $D(A)$ est le domaine de définition de A qui est un sous espace vectoriel de H_1 , suppose en général dense dans H_1 .

Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $G(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $G(A) = \{(v, Av), v \in D(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$, on note par :

$$N(A) = \{x \in D(A), Ax = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$R(A) = \{y = Ax, x \in D(A)\} \text{ (image de } A).$$

On note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathcal{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des opérateurs continus de H_1 dans H_2 (resp. des endomorphismes continus de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme, soit

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_{H_2}}{\|u\|_{H_1}}.$$

Opérateur inverse

Définition 1.1.2. (voir [76]) On dit qu'une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible si et seulement si il existe une application $B \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$B \circ A = I_{H_1}, \quad A \circ B = I_{H_2} \tag{1.1.1}$$

L'application B si elle existe est dite opérateur inverse de A . On notera $B = A^{-1}$.

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Théorème 1.1.1. [*Théorème de Banach*] [41] [76] [75]

Tout application bijective linéaire continue $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible.

Théorème 1.1.2. Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. L'opérateur inverse A^{-1} existe et continu sur $AH_1 \subset H_2$ si et seulement s'il existe un nombre $k > 0$, telle que

$$k \|x\|_{H_1} \leq \|Ax\|_{H_2} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

1.1.2 Spectre d'un opérateur linéaire et décomposition spectrale

Définition 1.1.3. [41] [76] [75] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A) \text{ est bijectif et } \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty \right\} \quad (1.1.2)$$

Son complémentaire dans le plan complexe est dit spectre de A et noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

On note $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A en λ .

Remarque :

Le spectre d'un opérateur borné est compact non vide.

Le rayon spectral de l'opérateur A est défini par

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Si H est un espace de Hilbert et A auto-adjoint alors

$$r(A) = \|A\|.$$

Opérateur adjoint

Définition 1.1.4. [41] [76] [75] Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On appelle adjoint de l'opérateur A l'opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, qui vérifie la relation suivante

$$\langle Au, v \rangle_2 = \langle u, A^*v \rangle_1, \quad \forall u \in H_1, \forall v \in H_2 \quad (1.1.3)$$

Théorème 1.1.3. [41] [76] [75] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un seul opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$, tel que

$$(i) \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \text{ pour tout } x, y \in H$$

$$(ii) (A^*)^* = A$$

$$(iii) \|A\| = \|A^*\|.$$

Si A est bijectif (\Rightarrow inversible), alors A^* l'est aussi, et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Opérateur auto-adjoint

Définition 1.1.5. [41] [76] [75] Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $A = A^*$.

$$A = A^* \Leftrightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in H.$$

Théorème 1.1.4. [41] [76] [75] Soit H un espace de Hilbert sur le corps \mathbb{C} et soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors A est auto-adjoint si il vérifie $\langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $u \in H$.

L'opérateur auto-adjoint est dit positive si et seulement si $\langle Au, u \rangle > 0$ pour tout $u \in D_A$.

1.1.3 Opérateurs non bornés

Opérateur fermé

On appelle graphe de A , le sous espace $\Gamma(A)$ de $H_1 \times H_2$, tel que

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\} \subset H_1 \times H_2.$$

Définition 1.1.6. [41] [76] [75] On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e, pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que $x_n \rightarrow x$ dans H_1 et $Ax_n \rightarrow y$ dans H_2 on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Remarque : L'opérateur fermé A est borné de son domaine de définition $D(A)$ muni de la norme du graphe ($\|u\|_\Gamma = \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$) dans H_1 .

Théorème 1.1.5. [41] [76] [75] [*Théorème du Graphe fermé*]

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Banach et A un opérateur linéaire de H_1 dans H_2 . Alors A est un opérateur continu si et seulement si le graphe de A est fermé dans $H_1 \times H_2$.

Définition 1.1.7. [41] [76] [75] Soit $A : D(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur non borné à domaine dense. On appelle adjoint de l'opérateur A l'opérateur

$$\begin{aligned} A^* & : D(A^*) \subset H_2 \rightarrow H_1 \\ v & \rightarrow A^*v = w \end{aligned}$$

défini par

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

$$D(A^*) = \{v \in H_2 \text{ tel que } \exists w \in H_1, \langle v, Au \rangle = \langle w, u \rangle = \langle A^*v, u \rangle, \forall u \in D(A)\} \quad (1.1.4)$$

Proposition 1.1.1. [41] [76] [75] Si $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 1.1.8. [41] [76] [75] On dit que l'opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est symétrique si

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \forall u, v \in D_A \quad (1.1.5)$$

Définition 1.1.9. [41] [76] [75] Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $A = A^*$, c.-à-d.,

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \forall u, v \in H \quad (1.1.6)$$

Théorème 1.1.6. [41] [76] [75] Soit H un espace de Hilbert sur le corps \mathbb{C} et soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors A est auto adjoint si et seulement si $\langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $u \in H$.

Théorème 1.1.7. [41] [76] [75] [Caractérisation des opérateurs à image fermé]

Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $R(A)$ est fermé, (ii) $R(A^*)$ est fermé, (iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$, (iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$

Théorème 1.1.8. [41] [76] [75] Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est surjectif, i.e., $R(A) = H_2$,
 (b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in D(A^*), \quad (1.1.7)$$

- (c) $N(A^*) = \{0\}$ et $R(A^*)$ est fermé.

Corollaire 1.1.1. [41] [76] [75] Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = H_1$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur H_2 si et seulement si, il existe deux constantes m_1 et m_2 telle que

$$\begin{aligned} |u| &\leq m_1 |Au|, & \forall u \in D(A), \\ |v| &\leq m_2 |A^*v|, & \forall v \in D(A^*). \end{aligned}$$

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné que l'on suppose fermé et à domaine dense.

Définition 1.1.10. [41] [76] [75] On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le spectre de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

* On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Cet opérateur est appelé résolvante de A .

* L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\lambda \mapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante convexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite identité de la résolvante :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1; A) R(\lambda_2; A).$$

* Le spectre de A est un fermé de \mathbb{C} , et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

Le premier sous-ensemble important du spectre est le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda / (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif}\}$$

* Soit

$$\sigma_c(A) = \{\lambda / (\lambda I - A) \text{ est injectif et } R(\lambda I - A) \text{ est dense}\}$$

$\sigma_c(A)$ est appelé le spectre continu de A .

* Soit

$$\sigma_r(A) = \{\lambda / (\lambda I - A) \text{ est injectif et } R(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense}\}$$

alors $\sigma_r(A)$ est appelé le spectre résiduel de A .

Et on a

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

1.2 Théorie de Riesz-Fredholm

1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.2.1. [41] [76] [75] On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est compact si $A(B_{H_1}(0, 1))$ est relativement compact par rapport la topologie forte, où $B_{H_1}(0, 1)$ est la boule unité ouverte.

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

On désigne par $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 est on pose $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$

▷ La compacité d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est caractérisée comme suit :

$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightarrow 0$ (faiblement) $\Rightarrow Tx_n \rightarrow 0$ (fortement).

▷ Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$ (resp $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S_2 S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$.

▷ [**Théorème de Schauder**] [65]

Si A est compact, alors A^* est compact, et réciproquement.

Théorème 1.2.1. [14] Soit $A \in \mathcal{K}(H)$ avec $\dim(H) = \infty$. Alors on a :

(a) $0 \in \sigma(A)$,

(b) $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$,

(c) l'une des situations suivantes :

ou bien $\sigma(A) = \{0\}$,

ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est fini,

ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.2.2. [14] On suppose que H est séparable. Soit $A \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de A :

$$\forall x \in H, x = x_0 + \sum_{k \geq 1} \langle x, e_k \rangle e_k, \quad x_0 \in N(A), \quad Ax = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k.$$

1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité

• Version discrète

Définition 1.2.2. [3] Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non-borné. Alors A est dit à résolvante compacte si

$$\forall \lambda \in \rho(A), R(\lambda; A) \in \mathcal{K}(H).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.2.3. Un opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est à résolvante compacte si et seulement si il existe $\mu \in \rho(A)$ tel que $R(\mu; A) \in \mathcal{K}(H)$.

Théorème 1.2.4. [21],[10] Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors

(1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,

(2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,

(3) $A \geq \theta I \Leftrightarrow \sigma(A) \subset [\theta, \infty[$.

Théorème 1.2.5. [65]

Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors A est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans H , $(e_m)_{m \geq 1} \subset D(A)$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telle que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \rightarrow +\infty, A e_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

De plus, les valeurs propres (λ_m) admettent la caractérisation (formule de min-max de Courant-Fisher) suivante :

$$\lambda_m = \min_{V \in V_m(D(A))} \max_{0 \neq u \in V} \frac{\langle Au, u \rangle}{|u|^2},$$

$$\lambda_m = \min_{V \in V_{m-1}(H)} \max_{0 \neq u \in V^\perp \cap D(A)} \frac{\langle Au, u \rangle}{|u|^2},$$

$$V_m(D(A)) = \{V \text{ s.e.v. de } D(A) \text{ tq. } \dim(V) = m\},$$

$$V_m(H) = \{V \text{ s.e.v. de } H \text{ tq. } \dim(V) = m\}$$

Remarque 1.2.1. Si $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint avec $A \geq \theta > 0 \Rightarrow (0 \in \rho(A))$, et l'injection $H^1 := (D(A), |\cdot|_G) \hookrightarrow H$ est compacte, alors A est à résolvante compacte et donc diagonalisable.

• **Version continue****Résolution de l'identité****Définition 1.2.3.** [3], [65], [75]

Une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projection orthogonales dans H est appelée famille spectrale ou résolution de l'identité si elle satisfait les conditions :

$$(a) E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I,$$

$$\text{où } E_{-\infty} f = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda f, \quad E_{+\infty} f = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda f, \quad f \in H,$$

$$(b) E_\mu E_\nu = E_s \quad (s = \min\{\mu, \nu\}), \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

$$(c) E_{\lambda+0} = E_\lambda \text{ où } E_{\lambda+0} f = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon} f, \quad f \in H.$$

Les limites sont prises au sens de la norme de H

Théorème 1.2.6. [65],[3] Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint dans H . Alors il existe une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que

$$\langle Ax, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d \langle E_\lambda x, y \rangle, \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda d E_\lambda x$$

On note symboliquement $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda d E_\lambda$.

Théorème 1.2.7. [65],[3] Soit $\lambda \mapsto f(\lambda)$ une fonction continue à valeurs réelles. Soit $\mathcal{D} \subset H$ défini par :

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle E_{\lambda}x, x \rangle < \infty \right\}$$

Alors \mathcal{D} est dense dans H et on définit un opérateur auto-adjoint S dans H par :

$$\langle Sx, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E_{\lambda}x, y \rangle, \quad x \in \mathcal{D}, y \in H$$

de domaine $D(S) = \mathcal{D}$.

1.2.3 Fonction d'opérateurs auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert H , $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}$, sa décomposition spectrale, $\lambda_0 = \inf \sigma(A)$.

Définition 1.2.4. [65], [3] On définit :

• **Les puissance de A par :**

$$A^r = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r dE_{\lambda}, \quad r \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D}(A^r) \Leftrightarrow \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} d|E_{\lambda}x|^2 < \infty.$$

On note ici, que pour tout $r \leq 0$, $A^r \in \mathcal{L}(H)$, et si $r = 0$, $A^0 = I$.

Pour tout $r \geq 0$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A^r)$, on a $\langle A^r x, x \rangle \geq \lambda_0^r |x|^2$.

Pour tout $r \geq 0$, $\mathcal{D}(A^r)$ muni de la norme $|x|_r^2 = |A^r x|^2$, $x \in \mathcal{D}(A^r)$, est un espace de Hilbert.

• et $f(A)$ pour une fonction f continue sur \mathbb{R} par :

$$f(A) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) dE_{\lambda}, \quad x \in \mathcal{D}(f(A)) \Leftrightarrow \int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d|E_{\lambda}x|^2 < \infty$$

1.3 Problèmes inverses, problème mal-posés et théorie de régularisation

1.3.1 Problèmes inverses et problèmes mal-posés

Soit :

$$Af = y, \quad A : X \rightarrow Y \quad (1.3.1)$$

Soient X, Y deux espaces de Banach, et A est un opérateur non linéaire en général. Le problème (1.3.1) est appelé bien posé si A est un homéomorphisme de X sur Y . En d'autres termes, la solution de (1.3.1) existe pour tout $y \in Y$, elle est unique et dépend continûment de y , alors A^{-1} est une application continue. Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, le problème est dit mal-posé.

1.3.2 Notions de problème inverse

Deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

1.3.3 Exemples des problèmes inverses mal-posés

Exemple :

La différentiation est l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à la considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le prototype du problème mal posé, comme nous allons le voir.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral A défini par

$$Af = \int_0^x f(t)dt = g(x), \quad g(0) = 0 \quad (1.3.2)$$

Il est facile de voir directement que $A \in \mathcal{L}(L^2(]0, 1[))$

Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel

$$R(A) = \{g \in H^1(0, 1), g(0) = 0\} \quad (1.3.3)$$

où $H^1(0, 1)$ est l'espace de Sobolev. En effet, l'équation

$$Af = g \quad (1.3.4)$$

est équivalente à $f(x) = g'(x)$ et $g(0) = 0$.

L'image de A n'est pas fermée dans $L^2(]0, 1[)$. L'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(]0, 1[)$, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons une fonction $g \in C^1([0, 1])$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x) \quad (1.3.5)$$

Alors

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

$$f_n(x) = g'(x) + n \cos(n^2 x) \quad (1.3.6)$$

De simples calculs montrent que

$$\|g - g_n\|_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3.7)$$

alors que

$$\|f - f_n\|_2 = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O(n) \quad (1.3.8)$$

Ainsi, la différence entre f et f_n peut-être grande, alors que la différence entre g et g_n est aussi petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal posés. Une petite perturbation sur les données (g) peut avoir une grande influence importante sur le résultat (f).

Exemple :

Il est à noter que la définition de problèmes mal posés ne se rapporte qu'au couple donné d'espaces métriques (F, U) car, transposé dans d'autres espaces métriques, le même problème peut s'avérer bien posé, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant :

Le calcul de la série de Fourier à Coefficients approchés dans la métrique de ℓ_2 .

Considérons une série de Fourier que nous écrivons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad (1.3.9)$$

et supposons que chaque coefficients a_n soit entaché d'une erreur $\frac{\epsilon}{n}$ (à l'exception de a_0 évidemment); nous écrivons donc :

$$c_n = a_n + \frac{\epsilon}{n}, \quad c_0 = a_0 \quad \text{et } \epsilon > 0. \quad (1.3.10)$$

La fonction $f(x)$ est remplacée par la fonction $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) \quad (1.3.11)$$

En supposant que f et g sont continues et bornées pour appliquer la norme (1) dans ℓ_2 .

Dans la métrique ℓ_2 , les coefficients diffèrent de la quantité :

$$\epsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon \pi}{\sqrt{6}} \quad (1.3.12)$$

1.3 Problèmes inverses, problème mal-posés et théorie de régularisation

Par conséquent, ϵ_1 est aussi petite que l'on veut par un choix approprié de la quantité ϵ . D'autre part, si la distance entre $f(x)$ et $g(x)$ est donnée par la norme de la convergence uniforme, nous avons :

$$\epsilon_2 = \sup |g(x) - f(x)| = \sup \left| \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \right| = |\epsilon| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad (1.3.13)$$

Cette quantité peut être aussi grande que l'on veut.

Ainsi, si l'écart de la somme de la série est pris dans la métrique de C , la sommation de la série de Fourier n'est pas stable.

Exemple :

Contre exemple de Hadamard

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace suivante :

$$\begin{aligned} u_{yy}(x, y) + u_{xx}(x, y) &= 0 && \text{dans } x \in \mathbb{R} \times (y > 0) && (1.3.14) \\ u\left(\pm \frac{\pi}{2}, y\right) &= 0 && \text{pour } y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), && \text{pour } -\infty < x < +\infty \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= \varphi(x) && \text{pour } -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des données

Si nous avons donné $f_1(x) = 0$ et $\varphi_1(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$, alors la solution du problème de Cauchy est donnée par : $u_1(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$, où $n > 0$

Si on prend $f_2(x) = \varphi_2(x) = 0$, alors la solution du problème de Cauchy est donnée par : $u_2(x, y) = 0$.

Si nous estimons la différence dans les données initiales et la solution dans l'espace metric C , nous avons :

$$\|f_1 - f_2\|_C = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{n}$$

la second peut être petit quand n plus grand.

Pour tout $y > 0$ fixé, la différence ente la solution :

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_C &= \sup_x |u_1(x) - u_2(x)| \\
&= \sup_x \left| \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny) \right| \\
&= \frac{1}{n^2} \sinh(ny)
\end{aligned}$$

peut être grand quand n plus grand.

Alors le problème est instable donc mal-posé.

Exemple : Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Ce problème consiste à déterminer $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifie :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & x \in [0, \pi], t \in [0, T] \\
u(x, T) &= \varphi(x) & x \in [0, \pi] \\
u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 & t \in [0, T]
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

où $\varphi \in L^2[0, \pi]$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-(T-t)n^2) \varphi_n \sin(nx),$$

où φ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de φ : $\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx$.

Soit $\psi(x) = u_0(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\psi\|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 1} \exp(2n^2 T) |\varphi_n|^2 \tag{1.3.16}$$

On considère maintenant le problème (BP) avec des données bruitées :

$$\varphi_k = \varphi + \frac{1}{k} \sin(kx) \tag{1.3.17}$$

on remarque que $\|\varphi_k - \varphi\| \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$ mais

$\|u(\varphi_k, 0) - u(\varphi, 0)\| = \frac{1}{k} \exp(k^2 T) \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty$. On voit très clairement que le problème (BP) est instable, ce qui explique que ce dernier est mal posé.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initial $u(x, 0) = \psi(x) \in L_2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-tn^2) \psi_n \sin(nx) = \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t) \sin(nx) \sin(n\xi) \right] \psi(\xi) d\xi$$

Ainsi, u est solution du problème (BP) si et seulement si φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$IK = \int_0^{\pi} \mathcal{K}(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où $\mathcal{K}(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t) \sin(nx) \sin(n\xi)$. IK est un opérateur intégral de noyau $\mathcal{K}(., .)$.

Il est bien connu que IK est compact, d'où IK^{-1} n'est pas borné. Ce qui montre le caractère de problème (BP).

Le fait qu'un problème est bien posé n'est pas une condition suffisante pour la stabilité de la solution du problème inverse. Supposons que A^{-1} est bien défini et continu, alors si dans (1.3.1) δy est une petite variation de la donnée et δf est la variation correspondant sur la solution, la continuité de A^{-1} implique :

$$\|\delta f\|_X \leq \|A^{-1}\| \|\delta y\|_Y$$

et par la continuité de A :

$$\|\delta f\|_X \geq \frac{\|\delta y\|_Y}{\|A\|}$$

alors

$$\frac{\|\delta f\|_X}{\|f\|_X} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta y\|_Y}{\|y\|_Y} \quad (1.3.18)$$

Le nombre $C(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ est appelé le nombre conditionné et il donne une estimation de l'instabilité du problème. Si $C(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ est plus grand que 1, alors la présence même d'une petite erreur sur les données d'un problème mal posé peut rendre sa solution extrêmement instable. (voir [66])

1.3.4 Théorie de régularisation

La régularisation de problèmes mal-posés, due initialement à Tikhonov, cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée,..), de façon que la «solution régularisée» obtenue par «inversion régularisée» dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure).

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre « problème approximant » bien posé.

Opérateur de régularisation

Dans la pratique, les opérateurs les plus rencontrés sont des opérateurs différentiels, donc l'expression $u \in D(A)$ exprime une certaine régularité. Les opérateurs de régularisation sont un outil qui permet de faire correspondre à un élément d'un espace fonctionnel donné son régularisé, i.e., un élément du même espace mais possédant des propriétés de régularité plus importantes et qui lui est en même temps proche par rapport à la norme considérée.

Considérons le problème inverse $Ax = y$ où $A : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif. On suppose que $y \in R(A)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.

Définition 1.3.1. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{R_\alpha(t)\}_{\alpha>0} : H_1 \rightarrow H_2$, $\alpha > 0$ est dite "famille régularisante" pour l'opérateur A si

$\forall x \in H_1, R_\alpha Ax$ converge vers x , quand $\alpha \rightarrow 0$, i.e., $R_\alpha A$ converge simplement vers I .

Remarque 1.3.1. Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $A : H_1 \rightarrow H_2$

où H_1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$

La donnée initiale $y \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons y^δ la donnée perturbée où le nombre $\delta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $|y - y^\delta| \leq \delta$.

Notons $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Ax = y$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $|x - x_\alpha^\delta|$, on obtient

$$\|x - x_\alpha^\delta\| = \|(x - R_\alpha y) + (R_\alpha y - x_\alpha^\delta)\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha y - x_\alpha^\delta\|. \quad (1.3.19)$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.3.19) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque(1.3.1), nous avons vu que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha\| = +\infty$. Donc il ne faut pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (1.3.19) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α . Nous allons faire tendre le niveau de bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution x .

Proposition 1.3.1. [61] Soient X, Y deux espaces de Hilbert, et $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire fermé. Alors la famille de régularisation $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ est bornée (uniformément) si et seulement si $R(A)$ est fermée dans Y .

1.3.5 Choix optimal :

Soit $\alpha = \alpha(\delta, y(\delta))$, si α ne dépend pas de $y(\delta)$ mais seulement de δ , alors nous disons que α est un choix a priori. Si non α est dit choix a posteriori.

1.3 Problèmes inverses, problème mal-posés et théorie de régularisation

L'idée de la stratégie est de choisir le paramètre de régularisation tel que

$$\|Au - y_{(\delta)}\|_Y = \delta \quad (1.3.20)$$

Un algorithme de régularisation $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ est dit régulier si

$$\delta \rightarrow 0, \quad \alpha_{opt}(\delta) \rightarrow 0 \text{ et } R_{\alpha_{opt}(\delta)}y_{(\delta)} \rightarrow \hat{u} \quad (1.3.21)$$

Choix du paramètre de régularisation

Dans les applications, un choix de la stratégie de régularisation a-posteriori est préférable à une stratégie de régularisation a-priori. On adopte la démarche suivante pour $y \in D(A_g^{-1})$ et $\delta > 0$, on choisit $y_{(\delta)} \in Y$ tel que

$$\|y_{(\delta)} - y\|_Y \leq \delta, \text{ et } \hat{u} = A_g^{-1}y, \quad u_\alpha = R_\alpha y, \quad u_\alpha^\delta = R_\alpha y_{(\delta)} \quad (1.3.22)$$

où

$$R_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* \text{ pour } \alpha > 0. \quad (1.3.23)$$

(i) Méthode de Mozorov : [61]

Dans la méthode de Mozorov, le paramètre α est choisi tel que :

$$\|A u_\alpha^\delta - y_{(\delta)}\| = \delta \quad (1.3.24)$$

(ii) Méthode d'Arcangeli :

L'équation devant être satisfaite est :

$$\|A u_\alpha^\delta - y_{(\delta)}\| = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \quad (1.3.25)$$

2 Régularisation d'un problème inverse elliptique dans un domaine non borné par la méthode des conditions aux limites auxiliaire

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'un problème inverse elliptique de complétion de données dans un domaine non-borné. Notre objectif est de reconstruire des données manquantes à partir de mesures internes effectuées sur la solution. Ces problèmes sont mal posés et nécessitent des procédures de régularisation. En adoptant une variante de la méthode des conditions aux limites auxiliaires pour construire une approximation stable, on démontre la convergence de cette approche d'approximation.

2.1 Formulation du problème

2.1.1 Problème direct et problème inverse

Considérons le problème aux limites pour l'équation elliptique avec condition de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(x, T) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Ce problème direct consiste à déterminer $u(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ connaissant φ . le problème inverse correspondant à ce problème directe est de trouver la condition aux limites $u(x, 0) = \varphi(x)$ à partir de la condition aux limites connue en $t = \tau \in]0, T[$.

Soit le problème inverse :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(x, T) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u(x, \tau) = h(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Nous supposons que $u(x, t)$ est l'unique solution du problème (2.1.2). En appliquant la transformée de Fourier au problème (2.1.2) par rapport à la variable x , nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(\xi, t) - \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 & \xi \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ \hat{u}(\xi, T) = 0 & \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi, \tau) = \hat{h}(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\phi}(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Dont la solution est donnée par :

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \hat{\phi}(\xi) \quad (2.1.4)$$

$$= \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \quad (2.1.5)$$

D'où on déduit la solution du problème (2.1.2) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \hat{\phi}(\xi) d\xi \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) d\xi \quad (2.1.7)$$

où \hat{h} désigne la transformation de Fourier de h .

L'identité de Parseval pour la transformée de Fourier donne

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|^2 &= \|\hat{u}(\cdot, t)\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

Considérons alors une perturbation de la forme

$$\hat{\phi}^\delta(\xi) = \frac{\sinh((T)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} (\hat{h}(\xi) + \delta)$$

et la donnée bruitée \hat{h}^δ est donnée par

$$\hat{h}^\delta(\xi) = (\hat{h}(\xi) + \delta)$$

on remarque que

$$\hat{\phi}^\delta(\xi) - \hat{\phi}(\xi) = \delta \frac{\sinh((T)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \rightarrow \infty, \\ \text{quand } |\xi| \rightarrow +\infty$$

Ce facteur peut amplifier l'erreur de manière arbitraire. Une petite erreur sur les données \hat{h} peut mener à une grande erreur sur la fonction inconnue $\hat{\phi}$. Alors le problème inverse est mal-posé.

Théorème 2.1.1. Soit $h \in L^2(\mathbb{R})$. Supposons que $u \in C^2([0, T], L^2(\mathbb{R})) \cap C([0, T], H^2(\mathbb{R}))$ est une solution de l'équation (2.1.8), où \hat{u} est donnée par :

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \quad (2.1.8)$$

Alors $u_{tt}(x, t)$ et $u_{xx}(x, t) \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ et u est une solution de l'équation de Laplace (2.1.2).

Preuve.

Posons $t = T$ et $t = \tau$ dans l'expression

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi)$$

on obtient $\hat{u}(\xi, T) = \frac{\sinh((T-T)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) = 0$ d'où on déduit $u(x, T) = 0$

et $\hat{u}(\xi, \tau) = \frac{\sinh((T-\tau)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) = \hat{h}(\xi)$ d'où $u(x, \tau) = h(x)$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

En multipliant l'équation ci-dessus par (ξ^2) , on a

$$\xi^2 \hat{u}(\xi, t) = \xi^2 \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi)$$

En dérivant l'équation deux fois, nous obtenons

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi),$$

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -|\xi| \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi),$$

$$\hat{u}_{tt}(\xi, t) = \xi^2 \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi),$$

et

$$\hat{u}_{tt}(\xi, t) - \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = \xi^2 \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) - \xi^2 \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) = 0 \quad (2.1.9)$$

Comme $u \in C^2([0, T], L^2(\mathbb{R})) \cap C([0, T], H^2(\mathbb{R}))$ nous avons

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_{tt}(\xi, t)$$

D'où, à partir de (2.1.9), on a

$$u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) = 0.$$

Théorème 2.1.2. *Le problème (2.1.2) admet une solution unique $u \in C^2([0, T], L^2(\mathbb{R})) \cap C([0, T], H^2(\mathbb{R}))$, si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}} |\exp(\tau|\xi|) \hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad (2.1.10)$$

Preuve. Supposons que le problème (2.1.2) admet une solution exacte $u \in C^2([0, T], L^2(\mathbb{R})) \cap C([0, T], H^2(\mathbb{R}))$ alors u peut être représentée dans le domaine fréquentiel

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (2.1.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) d\xi \quad (2.1.12)$$

Ce qui implique que

$$\hat{u}(\xi, 0) = \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \quad (2.1.13)$$

d'où

$$\|\hat{u}(\cdot, 0)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \right|^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad (2.1.14)$$

et comme

$$\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \geq \exp(\tau|\xi|),$$

il résulte donc

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \right|^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \geq \int_{\mathbb{R}} \exp(2\tau|\xi|) |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi,$$

d'où $\int_{\mathbb{R}} \exp(2\tau|\xi|) |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

Si $\int_{\mathbb{R}} \exp(2\tau|\xi|) |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty$, on définit $v(t)$ par

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) d\xi.$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(x, T) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = v(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Il est clair de voir que (2.1.15) est un problème direct donc il a une solution unique u , donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \hat{v}(\xi) d\xi. \quad (2.1.16)$$

Posant $t = \tau$ dans (2.1.16), On obtient :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-\tau)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \hat{v}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \hat{v}(\xi) \hat{h}(\xi) d\xi \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, u est la solution unique du problème (2.1.2).

2.2 Méthode de régularisation

Dans cette section, on propose une stratégie de régularisation basée sur la méthode des conditions aux limites auxiliaires.

Méthode des conditions aux limites auxiliaires

On approche le problème mal posé (2.1.2), par le problème perturbé suivant pour avoir une approximation de la solution du problème (2.1.2).

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_\alpha(x, t) + \partial_x^2 u_\alpha(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ \alpha u_\alpha(x, 0) + u_\alpha(x, \tau) = h, & x \in \mathbb{R} \\ u_\alpha(x, T) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (P_\alpha)$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}_\alpha(\xi, t) - \xi^2 \hat{u}_\alpha(\xi, t) = 0 & \xi \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ \alpha \hat{u}_\alpha(\xi, 0) + \hat{u}_\alpha(\xi, \tau) = \hat{h}, & \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}_\alpha(\xi, T) = 0, & \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\hat{P}_\alpha)$$

où

$$\hat{u}_\alpha(\xi, t) = \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) \quad (2.2.1)$$

D'où la solution du problème (P_α) :

$$u_\alpha(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) d\xi \quad (2.2.2)$$

Théorème 2.2.1. Pour tout $h \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction

$$u_\alpha(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) d\xi$$

est l'unique solution du problème (P_α) .

