

**UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA**

**THESE de DOCTORAT**

**Spécialité :**

**Modélisation Mathématiques**

**Présentée par**

**Mécheri Halima**

**Titre :**

**Méthode de décomposition en deux sous  
domaines pour le problème de contrôle ergodique**

Devant le jury composé de :

Saadi Samira.....Directrice de Thèse

Khodja Brahim.....Président de Thèse

Haiour Mohamed.....Examineur de Thèse

Bernardi Christine.....Examineur de Thèse

Boustila Nadjib.....Examineur de Thèse

# Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Mme Saadi Samira.

Par ces conseils, ses encouragements, ses lectures attentives, ses appréciations et son expérience, elle m'a permis d'accomplir cette thèse. Je la remercie pour son soutien, sa disponibilité, sa gentillesse, son enthousiasme et sa confiance.

Je voudrais également remercier très vivement le Professeur Christine Bernardi directrice de recherche au Laboratoire d'Analyse Numérique (LJLL) de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6 pour sa disponibilité, son dévouement constant et l'atmosphère de travail agréable dont j'ai bénéficié durant mon stage dans ce laboratoire,

Monsieur le professeur Khodja Brahim m'a fait le grand honneur de présider le jury. Je l'en remercie très vivement. Mes remerciements s'adressent également aux professeurs Haiour Mohamed, Boustila Nadjib qui ont généreusement accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques et critiques m'ont été très bénéfiques.

Je remercie monsieur Mehri, qui m'a beaucoup aidée dans mon travail, par son entière disponibilité, sa gentillesse et ses compétences, je lui en suis très reconnaissante. Merci à tous les collègues du département de Mathématiques.

# Résumé

Ce travail est consacré à l'analyse numérique des inéquations variationnelles et quasi variationnelles. Plus précisément les problèmes de contrôle ergodique ainsi que leur discrétisation par la méthode des éléments finis de type linéaire combinée à des algorithmes de type de Schwarz.

Le principe de la méthode de décomposition de domaine consiste à découpler le problème initial posé dans un domaine (généralement de forme complexe et de grande taille) en plusieurs sous problèmes. En effet ces bords étant des frontières fictives, la physique du problème ne permet pas d'y fixer des conditions. Deux stratégies, toutes les deux itératives, sont possibles : la première consiste à découpler le domaine global en sous domaines qui se couvrent partiellement.

La deuxième consiste à découpler le domaine sur partition et imposer des conditions de continuité aux interfaces.

On s'intéresse dans ce travail à la méthode de décomposition en deux sous domaine pour résoudre des problèmes de contrôle optimal régis par des inéquations variationnelles et quasi variationnelles. Des estimations d'erreur ont été obtenues et des comparaisons ont été faites dans ce sens.

# Abstract

This work is considered to study the numerical analysis of variational inequalities and quasi-variational inequalities. Precisely the ergodic control problem and this discretization by finite element method of linear type combined the Schwarz alternating algorithm. The principal of the decomposition method is to decoupled the initial problem composed in the domain (generally of complex shape and large sized) in several sub problems.

Indeed the edges being of border, the physics of problem does not allow to fix it conditions. Two strategies, both iterative are possible, the first on consists in decoupling the global domain in sub domains which cove themselves partially.

The second consists in decoupling the domain on a partition and in imposing conditions on the interfaces.

In this work we interested to decomposition method in two sub domains for resolve the control ergodic problem modeled by variational and quasi variational inequalities.

Estimations of errors we obtained and comparisons we made in this sens.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques</b>	<b>10</b>
1.1	Notations et hypothèses . . . . .	10
1.1.1	Inéquation variationnelle continue . . . . .	12
1.1.2	Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues . . . . .	13
1.1.3	Propriété de monotonie de la solution continue . . . . .	13
1.2	Problème discret . . . . .	14
1.2.1	Position du problème . . . . .	16
1.2.2	Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes . . . . .	16
1.2.3	Propriété de monotonie de la solution discrète . . . . .	17
1.3	Approximation en norme $L^\infty(\Omega)$ . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Approximation par élément finis d'une classe d'inéquation varia-</b>	

<b>tionnelle liée à un problème de contrôle ergodique</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.1.1 Notations et Hypothèses . . . . .	22
2.2 Problème continu . . . . .	23
2.2.1 Position du problème . . . . .	24
2.2.2 Régularité de la solution . . . . .	25
2.2.3 Propriété de lipschitzianité continue . . . . .	28
2.2.4 Notion des sous solutions . . . . .	29
2.3 Problème discret . . . . .	30
2.4 Estimation d'erreur en norme $L^\infty$ . . . . .	32
<b>3 Méthode de décomposition en deux sous domaines pour le</b>	
<b>problème de contrôle ergodique</b>	<b>37</b>
3.1 Application de la méthode de décomposition en deux sous domaines	
pour le cas d'un problème d'obstacle . . . . .	37
3.1.1 Introduction : . . . . .	38
3.2 Méthode alternée de Schwarz pour le problème de l'obstacle : . . . . .	43
3.2.1 Algorithme de Schwarz . . . . .	43
3.2.2 Convergence géométrique . . . . .	44
3.2.3 Discrétisation de l'algorithme de Schwarz . . . . .	44
3.2.4 Analyse de l'erreur en norme $L^\infty$ . . . . .	47

3.3	Estimation d'erreur en norme $L^\infty$ . . . . .	48
3.4	Application de la méthode de décomposition pour le problème d'obstacle lié à un problème de contrôle ergodique . . . . .	49
3.4.1	Suites de Schwarz continues . . . . .	49
3.4.2	Algorithme de Schwarz . . . . .	50
3.4.3	Convergence géométrique . . . . .	51
3.4.4	Suites de Schwarz discrètes . . . . .	51
3.4.5	Estimation d'erreur : . . . . .	52
3.5	Expérimentations numériques . . . . .	57
3.5.1	Eude Comparative : . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Méthode de Schwarz pour les inéquations quasi-variationnelles liées à un problème de contrôle ergodique</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	77
4.2	Méthode de Schwarz pour le problème de l'obstacle : . . . . .	80
4.2.1	Suites de Schwarz pour le problème (4.4) . . . . .	80
4.2.2	Suites de Schwarz continues pour le problème principal . . . . .	82
4.3	Problème discret . . . . .	83
4.3.1	Suites de Schwarz discrètes : . . . . .	84
4.4	Analyse de l'erreur en norme $L^\infty$ . . . . .	86

Conclusion et Perspectives

Bibliographie

# Notations

1) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  à frontière lipschitzienne.

2)  $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$  est l'espace de Banach, des fonctions mesurables et bornées définies presque partout de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \sup_{\text{ess } x \in \Omega} |u|.$$

3)  $\mathbb{L}^p(\Omega)$  est l'espace de Banach des fonctions mesurables définies presque partout de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , tel que  $\|u\|_p$  soit intégrable, muni de la norme

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

4) Soient  $m \geq 1$  un entier, et  $p$  un réel avec,  $1 \leq p < \infty$ .

$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$  désigne l'espace de Sobolev des fonctions de  $\mathbb{L}^p(\Omega)$  dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $m$  sont dans  $\mathbb{L}^p(\Omega)$ , muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

$$5) \mathbb{W}^{1,2}(\Omega) = \mathbb{H}^1(\Omega)$$

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega), \gamma v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Où,  $\gamma$  est l'application trace sur la frontière de  $\Omega$ .

6)  $\mathbb{V}$  désigne un espace de Hilbert  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  ou  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ .

Si  $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ , on pose :

$$v^+ = \sup(v, 0), \quad v^- = \sup(-v, 0).$$

7) Soit  $P_1$  l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à 1 telle que :

$$P_1 = \{p : p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

# Introduction

Les méthodes de décomposition de domaine ont subi depuis leur introduction par Schwarz en 1890 un développement intense et très accéléré durant les deux dernières décennies. Ceci est dû principalement au développement considérable qu'a vécu le monde des ordinateurs durant cette période.

Ces méthodes permettent principalement de réduire des systèmes de grande taille à des systèmes de petites taille facile et moins coûteux de point de vue résolution. Elles permettent aussi de transformer des problèmes aux limites posés sur des régions à géométrie irrégulière à un ensemble de problèmes posés sur des sous domaine réguliers et simples.

La première idée à été introduite par Schwarz, c'est pourquoi une attention particulière a été accordée et un nombre important de travaux réalisés depuis plus de deux décennies sur la méthode alternée de Schwarz en particulier et les méthodes de décompositton en sous domaines sur les inéquations variationnelles et plus précisément avec recouvrement pour un problème elliptique modèle avec conditions de Dirichlet aux bord.

La première partie de notre thèse concerne des généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques, nous introduisons également quelques notions supplémentaires sur l'approximations qui nous seront utiles dans les chapitres à suivre, telle que l'approximation en norme uniforme donnée par Cortey-Dumont [22].

Dans la deuxième partie, nous étudions une approximation numérique d'inéquation variationnelle où le terme d'ordre zéro tend vers zéro. Des estimations d'erreurs ont été obtenues en norme  $L^\infty$  en utilisant la méthode de sous solution.

La troisième partie est consacrée à la méthode de décomposition en deux sous domaines pour le problème de contrôle ergodique, un ordre de convergence quasi optimal est obtenu par cette méthode et des expérimentations numériques ont été faites dans ce sens.

Comme extension de ce travail, on considère la méthode de Schwarz "nonmatching grids methods" pour le problème d'obstacle lié à un problème de contrôle ergodique où l'obstacle dépend de la solution, sous l'hypothèse de principe de maximum discret, nous démontrons que la solution sur chaque sous domaine converge toujours de façon quasi optimale en norme  $L^\infty$ .

# Chapitre 1

## Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques

### 1.1 Notations et hypothèses

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  à frontière régulière  $\Gamma$ . L'opérateur elliptique considéré dans notre travail étant de la forme :

$$\mathbb{A}v = - \sum_{1 \leq j, k \leq N} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k}) + \sum_j a_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x)v \quad (1.1)$$

La forme bilinéaire  $a(., .)$  associée est définie par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{1 \leq j, k \leq N} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_j a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0(x)uv \right) dx, \quad (1.2)$$

Où les coefficients  $a_{jk}(x)$ ,  $a_j(x)$ ,  $a_0(x)$  sont supposés être suffisamment réguliers, et  $a_0(x)$  satisfait :

$$\forall x \in \Omega \quad a_0(x) \geq \beta > 0; \quad (1.3)$$

$$\sum_{j,k} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \gamma |\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega) \quad (1.4)$$

Où :  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes positives.

Nous supposons aussi que la forme bilinéaire est continue et fortement coercive :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2, \quad \alpha > 0, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Soit enfin un second membre  $f \in L^\infty(\Omega)$ , et un obstacle

$$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \text{ tel que : } \psi > 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (1.5)$$

On prend une fonction  $\rho = \psi \setminus_{B(x_0, Ch)}$ , alors

$$\forall x \in B(x_0, Ch) \text{ telle que } u(x) = \psi(x)$$

Nous obtenons

$$|u(x) - \rho(x)| \leq Ch^2 |\log h|^2. \quad (1.6)$$

**Remarque 1.1** Dans la suite on prend les hypothèses (1.1) à (1.5).

### 1.1.1 Inéquation variationnelle continue

**Définition 1.1** *Le problème suivant est appelé inéquation variationnelle elliptique*

*(I.V) :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{V} \text{ tel que :} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in \mathbb{V} \\ v \leq \psi, u \leq \psi \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Où  $\mathbb{V}$  est l'espace  $H_0^1(\Omega)$  ou  $H^1(\Omega)$ .

#### 1.1.1.1 Inégalité de Lévy-Stampacchia

**Lemme 1.1** [14] *Soit  $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  tel que  $\psi \geq 0$  sur  $\partial\Omega$ . Soit aussi  $\mathbb{A}$  un opérateur différentiel associé à la forme bilinéaire  $a(.,.)$  et  $u$  la solution du problème (1.7) tel que  $\mathbb{A}u \geq g$  (au sens de  $H^{-1}(\Omega)$ ), où  $g \in L^2(\Omega)$ . Alors,*

$$f \geq \mathbb{A}\psi \geq f \wedge g = \min\{f, g\} \quad (1.8)$$

**Théorème 1.1** [14] *Sous la condition (1.8), la solution  $u$  de (1.7) appartient à  $W^{2,p}(\Omega)$ ,  $2 \leq p < \infty$ , et  $\mathbb{A}u \in L^\infty(\Omega)$ .*

#### 1.1.1.2 Existence et unicité de la solution

**Théorème 1.2** [22] *Sous les hypothèses et les notations précédentes, le problème (1.7) admet une solution unique.*

**Lemme 1.2** *Si la forme bilinéaire  $a(.,.)$  n'est pas coercive, l'adjonction d'un  $\lambda$  assez grand nous permet de considérer la forme bilinéaire fortement coercive :*

$$b(.,.) = a(.,.) + \lambda(.,.) \quad (1.9)$$

### 1.1.2 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues

**Définition 1.2** *Soit  $X$  l'ensemble des sous-solutions pour l'I.V (1.7), c'est à dire l'ensemble des  $z \in \mathbb{V}$  tel que*

$$a(z, v) \leq (f, v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (1.10)$$

$$z \leq \psi, \quad v \geq 0$$

**Théorème 1.3** [22] *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution  $u$  de l'I.V (1.7) est le plus grand élément de  $X$ .*

### 1.1.3 Propriété de monotonie de la solution continue

On notera la solution de l'I.V (1.7) par  $\sigma(f, \psi)$ , où  $f$  est le second membre et  $\psi$  est l'obstacle.

**Proposition 1.1** [41] *Soient  $f$  et  $g$  deux seconds membres et  $\psi, \tilde{\psi}$  deux obstacles. Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution de l'I.V (1.7) est croissante par rapport à l'obstacle  $\psi$  et au second membre  $f$ , i.e :*

$$\text{si } f \leq g \text{ et } \psi \leq \tilde{\psi} \text{ alors } \sigma(f, \psi) \leq \sigma(g, \tilde{\psi}) \quad (1.11)$$

Considérons maintenant l'application  $\delta$  définie comme suit

$$\begin{aligned} \delta : L^\infty(\Omega) &\rightarrow L^\infty(\Omega) \\ (f, \psi) &\rightarrow \delta(f, \psi) = u. \end{aligned}$$

Où  $u$  est la solution de l'I.V (1.7).

