

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار

- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2022/2023

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

**Différentiabilité des équations différentielles stochastiques de type
neutral gouvernées par un G-mouvement Brownien**

Filière : Mathématiques Appliquées
Spécialité : ACTUARIAT

Par
BOUMEZBEUR Zakaria

DIRECTEUR DE THÈSE : BOUTABIA Hacène Prof. U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT: MERZOUGUI Mouna Prof. U.B.M. Annaba

EXAMINATEUR: REMITA Mohamed Riad Prof. E.N.S.I.A. Alger

EXAMINATEUR: ZEGHDOUDI Halim Prof. U.B.M. Annaba

EXAMINATEUR: KERBOUA Mourad M.C.A Univ. Geulma

EXAMINATEUR: EZZEBSA Abdelali M.C.A Univ. Geulma

INVITE: KEBIRI Omar M.C.B Univ. Cottbus (Allemagne)

Table des matières

Résumé(en arabe)	iv
Abstract	v
Résumé	vi
Remerciements	vii
Notations	ix
Introduction	x
1 Préliminaires	1
1.1 Aperçu sur l'espérance sous-linéaire	1
1.1.1 Espérance sous-linéaire	1
1.1.2 Théorème de représentation de l'espérance sous-linéaire	2
1.2 Distribution et indépendance	4
1.3 Distribution G -normale	7
1.4 G -calcul stochastique	8
1.4.1 G -mouvement Brownien et sa caractérisation	9
1.4.2 Existence de G -mouvement Brownien et G -espérance conditionnelle	10
1.5 G -capacité	14
1.6 G -intégrale d'Itô	15
1.6.1 L'intégrale de Bochner	15
1.6.2 Intégrale stochastique d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien	16
1.7 Variation quadratique du G -mouvement Brownien	19
1.8 Processus de variation mutuelle	23
1.9 G -inégalités de Burkholder-Davis-Gundy	24
1.10 G -formule d'Itô	25

2 Les G-équations différentielles stochastiques de type neutral	27
2.1 Préliminaires	27
2.2 Existence et unicité de la solution	28
2.3 Schéma d'approximation de Carathéodory	29
2.3.1 Théorème d'existence et d'unicité	30
3 Différentiabilité de la solution d'une G-EDSN par rapport à la condition initiale	38
3.1 Formulation du problème	38
3.2 Existence et unicité de la solution des G -EDSNs à valeurs opérateur	41
3.3 Différentiabilité de la solution	42
3.3.1 Résultats auxiliaires	42
3.3.2 Théorème de différentiabilité	51
3.4 Application	53
4 Différentiabilité des G-EDSNs par rapport à un paramètre	57
4.1 Formulation du problème	57
4.2 Existence et unicité de la solution de la dérivée	60
4.3 Différentiabilité de la solution par rapport au paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.	60

Résumé(en arabe)

في هذه الأطروحة تمت دراسة قابلية التفاضل لحلول المعادلات التفاضلية العشوائية من النوع المحايد التي تحكمها حركة G-براونية بالنسبة للشرط الأولي و بالنسبة لمعامل.

أولاً، أثبتنا أن حلول المعادلات التفاضلية العشوائية من النوع المحايد ذات البعد n التي تحكمها حركة G-براونية، قابلة للتفاضل بالنسبة للشرط الأولي x الذي ينتمي إلى فضاء بناخ $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ ، والمشتق هو حل لمعادلة تفاضلية عشوائية معطاة من النوع المحايد ذات قيمة مؤثر. ثم أثبتنا وجود و تفرد الحل اعتماداً على نظرية وجود و تفرد الحل للمعادلات التفاضلية العشوائية من النوع المحايد الإعتيادية. بعد ذلك قدمنا مثالين لإظهار دقة النتائج المتحصل عليها.

ثانياً، أثبتنا أن حلول المعادلات التفاضلية العشوائية من النوع المحايد قابل للتفاضل أيضاً بالنسبة لمعامل، هذا المعامل متضمن في الشرط الأولي. تم إعطاء معادلة المشتق، و مثال لتوضيح النتائج النظرية. هذه الدراسة أجريت في إطار أحادي البعد ويمكن تعميمها إلى البعد n .

الكلمات المفتاحية:

G-توقع، حركة G-براونية، قابلية التفاضل، المعادلات التفاضلية العشوائية من النوع المحايد التي تحكمها حركة G-براونية.

Abstract

The objective of this dissertation is to study the differentiability of solutions of neutral stochastic differential equations driven by G -Brownian motion (G -NSDEs, in short) with respect to the initial data and parameter.

First, we proved that the solution to an n -dimensional G -NSDE is differentiable with respect to the initial data x which belongs to the Banach space $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, and the derivative is the solution of a given operator-valued G -NSDE. Then, we prove the existence-uniqueness of the solution based on the existence-uniqueness theoreme of standard G -NSDEs. This result, is followed by two examples to exhibit the accuracy of the obtained results.

Secondly, we prove that the solution of G -NSDE is also differentiable with respect to a parameter, in particular, this parameter included in the initial data. The G -NSDE of the derivative is given, along with an example to illustrate the theory's findings. This study was performed in a 1-dimensional case, and yet, it can be generalized to an n -dimensional case.

Keywords :

G -expectation, G -Brownian motion, Differentiability, G -neutral stochastic differential equations.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier la différentiabilité de la solution d'une équation différentielle stochastique de type neutral gouvernées par G -mouvement Brownien (G -EDSNs, en abrégé) par rapport à la condition initiale et paramètre.

Nous avons d'abord prouvé que la solution d'une G -EDSN de dimensions n est différentiable par rapport à la condition initiale x qui appartient à l'espace de Banach $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, et la dérivée est la solution d'une G -EDSN à valeur opérateur donnée. Un théorème d'existence et d'unicité de la solution a été prouvé en se basant sur le théorème d'existence et d'unicité des G -EDSNs standards. Ce résultat a été illustré par deux exemples pour montrer l'efficacité des résultats obtenus.

Ensuite, nous avons montré que la solution d'une G -EDSN dont la condition initiale dépend d'un paramètre est également différentiable par rapport à celui-ci. La G -EDSN de la dérivée ainsi qu'un exemple ont été également donnés. Cette étude a été menée dans un cadre unidimensionnel et elle peut être généralisée au cas n -dimensionnel.

Mots-clés :

G -espérance, G -mouvement Brownien, Différentiabilité, G -équations différentielles stochastiques de type neutral.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu tout puissant qui m'a donné la volonté et la force afin de parfaire ce travail et le mener à terme.

Je tiens également à remercier mon directeur de thèse, Mr. le Professeur **BOUTABIA Hacène**, de m'avoir proposé ce sujet intéressant. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude, pour ses encouragements et ses conseils avisés, ses qualités tant humaines que scientifiques furent pour moi d'un apport inestimable. Je le remercie également pour m'avoir montré l'exemple dans la préparation et la rédaction de mes papiers et travaux. Je lui exprime ma gratitude pour sa patience, son soutien moral, son regard critique et pour le temps qu'il m'a consacré. Je le remercie pour toutes les fois où j'ai fait appel à lui pour une aide scientifique ou autre, car il n'a jamais hésité pour répondre à mes sollicitations.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Mme. le Pr **MERZOUGUI Mouna** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je veux remercier vivement le Pr. **REMITA Mohamed Riad**, Pr. **ZEGHDOUDI Halim**, Dr. **KERBOUA Mourad**, Dr. **EZZEBSA Abdelali**, et Dr. **KEBIRI Omar** d'avoir accepté cette invitation de commenter et d'évaluer ce manuscrit.

Je suis reconnaissant à l'université Badji Mokhtar-Annaba (UBMA) et à l'université BTU-Cottbus (Allemagne) de m'avoir donné l'opportunité de faire partie du projet Erasmus+ (K107 Projet). Mes vifs remerciements vont au Dr. **REDJIL Amel**, coordinatrice du projet Erasmus+ à l'UBMA, Pr. **HARTMANN Carsten** et Dr. **KEBIRI Omar** de l'université de BTU-Cottbus, merci beaucoup de m'avoir fait confiance pour faire partie de la sélection. Merci pour l'excellent accueil au niveau de BTU, et j'ai également eu beaucoup de plaisir à travailler avec vous.

J'exprime ma profonde reconnaissance à ma grande famille **Boumezbeur-Cheouana** de m'avoir supporté durant ces années d'étude; en particulier à ma mère, mon père, mes sœurs; Rokia, Rafika, Meriem, Khadidja, Zieneb, Sara, Imene, et ma chère épouse Nousseiba pour leur soutien constant et leur amour inconditionnel qui m'ont aidée à affronter les moments difficiles de ce parcours.

Je remercie tous mes collègues du département de mathématiques de l'université de Badji-Mokhtar qui m'ont soutenu lors de mes déplacements pour les

stages et les congrès scientifiques et particulièrement pour les moments agréables que nous avons passés ensemble.

Je ne serai pas sincère si je n'adresse pas tous mes sentiments de respect et tous mes remerciements à tous mes professeurs et enseignants depuis que j'ai pris le stylo dans la main.

Je tiens en fin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Zakaria Boumezbeur

Notations

- $f'(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$: La dérivée de la fonction f par rapport à x .
- \mathbb{E} : Espérance sous-linéaire.
- $\widehat{\mathbb{E}}$: G -espérance.
- $a \vee b = \sup(a, b)$: Le suprémum entre a et b .
- a^+ : La partie positive du nombre réel a .
- a^- : La partie négative du nombre réel a .
- $f \circ g$: La composée des fonctions f et g .
- \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^+ : Ensemble des nombres réels positifs.
- \mathbb{N} : Ensemble des nombres naturels.
- \mathbb{N}^* : Ensemble des nombres naturels strictement positifs.
- $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: Espace d'espérance sous-linéaire.
- \mathbb{S}_d : Ensemble des matrices carrés et symétriques d'ordre $d > 1$.
- $C_0^d(\mathbb{R}^+)$: Espace des fonctions $\omega : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^d$ continues telles que $\omega_0 = 0$.
- \mathcal{H} : Espace linéaire des fonctions réelles définies sur Ω .
- $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$: Espace linéaire des fonctions localement lipschitziennes sur \mathbb{R}^n .
- $\mathbb{L}^0(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions Borel-mesurables sur \mathbb{R}^n .
- $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions bornées et Borel-mesurables sur \mathbb{R}^n .
- $C_b(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R}^n .
- $C_{unif}(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions uniformément continues sur \mathbb{R}^n .
- $C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions continues, Lipschitziennes et bornées sur \mathbb{R}^n .
- $C_b^k(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions bornées k -fois continument différentiable sur \mathbb{R}^n dont les dérivées de tout ordre inférieur ou égale à k sont bornées.
- $C_{Lip}(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions Lipschitziennes sur \mathbb{R}^n .
- $SCS(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions semi-continues supérieurement sur \mathbb{R}^n .
- $SCI(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions semi-continues inférieurement sur \mathbb{R}^n .
- $BC = BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions continues et bornées de $[-r, 0]$ dans \mathbb{R}^n ($r > 0$).
- $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$: Espace des opérateurs linéaires définis sur $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Introduction

Les équations différentielles ont toujours été considérées comme un des outils les plus puissants pour étudier et modéliser des phénomènes évolutifs de nature très diverses, par exemple la décroissance radioactive, la chute des corps mécaniques, les circuits électriques etc. . .

Il est bien connu que l'évolution d'un système dynamique qui ne dépendant que de son état actuel, peut souvent être décrite par une équation différentielle ordinaire. Cependant, si on veut se rapprocher plus de la réalité, il faut tenir compte de l'état passé du système. En effet, il existe des situations où l'évolution d'un processus dépend non seulement de son état actuel, mais aussi des états antérieurs <<états passés>>, nous rencontrons de tels phénomènes dans de nombreux domaines, notamment en économie (évolution des marchés financiers), en physique (propagations physiques), en médecine (description de plusieurs aspects de la dynamique de maladies infectieuses, la pharmacothérapie et la réponse immunitaire), en biologie (dynamique des populations), en écologie (écologie de population : relation de concurrence et de prédateur proie), voir [2, 11, 12, 13, 33, 34, 41, 54, 55].

L'inclusion de l'état passé dans les équations différentielles a donné naissance aux équations différentielles à retard (EDRs en abrégé), qui surviennent dans la formalisation des phénomènes dynamiques, où certains effets ne sont pas instantanés. Autrement dit, elles tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur, c'est pour cela qu'elles sont souvent appelées "les équations à mémoire", "les équations héréditaires", "équations à post-effet", ou encore "équations à argument dévié". D'une manière générale, les retards apparaissent à cause du temps nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. Dans certaines situations de la physique ou de la mécanique, le retard peut être considéré comme petit et estimé sans effet qualitatif, il est donc le plus souvent ignoré, cependant dans l'étude des populations vivantes, la nécessité de tenir compte du retard s'est imposée progressivement.

Une classe plus générale d'équations à retard, c'est la classe d'équations différentielles neutres (EDNs en abrégé), dans laquelle l'argument de retard peut également apparaître dans la dérivée de la variable d'état. Autrement dit,

le taux de changement du système dépend non seulement de ses états présents mais aussi de ses états passés. C'est certainement une motivation suffisante pour considérer cette classe d'équations à part entière. Elles ont été étudiées par de nombreux chercheurs, nous citons parmi eux Hale [30], Mao [38], Cushing [14] et Gopalsamy [26].

Les systèmes dans nombreuses branches de la science et de l'industrie, sont souvent perturbés par divers types d'environnements aléatoires. Donc, considérant le caractère aléatoire de certains coefficients des équations différentielles, nous obtenons souvent un modèle mathématique plus réaliste en utilisant les équations différentielles stochastiques (EDSs en abrégé). Elles ont été d'abord étudiées en 1940 par le mathématicien Itô, dans le but de construire les diffusions. C'est la raison pour laquelle il avait introduit le concept du calcul stochastique [42, 18]. Depuis, de nombreuses applications des EDSs, que les chercheurs ont pu faire en mathématiques et dans d'autres domaines, tels que la biologie, la physique, l'écologie, les mathématiques financières, le traitement du signal, la théorie du contrôle, etc... (pour plus de détails, on peut se référer à [5, 6, 24, 27, 35, 53]). Cependant, cette étude a été développée d'un point de vue linéaire, où une telle supposition n'est pas toujours faisable dans beaucoup de domaines d'application.