Preuve. On considère le problème classique de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_\alpha(x, t) + \partial_x^2 u_\alpha(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u_\alpha(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh(T|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) d\xi & x \in \mathbb{R} \\ u_\alpha(x, T) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

(2.2.3) est un problème direct donc il a une solution unique

$$u_\alpha(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) d\xi$$

et on a

$$\alpha u_\alpha(x, 0) + u_\alpha(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \left[\frac{\alpha \sinh((T)|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \right] \hat{h}(\xi) d\xi$$

d'où

$$\alpha u_\alpha(x, 0) + u_\alpha(x, \tau) = h(x)$$

Par conséquent, u_α est l'unique solution du problème (P_α) .

Montrons maintenant que la solution du problème (P_α) dépend continûment de h .

Théorème 2.2.2. Soient u_{α_1} et u_{α_2} deux solutions du problème (P_α) correspondantes aux données

h_1^δ et h_2^δ respectivement, vérifiant $\|h_1^\delta - h_2^\delta\| \leq \delta$, alors pour $0 < \alpha < 1$ et $N = \frac{1}{2(T-\tau)} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}}\right)$ nous avons :

$$\|u_{\alpha_1}(\cdot, t) - u_{\alpha_2}(\cdot, t)\| \leq C_1 \left[\frac{1}{\alpha}\right]^{(1-\frac{t}{T}+\frac{\tau}{2T})} \|h_1^\delta - h_2^\delta\| \quad (2.2.4)$$

où

$$C_1 = 4 \left[2^{\frac{\tau}{T-\tau}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Pour tout $h \in L^2(\mathbb{R})$ nous avons

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\alpha_1}(\xi, t) &= \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}_1^\delta(\xi) \\ \hat{u}_{\alpha_2}(\xi, t) &= \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}_2^\delta(\xi). \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'égalité de Parseval, nous obtenons

$$\|u_{\alpha_1}(\cdot, t) - u_{\alpha_2}(\cdot, t)\|^2 = \|\hat{u}_{\alpha_1}(\cdot, t) - \hat{u}_{\alpha_2}(\cdot, t)\|^2$$

On calcule

$$\|\hat{u}_{\alpha_1}(\cdot, t) - \hat{u}_{\alpha_2}(\cdot, t)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| F_\alpha(\xi) (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \quad (2.2.5)$$

où

$$F_\alpha(\xi, t) = \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \quad (2.2.6)$$

$$\text{Soit } N = \frac{1}{2(T-\tau)} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}}\right)$$

alors

$$\|\hat{u}_{\alpha_1}(\cdot, t) - \hat{u}_{\alpha_2}(\cdot, t)\|^2 = I_1 + I_2 \quad (2.2.7)$$

où

$$I_1 = \int_{|\xi| \leq N} \left| F_\alpha(\xi, t) (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \quad (2.2.8)$$

et

$$I_2 = \int_{|\xi| \geq N} \left| F_\alpha(\xi, t) (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi. \quad (2.2.9)$$

On a

$$\begin{aligned} F_\alpha(\xi, t) &= \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|) \left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right]} \\ &= \frac{\sinh((T-t)|\xi|) \left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right]^{-\frac{t}{T}}}{\sinh((T-\tau)|\xi|) \left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right]^{1-\frac{t}{T}}} \\ &\leq \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|) \left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right]^{1-\frac{t}{T}}} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

comme $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \geq e^{\tau|\xi|}$ alors

$$\left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right]^{1-\frac{t}{T}} \geq \left[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1 \right]^{1-\frac{t}{T}} \quad (2.2.11)$$

comme $\frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \leq 1$ et $\frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} = \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)}$
ce implique alors

$$F_\alpha(\xi, t) \leq \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|) \left[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1 \right]^{1-\frac{t}{T}}} \quad (2.2.12)$$

$$\leq \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|) \left[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1 \right]^{1-\frac{t}{T}}} = \tilde{F}_\alpha(\xi, t) \quad (2.2.13)$$

Si $|\xi| \leq N$

la fonction $\frac{\sinh(T\xi)}{\sinh((T-\tau)\xi)}$ est croissante, alors $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{\sinh(TN)}{\sinh((T-\tau)N)} = K_N$

d'où

$$\tilde{F}_\alpha(\xi, t) \leq \frac{K_N}{[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1]^{1-\frac{t}{T}}} \quad (2.2.14)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq N} \left| \tilde{F}_\alpha(\xi, t) (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi| \leq N} \left| \frac{K_N}{[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1]^{1-\frac{t}{T}}} (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \\ &\leq \left[(K_N)^2 \alpha^{-(1-\frac{t}{T})} \right]^2 \int_{|\xi| \leq N} |\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \left[K_N \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{(1-\frac{t}{T})} \right]^2 \|\hat{h}_1^\delta - \hat{h}_2^\delta\|^2 \end{aligned}$$

alors

$$I_1 = \int_{|\xi| \leq N} \left| F_\alpha(\xi, t) (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \quad (2.2.15)$$

$$\leq \left[K_N \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{(1-\frac{t}{T})} \right]^2 \|\hat{h}_1^\delta - \hat{h}_2^\delta\|^2. \quad (2.2.16)$$

D'autre part nous avons

$$\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{e^{\tau|\xi|} [1 - e^{-2T|\xi|}]}{1 - e^{-2(T-\tau)|\xi|}} \leq \frac{e^{\tau|\xi|}}{1 - e^{-2(T-\tau)|\xi|}}.$$

Si $\xi \geq N$ alors $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{e^{\tau|\xi|}}{1 - e^{-2(T-\tau)N}}$, d'où

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha(\xi, t) &\leq \frac{e^{\tau|\xi|}}{[1 - e^{-2(T-\tau)N}]} \frac{1}{[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1]^{1-\frac{t}{T}}} \\ &\leq \frac{1}{[1 - e^{-2(T-\tau)N}]} \frac{1}{[\alpha]^{1-\frac{t}{T}}} \\ &= B_N \frac{1}{[\alpha]^{1-\frac{t}{T}}} \end{aligned}$$

$$\text{où } B_N = \frac{1}{[1 - e^{-2(T-\tau)N}]}$$

Ce qui implique que :

$$I_2 = \int_{|\xi| \leq N} \left| F_\alpha(\xi, t) (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \quad (2.2.17)$$

$$\leq \left(B_N \frac{1}{[\alpha]^{1-\frac{t}{T}}} \right)^2 \int_{|\xi| \leq N} \left| (\hat{h}_1^\delta(\xi) - \hat{h}_2^\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \quad (2.2.18)$$

$$\leq \left(B_N \frac{1}{[\alpha]^{1-\frac{t}{T}}} \right)^2 \|\hat{h}_1^\delta - \hat{h}_2^\delta\|^2 \quad (2.2.19)$$

En combinant (2.2.7), (2.2.15) et (2.2.17), on obtient

$$\|\hat{u}_{\alpha_1}(\cdot, t) - \hat{u}_{\alpha_2}(\cdot, t)\|^2 = [(K_N)^2 + (B_N)^2] \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{2(1-\frac{t}{T})} \|\hat{h}_1^\delta - \hat{h}_2^\delta\|^2$$

pour $N = \frac{1}{2(T-\tau)} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right)$.

On a

$$e^{\tau N} = \left[1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right]^{\frac{\tau}{2(T-\tau)}} = \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{\frac{\tau}{2T}} \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{\frac{\tau}{2(T-\tau)}}$$

et $e^{2(T-\tau)N} = \left[1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right]$ donc $[1 - e^{-2(T-\tau)N}] = \left[1 - \left[1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right]^{-1} \right] = \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1}$.

D'où

$$B_N = [1 - e^{-2(T-\tau)N}]^{-1} = \alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \quad (2.2.20)$$

$$K_N \leq \frac{e^{\tau N}}{[1 - e^{-2(T-\tau)N}]} = \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{1 + \frac{\tau}{2(T-\tau)}} \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{\frac{\tau}{2T}} \quad (2.2.21)$$

En utilisant les estimations (2.2.20) et (2.2.21), on obtient

$$\begin{aligned} (K_N)^2 + (B_N)^2 &\leq \left(\left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{1 + \frac{\tau}{2(T-\tau)}} \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{\frac{\tau}{2T}} \right)^2 + \left(\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right)^2 \\ &= \left(\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right)^2 \left[\left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{\frac{\tau}{(T-\tau)}} + [\alpha]^{\frac{\tau}{T}} \right] \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{\frac{\tau}{T}} \end{aligned}$$

si $0 < \alpha < 1$ alors

$$(K_N)^2 + (B_N)^2 \leq 4 \left[2^{\frac{\tau}{(T-\tau)}} + 1 \right] \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{\frac{\tau}{T}} \quad (2.2.22)$$

De (2.2.22), on déduit que

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_{\alpha_1}(\cdot, t) - \hat{u}_{\alpha_2}(\cdot, t)\|^2 &= [(K_N)^2 + (B_N)^2] \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{2(1-\frac{t}{T})} \|\hat{h}_1^\delta - \hat{h}_2^\delta\|^2 \\ &\leq 4 \left[2^{\frac{\tau}{(T-\tau)}} + 1 \right] \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{2(1-\frac{t}{T} + \frac{\tau}{2T})} \|\hat{h}_1^\delta - \hat{h}_2^\delta\|^2 \\ &\leq \left(C_1 \left[\frac{1}{\alpha} \right]^{(1-\frac{t}{T} + \frac{\tau}{2T})} \right)^2 \|\hat{h}_1^\delta - \hat{h}_2^\delta\|^2 \end{aligned}$$

où $C_1 = 4 \left[2^{\frac{\tau}{(T-\tau)}} + 1 \right]$.

Le problème (P_α) est bien posé, et sa solution est donnée par :

$$u_\alpha(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{sh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) d\xi$$

Théorème 2.2.3. Pour tout $h \in L^2(\mathbb{R})$, nous avons

$$\|u_\alpha(\cdot, \tau) - h\| \rightarrow 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0 \quad (2.2.23)$$

Preuve.

$$\hat{u}(\xi, \tau) = \hat{h}(\xi) \quad (2.2.24)$$

$$\hat{u}_\alpha(\xi, \tau) = \frac{[\sinh((T-\tau)|\xi|)]}{\alpha [\sinh(T|\xi|)] + [\sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) \quad (2.2.25)$$

$$\|u(\cdot, \tau) - u_\alpha(\cdot, \tau)\|^2 \leq \|\hat{u}(\cdot, \tau) - \hat{u}_\alpha(\cdot, \tau)\|^2$$

On calcule

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, \tau) - \hat{u}_\alpha(\cdot, \tau)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left[1 - \frac{\sinh((T-\tau)|\xi|)}{\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)} \right]^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} [G_\alpha(\xi)]^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G_\alpha(\xi) &= \frac{\alpha \sinh(T|\xi|)}{\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)} \\ &= \frac{\alpha \sinh(T\xi)}{\sinh((T-\tau)\xi) \left[\alpha \frac{\sinh(T\xi)}{\sinh((T-\tau)\xi)} + 1 \right]} \end{aligned}$$

$h \in L^2(\mathbb{R})$ implique que $\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 dx < \infty$, d'où $\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $M(\varepsilon)$ tel que

$$\int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)}^{+\infty} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \quad (2.2.26)$$

$$\|\hat{u}(\cdot, \tau) - \hat{u}_\alpha(\cdot, \tau)\|^2 = I_3 + I_4$$

où

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} [G_\alpha(\xi)]^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ I_4 &= \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} [G_\alpha(\xi)]^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

comme $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \geq e^{\tau|\xi|}$, alors

$$G_\alpha(\xi) \leq \frac{\alpha \sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|) [\alpha e^{\tau|\xi|} + 1]}$$

et

$$G_\alpha(\xi) \leq \frac{\alpha \sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \sup_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \tilde{G}_\alpha(\xi) \quad (2.2.27)$$

\tilde{G}_α est croissante ce qui implique $\tilde{G}_\alpha^\infty = \sup_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \tilde{G}_\alpha(\xi) = \tilde{G}_\alpha(M(\varepsilon))$

D'où

$$\sup_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \tilde{G}_\alpha(\xi) = \frac{\alpha \sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))}$$

si $|\xi| \leq M(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} |G_\alpha(\xi) \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \left| \frac{\alpha \sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

On remarque que

$$G_\alpha(\xi) = \frac{\alpha \sinh(T\xi)}{\sinh((T-\tau)\xi) \left[\alpha \frac{\sinh(T\xi)}{\sinh((T-\tau)\xi)} + 1 \right]} \leq 1$$

d'où

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} |G_\alpha(\xi) \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\|\hat{u}(\cdot, \tau) - \hat{u}_\alpha(\cdot, \tau)\|^2 \leq \int_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \left| \frac{\alpha \sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \right|^2 \|\hat{h}\|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi$$

en choisissant α tel que :

$$\left[\frac{\alpha \sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \|\hat{h}\| \right]^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

on obtient

$$\alpha^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\|\hat{h}\|^2} \left[\frac{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))}{\sinh(TM(\varepsilon))} \right]^2$$

D'où

$$\|\hat{u}(\cdot, \tau) - \hat{u}_\alpha(\cdot, \tau)\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.2.28)$$

$$\leq \varepsilon \quad (2.2.29)$$

alors

$$\|\hat{u}(\cdot, \tau) - \hat{u}_\alpha(\cdot, \tau)\| \rightarrow 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

Ce qui prouve que

$$u_\alpha(x, \tau) \rightarrow h(x), \text{ quand } \alpha \rightarrow 0.$$

Théorème 2.2.4. *Supposons que u est la solution du problème (2.1.2) et u_α est la solution du problème (P_α) , Si $\|u(\cdot, 0)\| < \infty$, nous avons :*

$$\|u_\alpha(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\| \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq \|u_\alpha(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\| \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, 0) &= \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \\ \hat{u}_\alpha(\xi, 0) &= \frac{[\sinh(T|\xi|)]}{\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, 0) - \hat{u}_\alpha(\cdot, 0)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) - \frac{[\sinh(T|\xi|)]}{\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \right]^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\alpha [\sinh(T|\xi|)]^2}{\left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right] [\sinh((T-\tau)|\xi|)]^2} \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| G_\alpha(\xi) \frac{[\sinh(T|\xi|)]}{[\sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

où

$$G_\alpha(\xi) = \frac{\alpha [\sinh(T|\xi|)]}{\left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right] [\sinh((T-\tau)|\xi|)]}$$

donc

$$\|\hat{u}(\cdot, 0) - \hat{u}_\alpha(\cdot, 0)\|^2 = I_5 + I_6$$

où

$$I_5 = \int_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \left| G_\alpha(\xi) \frac{[\sinh(T|\xi|)]}{[\sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi$$

$$I_6 = \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} \left| G_\alpha(\xi) \frac{[\sinh(T|\xi|)]}{[\sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi$$

On suppose maintenant que le problème (2.1.2) est résoluble, et soit $u(x, t)$ sa solution. D'après le théorème (2.1.1) on a

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\sinh((T)|\xi|)}{[\sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi) d\xi \in L^2(\mathbb{R})$$

d'où

$$\|u(x, 0)\|^2 < \infty. \text{ D'après l'égalité de Parseval } \|u(., 0)\|^2 = \|\hat{u}(., 0)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \right]^2 d\xi$$

$$\text{et comme } \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \hat{h}(\xi) \right]^2 d\xi \geq \int_{\mathbb{R}} |\exp(\tau|\xi|) \hat{h}(\xi)|^2 d\xi$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}} |\exp(\tau|\xi|) \hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \quad (2.2.30)$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $M(\varepsilon)$ tel que

$$[B_{M(\varepsilon)}]^2 \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} |\exp(\tau|\xi|) \hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{où } B_{M(\varepsilon)} = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)M(\varepsilon)}}.$$

On a

$$G_\alpha(\xi) \leq \frac{\alpha \sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \sup_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \tilde{G}_\alpha(\xi) \quad (2.2.31)$$

si $|\xi| \leq M(\varepsilon)$, on a

$$G_\alpha(\xi) \leq \sup_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \tilde{G}_\alpha(\xi) \leq \frac{\alpha \sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \quad (2.2.32)$$

De (2.2.32), on déduit que

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} \left| \alpha \left[\frac{\sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \right] \right|^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \left[\alpha \left[\frac{\sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \right] \right]^2 \int_{|\xi| \leq M(\varepsilon)} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq [\alpha]^2 \left[\frac{\sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \right]^4 \|\hat{h}\|^2
\end{aligned}$$

en choisissant α tel que :

$$\alpha^2 \left[\frac{\sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \right]^4 \|\hat{h}\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$\alpha^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\|\hat{h}\|^2} \left[\frac{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))}{\sinh(TM(\varepsilon))} \right]^4$$

on remarque que

$$G_\alpha(\xi) \leq 1 \text{ et } \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{e^{\tau|\xi|}}{1 - e^{-2(T-\tau)|\xi|}}$$

$$\text{si } |\xi| \geq M(\varepsilon) \text{ alors } \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{e^{\tau|\xi|}}{1 - e^{-2(T-\tau)M(\varepsilon)}} = B_{M(\varepsilon)} e^{\tau|\xi|}$$

d'où

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} G_\alpha^2(\xi) \left(\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \right)^2 |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} |B_{M(\varepsilon)} e^{\tau|\xi|} \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\
&= [B_{M(\varepsilon)}]^2 \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} e^{2\tau|\xi|} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, 0) - \hat{u}_\alpha(\cdot, 0)\|^2 &\leq 2[\alpha]^2 \left[\frac{\sinh(TM(\varepsilon))}{\sinh((T-\tau)M(\varepsilon))} \right]^4 \|\hat{h}\|^2 + 2[B_{M(\varepsilon)}]^2 \int_{|\xi| \geq M(\varepsilon)} |e^{\tau|\xi|} \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\|\hat{u}(\cdot, 0) - \hat{u}_\alpha(\cdot, 0)\|^2 \leq \varepsilon \quad (2.2.33)$$

implique

$$\|u(\cdot, 0) - u_\alpha(\cdot, 0)\|^2 \leq \varepsilon \quad (2.2.34)$$

alors

$$u_\alpha(x, 0) \rightarrow u(x, 0) \quad \text{quand} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

On montre que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq \|u_\alpha(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\| \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0$$

On a

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh(T|\xi|)} \hat{\varphi}(\xi) \\ \hat{u}_\alpha(\xi, t) &= \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \hat{h}(\xi). \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_\alpha(\cdot, t)\|^2 &= \|\hat{u}(\cdot, t) - \hat{u}_\alpha(\cdot, t)\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \left[\frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} - \frac{\sinh((T-t)|\xi|)}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)]} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \left[\frac{[\alpha \sinh(T|\xi|)] [\sinh((T-t)|\xi|)]}{[\alpha \sinh(T|\xi|) + \sinh((T-\tau)|\xi|)] \sinh((T-\tau)|\xi|)} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \left[\frac{\alpha [\sinh(T|\xi|)]^2}{[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1] [\sinh((T-\tau)|\xi|)]^2} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |[\hat{u}(\xi, 0) - \hat{u}_\alpha(\xi, 0)] \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|\hat{u}(\cdot, 0) - \hat{u}_\alpha(\cdot, 0)\|^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\hat{u}(\cdot, t) - \hat{u}_\alpha(\cdot, t)\|^2 \leq \|\hat{u}(\cdot, 0) - \hat{u}_\alpha(\cdot, 0)\|^2$$

alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t) - u_\alpha(\cdot, t)\|^2 \leq \|u(\cdot, 0) - u_\alpha(\cdot, 0)\|^2$$

Théorème 2.2.5. Soit u et u_α les solutions des problèmes (2.1.2) et (P_α) avec la même donnée exacte h . Supposons que

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{T|\xi|} \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \leq E^2 \quad (2.2.35)$$

où E un nombre positif tel que alors nous avons l'estimation de la convergence suivante :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t) - u_\alpha(\cdot, t)\| \leq \left[C_4 \alpha^{\frac{(T-\tau)}{T}} \right] E \quad (2.2.36)$$

où

$$C_4 = [2]^{\frac{(2T-\tau)}{(T-\tau)}} \left[1 + \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{T}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, 0) - \hat{u}_\alpha(\cdot, 0)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \left[\frac{[\alpha \sinh(T|\xi|)] [\sinh((T-t)|\xi|)]}{\left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right] [\sinh((T-\tau)|\xi|)]^2} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |[Q_\alpha(\xi)] \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq N} |[Q_\alpha(\xi)] \hat{h}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq N} |[Q_\alpha(\xi)] \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &= I_7 + I_8 \end{aligned}$$

où

$$Q_\alpha(\xi) = \frac{\alpha [\sinh(T|\xi|)]^2}{\left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1 \right] [\sinh((T-\tau)|\xi|)]^2}$$

$$I_7 = \int_{|\xi| \leq N} |[Q_\alpha(\xi)] \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.2.37)$$

et

$$I_8 = \int_{|\xi| \geq N} |[Q_\alpha(\xi)] \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.2.38)$$

comme $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \geq e^{\tau|\xi|}$, alors

$$\frac{\alpha [\sinh(T|\xi|)]^2}{\left[\alpha \frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} + 1\right] [\sinh((T-\tau)|\xi|)]^2} \leq \frac{\alpha [\sinh(T|\xi|)]^2}{\left[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1\right] [\sinh((T-\tau)|\xi|)]^2} = \tilde{Q}_\alpha(\xi)$$

Si $|\xi| \leq N$ alors $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{\sinh(TN)}{\sinh((T-\tau)N)} = K_N$

donc

$$\tilde{Q}_\alpha(\xi) = \int_{|\xi| \leq N} |[Q_\alpha(\xi)] \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.2.39)$$

$$\leq \left[\frac{\sinh(TN)}{\sinh((T-\tau)N)} \right]^2 \frac{\alpha}{\left[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1\right]} \quad (2.2.40)$$

$$\leq [K_N]^2 \frac{\alpha}{\left[\alpha e^{\tau|\xi|} + 1\right]} \leq [K_N]^2 \alpha \quad (2.2.41)$$

où $K_N = \frac{\sinh(TN)}{\sinh((T-\tau)N)}$

De (2.2.37), (2.2.39) et (2.2.41), on déduit que

$$\begin{aligned} I_7 &\leq \int_{|\xi| \leq N} \left| [K_N]^2 \alpha \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq [K_N]^2 \alpha^2 \int_{|\xi| \leq N} |e^{-T|\xi|} e^{T|\xi|} \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq [K_N]^2 \alpha^2 \int_{|\xi| \leq N} |e^{T|\xi|} \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq [K_N]^2 \alpha^2 E^2 \end{aligned}$$

On a $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{e^{\tau|\xi|}}{1 - e^{-2(T-\tau)|\xi|}}$.

Si $|\xi| \geq N$ alors $\frac{\sinh(T|\xi|)}{\sinh((T-\tau)|\xi|)} \leq \frac{e^{\tau|\xi|}}{1 - e^{-2(T-\tau)N}} = B_N e^{\tau|\xi|}$
donc

$$\begin{aligned}
 I_8 &\leq \int_{|\xi| \geq N} \left| [\tilde{Q}_\alpha(\xi)] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &\leq \int_{|\xi| \leq N} \left| \left[[B_N]^2 \frac{\alpha e^{2\tau|\xi|}}{\alpha e^{\tau|\xi|} + 1} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &\leq \int_{|\xi| \leq N} \left| \left[[B_N]^2 \frac{\alpha e^{\tau|\xi|}}{\alpha + e^{-\tau|\xi|}} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &\leq [B_N]^2 \alpha^2 \int_{|\xi| \leq N} \left| \left[\frac{e^{-(T-\tau)|\xi|} e^{T|\xi|}}{\alpha + e^{-\tau|\xi|}} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &\leq [B_N]^2 \alpha^2 \int_{|\xi| \leq N} \left| \left[\frac{e^{-(T-\tau)|\xi|} e^{T|\xi|}}{\alpha + e^{-T|\xi|}} \right] \hat{h}(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &\leq \left[[B_N]^2 \alpha \sup_{\xi \geq 0} \frac{e^{-(T-\tau)\xi}}{\alpha + e^{-T\xi}} \right]^2 \int_{|\xi| \leq N} |e^{T|\xi|} \hat{h}(\xi)|^2 d\xi
 \end{aligned}$$

Posant

$$g(\xi) = \frac{e^{-(T-\tau)|\xi|}}{\alpha + e^{-T|\xi|}}$$

Une dérivation simple par rapport à ξ donne $\frac{dg(\xi)}{d\xi} = \frac{-(T-\tau)e^{-(T-\tau)|\xi|} [\alpha + e^{-T|\xi|}] + T e^{-T|\xi|} e^{-(T-\tau)|\xi|}}{[\alpha + e^{-T|\xi|}]^2}$.

Donc $\frac{dg(\xi)}{d\xi} = 0$ implique $-(T-\tau)e^{-(T-\tau)|\xi|} [\alpha + e^{-T|\xi|}] + T e^{-T|\xi|} e^{-(T-\tau)|\xi|} = 0$,

d'où $|\xi| = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{\tau}{\alpha(T-\tau)} \right) = \xi^*$. Puisque $\frac{dg(\xi)}{d\xi} > 0$ si $|\xi| < \xi^*$ et $\frac{dg(\xi)}{d\xi} < 0$ si $|\xi| > \xi^*$ et $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} g(\xi) = 0$, alors ξ^* est un point critique qui réalise le maximum de $g(\xi)$.

Ainsi, on a l'inégalité

$$g(\xi) \leq \sup_{|\xi| \geq N} g(\xi) = \frac{\left[\frac{\alpha(T-\tau)}{\tau} \right]^{\frac{T-\tau}{T}}}{\left[\alpha + \frac{\alpha(T-\tau)}{\tau} \right]} = \frac{\tau}{T} \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{T-\tau}{T}} \alpha^{-1 + \frac{T-\tau}{T}}$$

d'où

$$I_8 \leq \left[\frac{\tau}{T} \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{T-\tau}{T}} [B_N]^2 \alpha^{\frac{T-\tau}{T}} \right]^2 \int_{|\xi| \geq N} |e^{T\xi} \hat{h}(\xi)|^2 d\xi \leq \left[\frac{\tau}{T} \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{T-\tau}{T}} [B_N]^2 \alpha^{\frac{T-\tau}{T}} \right]^2 E^2$$

donc

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, t) - \hat{u}_\alpha(\cdot, t)\|^2 &\leq I_7 + I_8 \\ &\leq \left[[K_N]^4 \alpha^2 + \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{T}} [B_N]^4 \alpha^{\frac{2(T-\tau)}{T}} \right] E^2. \end{aligned}$$

On a

$$N = \frac{1}{2(T-\tau)} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right)$$

d'où

$$e^{\tau N} = \left[1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right]^{\frac{\tau}{2(T-\tau)}} = [\alpha]^{-\frac{\tau}{2T}} \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{\frac{\tau}{2(T-\tau)}}$$

$$e^{2(T-\tau)N} = \left[1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{2(T-\tau)}} = \left[1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right]$$

$$1 - e^{-2(T-\tau)N} = \left[1 - \left[1 + \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}}} \right]^{-1} \right] = \frac{1}{\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1}$$

d'où

$$\frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)N}} = \alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1$$

ce qui nous donne

$$B_N = \alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1.$$

Comme $\frac{e^{\tau N}}{1 - e^{-2(T-\tau)N}} = [\alpha]^{-\frac{\tau}{2T}} \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{\frac{\tau}{2(T-\tau)}} \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right] = \alpha^{-\frac{\tau}{2T}} \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{1 + \frac{\tau}{2(T-\tau)}}$

alors

$$K_N \leq \frac{e^{\tau N}}{1 - e^{-2(T-\tau)N}} = \alpha^{-\frac{\tau}{2T}} \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{1 + \frac{\tau}{2(T-\tau)}}$$

et

$$B_N \leq \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)N}} = \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]$$

Si $0 < \alpha < 1$

$$K_N \leq \alpha^{-\frac{\tau}{2T}} \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right]^{1 + \frac{\tau}{2(T-\tau)}} \leq [2]^{1 + \frac{\tau}{2(T-\tau)}} \alpha^{-\frac{\tau}{2T}}$$

$$B_N \leq \left[\alpha^{\frac{T-\tau}{T}} + 1 \right] \leq 2$$

alors

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, t) - \hat{u}_\alpha(\cdot, t)\|^2 &\leq \left[[K_N]^4 \alpha^2 + \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{T}} [B_N]^4 \alpha^{\frac{2(T-\tau)}{T}} \right] E^2 \\ &\leq \left[[2]^{4 + \frac{2\tau}{(T-\tau)}} \alpha^{2 - \frac{2\tau}{T}} + \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{T}} [2]^4 \alpha^{\frac{2(T-\tau)}{T}} \right] E^2 \\ &\leq [2]^{4 + \frac{2\tau}{(T-\tau)}} \left[1 + [2]^{\frac{-2\tau}{(T-\tau)}} \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{T}} \right] \alpha^{\frac{2(T-\tau)}{T}} E^2 \\ &\leq [2]^{4 + \frac{2\tau}{(T-\tau)}} \left[1 + \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{T}} \right] \alpha^{\frac{2(T-\tau)}{T}} E^2 \\ &\leq \left[C_4 \alpha^{\frac{(T-\tau)}{T}} \right]^2 E^2 \end{aligned}$$

avec

$$C_4 = [2]^{\frac{(2T-\tau)}{(T-\tau)}} \left[1 + \left[\frac{T-\tau}{\tau} \right]^{\frac{2(T-\tau)}{T}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

3 Méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée pour une classe de problèmes elliptiques mal-posés

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème de Cauchy pour l'équation de Laplace sur un domaine borné. Pour régulariser notre problème mal posé, on propose une variante modifiée de la méthode des conditions aux limites auxiliaires.