**Proposition 1.2** [41] *Soit  $c$  une constante positive alors*

$$\delta(f + a_0c, \psi + c) = \delta(f, \psi) + c$$

## 1.2 Problème discret

Considérons un espace d'éléments finis conforme construit à partir d'un polynôme de degré 1. On établit sur  $\Omega$  une triangulation régulière  $\mathfrak{S}_h$  composée d'un nombre fini des triangles non dégénérés tels que

$$\Omega = \cup_{T_h \in \mathfrak{S}_h} T_h$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} T_h \cap T_{\hat{h}} = \emptyset \\ T_h \cap T_{\hat{h}} = \text{un sommet commun} \\ T_h \cap T_{\hat{h}} = \text{un coté commun} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

On note par  $h(T)$  le diamètre de chaque triangle  $T$  et  $\rho(T)$  le sup des sphères inscrites dans  $T$ , on suppose que :

$$T \in \mathfrak{S}_h, \quad 0 \leq v \leq \frac{h(T)}{\rho(T)} \leq \acute{v} \quad (1.13)$$

On introduit maintenant  $V_h$ , l'espace discret suivant

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) \text{ tel que } v/T \in P_1, \forall T \in \mathfrak{S}_h\} \quad (1.14)$$

On notera par  $\{\varphi_m\}_{m=1}^{M(h)}$  les fonctions de base usuelles définies par

$$\varphi_m(M_j) = \delta_{mj}, \quad \text{telles que : } \delta_{mj} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = j \\ 0 & \text{si } m \neq j \end{cases}$$

où  $M_j$  sont les sommets de la triangulation qui n'appartiennent pas à  $\Gamma$ , et  $M(h)$  étant le nombre de noeuds de triangulation.

L'opérateur de restriction naturel sera pour

$$v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega), \quad r_h v(x) = \sum_{m=1}^{M(h)} v(M_m) \varphi_m(x)$$

Rappelons maintenant la propriété :

$$\varphi_m \geq 0 \quad \forall m = 1, \dots, M(h), \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{M(h)} v(M_m) \varphi_m = 1$$

## 1.2.1 Position du problème

Considérons maintenant le problème discret associé au problème continu (1.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \forall v_h \in \mathbb{V}_h \\ v_h \leq r_h \psi, u_h \leq r_h \psi \end{array} \right. \quad (1.15)$$

### 1.2.1.1 Existence et unicité de la solution

**Théorème 1.4** [22] *Sous les hypothèses et notations précédentes le problème (1.15), admet une solution unique.*

## 1.2.2 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes

**Définition 1.3** *Soit  $X_h$  l'ensemble des sous-solutions pour l'I.V (1.15), c'est à dire l'ensemble des  $z_h \in \mathbb{V}_h$  tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} a(z_h, \varphi_m) \leq (f, \varphi_m) \quad \forall m = 1, \dots, M(h) \\ z_h \leq r_h \psi \end{array} \right. \quad (1.16)$$

**Théorème 1.5** [22] *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution  $u_h$  de l'I.V (1.15) est le plus grand élément de  $X_h$ .*

### 1.2.3 Propriété de monotonie de la solution discrète

On notera la solution  $u_h$  de l'I.V (1.15) par  $\sigma_h(f, r_h\psi)$ .

**Proposition 1.3** [41] *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution de l'I.V (1.15) est croissante par rapport à l'obstacle  $\psi$  et au second membre  $f$ .*

$$\text{Si } f \leq g \text{ et } \psi \leq \tilde{\psi} \text{ alors } \sigma_h(f, r_h\psi) \leq \sigma_h(g, r_h\tilde{\psi}) \quad (1.17)$$

Par analogie au cas continu, considérons l'application  $\delta_h$

$$\delta_h : L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega) \quad (1.18)$$

$$(f, \psi) \rightarrow \delta_h(f, r_h\psi) = u_h.$$

Où  $u_h$  est la solution discrète de l'I.V (1.15).

**Proposition 1.4** [41] *Soit  $c$  une constante positive, alors*

$$\delta_h(f + a_0c, r_h(\psi + c)) = \delta_h(f, r_h\psi) + c \quad (1.19)$$

### 1.3 Approximation en norme $L^\infty(\Omega)$

**Remarque 1.2** *La nature du problème d'inéquation variationnelle est l'existence de deux sous-ensembles de  $\Omega$  notés  $\Omega_0$  et  $C\Omega_0$  tels que :*

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega / u(x) = \psi(x)\}$$

$C\Omega_0$  est le complémentaire de  $\Omega_0$  dans  $\Omega$ .

*Soit maintenant l'approximation discrète de l'ensemble :*

$$\Omega_h = \{x \in \cup T_h / T_h \cap \Omega_0 \neq \emptyset\}$$

*D'après [22], on a le lemme suivant :*

**Lemme 1.3** *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons*

$$\|u - \psi\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

$$\|\psi - r_h\psi\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \tag{1.20}$$

**Preuve 1** Soit  $T_h$  dans  $\Omega_h$ , il existe  $x_0$  appartient à  $T_h$  tel que :

$$u(x_0) = \psi(x_0)$$

De plus

$$T_h \subset B(x_0, Ch)$$

Alors, pour tout  $x$  dans  $T_h$

$$u(x) \leq \psi(x)$$

Comme  $u$  est la solution de (1.7) et d'après l'hypothèse (1.5) et (1.6), on sait que

$$u(x) \leq \rho(x)$$

C'est à dire

$$u(x) \leq \psi(x) \leq u(x) + Ch^2 |\log h|^2$$

Donc

$$\|u - \psi\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Pour la deuxième estimation; d'après l'hypothèse (1.20) on a

$$\|u - r_h u\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

et

$$r_h u \leq r_h \psi \leq r_h u + Ch^2 |\log h|^2$$

D'où

$$\|\psi - r_h \psi\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

**Théorème 1.6** *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (1.21)$$

**Preuve 2** *Partie 1 :*

*Construction d'une fonction discrète  $\alpha_h$  proche de  $u$  qui vérifie*

$$\alpha_h \leq u_h \text{ et } \|\alpha_h - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

**Partie 2 :**

*Construction d'une fonction discrète  $\beta_h$  proche de  $u_h$  qui vérifie*

$$u_h \leq \beta_h \text{ et } \|\beta_h - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

*La démonstration du théorème se poursuit alors comme suit*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\infty &\leq \|u - \alpha_h\|_\infty + 2 \|\beta_h - u_h\|_\infty \\ &\leq Ch^2 |\log h|^2. \end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Approximation par élément finis d'une classe d'inéquation variationnelle liée à un problème de contrôle ergodique

### 2.1 Introduction

Il est bien connu que les problèmes de contrôle impulsionnel pour refléter un processus de diffusion peuvent être résolu en considérant une solution d'une inéquation variationnelle.

Le but d'utilisation d'un problème de contrôle ergodique est la minimisation de la fonction coût à long terme par unité de temps.

De tels problème sont naturels lorsque l'ont veut éviter l'introduction d'un taux d'actualisation dont la valeur est souvent arbitraire.

### 2.1.1 Notations et Hypothèses

Soit  $\Omega$  un polygone convexe de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma$  régulière.

Les coefficients  $a_{ij}$  et  $a_i$  sont suffisamment réguliers. On suppose que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , on a

$$a_{ij}(x), a_i(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

$$(p-1) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j + \sum_{i=1}^N a_i(x) \zeta_i \zeta_0 + \zeta_0^2 \geq 0, \quad p \geq 2. \quad (2.2)$$

Pour  $u, v \in H^1(\Omega)$ , on pose

$$a_\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \alpha uv \right) dx \quad (2.3)$$

et

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + uv \right) dx; \quad (2.4)$$

Où  $b(u, v)$  est la forme bilinéaire associée à l'opérateur elliptique suivant :

$$Bu = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u. \quad (2.5)$$

## 2.2 Problème continu

On s'intéresse ici à l'étude mathématique du problème de contrôle ergodique modélisé par une inéquation variationnelle. Plus précisément nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_\alpha + \alpha u_\alpha \leq f \\ u_\alpha \leq \psi \\ (u_\alpha - \psi)(Au_\alpha + \alpha u_\alpha - \psi) = 0 \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0; \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Avec

$$A = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  à frontière régulière,  $\psi$  est l'obstacle dans  $W^{2,\infty}(\Omega)$ .

La formulation variationnelle du problème (2.6) est définie comme suit :

Trouver  $u_\alpha$  solution d'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_\alpha, v - u_\alpha) + \alpha(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f, v - u_\alpha), \\ u_\alpha \in H^1(\Omega), \quad u_\alpha \leq \psi; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq \psi, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

tel que  $\alpha$  tend vers 0;  $\alpha > 0$ .

Où  $f$  est une fonction positive dans  $L^\infty(\Omega)$ ;

et

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(v) \, dx; \quad (2.8)$$

$(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ ; et  $\|\cdot\|_\infty$  la norme  $L^\infty$ .

Sous les hypothèses précédentes, on montre que  $u_\alpha$  converge vers  $u_0$  la solution unique de :

$$\begin{cases} a(u_0, v - u_0) \geq (f, v - u_0), \\ u_0 \in H^1(\Omega), \quad u_0 \leq \psi; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq \psi, \end{cases} \quad (2.9)$$

### 2.2.1 Position du problème

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , par une transformation facile,  $u_\alpha$  est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha), \\ u_\alpha \in H^1(\Omega), \quad u_\alpha \leq \psi; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq \psi, \end{cases} \quad (2.10)$$

Où

$$\gamma = 1 - \alpha$$

$$b(u, v) = a(u, v) + (u, v) \quad (2.11)$$

### Preuve 3

$$\begin{aligned} b(u_\alpha, v - u_\alpha) &= a(u_\alpha, v - u_\alpha) + (u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &\geq (f, v - u_\alpha) - \alpha (u_\alpha, v - u_\alpha) + (u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &= (f - \alpha u_\alpha + u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &= (f + (1 - \alpha)u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &= (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha) \quad , \quad \gamma = 1 - \alpha \end{aligned}$$

**Proposition 2.1** [7,26] *Sous les hypothèses (2.8) et (2.10),  $u_\alpha$  est uniformément bornée dans  $W^{p,\infty}(\Omega)$ ,  $p < +\infty$ . De plus  $u_\alpha$  converge uniformément sur  $\Omega$  et fortement dans  $H^1(\Omega)$  vers  $u_0$  la solution unique de (2.9).*

**Remarque 2.1** *Dans tout ce qui suit,  $C$  désignera une constante positive indépendante de  $\alpha$ .*

## 2.2.2 Régularité de la solution

**Lemme 2.1** [26] *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons*

$$\|u_\alpha\|_{H^1(\Omega)} \leq C;$$

Où  $u_\alpha$  est la solution du problème (2.10).

**Lemme 2.2** *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons*

$$\|u_\alpha\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C;$$

**Preuve 4** *La démonstration est une adaptation de [26].*

*Posons*

$$g = f + \gamma u_\alpha;$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|f + \gamma u_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma \|u_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le problème pénalisé

$$b(u_\alpha^\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} ((u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+, v) = (g, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega);$$

D'après (2.4), on a :

$$\begin{aligned}
b(\varphi, (\varphi^+)^{p-1}) &= b(\varphi^+, (\varphi^+)^{p-1}) \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} (p-1) (\varphi^+)^{p-2} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i} + \int_{\Omega} |\varphi^+|^{p-2} (\varphi^+)^2 dx
\end{aligned}$$

Et aussi en utilisant (2.2), on a

$$b(\varphi, (\varphi^+)^{p-1}) \geq 0, \quad (2.12)$$

Il vient donc,

$$\begin{aligned}
&b(u_\alpha^\varepsilon - \psi, ((u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+)^{p-1}) + \frac{1}{\varepsilon} \|(u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&= (g - B\psi, ((u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+)^{p-1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule (2.12), on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon} \|(u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|g - B\psi\|_{L^p(\Omega)} \|(u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}};$$

Avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

D'où

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+ \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C$$

Aussi, on a

$$Bu_\alpha^\varepsilon = g - \frac{1}{\varepsilon} (u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+$$

Et comme

$$\left\| g - \frac{1}{\varepsilon} (u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+ \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{1}{\varepsilon} (u_\alpha^\varepsilon - \psi)^+ \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C,$$

Donc

$$\|Bu_\alpha^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C,$$

D'où

$$\|u_\alpha^\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

Par passage à la limite sur  $\varepsilon$ , nous obtenons

$$\|u_\alpha\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C.$$

### 2.2.3 Propriété de lipschitzianité continue

**Notation :** On note par  $w = \sigma(g; \psi)$  la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} b(w, v - w) \geq (g, v - w) \\ v \leq \psi, w \leq \psi; \end{cases} \quad (2.13)$$

Alors

$$u_\alpha = \sigma(f + \gamma u_\alpha; \psi) \quad (2.14)$$

Soient  $g, \tilde{g} \in L^\infty(\Omega)$  et  $u = \sigma(g, \psi)$ ;  $\tilde{u} = \sigma(\tilde{g}, \psi)$  les solutions associées à (2.13).

**Proposition 2.2** : *Sous les notations au dessous, on a :*

$$\|\sigma(g, \psi) - \sigma(\tilde{g}, \psi)\|_\infty \leq \|g - \tilde{g}\|_\infty.$$

**Preuve 5** *On pose  $\varphi = \|g - \tilde{g}\|_\infty$ . Alors*

$$u + \varphi = \sigma(g + \varphi, \psi + \varphi).$$

Où :

$$\tilde{g} \leq g + \|g - \tilde{g}\|_\infty = g + \varphi$$

et

$$\psi \leq \psi + \varphi$$

Grace à la propriété de monotonie pour la solution de l'inéquation variationnelle elliptique, on obtient :

$$\sigma(\tilde{g}, \psi) \leq \sigma(g + \varphi, \psi + \varphi) = \sigma(g, \psi) + \varphi.$$

Donc

$$\sigma(\tilde{g}, \psi) - \sigma(g, \psi) \leq \varphi.$$

Finalement, comme  $g$  et  $\tilde{g}$  sont symétriques ; on a le résultat désiré.

La propriété suivante est crucial dans ce travail :

## 2.2.4 Notion des sous solutions

**Définition 2.1** Soit  $X$  l'ensemble des sous solutions de problème (2.10), tel que  $w \in X$  si :

$$b(w, v) \leq (f + \gamma w, v),$$

$$\forall v \in H^1(\Omega), v \geq 0, w \leq \psi.$$

**Lemme 2.3** : La solution  $u_\alpha$  de (2.10) est le plus grand élément de  $X$ .

La preuve est standard ; on adaptant [21].