En effet, le paradoxe d'Allais proposé dans les années 1950 en théorie de la décision, montre les contradictions de la théorie de <<l'utilité espérée>> à base d'une espérance mathématique linéaire. Le besoin d'une notion d'espérance mathématique non-linéaire se développe de manière spectaculaire (voir [3, 15, 19, 20, 28]). La théorie d'espérance non-linéaire a attiré avec grand intérêt des chercheurs pour ses applications potentielles dans les problèmes d'incertitude, les mesures de risque et le super-hedging en finance. Peng a construit une sorte d'espérance entièrement non-linéaire dynamiquement cohérente par l'approche des EDP [50, 51].

Un cas important d'espérance non-linéaire est la G -espérance, où G est la fonction génératrice d'une équation non-linéaire, appelée G -équation de la chaleur. Dans ce cadre, Peng [44, 47, 48, 49] établit les notions de distributions et d'indépendance pour les variables aléatoires dans ce nouveau contexte. De plus, Peng a construit le G -mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ associé, qui est analogue au processus de Wiener classique, et a mis en place le calcul stochastique correspondant [43, 44, 47, 48, 49]. Les intégrales stochastiques du type d'Itô associées ainsi que les équations différentielles stochastiques (G -EDSs en abrégé) ont été également introduites [43]. Une propriété essentielle du G -mouvement Brownien est que son processus de variation quadratique $(\langle B_t \rangle)_{t \geq 0}$ est un processus non déterministe en général et qu'il comporte des incréments indépendants et stationnaires identiquement distribués.

De nombreux chercheurs se sont intéressés et s'intéressent toujours à la théorie des G -EDSs. Par exemple, Peng [43] a démontré l'existence et l'unicité des solutions des G -EDSs, plus de résultats peuvent être trouvés dans [7, 8, 9, 16, 22,

[36, 37, 52]. Parmi les résultats obtenus nous signalons, les travaux relatifs à la différentiabilité de la solution d'une G -EDS. La différentiabilité a de nombreuses applications par exemple, la différentiabilité par rapport à la fonction initiale est nécessaire pour garantir l'existence d'une solution semi-flow régulier de classe C^1 voir [31]. La différentiabilité par rapport aux paramètres est appliquée dans le problème d'estimation de paramètres par quasi-linéarisation voir [32]. Lin en 2013 [37], a étudié la différentiabilité des solutions des G -EDSs par rapport à la condition initiale et paramètre, dans un cadre réel (unidimensionnel). Ensuite, Bougherra et al en 2020 [9], ont généralisé le résultat de Lin au cas vectoriel (d -dimensionnel).

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux équations différentielles stochastiques de type neutral, gouvernées par un G -mouvement Brownien (G -EDSNs). Nous visons à discuter la différentiabilité de la solution des G -EDSNs par rapport à la condition initiale. Contrairement aux études précitées, il est important de mentionner que la donnée initiale ici n'est pas un point de l'espace Euclidien \mathbb{R}^n , mais c'est une fonction appartenant à l'espace de Banach $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ des fonctions continues et bornées de $[-r, 0]$ dans \mathbb{R}^n ($r > 0$), ce qui rend cette recherche différente et plus générale.

Dans un premier temps, nous introduisons un nouveau type de G -EDSNs, où les solutions sont dans l'espace de Banach $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$ des opérateurs linéaires définis sur $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, nous démontrons la différentiabilité de la solution $X(t)$ d'une G -EDSN par rapport à la condition initiale $x \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, en donnant la G -EDSN satisfaite par la dérivée $Y(t) \in \mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$ de la solution de la G -EDSN initiale.

De plus, nous avons retrouvé comme cas particulier et de manière non triviale, les résultats obtenus par Bougherra et al. [9] concernant la différentiabilité des G -EDSs. Par la suite, nous avons étudié la différentiabilité des solutions de G -EDSNs dont la condition initiale dépend d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, par rapport à ce paramètre. Dans les deux cas étudiés, nous avons donné des exemples pour illustrer les résultats théoriques obtenus.

Structure de la thèse

La thèse s'articule autour de quatre chapitres organisés de la manière suivante : Chapitre [1], est consacré aux rappels des notions de base concernant la théorie d'espérance sous-linéaire introduite par Peng, qui est essentielle pour la compréhension du sujet. Nous donnons les résultats préliminaires sur l'intégration stochastique dans le cadre de la G -espérance, notamment le G -mouvement Brownien, son processus de variation quadratique ainsi que la G -formule d'Itô.

Chapitre [2] est dédié à la présentation des équations différentielles stochastiques de type neutral gouvernées par un G -mouvement Brownien, en mention-

nant les caractéristiques principales de ces équations. Nous montrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution de ce type d'équations.

Chapitre 3, qui est le premier résultat de cette étude se compose de la manière suivante : tout d'abord, nous avons défini l'espace de Banach $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$, auquel appartient la dérivée, puis nous avons donné l'équation différentielle stochastique de la dérivée de la solution par rapport à la condition initiale. Ensuite, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de la dérivée. En dernier lieu, nous avons étudié la différentiabilité de la solution illustrée par deux exemples.

Dans le chapitre 4, nous avons montré la différentiabilité de la solution d'une équation stochastique de type neutral dont la condition initiale dépend d'un paramètre réel, par rapport à celui-ci. L'équation de la dérivée a été également donnée.

Ce travail a été couronné par la production scientifique suivante :

•Publications internationales :

1–Boumezbeur, Z., Boutabia, H., Differentiability of neutral stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with respect the initial data. Honam Math. J., **45** (2023), No. 3, pp. 433-456.
<https://doi.org/10.5831/HMJ.2023.45.3.433>

•Communications internationales :

1–Existence and uniqueness of solution to G -neutral stochastic differential equations, Zakaria Boumezbeur, Hacène Boutabia, International Conference on Mathematics and Applications, ICMA'2021, Blida, 7-8, December 2021.

2–Differentiability of solution of G -neutral stochastic differential equations, Zakaria Boumezbeur, Hacène Boutabia, Rencontre international sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades, contrôle optimal et systèmes stochastiques (15-16 Mars 2022, Annaba, Algeria).

•Communications nationales :

1–Différentiabilité des équations différentielles stochastiques de type neutral gouvernées par un G -mouvement Brownien, Zakaria Boumezbeur, Hacène Boutabia, Journées Jeunes Chercheurs (JJC'2018, 17-18 Décembre 2018, à Annaba, Algeria).

2–On the p th Moment Estimates and L_G^p -Continuity of solution of G -Neutral Stochastic Differential Equations, Zakaria Boumezbeur, Hacène Boutabia, second national mathematics seminar (NMS'2, Wednesday June 2, 2021, Constantine, Algeria).

3–On the existence and uniqueness of Solution of G -Neutral Stochastic Differential Equations, Zakaria Boumezbeur, Hacène Boutabia, Fourth Conference on Informatics and Applied Mathematics (IAM'21, 01-02 December 2021, Guelma-ALGERIA).

4—Existence and uniqueness of the solution to valued operator G -stochastic differential equations, Zakaria Boumezbeur, Hacène Boutabia, Journées Jeunes Chercheurs-Actuariat, Probabilités et Statistique (JJC-APS 2021-15 au 16 décembre 2021, Annaba, Algeria).

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Aperçu sur l'espérance sous-linéaire

Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie d'espérance sous-linéaire, introduite par Peng, notamment les notions de distributions et d'indépendance. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter [43, 44, 47, 48, 49].

L'espérance sous-linéaire a un rôle important pour les phénomènes dont le modèle de probabilité est incertain, et est récemment devenue également un outil efficace pour mesurer les pertes de risque et le super-hedging en finance.

1.1.1 Espérance sous-linéaire

Soient Ω un ensemble non vide et \mathcal{H} l'espace linéaire des fonctions réelles définies sur Ω satisfait, $c \in \mathcal{H}$ pour toute constante c et $|X| \in \mathcal{H}$ pour tout $X \in \mathcal{H}$. \mathcal{H} est considéré comme l'espace des variables aléatoires.

Définition 1.1.1 *On appelle espérance sous-linéaire toute fonction $\mathbb{E} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes : Pour tout $X, Y \in \mathcal{H}$, $c \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$ on a :*

(i) *(Monotonie) :*

$$\text{si } X \leq Y \text{ alors } \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y],$$

(ii) *(Préservation des constantes) :*

$$\mathbb{E}[c] = c,$$

(iii) *(Sous-additivité) :*

$$\mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y],$$

(iv) *(Homogénéité positive) :*

$$\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X].$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est appelé espace d'espérance sous-linéaire. Si seulement (i) et (ii) sont satisfaites, \mathbb{E} est dite l'espérance non-linéaire et le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est appelé l'espace d'espérance non-linéaire.

Remarque 1.1.1 - Si l'inégalité (iii) est une égalité, alors \mathbb{E} est l'espérance linéaire classique.

- Les propriétés (iii) et (iv) entraînent la convexité de \mathbb{E} , i.e. pour $\alpha \in [0, 1]$,

$$\mathbb{E}[\alpha X + (1 - \alpha) Y] \leq \alpha \mathbb{E}[X] + (1 - \alpha) \mathbb{E}[Y].$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la propriété (iv) est équivalente à

$$\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda^+ \mathbb{E}[X] + \lambda^- \mathbb{E}[-X].$$

Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ un espace d'espérance sous-linéaire tel que si $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{H}$ alors $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$ pour toute fonction $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localement Lipschitziennes i.e. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une constante $C > 0$ et un entier positif n_0 :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C |x - y| (1 + |x|^{n_0} + |y|^{n_0}).$$

Remarque 1.1.2 En pratique l'espace $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ peut être remplacé par l'un des espaces de fonctions suivants :

$$C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^0(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n), C_b(\mathbb{R}^n), C_{unif}(\mathbb{R}^n), C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n), C_b^k(\mathbb{R}^n), \\ C_{Lip}(\mathbb{R}^n), SCS(\mathbb{R}^n) \text{ et } SCI(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.1.3 Il est clair que si $X \in \mathcal{H}$ et $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ alors $X^m, \varphi(X) \in \mathcal{H}$. En particulier $\mathbb{E}[|X|^m] < \infty$, pour chaque $m \in \mathbb{N}$.

Définition 1.1.2 Soient $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ deux espérances sous-linéaires définies dans le même espace (Ω, \mathcal{H}) . Nous dirons que \mathbb{E}_1 est dominée par \mathbb{E}_2 si pour tout $X \in \mathcal{H}$ on a

$$\mathbb{E}_1[X] \leq \mathbb{E}_2[X].$$

Remarque 1.1.4 D'après (iii) de la définition 1.1.1 une espérance sous-linéaire est dominée par elle-même, (iii) est appelé également la propriété de l'auto-dominaton.

1.1.2 Théorème de représentation de l'espérance sous-linéaire

Une espérance sous-linéaire peut être exprimée comme un supremum des espérances linéaires classiques.

Théorème 1.1.1 *Soit \mathbb{E} une fonctionnelle définie sur un espace d'espérance sous-linéaire \mathcal{H} vérifiant la sous-additivité et l'homogénéité positive. Alors, il existe une famille de fonctions linéaires $\{E_\theta; \theta \in \Theta\}$ définies sur \mathcal{H} telle que :*

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{\theta \in \Theta} E_\theta[X],$$

et pour tout $X \in \mathcal{H}$, il existe $\theta_X \in \Theta$ telle que

$$\mathbb{E}[X] = E_{\theta_X}[X].$$

De plus, si \mathbb{E} est une espérance sous-linéaire, alors E_θ est une espérance linéaire.

Preuve. Soit $Q = \{E_\theta; \theta \in \Theta\}$ la famille de toutes les formes linéaires définies sur \mathcal{H} , dominées par \mathbb{E} i.e., $E_\theta[X] \leq \mathbb{E}[X]$, pour tout $X \in \mathcal{H}$ et pour tout $E_\theta \in Q$. Montrons d'abord que Q est non vide.

En effet, pour $X \in \mathcal{H}$ donné, soit le sous-espace de \mathcal{H} , $L = \{aX : a \in \mathbb{R}\}$. On définit la fonction linéaire $I : L \rightarrow \mathbb{R}$ par $I[aX] = a\mathbb{E}[X]$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Alors il est clair que $I[\cdot]$ est aussi linéaire sur \mathcal{H} et $I \leq \mathbb{E}$ sur L . Ainsi que \mathbb{E} est sous-additive et positivement homogène, alors d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonction linéaire E sur \mathcal{H} telle que $E = I$ sur L et $E \leq \mathbb{E}$ sur \mathcal{H} . Ainsi E est une fonction linéaire dominée par \mathbb{E} et telle que $\mathbb{E}[X] = E[X]$. On pose alors

$$\mathbb{E}_Q[X] = \sup_{\theta \in \Theta} E_\theta[X] \quad \text{pour } X \in \mathcal{H}.$$

Il est clair que $\mathbb{E}_Q = \mathbb{E}$. De plus si \mathbb{E} est une espérance sous-linéaire, alors que nous avons pour chaque élément non négatif $X \in \mathcal{H}$, $E_\theta[X] = -E_\theta[-X] \geq -\mathbb{E}[-X] \geq 0$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $-E_\theta[c] = E_\theta[-c] \leq \mathbb{E}[-c] = -c$ et $E_\theta[c] \leq \mathbb{E}[c] = c$, nous obtenons ainsi $E_\theta[c] = c$. Par conséquent E_θ est une espérance linéaire. ■

Il vaut la peine de mentionner que l'espérance sous-linéaire E_θ , est seulement supposée additive. Mais on peut appliquer le théorème de Daniell-Stone pour prouver qu'il existe une mesure de probabilité unique σ -additive P_θ sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{H}))$ telle que

$$E_\theta[X] = \int_{\Omega} X dP_\theta, \quad X \in \mathcal{H}.$$

L'incertitude du modèle de probabilité correspondant à l'espérance sous-linéaire \mathbb{E} , est décrite par le sous-ensemble $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$, et l'incertitude de distributions correspondante pour un vecteur aléatoires $X \in \mathcal{H}^n$ est décrite par l'ensemble

$$\{F_X(\theta, A) = P_\theta(X \in A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Remarque 1.1.5 *Dans le cas où Q est un singleton, \mathbb{E} n'est autre que l'espérance linéaire classique.*

1.2 Distribution et indépendance

Dans le cas de l'espérance sous-linéaire, les notions de distribution et d'indépendance pour les variables aléatoires ont été établies par Peng [50, 47] d'un point de vue plus fonctionnelles que probabiliste à l'aide des familles de fonctions de $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.2.1 Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n , défini sur $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. La distribution de X sous \mathbb{E} est définie par la fonctionnelle $\mathbb{F}_X[\cdot]$ sur $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ suivante :

$$\mathbb{F}_X[\varphi] = \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

Le triplet $(\mathbb{R}^n, C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n), \mathbb{F}_X)$ forme un espace d'espérance sous-linéaire. \mathbb{F}_X appelée la distribution de X sous \mathbb{E} .