3.1 Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

3.1.1 Introduction :

Dans cette partie, on considère le problème de Cauchy mal-posé suivant :

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < T \\ w(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ w_y(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ w(0, y) = w(\pi, y) = 0, & 0 < y < T \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Il existe une constante $E > 0$ telle que la solution exacte w vérifie $\left\| \frac{\partial^p w}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\| \leq E$.

La solution du problème (3.1.1) obtenue par la résolution des deux problèmes de Cauchy pour l'équation de Laplace ci-dessous :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_y(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 < y < T \end{cases} \quad (3.1.2)$$

et

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < T \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ v_y(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ v(0, y) = v(\pi, y) = 0, & 0 < y < T \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Alors $w = u + v$ est la solution du problème (3.1.1). Ces problèmes apparaissent dans plusieurs applications, en géophysique, cardiologie etc. Le problème de Cauchy pour l'équation

de Laplace est mal-posé, i.e. : la solution si elle existe ne dépend pas continûment des données. Une petite perturbation sur les données peut induire une grande erreur sur les solutions. Plusieurs méthodes de régularisations ont été considérées pour résoudre ce problème, comme la méthode Q.R, la méthode de Tikhonov, la méthode des différences finies et aures. En 1983, Vabishchevich [77] a examiné le problème elliptiques de Cauchy suivant

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij(x)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x) u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = \psi_1 \\ \frac{\partial u}{\partial N}|_{\Gamma_1} = \psi_2 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

L'auteur a proposer d'approché le problème (3.1.4), en utilisant la méthode des valeurs limites non locales pour le problème suivant :

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij(x)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x) u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\Gamma_1} + \alpha u|_{\Gamma_2} = \psi_1, & \alpha > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial N}|_{\Gamma_1} = \psi_2 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Dans [32], Hao-Duc-Lesnic a utiliser cette méthode de résolution pour le problème de Cauchy elliptique dans un domaine cylindrique qui suit

$$\begin{cases} u_{tt} = Au, & t \in (0, T) \\ \|u(0) - \phi\| \leq \varepsilon \\ u_t(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

qu'il approche par :

$$\begin{cases} u_{tt} = Au, & t \in (0, T) \\ u(0) + \alpha u(aT) = \phi \\ u_t(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Dans ce travail nous présentons la méthode des conditions aux limites auxiliares modifiée. Pour construire une approximation stable de la solution du problème (3.1.2) et (3.1.3). Nous remplaçons les conditions initiales $u(x, 0) = \varphi(x)$ dans (3.1.2) $v_y(x, 0) = \psi(x)$ dans (3.1.3) par :

$$u(x, 0) + \alpha \frac{\partial^p u(x, T)}{\partial y^p} = \varphi(x) \quad (3.1.8)$$

$$v_y(x, 0) + \alpha \frac{\partial^p v(x, T)}{\partial y^p} = \psi(x) \quad (3.1.9)$$

respectivement, où $\alpha > 0$ est un paramètre de régularisation et $p \geq 1$ est un entier.

3.1.2 Méthode de régularisation et estimation de la convergence

Considérons le problème (3.1.2) et (3.1.3). Pour le problème (3.1.2), nous utilisons la solution du problème perturbé suivant pour avoir une approximation de la solution.

$$\begin{cases} (u_\alpha^\delta)_{xx} + (u_\alpha^\delta)_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < T \\ u_\alpha^\delta(x, 0) + \alpha \frac{\partial^p u_\alpha^\delta(x, T)}{\partial y^p} = \varphi^\delta(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ (u_\alpha^\delta)_y(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_\alpha^\delta(0, y) = u_\alpha^\delta(\pi, y) = 0, & 0 < y < T \end{cases} \quad (3.1.10)$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre de régularisation, $p \geq 1$ est un entier, et la donnée mesurée $\varphi^\delta \in L^2(0, \pi)$, satisfait

$$\|\varphi^\delta - \varphi\| \leq \delta \quad (3.1.11)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme dans L^2 .

Grace à la méthode de séparation des variables, on trouve aisément la solution du problème (3.1.2) donnée par :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(nx) \cosh(ny), \quad (3.1.12)$$

où

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx$$

et la solution du problème (3.1.10) est donnée par

$$u_\alpha^\delta(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(ny)/\sinh(nT)}{\alpha n^p + 1/\sinh(nT)} \varphi_n^\delta \sin(nx), & p \text{ est impair} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(ny)/\cosh(nT)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} \varphi_n^\delta \sin(nx), & p \text{ est pair} \end{cases} \quad (3.1.13)$$

où

$$\varphi_n^\delta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi^\delta(x) \sin(nx) dx \quad (3.1.14)$$

Nous montrons que le problème (3.1.10) est bien posé, i.e. la solution (3.1.13) dépend continûment des données de Cauchy φ^δ .

Lemme 3.1.1. Pour $M, \alpha, x > 0, p > 1$ alors nous avons :

$$\sup \frac{1}{\alpha x^p + \exp(-Mx)} \leq (pM)^p \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{M^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \quad (3.1.15)$$

Théorème 3.1.1. Soient $u_{\alpha_1}^\delta$ et $u_{\alpha_2}^\delta$ deux solutions régularisées du problème (3.1.10) correspondantes aux données φ_1^δ et φ_2^δ respectivement, alors pour $\alpha < \frac{T^p}{p}$ nous avons :

$$\|u_{\alpha_1}^\delta(., y) - u_{\alpha_2}^\delta(., y)\| \leq \frac{2}{1 - \exp(-2T)} (pT)^p \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\| \quad (3.1.16)$$

Preuve. On considère deux cas.

- Cas p pair :

De (3.1.13), nous avons :

$$\begin{aligned} u_{\alpha_1}^\delta(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh(ny)/\cosh(nT)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} \varphi_{1,n}^\delta \sin(nx) \\ u_{\alpha_2}^\delta(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh(ny)/\cosh(nT)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} \varphi_{2,n}^\delta \sin(nx) \end{aligned}$$

où $\varphi_{i,n}^\delta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_i^\delta(x) \sin(nx) dx$ pour $i = 1, 2$.

On calcule

$$\begin{aligned}
 \|u_{\alpha_1}^\delta(\cdot, y) - u_{\alpha_2}^\delta(\cdot, y)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh(ny)/\cosh(nT)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta) \sin(nx) \right\|^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\cosh(ny)/\cosh(nT)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\cosh(ny)}{\alpha n^p \cosh(nT) + 1} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{[1 + \exp(-2ny)] \exp(ny)}{\alpha n^p \exp(nT) (1 + \exp(-2nT)) + 1} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2 \exp(ny)}{\alpha n^p \exp(nT) + 1} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sup_{n \geq 1} \left[\frac{2}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &= \sup_{n \geq 1} \left[\frac{2}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\|^2
 \end{aligned}$$

on pose $g(n) = \frac{1}{\alpha n^p + \exp(-nT)}$
d'après le lemme(3.1.2) on a

$$g(n) \leq (pT)^p \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \quad (3.1.17)$$

alors

$$\|u_{\alpha_1}^\delta(\cdot, y) - u_{\alpha_2}^\delta(\cdot, y)\| \leq 2(pT)^p \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\| \quad (3.1.18)$$

- Cas p impair

de (3.1.13), utilisant l'inégalité $\frac{\cosh(nT)}{\sinh(nT)} \leq \frac{2}{1 - \exp(-2nT)} \leq \frac{2}{1 - \exp(-2T)}$, on trouve

$$\begin{aligned}
 \|u_{\alpha_1}^\delta(\cdot, y) - u_{\alpha_2}^\delta(\cdot, y)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cosh(ny)/\sinh(nT)}{\alpha n^p + 1/\sinh(nT)} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cosh(ny)/\sinh(nT)}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 (\varphi_{1,n}^\delta - \varphi_{2,n}^\delta)^2 \\
 &\leq \left(\frac{2}{1 - \exp(-2T)} \right)^2 \left((pT)^p \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \right)^2 \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\|^2
 \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_{\alpha_1}^\delta(\cdot, y) - u_{\alpha_2}^\delta(\cdot, y)\|^2 \leq \left(\frac{2}{1 - \exp(-2T)} \right)^2 \left((pT)^p \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \right)^2 \|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\|^2 \quad (3.1.19)$$

En utilisant (3.1.18) et (3.1.19) déduit (3.1.16).

Dans le théorème suivant on montre que la solution régularisée u_α^δ donnée par (3.1.13) est une approximation stable de la solution exacte u donnée par (3.1.12).

Théorème 3.1.2. *Supposons que u est la solution du problème (3.1.2) et u_α^δ est la solution du problème (3.1.13). Soit la donnée φ^δ , satisfaisant $\|\varphi^\delta - \varphi\| \leq \delta$, et la solution exacte u vérifie $\left\| \frac{\partial^p u}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\| \leq E$ avec $p \geq 1$, alors pour $0 < y \leq T$ et $\delta < \frac{T^p}{p}$, nous avons l'estimation suivante de la convergence :*

$$\|u_\alpha^\delta(\cdot, y) - u(\cdot, y)\| \leq C \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \quad (3.1.20)$$

où $C = \left(\frac{2}{1 - \exp(-2T)} \right) (pT)^p (1 + E)$.

où le paramètre de régularisation α est choisi comme suit :

$$\alpha = \delta \quad (3.1.21)$$

Preuve. Notons u_α la solution du problème (3.1.10) correspondent aux données exactes φ . Il est clair que

$$\|u_\alpha^\delta - u\| \leq \|u_\alpha^\delta - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u\|. \quad (3.1.22)$$

on considère deux cas.

- Cas p pair :

A partir du théorème (3.1.2) nous avons

$$\|u_\alpha^\delta(\cdot, y) - u_\alpha(\cdot, y)\|^2 \leq \left[2(pT)^p \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \right]^2 \|\varphi^\delta - \varphi\|^2 \quad (3.1.23)$$

De (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13), (3.1.17) nous déduisons

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(\cdot, y) - u(\cdot, y)\|^2 &= \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(ny)/\cosh(nT)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} - \cosh(ny) \right) \varphi_n \sin(nx) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n^p \cosh(ny)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} \varphi_n \sin(nx) \right\|^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n^p \cosh(ny)}{\alpha n^p + 1/\cosh(nT)} \right)^2 \varphi_n^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n^p \cosh(ny) \cosh(nT)}{\alpha n^p \cosh(nT) + 1} \right)^2 \varphi_n^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha \exp(ny) [1 + \exp(-ny)]}{\alpha n^p \cosh(nT) + 1} \right)^2 n^{2p} \cosh^2(nT) \varphi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\alpha \exp(nT)}{\alpha n^p \exp(nT) (1 + \exp(-2nT)) + 1} \right)^2 n^{2p} \cosh^2(nT) \varphi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\alpha \exp(nT)}{\alpha n^p \exp(nT) + 1} \right)^2 n^{2p} \cosh^2(nT) \varphi_n^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\alpha \exp(nT)}{\exp(nT) [\alpha n^p + \exp(-nT)]} \right)^2 n^{2p} \cosh^2(nT) \varphi_n^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\alpha}{[\alpha n^p + \exp(-nT)]} \right)^2 n^{2p} \cosh^2(nT) \varphi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sup \left(\frac{2\alpha}{[\alpha n^p + \exp(-nT)]} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} \cosh^2(nT) \varphi_n^2 \end{aligned}$$

on a

$$\sup_{n \geq 1} \frac{2\alpha}{[\alpha n^p + \exp(-nT)]} \leq 2(pT)^p \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p}$$

donc

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(\cdot, y) - u(\cdot, y)\|^2 &\leq \left[2(pT)^P \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{-p} \right]^2 \left\| \frac{\partial^p u}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\|^2 \\ &\leq \left[2(pT)^P \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{-p} \right]^2 E^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_\alpha(\cdot, y) - u(\cdot, y)\| \leq 2(pT)^P \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{-p} E$$

alors

$$\|u_\alpha^\delta(\cdot, y) - u(\cdot, y)\| \leq 2(pT)^P \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{-p} (1 + E) \quad (3.1.24)$$

Revenons au cas où p est impair, à partir du théorème (3.1.2) en utilisant l'inégalité $\frac{\cosh(nT)}{\sinh(nT)} \leq$

$\frac{2}{1 - e^{-2nT}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2T}}$, on trouve

$$\|u_\alpha^\delta(\cdot, y) - u_\alpha(\cdot, y)\|^2 \leq \left(\frac{2}{1 - \exp(-2T)} \right)^2 \left[(pT)^P \alpha^{-1} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{-p} \right]^2 \|\varphi^\delta - \varphi\|^2. \quad (3.1.25)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \|u_\alpha - u\|^2 &= \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(ny)/\sinh(nT)}{\alpha n^p + 1/\sinh(nT)} - \cosh(ny) \right) \varphi_n \sin(nx) \right\|^2 \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n^p \cosh(ny)}{\alpha n^p + 1/\sinh(nT)} \varphi_n \sin(nx) \right\|^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha n^p \cosh(ny)}{\alpha n^p + 1/\sinh(nT)} \right]^2 \varphi_n^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \left[\frac{\cosh(ny)}{\sinh(nT)} \right]^2 n^{2p} \sinh^2(nT) \varphi_n^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \left[\frac{2 \exp(ny)}{\exp(nT)[1 - \exp(-2nT)]} \right]^2 n^{2p} \sinh^2(nT) \varphi_n^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \left[\frac{2 \exp(ny)}{\exp(nT)[1 - \exp(-2nT)]} \right]^2 n^{2p} \sinh^2(nT) \varphi_n^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \left[\frac{2 \exp(ny)}{\exp(nT)[1 - \exp(-2nT)]} \right]^2 n^{2p} \sinh^2(nT) \varphi_n^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \left[\frac{2}{[1 - \exp(-2T)]} \right]^2 n^{2p} \sinh^2(nT) \varphi_n^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{[1 - \exp(-2T)]} \right]^2 \sup_{n \geq 1} \left[\frac{\alpha}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} \sinh^2(nT) \varphi_n^2 \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{[1 - \exp(-2T)]} \right]^2 \sup_{n \geq 1} \left[\frac{\alpha}{\alpha n^p + \exp(-nT)} \right]^2 \left\| \frac{\partial^p u}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\|^2
 \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_\alpha - u\|^2 \leq \left(\frac{2}{1 - \exp(-2T)} \right)^2 (pT)^{2p} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-2p} \left\| \frac{\partial^p u}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\|^2 \quad (3.1.26)$$

En combinant (3.1.25), (3.1.26), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|u_\alpha^\delta(\cdot, y) - u(\cdot, y)\| &\leq \left(\frac{2}{1 - \exp(-2T)} \right) (pT)^p \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \left(1 + \left\| \frac{\partial^p u}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\| \right) \\
 &\leq C \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{-p} \left(1 + \left\| \frac{\partial^p u}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\| \right)
 \end{aligned}$$

Pour le problème (3.1.3), nous considérons le problème perturbé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (v_\alpha^\delta)_{xx} + (v_\alpha^\delta)_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < T \\ v_\alpha^\delta(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ (v_\alpha^\delta)_y(x, 0) + \alpha \frac{\partial^p v_\alpha^\delta(x, T)}{\partial y^p} = \psi^\delta(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ v_\alpha^\delta(0, y) = v_\alpha^\delta(\pi, y) = 0, & 0 < y < T \end{array} \right. \quad (3.1.27)$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre de régularisation, $p \geq 1$ est un entier, et la donnée mesurée $\psi^\delta \in L^2(0, \pi)$, satisfait

$$\|\psi^\delta - \psi\| \leq \delta. \quad (3.1.28)$$

Grace à la méthode de séparation des variables, un calcul trivial nous donne :

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \sin(nx) \sinh(ny), \quad (3.1.29)$$

où

$$\psi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx. \quad (3.1.30)$$

La solution du problème (3.1.27) est donnée par

$$v_\alpha^\delta(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(ny)/\cosh(nT)}{\alpha n^{p-1} + 1/\cosh(nT)} \frac{\psi_n^\delta}{n} \sin(nx), & p \text{ est impair} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(ny)/\sinh(nT)}{\alpha n^{p-1} + 1/\sinh(nT)} \psi_n^\delta \sin(nx), & p \text{ est pair} \end{array} \right. \quad (3.1.31)$$

où

$$\psi_n^\delta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi^\delta(x) \sin(nx) dx \quad (3.1.32)$$

Lemme 3.1.2. Pour $0 < m < M$, $\alpha > 0$, $x > 0$, $p > 1$, nous avons :

$$\sup \frac{\exp(-mx)}{\alpha x^p + \exp(-Mx)} \leq (pM)^p \alpha^{\frac{m}{M}-1} \left[\ln\left(\frac{M^p}{p\alpha}\right) \right]^{p\left(\frac{m}{M}-1\right)}. \quad (3.1.33)$$

Théorème 3.1.3. *Supposons que v est la solution du problème (3.1.3) et v_α^δ la solution du problème (3.1.27). Soit la donnée mesurée ψ^δ satisfaisant $\|\psi^\delta - \psi\| \leq \delta$, et la solution exacte v vérifiant $\left\| \frac{\partial^p v}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\| \leq E$ avec $p \geq 1$, alors pour $0 < y \leq T$ et $\delta < \frac{T^p}{p}$, nous avons l'estimation suivante de la convergence :*

$$\|v_\alpha^\delta(\cdot, y) - v(\cdot, y)\| \leq \frac{(pT)^p}{(1 - e^{-2T})} [\alpha]^{\frac{T-y}{T}} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{p \left(\frac{T-y}{T} - 1 \right)} (1 + E) \quad (3.1.34)$$

où le paramètre de régularisation α est choisi comme :

$$\alpha = \delta. \quad (3.1.35)$$

Preuve. On considère deux cas :

-Cas p impair. La condition $\|\psi^\delta - \psi\| \leq \delta$ conduit à

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n^\delta - \psi_n)^2 \leq \delta^2. \quad (3.1.36)$$

A partir de (3.1.29), (3.1.31), (3.1.36), et $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|v_\alpha^\delta(\cdot, y) - v_\alpha(\cdot, y)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(ny)/\cosh(nT)}{n(\alpha n^{p-1} + 1/\cosh(nT))} (\psi_n^\delta - \psi_n) \sin(nx) \right\|^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sinh(ny)/\cosh(nT)}{n(\alpha n^{p-1} + 1/\cosh(nT))} \right]^2 (\psi_n^\delta - \psi_n)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sinh(ny)}{n(\alpha n^{p-1} \cosh(nT) + 1)} \right]^2 (\psi_n^\delta - \psi_n)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{ny}(1 - e^{-2ny})}{(\alpha n^p e^{nT}(1 + e^{-2nT}) + n)} \right]^2 (\psi_n^\delta - \psi_n)^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{ny}}{\alpha n^p e^{nT} + 1} \right]^2 (\psi_n^\delta - \psi_n)^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-n(T-y)}}{\alpha n^p + e^{-nT}} \right]^2 (\psi_n^\delta - \psi_n)^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sup_{n \geq 1} \left[\frac{e^{-n(T-y)}}{\alpha n^p + e^{-nT}} \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n^\delta - \psi_n)^2 \end{aligned}$$

d'après le lemme(3.1.2), on a :

$$\frac{e^{-n(T-y)}}{\alpha n^p + e^{-nT}} \leq (pT)^p [\alpha]^{T-y-1} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{p \left(\frac{T-y}{T} - 1 \right)}$$

pour $\delta < \frac{T^p}{p}$, nous obtenons

$$\|v_\alpha^\delta(\cdot, y) - v_\alpha(\cdot, y)\| \leq (pT)^p [\delta]^{T-y} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\delta} \right) \right]^{p \left(\frac{T-y}{T} - 1 \right)} \quad (3.1.37)$$

et

$$\begin{aligned} \|v_\alpha^\delta(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh(ny)/\cosh(nT)}{(\alpha n^{p-1} + 1/\cosh(nT))} - \sinh(ny) \right) \frac{\psi_n}{n} \sin(nx) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n^{p-1} \sinh(ny)}{(\alpha n^{p-1} + 1/\cosh(nT))} \frac{\psi_n}{n} \sin(nx) \right\|^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha n^{p-1} \sinh(ny) \cosh(nT)}{n(1 + \alpha n^{p-1} \cosh(nT))} \right]^2 \psi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha e^{ny}}{n(1 + \alpha n^{p-1} e^{nT})} \right]^2 n^{2(p-1)} \cosh^2(nT) \psi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha e^{ny}}{(1 + \alpha n^p e^{nT})} \right]^2 n^{2(p-1)} \cosh^2(nT) \psi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{(\alpha n^p + e^{-nT})} \right]^2 n^{2(p-1)} \cosh^2(nT) \psi_n^2 \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left[\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{(\alpha n^p + e^{-nT})} \right]^2 \left\| \frac{\partial^p v}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\|^2 \end{aligned}$$

on a

$$\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{(\alpha n^p + e^{-nT})} \leq (pT)^p [\alpha]^{T-y} \left[\ln \left(\frac{T^p}{p\alpha} \right) \right]^{p \left(\frac{T-y}{T} - 1 \right)}$$

alors pour $\delta < \frac{T^p}{p}$

$$\|v_{\alpha}^{\delta}(\cdot, y) - v(\cdot, y)\| \leq (pT)^p [\delta]^{\frac{T-y}{T}} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\delta}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)} \left\| \frac{\partial^p v}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\| \quad (3.1.38)$$

de (3.1.37), (3.1.38), nous déduisons

$$\|v_{\alpha}^{\delta}(\cdot, y) - v(\cdot, y)\| \leq (pT)^p [\delta]^{\frac{T-y}{T}} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\delta}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)} (1 + E) \quad (3.1.39)$$

-Soit p pair

Pour $n \geq 1$ et $\sinh(nT) \geq e^{nT}(1 - e^{-2T})$, nous avons

$$\begin{aligned} \|v_{\alpha}^{\delta}(\cdot, y) - v_{\alpha}(\cdot, y)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(ny)/\sinh(nT)}{n(\alpha n^{p-1} + 1/\sinh(nT))} (\psi_n^{\delta} - \psi_n) \sin(nx) \right\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh(ny)/\sinh(nT)}{n(\alpha n^{p-1} + 1/\sinh(nT))} \right)^2 (\psi_n^{\delta} - \psi_n)^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh(ny)}{n(1 + \alpha n^{p-1} \sinh(nT))} \right)^2 (\psi_n^{\delta} - \psi_n)^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{ny}}{n(1 + \alpha(1 - e^{-2T})n^{p-1}e^{nT})} \right)^2 (\psi_n^{\delta} - \psi_n)^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-n(T-y)}}{e^{-nT} + \alpha(1 - e^{-2T})n^p} \right]^2 (\psi_n^{\delta} - \psi_n)^2 \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left[\frac{e^{-n(T-y)}}{\alpha(1 - e^{-2T})n^p + e^{-nT}} \right]^2 \|\psi_n^{\delta} - \psi_n\|^2 \end{aligned}$$

on a :

$$\frac{e^{-n(T-y)}}{\alpha(1 - e^{-2T})n^p + e^{-nT}} = \frac{e^{-n(T-y)}}{(1 - e^{-2T}) \left[\alpha n^p + \frac{1}{(1 - e^{-2T})} e^{-nT} \right]} \leq \frac{e^{-n(T-y)}}{(1 - e^{-2T}) [\alpha n^p + e^{-nT}]}$$

d'après le lemme(3.1.2), on a :

$$\frac{e^{-n(T-y)}}{(1 - e^{-2T}) [\alpha n^p + e^{-nT}]} \leq \frac{(pT)^p}{(1 - e^{-2T})} [\alpha]^{\frac{T-y}{T}-1} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)}$$

pour $\delta < \frac{T^p}{p}$, nous avons

$$\|v_\alpha^\delta(\cdot, y) - v_\alpha(\cdot, y)\| \leq \frac{(pT)^p}{(1 - e^{-2T})} [\alpha]^{T-y} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)} \quad (3.1.40)$$

S'autre part

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh(ny)/\sinh(nT)}{(\alpha n^{p-1} + 1/\sinh(nT))} - \sinh(ny) \right) \frac{\psi_n}{n} \sin(nx) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n^{p-1} \sinh(ny)}{(\alpha n^{p-1} + 1/\sinh(nT))} \frac{\psi_n}{n} \sin(nx) \right\|^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n^{p-1} \sinh(ny) \sinh(nT)}{n(1 + \alpha n^{p-1} \sinh(nT))} \right)^2 \psi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha e^{ny}}{1 + \alpha n^{p-1} (1 - e^{-2T}) e^{nT}} \right)^2 n^{2(p-1)} \sinh^2(nT) \psi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{\alpha(1 - e^{-2T}) n^p + e^{-nT}} \right)^2 n^{2(p-1)} \sinh^2(nT) \psi_n^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{\alpha(1 - e^{-2T}) n^p + e^{-nT}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2(p-1)} \sinh^2(nT) \psi_n^2 \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{\alpha(1 - e^{-2T}) n^p + e^{-nT}} \right)^2 \left\| \frac{\partial^p v}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\|^2 \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{(1 - e^{-2T}) \left[\alpha n^p + \frac{1}{(1 - e^{-2T})} e^{-nT} \right]} \right)^2 \left\| \frac{\partial^p v}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\|^2 \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{(1 - e^{-2T}) [\alpha n^p + e^{-nT}]} \right)^2 \left\| \frac{\partial^p v}{\partial y^p}(\cdot, T) \right\|^2 \end{aligned}$$

d'après le lemme(3.1.2), on a :

$$\frac{\alpha e^{-n(T-y)}}{(1 - e^{-2T}) [\alpha n^p + e^{-nT}]} \leq \frac{(pT)^p}{(1 - e^{-2T})} [\alpha]^{T-y} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)}$$

pour $\delta < \frac{T^p}{p}$, nous avons

$$\|v_\alpha(., y) - v(., y)\| \leq \frac{(pT)^p}{(1 - e^{-2T})} [\alpha]^{\frac{T-y}{T}} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)} \left\| \frac{\partial^p v}{\partial y^p}(., T) \right\| \quad (3.1.41)$$

alors de (3.1.40) et (3.1.41), nous avons

$$\|v_\alpha^\delta(., y) - v(., y)\| \leq \frac{(pT)^p}{(1 - e^{-2T})} [\alpha]^{\frac{T-y}{T}} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)} (1 + E).$$

Théorème 3.1.4. *Supposons que $w = u + v$ est la solution du problème (3.1.1) et $w_\alpha^\delta = u_\alpha^\delta + v_\alpha^\delta$ la solution perturbée. Soit les données mesurées φ^δ et ψ^δ satisfaisant $\|\varphi^\delta - \varphi\| + \|\psi^\delta - \psi\| \leq \delta$, et la solution exacte w vérifie $\left\| \frac{\partial^p w}{\partial y^p}(., T) \right\| \leq E$ avec $p \geq 1$, alors pour $0 < y \leq T$ et $\delta < \frac{T^p}{p}$, nous avons l'estimation suivante de la convergence :*

$$\|w_\alpha^\delta(., y) - w(., y)\| \leq 2C(1 + E) \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{-p} + C(1 + E) [\alpha]^{\frac{T-y}{T}} \left[\ln\left(\frac{T^p}{p\alpha}\right) \right]^{p\left(\frac{T-y}{T}-1\right)} \quad (3.1.42)$$

où $C = \left(\frac{(pT)^p}{1 - \exp(-2T)} \right) (pT)^p$

où le paramètre de régularisation α est choisi comme :

$$\alpha = \delta. \quad (3.1.43)$$

Preuve. En utilisant l'inégalité triangulaire $\|w_\alpha^\delta(., y) - w(., y)\| \leq \|u_\alpha^\delta(., y) - u(., y)\| + \|v_\alpha^\delta(., y) - v(., y)\|$ et le théorème (3.1.2.) et (3.1.3.).

4 Régularisation d'un problème inverse elliptique abstrait par la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'un problème inverse elliptique abstrait. En utilisant une méthode de régularisation basée sur la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiées pour construire une approximation stable, on établit des résultats de convergence et des estimations d'erreur liés à cette approche.

4.1 Formulation du problème

Soient H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$, et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur H .

4.1.1 Problème direct et problème inverse

Considérons le problème aux limites pour l'équation elliptique abstraite avec condition de Dirichlet suivante :

$$\partial_t^2 u(t) - Au(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (4.1.1)$$

$$u(T) = 0, \quad u(0) = \varphi \quad (4.1.2)$$

Ici $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est un opérateur auto adjoint défini positif ($A \geq \gamma I$), à domaine dense ($\overline{D(A)} = H$), où $\gamma = \inf(\sigma(A)) > 0$.

Ce problème direct consiste à déterminer $u(t)$ pour $0 < t < T$ connaissant A et φ .

Le problème inverse que nous considérons est de trouver la condition aux limites $u(0) = \varphi$ à partir de la condition aux limites connue en $t = \tau \in]0, T[$

i.e.,

$$B(u) = u(\tau) = h \quad (4.1.3)$$

pour $u(t)$ vérifiant l'équation (4.1.1) et la condition $u(T) = 0$.