## 2.3 Problème discret

On établit sur  $\Omega$  une triangulation régulière quasi-uniforme et on introduit  $V_h$  l'espace d'élément finis conforme suivant :

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \text{ tel que } v_h|_T \in P_1\}. \quad (2.15)$$

On considère l'inéquation variationnelle discrète suivante :

$$\begin{cases} a(u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) + \alpha(u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) \geq (f, v_h - u_{\alpha h}), \\ u_{\alpha h} \in V_h, \quad u_{\alpha h} \leq r_h \psi; \quad v_h \in V_h, \quad v_h \leq r_h \psi, \end{cases} \quad (2.16)$$

Comme dans le cas continu, ce problème sera :

$$\begin{cases} b(u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) \geq (f + \gamma u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}), \\ u_{\alpha h} \in V_h, \quad u_{\alpha h} \leq r_h \psi; \quad v_h \in V_h, \quad v_h \leq r_h \psi, \end{cases} \quad (2.17)$$

### 2.3.0.1 Principe de maximum discret [2]

On suppose que la matrice  $B_\alpha$  de coefficient générique

$$b(\varphi_i, \varphi_j) \text{ est une } M\text{-matrice.} \quad (2.18)$$

Comme dans le cas continu, il est facile de montrer que  $u_{\alpha h}$  converge vers  $u_{0h}$ , la solution de l'I.V discrète suivante :

$$\begin{cases} a(u_{0h}, v_h - u_{0h}) \geq (f, v_h - u_{0h}), \\ u_{0h} \in V_h, \quad u_{0h} \leq r_h \psi; \quad v_h \in V_h, \quad v_h \leq r_h \psi, \end{cases} \quad (2.19)$$

**Proposition 2.3** [26] *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution  $u_{\alpha h}$  de (2.17) converge uniformément sur  $\Omega$  et fortement dans  $H^1(\Omega)$  vers  $u_{0h}$  l'unique solution de (2.19).*

**Notation :** On note  $w_h = \sigma_h(g, \psi)$  la solution de l'I.V discrète suivante :

$$b(w_h, v_h - w_h) \geq (g, v_h - w_h), \quad v_h \leq r_h \psi, \quad w_h \leq r_h \psi.$$

Alors,

$$u_{\alpha h} = \sigma_h(f + \gamma u_{\alpha h}; \psi)$$

Comme dans le cas continu, on établit la propriété de lipschitzianité discrète suivante :

**Proposition 2.4** *Si l'hypothèse (2.18) est vérifiée, alors on a :*

$$\|\sigma_h(g, \psi) - \sigma_h(\tilde{g}, \psi)\|_\infty \leq \|g - \tilde{g}\|_\infty. \quad (2.20)$$

La preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.

On définit  $X_h$  l'ensemble des sous solution discrète du problème 2.17; tel que :

$w_h \in X_h$  si

$$b(w_h, \varphi_i) \leq (f + \gamma w_h, \varphi_i),$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m(h)\}, \quad w_h \leq r_h \psi$$

**Lemme 2.4** *Si l'hypothèse (2.18) est vérifiée, la solution  $u_{\alpha h}$  de (2.17) est le plus grand élément de  $X_h$ .*

La preuve est similaire à celle du lemme 2.3.

Soit  $\bar{u}_h$  la solution de l'I.V discrète :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, v_h - \bar{u}_h) \geq (f + \gamma u_\alpha, v_h - \bar{u}_h), \\ v_h \leq r_h \psi, \quad \bar{u}_h \leq r_h \psi; \end{cases} \quad (2.21)$$

$u_\alpha$  est solution de (2.10)

Soit  $u^{(h)}$  la solution de l'I.V continue :

$$\begin{cases} b(u^{(h)}, v - u^{(h)}) \geq (f + \gamma u_{\alpha h}, v - u^{(h)}), \\ v \leq \psi, \quad u^{(h)} \leq \psi; \end{cases} \quad (2.22)$$

telle que  $u_{\alpha h}$  la solution de (2.17).

### Lemme 2.5

- $\|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2,$
  - $\|u^{(h)} - u_{\alpha h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$
- (2.23)

**Preuve 6** *C'est une adaptation de [21].*

## 2.4 Estimation d'erreur en norme $L^\infty$

### Théorème 2.1

- $\|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2,$
  - $\|u_0 - u_{0h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$
- (2.24)

**Preuve 7 Etape 1 :**

On définit  $w_h$  une approximation de  $u_\alpha$  en norme  $L^\infty$  qui satisfait  $w_h \leq u_{\alpha h}$ .

D'après le lemme 2.4, il est clair que :

$$b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leq (f + \gamma u_\alpha, \varphi_i)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m(h)\}, \bar{u}_h \leq r_h \psi$$

Où :

$$u_\alpha \leq \bar{u}_h + \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty$$

et :

$$u_{\alpha h} \geq 0.$$

$$b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leq (f + \gamma \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty + \gamma \bar{u}_h + \gamma u_{\alpha h}, \varphi_i).$$

Appliquant une autre fois le lemme 2.4, il suit que  $\bar{u}_h \in X_h$  où  $f + \lambda u_\alpha$  est remplacé

par :

$$g = f + \gamma \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty + \gamma \bar{u}_h + \gamma u_{\alpha h}.$$

Soit :

$$U_h = \sigma_h(g, \psi).$$

D'après la proposition 2.4, on obtient :

$$\|U_h - u_{\alpha h}\|_\infty \leq \gamma \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty,$$

et d'après le lemme 2.5 :

$$\bar{u}_h \leq u_{\alpha h} + Ch^2 |\log h|^2.$$

Soit,

$$w_h = \bar{u}_h - Ch^2 |\log h|^2.$$

Il est clair que :

$$\|w_h - u_\alpha\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

et

$$w_h \leq u_{\alpha h}.$$

**Etape 2 :** Similairement, on définit  $\beta^{(h)}$  une approximation de  $u_{\alpha h}$  qui satisfait ;

$$\beta^{(h)} \leq u_\alpha.$$

Où  $u^{(h)}$  est la solution de (2.23),

$$u_{\alpha h} \leq u^{(h)} + \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty.$$

$u^{(h)} \in X$ , alors

$$b(u^{(h)}, v) \leq (f + \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty + \gamma u^{(h)}, v)$$

$$u^{(h)} \leq \psi, \quad \forall v \in H^1(\Omega); \quad v \geq 0.$$

Où  $u_\alpha \geq 0$ .

$$b(u^{(h)}, v) \leq (f + \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty + \gamma u^{(h)} + \gamma u_\alpha, v)$$

$$u^{(h)} \leq \psi, \quad \forall v \in H^1(\Omega); \quad v \geq 0.$$

De plus, d'après le lemme 2.3,  $u^{(h)} \in X$  avec le second membre :

$$g = f + \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_{\infty} + \gamma u^{(h)} + \gamma u_{\alpha}$$

Soit  $U = \sigma(g, \psi)$ . Alors appliquant la proposition 2.2, on obtient :

$$\|U - u_{\alpha}\|_{\infty} \leq \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_{\infty}.$$

Alors :

$$u^{(h)} \leq u_{\alpha} + Ch^2 |\log h|^2.$$

Accordant au lemme 2.5 :

$$\beta^{(h)} = u^{(h)} - Ch^2 |\log h|^2.$$

Avec

$$\|\beta^{(h)} - u_{\alpha h}\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

**Etape 3 :** On conclut que :

$$\begin{aligned} u_{\alpha h} &\leq \beta^{(h)} + Ch^2 |\log h|^2. \\ &\leq u^{(h)} \\ &\leq u_\alpha + Ch^2 |\log h|^2. \\ &\leq w_h + Ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq u_{\alpha h} + Ch^2 |\log h|^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

Et

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_{0h}\|_\infty &\leq \|u_0 - u_\alpha\|_\infty + \|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty + \|u_{\alpha h} - u_{0h}\|_\infty \\ &\leq \lim_\alpha \|u_0 - u_\alpha\|_\infty + \|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty + \lim_\alpha \|u_{\alpha h} - u_{0h}\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc, appliquant la proposition 2.1 et 2.3; on obtient :

$$\|u_0 - u_{0h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

## Chapitre 3

# Méthode de décomposition en deux sous domaines pour le problème de contrôle ergodique

### 3.1 Application de la méthode de décomposition en deux sous domaines pour le cas d'un problème d'obstacle

### 3.1.1 Introduction :

Les problèmes à frontière libre possèdent plusieurs importants phénomènes en physique, qui sont bien connu comme problèmes d'obstacles, et sont modélisés par des inéquations variationnelles. Pendant les deux dernières décennies, une attention particulière a été accordée et un nombre important de travaux réalisés sur la méthode alternée de Schwarz en particulier et les méthode de décomposition en sous domaines pour les équations aux dérivées partielles.

Cependant, quelques travaux seulement sont connus sur le sujet, pour les inéquations variationnelles qui résultent de beaucoup d'applications physiques, comme le flux de fluide dans des milieux poreux, le comportement des matières d'elasto-plastique. Ces problèmes sont en général à frontière libre comme bien connu le problème d'obstacle. La première partie de ce chapitre concerne la méthode de décomposition en sous domaines pour le problème d'obstacle :

Trouver  $u$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Au \leq f & \text{dans } \Omega \\ u \leq \psi & \text{dans } \Omega \\ (Au - f)(u - \psi) = 0 & \\ \psi & \text{conditions aux limites.} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Où  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$  à frontière régulière  $\partial\Omega$ ,

$f$  est une fonction régulière et  $\psi$  est un obstacle dans  $W^{2,\infty}(\Omega)$  tel que  $\psi \geq 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Ce problème se caractérise par une zone où l'équation  $Au = f$  est satisfaite et une zone où  $u$  touche l'obstacle, la courbe de séparation appelée frontière libre étant une inconnue.

De très nombreux phénomènes physiques, mécaniques, économiques,..sont modélisables par des inéquations variationnelles de type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{k} \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in \mathbb{k} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Où  $\mathbb{k}$  est un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert  $V$  présenté sous la forme :

$$\mathbb{k} = \{u \in V \text{ tel que } u \leq \psi \text{ p.p sur } \partial\Omega\} \quad (3.3)$$

Où  $a(, )$  est une forme bilinéaire continue, coercive sur  $V \times V$  et  $f \in V$ .

L'existence et l'unicité de la solution, pour ce type d'inéquation variationnelle simple ont été démontrées par J-L.Lions et G-Stampacchia [1].

Nous étudions dans ce travail la convergence de l'approximation par élément finis de la méthode alternée de Schwarz pour le problème de l'obstacle (3.1)

Où :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

$f$  un second membre régulier.

$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$  un obstacle tel que  $\psi \geq 0$  sur  $\partial\Omega$ .

$$\mathbb{k} = \{v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } v \leq \psi \text{ p.p sur } \Omega\}$$

On décompose  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec recouvrement, tel que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

On note par  $\partial\Omega_i$   $i=1,2$  la frontière de  $\Omega_i$ , et  $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ .

L'intersection de  $\bar{\Gamma}_i$  et  $\bar{\Gamma}_j$  ( $i \neq j$ ) est supposé vide.

Partant de  $u^0 = \psi$ , la méthode alternée de Schwarz appliquée au problème (3.1)

conduit à la résolution des sous problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1, v - u_1^{n+1}) \quad \forall v \in \mathbb{k}, \quad v = u_2^n \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad u_1^{n+1} \in \mathbb{k}. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2, v - u_2^{n+1}) \quad \forall v \in \mathbb{k}, \quad v = u_1^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad u_2^{n+1} \in \mathbb{k}. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx, \quad i = 1, 2.$$

et

$$f_i = f \setminus \Omega_i.$$

L'étude de la convergence uniforme des suites de Schwarz  $(u_1^{n+1})$  et  $(u_2^{n+1})$  a été réalisée par P-L.Lions [30].

Nous établissons sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des triangulations indépendantes au sens où sur  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  un triangle appartenant à une triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre. Ce type de discrétisation offre divers avantages,

Plus précisément le choix de la triangulation sur un sous domaine peut se faire en fonction de la géométrie de celui-ci ainsi que du degré de régularité locale de la solution. Sur le plan purement calcul, le temps est économisé dans la triangulation automatique de problèmes avec géométrie complexe. Notre propos dans ce contexte est la contribution à l'étude de l'analyse de l'erreur en norme  $L^\infty$  de la méthode alternée de Schwarz.

La discrétisation par éléments finis  $P_1$  des problèmes (3.4) et (3.5) est définie très classiquement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(u_{1h_1}^{n+1}, v - u_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v - u_{1h_1}^{n+1}) \quad \forall v \in V_{h_1}(u_{2h_2}^{n+1}) \text{ sur } \Gamma_1; v_h \in \mathbb{k}_{h_1} \\ u_{1h_1}^{n+1} \in \mathbb{k}_{h_1}, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2(u_{2h_2}^{n+1}, v - u_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v - u_{2h_2}^{n+1}) \quad \forall v \in V_{h_2}(u_{1h_1}^{n+1}) \text{ sur } \Gamma_2; v_h \in \mathbb{k}_{h_2} \\ u_{2h_2}^{n+1} \in \mathbb{k}_{h_2}, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$V_{h_i} = \{v \in H_0^1(\Omega_i), v|_k \in P_1, \forall k \in \tau_{h_i}\},$$

Et pour tout  $w_i \in C(\bar{\Gamma}_i)$  :

$$V_{h_i}^{(w_i)} = \{v \in V_{h_i}, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \Omega_i, v = r_{h_i}(w_i) \text{ sur } \Gamma_i\},$$

$$\mathbb{k}_{h_i} = \{v \in V_{h_i} \text{ tel que } v \leq r_{h_i}\psi\},$$

$V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$  étant l'espace d'éléments finis  $P_1$  sur le sous domaine  $\Omega_i$  et  $r_{h_i}$  est l'opérateur d'interpolation usuel.

## 3.2 Méthode alternée de Schwarz pour le problème de l'obstacle :

Considérons le problème de l'obstacle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), v \leq \psi \\ u \leq \psi. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

On décompose  $\Omega$  en deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , avec recouvrement, tels que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

L'intersection de  $\bar{\Gamma}_i$  et  $\bar{\Gamma}_j$  ( $i \neq j$ ) est supposée vide.