Définition 1.2.2 Nous dirons que la distribution de X est plus forte que Y , si

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \mathbb{E}[\varphi(Y)], \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.2.3 Deux vecteurs aléatoires n -dimensionnels X, Y définis respectivement sur les espaces d'espérance sous-linéaires $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{E}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{E}_2)$ sont dits identiquement distribués si pour toute fonction $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ nous avons :

$$\mathbb{E}_1[\varphi(X)] = \mathbb{E}_2[\varphi(Y)],$$

et on notera par $X \sim Y$ ou $X \stackrel{d}{=} Y$.

Remarque 1.2.1 La distribution de X est plus forte que Y signifie que le degré d'incertitude de X est plus grand que celui de Y . Ainsi, $X \sim Y$ signifie qu'ils ont le même degré d'incertitude.

Remarque 1.2.2 Si \mathbb{F}_X n'est pas une espérance linéaire, alors X a une distribution incertaine. La distribution de X se caractérise par les quatre paramètres suivants :

$$\bar{\mu} := \mathbb{E}[X], \quad \underline{\mu} := -\mathbb{E}[-X], \quad \bar{\sigma}^2 := \mathbb{E}[X^2] \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}^2 := -\mathbb{E}[-X^2]$$

Les intervalles $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ et $[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$, caractérisent respectivement la moyenne incertaine et la variance incertaine de X .

Proposition 1.2.1 Soient $X, Y \in \mathcal{H}$ avec $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y]$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y],$$

en particulier, si $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[-Y] = 0$ alors

$$\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X].$$

Preuve. Pour $X, Y \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\mathbb{E}[\alpha Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] + \alpha^- \mathbb{E}[-Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] - \alpha^- \mathbb{E}[Y] = \alpha \mathbb{E}[Y],$$

d'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X + \alpha Y] &\leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\alpha Y] \\ &= \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X] - \alpha \mathbb{E}[-Y] \\ &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[-\alpha Y] \\ &\leq \mathbb{E}[X + \alpha Y]. \end{aligned}$$

■

Maintenant, voici un exemple montrant comment nous introduisons l'espérance sous-linéaire dans un modèle de probabilité incertain.

Exemple 1.2.1 *Dans un jeu, on sélectionne une boule d'une boîte contenant B boules blanches, N boules noires et R boules rouges. Le propriétaire de la boîte, qui est le banquier du jeu, ne nous dit pas le nombre exacte de B, N et R . Il nous informe seulement que $B + N + R = 100$ et $B = N \in [20; 25]$. Soit X la variable aléatoire définie par :*

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si nous obtenons une boule blanche;} \\ 0 & \text{si nous obtenons une boule rouge;} \\ -1 & \text{si nous obtenons une boule noire.} \end{cases}$$

Maintenant, comment mesurer une perte $Y = \varphi(X)$, pour une fonction φ donnée sur \mathbb{R} . Nous savons que la distribution de X est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} \end{array} \right\}$$

Avec une incertitude $p \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}] = [0.4, 0.5]$. Ainsi, l'espérance robuste de $Y = \varphi(X)$ est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X)] &= \sup_{\theta \in \Theta} E_{\theta}[\varphi(X)] \\ &= \sup_{p \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]} \left[\frac{p}{2} (\varphi(1) + \varphi(-1)) + (1-p) \varphi(0) \right]. \end{aligned}$$

Ici, X a une distribution incertaine.

La notion d'indépendance suivante joue un rôle essentiel dans la théorie de l'espérance non-linéaire.

Définition 1.2.4 Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ espace d'espérance sous-linéaire. Un vecteur aléatoire $Y \in \mathcal{H}^n$ est dit indépendant d'un autre vecteur aléatoire $X \in \mathcal{H}^m$ sous \mathbb{E} , si pour tout $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^{n+m})$ nous avons

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x, Y)]_{x=X}],$$

où $\mathbb{E}[\varphi(x, Y)]_{x=X}$ signifie $\psi(x)$ avec $\psi(x) = \mathbb{E}[\varphi(x, Y)]$.

Un vecteur aléatoire \tilde{X} est dit une copie de X , si $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$ et \tilde{X} est indépendant de X .

Remarque 1.2.3 Dans un espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, Y est indépendant de X signifie que la distribution de Y ne change pas après la réalisation de $X = x$. En d'autres termes, l'espérance conditionnelle sous-linéaire de Y par rapport à X est $\mathbb{E}[\varphi(x, Y)]_{x=X}$. Dans le cas de l'espérance linéaire, cette notion d'indépendance est la même que celle du cas classique.

Remarque 1.2.4 Il est important de noter que pour une espérance sous-linéaire, si Y est indépendant de X ne signifie pas nécessairement que X est indépendant de Y , i.e., dans une espérance sous-linéaire cette relation d'indépendance n'est pas symétrique.

Exemple 1.2.2 Considérons $X, Y \in \mathcal{H}$ identiquement distribuées et satisfaisant $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[-X] = 0$ et $\bar{\sigma}^2 > \underline{\sigma}^2$, où $\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[Y^2]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}[-Y^2]$. Nous supposons que $\mathbb{E}[|X|] > 0$.

Il résulte que

$$\mathbb{E}[X^+] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X| + X] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X|] > 0,$$

et

$$\mathbb{E}[X^-] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X| - X] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X^+].$$

Si Y est indépendant de X , alors

$$\mathbb{E}[XY^2] = \mathbb{E}[X^+\bar{\sigma}^2 - X^-\underline{\sigma}^2] = (\bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2)\mathbb{E}[X^+] > 0,$$

mais si X est indépendant de Y ,

$$\mathbb{E}[XY^2] = 0.$$

La propriété d'indépendance de deux vecteurs X, Y ne concerne que la distribution conjointe de (X, Y) .

Remarque 1.2.5 La situation Y est indépendant de X apparait souvent lorsque Y survient après X , donc une espérance très robuste devrait prendre en compte l'information de X .

1.3 Distribution G -normale

Nous introduisons maintenant le concept de la distribution G -normale, qui est équivalent à la distribution normale dans le cadre classique.

Définition 1.3.1 Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire d -dimensionnel défini sur $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. On appelle fonction génératrice de X la fonction $G = G_X : \mathbb{S}_d \mapsto \mathbb{R}$, définie par

$$G_X(A) := \frac{1}{2} \mathbb{E} [\langle AX, A \rangle],$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire Euclidien de \mathbb{R}^d .

En utilisant le théorème [1.1.1](#), Peng [\[46, 47\]](#) montre qu'il existe un sous-ensemble Γ fermé, borné et convexe de \mathbb{S}_d tel que

$$G(A) = \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr} [\gamma \gamma^T A] \quad \text{pour toute } A \in \mathbb{S}_d,$$

avec γ^T est la transposée de la matrice γ . Dans ce qui suit on pose

$$\Sigma = \{\gamma \gamma^T : \gamma \in \Gamma\}.$$

Définition 1.3.2 Dans un espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_1, \dots, X_d)$ est dit G -normalement distribué, noté par $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, si et seulement si pour tout $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^d)$, la fonction u définie par

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[\varphi \left(x + \sqrt{t} X \right) \right], \quad (t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^d,$$

est l'unique solution de viscosité de la G -équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - G(D^2 u) = 0, & (t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = \varphi(x), \end{cases},$$

où $D^2 u = \left(\partial_{x_i x_j}^2 u \right)_{i,j}$ est la matrice Hessienne de $u(t, x)$.

l'ensemble Σ faire apparaître l'incertitude de la variance de X . Si l'espérance \mathbb{E} est linéaire cet ensemble n'est qu'un singleton, qui est en fait la matrice des covariances du vecteur aléatoire X , qui est de loi normale classique.

Remarque 1.3.1 Dans le cas réel ($d = 1$), on a $\Sigma = [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$ et $G = G_{\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2}$, est la fonction sous-linéaire réelle qui est paramétrée par $\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2$ et donnée par

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \mathbb{E} [\alpha X^2] = \frac{1}{2} (\alpha^+ \bar{\sigma}^2 - \alpha^- \underline{\sigma}^2), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

avec $\underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E} [-X^2]$ et $\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E} [X^2]$. Dans ce cas $X \sim \mathcal{N}(0, [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$.

Corollaire 1.3.1 Dans le cas où $\underline{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2 > 0$, $\mathcal{N}(0, [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ est la distribution normale classique $\mathcal{N}(0, \bar{\sigma}^2)$.

Preuve. Si $\underline{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2 = \sigma^2$, la G -équation de la chaleur devient l'équation de la chaleur classique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(0, x) = \varphi,$$

il est bien connu que sa solution est donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}\right) dy.$$

Ainsi, pour tout φ ,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = u(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

Dans les deux cas suivants on peut calculer $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ comme suit. Si $X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$, alors :

(i) Pour toute φ convexe, nous avons

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) dy.$$

(ii) Pour toute φ concave, nous avons

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\underline{\sigma}^2}\right) dy,$$

en particulier,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[-X] = 0, \quad \mathbb{E}[X^2] = \bar{\sigma}^2, \quad -\mathbb{E}[-X^2] = \underline{\sigma}^2,$$

et

$$\mathbb{E}[X^4] = 6\bar{\sigma}^4, \quad -\mathbb{E}[-X^4] = 6\underline{\sigma}^4.$$

■

1.4 G -calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats préliminaires sur le G -mouvement Brownien, le calcul stochastique correspondant ainsi que la notion de capacité sous la G -espérance. Pour plus des détails, le lecteur est invité à consulter les références [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49].

1.4.1 G-mouvement Brownien et sa caractérisation

Définition 1.4.1 Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ un espace d'espérance sous-linéaire. Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit d -dimensionnel, $d \geq 1$, si pour tout $t \geq 0$, X_t est un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathcal{H}^d .

Définition 1.4.2 Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ d -dimensionnel, $d \geq 1$, défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est dit G -mouvement Brownien d -dimensionnel si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $B_0 = 0$,
- (ii) Pour tout $t, s \geq 0$, l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est $\mathcal{N}(0, s \sum)$ -distribué et est indépendant de $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$.

Peng [49], a donné le théorème de caractérisation du G -mouvement Brownien suivant :

Théorème 1.4.1 Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un processus à d -dimension défini sur un espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ tel que

- (i) $B_0(\omega) = 0$,
- (ii) Pour tout $t, s \geq 0$, $B_{t+s} - B_t$ et B_t sont identiquement distribuées et l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est indépendants de $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$.
- (iii) $\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[-B_t] = 0$ et $\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}[|B_t|^3] t^{-1} = 0$.

Alors $(B_t)_{t \geq 0}$, est un G -mouvement Brownien, avec $G(A) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\langle AB_1, B_1 \rangle]$, $A \in \mathbb{S}_d$.

Remarque 1.4.1 Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un G -mouvement Brownien réel (i.e., $d = 1$), la fonction génératrice correspondante G est donnée par :

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\alpha B_1^2], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.4.2 Comme dans le cas classique, nous pouvons montrer que si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un G -mouvement Brownien, alors pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda^{-\frac{1}{2}} B_{\lambda t})_{t \geq 0}$ est également un G -mouvement Brownien (propriété de scaling du G -mouvement Brownien). Il en est de même pour le processus $(B_{t+t_0} - B_t)_{t \geq 0}$, $t_0 > 0$.

Dans toute la suite nous posons

$$B^v := \langle v, B_t \rangle \text{ pour tout } v = (v_1, v_2, \dots, v_d)^T \in \mathbb{R}^d.$$

Nous avons la proposition suivante qui est importante dans le calcul stochastique.

Proposition 1.4.1 Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un G -mouvement Brownien d -dimensionnel, défini sur un espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. Alors $(B_t^v)_{t \geq 0}$ est un G_v -mouvement Brownien réel de fonction génératrice

$$G_v(\alpha) = \frac{1}{2} (\sigma_{vv^T}^2 \alpha^+ - \sigma_{-vv^T}^2 \alpha^-),$$

où

$$\sigma_{vv^T}^2 = \mathbb{E} [\langle v, B_1 \rangle^2] \quad \text{et} \quad \sigma_{-vv^T}^2 = -\mathbb{E} [-\langle v, B_1 \rangle^2].$$

En particulier, pour tout $t, s \geq 0$,

$$B_{t+s}^v - B_t^v \sim \mathcal{N}(0; [s\sigma_{-vv^T}^2, s\sigma_{vv^T}^2]).$$

Proposition 1.4.2 Pour toute fonction convexe φ , on a

$$\mathbb{E} [\varphi(B_{t+s}^v - B_t^v)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \sigma_{vv^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2s\sigma_{vv^T}^2}\right) dx.$$

Pour toute fonction concave φ et $\sigma_{-vv^T}^2 > 0$, on a

$$\mathbb{E} [\varphi(B_{t+s}^v - B_t^v)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \sigma_{-vv^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2s\sigma_{-vv^T}^2}\right) dx.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(B_t^v - B_s^v)^2] &= \sigma_{vv^T}^2 (t - s), \quad \mathbb{E} [(B_t^v - B_s^v)^4] = 3\sigma_{vv^T}^4 (t - s)^2, \\ \mathbb{E} [-(B_t^v - B_s^v)^2] &= -\sigma_{-vv^T}^2 (t - s), \quad \mathbb{E} [-(B_t^v - B_s^v)^4] = -3\sigma_{-vv^T}^4 (t - s)^2. \end{aligned}$$

1.4.2 Existence de G -mouvement Brownien et G -espérance conditionnelle

Soit $\Omega = C_0^d(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions $\omega : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^d$ continues avec $\omega_0 = 0$, muni de la distance

$$\rho(\omega^1; \omega^2) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left[\left(\max_{t \in [0; i]} |\omega_t^1 - \omega_t^2| \right) \wedge 1 \right].$$

Pour tout $T > 0$ fixé, on note

$$\Omega_T = \{\omega_{\wedge T} : \omega \in \Omega\}.$$

Considérons le processus canonique

$$B_t(\omega) := \omega_t \quad \text{pour tout } t \in [0, \infty[\text{ et } \omega \in \Omega.$$