Considérons le problème suivant :

$$\partial_t^2 u(t) - Au(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (4.1.4)$$

$$u(0) = \varphi, \quad u(T) = 0 \quad (4.1.5)$$

Ce problème se ramène à l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K} : H \rightarrow H$$

$$\varphi \rightarrow u(t) = R(t)\varphi \rightarrow h = B(u) = R(\tau)\varphi = \mathcal{K}\varphi \quad (4.1.6)$$

Pour l'étude de ce problème nous avons besoin d'étudier les propriétés de l'application \mathcal{K} :

1. L'injectivité de \mathcal{K} (identifiabilité).
2. La continuité de \mathcal{K} et son inverse si il existe (stabilité).
3. L'image de \mathcal{K} (les parties admissible de $R(\mathcal{K})$).
4. La reconstruction de φ à partir de h .

Exemple :

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = 0 & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ u(1,x) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(\tau,x) = h(x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Le problème (4.1.7) peut être formulé sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - Au(t) = 0 & 0 < t < 1, 0 < y < 1 \\ u(1) = 0, \quad u(\tau) = h(x) \end{cases} \quad (4.1.8)$$

où l'opérateur linéaire :

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H = \mathcal{L}_2(0, \pi) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, 1)$$

est défini par :

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.1.9)$$

avec

$$D(A) = H^2(]0, 1[) \cap H_0^1(]0, 1[). \quad (4.1.10)$$

Il est facile de montrer que l'opérateur A est auto-adjoint défini positif avec un spectre discret $\sigma(A) = \{\lambda_n, n \geq 1\}$.

Nous notons par $\{e_n, n \geq 1\}$ telle que :

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = (n\pi)^2, \quad e_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1.11)$$

la base propre orthonormée de H , associée à l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_n, n \geq 1\}$.

4.2 Résultats préliminaires fondamentaux

Si $B \in \mathcal{L}(H)$, soit $N(B)$ son noyau, $R(B)$ son image, et soit $\{E_\lambda, \lambda \geq \gamma > 0\}$ la résolution spectrale de l'identité associée à A :

$$S(t) = \exp(-t\sqrt{A}) = \int_{\gamma}^{+\infty} \exp(-t\sqrt{\lambda}) dE_\lambda \in \mathcal{L}(H), t \geq 0$$

le C_0 -semi groupe généré par $-\sqrt{A}$.

les propriétés de base de $S(t)$ sont données dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. ([64] Chap. 2, théorème 6.13, p.74)

Pour cette famille d'opérateurs, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\|s(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$
2. la fonction $t \rightarrow s(t)$, $t > 0$ est analytique
3. pour tout réel $r \geq 0$ et $t > 0$, l'opérateur $s(t) \in \mathcal{L}(H, D(A^r))$;
4. pour tout entier $k \geq 0$ et $t > 0$, $\|s^{(k)}(t)\| = \|A^{\frac{k}{2}} s(t)\| \leq c(k) t^{-k}$
5. pour tout $x \in D(A^r)$, $r \geq 0$ nous avons $s(t)A^r x = A^r s(t)x$

Théorème 4.2.2.

Pour tout $t > 0$, l'opérateur $S(t)$ est auto-adjoint injectif et à image dense alors

$$S(t) = S(t)^*, N(S(t)) = \{0\} \text{ et } \overline{R(S(t))} = H.$$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} S(t) &= \exp(-t\sqrt{A}) \text{ alors } S(t)^* = (\exp(-t\sqrt{A}))^* = \exp(-t(\sqrt{A})^*) = \exp(-t\sqrt{A^*}) \\ &= \exp(-t\sqrt{A}) \end{aligned}$$

car $A = A^*$. D'ou

$$S(t) = S(t)^*$$

Montrons que $N(S(t)) = \{0\}$

Soit $t_0 > 0$ et $x \in N(S(t_0))$. Alors $S(t_0)x = 0$, ce qui implique que $S(t)S(t_0)x = S(t+t_0)x = 0$ pour tout $t > 0$.

$S(t+t_0)x$ est analytique, donc par prolongement $S(t)x = 0$ pour tout $t > 0$.

De la représentation

$$R(\lambda; A)x = (A + \lambda)^{-1} x = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) S(t)x dt = 0$$

et de la bijectivité de $R(\lambda; A)x$, on a

$x = 0 \Rightarrow N(S(t)) = \{0\}$ pour tout $t > 0$.

comme $N(S^*(t)) = R(S(t))^\perp$ et $N(S^*(t)) = N(S(t)) = \{0\}$, alors $\overline{R(S(t))} = N(S^*(t))^\perp = H$

Considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v - Av(t) &= 0, & 0 \leq t \leq T \\ v(0) &= \psi, \quad v(T) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Définition 4.2.1. La fonction $v \in C^1([0, T]; H)$ est dite solution classique de l'équation (4.2.1) si cette fonction est deux fois continûment différentiable sur l'intervalle $]0, T[$ et $v(t) \in D(A)$, pour tout $t \in]0, T[$ et vérifie l'équation (4.2.1).

Théorème 4.2.3. (cf. Prilepko [67], p. 366-373.)

Le problème de Dirichlet (4.2.1) admet une solution unique classique si et seulement si $\psi \in D(A^{\frac{1}{2}})$ et sa solution est représentée par :

$$\begin{aligned} v(t) &= R(t)\psi = (I - \exp(-2t\sqrt{A}))^{-1} (\exp(-t\sqrt{A}) - \exp(-(2T-t)\sqrt{A}))\psi \\ &= \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\sinh(T\sqrt{\lambda})} dE_{\lambda}\psi \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Lemme 4.2.1. (voir Prilepko [67], p.502) (Théorème de Picard généralisé)

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert H et E_{λ} la résolution spectrale de l'identité. Supposons en outre que $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'ensemble des zéros de g est vide ou contient seulement des points isolés, alors l'équation :

$$g(A)x = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dE_{\lambda}x = y, \quad x, y \in H \quad (4.2.3)$$

est résoluble si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^{-2} d\|E_{\lambda}y\|^2 < \infty \quad (4.2.4)$$

de plus

$$N(g(A)) = \{0\} \Leftrightarrow \sigma_p(A) \cap \{t \in \mathbb{R} : g(t) = 0\} = \emptyset.$$

On définit :

$$C_\theta(A) = \left\{ \xi \in H : \|\xi\|_{C_\theta}^2 = \int_\gamma^\infty \exp(2\theta\tau\sqrt{\lambda}) d\|E_\lambda \xi\|^2 < +\infty \right\}, \theta \geq 1 \quad (4.2.5)$$

De la définition de $C_\theta(A)$ on a les inclusions topologiques suivantes :

$$C_{\theta_2}(A) \subset C_{\theta_1}(A), \theta_2 \geq \theta_1$$

Ces ensembles sont appelés les classes admissibles. Si $\theta = 1$ on trouve $C_1(A) = R(K)$.

4.3 Analyse du problème

Soit $h \in H$, considérons l'équation opératorielle suivante :

$$H \longrightarrow C([0, T], H) \longrightarrow H$$

$$\varphi \longrightarrow u(t) = R(t)\varphi \longrightarrow B(u) = h \quad (4.3.1)$$

le problème inverse (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) est équivalent à :

$$K\varphi = \chi(A)\varphi = \sinh((T - \tau)\sqrt{A}) \sinh(T\sqrt{A})^{-1} \varphi = h \quad (4.3.2)$$

Définition 4.3.1. La solution $u(t) = R(t)\varphi$ correspondante à un élément $\varphi \in H$, est appelée solution généralisée de l'équation (4.1.1). Si de plus $\varphi \in D(A^{\frac{1}{2}})$, alors la solution est dite classique.

Définition 4.3.2. La solution généralisée du problème (4.1.1) est définie par la fonction

$$u(t) = R(t)\varphi, \quad (4.3.3)$$

correspondante à l'élément $\varphi \in H$ et satisfaisant la condition (4.1.2).

Définition 4.3.3. Nous dirons que le problème (4.3.2) est bien posé dans le sens de Hadamard, s'il a une solution unique $\varphi = K^{-1}h$ pour tout $h \in H$ et $\|K^{-1}h\| \leq M\|h\|$.

Théorème 4.3.1. La fonction $u(t) = R(t)\varphi$ est solution du problème (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) si et seulement si le couple (φ, h) satisfait l'équation (4.3.2)

Preuve.

$$K\varphi = \chi(A)\varphi = \sinh((T - \tau)\sqrt{A}) \left[\sinh(T\sqrt{A}) \right]^{-1} \varphi = h$$

supposons que $u(t) = R(t)\varphi$ est solution du problème (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) alors

$$u(t) = R(t)\varphi = \sinh((T - t)\sqrt{A}) \left[\sinh(T\sqrt{A}) \right]^{-1} \varphi$$

et

$$u(t) \text{ vérifie (4.1.2) et (4.1.3)}$$

donc

$$u(0) = R(0)\varphi = \varphi$$

et

$$u(\tau) = R(\tau)\varphi = \sinh\left((T-\tau)\sqrt{A}\right)\left[\sinh\left(T\sqrt{A}\right)\right]^{-1}\varphi = h$$

d'où (φ, h) vérifie que (4.3.2).

Supposons que (φ, h) vérifie (4.3.2) alors :

$$u(t) = R(t)\varphi = \sinh\left((T-t)\sqrt{A}\right)\left[\sinh\left(T\sqrt{A}\right)\right]^{-1}\varphi.$$

Montrons que $u(t) = R(t)\varphi$ est solution du problème (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) (φ, h) vérifie (4.3.2) implique que

$$K\varphi = h$$

et

$$R(\tau)\varphi = \sinh\left((T-\tau)\sqrt{A}\right)\left[\sinh\left(T\sqrt{A}\right)\right]^{-1}\varphi = K\varphi = h$$

donc

$$u(\tau) = h$$

et

$$R(0)\varphi = \sinh\left(T\sqrt{A}\right)\left[\sinh\left(T\sqrt{A}\right)\right]^{-1}\varphi = \varphi$$

d'où $u(t)$ vérifie (4.1.2) et (4.1.3), de plus

$$u'' = A \sinh\left((T-t)\sqrt{A}\right)\left[\sinh\left(T\sqrt{A}\right)\right]^{-1}\varphi = A[R(t)\varphi] = Au(t)$$

donc

$$u'' - Au(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

ce qui permet de dire que $u(t)$ satisfait (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3)

Caractère mal posé du problème inverse(4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3):

La résolution de l'équation opératorielle (4.3.2) est l'instrument principal dans l'étude du problème (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3).

Considérons l'équation (4.3.2). En utilisant la méthode de diagonalisation à l'aide de l'intégrale Hilbertienne, l'opérateur de l'équation (4.3.2) prend la forme :

$$\hat{K}(\lambda)\hat{\varphi} = \chi(\lambda)\hat{\varphi} = \hat{h} \tag{4.3.4}$$

où

$$\chi(\lambda) = \frac{\sinh((T - \tau)\sqrt{\lambda})}{\sinh(T\sqrt{\lambda})}$$

qui est connue comme était la fonction caractéristique du problème (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3).

Pour la suite de notre étude, nous avons besoin de connaître exactement l'ensemble admissible pour le quel le problème (4.3.4) a une solution. Les théorèmes suivants donnent une réponse à cette question.

Théorème 4.3.2.

L'opérateur K est auto adjoint ($K = K^*$) injectif ($N(K) = \{0\}$) et à image dense ($\overline{R(K)} = H$).

Preuve. On a :

$$K\varphi = \chi(A)\varphi = \sinh((T - \tau)\sqrt{A})[\sinh(T\sqrt{A})]^{-1}\varphi = h$$

$K^*\varphi = \bar{\chi}(A^*)\varphi = \sinh((T - \tau)\sqrt{A^*})[\sinh(T\sqrt{A^*})]^{-1}\varphi = h$, comme $A = A^*$ et χ est réelle, alors :

$$K^*\varphi = \sinh((T - \tau)\sqrt{A})[\sinh(T\sqrt{A})]^{-1}\varphi = h$$

le semi groupe $s(t) = \exp(-T\sqrt{A})$ est auto-adjoint, d'où :

$$K^*\varphi = R^*(\tau)\varphi = \chi(A^*)\varphi = R(\tau)\varphi = \chi(A)\varphi = K\varphi$$

$$\Rightarrow K = K^*$$

d'après le lemme (4.2)

$$g(A)\varphi = h, \quad h \in H, \quad \varphi \in H$$

donc

$$\chi(A)\varphi = K\varphi = h$$

cette équation est résoluble si

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi(\lambda)|^{-2} d\|E_\lambda h\|^2 < \infty$$

alors si $h = 0$ on a :

$$\chi(A)\varphi = 0 \Rightarrow K\varphi = 0$$

d'où

$$\varphi \in N(\chi(A)) = N(K)$$

d'après le lemme (4.2)

$$N(K) = \{0\} \iff \sigma_p \cap \{t \in \mathbb{R}, \chi(t) = 0\} = \emptyset$$

soit

$$\chi(t) = \sinh((T - \tau)\sqrt{t}) \sinh(T\sqrt{t})^{-1} = 0$$

$\chi(t) > 0$ pour $t > 0$

$$O(\chi(t)) = \{t \in \mathbb{R}_+^* : \chi(t) = 0\} \Rightarrow O(\chi(t)) = \emptyset$$

alors

$$\sigma_p(A) \cap \{t \in \mathbb{R}, \chi(t) = 0\} = \emptyset$$

donc

$$N(\chi(A)) = N(K) = \{0\}$$

$$\overline{R(K)} = N(K^*)^\perp = N(K)^\perp = H$$

En appliquant le lemme (4.2) et le théorème(4.3), nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.3.3. *Le problème (4.3.4) est équivalent au problème (4.3.2), et qu'il est résoluble si et seulement si*

$$h \in C_1(A)$$

et

$$\varphi = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T - \tau)\sqrt{\lambda})} dE_\lambda h \quad (4.3.5)$$

On note ici que le problème (4.3.2) est mal-posé d'où (4.1.1),(4.1.2), (4.1.3) est mal-posé, ceci découle du comportement des hautes fréquences

$$\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T - \tau)\sqrt{\lambda})} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} +\infty \quad (4.3.6)$$

Preuve. Supposons que

$$\text{le problème (4.3.4)} \approx \text{problème (4.3.2)} \Leftrightarrow \chi(A)\varphi = h \quad (4.3.7)$$

cette équation est résoluble si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi(\lambda)|^{-2} d\|E_\lambda h\|^2 < \infty$$

(d'après le lemme (4.2) et le théorème (4.3)) on a :

$$N(\chi(A)) = N(K) = \{0\} \text{ et } \sigma_p \cap \{t \in \mathbb{R}, \chi(t) = 0\} = \emptyset$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\chi(\lambda)|^{-2} d\|E_\lambda h\|^2 &= \int_{\gamma}^{+\infty} \left| \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda}) [\sinh(T\sqrt{\lambda})]^{-1} \right|^{-2} d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\leq \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\exp(-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}) \exp(2T\sqrt{\lambda})}{[1 - \exp(-2(T-\tau)\sqrt{\gamma})]^2} d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\leq \left[\int_{\gamma}^{+\infty} \exp(2T\sqrt{\lambda}) d\|E_\lambda h\|^2 \right] \frac{\exp(-2(T-\tau)\sqrt{\gamma})}{[1 - \exp(-2(T-\tau)\sqrt{\gamma})]^2} \\ &\leq c \|h\|_{C_1(A)}^2 < +\infty \end{aligned}$$

ce qui implique que (4.3.7) est résoluble, alors les deux problèmes (4.3.2) et (4.3.4) est résoluble. Montrons que $h \in C_1(A)$

on a

$$(4.3.4) \simeq (4.3.2) \Leftrightarrow \chi(A)\varphi = h \text{ résoluble alors } \int_{\mathbb{R}} |\chi(\lambda)|^{-2} d\|E_\lambda h\|^2 < \infty$$

Calculons

$$\begin{aligned} \|h\|_{C_1(A)}^2 &= \int_{\gamma}^{+\infty} \exp(2\tau\sqrt{\lambda}) d\|E_\lambda h\|^2 = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\chi^2(\lambda)}{\chi^2(\lambda)} \exp(2\tau\sqrt{\lambda}) d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\leq \int_{\gamma}^{+\infty} \chi^{-2}(\lambda) \frac{\exp(2\tau\sqrt{\lambda}) \exp(2(T-\tau)\sqrt{\lambda}) [1 - \exp(-2(T-\tau)\sqrt{\lambda})]^2}{\exp(2T\sqrt{\lambda}) [1 - \exp(-2T\sqrt{\lambda})]^2} d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\leq \int_{\gamma}^{+\infty} \chi^{-2}(\lambda) \frac{[1 - \exp(-2(T-\tau)\sqrt{\lambda})]^2}{[1 - \exp(-2T\sqrt{\lambda})]^2} d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\leq \frac{1}{[1 - \exp(-2T\sqrt{\gamma})]^2} \int_{\gamma}^{+\infty} |\chi^{-2}(\lambda)| d\|E_\lambda h\|^2 < +\infty \end{aligned}$$

D'où $h \in C_1(A)$, et on a

$$\chi^{-1}(A)h = \varphi = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} dE_{\lambda}h$$

$$\varphi = K^{-1}h$$

$$\frac{1}{\chi(\lambda)} = \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty \quad (4.3.8)$$

Ce qui montre que K^{-1} est non borné

4.4 Approximation et stabilisation

La donnée h est basée sur l'observation (physique) et n'est pas connue avec exactitude complète, mais elle est étiquetée l'erreur δ , $\|h - h_{\delta}\| \leq \delta$. La solution (si elle existe) ne dépend pas continûment des données.

4.4.1 Description de la méthode

Étape 1 : Soit $u_{\alpha}(t)$ la solution du problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_{\alpha}(t) - Au_{\alpha}(t) = 0 \\ \alpha \sqrt{A}^p u_{\alpha}(0) + u_{\alpha}(\tau) = h, \\ u_{\alpha}(T) = 0, \end{cases} \quad (P_{\alpha})$$

où $\alpha > 0$

Étape 2 : Nous montrons que

$$\|B(u_{\alpha}) - h\| = \|u_{\alpha}(\tau) - h\| \longrightarrow 0, \alpha \longrightarrow 0 \quad (4.4.1)$$

Théorème 4.4.1. Pour tout $h \in H$, la fonction

$$u_{\alpha}(t) = \sinh((T-t)\sqrt{A}) \left[\alpha \sqrt{A}^p \sinh(T\sqrt{A}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{A}) \right]^{-1} h \quad (4.4.2)$$

$$= \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\alpha \sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} dE_{\lambda}h \quad (4.4.3)$$

est la solution unique du problème (P_{α}) et elle dépend continûment des données.

Preuve. Pour montrer la dépendance continue de u_{α} de h , on calcule

$$\|u_\alpha(t)\|^2 = \int_{\gamma}^{+\infty} \left(\frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right)^2 d\|E_\lambda h\|^2 \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{[\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})]^2}{[\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})]^2} d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\int_{\gamma}^{+\infty} [H_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

où

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda) &= \frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \\ &= \frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\left[\frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} + 1 \right] \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

comme

$$\begin{aligned} \frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} &\leq \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \\ &= \frac{e^{T\sqrt{\lambda}} [1 - e^{-2T\sqrt{\lambda}}]}{e^{(T-\tau)\sqrt{\lambda}} [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}]} \\ &\leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}]} \end{aligned}$$

$\lambda \geq \gamma$ implique que $e^{(T-\tau)\sqrt{\lambda}} \geq e^{(T-\tau)\sqrt{\gamma}}$ alors $1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}} \geq 1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}$

d'où $\frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}} \leq \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$

donc $\frac{sh(T\sqrt{\lambda})}{sh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$

alors

$$H_\alpha(\lambda) \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{\left[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}\right] \left[\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}} + 1\right]} = \tilde{H}_\alpha(\lambda) \quad (4.4.7)$$

$\sup_{\lambda \geq \gamma} \tilde{H}_\alpha(\lambda) \leq \max\{A, B\}$ où

$$\begin{cases} A = \sup_{\gamma \leq \lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}_\alpha(\lambda), & B = \sup_{\lambda \geq \lambda^*} \tilde{H}_\alpha(\lambda) \\ \sqrt{\lambda^*} = \frac{1}{p\tau} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \end{cases} \quad (4.4.8)$$

si $\lambda \leq \lambda^*$

$$\tilde{H}_\alpha(\lambda) \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda^*}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} \quad (4.4.9)$$

ce qui implique que

$$\sup_{\gamma \leq \lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}_\alpha(\lambda) \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda^*}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} = \frac{e^{\frac{1}{p} \ln(\frac{1}{\alpha})}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$$

d'où

$$\sup_{\gamma \leq \lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}_\alpha(\lambda) \leq C_1 \frac{1}{[\alpha]^{\frac{1}{p}}} \quad (4.4.10)$$

où $C_1 = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$.
si $\lambda \geq \lambda^*$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\alpha(\lambda) &\leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{\left[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}\right] \alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}} \\ &= \frac{1}{\left[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}\right] \alpha\sqrt{\lambda}^p} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

alors

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \geq \lambda^*} \tilde{H}_\alpha(\lambda) &\leq \frac{1}{\left[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}\right]} \frac{1}{\alpha\sqrt{\lambda^*}^p} \\ &= \frac{1}{(p\tau)^p \left[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}\right]} \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^p} \\ &= c_2 \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^p} \end{aligned}$$

$$\text{où } c_2 = \frac{1}{(p\tau)^p [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$$

$$\text{Posons } c_3 = \max(c_1, c_2), \quad c_1 = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{(p\tau)^p [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$$

pour $p > 0$, $0 < \alpha < 1$, on a

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^p} = \alpha^{-(1-\frac{1}{p})} \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^{-p} = \mu(\alpha)$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(\alpha) = +\infty$$

ce qui est équivalent à

$$\varepsilon = 1, \exists \alpha_0 \quad \text{tel que} \quad \mu(\alpha) \geq \varepsilon = 1$$

$$\text{D'où on déduit} \quad \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^p}$$

donc

$$\max\{A, B\} = c_3 \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^p}$$

alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t)\| \leq \|u_\alpha(0)\| \leq c_3 \|h\|$$

ce qui permet que la solution du problème (P_α) dépend continûment des données.

Théorème 4.4.2. *Pour tout $h \in H$, nous avons*

$$\|u_\alpha(\tau) - h\| \rightarrow 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0 \quad (4.4.12)$$

Preuve. Soit $u(\tau) = h$

$$\begin{aligned} \text{et } u_\alpha(\tau) &= \sinh((T-\tau)\sqrt{A}) \left[\alpha \sqrt{A}^p \sinh(T\sqrt{A}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{A}) \right]^{-1} \\ &= \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})}{\alpha \sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} dE_\lambda h \end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
 \|u(\tau) - u_\alpha(\tau)\|^2 &= \int_{\gamma}^{+\infty} \left[1 - \frac{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})}{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]^2 d\|E_\lambda h\|^2 \\
 &= \int_{\gamma}^{+\infty} \left[\frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda})}{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]^2 d\|E_\lambda h\|^2 \\
 &= \int_{\gamma}^{+\infty} [G_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 G_\alpha(\lambda) &= \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda})}{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \\
 &= \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda})}{\left[1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right] \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \\
 &\leq 1
 \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons N tel que $\int_N^{+\infty} d\|E_\lambda h\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

alors

$$\|u(\tau) - u_\alpha(\tau)\|^2 = \int_{\gamma}^N [G_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 + \int_N^{+\infty} [G_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2$$

comme $G_\alpha(\lambda) \leq 1$ on a $\int_N^{+\infty} [G_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$

donc

$$\|u(\tau) - u_\alpha(\tau)\|^2 \leq \int_{\gamma}^N [G_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a $\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}]}$

si $\gamma \leq \lambda \leq \lambda_N$ alors $\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$

et $\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \geq e^{\tau\sqrt{\lambda}}$ ce qui implique que $1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \geq 1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}$

d'où $\frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p}{1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})}} \leq \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p}{1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}}$

donc

$$\begin{aligned} G_\alpha(\lambda) &\leq \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}][1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}]} \\ &\leq \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}} = \tilde{G}_\alpha(\lambda) \end{aligned}$$

si $\gamma \leq \lambda \leq \lambda_N$ alors

$$\tilde{G}_\alpha(\lambda) \leq \frac{\alpha\sqrt{\lambda_N}^p e^{\tau\sqrt{\lambda_N}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} = \alpha B_\gamma \sqrt{\lambda_N}^p e^{\tau\sqrt{\lambda_N}} \quad (4.4.13)$$

où $B_\gamma = \frac{1}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$

D'où

$$\begin{aligned} \int_\gamma^N [G_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 &\leq [\alpha B_\gamma \sqrt{\lambda_N}^p e^{\tau\sqrt{\lambda_N}}]^2 \int_\gamma^N d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\leq [\alpha B_\gamma \sqrt{\lambda_N}^p e^{\tau\sqrt{\lambda_N}}]^2 \|h\|^2 \end{aligned}$$

En prenant α tel que $[\alpha B_\gamma \sqrt{\lambda_N}^p e^{\tau\sqrt{\lambda_N}}]^2 \|h\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ on obtient $\alpha < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} B_\gamma \sqrt{\lambda_N}^p e^{\tau\sqrt{\lambda_N}}}$

donc

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u_\alpha(\tau)\|^2 &\leq [\alpha B_\gamma \sqrt{\lambda_N}^p e^{\tau\sqrt{\lambda_N}}]^2 \|h\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

d'où

$$\|u(\tau) - u_\alpha(\tau)\| \leq \varepsilon \quad (4.4.14)$$

ce qui implique que

$$\|u(\tau) - u_\alpha(\tau)\| \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

Théorème 4.4.3. Pour tout $u(0) \in C_1(A)$, nous avons :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \|u_\alpha(0) - u(0)\| \rightarrow 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

Preuve. On a

$$u(0) = \left[\sinh(T\sqrt{A}) \right] \left[\sinh((T-\tau)\sqrt{A}) \right]^{-1}$$

$$u_\alpha(0) = \left[\sinh((T-t)\sqrt{A}) \right] \left[\alpha(\sqrt{A})^p \sinh(T\sqrt{A}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{A}) \right]^{-1}$$

On calcule

$$\|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 = \int_{\gamma}^{+\infty} \left[\frac{\alpha(\sqrt{\lambda})^p \left[\sinh(T\sqrt{\lambda}) \right]^2}{\left[\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda}) \right] \left[\alpha(\sqrt{\lambda})^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda}) \right]} \right]^2 d\|E_\lambda h\|^2$$

$$\begin{aligned} \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &= \int_{\gamma}^{+\infty} [F_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 \\ &= \int_{\gamma}^N [F_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 + \int_N^{+\infty} [F_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

où

$$F_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(\sqrt{\lambda})^p \left[\sinh(T\sqrt{\lambda}) \right]^2}{\left[\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda}) \right] \left[\alpha(\sqrt{\lambda})^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda}) \right]} \quad (4.4.16)$$

$$= \frac{\alpha(\sqrt{\lambda})^p \left[\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]^2}{\left[1 + \alpha(\sqrt{\lambda})^p \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]} \quad (4.4.17)$$

comme $\frac{\alpha(\sqrt{\lambda})^p}{\left[1 + \alpha(\sqrt{\lambda})^p \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]} \left[\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right] \leq 1$ alors

$$F_\alpha(\lambda) \leq \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \quad (4.4.18)$$

$u(0) \in H$ implique que $\|u(0)\|^2 < +\infty$ donc $\int_{\gamma}^{+\infty} \left[\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]^2 d\|E_{\lambda}h\|^2 < +\infty$

Choisissons $\varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\int_N^{+\infty} d\|E_{\lambda}u(0)\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ d'où

$$\int_N^{+\infty} [F_{\alpha}(\lambda)]^2 d\|E_{\lambda}h\|^2 \leq \int_N^{+\infty} \left[\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]^2 d\|E_{\lambda}h\|^2 \quad (4.4.19)$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (4.4.20)$$

On a $\frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p}{1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})}} \leq \alpha\sqrt{\lambda}^p$, $\lambda \leq \gamma$ nous donne $\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}}$
 $\leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$

et si $\gamma \leq \lambda \leq \lambda_N$ alors

$$F_{\alpha}(\lambda) \leq \frac{\alpha\sqrt{\lambda_N}^p e^{2\tau\sqrt{\lambda_N}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]^2} \quad (4.4.21)$$

de (4.4.21) on obtient

$$\int_{\gamma}^N [F_{\alpha}(\lambda)]^2 d\|E_{\lambda}h\|^2 \leq \int_{\gamma}^N \left[\frac{\alpha\sqrt{\lambda_N}^p e^{2\tau\sqrt{\lambda_N}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]^2} \right]^2 d\|E_{\lambda}h\|^2 \quad (4.4.22)$$

$$\leq \left[\frac{\alpha\sqrt{\lambda_N}^p e^{2\tau\sqrt{\lambda_N}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]^2} \right]^2 \int_{\gamma}^N d\|E_{\lambda}h\|^2$$

$$\leq \left[\frac{\alpha\sqrt{\lambda_N}^p e^{2\tau\sqrt{\lambda_N}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]^2} \right]^2 \|h\|^2 \quad (4.4.23)$$

En prenant α tel que $\frac{\alpha\sqrt{\lambda_N}^p e^{2\tau\sqrt{\lambda_N}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

En combinant (4.4.15), (4.4.19), (4.4.22) et (4.4.23) on obtient

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \left[\frac{\alpha \sqrt{\lambda_N}^p e^{2\tau\sqrt{\lambda_N}}}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]^2} \right]^2 \|h\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}$$

d'où

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

Ce qui implique que

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| \rightarrow 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0.$$

Montrons que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \|u_\alpha(0) - u(0)\|$$

On a

$$u(t) = [\sinh((T-t)\sqrt{A})][\sinh((T-\tau)\sqrt{A})]^{-1} h$$

$$u_\alpha(t) = [\sinh((T-t)\sqrt{A})][\alpha\sqrt{A}^p \sinh(T\sqrt{A}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{A})]^{-1} h$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_\alpha(t)\|^2 &= \int_{\gamma}^{+\infty} \left[\frac{\alpha \sqrt{\lambda}^p [\sinh(T\sqrt{\lambda})][\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})]}{[\alpha(\sqrt{\lambda})^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})][\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})]} \right]^2 d\|E_\lambda h\|^2 \\ &= \int_{\gamma}^{+\infty} [H_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda) &= \frac{\alpha \sqrt{\lambda}^p [\sinh(T\sqrt{\lambda})][\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})]}{[\alpha \sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})][\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})]} \\ &= \frac{\alpha \sqrt{\lambda}^p [\sinh(T\sqrt{\lambda})]^2 \frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\sinh(T\sqrt{\lambda})}}{[\alpha \sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})][\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})]} \end{aligned}$$

comme $\frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\sinh(T\sqrt{\lambda})} \leq 1$, on a

$$H_\alpha(\lambda) \leq \frac{\alpha \sqrt{\lambda}^p [\sinh(T\sqrt{\lambda})]^2}{[\alpha \sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})][\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})]} = F_\alpha(\lambda)$$

d'où

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 \leq \int_\gamma^{+\infty} [F_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda h\|^2 = \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2$$

alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \|u_\alpha(0) - u(0)\|$$

Théorème 4.4.4. Si $u(0) \in D(A^{\frac{\theta}{2}})$, $\theta > 1$, $p \leq \theta$ et

$$\|\sqrt{A}^p u(0)\| \leq E \quad (4.4.24)$$

alors nous avons l'estimation suivante :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq c_4 [\alpha]^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|E\| \quad (4.4.25)$$

où $c_4 = c_4 = c_3 \sqrt{\gamma}^{(\theta-p)(\frac{1}{\theta}-1)} = \max(c_1, c_2) \sqrt{\gamma}^{(\theta-p)(\frac{1}{\theta}-1)}$, $c_1 = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} = B_\gamma$, et $c_2 = \frac{1}{(p\tau)^p [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$.