### 3.2.1 Algorithme de Schwarz

Pour  $u^0 = \psi$ , on définit respectivement les suites  $(u_1^{n+1})$  sur  $\Omega_1$  et  $(u_2^{n+1})$  sur  $\Omega_2$  générées par la méthode alternée de Schwarz :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1, v - u_1^{n+1}) \quad \forall v \leq \psi, v = u_2^n \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \quad \text{sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2, v - u_2^{n+1}) \quad \forall v \leq \psi, v = u_1^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Où

$$f_i = f \setminus \Omega_i,$$

et,

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx, \quad i = 1, 2.$$

Le théorème suivant, dû à P-L.Lions [30], établit la convergence géométrique des suites  $(u_1^{n+1})$  et  $(u_2^{n+1})$  vers la solution du problème de l'obstacle (3.8).

### 3.2.2 Convergence géométrique

**Théorème 3.1** [30] *Les suites  $(u_1^{n+1})$ ;  $(u_2^{n+1})$ ,  $n \geq 0$ , générées par l'algorithme de Schwarz convergent géométriquement vers la solution  $u$  du problème d'obstacle (3.8). Plus précisément il existe deux constantes  $k_1, k_2 \in ]0, 1[$  telle que pour tout  $n \geq 0$ ,*

$$\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq k_1^n k_2^n \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_1)}, \quad (3.11)$$

$$\|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq k_1^{n+1} k_2^n \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_2)},$$

Où  $u_i = u \setminus \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ .

### 3.2.3 Discrétisation de l'algorithme de Schwarz

Pour  $i = 1, 2$ , on note par  $\tau^{h_i}$  une famille de triangulations régulière quasi uniforme de  $\Omega_i$ ,  $h_i$  étant le pas de discrétisation sur  $\Omega_i$ .

On suppose également que les deux triangulations sont mutuellement indépendantes sur  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , au sens où un triangle appartenant à un domaine de triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre. (voir Figure 3.1, 3.2)

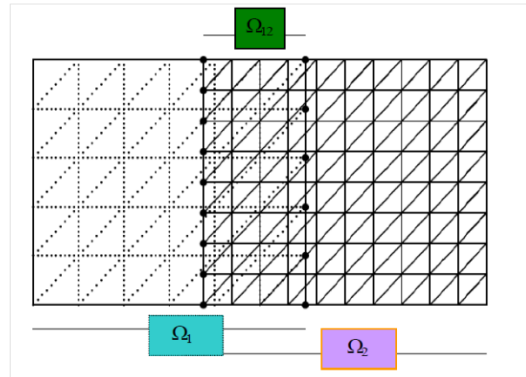


Figure 3.1

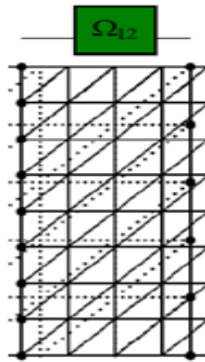


Figure 3.2- la partie nonmatching

Soit  $V_{h_i}$  l'espace des fonctions linéaires, continues par morceaux sur  $\tau^{h_i}$ , qui s'annulent sur  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$ .

Pour  $w \in C(\bar{\Gamma}_i)$ , nous définissons

$$V_{h_i}^{(w)} = \{v \in V_{h_i} : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \Omega \text{ et } v = \pi_{h_i}(w) \text{ sur } \Gamma_i\}. \quad (3.12)$$

où  $\pi_{h_i}$  désigne un opérateur d'interpolation convenable sur  $\Gamma_i$ , qui préserve la précision.

Soit aussi

$$\mathbb{K}_{h_i}^{(w)} = \left\{ v \in V_{h_i}^{(w)} : v \leq r_{h_i} \psi \right\}. \quad (3.13)$$

### Hypothèse du principe de Maximum Discret (pmd) [2] :

Nous supposons que les matrices de rigidité  $A^i$  qui résultent de la discrétisation sur chaque sous-domaine, sont des M-matrices. ( $(A^i)^{-1}$  existe et est non négative, de plus  $A_{ss}^i > 0, A_{ls}^i \leq 0$  pour  $l \neq s$ ).

Nous définissons maintenant les analogues discrets des suites de Schwarz définies dans (3.9) et (3.10), respectivement par :  $(u_{1h_1}^{n+1})$  et  $(u_{2h_2}^{n+1})$ , telles que  $u_{1h_1}^{n+1}$  est l'unique solution de l'I.V discrète :

$$a_1(u_{1h_1}^{n+1}, v - u_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v - u_{1h_1}^{n+1}) \quad , \forall v \in \mathbb{K}_{h_1}^{(u_{2h_2}^n)}, \quad (3.14)$$

et  $u_{2h_2}^{n+1}$  est l'unique solution de l'I.V discrète :

$$a_2(u_{2h_2}^{n+1}, v - u_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v - u_{2h_2}^{n+1}) \quad , \forall v \in \mathbb{K}_{h_2}^{(u_{1h_1}^{n+1})}, \quad (3.15)$$

### 3.2.4 Analyse de l'erreur en norme $L^\infty$

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat principal de ce travail. Pour cela, nous commençons par introduire deux suites intermédiaires discrètes et montrer un lemme fondamental.

#### 3.2.4.1 Définition de deux suites auxiliaires

Pour  $w_{ih}^0 = u_{ih}^0 = r_{h_i} \psi$ ;  $i = 1, 2$ , on définit les suites  $(w_{1h_1}^{n+1})$  et  $(w_{2h_2}^{n+1})$  telles que  $w_{1h_1}^{n+1} \in \mathbb{K}_{h_1}^{(u_2^n)}$ , satisfait :

$$a_1(w_{1h_1}^{n+1}, v - w_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v - w_{1h_1}^{n+1}) \quad , \forall v \in \mathbb{K}_{h_1}^{(u_2^n)} ,$$

respectivement  $w_{2h_2}^{n+1} \in \mathbb{K}_{h_2}^{(u_1^{n+1})}$  par :

$$a_2(w_{2h_2}^{n+1}, v - w_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v - w_{2h_2}^{n+1}) \quad , \forall v \in \mathbb{K}_{h_2}^{(u_1^{n+1})} .$$

Dans la suite de ce travail, nous adapterons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} |\cdot|_1 &= \|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \quad , \quad |\cdot|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_2)} , \\ \|\cdot\|_1 &= \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_1)} \quad , \quad \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_2)} , \\ h_1 &= h_2 = h \quad , \quad r_{h_1} = r_{h_2} = r_h \quad , \quad \pi_{h_1} = \pi_{h_2} = \pi_h . \end{aligned}$$

Le lemme suivant jouera un rôle crucial dans la démonstration du résultat principal.

**Lemme 3.1** [40] Soit  $(u_i^{n+1})$  et  $(u_{ih}^{n+1})$ , ( $i = 1, 2$ ), les suites définies en (3.9), (3.10) et (3.14), (3.15), respectivement. Alors, on a :

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2, \quad (3.16)$$

et

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1. \quad (3.17)$$

### 3.3 Estimation d'erreur en norme $L^\infty$

**Théorème 3.2** [40] Il existe deux constantes  $k$ ,  $0 < k < 1$  et  $c$  indépendante de  $h$  et  $n$  telle que pour tout

$$n \leq \frac{\log h}{\log k},$$

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq ch^2 |\log h|^3, i = 1, 2$$

### 3.4 Application de la méthode de décomposition pour le problème d'obstacle lié à un problème de contrôle ergodique

#### 3.4.1 Suites de Schwarz continues

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\alpha \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha) \quad \forall v \leq \psi, \\ \forall u_\alpha \leq \psi \end{array} \right. \quad (3.18)$$

$\alpha$  est la constante d'ergodicité;  $\alpha \in ]0,1[$

et

$$\gamma = 1 - \alpha$$

On décompose  $\Omega$  en deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , avec recouvrement, tel que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

L'intersection de  $\bar{\Gamma}_i$  et  $\bar{\Gamma}_j$  ( $i \neq j$ ) est toujours supposée vide.

### 3.4.2 Algorithme de Schwarz

Pour  $u_\alpha^0 = u_0$ , telle que  $u_0$  est la solution unique de :

$$a(u_0, v - u_0) \geq (f, v - u_0), \quad (3.19)$$

On définit respectivement les suites  $(u_{\alpha_1}^{n+1})$  sur  $\Omega_1$  et  $(u_{\alpha_2}^{n+1})$  sur  $\Omega_2$  générées par la méthode alternée de Schwarz, telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(u_{\alpha_1}^{n+1}, v - u_{\alpha_1}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma u_{\alpha_1}^n, v - u_{\alpha_1}^{n+1}) \quad \forall v \leq \psi, \quad v = u_{\alpha_2}^n \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ u_{\alpha_1}^{n+1} = u_{\alpha_2}^n \quad \text{sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2(u_{\alpha_2}^{n+1}, v - u_{\alpha_2}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma u_{\alpha_2}^n, v - u_{\alpha_2}^{n+1}) \quad \forall v \leq \psi, \quad v = u_{\alpha_1}^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ u_{\alpha_2}^{n+1} = u_{\alpha_1}^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Où

$$f_i = f \setminus \Omega_i,$$

et,

$$b_i(u_\alpha, v) = a_i(u_\alpha, v) + \gamma \int_{\Omega_i} u_\alpha v dx \quad i = 1, 2. \quad (3.22)$$

Le théorème suivant, dû à P-L.Lions, établit la convergence géométrique des suites  $(u_{\alpha_1}^{n+1})$  et  $(u_{\alpha_2}^{n+1})$  vers la solution du problème de l'obstacle (3.18).

### 3.4.3 Convergence géométrique

**Théorème 3.3** [30] *Les suites  $(u_{\alpha 1}^{n+1}) ; (u_{\alpha 2}^{n+1})$ ,  $n \geq 0$ , générées par l'algorithme de Schwarz convergent géométriquement vers la solution  $u_\alpha$  du problème d'obstacle (3.18). Plus précisément il existe deux constantes  $\rho_1, \rho_2 \in ]0, 1[$  telle que pour tout  $n \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} &\leq (\rho_1^n \rho_2^n) \|u_\alpha - u_\alpha^0\|_{L^\infty(\Gamma_1)}, \\ \|u_{\alpha 2} - u_{\alpha 2}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} &\leq (\rho_1^{n+1} \rho_2^n) \|u_\alpha - u_\alpha^0\|_{L^\infty(\Gamma_2)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

#### Principe de maximum discret [2] :

On suppose que la matrice sur chaque sous domaines  $A_{\alpha i}$ ,  $i = 1, 2$  de coefficients génériques :

$$a_{\alpha i}(\varphi_i, \varphi_j) \quad (3.24)$$

est une  $M$ -matrice.

### 3.4.4 Suites de Schwarz discrètes

Soit  $\tau_i$  ( $i = 1, 2$ ) une triangulation régulière quasi uniforme par élément finis standard dans  $\Omega_i$ .

On considère une méthode de décomposition en deux sous domaines avec recouvrement pour un problème de contrôle ergodique. On utilise sur chaque sous domaine la méthode de Schwarz (non-matching grids).

### 3.4.4.1 Algorithme discret

On choisit  $u_{\alpha h}^0 = u_{0h}$ , telle que  $u_{0h}$  est la solution de l'inéquation suivante :

$$a(u_{0h}, v - u_{0h}) \geq (f, v - u_{0h}),$$

On définit la suite  $(u_{\alpha 1h}^{n+1})$  sur  $\Omega_1$  générée par la méthode alternée de Schwarz ; telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(u_{\alpha 1h}^{n+1}, v - u_{\alpha 1h}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma u_{\alpha 1h}^n, v - u_{\alpha 1h}^{n+1}) \quad \forall v \leq r_{h_1} \psi, v = u_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_{\alpha 1h}^{n+1} = u_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

et  $(u_{\alpha 2h}^{n+1})$  sur  $\Omega_2$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2(u_{\alpha 2h}^{n+1}, v - u_{\alpha 2h}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma u_{\alpha 2h}^n, v - u_{\alpha 2h}^{n+1}) \quad \forall v \leq r_{h_2} \psi, v = u_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_{\alpha 2h}^{n+1} = u_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Où  $r_{h_i}$  est un opérateur de restriction usuel dans  $\Omega_i$ .

## 3.4.5 Estimation d'erreur :

### 3.4.5.1 Définition des suites auxiliaires :

Pour  $z_{\alpha ih}^0 = u_{\alpha ih}^0 = u_{0h}$ ;  $i = 1, 2$ , on définit la suite  $z_{\alpha 1h}^{n+1}$  sur  $\Omega_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(z_{\alpha 1h}^{n+1}, v - z_{\alpha 1h}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma z_{\alpha 1h}^n, v - z_{\alpha 1h}^{n+1}) \quad \forall v \leq r_{h_1} \psi, v = z_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ z_{\alpha 1h}^{n+1} = z_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

et  $z_{\alpha 2h}^{n+1}$  sur  $\Omega_2$  telle que :

$$\begin{cases} b_2(z_{\alpha 2h}^{n+1}, v - z_{\alpha 2h}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma z_{\alpha 2h}^n, v - z_{\alpha 2h}^{n+1}) \quad \forall v \leq r_{h_2} \psi, \quad v = z_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ z_{\alpha 2h}^{n+1} = z_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.28)$$

Notons par  $(z_{\alpha i h}^{n+1})$ ,  $i = 1, 2$  est l'approximation par éléments finis de  $(u_{\alpha i}^{n+1})$  définies dans (3.20) et (3.21).

Le lemme suivant jouera un rôle crucial dans la démonstration du résultat principal.