Soit l'espace des variables aléatoires suivant

$$Lip(\Omega_T) = \left\{ \varphi(B_{t_1 \wedge T}, \dots, B_{t_n \wedge T}) : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in [0, \infty[, \right. \\ \left. \varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^{d \times n}) \right\}.$$

Il est clair que pour tout $t \leq T$, $Lip(\Omega_t) \subseteq Lip(\Omega_T)$. On pose

$$Lip(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Lip(\Omega_n).$$

Remarque 1.4.3 *Il est clair que $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^{d \times n})$, $Lip(\Omega_T)$ et $Lip(\Omega)$ sont des espaces vectoriels. De plus, si $\varphi, \psi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ alors le produit $\varphi \cdot \psi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$, aussi si $X, Y \in Lip(\Omega_T)$ alors $X \cdot Y \in Lip(\Omega_T)$. En particulier, pour tout $t \in [0, \infty[, B_t \in Lip(\Omega)$.*

Peng [44], a construit sur l'espace $(\Omega, Lip(\Omega))$ une espérance sous-linéaire telle que le processus canonique $(B_t)_{t \geq 0}$ soit un G -mouvement Brownien de la manière suivante : Soit $(\xi_i)_{i \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires d -dimensionnel sur un espace d'espérance sous-linéaire $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathbb{E}})$ tel que ξ_i soit G -normalement distribuée et ξ_{i+1} indépendant de $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ pour tout $i \geq 1$. Ensuite, il a introduit une espérance sous-linéaire $\hat{\mathbb{E}}$ définie sur $Lip(\Omega)$ comme suit : Pour tout $X \in Lip(\Omega)$ de la forme

$$X = \varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

pour une certaine fonction $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^{d \times n})$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, on pose

$$\hat{\mathbb{E}}[X] := \tilde{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(\sqrt{t_1 - t_0} \xi_1, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}} \xi_n \right) \right].$$

L'espérance conditionnelle associée à X sous Ω_{t_j} est définie par

$$\hat{\mathbb{E}}[X | \Omega_{t_j}] := \psi(B_{t_1}, \dots, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}),$$

où

$$\psi(x_1, \dots, x_j) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(x_1, \dots, x_j, \sqrt{t_{j+1} - t_j} \xi_{j+1}, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}} \xi_n \right) \right].$$

Il est facile de vérifier que $\hat{\mathbb{E}}$ défini systématiquement une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega)$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un G -mouvement Brownien. Puisque $Lip(\Omega_T) \subset Lip(\Omega)$, $\hat{\mathbb{E}}$ est aussi une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega_T)$.

Dans toute la suite, nous considérons ce G -mouvement Brownien défini sur l'espace $(\Omega, Lip(\Omega), \hat{\mathbb{E}})$. Rappelons les propriétés de $\hat{\mathbb{E}}[. | \Omega_t]$.

Proposition 1.4.3 Soit $X, Y \in Lip(\Omega)$:

(i) :

$$\text{Si } X \leq Y, \text{ alors } \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t].$$

(ii) :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\eta|\Omega_t] = \eta, \text{ pour tout } t \in [0, \infty[\text{ et } \eta \in Lip(\Omega_t).$$

(iii) :

$$\widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y|\Omega_t].$$

(iv) :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\eta X|\Omega_t] = \eta^+ \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \eta^- \widehat{\mathbb{E}}[-X|\Omega_t], \text{ pour tout } \eta \in Lip(\Omega_t).$$

(v) :

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t]|\Omega_s\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_{t \wedge s}],$$

en particulier

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t]\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X].$$

Pour tout $X \in Lip(\Omega^t)$, $\widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X]$, tel que $Lip(\Omega^t)$ est l'espace linéaire des variables aléatoires de la forme

$$\begin{aligned} & \varphi(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_{n+1}} - B_{t_n}), \quad n \geq 1, \\ & \varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^{d \times n}) \text{ et } t_1, \dots, t_{n+1} \in [t, \infty[. \end{aligned}$$

Remarque 1.4.4 Les conditions (ii) et (iii) impliquent que

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + \eta|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \eta \text{ pour } \eta \in Lip(\Omega_t).$$

En outre, si $Y \in Lip(\Omega_t)$ satisfaisant $\widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y|\Omega_t]$ alors

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t].$$

La condition (iv) est l'homogénéité positive.

Notons par $L_G^p(\Omega)$, $p \geq 1$, la complétion de $Lip(\Omega)$ sous la norme $\|X\|_p = \left(\widehat{\mathbb{E}}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}$. De même, nous pouvons définir les complétions $L_G^p(\Omega_T)$, $L_G^p(\Omega_T^t)$ et $L_G^p(\Omega^t)$ de $Lip(\Omega_T)$, $Lip(\Omega_T^t)$ et $Lip(\Omega^t)$ respectivement. Il est clair que $L_G^p(\Omega_t) \subset L_G^p(\Omega_T) \subset L_G^p(\Omega)$. D'après Peng, $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot]$ se prolonge par continuité à une espérance sous linéaire sur $(\Omega, L_G^1(\Omega))$ que nous noterons encore $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot]$. Pour tout $t \leq T$ fixé, l'espérance conditionnelle $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot|\Omega_t] : Lip(\Omega_T) \mapsto Lip(\Omega_t)$ est une application continue sous $\|\cdot\|_1$. En effet, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y|\Omega_t],$$

d'où

$$\left| \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] \right| \leq \widehat{\mathbb{E}}[|X - Y| |\Omega_t].$$

Il résulte que

$$\left\| \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] \right\|_1 \leq \|X - Y\|_1.$$

Il s'ensuit que $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot|\Omega_t]$ s'étend en une application continue

$$\widehat{\mathbb{E}}[\cdot|\Omega_t] : L_G^1(\Omega_T) \longmapsto L_G^1(\Omega_t),$$

et par le même raisonnement, l'application

$$\widehat{\mathbb{E}}[\cdot|\Omega_t] : L_G^1(\Omega) \longmapsto L_G^1(\Omega_t),$$

est également continue.

Remarque 1.4.5 La proposition 1.4.3 reste valable pour $X, Y \in L_G^1(\Omega)$. Mais dans (iv), $\eta \in L_G^1(\Omega_t)$ devrait être bornée car $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ n'implique pas que le produit $X.Y \in L_G^1(\Omega)$. En particulier, on a la formule d'indépendance suivant

$$\widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X], \quad \forall X \in L_G^1(\Omega^t).$$

Maintenant nous donnons la définition suivante, qui est similaire à la définition classique.

Définition 1.4.3 Soit $Y \in (L_G^1(\Omega))^n$ un vecteur aléatoire n -dimensionnel, est dit indépendant de Ω_t pour un certain t donné, si pour tout $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(Y) |\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)].$$

Remarque 1.4.6 Comme le cas classique, les accroissement $(B_{t+s} - B_t)_{s \geq 0}$ du G -mouvement Brownien sont indépendants de Ω_t .

La propriété suivante est très utile.

Proposition 1.4.4 Soient $X, Y \in L_G^1(\Omega)$, telles que $\widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y|\Omega_t]$ pour un certain $t \in [0, T]$ donné, alors pour tout $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t].$$

En particulier, si $\widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[-Y|\Omega_t] = 0$, alors $\widehat{\mathbb{E}}[X + Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t]$.

Preuve. Découle des deux inégalités suivantes,

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + Y|\Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t],$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + Y|\Omega_t] \geq \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[-Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t].$$

■

1.5 G -capacité

Contrairement à l'espérance linéaire classique, la G -espérance $\widehat{\mathbb{E}}$ n'est pas basée sur un espace de probabilité particulier. Donc, au lieu de la probabilité nous utilisons un différent concept appelé capacité, qui a été introduite par Choquet dans le contexte de sa théorie des capacités (1953). "les capacités appelées les mesures floues, généralisent les mesures additives en remplaçant l'axiome d'additivité par un axiome plus souple, celui de monotonie et généralement les mesures non-additives appelées aussi capacités". La notion de capacité associée à une G -espérance $\widehat{\mathbb{E}}$ (noté G -capacité) est naturellement introduite par rapport à une collection de mesures de probabilité \mathcal{P} , faiblement compact définies sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

Soient Ω un espace métrique séparable complet muni de la distance d , $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne sur Ω et \mathcal{M} la famille de toutes les mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Considérons un sous-ensemble donné $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$, alors nous pouvons définir la capacité de Choquet $C(\cdot)$ par

$$C(A) := \sup_{P \in \overline{\mathcal{P}}} P(A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

On peut vérifier le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 *La fonction d'ensemble $C(\cdot)$ est une capacité de Choquet, i.e.,*

(i) $0 \leq C(A) \leq 1, \quad \forall A \subset \Omega$.

(ii) Si $A \subset B$, alors $C(A) \leq C(B)$.

(iii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans $\mathcal{B}(\Omega)$, alors $C(\cup A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(A_n)$.

(iv) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante dans $\mathcal{B}(\Omega)$ tel que $A_n \uparrow A = \cup A_n$, alors $C(\cup A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(A_n)$.

Grâce à ce concept, la notion de <<quasi-sûrement>> (En abrégé *q.s.*), a été introduite [50, 51] et jouera ici le même rôle que la notion <<presque-sûrement>> dans l'analyse stochastique classique. On utilise le vocabulaire standard lié à la capacité dans les définitions suivantes.

Définition 1.5.1 *Un ensemble $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ est dit polaire si $C(A) = 0$.*

Remarque 1.5.1 *Un ensemble $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ est polaire si et seulement si $P(A) = 0$, pour tout $P \in \mathcal{P}$.*

Définition 1.5.2 *Une propriété est vraie q.s. si elle est vraie en dehors d'un ensemble polaire.*

Définition 1.5.3 *Un processus X est dit quasi-continu (En abrégé *q.c.*) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $O \subset \Omega$, avec $C(O) < \varepsilon$ tel que X est continue sur le complémentaire O^c de O par rapport à Ω .*

Définition 1.5.4 *Nous disons qu'un processus X a une version q.c., s'il existe un processus q.c. Y tel que $X = Y$, q.s.*

Remarque 1.5.2 *Les notions concernant la capacité classique restent valables pour la G -capacité.*

1.6 G -intégrale d'Itô

Dans cette section, nous présentons la construction de l'intégrale de type Itô par rapport au G -mouvement Brownien et étudions quelques propriétés importantes dont on aura besoin dans la suite. Commençons par l'intégrale de Bochner qui étend la définition de l'intégrale de Lebesgue aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach, comme limite d'intégrales de fonctions étagées.

1.6.1 L'intégrale de Bochner

Pour $T \in \mathbb{R}^+$, soit $\pi_{[0,T]}^N := \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ une partition de $[0, T]$ dont le pas

$$\mu \left(\pi_{[0,T]}^N \right) = \max \{ |t_{i+1} - t_i|, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \},$$

tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. Soit $p \geq 1$ fixé. Considérons l'ensemble $M_G^{p,0}(0, T)$ des processus simples, *i.e.*

$$M_G^{p,0}(0, T) := \left\{ \eta_t = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \mathbf{I}_{[t_{k+1}, t_k]} : \xi_k \in L_G^p(\Omega_{t_k}) \right\},$$

et on dénote par $M_G^p(0, T)$ la complétion de $M_G^{p,0}(0, T)$ par rapport à la norme

$$\|\eta\|_{M_G^p(0,T)} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}}[|\eta_t|^p] dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il est clair que $M_G^q(0, T) \subset M_G^p(0, T)$ pour $1 \leq p \leq q$. On pose

$$M_G^p((0, T); \mathbb{R}^n) := \{ \eta = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n) : \eta^i \in M_G^p(0, T), \quad i = \overline{1, n} \}.$$

Définition 1.6.1 *Pour $\eta \in M_G^{p,0}(0, T)$ avec $\eta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega) \mathbf{I}_{[t_{k+1}, t_k]}(t)$, l'intégrale de Bochner associée est donnée par*

$$\int_0^T \eta_t(\omega) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega) (t_{k+1} - t_k).$$

Remarque 1.6.1 Pour tout $\eta \in M_G^{p,0}(0, T)$, on pose

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[\eta] := \frac{1}{T} \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t dt \right].$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{\mathbb{E}}_T : M_G^{p,0}(0, T) \mapsto \mathbb{R}$, est une espérance sous-linéaire. Alors, on peut introduire une norme naturelle $\|\eta\|_{M_G^p(0, T)}$, sous laquelle $M_G^{p,0}(0, T)$ peut être étendu à $M_G^p(0, T)$ qui est un espace de Banach.

Remarque 1.6.2 Si $\eta \in M_G^{p,0}(0, T)$, alors il existe une suite de processus $\{\eta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $M_G^p(0, T)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} [|\eta_t^n - \eta_t|^p] dt \rightarrow 0.$$

On observe que presque pour tout $t \in [0, T]$,

$$\{\eta^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_G^p(\Omega_t) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbb{E}} [|\eta_t^n - \eta_t|^p] \rightarrow 0,$$

donc, η_t est un élément de $L_G^p(\Omega_t)$.

1.6.2 Intégrale stochastique d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien

Commençons par l'intégrale par rapport au G -mouvement Brownien réel de fonction génératrice $G(\alpha) = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^2 \alpha^+ - \sigma^2 \alpha^-)$, telle que $0 \leq \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty$.

Définition 1.6.2 Pour tout processus simple $\eta \in M_G^{2,0}(0, T)$, on définit

$$\mathcal{I}(\eta) = \int_0^T \eta_t dB_t := \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Lemme 1.6.1 L'application $\mathcal{I} : M_G^{2,0}(0, T) \rightarrow L_G^2(\Omega_T)$ est une application continue, linéaire et se prolonge par continuité à

$$\mathcal{I}_{[0, T]} : M_G^2(0, T) \rightarrow L_G^2(\Omega_T).$$

Nous avons,

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t dB_t \right] = 0 \tag{1.1}$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] \leq \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right] \quad (1.2)$$

Preuve. D'après Peng, l'exemple 4.1.19, dans [43], on a pour tout k ,

$$\widehat{\mathbb{E}} [\xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \Omega_{t_k}] = \widehat{\mathbb{E}} [-\xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \Omega_{t_k}] = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t dB_t \right] &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \widehat{\mathbb{E}} [\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) | \Omega_{t_{N-1}}] \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right]. \end{aligned}$$

Alors, on répète cette procédure pour obtenir (1.1). On donne maintenant la preuve de (1.2), on a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right)^2 \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right)^2 + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right) \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right)^2 + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 \right] \\ &= \dots = \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right]. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $i = 0, 1, \dots, N - 1$, on a

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left[\xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\widehat{\mathbb{E}} \left[\xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \mid \Omega_{t_i} \right] \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) - \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] = 0. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \\ & \leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\ & \quad + \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\ & \leq \sum_{i=0}^{N-1} \widehat{\mathbb{E}} \left[\xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\ & \quad + \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\ & = \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right]. \end{aligned}$$

■

Définition 1.6.3 Pour $\eta \in M_G^2(0, T)$ fixé, l'intégrale stochastique par rapport au G -mouvement Brownien est défini par :

$$\mathcal{I}(\eta) = \int_0^T \eta_t dB_t.$$

La proposition suivante montre quelques propriétés élémentaires de l'intégrale stochastique d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien.