Preuve. On a

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 \leq \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 \quad (4.4.26)$$

$$= \int_\gamma^{+\infty} \left[\frac{\alpha (\sqrt{\lambda})^p \left[\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]}{\left[1 + \alpha (\sqrt{\lambda})^p \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]} \right]^2 d\|E_\lambda u(0)\|^2 \quad (4.4.27)$$

comme $e^{\tau\sqrt{\lambda}} \leq \frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}}$ et si $\lambda \geq \gamma$ alors

$$\frac{\sinh(T\sqrt{\lambda})}{\sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \leq \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\lambda}}} = B_\gamma e^{\tau\sqrt{\lambda}}$$

où $B_\gamma = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$
d'où

$$\|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 \leq \int_\gamma^{+\infty} \left[B_\gamma \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{[1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}]} \right]^2 d\|E_\lambda u(0)\|^2 \quad (4.4.28)$$

$$= \int_\gamma^{+\infty} [\tilde{H}_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda u(0)\|^2 \quad (4.4.29)$$

où

$$\tilde{H}_\alpha(\lambda) = B_\gamma \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{[1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}]} \quad (4.4.30)$$

$$\begin{aligned} &= B_\gamma \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda}^{-\theta} \sqrt{\lambda}^\theta}{[1 + \alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}]} \\ &= B_\gamma \frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda}^\theta}{[\sqrt{\lambda}^\theta + \alpha\sqrt{\lambda}^\theta \sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}]} \\ &= B_\gamma \frac{\alpha e^{\tau\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda}^\theta}{[\sqrt{\lambda}^{\theta-p} + \alpha\sqrt{\lambda}^\theta e^{\tau\sqrt{\lambda}}]} \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

si $p \leq \theta$ et $\lambda \geq \gamma$ alors

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\alpha(\lambda) &\leq B_\gamma \frac{\alpha e^{\tau\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda}^\theta}{[\sqrt{\gamma}^{\theta-p} + \alpha\sqrt{\lambda}^\theta e^{\tau\sqrt{\lambda}}]} \\ &= B_\gamma \frac{\alpha e^{\tau\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda}^\theta}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p} \left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p}} \sqrt{\lambda}^\theta e^{\tau\sqrt{\lambda}} \right]} \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

donc

$$\sup_{\lambda \geq \gamma} B_\gamma \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{\left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p}} \sqrt{\lambda}^\theta e^{\tau\sqrt{\lambda}}\right]} \leq c_3 \frac{\sqrt{\gamma}^{\frac{\theta-p}{\theta}}}{(\alpha)^{\frac{1}{\theta}}} \quad (4.4.33)$$

où $c_3 = \max(c_1, c_2)$, $c_1 = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} = B_\gamma$, et $c_2 = \frac{1}{(p\tau)^p [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$.

En combinant (4.4.26), (4.4.29), (4.4.32) et (4.4.33) on obtient

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 &\leq \int_\gamma^{+\infty} [\tilde{H}_\alpha(\lambda)]^2 d\|E_\lambda u(0)\|^2 \\ &\leq \int_\gamma^{+\infty} \left[B_\gamma \frac{\alpha e^{\tau\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda}^\theta}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p} \left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p}} \sqrt{\lambda}^\theta e^{\tau\sqrt{\lambda}}\right]} \right]^2 d\|E_\lambda u(0)\|^2 \\ &\leq \int_\gamma^{+\infty} \left[B_\gamma \frac{\alpha e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p} \left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p}} \sqrt{\lambda}^\theta e^{\tau\sqrt{\lambda}}\right]} \right]^2 d\|E_\lambda \lambda^{\frac{\theta}{2}} u(0)\|^2 \\ &\leq \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}^{(\theta-p)}} \sup_{\lambda \geq \gamma} B_\gamma \frac{e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{\left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}^{\theta-p}} \sqrt{\lambda}^\theta e^{\tau\sqrt{\lambda}}\right]} \right]^2 \int_\gamma^{+\infty} d\|E_\lambda \lambda^{\frac{\theta}{2}} u(0)\|^2 \\ &\leq \left(c_3 \sqrt{\gamma}^{(\theta-p)\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} (\alpha)^{1-\frac{1}{\theta}} \right)^2 \|A^{\frac{\theta}{2}} u(0)\|^2 \\ &\leq c_4 \left[(\alpha)^{1-\frac{1}{\theta}} \right]^2 \|A^{\frac{\theta}{2}} u(0)\|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq c_4 [\alpha]^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|E\| \quad (4.4.34)$$

où $c_4 = c_3 \sqrt{\gamma}^{(\theta-p)\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} = \max(c_1, c_2) \sqrt{\gamma}^{(\theta-p)\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}$, $c_1 = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}} = B_\gamma$,

et

$$c_2 = \frac{1}{(p\tau)^p [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$$

Théorème 4.4.5. Si $h \in C_{1+\theta}(A)$, nous avons

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \|u_\alpha(0) - u(0)\| \leq (B_\gamma)^4 \left[\left(\frac{k_5}{\left[\ln \left(\frac{k_6}{\alpha} \right) \right]} \right)^\theta \right]^2 \|h\|_{C_{\theta+1}}^2$$

où $k_5 = \frac{\theta(p+\tau)}{\tau}$, $k_6 = \frac{(p+\tau)^\theta}{\theta}$ et $B_\gamma = \frac{1}{[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]^2}$.

Preuve. Calculons

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 \leq \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \tag{4.4.35}$$

$$= \int_\gamma^{+\infty} [F_\alpha(\lambda)]^2 e^{-2\theta\tau\sqrt{\lambda}} e^{2\theta\tau\sqrt{\lambda}} d\|E_\lambda h\|^2 \tag{4.4.36}$$

$$\leq [B_\gamma]^4 \int_\gamma^{+\infty} \left[\frac{\alpha\sqrt{\lambda}^p e^{\tau\sqrt{\lambda}}}{[\alpha\sqrt{\lambda}^p + e^{-\tau\sqrt{\lambda}}]} e^{-\theta\tau\sqrt{\lambda}} e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}} \right]^2 d\|E_\lambda h\|^2$$

$$= [B_\gamma]^4 \int_\gamma^{+\infty} \left[\frac{\alpha(\sqrt{\lambda})^p e^{(\theta+1)\tau\sqrt{\lambda}}}{[\alpha(\sqrt{\lambda})^p e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}} + e^{-\tau\sqrt{\lambda}} e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}}]} \right]^2 d\|E_\lambda h\|^2$$

$$= [B_\gamma]^4 \int_\gamma^{+\infty} [\Phi_\alpha(\lambda)]^2 e^{2(\theta+1)\tau\sqrt{\lambda}} d\|E_\lambda h\|^2 \tag{4.4.37}$$

où

$$\Phi_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(\sqrt{\lambda})^p}{[\alpha(\sqrt{\lambda})^p e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}} + e^{-\tau\sqrt{\lambda}} e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}}]} \tag{4.4.38}$$

$$= \frac{\alpha}{[\alpha e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}} + e^{-\tau\sqrt{\lambda}} (\sqrt{\lambda})^{-p}]} \tag{4.4.39}$$

comme $e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}} \geq \tau^\theta \sqrt{\lambda}^\theta$ et $(\sqrt{\lambda})^{-p} \geq e^{-p\sqrt{\lambda}}$ alors

$$\frac{\alpha}{[\alpha e^{\theta\tau\sqrt{\lambda}} + e^{-\tau\sqrt{\lambda}} (\sqrt{\lambda})^{-p}]} \leq \frac{\alpha}{[\alpha \tau^\theta \sqrt{\lambda}^\theta + e^{-(p+\tau)\sqrt{\lambda}}]} \tag{4.4.40}$$

de (4.4.40) on déduit que

$$\Phi_\alpha(\lambda) \leq \frac{\alpha}{\left[\alpha \tau^\theta \sqrt{\lambda}^\theta + e^{-(p+\tau)\sqrt{\lambda}} \right]} \quad (4.4.41)$$

En combinant (4.4.35), (4.4.37), et (4.4.41) on obtient

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 &\leq [B_\gamma]^4 \int_\gamma^{+\infty} \left[\frac{\alpha}{\left[\alpha \tau^\theta \sqrt{\lambda}^\theta + e^{-(p+\tau)\sqrt{\lambda}} \right]} \right]^2 e^{2(\theta+1)\tau\sqrt{\lambda}} d\|E_\lambda h\|^2 \\ &\leq [B_\gamma]^4 (\alpha)^2 \left[\sup_{\lambda \geq \gamma} \frac{1}{\left[\alpha \tau^\theta \sqrt{\lambda}^\theta + e^{-(p+\tau)\sqrt{\lambda}} \right]} \right]^2 \int_\gamma^{+\infty} e^{2(\theta+1)\tau\sqrt{\lambda}} d\|E_\lambda h\|^2 \end{aligned}$$

d'après le lemme (2.1) on a

$$\sup_{\lambda \geq \gamma} \frac{1}{\left[\alpha \tau^\theta \sqrt{\lambda}^\theta + e^{-(p+\tau)\sqrt{\lambda}} \right]} \leq (\theta(p+\tau))^\theta \tau^{-\theta} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{\left[\ln\left(\frac{(p+\tau)^\theta}{\theta\alpha}\right) \right]} \right]^\theta$$

alors

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 &\leq (B_\gamma)^4 \left[\left(\frac{\frac{\theta(p+\tau)}{\tau}}{\left[\ln\left(\frac{(p+\tau)^\theta}{\theta\alpha}\right) \right]} \right)^{\theta-2} \right] \|h\|_{C_{\theta+1}}^2 \\ &= (B_\gamma)^4 \left[\left(\frac{k_5}{\left[\ln\left(\frac{k_6}{\alpha}\right) \right]} \right)^{\theta-2} \right] \|h\|_{C_{\theta+1}}^2 \end{aligned}$$

$$\text{où } k_5 = \frac{\theta(p+\tau)}{\tau}, k_6 = \frac{(p+\tau)^\theta}{\theta} \text{ et } B_\gamma = \frac{1}{\left[1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}} \right]^2}.$$

Nous terminons notre étude par la construction de la famille d'opérateurs régularisants de (4.1.1),(4.1.2) et (4.1.3).

Définition 4.4.1. La famille $\{R_\alpha(t), \alpha > 0, t \in [0, T]\} \subset \mathcal{L}(H)$ est dite famille d'opérateurs régularisante pour le problème (4.1.1),(4.1.2), (4.1.3) si pour tout solution $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ du (4.1.1),(4.1.2) et (4.1.3) avec la donnée φ , et pour tout $\eta > 0$, il existe un choix $\alpha(\eta) > 0$, tel que

$$\alpha(\eta) \longrightarrow 0, \eta \longrightarrow 0$$

$$\|R_{\alpha(\eta)}(t)h_\eta - u(t)\| \longrightarrow 0, \eta \longrightarrow 0 \quad (4.4.42)$$

pour tout $t \in [0, T]$ dès que h_η satisfait $\|h_\eta - h\| \leq \eta$.

Soit

$$R_\alpha(t) = \sinh((T-t)\sqrt{A}) \left[\alpha \sqrt{A}^p \sinh(T\sqrt{A}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{A}) \right]^{-1} \quad (4.4.43)$$

alors

$$R_\alpha(t) \in \mathcal{L}(H) \text{ et } \|R_\alpha(t)\| \leq c_3 \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^p} \quad (4.4.44)$$

où $c_3 = \max(c_1, c_2)$, $c_1 = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$ et $c_2 = \frac{1}{(p\tau)^p [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$

Dans ce qui suit, on montre que $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3)

Théorème 4.4.6. Si $h \in C_1(A)$, alors la condition (4.4.42) est vérifiée.

Preuve. Supposons que $h \in C_1(A)$, on a

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha(\eta)}(t)h_\eta - u(t)\| &= \|R_{\alpha(\eta)}(t)h_\eta - R_{\alpha(\eta)}(t)h + R_{\alpha(\eta)}(t)h - u(t)\| \\ &= \|R_{\alpha(\eta)}(t)(h_\eta - h) + u_{\alpha(\eta)}(t) - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\alpha(\eta)}(t)(h_\eta - h)\| + \|u_{\alpha(\eta)}(t) - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\alpha(\eta)}(t)\| \|h_\eta - h\| + \|u_{\alpha(\eta)}(t) - u(t)\| \end{aligned}$$

calculons

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha(\eta)}(t)(h_\eta - h)\|^2 &= \int_{\gamma}^{+\infty} \left[\frac{\sinh((T-t)\sqrt{\lambda})}{\alpha(\eta)\sqrt{\lambda}^p \sinh(T\sqrt{\lambda}) + \sinh((T-\tau)\sqrt{\lambda})} \right]^2 d\|E_\lambda(h_\eta - h)\|^2 \\ &\leq \left(c_3 \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^p} \right)^2 \|h_\eta - h\|^2 \end{aligned}$$

où $c_3 = \max(c_1, c_2)$, $c_1 = \frac{1}{1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}}$ et $c_2 = \frac{1}{(p\tau)^p [1 - e^{-2(T-\tau)\sqrt{\gamma}}]}$.

alors

$$\|R_{\alpha(\eta)}(t)\| \|h_\eta - h\| \leq c_3 \frac{\eta}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^p} \quad (4.4.45)$$

D'après le théorème (4.4.3) on a

$$\|u_{\alpha(\eta)}(t) - u(t)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{\alpha(\eta)}(t) - u(t)\| \leq \|u_{\alpha(\eta)}(0) - u(0)\| \rightarrow 0, \alpha(\eta) \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$$

ce qui implique que

$$\|R_{\alpha(\eta)}(t)h_\eta - u(t)\| \leq c_3 \frac{\eta}{\alpha(\eta)^{\frac{1}{p}}} + \|u_{\alpha(\eta)}(t) - u(t)\| \rightarrow 0, \alpha(\eta) \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0 \quad (4.4.46)$$

5 Régularisation d'un problème de Cauchy biparabolique abstrait par la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée

5.1 Introduction

La modélisation mathématique de la conduction thermique est basée sur l'équation linéaire classique de type parabolique :

$$L_1 u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa^2 \nabla^2 \right) u(x, t) = 0 \quad (5.1.1)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\kappa > 0$ est une constante caractérisant le milieu physique, et ∇^2 est l'opérateur de Laplace. Ce modèle souffre de certaines insuffisances de point de vue modélisation de beaucoup de problèmes pratiques. Plus précisément, la vitesse infinie des fréquences propres. Il est bien connu, que l'équation (5.1.1) ne décrit pas correctement la dynamique de la chaleur et les processus de transfert de masse et conduit à un certain nombre de paradoxes [57], [56] et [78].

Fushchich dans [38] donne une généralisation naturelle de l'équation (5.1.1) sous la forme :

$$Lu = \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u = 0 \quad (5.1.2)$$

où α_1 et α_2 sont des paramètres réels. $L_2 = L_1 L_1$ et L_1 est l'opérateur de conduction de la chaleur classique.

L'équation (5.1.2) est dite équation biparabolique de conduction de la chaleur.

L'équation (5.1.2) peut être obtenue à partir de l'équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad (5.1.3)$$

en supposant que l'énergie e et le flux q sont données par :

$$e = e_0 + c_v(u - u_0) + v\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \nabla^2 u\right) \quad (5.1.4)$$

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } u - \mu \text{grad } \psi\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \nabla^2 u\right) \quad (5.1.5)$$

où λ est le coefficient de conductivité thermique, c_v est la capacité thermique, v et μ sont des constantes non nulles, φ et ψ sont des fonctions scalaires. De toute évidence, pour $v = \mu = 0$, les relations (5.1.4)-(5.1.5) se réduisent à l'équation classique (5.1.1).

Dans les équations (5.1.4)-(5.1.5), posons $\varphi = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u$, $\psi = b\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u$, $a, b = \text{const} > 0$. Alors l'équation (5.1.5) se ramène à l'équation d'évolution suivante :

$$c_v\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u\right) + v\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(a\frac{\lambda}{c_v} + b\frac{\mu}{v}\right)\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u + \frac{\lambda}{c_v}\frac{\mu}{v}\nabla^2\nabla^2 u\right] = 0 \quad (5.1.6)$$

En affectant différentes valeurs aux paramètres a, b, μ et v dans l'équation (5.1.6), nous obtenons d'autres équations de conduction de la chaleur qui comprennent l'équation classique (5.1.1) comme cas particulier.

supposant

$$x^2 = \frac{\lambda}{c_v}, L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \kappa^2\nabla^2, \text{ et } L_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa^2\nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa^2\nabla^2\right). \quad (5.1.7)$$

Nous nous intéressons à l'équation qui se déduit de (5.1.6) et qui prend la forme (5.1.2).

5.1.1 Formulation du problème

Soit H un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$. On note par $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur H .

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto adjoint défini positif, à résolvante compacte. Dans ce cas A admet une base orthonormée formée de vecteurs propres $(\phi_n) \subset H$ associés aux valeurs propres réelles $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$, i.e.,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, n \in \mathbb{N}^*, \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, h_n = \langle h, \phi_n \rangle.$$

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de Cauchy pour l'équation biparabolique abstraite suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right)^2 u(t) = u''(t) + 2Au'(t) + A^2 u(t) = 0, \quad 0 < t < T \\ u(T) = \xi, \\ u_t(0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.1.8)$$

Notre problème inverse est de déterminer la condition de source inconnue $u(0) = f$ et la distribution de la température $u(t)$ pour $0 < t < T < \infty$.

Ce problème (5.1.8) est fortement mal posé au sens d'Hadamard, car la solution si elle existe, elle ne dépend pas continûment de la donnée.

En 2015, dans [48] est considéré ce problème et est établi un résultat de stabilité de type Hôlderien, puis est appliquée la méthode itérative de Kozlov-Mazyia; les résultats de convergence correspondant ont été donnés, mais malheureusement, le résultat de la condition de stabilité dans [48] n'est pas établi pour le cas $T = 0$.

Dans [35]; Hongwu Zhang, propose méthode de régularisation modifiée pour résoudre ce même problème inverse.

Il pose

$$f_\alpha = u_\alpha(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + T\lambda_n} \frac{e^{T\lambda_n}}{1 + \alpha\lambda_n e^{T\lambda_n}} g_n X_n, \quad g_n = \langle g, X_n \rangle$$

pour construire une approximation stable de la solution du problème.

Dans notre travail nous proposons pour l'étude de ce problème méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée. L'idée dans cette méthode est de remplacer le problème mal-posé (5.1.1) par un problème bien posé, dans lequel on perturbe la condition finale $u(T) = g$ en la remplaçant par une condition non-locale $\alpha A^r u(0) + u(T) = g$ dépendante d'un petit paramètre α .

On donne quelques estimations pour la solution du problème régularisé et on montre aussi que le problème modifié est stable et que sa solution est l'approximation de la solution exacte du problème original. Enfin, on termine par certains résultats de convergence.

5.2 Analyse du problème

5.2.1 Caractère mal posé du problème inverse et résultat de stabilité conditionnelle

Nous considérons le problème bien-posé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^2 w = \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right)^2 w(t) = w''(t) + 2Aw'(t) + A^2 w(t) = 0, \quad 0 < t < T \\ w(0) = \xi, \\ \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

où $\xi \in D(A)$.

Notons $\mathbb{H}^1 = D(A) \times H$. En désignant par $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, on définit la norme dans \mathbb{H}^1 par $\|U\|_{\mathbb{H}^1}^2 = \|Au_1\|^2 + \|u_2\|^2$.

Dans ce cadre, l'équation différentielle du second ordre (5.2.1) peut être réduite à un système de premier ordre dans l'espace de Hilbert \mathbb{H}^1 de la forme :

$$W'(t) = \mathcal{A}W(t), \quad W(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

avec

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & -2A \end{pmatrix}$$

où \mathcal{A} est un opérateur linéaire non borné de domaine $D(\mathcal{A}) = D(A^2) \times D(A)$.

On sait que \mathcal{A} est générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{\mathcal{T}(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t>0}$ dans \mathbb{H}^1 [17, Theorem 2.1], plus précisément, $\mathcal{T}(t)$ est analytique avec la forme explicite suivante :

$$\mathcal{T}(t)Z = e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{t\mathcal{B}_n} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^1,$$

où $\mathcal{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n^2 & -2\lambda_n \end{bmatrix}$. En utilisant des techniques de l'algèbre matricielle, nous pouvons donner la forme de \mathcal{B}_n comme suit

$$e^{t\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -t \lambda_n^2 e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{T}(t)Z = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -t \lambda_n^2 e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}$$

En utilisant la théorie des semi-groupes [64], nous montrons l'existence et l'unicité de la solution (mild) du problème (5.2.2).

Théorème 5.2.1. *Pour toute $W(0) \in \mathbb{H}^1$, le problème (5.2.2) admet une solution unique $W \in C^1(]0, +\infty[; \mathbb{H}^1) \cap C(]0, +\infty[; \mathbb{H}^1) \cap C^1(]0, +\infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, donnée par*

$$W(t) = \mathcal{T}(t)W(0) = \mathcal{T}(t)Z = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -t \lambda_n^2 e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}$$

En particulier, pour $W(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$W(t) = T(t)W(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -t \lambda_n^2 e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant le théorème (5.2.1), nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 5.2.1. [48] Pour toute $\xi \in \mathcal{D}(A)$, le problème 5.2.1 admet une solution unique

$w \in C^2(]0, +\infty[; H) \cap C^1(]0, +\infty[; H) \cap C(]0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(]0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap C^2(]0, +\infty[; \mathcal{D}(A^2))$
donnée par

$$w(t) = \mathcal{R}(t; A)\xi = (I + tA)e^{-tA}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + t\lambda_n)e^{-t\lambda_n} \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n.$$

Remarque 5.2.1. il est facile de vérifier que

$$\|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} (1 + t\lambda)e^{-t\lambda} \leq (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1},$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{0 \leq t \leq T} (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1} = 1.$$

5.2.2 Caractère mal posé du problème inverse (5.1.8)

Théorème 5.2.2. [59] Soit $g \in H$, La fonction

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n.$$

est la solution unique du problème (5.1.8).

Dans ce cas,

$$f = u(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + T\lambda_n} e^{T\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n.$$

A partir de cette représentation, nous voyons que $u(t)$ est instable dans $[0, T[$. Cela découle de la haute fréquence

$$\sigma(t, \lambda_n) = \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

Remarque 5.2.2. Dans le problème rétrograde parabolique classique

$$v_t + Av = 0, \quad 0 < t < T, \quad v(T) = g, \quad (5.2.3)$$

la solution unique est donnée par

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t, \lambda_n) \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad (5.2.4)$$

où

$$\theta_n(t, \lambda_n) = e^{(T-t)\lambda_n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (5.2.5)$$

Dans ce cas, les hautes fréquences $\theta_n(t, \lambda_n)$ sont égales à $e^{(T-t)\lambda_n}$ et le problème est fortement mal posé.

Dans le cas du modèle biparabolique, les fréquences sont représentée par $r_n \theta_n$, où

$$r_n = \frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n}, \quad (5.2.6)$$

est le coefficient de relaxation résultant du caractère hyperbolique du modèle biparabolique. Remarquons que

$$\frac{t}{T} \leq r_n \leq \frac{1 + t\lambda_1}{1 + T\lambda_1} \leq 1, \quad (5.2.7)$$

et

$$u(t) = R(t)v(t), \quad (5.2.8)$$

où

$$\|R(t)\| = \sup_n \{r_n\} = r_1 = \frac{1 + t\lambda_1}{1 + T\lambda_1}.$$

De cette remarque, nous observons que le degré de la position incorrecte dans le modèle biparabolique est plus relaxé comparé au cas parabolique classique.

5.2.3 Approximation et stabilisation

Dans notre travail, il est important de caractériser la classe admissible pour laquelle le problème (5.1.8) admet une solution.

Notre but est d'obtenir une estimations de la forme

$$\|u(t)\| \leq \Psi(\|g\|), \quad (5.2.9)$$

pour une certaine fonction $\Psi(\cdot)$ qui satisfait la condition $\Psi(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$.

Étant donné que le problème de la détermination de $u(t)$ à partir de la connaissance de $\{u(T) = g, u'(0) = 0\}$ est mal posé, une estimation tel (5.2.9) ne sera pas possible à moins que notre solution $u(t)$ n'appartienne à un certain sous-ensemble $M \subset H$.

Dans notre modèle, nous allons voir que nous pouvons employer la méthode de la convexité logarithmique pour identifier cet ensemble :

$$M_\rho = \{u(t) \in H : u \text{ vérifiée (5.1.8) et } \|Au(0)\| \leq \rho < \infty\}. \quad (5.2.10)$$

Théorème 5.2.3. [59] *Le problème (5.1.8) est conditionnellement bien posé sur l'ensemble*

$$M = \{u(t) \in H : \|Au(0)\| < \infty\} \quad (5.2.11)$$

si et seulement si

$$g \in \mathcal{C}^1 = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{\infty} e^{2T\lambda_n} |(h, \varphi_n)|^2 < \infty \right\}. \quad (5.2.12)$$

De plus, si $u(t) \in M_\rho$, alors nous avons la continuité Hölderienne suivante :

$$\|u(t)\| \leq \Psi(\|g\|) = k \left(\rho^{\frac{T-t}{T}} \right) \|g\|^{\frac{t}{T}}, \quad (5.2.13)$$

$$\text{où } k = \left(\frac{1 + T\lambda_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{T-t}{T}}.$$

5.2.4 Régularisation et estimations d'erreurs

Dans cette étude, nous proposons une version modifiée de la méthode des conditions aux limites auxiliaires (Q.B.V.method).

L'idée dans cette méthode est de remplacer le problème mal-posé par un problème "proche", où on perturbe la condition finale $u(T) = g$ en la remplaçant par une condition non-locale

$$\alpha A^r u(0) + u(T) = g \quad (5.2.14)$$

dépendant d'un petit paramètre α .

On approche le problème à valeur finale (5.1.8), par le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} (\partial_t + A)^2 u(t) = u''(t) + 2Au'(t) + A^2 u(t) = 0, & 0 < t < T, \\ \alpha A^r u(0) + u(T) = g, \quad u_t(0) = 0, \end{cases} \quad (5.2.15)$$

où $r > 0$ et $\alpha > 0$.

Remarque 5.2.3. Le cas $r = 0$, correspond à la méthode des conditions aux limites auxiliaires classique.

Notant $u_\alpha(t)$ la solution du problème (5.2.15). Elle est donnée par

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= (I + tA) \left[\alpha A^r + (1 + TA) e^{-TA} \right]^{-1} e^{-tA} g \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Nous montrons que le problème (5.2.15) est bien posé.