**Lemme 3.2** *On a :*

$$\|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 \quad (3.29)$$

et

$$\|u_{\alpha 2}^{n+1} - u_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 21}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1. \quad (3.30)$$

Telle que :

$$\|u_{\alpha 2}^0 - z_{\alpha 2h}^0\|_2 = \|u_0 - u_{0h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

**Preuve 8** *Raisonnons par récurrence ;*

*Pour  $n = 0$ , en utilisant l'analogie discret de la proposition 2.3, on obtient :*

$$\|u_{\alpha 1}^1 - u_{\alpha 1h}^1\|_1 \leq \sum_{p=1}^1 \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^0 \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2$$

$$\|u_{\alpha 2}^1 - u_{\alpha 2h}^1\|_2 \leq \sum_{p=0}^1 \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^1 \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1$$

Pour le sous domaine  $\Omega_1$  :

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha 1}^1 - u_{\alpha 1h}^1\|_1 &\leq \|u_{\alpha 1}^1 - z_{\alpha 1h}^1\|_1 + \|z_{\alpha 1h}^1 - u_{\alpha 1h}^1\|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1}^1 - z_{\alpha 1h}^1\|_1 + |\pi_h u_{\alpha 2}^0 - \pi_h u_{\alpha 2h}^0|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1}^1 - z_{\alpha 1h}^1\|_1 + |u_{\alpha 2}^0 - u_{\alpha 2h}^0|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1}^1 - z_{\alpha 1h}^1\|_1 + \|u_{\alpha 2}^0 - u_{\alpha 2h}^0\|_2 \end{aligned}$$

le sous domaine  $\Omega_2$  :

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha 2}^1 - u_{\alpha 2h}^1\|_2 &\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + \|z_{\alpha 2h}^1 - u_{\alpha 2h}^1\|_2 \\ &\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + |\pi_h u_{\alpha 1}^1 - \pi_h u_{\alpha 1h}^1|_2 \\ &\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + |u_{\alpha 1}^1 - u_{\alpha 1h}^1|_2 \\ &\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + \|u_{\alpha 1}^1 - u_{\alpha 1h}^1\|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + \|u_{\alpha 1}^1 - z_{\alpha 1h}^1\|_1 + \|u_{\alpha 2}^0 - u_{\alpha 2h}^0\|_2 \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que :

$$\|u_{\alpha 2}^n - u_{\alpha 2h}^n\|_2 \leq \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^n \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + \|z_{\alpha 1h}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + |\pi_h u_{\alpha 2}^n - \pi_h u_{\alpha 2h}^n|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + |u_{\alpha 2}^n - u_{\alpha 2h}^n|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + \|u_{\alpha 2}^n - u_{\alpha 2h}^n\|_2 \\ &\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^n \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2$$

De même, en utilisant l'estimation précédente, nous obtenons :

$$\|u_{\alpha 2}^{n+1} - u_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 \leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \|z_{\alpha 2h}^{n+1} - u_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2$$

$$\begin{aligned}
\|u_{\alpha 2}^{n+1} - u_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 &\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + |\pi_h u_{\alpha 1}^{n+1} - \pi_h u_{\alpha 1h}^{n+1}|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1 \\
&\leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1
\end{aligned}$$

**Théorème 3.4** *Il existe deux constantes  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$  et  $C$  indépendantes de  $h$  et  $n$  telle que pour tout*

$$n + 1 \leq \frac{\log h}{\log \rho}. \quad (3.31)$$

On a

$$\|u_{\alpha i} - u_{\alpha ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2 \quad (3.32)$$

et

$$\|u_{0i} - u_{0ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2 \quad (3.33)$$

**Preuve 9** *Prouvons l'estimation pour  $i = 1$ , le cas  $i = 2$  étant similaire.*

*En effet, soit  $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ .*

Donc

$$\begin{aligned}
& \|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \leq \|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}^{n+1}\|_1 + \|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \\
& \leq (\rho)^{n+1} \|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}^0\|_1 + (n+1) C_1 h^2 |\log h|^2 + n C_2 h^2 |\log h|^2 \\
& \leq (\rho)^{n+1} \|u_{\alpha 1} - u_{01}\|_1 + (n+1) C_1 h^2 |\log h|^2 + n C_2 h^2 |\log h|^2 \\
& \leq (\rho)^{n+1} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_{\alpha 1} - u_{01}\|_1 + (n+1) C_1 h^2 |\log h|^2 + n C_2 h^2 |\log h|^2.
\end{aligned}$$

Où nous avons employé le théorème 3.4, le lemme 3.3, nous obtenons :

$$\|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \leq C h^2 |\log h|^3$$

D'où l'estimation d'erreur désirée.

Pour le cas  $\alpha = 0$ , nous adaptions [40].

### 3.5 Expérimentations numériques

Afin de valider la théorie, nous avons fait les expérimentations numériques sur la méthode alternée de Schwarz pour le problème de contrôle ergodique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\alpha \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha) \quad \forall v \leq \psi, \\ u_\alpha \leq \psi \end{array} \right.$$

avec

$$\gamma = 1 - \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in ]0,1[$$

on a :

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad V = H_0^1(\Omega)$$

$$Au = -\Delta u + 0.5x \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5y \frac{\partial u}{\partial y} + 0.45u$$

$$f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y),$$

$$\psi = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{telle que : } \text{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) = d,$$

Processus d'arrêt :

$$\|u_{1h_1}^n - u_{1h_1}^{n-1}\|_1 < \epsilon_1, \quad \|u_{2h_2}^n - u_{2h_2}^{n-1}\|_2 < \epsilon_2,$$

Avec

$$\epsilon_1, \epsilon_2 \text{ fixés ; } \epsilon_1 = 10^{-6}, \epsilon_2 = 10^{-6}, u_{ih}^0 = 0, \forall i = 1, 2$$

Où, à chaque macro-iteration (itération de Schwarz), nous avons employé sur chaque sous domaine, la méthode de sur relaxation avec projection ; avec le paramètre  $w = 1.5$

$$\Omega_1 = [0, x_1] \times [0, 1], \quad \Omega_2 = [x_2, 1] \times [0, 1],$$

$$d = x_1 - x_2, \quad 0 < x_2 < x_1 < 1.$$

On prend ici :

$$x_1 = 0.75, x_2 = 0.25$$

$h_i, i = 1, 2$  est le pas de discrétisation sur chaque sous domaine.

$it_3$  : indique le macro itération de Schwarz (itération extérieure),

$it_1 ; it_2$  : indiquent les micro itérations de relaxation avec projection pour chaque sous domaine (itérations intérieures),

$p_i$  : est l'ordre de convergence sur chaque sous domaine.

Temps : est le temps sur chaque macro-itération

### Formule de l'erreur

Soit  $u$  une solution exacte et  $u_h$  une solution approchée.

Soit

$$\text{erreur} = \|u - u_h\| \leq Ch^p,$$

avec

$$h_2 = \frac{h_1}{2}, \quad h_4 = \frac{h_3}{2}$$

Maintenant, on définit le rapport  $R_i$  par :

Pour les premiers pas :  $h_1 = \frac{1}{4}, h_2 = \frac{1}{8}, h_3 = \frac{1}{16}, h_4 = \frac{1}{32}$

$$R_1 = \frac{\text{erreur}_1}{\text{erreur}_{11}} = 2^{p_1}.$$

Où  $\text{erreur}_1$  est l'erreur sur  $\Omega_1$  pour les pas  $h_1, h_2$ ,  
 $\text{erreur}_{11}$  est l'erreur sur  $\Omega_1$  pour les pas  $h_3, h_4$ .

$$R_2 = \frac{\text{erreur}_2}{\text{erreur}_{12}} = 2^{p_2},$$

$\text{erreur}_2$  est l'erreur sur  $\Omega_2$  pour les pas  $h_1, h_2$ ,  
 $\text{erreur}_{12}$  est l'erreur sur  $\Omega_2$  pour les pas  $h_3, h_4$ .

Pour les deuxièmes pas :  $h_1 = \frac{1}{8}, h_2 = \frac{1}{16}, h_3 = \frac{1}{32}, h_4 = \frac{1}{64}$

$$R_1 = \frac{\text{erreur}_{11}}{\text{erreur}_{21}} = 2^{p_1},$$

où  $\text{erreur}_{21}$  est l'erreur sur  $\Omega_1$  pour les pas  $h_3, h_4$ .

$$R_2 = \frac{\text{erreur}_{12}}{\text{erreur}_{22}} = 2^{p_2},$$

$\text{erreur}_{22}$  est l'erreur sur  $\Omega_2$  pour les pas  $h_3, h_4$ .

**Tableau 1** :  $it_3 = 5$ 

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.20	0.20
$h_i = 1, 2$	1/4	1/8
$h_i = 2, 3$	1/8	1/16
$h_i = 3, 4$	1/16	1/32
itér <sub><i>i</i></sub>	29	109
erreur <sub><i>i</i></sub>	2.6328e-003	1.0874e-003
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 1, j = 1.2$	6.1958e-004	2.9844e-004
Ordre $P_i$	2.0872e+000	1.8653e+000
temps	1.6287e+001	1.6287e+001

**Tableau 2 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.20	0.20
$h_i = 1, 2$	1/8	1/16
$h_i = 2, 3$	1/16	1/32
$h_i = 3, 4$	1/32	1/64
itér <sub><i>i</i></sub>	109	346
erreur <sub><i>i</i></sub>	6.1958e-004	2.9844e-004
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 2, j = 1.2$	1.6300e-004	7.7811e-005
Ordre $P_i$	1.9264e+000	1.9394e+000
temps	8.0422e+002	8.0422e+002

**Tableau 3 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.40	0.40
$h_i = 1, 2$	1/4	1/8
$h_i = 2, 3$	1/8	1/16
$h_i = 3, 4$	1/16	1/32
itér	29	108
erreur <sub><math>i</math></sub>	2.6422e-003	1.0937e-003
erreur <sub><math>i,j</math></sub> , $i = 1, j = 1.2$	6.2622e-004	3.0467e-004
Ordre $P_i$	2.0770e+000	1.8438e+000
temps	1.6396e+001	1.6396e+001

**Tableau 4 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.40	0.40
$h_i = 1, 2$	1/8	1/16
$h_i = 2, 3$	1/16	1/32
$h_i = 3, 4$	1/32	1/64
itér <sub><i>i</i></sub>	108	345
erreur <sub><i>i</i></sub>	6.2622e-004	3.0467e-004
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 2, j = 1.2$	1.5286e-004	7.7542e-005
Ordre $P_i$	2.0345e+000	1.9742e+000
temps	7.9297e+002	7.9297e+002

**Tableau 5 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.60	0.60
$h_i = 1, 2$	1/4	1/8
$h_i = 2, 3$	1/8	1/16
$h_i = 3, 4$	1/16	1/32
itér <sub><i>i</i></sub>	29	108
erreur <sub><i>i</i></sub>	2.6515e-003	3.1064e-004
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 1, j = 1.2$	6.3271e-004	1.0999e-003
Ordre $P_i$	2.0672e+000	1.8240e+000
temps	1.5553e+001	1.5553e+001

**Tableau 6 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.60	0.60
$h_i = 1, 2$	1/8	1/16
$h_i = 2, 3$	1/16	1/32
$h_i = 3, 4$	1/32	1/64
it�er	108	344
erreur <sub><i>i</i></sub>	6.3271e-004	1.0999e-003
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 2, j = 1.2$	1.5180e-004	7.9378e-005
Ordre $P_i$	2.0594e+000	1.9685e+000
temps	7.8698e+002	7.8698e+002

**Tableau 7 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.80	0.80
$h_i = 1, 2$	1/4	1/8
$h_i = 2, 3$	1/8	1/16
$h_i = 3, 4$	1/16	1/32
itér <sub><i>i</i></sub>	29	107
erreur <sub><i>i</i></sub>	2.6608e-003	1.1060e-003
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 1, j = 1.2$	6.3909e-004	3.1660e-004
Ordre $P_i$	2.0577e+000	1.8046e+000
temps	1.2636e+001	1.2636e+001

**Tableau 8 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.80	0.80
$h_i = 1, 2$	1/8	1/16
$h_i = 2, 3$	1/16	1/32
$h_i = 3, 4$	1/32	1/64
itér <sub><i>i</i></sub>	107	344
erreur <sub><i>i</i></sub>	6.3909e-004	3.1660e-004
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 2, j = 1.2$	1.5480e-004	8.2352e-005
Ordre $P_i$	2.0456e+000	1.9428e+000
temps	7.7238e+002	7.7238e+002

**Tableau 9** :  $it_3 = 4$ 

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.99	0.99
$h_i = 1, 2$	1/4	1/8
$h_i = 2, 3$	1/8	1/16
$h_i = 3, 4$	1/16	1/32
itér <sub><i>i</i></sub>	29	107
erreur <sub><i>i</i></sub>	2.6695e-003	1.1117e-003
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 1, j = 1.2$	6.4501e-004	3.2197e-004
Ordre $P_i$	2.0491e+000	1.7878e+000
temps	1.2558e+001	1.2558e+001

**Tableau 10 :**

Sous domaine	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
$\alpha$	0.99	0.99
$h_i = 1, 2$	1/8	1/16
$h_i = 2, 3$	1/16	1/32
$h_i = 3, 4$	1/32	1/64
itér	106	343
erreur <sub><i>i</i></sub>	6.4501e-004	3.2197e-004
erreur <sub><i>i,j</i></sub> , $i = 2, j = 1.2$	1.5738e-004	8.5051e-005
Ordre $P_i$	2.0351e+000	1.9205e+000
temps	6.3516e+002	6.3516e+002

Présentations graphiques, Pour  $\alpha = 0.20$  :

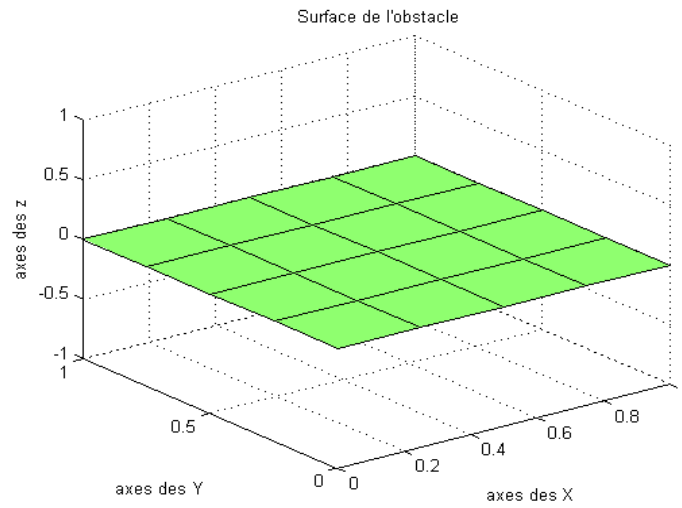


Figure 3.3- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{4}$ ,  $h_2 = \frac{1}{8}$ ,

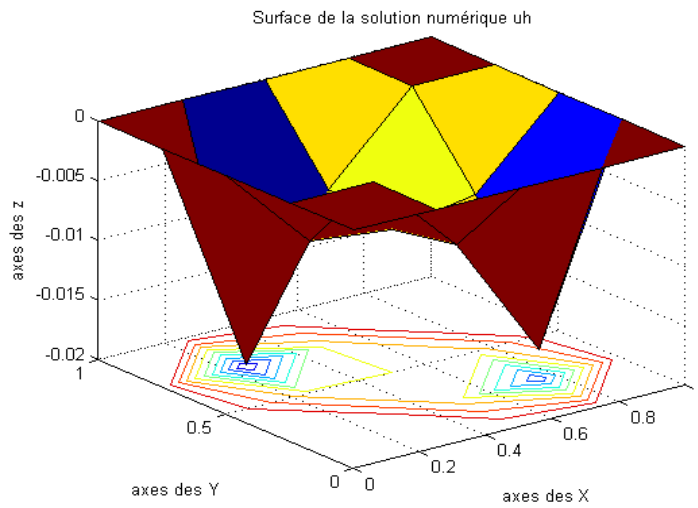


Figure 3.4- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{4}$ ,  $h_2 = \frac{1}{8}$ ,