Proposition 1.6.1 Soient $\eta, \theta \in M_G^2(0, T)$ et soit $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. Alors on a :

(i) :

$$\int_s^t \eta_u dB_u = \int_s^r \eta_u dB_u + \int_r^t \eta_u dB_u.$$

(ii) :

$$\int_s^t (\delta\eta_u + \theta_u) dB_u = \delta \int_s^t \eta_u dB_u + \int_s^t \theta_u dB_u,$$

si δ borné et dans $L_G^1(\Omega_s)$.

(iii) :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[X + \int_r^T \eta_u dB_u | \Omega_s \right] = \widehat{\mathbb{E}} [X | \Omega_s] \quad \text{pour tout } X \in L_G^1(\Omega).$$

1.7 Variation quadratique du G -mouvement Brownien

Considérons le G -mouvement Brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$, avec $B_t \sim \mathcal{N}(0, [\underline{\sigma}^2 t, \bar{\sigma}^2 t])$. Soit $\pi_t^N := \{0 = t_j^0 < t_j^1 < \dots < t_j^N = t\}$, $N = 1, 2, \dots$, une suite de partitions de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0. On a

$$\begin{aligned} B_t^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N}^2 - B_{t_j^N}^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 2B_{t_j^N} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right)^2. \end{aligned}$$

Lorsque N tend vers l'infini, puisque le pas $\mu(\pi_t^N) \rightarrow 0$, alors le premier terme du second membre converge vers $2 \int_0^t B_s dB_s$ dans $L_G^p(\Omega)$. Ainsi le deuxième terme doit converger vers une limite que nous noterons $\langle B \rangle_t$, *i.e.*

$$\langle B \rangle_t = \lim_{\mu(\pi_t^N) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right)^2 = B_t^2 - 2 \int_0^t B_s dB_s \quad (1.3)$$

Par cette construction, $(\langle B \rangle_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissant avec $\langle B \rangle_0 = 0$. Ce processus est appelé le processus variation quadratique du G -mouvement Brownien B . Il caractérise la partie de l'incertitude statistique du G -mouvement Brownien. Contrairement à la théorie classique, la variation quadratique du G -mouvement Brownien $\langle B \rangle_t$ n'est généralement pas déterministe, sauf si $\underline{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2$, *i.e.* lorsque $(B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement Brownien classique. En fait, nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.7.1 *Pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$, on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}[\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s | \Omega_s] = \bar{\sigma}^2 (t - s) \quad (1.4)$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}}[-(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s) | \Omega_s] = -\underline{\sigma}^2 (t - s) \quad (1.5)$$

Preuve. Par la définition de $\langle B \rangle$ et (iii) de la proposition 1.6.1, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}[\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s | \Omega_s] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[B_t^2 - B_s^2 - 2 \int_s^t B_u dB_u | \Omega_s\right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}}[B_t^2 - B_s^2 | \Omega_s] = \bar{\sigma}^2 (t - s). \end{aligned}$$

La dernière égalité découle de l'exemple 4.1.22 dans [43], d'où l'égalité (1.4). L'égalité (1.5) se démontre de manière analogue à la première. ■

Comme pour le G -mouvement Brownien B , la variation quadratique $\langle B \rangle$ possède la propriété très intéressante suivante :

Lemme 1.7.2 *Pour tout $s, t \geq 0$ fixés, l'incrément $\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s$ a même distribution que $\langle B \rangle_t$ et est indépendant de Ω_s .*

Preuve. Les résultats découlent directement du fait que

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s &= B_{t+s}^2 - 2 \int_0^{t+s} B_u dB_u - \left[B_s^2 - 2 \int_0^s B_u dB_u \right] \\ &= (B_{t+s} - B_s)^2 - 2 \int_0^{t+s} (B_u - B_s) d(B_u - B_s) \\ &= \langle B^s \rangle_t, \end{aligned}$$

où $\langle B^s \rangle$ est le processus de variation quadratique du G -mouvement Brownien $B_t^s = B_{t+s} - B_s$, $t \geq 0$. ■

On définit maintenant l'intégrale d'un processus $\eta \in M_G^1(0, T)$ par rapport à $\langle B \rangle$. Soit l'application $\mathcal{K}_{0,T} : M_G^{1,0}(0, T) \mapsto L_G^1(\Omega_T)$ définie par

$$\mathcal{K}_{0,T}(\eta) = \int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j}).$$

Lemme 1.7.3 *Pour tout $\eta \in M_G^{1,0}(0, T)$,*

$$\widehat{\mathbb{E}}[|\mathcal{K}_{0,T}(\eta)|] \leq \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T |\eta_t| dt\right].$$

1.7. VARIATION QUADRATIQUE DU G -MOUVEMENT BROWNIEN

Ainsi, l'application $\mathcal{K}_{0,T} : M_G^{1,0}(0,T) \mapsto L_G^1(\Omega_T)$ est linéaire continue. Par conséquent, $\mathcal{K}_{0,T}$ s'étend de manière unique à $M_G^1(0,T)$. Nous noterons encore par $\mathcal{K}_{0,T}$ et nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left| \int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t \right| \right] \leq \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right] \quad \text{pour tout } \eta \in M_G^1(0,T).$$

Preuve. Premièrement, pour tout $j = 1, \dots, N-1$, on a

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left[|\xi_j| \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) - \bar{\sigma}^2 |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\mathbb{E} \left[|\xi_j| \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) \mid \Omega_{t_j} \right] - \bar{\sigma}^2 |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[|\xi_j| \bar{\sigma}^2 (t_{j+1} - t_j) - \bar{\sigma}^2 |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left[\left| \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) \right| \right] \leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) \right] \\ & \leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| \left[\left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) - \bar{\sigma}^2 (t_{j+1} - t_j) \right] \right] \\ & \quad + \widehat{\mathbb{E}} \left[\bar{\sigma}^2 \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\ & \leq \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{\mathbb{E}} \left[|\xi_j| \left[\left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) - \bar{\sigma}^2 (t_{j+1} - t_j) \right] \right] \\ & \quad + \widehat{\mathbb{E}} \left[\bar{\sigma}^2 \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\ & = \widehat{\mathbb{E}} \left[\bar{\sigma}^2 \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] = \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right]. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.7.1 Soient $0 \leq s \leq t$, $\xi \in L_G^2(\Omega_s)$ et $X \in L_G^1(\Omega)$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t - B_s)^2] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)]. \end{aligned}$$

Preuve. D'après (1.3) et (iii) de la proposition 1.6.1, nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \widehat{\mathbb{E}} \left[X + \xi \left(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s + 2 \int_s^t B_u dB_u \right) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)].\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \widehat{\mathbb{E}} \left[X + \xi \left((B_t - B_s)^2 + 2 (B_t - B_s) B_s \right) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[X + \xi (B_t - B_s)^2 \right].\end{aligned}$$

■

Nous avons l'isométrie suivante :

Proposition 1.7.2 *Soit $\eta \in M_G^2(0, T)$, Alors nous avons*

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t^2 d\langle B \rangle_t \right) \right] \quad (1.6)$$

Preuve. Considérons d'abord le cas où $\eta \in M_G^{2,0}(0, T)$, avec

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) \mathbf{I}_{[t_j, t_{j+1}[}(t).$$

Alors on a

$$\int_0^T \eta_t dB_t = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Il résulte de la proposition 1.6.1 que pour tout $X \in L_G^1(\Omega)$ et pour tout $i \neq j$,

$$\widehat{\mathbb{E}} [X + 2\xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \widehat{\mathbb{E}} [X],$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right)^2 \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \right],\end{aligned}$$

d'où d'après la proposition [1.7.1](#),

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2 \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 d \langle B \rangle_t \right].$$

Par conséquent l'égalité [\(1.6\)](#) est vérifiée pour tout $\eta \in M_G^{2,0}(0, T)$. Par passage à la limite on obtient [\(1.6\)](#) pour $\eta \in M_G^2(0, T)$. ■

Soit maintenant un G -mouvement Brownien d -dimensionnel $(B_t)_{t \geq 0}$. Comme $(B_t^u)_{t \geq 0}$ est G -mouvement Brownien réel pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, alors toutes les composantes $B_t^i := \langle B_t, e_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, d$ de $(B_t)_{t \geq 0}$ sont des G -mouvements Browniens réels, où $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^d . La variation quadratique de B_t^i étant

$$\langle B^i \rangle_t = (B_t^i)^2 - 2 \int_0^t B_s^i dB_s^i.$$

Notons que $\langle -B^i \rangle_t = \langle B^i \rangle_t$. De plus,

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left| \int_0^T \eta_t d \langle B^i \rangle_t \right| \right] \leq \bar{\sigma}_i^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right] \quad \text{pour } \eta \in M_G^1(0, T),$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t^i \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t^2 d \langle B^i \rangle_t \right) \right] \quad \text{pour } \eta \in M_G^2(0, T),$$

où l'on a posé $\bar{\sigma}_i^2 = \widehat{\mathbb{E}} \left((B_1^i)^2 \right)$ et $\underline{\sigma}_i^2 = -\widehat{\mathbb{E}} \left(-(B_1^i)^2 \right)$.

1.8 Processus de variation mutuelle

Soient $i, j \in \{1, 2, \dots, d\}$, le processus de variation mutuelle est défini par

$$\langle B^i, B^j \rangle_t = \frac{1}{4} [\langle B^i + B^j \rangle_t - \langle B^i - B^j \rangle_t].$$

Remarque 1.8.1 Comme $\langle B^i - B^j \rangle_t = \langle B^{e_i - e_j} \rangle_t = \langle -B^{e_j - e_i} \rangle_t = \langle B^{e_j - e_i} \rangle_t$, alors on a $\langle B^i, B^j \rangle_t = \langle B^j, B^i \rangle_t$. En particulier, nous avons $\langle B^i, B^i \rangle_t = \langle B^i \rangle_t$.

Remarque 1.8.2 Soit π_t^N , $N = 1, 2, \dots$, une suite de subdivisions de $[0, t]$ dont le pas tends vers 0. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N}^i - B_{t_j^N}^i \right) \left(B_{t_{j+1}^N}^j - B_{t_j^N}^j \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(B_{t_{j+1}^N}^{e_i+e_j} - B_{t_j^N}^{e_i+e_j} \right)^2 - \left(B_{t_{j+1}^N}^{e_i-e_j} - B_{t_j^N}^{e_i-e_j} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Lorsque $\mu(\pi_t^N) \rightarrow 0$, nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N}^i - B_{t_j^N}^i \right) \left(B_{t_{j+1}^N}^j - B_{t_j^N}^j \right) = \langle B^i, B^j \rangle_t.$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \langle B^u, B^v \rangle_t &= \frac{1}{4} [\langle B^{u+v} \rangle_t - \langle B^{u-v} \rangle_t] \\ &= \frac{1}{4} \left[(B_t^{u+v})^2 - 2 \int_0^t B_s^{u+v} dB_s^{u+v} - (B_t^{u-v})^2 + 2 \int_0^t B_s^{u-v} dB_s^{u-v} \right] \\ &= B_t^u B_t^v - \int_0^t B_s^u dB_s^v - \int_0^t B_s^v dB_s^u. \end{aligned}$$

Maintenant pour tout $\eta \in M_G^1(0, T)$, l'intégrale stochastique par rapport au processus de variation mutuelle est définie par

$$\int_0^T \eta_t d \langle B^i, B^j \rangle_t := \frac{1}{4} \int_0^T \eta_t d \langle B^{e_i+e_j} \rangle_t - \frac{1}{4} \int_0^T \eta_t d \langle B^{e_i-e_j} \rangle_t.$$

1.9 G-inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Dans toute la suite nous supposons que les intégrales $\int_0^t \eta_v dB_v^i$ et $\int_0^t \eta_v d \langle B^i, B^j \rangle_v$, $\eta \in M_G^p(0, T)$, sont continues en t . Gao [25] a obtenu les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy suivantes (En abrégé, G-BDG).

Lemme 1.9.1 Soient $p \geq 2$, $\eta \in M_G^p(0, T)$. Alors pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, nous avons :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \eta_v dB_v^i \right|^p \right) \leq K_1 (t-s)^{\frac{p}{2}-1} \int_s^t \widehat{\mathbb{E}} (|\eta_v|^p) dv,$$

telle que K_1 une constante positive indépendant de η .

Lemme 1.9.2 Soient $p \geq 1$, $\eta \in M_G^p(0, T)$. Alors pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, nous avons :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \eta_v d \langle B^i, B^j \rangle_v \right|^p \right) \leq K_2 (t-s)^{p-1} \int_s^t \widehat{\mathbb{E}} (|\eta_v|^p) dv,$$

telle que K_2 une constante positive indépendant de η .

1.10 G-formule d'Itô

Dans ce paragraphe, nous donnons la G -formule d'Itô dans un cadre vectoriel. Nous utilisons la convention de notation d'Einstein.

Définition 1.10.1 Nous appelons G -processus d'Itô unidimensionnel, tout processus de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s d \langle B^i, B^j \rangle_s + \int_0^t \gamma_s dB_s^i, \quad t \in [0, T],$$

où $X_0 \in L_G^2(\Omega_T)$, $\alpha, \beta \in M_G^1(0, T)$ et $\gamma \in M_G^2(0, T)$.