Notation : Soit \mathcal{G} l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{G} = \mathcal{C}^2(]0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^1(]0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}(]0, +\infty[; D(A)) \cap \mathcal{C}^1(]0, +\infty[; D(A)) \cap \mathcal{C}^2(]0, +\infty[; D(A^2))$$

Définition 5.2.1. La fonction $v : [0, T] \rightarrow H$ est appelée une solution de (5.2.15) si $v \in \mathcal{G}$ satisfait

$$(\partial_t + A)^2 u(t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

et les conditions aux limites

$$\alpha A^r u(0) + u(T) = g, \quad u_t(0) = 0,$$

Théorème 5.2.4. Pour tout $f \in D(A)$ et $r > 0$, le problème (5.2.15) admet une solution unique $u_\alpha \in \mathcal{G}$ donné par

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= (I + tA) \left[\alpha A^r + (1 + TA) e^{-TA} \right]^{-1} e^{-tA} g \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} g_n, \quad g_n = \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

De plus

$$\|u_\alpha(t)\| \leq C_3 \Phi(\alpha) \|g\| \quad (5.2.18)$$

$$\text{où } \Phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} & 0 < r < 1 \\ \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^r} & r \geq 1 \end{cases}$$

et $C_3 = \max(C_1, C_2)$, $C_1 = (rT)^r$, $C_2 = r$.

Preuve. On a

$$u_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+t\lambda_n)}{\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} g_n, \quad g_n = \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

On calcule

$$\|u_\alpha(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1+t\lambda_n)e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} \right]^2 |g_n|^2$$

on pose

$$g(\lambda_n) = (1+t\lambda_n)e^{-t\lambda_n} \leq \sup_{\lambda_n \geq \lambda_1} g(\lambda_n) = (1+t\lambda_1)e^{-t\lambda_1}$$

comme

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (1+t\lambda_1)e^{-t\lambda_1} \leq 1, \quad \frac{1}{[1+T\lambda_n]^{\frac{1}{T}}} \leq 1$$

donc

$$H(\lambda) = \frac{(1+t\lambda_n)e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} \leq \frac{1}{\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} = \tilde{H}(\lambda)$$

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_1} \tilde{H}(\lambda) \leq \{A, B\} \quad \text{où}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sup_{\lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda) \\ B = \sup_{\lambda \geq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda) \\ \lambda^* = \frac{1}{Tr} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad 0 < \alpha < 1 \end{array} \right.$$

$$\tilde{H}(\lambda) \leq \frac{1}{(1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} = \frac{e^{T\lambda_n}}{1+T\lambda_n}$$

posant $s = T\lambda_n$ et $f(s) = \frac{e^s}{1+s}$

$$f(0) = 1, \quad f(+\infty) = +\infty, \quad \frac{df}{ds} = \frac{e^s(1+s) - e^s}{(1+s)^2} = \frac{se^s}{(1+s)^2} \geq 0 \quad \text{d'où } f \text{ croissante}$$

alors

$$\sup_{\lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda) \leq \frac{e^{T\lambda^*}}{1+T\lambda^*} \leq \frac{e^{T\lambda^*}}{T\lambda^*} = \frac{e^{T\left(\frac{1}{Tr} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)}}{T\left(\frac{1}{Tr} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)} = \frac{r}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Si $\lambda \geq \lambda^*$

$$\tilde{H}(\lambda) = \frac{1}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T \lambda_n) e^{-T \lambda_n}} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^r \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\lambda^*} \right)^r$$

ce qui implique que

$$\sup_{\lambda \geq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda) \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\frac{1}{T^r} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \right)^r = (rT)^r \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^r}$$

Posons $C_1 = (rT)^r$, $C_2 = r$, $C_3 = \max(C_1, C_2)$.

Si $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \right] \left[\frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^r} \right]^{-1} &= \frac{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^r}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\ &= \alpha^{\frac{r-1}{r}} \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^{r-1} \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1-r}{r}} \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^{1-r}} = \gamma(\alpha) \end{aligned}$$

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(\alpha) = +\infty \Leftrightarrow$ pour $\varepsilon = 1$, $\exists \alpha_0$ tel que $\alpha \leq \alpha_0 \Rightarrow \gamma(\alpha) \geq \varepsilon = 1$

si $0 < r < 1$ et $0 < \alpha < 1$ alors

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \geq \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^r}$$

$0 < \alpha < 1$, $r \geq 1$ $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$ pour $\varepsilon = 1$, $\exists \alpha_0$ tel que $\alpha \leq \alpha_0 \Rightarrow \gamma(\alpha) \leq \varepsilon = 1$

d'où

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \leq \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^r}$$

ce qui implique

$$\max(A, B) = C_3 \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^r}$$

alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t)\| \leq \|u_\alpha(0)\| \leq C \Phi(\alpha) \|g\|$$

$$\text{où } \Phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} & 0 < r < 1 \\ \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^r} & r \geq 1 \end{cases}$$

Théorème 5.2.5. Si $u(0) \in H$, et $u(0) \in D(A)$, i.e., $\|u(0)\| + \|Au(0)\| < \infty$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} &\leq \\ \{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} &\rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Remarque 5.2.4. Nous rappelons ici que

$$\|u(0)\| + \|Au(0)\| < \infty \Leftrightarrow g \in \mathcal{C}^1$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} u(t) &= (I + tA)(I + TA)^{-1} e^{(T-t)A} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + t\lambda_n)}{(1 + T\lambda_n)} e^{(T-t)\lambda_n} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= (I + tA) \left[\alpha \lambda_n^r + (1 + TA) e^{-TA} \right]^{-1} e^{-tA} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{aligned}$$

En calculant

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1 + t\lambda_n)}{(1 + T\lambda_n)} e^{(T-t)\lambda_n} - \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1 + t\lambda_n) \left[(\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}) e^{T\lambda_n} - (1 + T\lambda_n) \right]}{(1 + T\lambda_n) (\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n})} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1 + t\lambda_n) [\alpha \lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1 + T\lambda_n) (\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n})} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{[\alpha \lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1 + T\lambda_n) (\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n})} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|A(u(t) - u_\alpha(t))\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\lambda_n \left(\frac{(1+t\lambda_n)}{(1+T\lambda_n)} e^{(T-t)\lambda_n} - \frac{(1+t\lambda_n)}{\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \right) \right]^2 |g_n|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_n(1+t\lambda_n) [\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1+T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_n [\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1+T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} \right]^2 |g_n|^2 \\
&= \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2
\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} \leq \{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
u(0) &= (I + TA)^{-1} e^{TA} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{T\lambda_n}}{(1+T\lambda_n)} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_\alpha(0) &= [\alpha\lambda_n^r + (1+TA)e^{-TA}]^{-1} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha\lambda_n^r + (1+T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
u(0) - u_\alpha(0) &= \left[\frac{e^{TA}}{(1+TA)} - \frac{1}{\alpha A^r + (1+TA)e^{-TA}} \right] g \\
&= \frac{\alpha A^r e^{TA}}{[\alpha A^r + (1+TA)e^{-TA}](1+TA)} g
\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
 \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r e^{T\lambda_n}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}](1 + T\lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \right)^2 \left[\frac{e^{T\lambda_n}}{(1 + T\lambda_n)} \right]^2 |g_n|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda))^2 |u(0)|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^N (\tilde{F}(\lambda))^2 |u(0)|^2 + \sum_{n=N}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda))^2 |u(0)|^2
 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{F}(\lambda) = \frac{\alpha \lambda_n^r}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}}$$

$u(0) \in H$ implique que $\|u(0)\|^2 < +\infty$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(0)|^2 < +\infty$

Choisissons $\varepsilon > 0$, alors $\exists N$ telque $\sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$

comme $\tilde{F}(\lambda) = \frac{\alpha \lambda_n^r}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \leq 1$ alors

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda))^2 |u_n(0)|^2 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n(0)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^N (\tilde{F}(\lambda))^2 |u_n(0)|^2 \\
 &\leq \sup_{1 \leq n \leq N} [\tilde{F}(\lambda)] \sum_{n=1}^N |u_n(0)|^2
 \end{aligned}$$

$\lambda_n \leq \lambda_N$ implique que $\tilde{F}(\lambda) \leq \frac{\alpha \lambda_n^r}{(1 + T\lambda_n)} e^{T\lambda_n} \leq \alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}$

d'où

$$\sup_{1 \leq n \leq N} [\tilde{F}(\lambda)] \sum_{n=1}^N |u_n(0)|^2 \leq [\alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}]^2 \|u(0)\|^2$$

En prenant α tel que $[\alpha \lambda_N^r e^{T \lambda_N}]^2 \|u(0)\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$
on obtient

$$\begin{aligned} \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &\leq [\alpha \lambda_N^r e^{T \lambda_N}]^2 \|u(0)\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|u(0) - u_\alpha(0)\| \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

De plus

$$\begin{aligned} \|A(u(t) - u_\alpha(t))\|^2 &\leq \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^{r+1} e^{T \lambda_n}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T \lambda_n) e^{-T \lambda_n}](1 + T \lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda))^2 |\lambda_n u_n(0)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N (\tilde{F}(\lambda))^2 |\lambda_n u_n(0)|^2 + \sum_{n=N}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda))^2 |\lambda_n u_n(0)|^2 \end{aligned}$$

comme on a supposé que $\|Au(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_n e^{T \lambda_n}}{1 + T \lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 < +\infty$ alors

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T \lambda_n) e^{-T \lambda_n}} \right)^2 |\lambda_n u_n(0)|^2 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |\lambda_n u_n(0)|^2$$

Choisissons $\varepsilon > 0$, $\exists N$ telque $\sum_{n=N}^{+\infty} |\lambda_n u_n(0)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Si $\lambda_n \leq \lambda_N$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\tilde{F}(\lambda))^2 |\lambda_n u_n(0)|^2 &\leq \left[\sup_{1 \leq n \leq N} \tilde{F}(\lambda) \right] \sum_{n=1}^N |\lambda_n u_n(0)|^2 \\ &\leq [\alpha \lambda_N^r e^{T \lambda_N}]^2 \|Au(0)\|^2 \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons α tel que $\left[\alpha \lambda_N^r e^{T \lambda_N} \right]^2 \|Au(0)\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$
on obtient alors

$$\|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

d'où

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \leq \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} &\leq \\ \{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} &\rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Théorème 5.2.6. Si $u(0) \in D(A^{(\theta+1)})$ tel que $\|A^{(\theta+1)}u(0)\| \leq E_\theta$, et $1 \leq r \leq \theta$ nous avons alors l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} & \\ \leq \{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} &\leq \left[\frac{C_5}{\ln\left(\frac{C_4}{\alpha}\right)} \right]^\theta E_\theta \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

où $C_4 = \lambda_1^{\theta-r}$ et $C_5 = \lambda_1^{-1} + 1$.

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r e^{T \lambda_n} \lambda_n^{-(\theta+1)} \lambda_n^{(\theta+1)}}{\left[\alpha \lambda_n^r + (1 + T \lambda_n) e^{-T \lambda_n} \right] (1 + T \lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r \lambda_n^{-(\theta+1)}}{\left[\alpha \lambda_n^r + (1 + T \lambda_n) e^{-T \lambda_n} \right]} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n^{(\theta+1)} e^{T \lambda_n}}{1 + T \lambda_n} \right) |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^{-(\theta+1)}}{\left[\alpha + (1 + T \lambda_n) \lambda_n^{-r} e^{-T \lambda_n} \right]} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n^{(\theta+1)} e^{T \lambda_n}}{1 + T \lambda_n} \right) |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha G_\alpha(\lambda_n))^2 \left| \lambda_n^{(\theta+1)} u_n(0) \right|^2 \end{aligned}$$

où

$$G_\alpha(\lambda_n) = \frac{\lambda_n^{-(\theta+1)}}{\left[\alpha + (1 + T\lambda_n)\lambda_n^{-r}e^{-T\lambda_n}\right]} = \frac{1}{\lambda_n \left[\alpha\lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n)\lambda_n^{\theta-r}e^{-T\lambda_n}\right]}$$

si $r \leq \theta$ et $\lambda_n \geq \lambda_1$ alors

$$\begin{aligned} G_\alpha(\lambda_n) &\leq \frac{1}{\lambda_1 \left[\alpha\lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n)\lambda_1^{\theta-r}e^{-T\lambda_n}\right]} \\ &= \frac{1}{\lambda_1^{\theta+1-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}}\lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}\right]} \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{\lambda_1^{\theta+1-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}}\lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}\right]} = \Phi_\alpha \left(\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}} \right) = \begin{cases} \frac{\lambda_1^{-\theta} \left[\lambda_1^{1-\frac{1}{\theta}} \right]^r}{\alpha^{\frac{1}{\theta}} \ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right)} & 0 < \theta < 1 \\ \frac{\lambda_1^{-1}}{\alpha \left[\ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right) \right]^\theta} & \theta \geq 1 \end{cases}$$

Si $\theta \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha G_\alpha(\lambda_n))^2 \left| \lambda_n^{(\theta+1)} u_n(0) \right|^2 \\ &\leq \frac{\lambda_1^{-1}}{\left[\ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right) \right]^\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \lambda_n^{\theta+1} u_n(0) \right|^2 \\ &\leq \frac{\lambda_1^{-1}}{\left[\ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right) \right]^\theta} \|A^{(\theta+1)} u(0)\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^{r+1} e^{T\lambda_n} \lambda_n^{-\theta} \lambda_n^\theta}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}] (1 + T\lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r \lambda_n^{-\theta}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}]} \right)^2 \left(\lambda_n^{\theta+1} \frac{e^{T\lambda_n}}{(1 + T\lambda_n)} \right) |g_n|^2 \\
 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{[\alpha \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) \lambda_n^{\theta-r} e^{-T\lambda_n}]} \right)^2 |\lambda_n^{\theta+1} u_n(0)|^2 \\
 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}} \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n} \right]} |\lambda_n^{\theta+1} u_n(0)|^2 \\
 &\leq \alpha \left(\sup_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{\lambda_1^{\theta-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}} \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n} \right]} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n^{\theta+1} u_n(0)|^2
 \end{aligned}$$

comme $\theta \geq 1$ alors $\|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 \leq \frac{1}{\left[\ln\left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha}\right) \right]^{2\theta}} \|A^{\theta+1} u(0)\|^2$

ce qui implique que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} \leq \tag{5.2.22}$$

$$\{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} \leq \frac{1}{\left[\ln\left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha}\right) \right]^\theta} (\lambda_1^{-1} + 1) \|A^{\theta+1} u(0)\|$$

$$\{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} \leq \frac{C_5}{\left[\ln\left(\frac{C_4}{\alpha}\right) \right]^\theta} (E_\theta) \tag{5.2.23}$$

où $C_4 = \lambda_1^{\theta-r}$ et $C_5 = \lambda_1^{-1} + 1$.

Nous terminons notre étude par la construction de la famille d'opérateurs régularisants de (5.1.8).

Définition 5.2.2. La famille $\{R_\alpha(t), \alpha > 0, t \in [0, T]\} \subset \mathcal{L}(H)$ est dite famille d'opérateurs régularisante pour le problème (5.1.8) si pour tout solution $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ du (5.1.8) avec la donnée g , et pour tout $\eta > 0$, il existe un choix $\alpha(\eta) > 0$, tel que

$$\alpha(\eta) \longrightarrow 0, \eta \longrightarrow 0$$

$$\|R_{\alpha(\eta)}(t)g_\eta - u(t)\| \longrightarrow 0, \eta \longrightarrow 0 \quad (5.2.24)$$

pour tout $t \in [0, T]$ dès que g_η satisfait $\|g_\eta - g\| \leq \eta$.

Soit

$$R_\alpha(t) = (I + tA) \left[\alpha A^r + (1 + TA)e^{-TA} \right]^{-1} e^{-tA} \quad (5.2.25)$$

alors

$$R_\alpha(t) \in \mathcal{L}(H) \text{ et } \|R_\alpha(t)\| \leq C_3 \Phi(\alpha) \quad (5.2.26)$$

$$\text{où } \Phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} & 0 < r < 1 \\ \frac{1}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^r} & r \geq 1 \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on montre que $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (5.1.8).

Théorème 5.2.7. Si $g \in \mathcal{C}^1$, alors la condition (5.2.24) est vérifiée.

Preuve. Supposons que $g \in \mathcal{C}^1$, on a

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha(\eta)}(t)g_\eta - u(t)\| &= \|R_{\alpha(\eta)}(t)g_\eta - R_{\alpha(\eta)}(t)g + R_{\alpha(\eta)}(t)g - u(t)\| \\ &= \|R_{\alpha(\eta)}(t)(g_\eta - g) + R_{\alpha(\eta)}(t)g - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\alpha(\eta)}(t)(g_\eta - g)\| + \|R_{\alpha(\eta)}(t)g - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\alpha(\eta)}(t)\| \|g_\eta - g\| + \|R_{\alpha(\eta)}(t)g - u(t)\| \\ &= \Delta_1(t) + \Delta_2(t) \end{aligned}$$

où

$$\Delta_1(t) = \|R_{\alpha(\eta)}(t)(g_\eta - g)\| \leq C_3 \Phi(\alpha) \eta,$$

et

$$\Delta_2(t) = \|R_{\alpha(\eta)}(t)g - u(t)\|$$

Nous observons que

$$\Delta_1(t) \leq \begin{cases} C_3 \frac{\eta}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} & 0 < r < 1 \\ C_3 \frac{\eta}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^r} & r \geq 1 \end{cases}$$

Choisissons $\alpha = \eta^{\frac{r}{2}}$ si $0 < r < 1$, et $\alpha = \sqrt{\eta}$ si $r \geq 1$,

alors

$$\Delta_1(t) \leq \begin{cases} C_3 \frac{\sqrt{\eta}}{\ln\left(\frac{1}{\eta^{\frac{1}{r}}}\right)} & 0 < r < 1 \\ C_3 \frac{\sqrt{\eta}}{\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)\right]^r} & r \geq 1 \end{cases} \longrightarrow 0 \text{ quand } \eta \longrightarrow 0 \quad (5.2.27)$$

D'après le théorème (4.4.3) on a

$$\Delta_2(t) = \left\| R_{\alpha(\eta)}(t)g - u(t) \right\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \eta \longrightarrow 0 \quad (5.2.28)$$

Combinant (5.2.27) et (5.2.28) on obtient

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| R_{\alpha(\eta)}(t)g - u(t) \right\| \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0.$$

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a étudié deux classes de problèmes mal posés. Dans la première classe, on a étudié un problème inverse elliptique du type «complétion de données» posé sur une géométrie bornée et non-bornée, où des résultats de stabilisation et de régularisation ont été obtenus. Quant à la deuxième classe, elle comporte l'étude d'un problème de Cauchy biparabolique abstrait.

On a adopté la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiées, où des résultats de convergence et des estimations d'erreur ont été établis sous certaines conditions de régularité des solutions des problèmes originaux mal posés.

Dans le futur, on projette de faire l'approximation numérique de ces problèmes pour valider les résultats théoriques obtenus.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] G. Alessandrini. Stable determination of a crack from boundary measurements, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 123 (1993) 497-516.
- [2] Atakhadzhaev, MA, Egamberdiev, OM : The Cauchy problem for the abstract bicaloric equation, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 31, No. 4, 187-191 (1990)
- [3] N.I. Akhiezer and I. M. Glazman. Theory of linear operator in Hilbert space, translated from the Russian by Merlynd Nestell p. cm. Originally published : New York : F. Ungar Pub. Co., cl961- cl963. Dover Publications, Inc.New York, (1993).
- [4] L. S. Abdulkerimov. Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space, Azerbaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat., 1(1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).
- [5] Ames, KA, Straughan, B : Non-Standard and Improperly Posed Problems, Academic Press (1997).
- [6] Azariel Paul Eyimi Minto Ebang.Thèse de doctorat. Sur un problème inverse de type Cauchy en théorie des plaques minces élastiques. Université de Poitiers, 2011.
- [7] J.Banasiak, L. Arlotti. Perturbations of positive semigroups with applications, Springer-Verlag London Limited, (2006).
- [8] J. Baumeister and A Lietào. On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations. J. Inv. Ill-Posed Problems. Vol. 9.1 (2001), 1-17.
- [9] R. Beals. Non-Local Boundary Value Problems for Elliptic Operators, Amer. J. Math., 87(1965), 315-362.
- [10] Boccara N. Analyse fonctionnelle. Une introduction pour physiciens (Ellipses, 1984)(fr)(ISBN 2729896058).
- [11] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation, Inverse Problems 21, 1087-1104, (2005).
- [12] N. Boussetila, F. Rebbani. Optimal Regularisation method for ill-posed Cauchy problems. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. (2006), No. 147, pp. 1-15.ISSN : 1072-6691.
- [13] N. Boussetila. Thèse de Doctorat : Etude de problèmes non locaux et régularisation de problèmes mal posés en EDP, (2005).
- [14] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle Théorie et applications MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1987).

- [15] Gordon W. Clark and Seth F. Oppenheimer, Quasireversibility Methods for Non-Well-Posed Problems, *Electronic Journal of Differential Equations* Vol. 1994(1994), No. 08, pp. 1-9, 1994.
- [16] Carasso, AS : Bochner Subordination, Logarithmic Diffusion Equations, and Blind Deconvolution of Hubble Space Telescope Imagery and Other Scientific Data, *SIAM J. Imaging Sciences*, Vol. 3, No. 4, pp. 954-980 (2010)
- [17] M. Choulli, X. Yang, J. Cheng. An iterative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe, Vol.14, No.3, *Series A Journal of Chinese Universities* Aug, (2005).
- [18] M. Choulli. Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques. Springer (2009).
- [19] D. Colton, H.W. Engl, A.K. Louis, J.R. McLaughlin and W. Rundell (editors), *Survey on solution methods for inverse problems*, Springer, Wien, New York (2000).
- [20] Cote Ph., Lagabrielle R. La tomographie sismique comme méthode de reconnaissance détaillée du sous-sol. *Rev. Franç, Géotech*, 36 : 47-53 (1986).
- [21] R. Dautray, J.-L. Lions ; *Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs)*, Edt. Masson, (1988).
- [22] Delvare, F., Cimetière, A., Pons, F. 2002 An iterative boundary element method for Cauchy inverse problems. *Computational Mechanics* 28 291-302
- [23] Delvare, F., Cimetière, A., Hanus, J.L., Bailly, P. 2010 An iterative method for the Cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 199 3336-3344
- [24] M. Denche and K. Bessila. Quasi-boundary Value Method for Non-well Posed Problem for a Parabolic Equation with Integral Boundary Condition, *Math. Probl. Eng.*, 7(2001), 129-145.
- [25] A. M. Denisov, E. V. Zakharov, A. V. Kalinin, & V. V. Kalinin. Numerical Methods for Some Inverse Problems of Heart Electrophysiology, *Differential Equations*, (2009) Vol. 45, No. 7, 1034-1043.
- [26] E. Dibenedetto. *Partial Differential Equations*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, (2000).
- [27] Dimitri NICOLAS. Thèse de doctorat, Couplage de méthodes d'échantillonnage
- [28] H. W. Engl and A. Leitão. A mann iterative regularization methode for elliptic Cauchy problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, (2001), 22(7-8) : 861-884.
- [29] H. W. Engl, Martin Hanke, Andreas Neubauer. *Regularization of inverse problems*, kluwer P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, (1996).
- [30] M. Farah. Thèse de Doctorat : Problèmes inveres de sources et lien avec l'Electro-Encéphalo-Graphie, (2007).
- [31] J. Hadamard. *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale Uni Press, New Haven, (1923).

- [32] D.N. Hào, V.D. Nguyen and H. Sahli. A non-local boundary value problem method for parabolic equations backward in time, *J. Math. Anal. Appl.*, 345(2008), 805-815.
- [33] Dinh Nho Hào, Tran Duc Van and Gorenflo R 1992 Towards the Cauchy problem for the Laplace equation *Banach Center Publ.* 27 111–28
- [34] Hayashi, K., Ohura, Y., Onishi, K. 2002 Direct method of solution for general boundary value problem of the Laplace equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 26 763-771
- [35] Hongwu Zhang, Xiaojun Zhang, Stability and Regularization Method for Inverse Initial Value Problem of Biparabolic Equation. School of Mathematics and Information Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan, China, 2015.
- [36] V. Isacov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, (2006).
- [37] I.Gohberg and S.Goldberg. *Basic operator theory*, Birkhauser. Boston, (1981).
- [38] Fushchich, VL, Galitsyn, AS, Polubinskii, AS : A new mathematical model of heat conduction processes, *Ukrainian Math. J.*, 42, 210-216 (1990)
- [39] S. I. Kabanikhin. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. Survey paper, *J. Inv. Ill-Posed Problems* 16 (2008), 317–357.
- [40] P.G. Kaup & F. Santosa. Nondestructive evaluation of corrosion damage using electrostatic boundary measurements, *J. Nondestruct. Eval.* 14 (1995) 127-136.
- [41] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*, University of California, Berkeley, Berlin Heidelberg New York, (1980).
- [42] M. Kern. *Problèmes inverses aspects numériques*. Lecture, école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, (2002-2003).
- [43] A. Kolmogorov, S. Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse Fonctionnelle*. Édition Mir. Moscou, (1973).
- [44] V. A. Kozlov, V.G. Maz'ya. On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, *Leningrad Math. J.*, 1 (1990), No. 5, 1207-1228.
- [45] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation, *Comput. Math. Phys.* 31, 45-52, (1991).
- [46] M.V. Klibanov, F. Santosa. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation, *SIAM J. Appl. Math.* 51, 1653-1675, (1991).
- [47] M. A. Krasnosel'skii, G.M. Vainikko, P.P. Zabreko, Yu.B. Rutitskii and V.Yu. Stetsenko. *Approximate Solution of Operator Equations*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, (1972).
- [48] Lakhdari, A. and Boussetila, N. (2015) An Iterative Regularization Method for an Abstract Ill-Posed Biparabolic Problem. *Boundary Value Problems*, 55, 1-17. <http://dx.doi.org/10.1186/s13661-015-0318-4>.
- [49] R. Lattès, J.L. Lions. *Méthode de Quasi-réversibilité et Applications*, Dunod, (1967).

- [50] S. Lang. Real analysis. Addison-Westly Publishing company, (1927) ISBN : 0-201-14179-5.
- [51] A. Leitão. Iterative method for solving elliptic Cauchy problems. Numer. Funct. Anal. Optim.,(2000), 21(5-6) : 715-742.
- [52] J.L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1. Dunod-(1967).
- [53] M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov and S.P. Shishatskii, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, American Mathematical Society, Providence, RI, (1986).
- [54] L. Marin. An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation, Comput Mech, (2010). 45, 665-677.
- [55] Marin, L. 2005 Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in twodimensional functionally graded materials. International Journal of Solids and Structures 42 4338-4358
- [56] A. V. Lykov, Theory of Heat Conduction [in Russian], Vysshaya Shkola, Moscow (1967).
- [57] P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw, New York (1953).
- [58] K. Miller, "Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well-posed problems," in Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity (Heriot-Watt University, Edinburgh, Scotland, 1972), vol. 316 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 161–176, Springer, Berlin, Germany, 1973.
- [59] Lakhdari, N, Boussetila, N : An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem, Boundary Value Problems 2015, 2015 :55
- [60] M. M. Lavrentiev, Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics, vol. 11 of Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer, Berlin, Germany, 1967.
- [61] M. T. Nair. Linear operator equations : approximation and regularization. World Scientific, (2009).
- [62] L. E. Payne, "Some general remarks on improperly posed problems for partial differential equations," in Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity (Heriot-Watt University, Edinburgh, Scotland, 1972), vol. 316 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 1–30, Springer, Berlin, Germany, 1973.
- [63] Payne, LE : On a proposed model for heat conduction, IMA Journal of Applied Mathematics, 71, 590-599 (2006)
- [64] A. Pazy. Semigroupe of linear operators and Applications to Pratial Differential equations. Springer-Verlag, (1983).
- [65] Pierre Lévy-Bruhl. Introduction à la théorie spectrale, cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, (2003).
- [66] M. Prato. Regularization methods for the solution of inverse problems in solar X-ray and imaging spectroscopy. Archives of Computational Methods in Engineering manuscript, (2007).

- [67] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky and I.A. Vasin. Methods for solving inverse problems in mathematical physics, p. cm –(Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics 222, Marcel Dekker, (2000).
- [68] Yu.P. Pterov and V.S. Sizikov. Well-posed, ill-posed, and intermediate problems with applications, Koninklijke Brill NV, (2005).
- [69] A. G. Ramm. Inverse problems mathematical and analytical techniques with applications to engineering, Springer, (2005).
- [70] M. Reed, B. Simon Vol 1. Methods of mathematical physics. Functional analysis, (1980) .ACADEMIC PRESS, INC.
- [71] A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Walter de Gruyter Berlin New York, (2007).
- [72] R. E. Showalter, “The final value problem for evolution equations,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 47, no. 3, pp. 563–572, 1974.
- [73] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems, Winston and Sons, (1977).
- [74] Teniou Nihed. Thèse de Doctorat : L’étude d’une classe de problèmes mal posés, (2012).
- [75] N.Ja.Vilenkin. Functional analysis, Wolters-Noordhoff Publishing, (1972).
- [76] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. Introduction à l’analyse fonctionnelle. Les Presses de l’Université du Québec, (1981).
- [77] Vabishchevich, P.N. : Numerical solution of nonlocal elliptic problems. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 5, 13–19 (1983) (in Russian)
- [78] E. V. Tolubinskii, Theory of Transfer Processes [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1969).
- [79] Wang, L, Zhou, X, Wei, X : Heat Conduction : Mathematical Models and Analytical Solutions, Springer-Verlag (2008)
- [80] y. Wenhuan. Well- posedness of determining the source term of an elliptic equation, Bull. Austral. Math. SOC.VOL. 50 (1994) [383-398]
- [81] N.I. Yurchuk. An a priori estimate for the convergence of a modified quasi-inversion method, Nonlinear analysis and related problems, Tr. Inst. Mat. Minsk., 2, Nat. Akad. Nauk Belarusi, (1999), 155-158, (Russian).