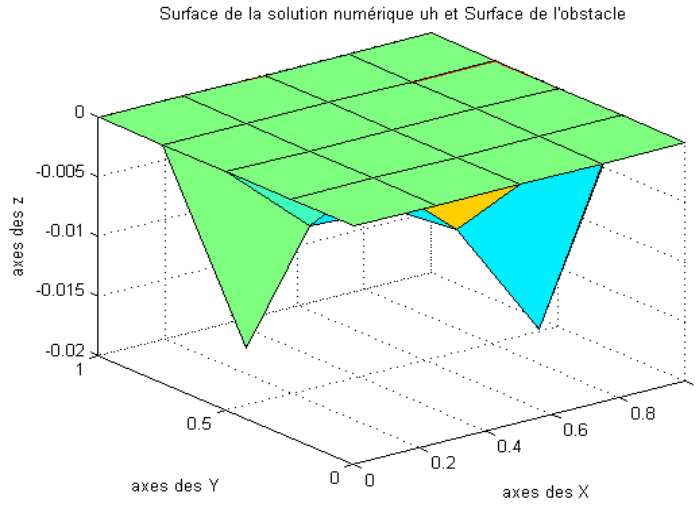


Figure 3.5- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{4}$ ,  $h_2 = \frac{1}{8}$ ,

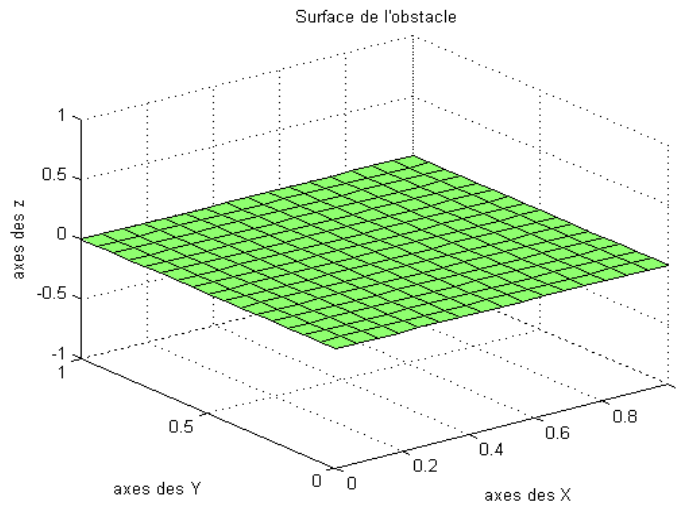


Figure 3.6- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{8}$ ,  $h_2 = \frac{1}{16}$ ,

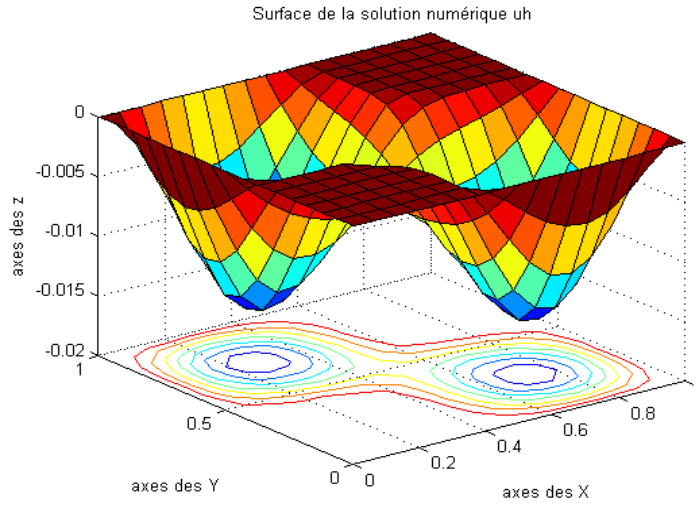


Figure 3.7- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{8}$ ,  $h_2 = \frac{1}{16}$ ,

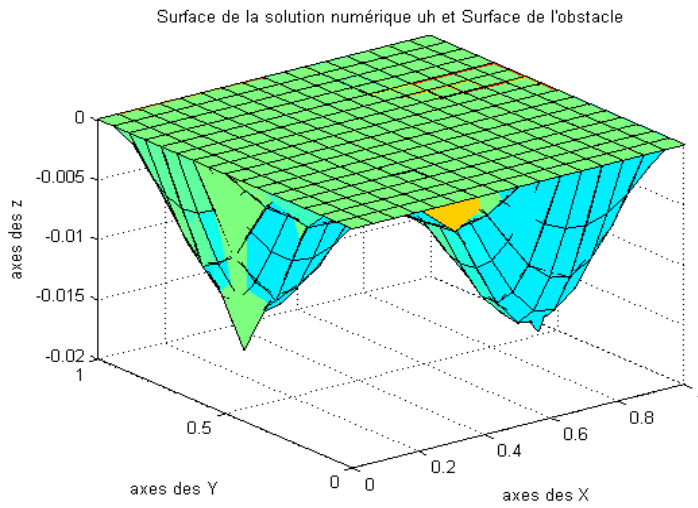


Figure 3.8- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{8}$ ,  $h_2 = \frac{1}{16}$ ,

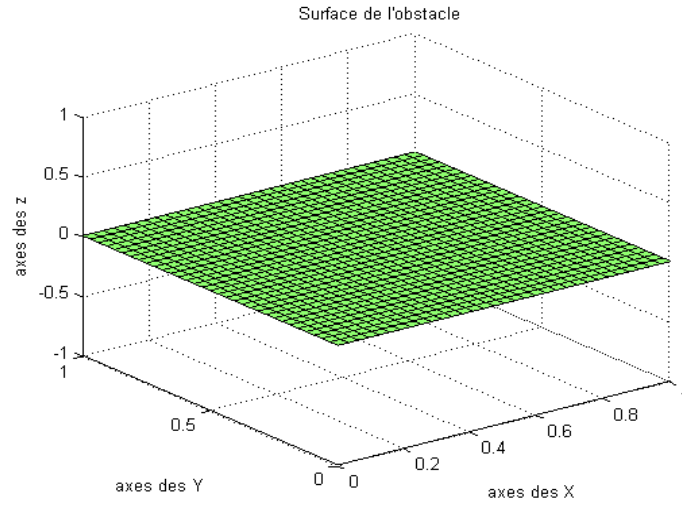


Figure 3.9- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{16}$ ,  $h_2 = \frac{1}{32}$ ,

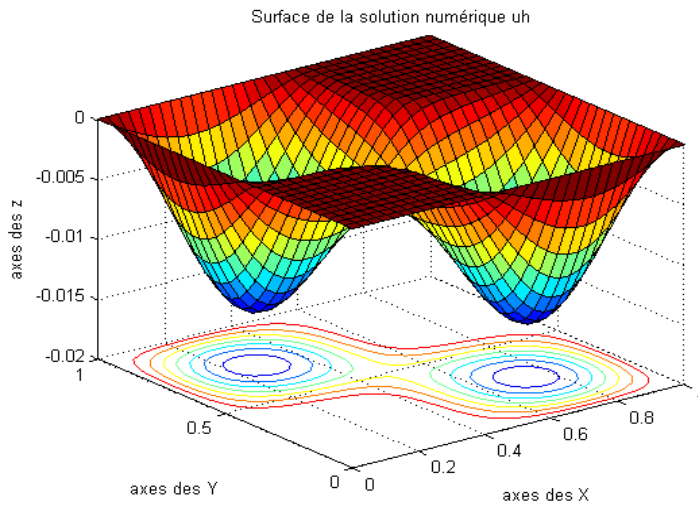


Figure 3.10- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{16}$ ,  $h_2 = \frac{1}{32}$ ,

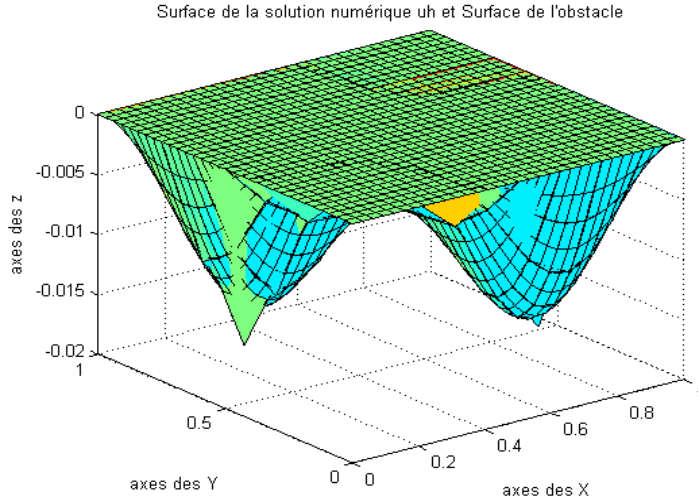


Figure 3.11- Pas de discrétisation :  $h_1 = \frac{1}{16}$ ,  $h_2 = \frac{1}{32}$ ,

### 3.5.1 Etude Comparative :

Si on prend par exemple les résultats des tableaux 1 et 2 :

Pour une décomposition symétrique :  $\Omega_1 = [0, 0.75] \times [0, 1]$ ,  $\Omega_2 = [0.25, 1] \times [0, 1]$ .

Dans  $\Omega_1$  :

Pour les pas :  $h_1 = \frac{1}{4}$ ,  $h_2 = \frac{1}{8}$ ,  $h_3 = \frac{1}{16}$ ,  $h_4 = \frac{1}{32}$  : nous avons les erreurs et les ordres de convergence :

$$R_1 = 4.2494e + 000, P_1 = 2.0872e + 000, R_2 = 3.6435e + 000, P_2 = 1.8653e + 000$$

Et pour les pas :  $h_1 = \frac{1}{8}$ ,  $h_2 = \frac{1}{16}$ ,  $h_3 = \frac{1}{32}$ ,  $h_4 = \frac{1}{64}$  :

$$R_1 = 3.8011e + 000, P_1 = 1.9264e + 000, R_2 = 3.8354e + 000, P_2 = 1.9394e + 000$$

On remarque que :  $P_1 = 1.9264e+000$  est plus proche de la valeur 2 que  $2.0872e+000$ , en effet

$$|2 - 1.9264e + 000| = 0.0736 < |2 - 2.0872e + 000| = 0.0872$$

De même dans  $\Omega_2$  :

$P_2 = 1.9394e + 000$  est plus proche de la valeur 2 que  $1.8653e + 000$ , en effet

$$|2 - 1.9394e + 000| = 0.0606 < |2 - 1.8653e + 000| = 0.1317$$

**Remarque importante :**

Si on considère une décomposition non symétrique, par exemple :

$$\Omega_1 = [0, 0.5] \times [0, 1], \Omega_2 = [0.25, 1] \times [0, 1]$$

On risque d'avoir un ordre de convergence perturbé pour certains problèmes, mais les erreurs diminuent toujours avec le raffinement des deux sous domaines c.à.d dès que les pas de discrétisation diminuent. On conclut alors que les résultats numériques obtenus sont en adéquation avec le résultat d'approximation théorique. Plus précisément, pour ce type de triangulation, nous remarquons que la constante d'ergodicité  $\alpha$  ainsi que le raffinement du pas de discretisation dans chaque sous domaine jouent un rôle crucial, ça nous permet d'obtenir une bonne estimation d'erreur, ainsi qu'un ordre de convergence quasi optimal. Nous remarquons qu'il est préférable de choisir une valeur optimale de  $\alpha$ , on rappelle que dans notre cas

$$\alpha = 0.20, \text{ pour les pas : } h_1 = \frac{1}{8}, h_2 = \frac{1}{16}, h_3 = \frac{1}{32}, h_4 = \frac{1}{64}.$$

# Chapitre 4

## Méthode de Schwarz pour les inéquations quasi-variationnelles liées à un problème de contrôle ergodique

### 4.1 Introduction

On commence par donner quelques résultats classiques sur les inéquations quasi-variationnelles liées à un problème de contrôle ergodique ; voir [42]

Les problèmes de contrôle impulsif pour les processus de diffusion peuvent être résolus en considérant la solution d'inéquation quasi variationnelle (QVI) (voir Bensoussan [17] et A.Bensoussan and J.L.Lions [19] ), l'exemple typique est donné comme suit :

$$\begin{cases} a(u_\alpha, v - u_\alpha) + \alpha(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f, v - u_\alpha), \\ u_\alpha \in H^1(\Omega), \quad u_\alpha \leq Mu_\alpha; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq Mu_\alpha, \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $\Omega$  est un ouvert borné régulier dans  $\mathbb{R}^N$ , avec  $\alpha > 0$ .

$f$  est une fonction donnée, la fonction coût  $Mu$  représente l'obstacle de contrôle impulsif défini par :

$$M\varphi(x) = k + \inf_{\xi \geq 0, x + \xi \in \bar{\Omega}} \varphi(x + \xi); \quad \text{où } k > 0 \quad (4.2)$$

Où  $k$  est un nombre positif,  $M$  est un opérateur défini sur  $C(\Omega)$  dans lui-même, tel que,

$$M\varphi(x) \leq M\tilde{\varphi}(x) \text{ alors } \varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x). \quad (4.3)$$

$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$ ; et  $(.,.)$  désigne le produit scalaire sur  $\Omega$ .

On note par :

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} \omega dx, \quad \omega_\alpha = u_\alpha - \langle u_\alpha \rangle \text{ et } \lambda_\alpha = \alpha \langle u_\alpha \rangle.$$

P.L.Lions and B.Perthame [25] ont montrés que la solution  $(\omega_\alpha, \lambda_\alpha)$  de l'IQV suivante :

$$\begin{cases} a(\omega_\alpha, v - \omega_\alpha) + \alpha(\omega_\alpha, v - \omega_\alpha) \geq (f - \lambda_\alpha, v - \omega_\alpha), \\ \omega_\alpha \in H^1(\Omega), \quad \omega_\alpha \leq M\omega_\alpha; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq M\omega_\alpha, \langle \omega_\alpha \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

converge vers la solution de l'IQV :

$$\begin{cases} a(\omega_0, v - \omega_0) \geq (f - \lambda_0, v - \omega_0), \\ \omega_0 \in H^1(\Omega), \quad \omega_0 \leq M\omega_0; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq M\omega_0, \langle \omega_0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Comme indiqué dans ce théorème :

**Théorème 4.1** [42]  $\lambda_\alpha$  converge uniformément dans  $C(\bar{\Omega})$  vers une certaine constante  $\lambda_0$  quand  $\alpha$  tend vers  $0^+$ , et  $\omega_\alpha$  converge uniformément dans  $C(\bar{\Omega})$  et fortement dans  $H^1(\Omega)$  vers  $\omega_0$ . De plus,  $(\lambda_0, \omega_0)$  est la solution de l'IQV (4.5).