Théorème 1.10.1 (G-formule d'Itô [47]) Soit $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$ un G -processus d'Itô de dimension n , i.e., pour tout $v = \overline{1, n}$,

$$X_t^v = X_0^v + \int_0^t \alpha_s^v ds + \int_0^t \beta_s^{vij} d \langle B^i, B^j \rangle_s + \int_0^t \gamma_s^{vi} dB_s^i, \quad t \in [0, T],$$

sont des G -processus d'Itô unidimensionnels, tels que α^v, β^{vij} et γ^{vi} , $v = \overline{1, n}$, $i, j = \overline{1, d}$ sont des processus bornés dans $L_G^2(\Omega_t)$. Soit $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\{\partial_{x^v} \psi\}_{v=1}^n, \{\partial_{x^u x^v}^2 \psi\}_{u, v=1}^n \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$. Alors nous avons pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \psi(X_t) &= \psi(X_0) + \int_0^t \partial_{x^v} \psi(X_s) \alpha_s^v ds + \int_0^t \partial_x \psi(X_s) \gamma_s^{vi} dB_s^i \\ &\quad + \int_0^t \left[\partial_{x^v} \psi(X_s) \beta_s^{vij} + \frac{1}{2} \partial_{x^u x^v}^2 \psi(X_s) \gamma_s^{ui} \gamma_s^{vj} \right] d \langle B^i, B^j \rangle_s. \end{aligned}$$

Remarque 1.10.1 La G -formule d'Itô peut s'écrire sous la forme différentielle suivante :

$$d\psi(X_t) = \partial_{x^\gamma} \psi(X_t) dX_t^\gamma + \frac{1}{2} \partial_{x^\nu x^\gamma}^2 \psi(X_t) dX_t^\gamma dX_t^\nu.$$

Ainsi, si $(X_t), (Y_t)$ sont deux processus unidimensionnels et $\psi(x, y) = xy$, on obtient la G -formule d'intégration par parties :

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + dX_t Y_t + dX_t dY_t.$$

Chapitre 2

Les G -équations différentielles stochastiques de type neutral

Le but de ce chapitre est d'introduire la classe d'équations différentielles stochastiques neutrales, gouvernées par un G -mouvement Brownien (G -EDSNs en abrégé), ces équations joueront un rôle essentiel dans la modélisation des phénomènes dont l'état futur dépend non uniquement sur les données passées et présentes, mais dépend également du taux de changement dans le passé, c'est-à-dire impliquent des dérivés avec des retards. En d'autres termes, la dynamique du système dans le passé affecte son état futur. C'est la caractéristique principale de ces équations.

2.1 Préliminaires

Soit r un temps positif fixé, qui désignera le retard et soit $\{B_t, t \geq 0\}$ le G -mouvement Brownien d -dimensionnels (le processus canonique). Nous désignons par $BC := BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions Φ continues et bornées définies sur $[-r, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n et par

$$\|\Phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\Phi(\theta)|,$$

la norme d'un élément Φ de BC . Considérons la G -EDSN n -dimensionnelle suivante :

$$d[X(t) - Q(t, X_t)] = F(t, X_t) dt + G(t, X_t) d\langle B, B \rangle_t + H(t, X_t) dB_t \quad (2.1)$$

telle que $X_t = \{X(t + \theta) : -r \leq \theta \leq 0\}$ est la collection des fonctions continues et bornées de $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, qui représente le passé de l'état. Les fonctions

$$Q, F : [0, T] \times BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^n,$$

et

$$G, H : [0, T] \times BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \longmapsto \mathbb{R}^{n \times d},$$

sont supposées Borel-mesurables. En outre, nous supposons que les coefficients F, G et $H \in M_G^2([-r, T]; \mathbb{R}^n)$. Pour gérer et faire apparaître le passé du processus X , nous utilisons la famille de variables aléatoires définies sur l'intervalle de temps passé $[t - r, t]$, est désignée par

$$X_t(\theta) := X(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0,$$

et appelée aussi la mémoire fonctionnelle, qui contient toutes les informations du processus avant le temps t jusqu'à l'instant $t - r$. En particulier, X_0 est la valeur initiale du processus X et porte les informations sur le processus avant $t = 0$, i.e. dans l'intervalle $[-r, 0]$. En fait l'équation (2.1) s'écrit sous la forme intégrale suivante : pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} X(t) = Q(t, X_t) + X(0) - Q(0, X_0) + \int_0^t F(s, X_s) ds + \int_0^t G(s, X_s) d\langle B, B \rangle_s \\ + \int_0^t H(s, X_s) dB_s \end{aligned} \tag{2.2}$$

On sait que les données initiales pour les équations différentielles fonctionnelles sont généralement des fonctions continues sur un intervalle fini, ceci est distinct du problème de valeur initiale pour les équations différentielles ordinaires où les données initiales sont des points de l'espace euclidien, pour cela il faut qu'on précise les données initiales sur tout l'intervalle $[-r, 0]$. Donc nous imposons la condition initiale :

$$X_0 = x = \{x(\theta) : -r \leq \theta \leq 0\} \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \tag{2.3}$$

tel que $\mathbb{E} \|x\|^p < \infty$, i.e., $x \in M_G^p([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.1.1 *Nous mentionnons que $X_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n; \theta \rightarrow X(t + \theta)$ est dans $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, $-r \leq \theta \leq 0$, mais $X(t)$ est dans \mathbb{R}^n , c'est la valeur du processus X a l'instant t .*

2.2 Existence et unicité de la solution

De nombreux auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de la solution des G -EDSNs sous diverses hypothèses. On commence par le résultat relatif à l'existence et l'unicité de la solution des G -EDSNs, obtenus par Faizullah [23] sous des hypothèses standard, en utilisant la méthode itérative de Picard :

Théorème 2.2.1 *Nous supposons que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $\psi, \varphi \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, les fonctions F, G, H et Q satisfont les hypothèses suivantes :*

(A1) *Condition de Lipschitz :*

$$\begin{aligned} |F(t, \psi) - F(t, \varphi)|^2 \vee |G(t, \psi) - G(t, \varphi)|^2 \vee |H(t, \psi) - H(t, \varphi)|^2 \\ \leq \alpha_1 \|\psi - \varphi\|^2, \end{aligned}$$

où α_1 est une constante positive.

(A2) *Condition de croissance linéaire :*

$$|F(t, \psi)|^2 \vee |G(t, \psi)|^2 \vee |H(t, \psi)|^2 \leq \alpha_2 \left(1 + \|\psi\|^2\right),$$

où α_2 est une constante positive.

(A3) *Condition de contraction : Il existe une constante $\kappa_0 \in (0, 1)$ telle que*

$$|Q(t, \psi) - Q(t, \varphi)| \leq \kappa_0 \|\psi - \varphi\|.$$

Alors, il existe une solution unique $X(t)$ pour l'équation (2.2), avec la condition initiale (2.3).

La méthode itérative de Picard consiste à produit une suite d'approximations $X^1(t), X^2(t), \dots, X^k(t)$ à la solution exacte $X(t)$, telle que la n -ième approximation est obtenue à partir d'une ou plusieurs approximations précédentes, cela nécessite beaucoup de calculs sur des intégrales stochastiques.

Une technique plus efficace a été donnée par le mathématicien Constantine Carathéodory, il a introduit le schéma d'approximation de Carathéodory pour les équations différentielles ordinaires [17]. Par la suite, elle a été étendue aux équations différentielles stochastiques par de nombreux auteurs (voir, [10, 39, 40]).

Comparativement par rapport à la méthode itérative de Picard, le schéma d'approximation de Carathéodory pour calculer $X^k(t)$, ne nécessite pas de calculer $X^1(t), X^2(t), \dots, X^{k-1}(t)$, ce qui réduit beaucoup de calculs.

Récemment, Abouagwa et Li [1] ont prouvé l'existence et l'unicité des équations différentielles stochastiques neutrales, en se basant sur le schéma d'approximation de Carathéodory.

2.3 Schéma d'approximation de Carathéodory

Dans cette section, nous gardons les mêmes hypothèses (A1)-(A3), et nous ajoutons la condition $Q(t, 0) = 0$, uniquement pour la commodité des calculs. De plus, nous adaptons la méthode utilisée dans [1] pour établir l'existence et

CHAPITRE 2. LES G -ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
STOCHASTIQUES DE TYPE NEUTRAL

l'unicité de la solution de l'équation (2.1) dans $L_G^2(\Omega)$, sous les hypothèses (A1)-(A3), en utilisant le schéma d'approximation de Caratheodory. Considérons la G -EDSN suivante :

$$X(t) = Q(t, X_t) + X(0) - Q(0, X_0) + \int_0^t F(s, X_s) ds + \int_0^t G(s, X_s) d\langle B, B \rangle_s + \int_0^t H(s, X_s) dB_s, \quad t \in [0, T] \quad (2.4)$$

avec la condition initiale :

$$X_0 = x = \{x(\theta) : -r \leq \theta \leq 0\} \in BC.$$

Pour tout $n \geq \frac{2}{r}$, nous définissons $X^n(t)$ sur $[-r, T]$ en posant

$$X^n(\theta) = x(\theta), \quad \theta \in [-r, 0],$$

et

$$X^n(t) = Q(t, X_t^n) + x(0) - Q(0, x) + \int_0^t F(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n) ds + \int_0^t G(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n) d\langle B, B \rangle_s + \int_0^t H(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n) dB_s, \quad \text{pour } t \in [0, T] \quad (2.5)$$

Remarquons que $X^n(t)$ peut être calculé pas à pas sur les intervalles $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, ..., Par exemple, si $t \in [0, \frac{1}{n}]$, alors $-\frac{1}{n} \leq t - \frac{1}{n} \leq 0$. Donc $X_t^n = x$, aussi pour $0 \leq s \leq \frac{1}{n}$ nous avons $-\frac{1}{n} \leq s - \frac{1}{n} \leq 0$ et $X_{s-\frac{1}{n}}^n = x$, donc

$$X^n(t) = x(0) + \int_0^t F(s, x) ds + \int_0^t G(s, x) d\langle B, B \rangle_s + \int_0^t H(s, x) dB_s.$$

2.3.1 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1 *Il existe une solution unique dans $L_G^2(\Omega)$ de l'équation (2.1).*

Remarque 2.3.1 *Nous entendons par "unicité de la solution $X(t)$ ", ce qui suit. Pour toute autre solution $Y(t)$, nous avons*

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{-r \leq s \leq T} |X(s) - Y(s)|^2 \right) = 0,$$

cela signifie que $X(t) = Y(t)$, q.s. pour tout $t \in [-r, T]$.

Afin de prouver le théorème ci-dessus, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 *Pour tout $t \in [-r, T]$ et pour tout $n \geq \frac{2}{r}$,*

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{-r \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) \leq D_1,$$

où D_1 est une constante positive.

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} |X^n(t)|^2 &= |X^n(t) - Q(t, X_t^n) + Q(t, X_t^n)|^2 \\ &\leq (1 + \varepsilon) \left(|X^n(t) - Q(t, X_t^n)|^2 + \frac{|Q(t, X_t^n)|^2}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

En particulier si $\varepsilon = \frac{\kappa_0}{1 - \kappa_0}$, nous aurons

$$|X^n(t)|^2 \leq \frac{1}{1 - \kappa_0} |X^n(t) - Q(t, X_t^n)|^2 + \frac{|Q(t, X_t^n)|^2}{\kappa_0}.$$

Il résulte de l'hypothèse **(A3)** que

$$|X^n(t)|^2 \leq \kappa_0 \|X_t^n\|^2 + \frac{1}{1 - \kappa_0} |X^n(t) - Q(t, X_t^n)|^2,$$

et en passant à la G -espérance, nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) &\leq \kappa_0 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|X_s^n\|^2 \right) \\ &+ \frac{1}{1 - \kappa_0} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - Q(s, X_s^n)|^2 \right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|X_s^n\|^2 \right) &\leq \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{-r \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}} \|x\|^2 + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right), \end{aligned}$$

d'où d'après l'inégalité (2.6),

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) &\leq \frac{\kappa_0}{1 - \kappa_0} \widehat{\mathbb{E}} \|x\|^2 \\ &+ \frac{1}{(1 - \kappa_0)^2} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - Q(s, X_s^n)|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par l'équation (2.5) et l'inégalité $\left| \sum_{i=1}^4 a_i \right|^2 \leq 4 \sum_{i=1}^4 |a_i|^2$, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - Q(t, X_s^n)|^2 \right) &\leq 4 \widehat{\mathbb{E}} \left(|x(0) - Q(0, x)|^2 \right) \\ &+ 4 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^s F(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) du \right|^2 \right) + 4 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^s G(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) d\langle B, B \rangle_u \right|^2 \right) \\ &+ 4 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^s H(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) dB_u \right|^2 \right) \\ &:= \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned}$$

Par la suite, nous estimons les termes ci-dessus I_i , $i = \overline{1, 4}$, comme suit :

$$I_1 \leq 8 (1 + \kappa_0^2) \widehat{\mathbb{E}} \|x\|^2.$$

En utilisant la G -inégalité de Hölder, les inégalités G -BDG et l'hypothèse (A2), nous avons

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 + I_4 &\leq 4\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T) \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(1 + \left\| X_{u-\frac{1}{n}}^n \right\|^2 \right) \right] du \\ &\leq 4\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T) \int_0^T \left[1 + \widehat{\mathbb{E}} \|x\|^2 + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq u} |X^n(v)|^2 \right) \right] du \\ &\leq 4\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T) \left(1 + \widehat{\mathbb{E}} \|x\|^2 \right) T \\ &\quad + 4\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T) \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq u} |X^n(v)|^2 \right) du. \end{aligned}$$

On pose $\lambda_1 = 4\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T)$, nous aurons alors

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - Q(s, X_s^n)|^2 \right) &\leq (8(1 + \kappa_0^2) + \lambda_1 T) \widehat{\mathbb{E}} \|x\|^2 + \lambda_1 T \\ &\quad + \lambda_1 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq u} |X^n(v)|^2 \right) du. \end{aligned}$$

Nous substituons l'inégalité ci-dessus dans (2.7),

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) &\leq \frac{(7\kappa_0^2 + \kappa_0 + \lambda_1 T + 8) \widehat{\mathbb{E}} \|x\|^2}{(1 - \kappa_0)^2} \\ &\quad + \frac{\lambda_1 T}{(1 - \kappa)^2} + \frac{\lambda_1}{(1 - \kappa)^2} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq u} |X^n(v)|^2 \right) du. \end{aligned}$$

Par le lemme de Grönwall, nous pouvons facilement déduire que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) < \infty,$$

finalement,

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{-r \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) \leq \widehat{\mathbb{E}} (\|x\|^2) + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s)|^2 \right) \leq D_1,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Lemme 2.3.2 *Il existe une constante positive D_2 , telle que*

$$\widehat{\mathbb{E}} |X^n(t) - X^n(s)|^2 \leq D_2 |t - s|$$

pour tout $0 \leq s < t \leq T$ et pour tout $n \geq \frac{2}{r}$.