Open Mathematics

Research Article

Khelili Bisma, Boussetila Nadjib*, and Rebbani Faouzia

A modified quasi-boundary value method for an abstract ill-posed biparabolic problem

<https://doi.org/10.1515/math-2017-0140>

Received August 29, 2017; accepted November 16, 2017.

Abstract: In this paper, we are concerned with the problem of approximating a solution of an ill-posed biparabolic problem in the abstract setting. In order to overcome the instability of the original problem, we propose a modified quasi-boundary value method to construct approximate stable solutions for the original ill-posed boundary value problem. Finally, some other convergence results including some explicit convergence rates are also established under a priori bound assumptions on the exact solution. Moreover, numerical tests are presented to illustrate the accuracy and efficiency of this method.

Keywords: Ill-posed problems, Biparabolic problem, Regularization

MSC: 47A52, 65J22

1 Formulation of the problem

Throughout this paper H denotes a complex separable Hilbert space endowed with the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and the norm $\|\cdot\|$, $\mathcal{L}(H)$ stands for the Banach algebra of bounded linear operators on H .

Let $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ be a positive, self-adjoint operator with compact resolvent, so that A has an orthonormal basis of eigenvectors $(\phi_n) \subset H$ with real eigenvalues $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$, i.e.,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases},$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, \quad h_n = \langle h, \phi_n \rangle.$$

In this paper, we consider the following inverse source problem of determining the unknown source term $u(0) = f$ and the temperature distribution $u(t)$ for $0 \leq t < T$, of the following biparabolic problem

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 u = \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t) = u''(t) + 2Au'(t) + A^2 u(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(T) = g, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $0 < T < \infty$ and g is a given H -valued function.

Khelili Bisma: 20 Aout 55 Skikda University, Faculty of Science, Skikda, Algeria, E-mail: kh86basma@yahoo.com

***Corresponding Author: Boussetila Nadjib:** Department of Mathematics, FMISM, 8 Mai 1945 Guelma University, P.O.Box 401, Guelma 24000, Algeria, E-mail: n.boussetila@gmail.com

Rebbani Faouzia: Applied Mathematics Laboratory, University Badji Mokhtar Annaba, P.O.Box 12, Annaba 23000, Algeria, E-mail: f.rebbani@epst-annaba.dz

To our knowledge, the literature devoted to this class of problems is quite scarce, except the papers [1–6]. The study of this case is caused not only by theoretical interest, but also by practical necessity. In particular, the bipolarabolic model is used in mathematical modeling to describe special features of the dynamics of deformable water-saturated porous media during their filtration consolidation subject to applied loads [7–9].

It is well-known that the classical heat equation does not accurately describe the conduction of heat [10, 11]. Numerous models have been proposed for better describing this phenomenon. Among them, we can cite the bipolarabolic model proposed in [12], the fractional bipolarabolic model [13], for a more adequate mathematical description of heat and diffusion processes than the classical heat equation. For physical motivation and other models we refer the reader to [14–21].

This work is a continuity of the work developed recently by Lakhdari and Boussetila [2], where the strategy of regularization which will be used is completely different that used in [2]. Our new strategy is motivated by the simplicity of the method, as well as the numerical results obtained, which are better compared to those obtained using a variant of an iterative regularization [2]. More precisely, we propose an improved modified quasi-boundary-value method with two parameters $\alpha > 0$ and $r \geq 0$, where the parameter α is introduced to filter the high frequencies, and the second parameter r to include the regularity of the solution of the original problem. The advantage of the multi-parameter regularization is such that it gives more freedom in attaining order optimal accuracy [22–29].

The quasi-boundary value method, also called non-local auxiliary boundary condition, introduced and developed by Showalter [30, 31], is a regularization technique by replacing the final condition or boundary condition by a nonlocal condition such that the perturbed problem is well-posed.

The main advantage of the quasi-boundary-value method is that it gives a well-posed problem, where the differential equation has not been changed, only the boundary values have been modified. Therefore, we can exploit various numerical methods to approach the problem in question, for arbitrary geometry $[0, T] \times \Omega$, where Ω is a sub-set of \mathbb{R}^n , $n \geq 1$.

This method has been used to solve some ill-posed problems for parabolic, hyperbolic and elliptic equations; for more details, see [22, 32–44] and the references therein.

2 Ill-posedness of the problem and a conditional stability result

We point out here some results established in [2].

Let us consider the following well-posed problem.

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 w = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^2 w(t) = w''(t) + 2Aw'(t) + A^2w(t) = 0, & 0 < t < T, \\ w(0) = \xi, \quad w'(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

where $\xi \in \mathcal{D}(A)$.

Theorem 2.1 ([2]). *For any $\xi \in \mathcal{D}(A)$, problem (2) admits a unique solution*

$w \in C^2([0, +\infty[; H) \cap C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap C^2([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^2))$
given by

$$w(t) = \mathcal{R}(t; A)\xi = (I + tA)e^{-tA}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + t\lambda_n)e^{-t\lambda_n} \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (3)$$

Remark 2.2. *It is easy to check that*

$$\|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} (1 + t\lambda)e^{-t\lambda} \leq (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1}, \quad (4)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{0 \leq t \leq T} (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1} = 1. \quad (5)$$

2.1 Ill-posedness of the problem (1)

Theorem 2.3 ([2]). *Let $g \in H$, then the unique formal solution of the problem (1) is given by*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n. \tag{6}$$

In this case,

$$f = u(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + T\lambda_n} e^{T\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n. \tag{7}$$

From this representation we see that $u(t)$ is unstable in $[0, T[$. This follows from the high-frequency

$$\sigma(t, \lambda_n) = \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Remark 2.4.

– In the classical backward parabolic problem

$$v_t + Av = 0, \quad 0 < t < T, \quad v(T) = g, \tag{8}$$

the unique formal solution is given by

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t, \lambda_n) \langle g, \phi_n \rangle \phi_n, \tag{9}$$

where

$$\theta_n(t, \lambda_n) = e^{(T-t)\lambda_n} \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

In this case, the high-frequency $\theta_n(t, \lambda_n)$ is equal to $e^{(T-t)\lambda_n}$ and the problem is severely ill-posed.

– In the case of biparabolic model, we have $\sigma_n = r_n \theta_n$, where

$$r_n = \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right),$$

is the **relaxation coefficient** resulting from the **hyperbolic character** of the biparabolic model.

Observe that

$$\frac{t}{T} \leq r_n \leq \frac{1 + t\lambda_1}{1 + T\lambda_1} \leq 1, \tag{10}$$

and

$$u(t) = R(t)v(t), \tag{11}$$

where

$$\|R(t)\| = \sup_{n \geq 1} \{r_n\} = r_1 = \frac{1 + t\lambda_1}{1 + T\lambda_1}. \tag{12}$$

From this remark, we observe that the degree of ill-posedness in the biparabolic model is relaxed compared to the classical parabolic case.

2.2 Conditional stability estimate

We would like to have estimates of the form

$$\|u(t)\| \leq \Psi(\|g\|),$$

for some function $\Psi(\cdot)$ such that $\Psi(s) \longrightarrow 0$ as $s \longrightarrow 0$.

Since the problem of determining $u(t)$ from the knowledge of $\{u(T) = g, u'(0) = 0\}$ is ill-posed, an estimate such as the above will not be possible unless we restrict the solution $u(t)$ to certain source set $\mathcal{M} \subset H$.

In our model, we will see that we can employ the method of logarithmic convexity to identify this source set:

$$M_\rho = \{w(t) \in H : w \text{ obeys (1) and } \|Aw(0)\| \leq \rho < \infty\}. \tag{13}$$

On the basis $\{\phi_n\}$ we introduce the Hilbert scale $(H^s)_{s \in \mathbb{R}}$ (resp. $(\mathfrak{E}^s)_{s \in \mathbb{R}}$) induced by A as follows

$$H^s = \mathcal{D}(A^s) = \{h \in H : \|h\|_{H^s}^2 = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{2s} |\langle h, \phi_n \rangle|^2 < +\infty\},$$

$$\mathfrak{E}^s = \mathcal{D}(e^{sTA}) = \{h \in H : \|h\|_{\mathfrak{E}^s}^2 = \sum_{n=1}^\infty e^{2Ts\lambda_n} |\langle h, \phi_n \rangle|^2 < +\infty\},$$

We give here a result of conditional stability. The demonstration is given in the paper [2].

Theorem 2.5. *The problem 1 is conditionally well-posed on the set*

$$M = \{w(t) \in H : \|Aw(0)\| < \infty\}$$

if and only if

$$g \in \mathfrak{E}^1 = \{h \in H : \sum_{n=1}^\infty e^{2T\lambda_n} |\langle h, \phi_n \rangle|^2 < \infty\}.$$

Moreover, if $u(t) \in M_\rho$, then we have the following Hölder continuity

$$\|u(t)\| \leq \Psi(\|g\|) = \gamma \left(\rho^{\frac{T-t}{T}}\right) \|g\|^{\frac{t}{T}}, \tag{14}$$

where $\gamma = \left(\frac{1+T\lambda_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{T-t}{T}}$.

3 Regularization and error estimates

In this work, we propose a modified quasi-boundary value method (MQBVM) to solve the inverse problem 1, i.e., replacing the final condition $u(T) = g$ with the functional time nonlocal condition,

$$\alpha A^r u(0) + u(T) = g, \tag{15}$$

to form an approximate regularized problem

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + A\right)^2 u(t) = u''(t) + 2Au'(t) + A^2u(t) = 0, & 0 < t < T, \\ \alpha A^r u(0) + u(T) = g, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

where $r > 0$ is a real parameter and $\alpha > 0$ is the regularization parameter.

Remark 3.1. *The case $r = 0$, corresponds to the classical quasi-boundary value method.*

Denoting by $u_\alpha(t)$ the solution of 16. By the separation of variables and the formula (3), we show the well-posedness of (16), and its solution can be expressed by

$$u_\alpha(t) = (I + tA) \left[\alpha A^r + (1 + TA) e^{-TA}\right]^{-1} e^{-tA} g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n \tag{17}$$

Theorem 3.2. *For all $g \in D(A)$ and $r > 0$, the approximate problem 16 admits an unique solution u_α given by*

$$u_\alpha(t) = (I + tA) \left[\alpha A^r + (1 + TA) e^{-TA}\right]^{-1} e^{-tA} g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} g_n \phi_n, \quad g_n = \langle g, \phi_n \rangle \tag{18}$$

Moreover, the following inequality holds

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t)\| \leq \|u_\alpha(0)\| \leq C_3 \kappa(\alpha) \|g\|, \tag{19}$$

where

$$\kappa(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})}, & 0 < r < 1, \\ \frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r}, & r \geq 1, \end{cases} \tag{20}$$

and $C_3 = \max(C_1, C_2)$, $C_1 = (rT)^r$, $C_2 = r$.

Proof. We compute

$$\|u_\alpha(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1+t\lambda_n) e^{-t\lambda_n}}{\alpha \lambda_n^r + (1+T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \right]^2 |g_n|^2$$

Putting

$$G(\lambda_n) = (1+t\lambda_n) e^{-t\lambda_n} \leq \sup_{n \geq 1} G(\lambda_n) = (1+t\lambda_1) e^{-t\lambda_1} \leq 1, \tag{21}$$

and

$$\tilde{H}(\lambda_n) = \frac{1}{\alpha \lambda_n^r + (1+T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}}. \tag{22}$$

Our goal here is to prove that

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_1} \tilde{H}(\lambda) = \kappa(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})}, & 0 < r < 1, \\ \frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r}, & r \geq 1, \end{cases} \tag{23}$$

Indeed, we have

$$H(\lambda_n) = \frac{(1+t\lambda_n) e^{-t\lambda_n}}{\alpha \lambda_n^r + (1+T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \leq \frac{1}{\alpha \lambda_n^r + (1+T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} = \tilde{H}(\lambda_n).$$

Now to estimate $\tilde{H}(\lambda)$, we proceed as follows

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_1} \tilde{H}(\lambda) \leq \max\{A, B\}, \text{ where}$$

$$\begin{cases} A = \sup_{\lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda), \\ B = \sup_{\lambda \geq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda), \\ \lambda^* = \frac{1}{Tr} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

For $0 < \nu \leq \lambda \leq \lambda^*$, we have

$$\tilde{H}(\lambda_n) \leq \frac{1}{(1+T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} = \frac{e^{T\lambda_n}}{1+T\lambda_n}$$

We denote $s = T\lambda_n$ and the function

$$f(s) = \frac{e^s}{1+s}.$$

The function attains its maximum at λ^* ,

$$\sup_{\lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda) = \frac{e^{T\lambda^*}}{1+T\lambda^*} \leq \frac{e^{T\lambda^*}}{T\lambda^*} = \frac{e^{T(\frac{1}{Tr} \ln(\frac{1}{\alpha}))}}{T(\frac{1}{Tr} \ln(\frac{1}{\alpha}))}.$$

Hence, we get

$$\sup_{\lambda \leq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda) \leq \frac{r}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})}. \tag{24}$$

If $\lambda \geq \lambda^*$, we can write

$$\tilde{H}(\lambda) = \frac{1}{\alpha \lambda^r + (1+T\lambda) e^{-T\lambda}} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^r \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\lambda^*}\right)^r$$

which implies that

$$\sup_{\lambda \geq \lambda^*} \tilde{H}(\lambda) \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\frac{1}{r} \ln(\frac{1}{\alpha})} \right)^r = (rT)^r \frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r}. \tag{25}$$

Putting $C_1 = (rT)^r$, $C_2 = r$, $C_3 = \max(C_1, C_2)$.

- If $0 < r < 1$ and $0 < \alpha < 1$, we observe that

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})} \right] \left[\frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r} \right]^{-1} &= \frac{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})} \\ &= \alpha^{\frac{r-1}{r}} \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^{r-1} \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1-r}{r}} [\ln(\frac{1}{\alpha})]^{1-r}} = \gamma(\alpha) \longrightarrow +\infty, \text{ as } \alpha \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(\alpha) = +\infty \implies$ for $\varepsilon = 1$, $\exists \alpha_0$ such as $\alpha \leq \alpha_0 \implies \gamma(\alpha) \geq \varepsilon = 1$. Then, for α sufficiently small, we have

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})} \geq \frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r}.$$

Therefore,

$$\max(A, B) = C_3 \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})}. \tag{26}$$

- If $r \geq 1$ and $0 < \alpha < 1$, we have $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(\alpha) = 0 \implies$ for $\varepsilon = 1$, $\exists \alpha_0$ such that $\alpha \leq \alpha_0 \implies \gamma(\alpha) \leq \varepsilon = 1$. Then, for α sufficiently small, we have

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})} \leq \frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r},$$

and thus

$$\max(A, B) = C_3 \frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r}. \tag{27}$$

From (26) and (27), we obtain the desired estimate:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t)\| \leq \|u_\alpha(0)\| \leq C_3 \kappa(\alpha) \|g\|,$$

where

$$\kappa(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln(\frac{1}{\alpha})}, & 0 < r < 1, \\ \frac{1}{\alpha [\ln(\frac{1}{\alpha})]^r}, & r \geq 1. \end{cases} \quad \square$$

Theorem 3.3. *If $u(0) \in H$ and $u(0) \in \mathcal{D}(A)$, i.e., $\|u(0)\| + \|Au(0)\| < \infty$, then we have*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} \leq \\ \{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} \rightarrow 0, \text{ as } \alpha \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Remark 3.4. *We recall here that*

$$\|u(0)\| + \|Au(0)\| < \infty \iff g \in \mathfrak{E}^1.$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} u(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + T\lambda_n} e^{T\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n, \\ u_\alpha(0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n, \end{aligned}$$

and

$$\|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{[\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1 + T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} \right]^2 |g_n|^2.$$

From this equality we can write

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1 + t\lambda_n)}{(1 + T\lambda_n)} e^{(T-t)\lambda_n} - \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1 + t\lambda_n) [(\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})e^{T\lambda_n} - (1 + T\lambda_n)]}{(1 + T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1 + t\lambda_n) [\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1 + T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{[\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1 + T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|A(u(t) - u_\alpha(t))\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\lambda_n \left(\frac{(1 + t\lambda_n)}{(1 + T\lambda_n)} e^{(T-t)\lambda_n} - \frac{(1 + t\lambda_n)}{\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} e^{-t\lambda_n} \right) \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_n (1 + t\lambda_n) [\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1 + T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} e^{-t\lambda_n} \right]^2 |g_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_n [\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}]}{(1 + T\lambda_n)(\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2, \end{aligned}$$

thus we get

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{\|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\|\} \leq \{\|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|\}.$$

Now, we show that

$$\{\|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|\} \rightarrow 0, \text{ as } \alpha \rightarrow 0.$$

We have

$$u(0) = (I + TA)^{-1} e^{TA} g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{T\lambda_n}}{(1 + T\lambda_n)} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n,$$

and

$$u_\alpha(0) = [\alpha A^r + (I + TA)e^{-TA}]^{-1} g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n,$$

then we get

$$\begin{aligned} \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha\lambda_n^r e^{T\lambda_n}}{[\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}](1 + T\lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha\lambda_n^r}{\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} \right)^2 \left[\frac{e^{T\lambda_n}}{(1 + T\lambda_n)} \right]^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha\lambda_n^r}{\alpha\lambda_n^r + (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}} \right)^2 |u_n(0)|^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda_n))^2 |u_n(0)|^2,$$

where

$$\tilde{F}(\lambda_n) = \frac{\alpha \lambda_n^r}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}}.$$

We assume that $u(0) \in H$.

$$u(0) \in H \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(0)|^2 = \|u(0)\|^2 < +\infty$$

For $\varepsilon > 0$, we choose $N > 0$ such that $\sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$. Thus

$$\|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 = \sum_{n=1}^N (\tilde{F}(\lambda_n))^2 |u_n(0)|^2 + \sum_{n=N}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda_n))^2 |u_n(0)|^2. \tag{29}$$

We observe that $\tilde{F}(\lambda_n) = \frac{\alpha \lambda_n^r}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \leq 1$, then we can write

$$\sum_{n=N}^{+\infty} [\tilde{F}(\lambda_n)]^2 |u_n(0)|^2 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n(0)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

The other quantity can be estimated as follows

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha \lambda_n^r e^{T\lambda_n}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}] (1 + T\lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{\alpha \lambda_n^r}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}]} \right]^2 |u_n(0)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N [\tilde{F}(\lambda_n)]^2 |u_n(0)|^2 \\ &\leq \left[\sup_{1 \leq n \leq N} \tilde{F}(\lambda_n) \right]^2 \sum_{n=1}^N |u_n(0)|^2. \end{aligned}$$

It is clear that

$$\tilde{F}(\lambda_n) = \frac{\alpha \lambda_n^r}{\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \leq \frac{\alpha \lambda_n^r}{(1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}} \leq \frac{\alpha \lambda_n^r e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n},$$

and $\lambda_n \leq \lambda_N$ implies that

$$\tilde{F}(\lambda_n) \leq \frac{\alpha \lambda_n^r}{(1 + T\lambda_n)} e^{T\lambda_n} \leq \alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}.$$

It follows that

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \tilde{F}(\lambda_n) \leq \alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N},$$

and consequently

$$\sum_{n=1}^N (\tilde{F}(\lambda_n))^2 |u_n(0)|^2 \leq [\alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}]^2 \|u(0)\|^2.$$

If we choose the parameter α such that $\alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N} \|u(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, we obtain

$$\begin{aligned} \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &\leq [\alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}]^2 \|u(0)\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Which shows that

$$u_\alpha(0) \rightarrow u(0), \text{ as } \alpha \rightarrow 0.$$

To complete the proof, it remains to show that

$$\|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \rightarrow 0, \text{ as } \alpha \rightarrow 0.$$

We compute

$$\begin{aligned} \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^{r+1} e^{T\lambda_n}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}](1 + T\lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} [\tilde{F}(\lambda_n)]^2 |\lambda_n u_n(0)|^2. \end{aligned}$$

We have

$$u(0) \in D(A) \iff \|Au(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_n e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 < +\infty.$$

For $\varepsilon > 0$, we choose $N > 0$ such that

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |\lambda_n u_n(0)|^2 = \sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_n e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Then, we can write

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (\tilde{F}(\lambda_n))^2 |\lambda_n u_n(0)|^2 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |\lambda_n u_n(0)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\tilde{F}(\lambda_n))^2 |\lambda_n u_n(0)|^2 &\leq \sup_{1 \leq n \leq N} [\tilde{F}(\lambda_n)] \sum_{n=1}^N |\lambda_n u_n(0)|^2 \\ &\leq [\alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}]^2 \|Au(0)\|^2. \end{aligned}$$

If we choose the parameter α such that $[\alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}] \|Au(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, we get

$$\begin{aligned} \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 &\leq [\alpha \lambda_N^r e^{T\lambda_N}]^2 \|Au(0)\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Which shows that

$$A(u(0) - u_\alpha(0)) \rightarrow 0, \text{ as } \alpha \rightarrow 0.$$

In conclusion,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} &\leq \tag{30} \\ \{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} &\rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0 \tag{□} \end{aligned}$$

Theorem 3.5. *If $u(0) \in \mathcal{D}(A^{(\theta+1)})$ such that $\|A^{(\theta+1)}u(0)\| \leq E_\theta$, and $1 \leq r \leq \theta$, then we have the following estimate*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\| \} &\leq \tag{31} \\ \{ \|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\| \} &\leq \left[\frac{C_5}{\ln\left(\frac{C_4}{\alpha}\right)} \right]^\theta E_\theta \end{aligned}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} \|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r e^{T\lambda_n} \lambda_n^{-(\theta+1)} \lambda_n^{(\theta+1)}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}](1 + T\lambda_n)} \right)^2 |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r \lambda_n^{-(\theta+1)}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}]} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n^{(\theta+1)} e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^{-(\theta+1)}}{[\alpha + (1 + T\lambda_n) \lambda_n^{-r} e^{-T\lambda_n}]} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n^{(\theta+1)} e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha \widehat{G}_\alpha(\lambda_n))^2 |\lambda_n^{(\theta+1)} u_n(0)|^2,
 \end{aligned}$$

where

$$\widehat{G}_\alpha(\lambda_n) = \frac{\lambda_n^{-(\theta+1)}}{[\alpha + (1 + T\lambda_n) \lambda_n^{-r} e^{-T\lambda_n}]} = \frac{1}{\lambda_n [\alpha \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) \lambda_n^{\theta-r} e^{-T\lambda_n}]}.$$

If $r \leq \theta$, then

$$\begin{aligned}
 \widehat{G}_\alpha(\lambda_n) &\leq \frac{1}{\lambda_1 [\alpha \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) \lambda_1^{\theta-r} e^{-T\lambda_n}]} \\
 &= \frac{1}{\lambda_1^{\theta+1-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}} \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n} \right]} = \frac{1}{\lambda_1^{\theta+1-r}} \widetilde{H}_\beta(\lambda_n),
 \end{aligned}$$

where $\beta = \frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}}$. Now by (23), we conclude that

$$\begin{aligned}
 \sup_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_1^{\theta+1-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}} \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n} \right]} &= \frac{1}{\lambda_1^{\theta+1-r}} \sup_{\lambda \geq \lambda_1} \widetilde{H}_\beta(\lambda) = \\
 &\begin{cases} \frac{\lambda_1^{-\theta} \left[\lambda_1^{1-\frac{1}{\beta}} \right]^r}{\alpha^{\frac{1}{\beta}} \ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right)}, & 0 < \theta < 1, \\ \frac{\lambda_1^{-1}}{\alpha \left[\ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right) \right]^\theta}, & \theta \geq 1. \end{cases} \tag{32}
 \end{aligned}$$

If $\theta \geq 1$, we can write

$$\|u(0) - u_\alpha(0)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha \widehat{G}_\alpha(\lambda_n))^2 |\lambda_n^{(\theta+1)} u_n(0)|^2 \tag{33}$$

$$\leq \left\{ \frac{\lambda_1^{-1}}{\left[\ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right) \right]^\theta} \right\}^2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n^{\theta+1} u_n(0)|^2 \tag{34}$$

$$\leq \left\{ \frac{\lambda_1^{-1}}{\left[\ln \left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha} \right) \right]^\theta} \right\}^2 \|A^{(\theta+1)} u(0)\|^2, \tag{35}$$

and

$$\begin{aligned}
 \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_n^r \lambda_n^{-\theta}}{[\alpha \lambda_n^r + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n}]} \right)^2 \left(\lambda_n^{\theta+1} \frac{e^{T\lambda_n}}{1 + T\lambda_n} \right)^2 |g_n|^2 \\
 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{[\alpha \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) \lambda_n^{\theta-r} e^{-T\lambda_n}]} \right)^2 |\lambda_n^{\theta+1} u_n(0)|^2 \\
 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}} \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n} \right]} \right)^2 |\lambda_n^{\theta+1} u_n(0)|^2 \\
 &\leq \alpha \left(\sup_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_1^{\theta-r} \left[\frac{\alpha}{\lambda_1^{\theta-r}} \lambda_n^\theta + (1 + T\lambda_n) e^{-T\lambda_n} \right]} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n^{\theta+1} u_n(0)|^2.
 \end{aligned}$$

By virtue of (23), we obtain

$$\|A(u(0) - u_\alpha(0))\|^2 \leq \frac{1}{\left[\ln\left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha}\right)\right]^{2\theta}} \|A^{\theta+1}u(0)\|^2. \tag{36}$$

Combining (33) and (36), we obtain

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{\|u(t) - u_\alpha(t)\| + \|A(u(t) - u_\alpha(t))\|\} \leq \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \{\|u(0) - u_\alpha(0)\| + \|A(u(0) - u_\alpha(0))\|\} &\leq \frac{1}{\left[\ln\left(\frac{\lambda_1^{\theta-r}}{\alpha}\right)\right]^\theta} (\lambda_1^{-1} + 1) \|A^{\theta+1}u(0)\| \\ &\leq \frac{C_5}{\left[\ln\left(\frac{C_4}{\alpha}\right)\right]^\theta} E_\theta, \end{aligned} \tag{38}$$

where $C_4 = \lambda_1^{\theta-r}$ and $C_5 = \lambda_1^{-1} + 1$. □

We conclude this paper by constructing a family of regularizing operators for the problem 1.

Definition 3.6. A family $\{R_\alpha(t), \alpha > 0, t \in [0, T]\} \subset \mathcal{L}(H)$ is called a family of regularizing operators for the problem (1) if for each solution $u(t), 0 \leq t \leq T$ of (1) with final element g , and for any $\eta > 0$, there exists $\alpha(\eta) > 0$, such that

$$\alpha(\eta) \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0, \tag{39}$$

$$\|R_{\alpha(\eta)}(t)g_\eta - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0, \tag{40}$$

for each $t \in [0, T]$ provided that g_η satisfies $\|g_\eta - g\| \leq \eta$.

Define $R_\alpha(t) = (I + tA) [\alpha A^r + (1 + tA) e^{-tA}]^{-1} e^{-tA}$. It is clear that $R_\alpha(t) \in \mathcal{L}(H)$ (see (19)). In the following we will show that $R_\alpha(t)$ is a family of regularizing operators for the problem 1.

Theorem 3.7. Under the assumption $g \in \mathfrak{E}^1$, the condition (40) holds.

Proof. We have

$$\Delta_\alpha(t) = \|R_\alpha(t)g_\eta - u(t)\| \leq \|R_\alpha(t)(g_\eta - g)\| + \|R_\alpha(t)g - u(t)\| = \Delta_1(t) + \Delta_2(t),$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \|R_\alpha(t)(g_\eta - g)\| \leq \kappa(\alpha)\eta, \\ \Delta_2(t) &= \|R_\alpha(t)g - u(t)\|. \end{aligned}$$

We observe that

$$\Delta_1(t) \leq \begin{cases} \frac{\eta}{\alpha^{\frac{1}{r}} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, & 0 < r < 1, \\ \frac{\eta}{\alpha \left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^r}, & r \geq 1. \end{cases}$$

Choose $\alpha = \eta^{\frac{1}{r}}$ if $0 < r < 1$, and $\alpha = \sqrt{\eta}$ if $r \geq 1$, it follows

$$\Delta_1(t) \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{\eta}}{\ln\left(\frac{1}{\eta^{\frac{1}{r}}}\right)}, & 0 < r < 1, \\ \frac{\sqrt{\eta}}{\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)\right]^r}, & r \geq 1, \end{cases} \rightarrow 0, \quad \text{as } \eta \rightarrow 0. \tag{41}$$

Now, by Theorem 3.3 we have

$$\Delta_2(t) = \|u_{\alpha(\eta)}(t) - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{as } \eta \rightarrow 0, \tag{42}$$

uniformly in t . Combining (41) and (42) we obtain

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|R_\alpha(t)g_\eta - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{as } \eta \rightarrow 0.$$

This shows that $R_\alpha(t)$ is a family of regularizing operators for the problem 1. □

4 Numerical results

In this section we give a two-dimensional numerical test to show the feasibility and efficiency of the proposed method. Numerical experiments were carried out using MATLAB.

We consider the following inverse problem

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(x, t) = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x, 1) = g(x), u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi], \end{cases} \tag{43}$$

where $f(x) = u(x, 0)$ is the unknown initial condition and $u(x, 1) = g(x)$ is the final condition.

It is well known that the operator

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

is positive, self-adjoint with compact resolvent (A is diagonalizable).