### Position de problème

Soit  $\alpha$  un paramètre fixé dans l'intervalle  $]0,1[$ , alors, on peut voir facilement que le problème (4.1) est equivalent le problème suivant :

$$\begin{cases} b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha), \\ u_\alpha \in H^1(\Omega), \quad u_\alpha \leq Mu_\alpha; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq Mu_\alpha \end{cases} \quad (4.6)$$

Où

$$b(u, v) = a(u, v) + (u, v) \quad (4.7)$$

D'après [19], les IQV (4.1), (4.6) ont une solution unique. Et comme la forme bilinéaire (4.7) est indépendante de  $\alpha$ , alors le membre à gauche de l'IQV (4.6) est aussi indépendant de  $\alpha$ .

## 4.2 Méthode de Schwarz pour le problème de l'obstacle :

On décompose  $\Omega$  en deux sous domaines polygonales  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , tels que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (4.8)$$

la solution  $u_\alpha$  satisfait la condition de régularité locale :

$$u_\alpha|_{\Omega_i} \in W^{2,p}(\Omega_i), \quad 2 \leq p \leq \infty. \quad (4.9)$$

On note par  $\partial\Omega_i$  le bord de  $\Omega_i$ , et  $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ . L'intersection de  $\bar{\Gamma}_i$  et  $\bar{\Gamma}_j$  est supposé vide.

### 4.2.1 Suites de Schwarz pour le problème (4.4)

On note par

$$\omega_\alpha^{n+1} = u_\alpha^{n+1} - \langle u_\alpha^{n+1} \rangle \quad \text{et} \quad \lambda_\alpha^{n+1} = \alpha^{n+1} \langle u_\alpha^{n+1} \rangle. \quad n \geq 0 \quad (4.10)$$

Choisir  $\omega_\alpha^0 = \omega_0$ , telle que  $\omega_0$  est la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\omega_0, v - \omega_0) \geq (f - \lambda_0, v - \omega_0), \\ \omega_0 \in H^1(\Omega), \omega_0 \leq M\omega_0; v \in H^1(\Omega), v \leq M\omega_0, \langle \omega_0 \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

On définit respectivement les deux suites alternatives de Schwarz telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\omega_{\alpha_1}^{n+1}, v - \omega_{\alpha_1}^{n+1}) + \alpha(\omega_{\alpha_1}^{n+1}, v - \omega_{\alpha_1}^{n+1}) \geq (f_1 - \lambda_{\alpha_1}^{n+1}, v - \omega_{\alpha_1}^{n+1}), \\ \omega_{\alpha_1}^{n+1} = \omega_{\alpha_2}^n \text{ sur } \Gamma_1, \omega_{\alpha_1}^{n+1} \leq M\omega_{\alpha_1}^n; v \leq M\omega_{\alpha_1}^n, \langle \omega_{\alpha_1}^{n+1} \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\omega_{\alpha_2}^{n+1}, v - \omega_{\alpha_2}^{n+1}) + \alpha(\omega_{\alpha_2}^{n+1}, v - \omega_{\alpha_2}^{n+1}) \geq (f_2 - \lambda_{\alpha_2}^{n+1}, v - \omega_{\alpha_2}^{n+1}), \\ \omega_{\alpha_2}^{n+1} = \omega_{\alpha_1}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2, \omega_{\alpha_2}^{n+1} \leq M\omega_{\alpha_2}^n; v \leq M\omega_{\alpha_2}^n, \langle \omega_{\alpha_2}^{n+1} \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Où

$$i = 1, 2 \text{ et } f_i = f \setminus \Omega_i,$$

## 4.2.2 Suites de Schwarz continues pour le problème principal

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\alpha \in H^1(\Omega) \text{ solution de :} \\ b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \\ v \leq Mu_\alpha \quad ; \quad u_\alpha \in Mu_\alpha \quad , \quad u_\alpha \leq Mu_\alpha \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Soit  $u_\alpha^0 = u_0$ , solution de :

$$\begin{aligned} a(u_0, v - u_0) &\geq (f, v - u_0), \\ u_0 \in H^1(\Omega) \quad , \quad u_0 &\leq Mu_0 \quad ; \quad v \in H^1(\Omega), \quad v \leq Mu_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pour le problème principal la suite de Schwarz alternative  $(u_{\alpha 1}^{n+1})$  sur  $\Omega_1$  est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(u_{\alpha 1}^{n+1}, v - u_{\alpha 1}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma u_{\alpha 1}^{n+1}, v - u_{\alpha 1}^{n+1}) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ u_{\alpha 1}^{n+1} \leq Mu_{\alpha 1}^n \quad , \quad Mu_{\alpha 1}^n > 0 \\ u_{\alpha 1}^{n+1} = u_{\alpha 2}^n \text{ sur } \Gamma_1, \quad v = u_{\alpha 2}^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Et  $(u_{\alpha 2}^{n+1})$  sur  $\Omega_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2(u_{\alpha 2}^{n+1}, v - u_{\alpha 2}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma u_{\alpha 2}^{n+1}, v - u_{\alpha 2}^{n+1}) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ u_{\alpha 2}^{n+1} \leq M u_{\alpha 2}^n, \quad M u_{\alpha 2}^n > 0 \\ u_{\alpha 2}^{n+1} = u_{\alpha 1}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2, \quad v = u_{\alpha 1}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Avec

$$b_i(u_\alpha, v) = a_i(u_\alpha, v) + \gamma \int_{\Omega_i} u_\alpha v dx \quad (4.18)$$

$$\gamma = 1 - \alpha \quad (4.19)$$

**Lemme 4.1** [24]  $M u_{\alpha 1}^{n+1}$  (resp.  $M u_{\alpha 2}^{n+1}$ )  $\in C(\bar{\Omega})$ , pour chaque  $n \geq 0$ .

### 4.3 Problème discret

Soit  $\Omega$  un domaine polygonal,  $\tau_h$  une triangulation régulière et quasi uniforme sur  $\Omega$ , on note par  $V_h$  l'espace d'éléments finis linéaire continu par morceaux.

On considère l'IQV discrète :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) + \alpha (u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) \geq (f, v_h - u_{\alpha h}), \\ u_{\alpha h} \in V_h, \quad u_{\alpha h} \leq r_h M u_{\alpha h}, v_h \in V_h, v_h \leq r_h M u_{\alpha h}. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

D'après [15], l'IQV (4.20) a une solution unique.

Comme dans le cas continu, il est facile de voir que  $u_{\alpha h}$  la solution de (4.20), est équivalente à la solution de l'IQV :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(u_{\alpha h}, v - u_{\alpha h}) \geq (f + \gamma u_{\alpha h}, v - u_{\alpha h}) \\ u_{\alpha h} \in V_h, \quad u_{\alpha h} \leq r_h M u_{\alpha h}, v_h \in V_h, v_h \leq r_h M u_{\alpha h}. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

**Théorème 4.2** [42] *Soient  $u_\alpha$  et  $u_{\alpha h}$  les solutions de (4.14) et (4.20), respectivement. Alors, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\alpha$  et  $h$  telle que :*

$$\|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty \leq C \alpha^{-2} h^2 |\log h|^3$$

**Théorème 4.3** [42] *Sous les conditions du théorème 4.1 et 4.2, on a :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\omega_{\alpha h} - \omega_0\|_\infty = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_{\alpha h} - \lambda_0| = 0$$

### 4.3.1 Suites de Schwarz discrètes :

**Algorithme discret :**

Partant de  $u_{\alpha h}^0 = u_{0h}$ , telle que  $u_{0h}$  est une solution d'IQV suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_{0h}, v_h - u_{0h}) \geq (f, v_h - u_{0h}), \\ u_{0h} \in V_h, \quad u_{0h} \leq r_h M u_{0h}, v_h \in V_h, v_h \leq r_h M u_{0h}. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

On définit la suite de Schwarz alternative  $(u_{\alpha 1h}^{n+1})$  sur  $\Omega_1$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(u_{\alpha 1h}^{n+1}, v_h - u_{\alpha 1h}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma u_{\alpha 1h}^{n+1}, v_h - u_{\alpha 1h}^{n+1}) \quad v_h \in V_h \\ u_{\alpha 1h}^{n+1} \leq r_h M u_{\alpha 1h}^n \quad , \quad M u_{\alpha 1h}^n > 0 \\ u_{\alpha 1h}^{n+1} = u_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1, \quad v_h = u_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Et  $(u_{\alpha 2h}^{n+1})$  sur  $\Omega_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2(u_{\alpha 2h}^{n+1}, v_h - u_{\alpha 2h}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma u_{\alpha 2h}^{n+1}, v_h - u_{\alpha 2h}^{n+1}) \quad v_h \in V_h \\ u_{\alpha 2h}^{n+1} \leq r_h M u_{\alpha 2h}^n \quad , \quad M u_{\alpha 2h}^n > 0 \\ u_{\alpha 2h}^{n+1} = u_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2, \quad v_h = u_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Nous adapterons les mêmes notations précédentes pour les normes  $|\cdot|_i$  et  $\|\cdot\|_i$  ,  
avec  $i = 1, 2$ .

## 4.4 Analyse de l'erreur en norme $L^\infty$

**Lemme 4.2 [43]** *On suppose que  $B_\alpha = (b_{\alpha ij})_{i,j=\{1,\dots,N\}}$  est une  $M$ -matrice telle*

*que  $b_{\alpha ij} = b_{\alpha ij}(\varphi_i, \varphi_j)$ , alors il existe deux constantes  $k_1, k_2$  telles que :*

$$k_1 = \sup \{w_h(x), x \in \eta_1\} \in (0, 1)$$

et

$$k_2 = \sup \{w_h(x), x \in \eta_2\} \in (0, 1)$$

$$\sup_{\eta_1} |u_{\alpha 1h} - u_{\alpha 1h}^{n+1}|_1 \leq k_1 \sup_{\eta_1} |u_{\alpha 1h} - u_{01h}^0|_1 \quad (4.25)$$

$$\sup_{\eta_2} |u_{\alpha 2h} - u_{\alpha 2h}^{n+1}|_2 \leq k_2 \sup_{\eta_2} |u_{\alpha 2h} - u_{02h}^0|_2$$

**Théorème 4.4 [43]** *Les suites de Schwarz alternées  $(u_{\alpha 1h}^{n+1})$ ,  $(u_{\alpha 2h}^{n+1})$ ,  $n \geq 0$*

*convergent géométriquement vers la solution du problème d'obstacle (4.21), plus*

*précisément, il existe deux constantes  $k_1, k_2 \in (0, 1)$  qui dépendent respectivement de*

*$(\Omega_1, \eta_1)$  et  $(\Omega_2, \eta_2)$ , tel que pour  $n \geq 0$*

$$\sup_{\bar{\Omega}_1} |u_{\alpha 1h} - u_{\alpha 1h}^{n+1}|_1 \leq k_1^{n+1} k_2^{n+1} \sup_{\eta_1} |u_{\alpha 1h} - u_{01h}^0|_1 \quad (4.26)$$

$$\sup_{\bar{\Omega}_2} |u_{\alpha 2h} - u_{\alpha 2h}^{n+1}|_2 \leq k_1^{n+1} k_2^n \sup_{\eta_2} |u_{\alpha 2h} - u_{01h}^0|_2$$

**Théorème 4.5** Soit  $h = \max(h_1, h_2)$ . Alors, il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et  $n$  telle que :

$$\|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \leq C \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^4$$

et

$$\|u_{\alpha 2} - u_{\alpha 2 h}^{n+1}\|_2 \leq C \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^4$$

**Preuve 10**

$$\begin{aligned} \|u_{1\alpha} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_{1\alpha} - u_{\alpha 1 h}\|_1 + \|u_{\alpha 1 h} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \\ &\leq C_1 \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^3 + k_1^{n+1} \|u_{\alpha 1 h} - u_{01 h}^0\|_1 \\ &\leq C_1 \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^3 + k_1^{n+1} [\|u_{1\alpha} - u_{\alpha 1 h}\|_1 + \|u_{\alpha 1} - u_{01 h}^0\|_1] \\ &\leq C_1 \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^3 + k_1^{n+1} \|u_{1\alpha} - u_{\alpha 1 h}\|_1 + k_1^{n+1} \|u_{\alpha 1} - u_{01 h}^0\|_1 \\ &\leq C_1 \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^3 + (k_1^{n+1}) C_2 \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^3 \end{aligned}$$

Si on pose  $n + 1 \leq \frac{\log h}{\log k_1}$ , alors on obtient

$$\|u_{1\alpha} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \leq C \cdot \alpha^{-2} \cdot h^2 |\log h|^4$$

Le cas  $i = 2$  est similaire.