Preuve. De l'équation (2.5), nous avons

$$X^n(t) - X^n(s) = Q(t, X_t^n) - Q(s, X_s^n) + J_n(s, t),$$

où

$$J_n(s, t) = \int_s^t F(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) ds + \int_s^t G(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) d\langle B, B \rangle_u + \int_s^t H(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) dB_u.$$

Nous avons pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|X^n(t) - X^n(s)|^2 \leq (1 + \varepsilon) \left(|J_n(s, t)|^2 + \frac{|Q(t, X_t^n) - Q(s, X_s^n)|^2}{\varepsilon} \right),$$

d'où, si $\varepsilon = \frac{\kappa_0}{1 - \kappa_0}$,

$$|X^n(t) - X^n(s)|^2 \leq \frac{1}{1 - \kappa_0} |J_n(s, t)|^2 + \frac{|Q(t, X_t^n) - Q(s, X_s^n)|^2}{\kappa_0}.$$

Par l'hypothèse **(A3)**,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(|X^n(t) - X^n(s)|^2 \right) &\leq \frac{1}{1 - \kappa_0} \widehat{\mathbb{E}} \left(|J_n(s, t)|^2 \right) + \kappa_0 \widehat{\mathbb{E}} \left(|X^n(t) - X^n(s)|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{(1 - \kappa_0)^2} \widehat{\mathbb{E}} \left(|J_n(s, t)|^2 \right). \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(|J_n(s, t)|^2 \right) &\leq 3 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq v \leq t} \left| \int_s^v F(s, X_{u-\frac{1}{n}}^n) du \right|^2 \right) + \\ &3 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq v \leq t} \left| \int_s^v G(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) d \langle B, B \rangle_u \right|^2 \right) + 3 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq v \leq t} \left| \int_s^v H(u, X_{u-\frac{1}{n}}^n) dB_u \right|^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant la G -inégalité de Hölder, les G -BDG inégalités, puis l'hypothèse **(A2)**, nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(|J_n(s, t)|^2 \right) &\leq 3\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T) \int_s^t \widehat{\mathbb{E}} \left(1 + \left\| X_{u-\frac{1}{n}}^n \right\|^2 \right) du \\ &\leq 3\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T) \int_s^t \left(1 + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{-r \leq v \leq T} |X^n(v)|^2 \right) \right) du \\ &\leq 3\alpha_2 (K_1 + TK_2 + T) (1 + D_1) |t - s|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(|X^n(t) - X^n(s)|^2 \right) \leq D_2 |t - s|,$$

où $D_2 = \frac{3\alpha_2(K_1+TK_2+T)(1+D_1)}{(1-\kappa_0)^2}$, ce que achève la démonstration. ■

Preuve du théorème 2.3.1. L'idée de la preuve est de montrer d'abord que $\{X^n(t)\}_{n \geq \frac{2}{r}}$, est une suite de Cauchy dans $L_G^2(\Omega)$. Ensuite, nous prouvons que sa

limite est l'unique solution de l'équation (2.1). En utilisant les mêmes arguments utilisés dans le lemme 2.3.2, nous avons pour tout $\frac{2}{r} \leq n \leq m$,

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^m(s) - X^n(s)|^2 \right) \leq \frac{1}{(1 - \kappa_0)^2} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \Lambda_n(s) \right|^2 \right) \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \Lambda_n(s) \right|^2 \right) &\leq 3 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} \left| \int_0^v [F(s, X_{s-\frac{1}{m}}^m) - F(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n)] ds \right|^2 \right) \\ &\quad + 3 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} \left| \int_0^v [G(s, X_{s-\frac{1}{m}}^m) - G(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n)] d\langle B, B \rangle_s \right|^2 \right) \\ &\quad + 3 \widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq v \leq T} \int_0^v [H(s, X_{s-\frac{1}{m}}^m) - H(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n)] dB_s \right|^2 \right) \\ &:= \sum_{i=1}^3 \Lambda_i. \end{aligned}$$

Par la G -inégalité de Hölder, les G -BDG inégalités et l'hypothèse **(A1)**, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^3 \Lambda_i \leq 3\alpha_1 (K_1 + TK_2 + T) \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\left\| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right\|^2 \right) ds \quad (2.9)$$

Notons que

$$\left\| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right\|^2 \leq 2 \left\| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{m}}^n \right\|^2 + 2 \left\| X_{s-\frac{1}{m}}^n - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right\|^2.$$

Comme $X^m(\theta) = X^n(\theta) = x(\theta)$ pour tout $\theta \in [-r, 0]$, et comme $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{r}{2}$ alors, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left\| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{m}}^n \right\| &\leq \sup_{-r \leq v \leq s-\frac{1}{m}} |X^m(v) - X^n(v)| \\ &\leq \sup_{0 \leq v \leq s-\frac{1}{m}} |X^m(v) - X^n(v)| \\ &\leq \sup_{0 \leq v \leq s} |X^m(v) - X^n(v)|, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left\| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right\|^2 \right) &\leq 2\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq s} |X^m(v) - X^n(v)|^2 \right) \\ &+ 2\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq s} \left| X^n \left(v - \frac{1}{m} \right) - X^n \left(v - \frac{1}{n} \right) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Il résulte du lemme [2.3.2](#) que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left\| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right\|^2 \right) &\leq 2\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq s} |X^m(v) - X^n(v)|^2 \right) \\ &+ 2D_2 \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|, \end{aligned}$$

et en substituant l'inégalité ci-dessus dans [\(2.9\)](#), nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \Lambda_n(s) \right|^2 \right) &\leq \lambda_2 T D_2 \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &+ \lambda_2 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq s} |X^m(v) - X^n(v)|^2 \right) ds, \end{aligned}$$

où $\lambda_2 = 6\alpha_1(K_1 + TK_2 + T)$, d'où d'après l'inégalité [\(2.8\)](#),

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^m(s) - X^n(s)|^2 \right) &\leq \frac{\lambda_2 T D_2}{(1 - \kappa_0)^2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &+ \frac{\lambda_2}{(1 - \kappa_0)^2} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq s} |X^m(v) - X^n(v)|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Par suite, d'après le lemme de Grönwall

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^m(s) - X^n(s)|^2 \right) \leq \frac{\lambda_2 T D_2}{(1 - \kappa_0)^2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| e^{\frac{\lambda_2 T}{(1 - \kappa_0)^2}},$$

d'où

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^m(s) - X^n(s)|^2 \right) \rightarrow 0, \text{ quand } n, m \rightarrow \infty,$$

ce qui montre que $\{X^n\}_{n \geq \frac{2}{r}}$ est une suite de Cauchy dans $L_G^2(\Omega)$. Il reste à prouver que si $X(t)$ est une solution [\(2.4\)](#), alors $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X^n$ dans $L_G^2(\Omega)$.

D'après les équations (2.4) et (2.5), nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - X(s)|^2 \right) \leq \frac{1}{(1 - \kappa_0)^2} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \Pi_n(s) \right|^2 \right),$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \Pi_n(s) \right|^2 \right) &\leq 3\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} \left| \int_0^v F(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n) - F(s, X_s) ds \right|^2 \right) \\ &\quad + 3\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} \left| \int_0^v G(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n) - G(s, X_s) d\langle B, B \rangle_s \right|^2 \right) \\ &\quad + 3\widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq v \leq T} \int_0^v H(s, X_{s-\frac{1}{n}}^n) - H(s, X_s) dB_s \right|^2 \right) \\ &:= \sum_{i=1}^3 \Pi_i. \end{aligned}$$

En suivant exactement les mêmes étapes utilisées précédemment, nous obtenons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\left| \sup_{0 \leq s \leq T} \Pi_n(s) \right|^2 \right) \leq \frac{\lambda_2}{2} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\|X_{s-\frac{1}{n}}^n - X_s\|^2 \right) ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - X(s)|^2 \right) &\leq \frac{\lambda_2 T D_2}{(1 - \kappa_0)^2} \frac{1}{n} \\ &\quad + \frac{\lambda_2}{(1 - \kappa_0)^2} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq v \leq s} |X^n(v) - X(v)|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Par le lemme de Grönwall, on déduit que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - X(s)|^2 \right) \leq \frac{\lambda_2 T D_2}{(1 - \kappa_0)^2} \frac{1}{n} e^{\frac{\lambda_2}{(1 - \kappa_0)^2} T}.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^n(s) - X(s)|^2 \right) \rightarrow 0,$$

qui signifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} X^n = X$ dans $L_G^2(\Omega)$. On conclut, d'après l'unicité de la limite que la solution de l'équation (2.4) est unique, d'où le théorème. ■

Chapitre 3

Différentiabilité de la solution d'une G -EDSN par rapport à la condition initiale

Dans ce chapitre, nous visons à discuter la différentiabilité de la solution des G -EDSNs par rapport à la condition initiale. La nouveauté est d'une part de définir des G -EDSNs dans l'espace $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$, d'autre part de prouver que la solution est différentiable par rapport à la condition initiale qui appartient à $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$. Notons que la dérivée appartient à $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$. Nous donnons également la G -EDSN satisfaite par la dérivée. Cette étude a été établie dans un cadre général (n -dimensionnelle) et nous a permis de retrouver le cas particulier et de manière non triviale, les résultats obtenus par Bougherra et al [9] concernant la différentiabilité des G -EDSs. Les résultats de cette partie proviennent de [4].

3.1 Formulation du problème

Malgré le fait que les solutions des équations stochastiques n'ont pas besoin d'être différentiables ou même continues par rapport à t , nous montrons que certaines conditions sur les coefficients garantissent que les solutions sont différentiables par rapport aux conditions initiales. Considérons la G -EDSN de dimension n , gouvernée par G -mouvement Brownien d -dimensionnel (B_t) , suivante :

$$d[X(t) - Q(t, X_t)] = \sum_{l=0}^d A_l(t, X_t) dB_t^l + \sum_{i,j=1}^d A_{i,j}(t, X_t) d\langle B^i, B^j \rangle \quad (3.1)$$

avec la condition initiale :

$$X_0 = x := (x(\theta))_{-r \leq \theta \leq 0} \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \quad (3.2)$$

où $B_t^0 = t$, $X_t = (X(t + \theta))_{-r \leq \theta \leq 0}$, représente la collection des variables aléatoires dans $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$. Les fonctions

$$A_l, A_{i,j}, Q : [0, T] \times BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

satisfont à certaines conditions qui seront précisées dans la suite. Toutes les fonctions $A_l(\cdot, x)$, $A_{i,j}(\cdot, x) \in M_G^2([-r, T]; \mathbb{R}^n)$, $0 \leq l \leq d$ et $1 \leq i, j \leq d$ pour chaque $x \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$. L'équation (3.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X(t) = & Q(t, X_t) + x(0) - Q(0, x) + \sum_{l=0}^d \int_0^t A_l(s, X_s) dB_s^l \\ & + \sum_{i,j=1}^d \int_0^t A_{i,j}(s, X_s) d\langle B^i, B^j \rangle_s \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nous définissons les opérateurs stochastiques. Pour ce faire, nous considérons les espaces de Banach suivants :

Soit $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des opérateurs linéaires défini sur $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , équipé de la norme :

$$|L|_r := \sup_{\|h\| \leq 1} |Lh|,$$

et soit $BC([-r, 0]; \mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n))$ l'ensemble des fonctions continues et bornées définies sur $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$, muni de la norme :

$$\|T\|_r := \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |T(\theta)|_r.$$

Définition 3.1.1 Soient U , V et W des processus stochastiques à valeurs dans $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$(U_t h)_{0 \leq t \leq T}, (V_t h)_{0 \leq t \leq T} \in M_G^1([0, T]; \mathbb{R}^n),$$

et

$$(W_t h)_{0 \leq t \leq T} \in M_G^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$$

pour tout $h \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$. Alors, nous définissons les opérateurs stochastiques suivants :

$$\left(\int_0^t U_s d\langle B^i, B^j \rangle_s \right) (h) := \int_0^t U_s(h) d\langle B^i, B^j \rangle_s,$$

$$\left(\int_0^t V_s ds \right) (h) := \int_0^t V_s (h) ds,$$

et

$$\left(\int_0^t W_s dB_s^i \right) (h) := \int_0^t W_s (h) dB_s^i.$$

Dans tout ce chapitre, nous supposons que toutes les fonctions A_l , $A_{i,j}$ et Q sont différentiables par rapport à x au sens de Fréchet, et nous notons par ϕ l'opérateur linéaire de $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\phi(h) = h(0)$. Le but est de montrer que l'unique solution $X(t)$ de l'équation (3.3) est dérivable par rapport à la condition initiale x , et que sa dérivée est l'unique solution de la G-EDSN suivante :

$$\begin{aligned} Y(t) = & Q'(t, X_t)(Y_t) + \phi - Q'(t, x) + \sum_{l=0}^d \int_0^t A'_l(s, X_s)(Y_s) dB_s^l \quad (3.4) \\ & + \sum_{i,j=1}^d \int_0^t A'_{i,j}(s, X_s)(Y_s) d\langle B^i, B^j \rangle_s \end{aligned}$$

où $Y(t)$ appartient à $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$ et $Y_t = (Y(t+\theta))_{-r \leq \theta \leq 0}$. La G-EDSN (3.4) peut s'écrire sous la forme différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d[Y(t) - Q'(t, X_t)(Y_t)] = \sum_{l=0}^d A'_l(t, X_t)(Y_t) dB_t^l \\ \quad + \sum_{i,j=1}^d A'_{i,j}(t, X_t)(Y_t) d\langle B^i, B^j \rangle_t, \\ Y_0 = Id \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où $Y_0 = Id$ est l'opérateur identité sur $BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$.

Nous avons besoin des hypothèses suivantes :

Pour tout $x, y \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ et pour tout $l \in \overline{0, d}$ et $i, j \in \overline{1, d}$:

(H1) :

$$|D'(t, x)|_r \leq C_1, \text{ et } |Q'(t, x)|_r \leq \kappa \quad q.s.,$$

uniformément par rapport à t , où $D = A_l, A_{i,j}$, C_1 est une constante positive et $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$.

(H2) :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |I(t, 0)| < \infty \quad q.s.,$$

avec $I = A_l, A_{i,j}, Q$.

3.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DES G -EDSNs À VALEURS OPÉRATEUR

(H3) :

$$|J(t, x) - J(t, y)| \leq C_2 \|x - y\| (1 + \|x\|^{n_0} + \|y\|^{n_0}),$$

uniformément par rapport à t , où $J = A'_l, A'_{i,j}, Q'$, et C_2 est une constante positive, et $n_0 \geq 1$.