The eigenpairs (λ_n, ϕ_n) of A are

$$\lambda_n = n^2, \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

In this case, the formula (7) takes the form

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} e^{n^2} \left(\int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx). \tag{44}$$

In the following, we consider an example which has an exact expression of solutions $(u(x, t), f(x))$.

Example. If $u(x, 0) = \phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$, then the function

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + t\lambda_n) e^{-t\lambda_n} \langle \phi_1, \phi_n \rangle \phi_n(x) = (1 + t\lambda_1) e^{-t\lambda_1} \phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + t\lambda_1) e^{-t\lambda_1} \sin(x)$$

is the exact solution of the problem (43). Consequently, the data function is $g(x) = u(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{e} \sin(x)$.

By using the central difference with step length $h = \frac{\pi}{N+1}$ to approximate the first derivative u_x and the second derivative u_{xx} , we can get the following semi-discret problem (ordinary differential equation):

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - \mathbb{A}_h\right)^2 u(x_i, t) = 0, & x_i = ih, i = 1, \dots, N, t \in (0, 1), \\ u(x_0, 0, t) = u(x_{N+1}, \pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x_i, 0) = g(x_i), u_t(x_i, 0) = 0, & x_i = ih, i = 1, \dots, N, \end{cases} \tag{45}$$

where \mathbb{A}_h is the discretisation matrix stemming from the operator $A = -\frac{d^2}{dx^2}$:

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

is a symmetric, positive definite matrix. We assume that it is fine enough so that the discretization errors are small compared to the uncertainty δ of the data; this means that \mathbb{A}_h is a good approximation of the differential operator $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, whose unboundedness is reflected in a large norm of \mathbb{A}_h . The eigenpairs (μ_k, e_k) of \mathbb{A}_h are given by

$$\mu_k = 4 \left(\frac{N+1}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right), e_k = \left(\sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right)\right)_{j=1}^N, \quad k = 1 \dots N.$$

Adding a random distributed perturbation (obtained by the Matlab command `randn`) to each data function, we obtain the vector g^δ :

$$g^\delta = g + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(g)),$$

where ε indicates the noise level of the measurement data and the function "randn(.)" generates arrays of random numbers whose elements are normally distributed with mean 0, variance $\sigma^2 = 1$, and standard deviation $\sigma = 1$. "randn(size(g))" returns an array of random entries that is the same size as g. The bound on the measurement error δ can be measured in the sense of Root Mean Square Error (RMSE) according to

$$\delta = \|g^\delta - g\|_* = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (g(x_i) - g^\delta(x_i))^2 \right)^{1/2}.$$

The discret approximation of (18) takes the form

$$u_\alpha^\delta(x_j, 0) = f^{\alpha, \delta}(x_j) = (\alpha \mathbb{A}_h^r + (\mathbb{I}_N + \mathbb{A}_h))^{-1} g^\delta(x_j), \quad j = 1 \dots N, \tag{46}$$

where \mathbb{I}_N is the identity matrix.

In our numerical computations we always take $N = 40$ and consider only the cases when $\varepsilon = 0.001, 0.01$. The regularization parameter (α, r) is chosen in the following way: for any fixed $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, we try to find a satisfactory error by varying the second parameter $\alpha = \varepsilon^s$ with step length $s = 0.1$. We note α_0 one of the best choice which gives this result. Now, for $\alpha = \alpha_0$ fixed, we try to find an acceptable error by varying the first parameter $r = 0, 1, 2, 3$ in order to obtain the best possible convergence rate. It is important to note that this choice is of heuristic nature and the multiparameter discrepancy principle is quite scarce in the literature.

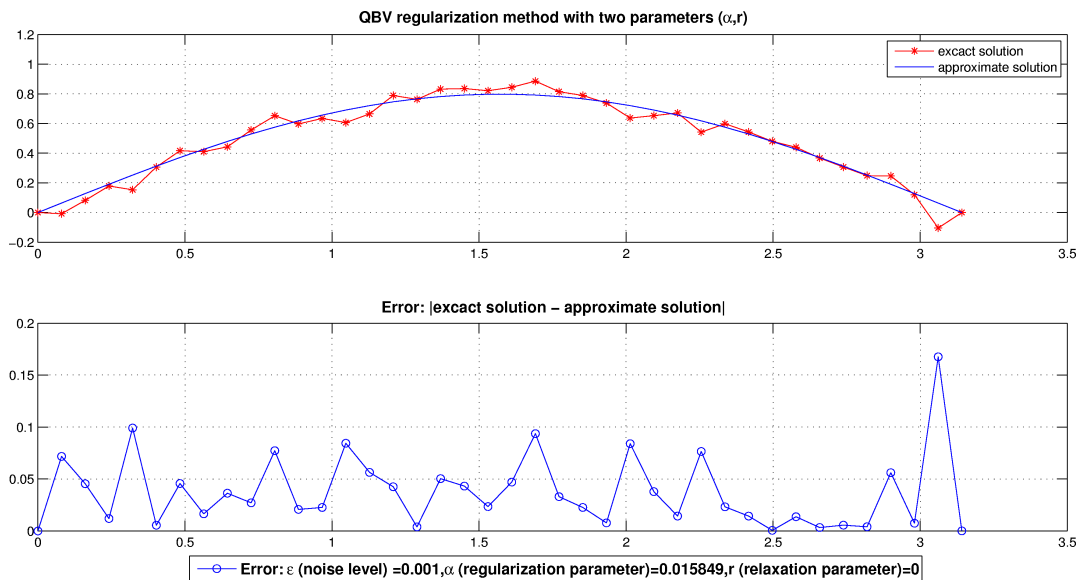
The relative error $RE(f)$ is given by

$$RE(f) = \frac{\|f^{\alpha, \delta} - f\|_*}{\|f\|_*}.$$

Conclusion and discussion

Numerical results are shown in Figures 1-8 and Tables 1-2.

Fig. 1. ε (noise level) =0.001, α (regularization parameter)=0.015849, r (relaxation parameter)=0



In this paper, we have proposed an improved two-parameter regularization method (MQBVM) to solve an ill-posed biparabolic problem. The convergence and stability estimates have been obtained under a priori bound assumptions for the exact solution. Finally, some numerical tests show that our proposed regularization method is effective and stable.

Fig. 2. ε (noise level) =0.001, α (regularization parameter)=0.015849, r (relaxation parameter)=1

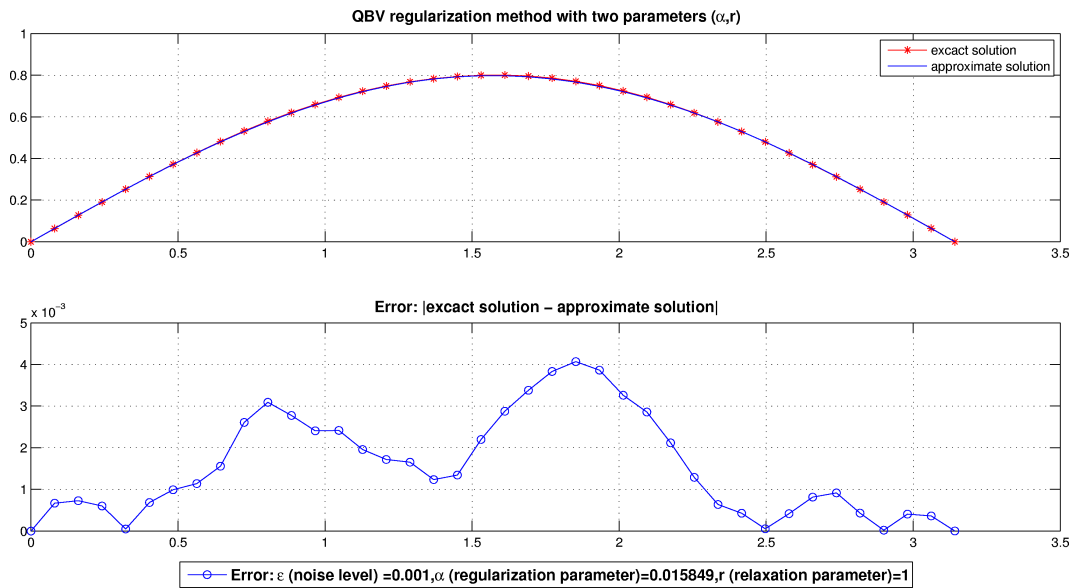


Fig. 3. ε (noise level) =0.001, α (regularization parameter)=0.015849, r (relaxation parameter)=2

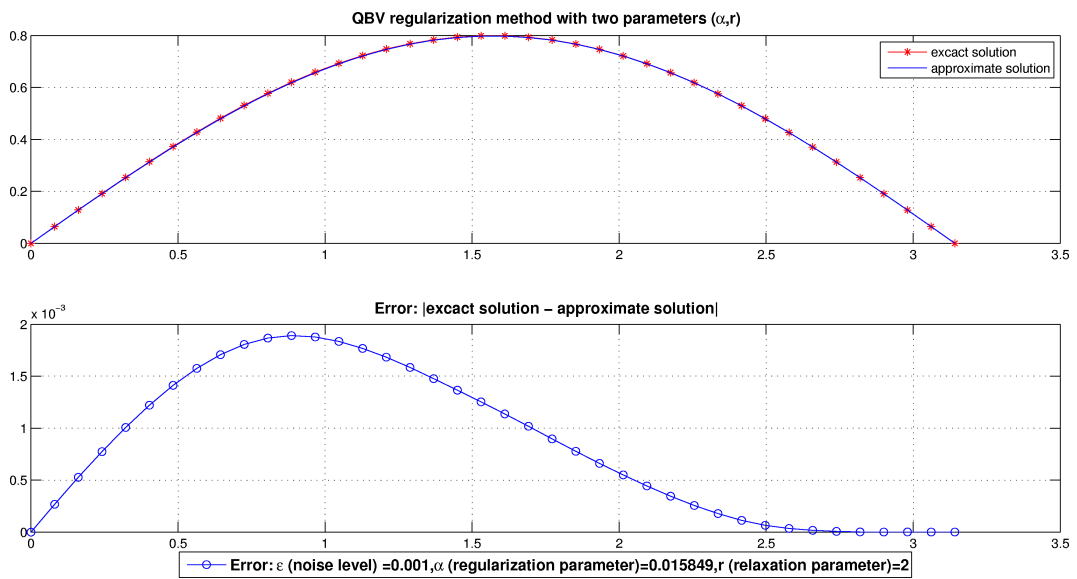


Table 1. The absolute errors E_{ra} for fixed α and for various value of r

| N | ε | α | r | RE |
|-----|---------------|----------|-----|-----------|
| 40 | 0.001 | 0.015849 | 0 | 0.0920 |
| 40 | 0.001 | 0.015849 | 1 | 0.0035 |
| 40 | 0.001 | 0.015849 | 2 | 0.0019 |
| 40 | 0.001 | 0.015849 | 3 | 0.0003501 |

Fig. 4. ε (noise level) =0.001, α (regularization parameter)=0.015849, r (relaxation parameter)=3

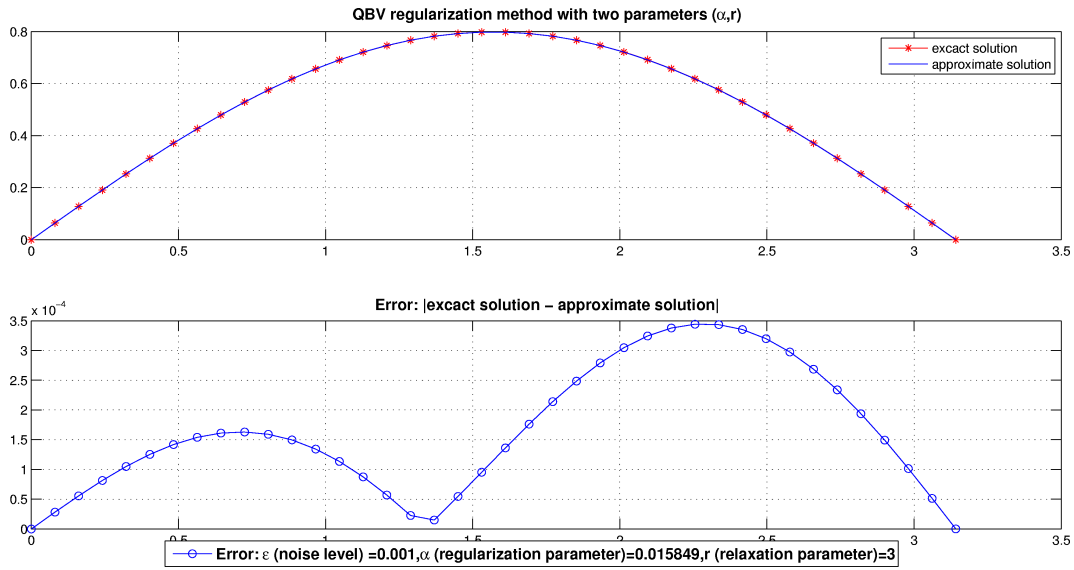


Fig. 5. ε (noise level) =0.01, α (regularization parameter)=0.025119, r (relaxation parameter)=0

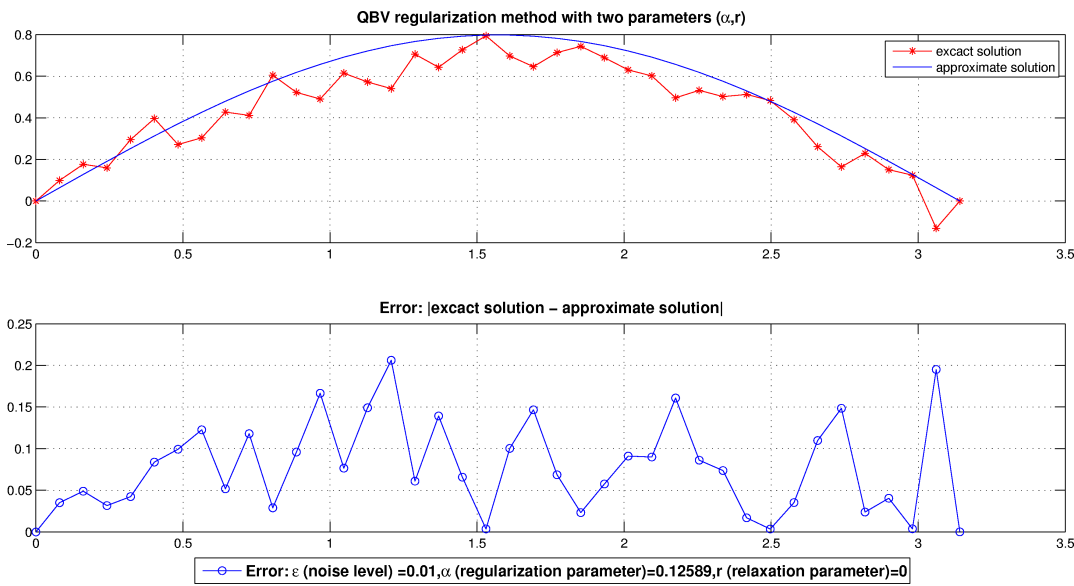


Table 2. The absolute errors E_{ra} for fixed α and for various value of r

| N | ε | α | r | RE |
|-----|---------------|----------|-----|--------|
| 40 | 0.01 | 0.025119 | 0 | 0.1707 |
| 40 | 0.01 | 0.025119 | 1 | 0.0103 |
| 40 | 0.01 | 0.025119 | 2 | 0.0070 |
| 40 | 0.01 | 0.025119 | 3 | 0.0061 |

According to the numerical tests, we observe the following regularizing effect:

Fig. 6. ε (noise level) =0.01, α (regularization parameter)=0.025119, r (relaxation parameter)=1

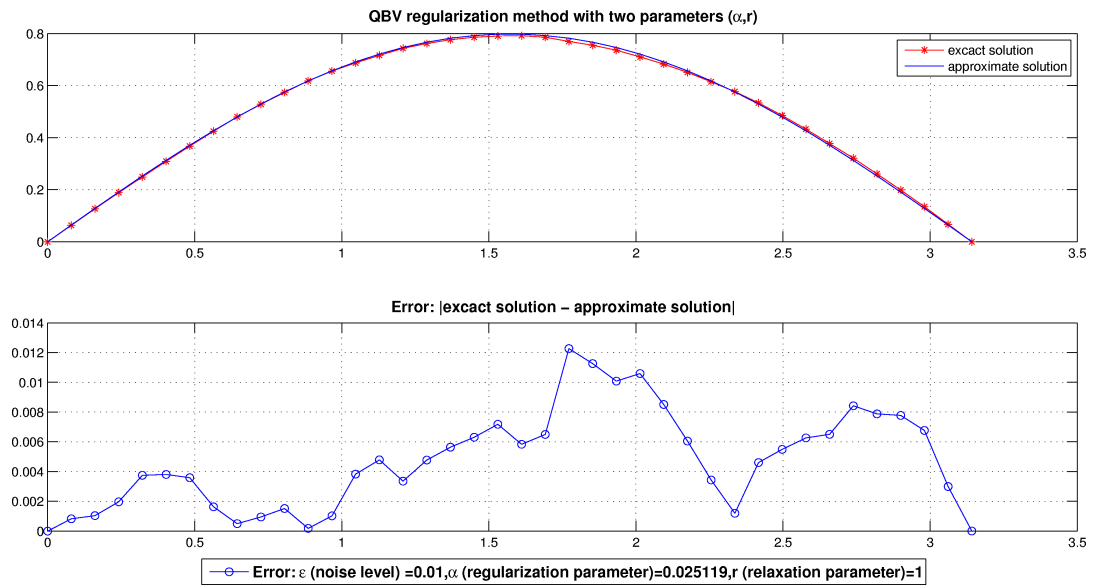
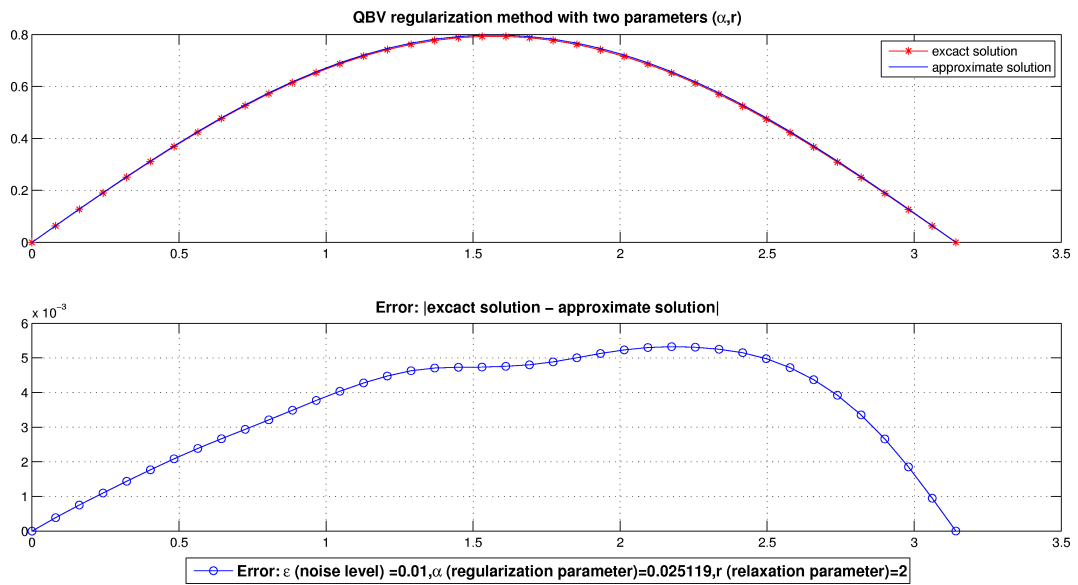


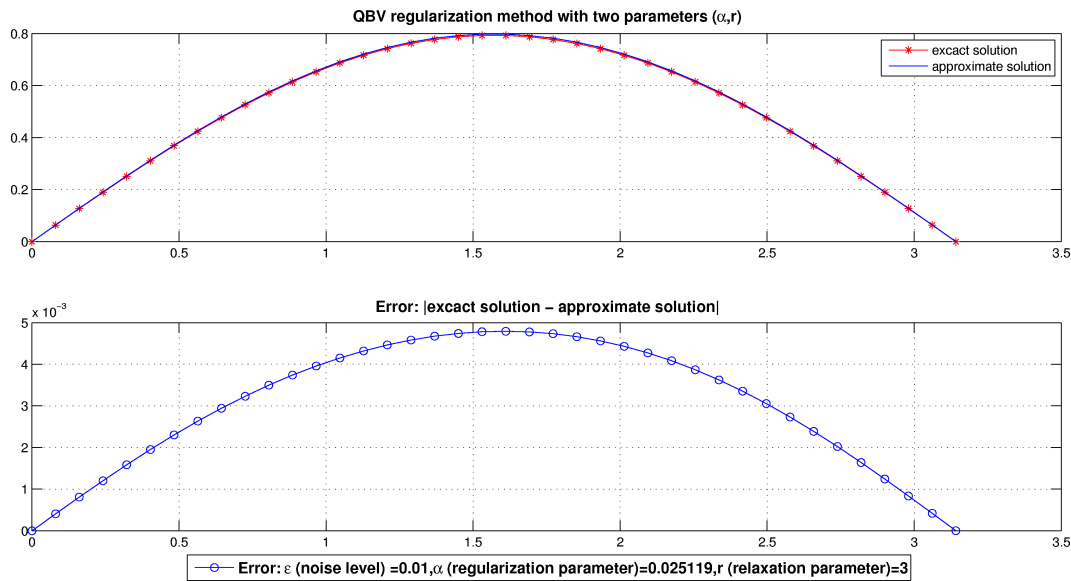
Fig. 7. ε (noise level) =0.01, α (regularization parameter)=0.025119, r (relaxation parameter)=2



• In the case $r = 0$, $\varepsilon = 0.001$ and $\alpha = 0.015849$ (resp. $r = 0$, $\varepsilon = 0.01$ and $\alpha = 0.025119$), the approximate solution is far from the exact solution. But for the case $r = 1, 2, 3$, we observe that the solution becomes precise and very near to the exact solution (in particular for $r = 2, 3$). This shows that our approach has a nice regularizing effect and gives a better approximation with comparison to the classical QBV-method.

Acknowledgement: The authors thank the referees for their constructive comments which improved this paper.

Fig. 8. ε (noise level) = 0.01, α (regularization parameter) = 0.025119, r (relaxation parameter) = 3



References

- [1] Atakhadzaev M.A., Egamberdiev O.M., The Cauchy problem for the abstract bicaloric equation, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 1990, 31(4), 187-191.
- [2] Lakhdari A., Boussetila N., An iterative regularization method for an abstract ill-posed bipolarabolic problem, *Boundary Value Problems*, 2015, 55, 1-17.
- [3] Egamberdiev O.M., An ill-posed problem for an abstract bicaloric equation, *Izv. Akad. Nauk UzSSR Ser. Fiz.-Mat. Nauk.*, 1988, 3, 42-46 (in Russian).
- [4] Orynbasarov M.O., A nonlocal boundary value problem of Samarskii type for a bipolarabolic equation, *Izv. Nats. Akad. Nauk Resp. Kaz. Ser. Fiz.-Mat.*, 2008, 5, 8-13 (in Russian).
- [5] Egamberdiev O.M., A continuation problem for an abstract bicaloric equation, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2011, 4, 211-217 (in Russian).
- [6] Zouyed F., Djemoui S., An Iterative Regularization Method for Identifying the Source Term in a Second Order Differential Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, Article ID 713403, 1-9.
- [7] Bulavatsky V. M., Biparabolic mathematical model of the filtration consolidation problem, *Dopov. NAN Ukrainy*, 1997, 8, 13-17.
- [8] Bulavatsky V.M., Mathematical modeling of filtrational consolidation of soil under motion of saline solutions on the basis of bipolarabolic model, *J. Autom. Inform. Sci.*, 2003, 35(8), 13-22.
- [9] Bulavatsky V.M., Skopetsky V.V., Generalized mathematical model of the dynamics of consolidation processes with relaxation, *Cybern. Syst. Analysis*, 2008, 44(5), 646-654.
- [10] Fichera G., Is The Fourier Theory of Heat Propagation Paradoxical?, *Rendicont 1 Del Circolo Matematico Di Palermo*, 1992, Serie II. Tomo XLI, 5-28.
- [11] Joseph L., Preziosi D.D., Heat Waves, *Rev.Mod. Physics*, 1989, 41-73.
- [12] Fushchich V.L., Galitsyn A.S., Polubinskii A.S., A new mathematical model of heat conduction processes, *Ukrainian Math. J.*, 1990, 42, 210-216.
- [13] Bulavatsky V.M., Fractional differential analog of bipolarabolic evolution equation and some its applications, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2016, 52(5), 337-347.
- [14] Radu P., Todorova G., Yordanov B., Diffusion phenomenon in Hilbert spaces and applications, *J. Differential Equations*, 2001, 250, 4200-4218.
- [15] Ekoue F., D'Halloy A.F., Gigon D., Plantamp G., Zajdman E., Maxwell-Cattaneo Regularization of Heat Equation, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2013, 7, 05-23.
- [16] Auriault J.-L., The paradox of fourier heat equation: A theoretical refutation, *International Journal of Engineering Science*, 2017, 118, 82-88.

- [17] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N., *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type*, Springer Basel AG 2004.
- [18] Carasso A.S., Bochner Subordination, Logarithmic Diffusion Equations, and Blind Deconvolution of Hubble Space Telescope Imagery and Other Scientific Data, *SIAM J. Imaging Sciences*, 2010, 3(4), 954-980.
- [19] Payne L.E., On a proposed model for heat conduction, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2006, 71, 590-599.
- [20] Saporaa A., Codegonea M., Barbero G., Diffusion phenomenon in the hyperbolic and parabolic regimes, *Physics Letters A*, 2013, 377, 2416-2421.
- [21] Wang L., Zhou X., Wei X., *Heat Conduction: Mathematical Models and Analytical Solutions*, Springer-Verlag 2008.
- [22] Boussetila N., Rebbani F., Optimal regularization method for ill-posed Cauchy problems, *Electron. J. Differential Equations*, 2006, 147, 1-15.
- [23] Boussetila N., Hamida S., Rebbani F., Spectral regularization methods for an abstract ill-posed elliptic problem, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, Article ID 947379, 1-11.
- [24] Boussetila N., Rebbani F., A modified quasi-reversibility method for a class of ill-posed Cauchy problems, *Georgian Mathematical Journal*, 2007, 14(4), 627-642.
- [25] Benrabah A., Boussetila N., Rebbani F., Regularization method for an ill-posed Cauchy problem for elliptic equations, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2017, 25(3), 01-19.
- [26] Hoa N.V., Khanh T.Q., Two-parameter regularization method for an axisymmetric inverse heat problem, *Boundary Value Problems*, 2017, 25, 1-12.
- [27] Chen Z., Lu Y., Xu Y., Yang H., Multi-parameter Tikhonov regularization for linear ill-posed operator equations, *J. Comput. Math.*, 2008, 26, 37-55.
- [28] Lu S., Pereverzev S.V., Shao Y., Tautenhahn U., Discrepancy curves for multi-parameter regularization, *J. Inverse Ill-Posed Prob.*, 2010, 18, 655-676.
- [29] Lu S., Pereverzev S.V., Multi-parameter regularization and its numerical realization, *Numer. Math.*, 2011, 118, 1-31.
- [30] Showalter R.E., The final value problem for evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, 47, 563-572.
- [31] Showalter R.E., Quasi-reversibility of first and second order parabolic evolution equations, In: *Improperly Posed Boundary Value Problems*. Pitman, London, 1975, 76-84.
- [32] Abdulkerimov L.S., Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space, *Azerbaijan Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat.*, 1977, 1, 32-36 (in Russian).
- [33] Ames K.A., Payne L.E., Asymptotic for two regularizations of the Cauchy problem for the backward heat equation, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1998, 8, 187-202.
- [34] Feng X.L., Eldén L., Fu C.L., A quasi-boundary-value method for the Cauchy problem for elliptic equations with nonhomogeneous Neumann data, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2010, 18, 617-645.
- [35] Hào D.N., Duc N.V., Lesnic D., A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations, *Inverse Problems*, 2009, 25, 1-27.
- [36] Hào D.N., Duc N.V., Lesnic D., Regularization of parabolic equations backward in time by a non-local boundary value problem method, *IMA J. Appl. Math.*, 2010, 75, 291-315.
- [37] Hào D.N., Nguyen V.D., Sahli H., A non-local boundary value problem method for parabolic equations backward in time, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, 345, 805-815.
- [38] Melnikova I.V., Regularization of ill-posed differential problems, *Siberian Math. J.*, 1992, 33, 289-298.
- [39] Melnikova I.V., Freiberg A.YU., Regularization of a boundary value problem for an oscillation equation, *U.S.S.R. Comput. Maths. Matb. Phys.*, 1985, 25(3), 90-94.
- [40] Quan P.H., Trong D.D., Triet Le.M., Tuan N.H., A modified quasi-boundary value method for regularizing of a backward problem with time-dependent coefficient, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011, 19(3), 409-423.
- [41] Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin. New York, 2007.
- [42] Zhang H.W., Modified quasi-boundary value method for cauchy problems of elliptic equations with variable coefficients, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2011, 106, 1-10.
- [43] Zhang H.W., Wei T., An improved non-local boundary value problem method for a cauchy problem of the Laplace equation, *Numer Algor.*, 2012, 59, 249-269.
- [44] Zhang H. W., Modified quasi-boundary value method for a Cauchy problem of semi-linear elliptic equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 2012, 89(12), 1689-1703.