**Théorème 4.6** Soient  $(\omega_{\alpha ih}^{n+1})$  et  $(\lambda_{\alpha ih}^{n+1})$ ,  $i = 1, 2$  les suites alternatives de Schwarz discrètes, alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\omega_{\alpha ih}^{n+1} - \omega_{0i}\|_i = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_{\alpha ih}^{n+1} - \lambda_{0i}| = 0$$

**Preuve 11 1-**

$$\begin{aligned} \|\omega_{1\alpha h}^{n+1} - \omega_{10}\|_1 &\leq \|\omega_{\alpha h}^{n+1} - \omega_{1\alpha h}\|_1 + \|\omega_{1\alpha h} - \omega_{10}\|_1 \\ &\leq \|\omega_{\alpha h}^{n+1} - \omega_{1\alpha h}\|_1 + \|\omega_{1\alpha h} - \omega_{10h}\|_1 + \|\omega_{10h} - \omega_{10}\|_1 \\ &\leq \|\omega_{\alpha h}^{n+1} - \omega_{1\alpha h}\|_1 + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\omega_{1\alpha h} - \omega_{10h}\|_1 + \|\omega_{10h} - \omega_{10}\|_1 \\ &\leq \|\omega_{\alpha h}^{n+1} - \omega_{1\alpha h}\|_1 + \|\omega_{10h} - \omega_{10}\|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1h}^{n+1} - \langle u_{\alpha 1h}^{n+1} \rangle - u_{\alpha 1h} + \langle u_{\alpha 1h} \rangle\|_1 + \|u_{10h} - \langle u_{10h} \rangle - u_{10} + \langle u_{10} \rangle\|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha 1h}^{n+1} - u_{\alpha 1h}\|_1 + (meas(\Omega))^{-1} \|u_{\alpha 1h}^{n+1} - u_{\alpha 1h}\|_1 + \|u_{10h} - u_{10}\|_1 \\ &\quad + (meas(\Omega))^{-1} \|u_{10h} - u_{10}\|_1 \\ &\leq 4.C.\alpha^{-2}.h^2 |\log h|^4 \end{aligned}$$

Pour :  $\alpha = \sqrt{h}$ , et  $h \rightarrow 0$

Le cas  $i = 2$  est similaire.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\omega_{\alpha ih}^{n+1} - \omega_{0i}\|_i = 0 \quad , i = 1, 2$$

2-

$$\begin{aligned} |\lambda_{\alpha 1h}^{n+1} - \lambda_{10}|_{\infty} &\leq |\lambda_{\alpha 1h}^{n+1} - \lambda_{1\alpha}|_{\infty} + |\lambda_{1\alpha} - \lambda_{10}|_{\infty} \\ &\leq |\alpha^{n+1} \langle u_{\alpha 1h}^{n+1} \rangle - \alpha \langle u_{\alpha 1} \rangle|_{\infty} + |\lambda_{1\alpha} - \lambda_{10}|_{\infty} \end{aligned}$$

Comme :  $|\alpha^{n+1}| \leq |\alpha|$  , pour  $\alpha \in ]0,1[$  , alors

$$\begin{aligned} |\lambda_{\alpha 1h}^{n+1} - \lambda_{10}|_1 &\leq \alpha |u_{\alpha 1h}^{n+1} - u_{\alpha 1}|_1 + |\lambda_{1\alpha} - \lambda_{10}|_1 \\ &\leq \alpha |u_{\alpha 1h}^{n+1} - u_{\alpha 1}|_1 + |\lambda_{1\alpha} - \lambda_{10}|_1 \\ &\leq \alpha.C.\alpha^{-2}.h^2 |\log h|^4 + |\lambda_{1\alpha} - \lambda_{10}|_1 \\ &\leq C.\alpha^{-1}.h^2 |\log h|^4 + |\lambda_{1\alpha} - \lambda_{10}|_1 \\ &\leq C.\alpha^{-1}.h^2 |\log h|^4 + \lim_{\alpha \rightarrow 0} |\lambda_{1\alpha} - \lambda_{10}|_1 \\ &\leq C.\alpha^{-1}.h^2 |\log h|^4 \end{aligned}$$

Pour :  $\alpha = \sqrt{h}$ , et  $h \rightarrow 0$

Le cas  $i = 2$  est similaire.

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_{\alpha i h}^{n+1} - \lambda_{0i}|_i = 0 \quad , i = 1,2$$

# Conclusion et Perspectives

D'après ce qui précède, nous pouvons conclure ce qui suit :

La nouvelle approche utilisée dans notre thèse « nonmatching grid method » pour le problème de contrôle ergodique .

Dans la première partie, pour le cas d'inéquation variationnelle liée à un problème de contrôle ergodique nous à permis d'obtenir une approximation en norme  $L^\infty$  quasi optimale sur chaque sous domaine.

De bons résultats numériques ont été obtenus aussi dans ce sens ; qui sont en adéquation avec le résultat d'approximation théorique.

Concernant la deuxième partie, en appliquant la même méthode mais pour le cas d'inéquation quasi variationnelle, l'estimation d'erreur obtenue sur chaque sous domaine est toujours quasi optimal avec un ordre de convergence  $h^2 |\log h|^4$ .

Nous suggérons, cependant, quelques problèmes ouverts :

- Estimation d'erreur en norme  $L^\infty$  pour le cas de  $m$  ( $m > 2$ ) sous domaines.
- Méthode de Schwarz additive et multiplicative pour une classe d'inéquation variationnelle et quasi-variationnelle pour le problème de contrôle ergodique.
- Méthode alternée de Schwarz pour le cas d'un système d'I.V et I.Q.V.

# Annexe

## Les étapes de la Programmation de la Méthode de Schwarz sur un Logiciel MATLAB (7.10.0 R2010a) pour un Problème d'Inéquation Variationnelle liée à un Problème de Contrôle Ergodique

1. Calcul des coordonnées nodales
2. Connectivité nodale
3. Conditions aux frontières
4. Remplissage des conditions aux limites discrètes des 2 problèmes
5. Assemblage des matrices élémentaires
6. Calcul des 2 vecteurs de droite
7. Assemblage des vecteurs de droite
8. Ajout des conditions aux limites aux membres de droite
9. Matrices extraites
10. Itération de l'algorithme de Schwarz
  - 10.1. Remplissage des conditions aux limites discrètes problème 1
  - 10.2. Ajout des conditions aux limites au membre de droite FF1
  - 10.3. Vecteur de droite extrait FFF1
  - 10.4. Méthode de relaxation pour le problème 1

- 10.5. Passage au problème 2
  - 10.6. Remplissage des conditions aux limites discrètes problème 2
  - 10.7. Ajout des conditions aux limites au membre de droite FF2
  - 10.8. Vecteur de droite extrait FFF2
  - 10.9. Méthode de relaxation pour le problème 2
  - 10.10. Test d'arrêt des itérations de l'algorithme de Schwarz
  11. Remplissage du vecteur solution globale  $v$ , composé de  $v_1$  et  $v_2$
  12. Remplissage du vecteur obstacle global  $G$ , composé de  $G_1$  et  $G_2$
  13. Conditions aux frontières sur le carré entier
  14. Chargement du vecteur solution numérique  $U$ , et de l'obstacle  $GG$
  15. Tracé de l'obstacle  $GG$
  16. Tracé de la solution numérique  $U_{sol}$
  17. Tracé de l'obstacle  $GG$  et de la solution numérique  $U_{sol}$
  18. Calcul de la solution exacte
  19. Calcul de l'erreur
- $erreur1 = \text{norm}(U_{sol} - u_{exact}, \text{inf})$

# Bibliographie

- [1] J.L.Lions & G Stampachia, *Variational Inequalities*, Comm On Pure and applied Mathematics, Vol.XX, (1967), pp39-519
- [2] P.G. Ciarlet, P.-A. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, *Comput. Meth. in Appl. Mech. Eng.* 2, (1973), pp-17-31.
- [3] A.Bennsoussan, M.Goursat et J.-Lions, *C.R. Acad. Sc., Paris*, t.276, série A, (1973), p.1279.
- [4] M.Goursat, J.P.Quadrat, *Analyse Numérique d'inéquation quasi variationnelles elliptiques associées à des problèmes de contrôle impulsif*. Rapport de Recherche no 186,  *Août*, (1976).
- [5] C. Baiocchi, *Estimations d'erreur dans  $L^\infty$  pour les inéquations à obstacle*, *Lecture Notes Math. Gem.*, no 606, (1977), p.27-34.

- [6] J. Nitche , *L<sup>∞</sup> Convergence of Finite Element Approximations* , Lectures Notes Math. Gem., no 606, (1977), p.1-15.
- [7] A. Bensoussan and J.L. Lions, *On the asymptotic behaviour of the solution of variational inequalities*, In Theory of Linear Operators, Akademic Verlag, Berlin, (1978).
- [8] P-L. Lions : *Interpretation stochastique de la méthode alternée de Schwarz*, C.R.A-S. Paris, 268, (1978), pp. 325-328 .
- [9] P. Cortey-Dumont, thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Besançon, (1978).
- [10] B. Hannouzet et J.L. Joly, *méthode d'ordre dans l'interprétation de certaines inéquations variationnelles et applications*, Université de Bordeaux-I J. Funct. Anal. 34, (1979), p.217-249.
- [11] Caffarelli et Friedman, *Regularity of the solution of the quasi variational Inequality for the Impulse Control*. Part I, Comm. of PDE, t.3,1978, p.745 à 753. Part II.Comm. of PDE, t.4, (1979), p.279-291.
- [12] P. Cortey-Dumont, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 288, série A, (1979), p.14.
- [13] P. Cortey-Dumont, *On the approximation of a class of quasi-Variational Inequalities Related to the Impulse Control*, Proceeding du Séminaire intensif sur les problèmes à frontière libre, Paris, (octobre 1979).

- [14] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their Application*. Academic Press, (1980).
- [15] P. Cortey-Dumont, *Approximation numérique d'une IQV liée a des problème de gestion de stock*. RAIRO. Anal. Numer. 14, (1980), 335-346 .
- [16] P. Cortey-Dumont, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 290, série A, (1980), p.255.
- [17] A. Bensoussan, *Stochastic control by functional analysis Methods*, North-Holland, Amsterdam, (1982).
- [18] Benssoussan, A ., Lions, J.L., *contrôle impulsif et inéquations quasi variationnelles*. Bordas : Dunod, (1982).
- [19] A. Bensoussan, J.L.Lions, *Impulse control and quasi-variational inequalities*, Gauthiers Villars, paris, (1984).
- [20] R. Glowinski, *Numerical methods for linear variational problems*, Springer-Verlag, News york, (1984).
- [21] Ph. Cortey-Dumont, *Sur les inéquations variationnelles à opérateurs non coercifs*, M2AN, (1985), 19, 195-212.
- [22] Ph. Cortey-Dumont, *On finite element approximation in the  $\mathbb{L}^\infty$ -norm of variational inequalities with non linear operators*, Numer. Math.47(1), (1985), 45-47
- [23] Ph. Cortey-Dumont, *On finite element approximation in the  $\mathbb{L}^\infty$ -norm of variational inequalities*, Num. Math., (1985), 5.

- [24] B. Perthame. *Some remarks on quasi-variational inequalities and the associated impulsive control problem*. Annales de l'I. H. P. Section C. Tome 2. no 3, (1985), P. 237-260.
- [25] P.L. Lions, B. Perthame, *Quasi-variational inequalities and ergodic impulse control*. SIAM. J. Control and Optimization, vol 24 No. 4, (1986), pp. 604-615.
- [26] M. Boulbrachène, *Sur quelques questions d'approximations de problèmes à frontières libre, de sous-domaines et d'erreurs d'arrondi*, Thèse de Doctorat de l'université de Franche, Comté Besançon, France, (1987).
- [27] M. Boulbrachène, Ph. Cortey-Dumont, and J.C. Miellou, *Approximation convergence for a subdomain decomposition method*. 1er symposium international sur les méthode de sous-domaine, Paris, (1987).
- [28] M. Boulbrachène M.Cortey-Dumont PH.& Miellou J.C *Mixing Finite Element and Finite Differences in a Subdomain Method*. In *Domain Decomposition methods* SIAM, Philadelphia, (1988).
- [29] M. Dryja, *An additive Schwarz algorithm for two-and three-dimensional finite element elliptic problems*, in T.Chan et al.eds ,domain decomposition methods, philadelphia, SIAM, (1989), 168-172.
- [30] P-L. Lions. *On the Schwarz Alternating Method II*, Proc. 2nd Int. Symp. On domain decomposition methods for Partial Dierential Equations. S.I.A.M. Philadelphia, (1989), pp. 47-70.

- [31] M. Dryja and O. Widlund, *Some domain decomposition algorithms for elliptic problems*, L. Hayes and D. Kincaid, eds, *Iterative methods for large systems*, Boston, (1990), Academic Press, 273-291.
- [32] J. Bramble, J. Pascial, J. wang, and J. xu, *Convergence estimates for product iterative methods with applications to domain decomposition*, *Math.Comp.*, (1991), 57, 1-21.
- [33] T. Chan, T. Hou, and P. Lions, *Geometry related convergence results for domain decomposition algorithms*, *SIAM. J.Numer. Anal.*, (1991), 28, 378-391.
- [34] Yu.Luznetsov, P.Neittanmaki and P.Tarvainen, *Overlapping Block relaxation and Schwarz methods for the obstacle problem with a convection diffusion operator*, *Laboratory of scientific computing, Report 4*, (1993), university of Jyväskylä.
- [35] Y. Kuznetsov, P. Neittanmaki and P.Tarvainen, *Block relaxation methods for algebraic obstacle problem with M-matrices*, *East-West J.Numer Math.*, 2(1994), pp. 75-90
- [36] M.Boulbrachène And H.Sissaoui, *The Finite Element Approximation of variational Inequalities Related to Ergodic Control Problems*, *Computers Math. Applic.*, (1996), Vol. 31, No. 4/5, 137-141.

- [37] J. Zeng and S. Zhou, *On monotone and geometric convergence of Schwarz methods for two-sided obstacle problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, (1998), 35, 600-616.
- [38] J. P. Zeng and S. Z. Zhou, Schwarz Algorithm for the Solution of Variational Inequalities with Nonlinear Source Terms, Applied Mathematics and Computation, Vol. 97, No. 1, (1998), pp. 23-35.
- [39] C. Xiao-Chuan, T.P. Matew, and M. Vsakis, *Maximum norm analysis of overlapping non-matching grid discretisations of elliptic equation*, Siam J.Numer Anal., (2000) 5, 1709-1728.
- [40] M. Boulbrachène And S. Saadi, *Maximum Norm Analysis on overlapping non-matching Grids method for the obstacle Problem*, Advances in Difference Equations, Volume 2006, Article ID 85807, Pages 1-10.
- [41] Chaouch Mounira, *Approximation par éléments finis d'une classe de système d'inéquations quasi-variationnelles avec un second membre non linéaire*, Thèse de Magister. Université de Annaba, (2008).
- [42] M. Boulbrachène, *On Numerical Analysis of the Ergodic control Quasi-Variational Inequalities*, International Mathematical Forum 4, no. 42, (2009), 2051 - 2057.

- [43] M. Haiour and S. Boulaaras, *Overlapping Domain Decomposition Methods for Elliptic Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problem with Mixed Boundary Conditions*, Proceedings Mathematical Sciences, Vol. 121, No. 4, (2011), pp.481-493.
- [44] H. Mécheri, S. Saadi, Overlapping Nonmatching Grid Method for the Ergodic Control Quasi Variational Inequalities, American Journal of Computational Mathematics, doi : 10.4236/ajcm. 2013. 31A005, pp.27-31
- [45] S. Saadi, H. Mécheri, Schwarz Method For Variational Inequalities Related To Ergodic Control Problems, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 10, Issue 1, Article 10, (2013), pp. 1-9.