Remarque 3.1.1 La condition **(H1)** implique que pour tout $l \in \overline{0, d}$ et $i, j \in \overline{1, d}$, nous avons

$$|Q(t, x) - Q(t, y)| \leq \kappa \|x - y\|,$$

et

$$|D(t, x) - D(t, y)| \leq C_1 \|x - y\|,$$

uniformément par rapport à t , où $D = A_l, A_{i,j}$.

Remarque 3.1.2 Les conditions **(H1)** et **(H2)** impliquent que

$$|I(t, x)|^2 \leq C_3 (1 + \|x\|^2)$$

uniformément par rapport à t , où C_3 is a positive constant, $I = A_l, A_{i,j}, Q$, $l \in \overline{0, d}$ et $i, j \in \overline{1, d}$.

Selon les deux remarques [3.1.1](#) et [3.1.2](#), l'équation [\(3.3\)](#) admet une solution unique (voir [23](#)).

3.2 Existence et unicité de la solution des G -EDSNs à valeurs opérateur

Dans cette section, nous introduisons le théorème d'existence-unicité de la solution pour l'équation de la dérivée [\(3.5\)](#).

Théorème 3.2.1 Sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, la G -EDSN [\(3.5\)](#) admet une solution unique.

Preuve. Considérons la G -EDSN suivante :

$$\begin{cases} d[Z(t) - N(t, Z_t)] = \sum_{l=0}^d G_l(t, Z_t) dB_t^l + \sum_{i,j=1}^d G_{i,j}(t, Z_t) d\langle B^i, B^j \rangle_t, \\ Z_0 = h \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (3.6)$$

où les fonctions $N, G_l, G_{i,j} : [0, T] \times BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont définies par

$$\begin{aligned} N(t, z) &= Q'(t, X_t)(z), \\ G_l(t, z) &= A'_l(t, X_t)(z), \quad l \in \overline{0, d} \end{aligned}$$

et

$$G_{i,j}(t, z) = A'_{i,j}(t, X_t)(z), \quad i, j \in \overline{1, d}.$$

Observons que le processus $Y(t)$ est solution du G -EDSN (3.4) si et seulement si le processus $Y(t)(h)$ est solution du G -EDSN (3.6). D'autre part, il est facile de vérifier que les fonctions N , G_i et $G_{i,j}$ vérifient les conditions (H1) et (H2). Par conséquent, la G -EDSN (3.6) admet une solution unique, d'où le théorème. ■

3.3 Différentiabilité de la solution

Avant de donner le théorème de la différentiabilité, nous avons besoin de quelques résultats.

3.3.1 Résultats auxiliaires

Nous commençons par le lemme suivant, qui est une extension des G -BDG inégalités.

Lemme 3.3.1 *Pour tout $p \geq 1$ et $s < t$, on a*
(i) :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u U_s d \langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r^p \right) \leq 2^p K_2 (t-s)^{p-1} \int_s^t \widehat{\mathbb{E}} (|U_s|_r^p) ds.$$

Pour tout $p \geq 2$ et $s < t$, on a

(ii) :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u W_s dB_s^i \right|_r^p \right) \leq 2^p K_1 (t-s)^{\frac{p}{2}-1} \int_s^t \widehat{\mathbb{E}} (|W_s|_r^p) ds,$$

(iii) :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_0^t V_s ds \right|_r^p \right) \leq 2^p T^{p-1} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} (|V_s|_r^p) ds.$$

Preuve. (i) : Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $h_\varepsilon \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ telle que $\|h_\varepsilon\| \leq 1$ et

$$\left| \left(\int_0^t U_s d \langle B^i, B^j \rangle_s \right) \right|_r \leq \varepsilon + \left| \int_0^t U_s(h_\varepsilon) d \langle B^i, B^j \rangle_s \right|,$$

et en utilisant l'inégalité $(|a| + |b|)^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$ et le lemme 1.9.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u U_s d \langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r^p \right) \\ & \leq 2^p \left(\varepsilon^p + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u U_s (h_\varepsilon) d \langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r^p \right) \right), \\ & \leq 2^p \left(\varepsilon^p + K_2 (t-s)^{p-1} \int_s^t \widehat{\mathbb{E}} (|U_s|_r^p \|h_\varepsilon\|^p) ds \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $p \geq 1$,

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u U_s d \langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r^p \right) \leq 2^p K_2 (t-s)^{p-1} \int_s^t \widehat{\mathbb{E}} (|U_s|_r^p) ds,$$

d'où **(i)**. De même, en utilisant le lemme 1.9.1 (resp. l'inégalité de Hölder), on obtient **(ii)** (resp. **(iii)**) par le même procédé, ce qui achève la démonstration. ■

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations $X_t(x)$, $X(t, x)$ au lieu de X_t , $X(t)$ à chaque fois qu'on veut faire apparaître la condition initiale.

Proposition 3.3.1 *Pour tout $x, y \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ et pour tout $p \geq 2$, il existe une constante positive L_1 telle que*

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t(x) - X_t(y)\|^p \right) \leq L_1 \|x - y\|^p.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \|X_t(x) - X_t(y)\| & \leq \sup_{-r \leq s \leq T} |X(s, x) - X(s, y)| \\ & \leq \sup_{-r \leq s \leq 0} |X(s, x) - X(s, y)| + \sup_{0 \leq s \leq T} |X(s, x) - X(s, y)| \\ & \leq \|x - y\| + \sup_{0 \leq s \leq T} |X(s, x) - X(s, y)| \end{aligned} \tag{3.7}$$

CHAPITRE 3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION D'UNE
G-EDSN PAR RAPPORT À LA CONDITION INITIALE

En utilisant l'équation (3.3), la remarque 3.1.1 et l'inégalité (3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |X(t, x) - X(t, y)| &\leq \kappa \|X_t(x) - X_t(y)\| + |x(0) - y(0)| + \kappa \|x - y\| \\
 &\quad + \sum_{l=0}^d \left| \int_0^t [A_l(s, X_s(x)) - A_l(s, X_s(y))] dB_s^l \right| \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^d \left| \int_0^t [A_{i,j}(s, X_s(x)) - A_{i,j}(s, X_s(y))] d\langle B^i, B^j \rangle_s \right| \\
 &\leq \kappa \left(\|x - y\| + \sup_{0 \leq u \leq T} |X(u, x) - X(u, y)| \right) + (\kappa + 1) \|x - y\| \\
 &\quad + \sum_{l=0}^d \left| \int_0^t [A_l(s, X_s(x)) - A_l(s, X_s(y))] dB_s^l \right| \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^d \left| \int_0^t [A_{i,j}(s, X_s(x)) - A_{i,j}(s, X_s(y))] d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|,
 \end{aligned}$$

qui entraîne que

$$\begin{aligned}
 (1 - \kappa) \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t, x) - X(t, y)| &\leq (2\kappa + 1) \|x - y\| \\
 &\quad + \sum_{l=0}^d \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [A_l(s, X_s(x)) - A_l(s, X_s(y))] dB_s^l \right| \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^d \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [A_{i,j}(s, X_s(x)) - A_{i,j}(s, X_s(y))] d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n |a_i|^p \tag{3.8}$$

et en prenant la G -espérance dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\kappa)^p}{C_4} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t, x) - X(t, y)|^p \right) \leq (2\kappa + 1)^p \|x - y\|^p \\ & + \sum_{l=0}^d \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (A_l(s, X_s(x)) - A_l(s, X_s(y))) dB_s^l \right|^p \right) \\ & + \sum_{i,j=1}^d \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (A_{i,j}(s, X_s(x)) - A_{i,j}(s, X_s(y))) d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|^p \right), \end{aligned}$$

où $C_4 = (d^2 + d + 2)^p$. En appliquant la G -inégalité de Hölder, les G -BDG inégalités puis la remarque [3.1.1](#), l'inégalité précédente nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\kappa)^p}{C_4} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t, x) - X(t, y)|^p \right) \\ & \leq (2\kappa + 1)^p \|x - y\|^p + C_5 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(s, x) - X(s, y)|^p \right) ds \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $C_5 = (T^{p-1} + dK_1T^{\frac{p}{2}-1} + d^2K_2T^{p-1}) C_1^p$. Ainsi, en posant

$$u(t) := \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s, x) - X(s, y)|^p \right),$$

nous obtenons

$$u(T) \leq \frac{C_4}{(1-\kappa)^p} \left((2\kappa + 1)^p \|x - y\|^p + C_5 \int_0^T u(s) ds \right).$$

Nous déduisons du lemme de Grönwall que

$$u(T) \leq C_6 \|x - y\|^p,$$

où

$$C_6 = \frac{C_4 (2\kappa + 1)^p}{(1-\kappa)^p} e^{\frac{C_4 C_5}{(1-\kappa)^p} T}.$$

D'autre part, par l'inégalité [\(3.7\)](#), nous avons

$$\|X_t(x) - X_t(y)\|^p \leq 2^p \left(\|x - y\|^p + \sup_{0 \leq u \leq T} |X(u, x) - X(u, y)|^p \right),$$

CHAPITRE 3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION D'UNE
G-EDSN PAR RAPPORT À LA CONDITION INITIALE

d'où en passant à la G -espérance des deux côtés,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t(x) - X_t(y)\|^p \right) &\leq 2^p (\|x - y\|^p + u(T)) \\ &\leq L_1 \|x - y\|^p, \end{aligned}$$

où $L_1 = 2^p(1 + C_6)$. ■

Proposition 3.3.2 *Pour tout $p \geq 2$, nous avons*

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|Y_t\|_r^p \right) \leq L_2,$$

où L_2 est une constante positive.

Preuve. Tout d'abord, observons que

$$\begin{aligned} \|Y_t\|_r &\leq \sup_{-r \leq u \leq T} |Y(u)|_r \\ &\leq \sup_{-r \leq u \leq 0} |Y(u)|_r + \sup_{0 \leq u \leq T} |Y(u)|_r \\ &\leq 1 + \sup_{0 \leq u \leq T} |Y(u)|_r \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par l'équation (3.4), nous avons

$$\begin{aligned} |Y(t)|_r &\leq |Q'(t, X_t)|_r \|Y_t\|_r + 1 + |Q'(0, x)|_r + \sum_{l=0}^d \left| \int_0^t A'_l(s, X_s)(Y_s) dB_s^l \right|_r \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d \left| \int_0^t A'_{i,j}(s, X_s)(Y_s) d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r \\ &\leq \kappa \left(1 + \sup_{0 \leq u \leq T} |Y(u)|_r \right) + 1 + \kappa + \sum_{l=0}^d \left| \int_0^t A'_l(s, X_s)(Y_s) dB_s^l \right|_r \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d \left| \int_0^t A'_{i,j}(s, X_s)(Y_s) d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (1 - \kappa) \sup_{0 \leq u \leq T} |Y(u)|_r &\leq 1 + 2\kappa + \sum_{l=0}^d \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t A'_l(s, X_s)(Y_s) dB_s^l \right|_r \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t A'_{i,j}(s, X_s)(Y_s) d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{(1-\kappa)^p}{C_4} \sup_{0 \leq u \leq T} |Y(u)|_r^p &\leq (1+2\kappa)^p + \sum_{l=0}^d \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t A_l^l(s, X_s)(Y_s) dB_s^l \right|_r^p \\ &+ \sum_{i,j=1}^d \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_s^t A_{i,j}^l(s, X_s)(Y_s) d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|_r^p. \end{aligned}$$

En passant à la G -espérance dans l'inégalité ci-dessus et en utilisant le lemme [3.3.1](#), nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Y(u)|_r^p \right) &\leq \frac{C_4}{(1-\kappa)^p} \left((1+2\kappa)^p + C_7 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}}(\|Y_s\|_r^p) ds \right) \\ &\leq \frac{C_4}{(1-\kappa)^p} \left((1+2\kappa)^p + C_7 T + C_7 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Y(u)|_r^p \right) ds \right), \end{aligned}$$

où $C_7 = (T^{p-1} + dK_1 T^{\frac{p}{2}-1} + d^2 K_2 T^{p-1}) (2C_1)^p$. Par l'inégalité de Grönwall, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t)|_r^p \right) \leq C_8 \quad (3.11)$$

avec

$$C_8 = \frac{((1+2\kappa)^p + C_7 T) C_4}{(1-\kappa)^p} e^{\frac{C_4 C_7}{(1-\kappa)^p} T}.$$

On déduit des inégalités [\(3.10\)](#) et [\(3.11\)](#), que

$$\sup_{0 \leq u \leq T} \|Y_t\|_r^p \leq 2^p \left(1 + \sup_{0 \leq u \leq T} |Y(u)|_r^p \right),$$

En passant à la G -espérance et posant $L_2 = 2^p (C_8 + 1)$, nous obtenons l'inégalité désirée. ■

Lemme 3.3.2 *Supposons que les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites. Soient $x, h \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ et soient les processus*

$$Z(t) := \frac{X(t, x+h) - X(t, x) - Y(t)(h)}{\|h\|},$$

$$\xi_t := \frac{1}{\|h\|} (Q(t, X_t(x+h)) - Q(t, X_t(x)) - Q'(t, X_t(x))(Y_t(h))),$$

et

$$\xi_t^R := \frac{1}{\|h\|} (R(t, X_t(x+h)) - R(t, X_t(x)) - R'(t, X_t(x))(Y_t(h)))$$

pour $R = A_l, A_{i,j}$, $l \in \overline{0, d}$ et $i, j \in \overline{1, d}$. Alors, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$,

(i) :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |\xi_u|^2 \right) \leq 2\kappa^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|^2 \right) + \varepsilon L_2 + \frac{\Phi(\|h\|)}{\varepsilon},$$

(ii) :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |\xi_u^R|^2 \right) \leq 2C_1^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|^2 \right) + \varepsilon L_2 + \frac{\Phi(\|h\|)}{\varepsilon},$$

où Φ est une fonction positive indépendante de ε telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$.

Preuve. Nous posons

$$\tilde{X}(t) = X(t, x+h) \text{ et } Z(t) = \frac{\tilde{X}(t) - X(t) - Y(t)(h)}{\|h\|}.$$

(i) : Comme $Z(u) = 0$ pour tout $u \in [-r, 0]$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{X}_t - X_t - Y_t(h) \right\| &= \|h\| \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |Z(t+\theta)| \\ &\leq \|h\| \left(\sup_{-r \leq u \leq t} |Z(u)| \right) \\ &\leq \|h\| \left(\sup_{-r \leq u \leq 0} |Z(u)| + \sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)| \right) \\ &\leq \|h\| \sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|. \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, nous avons pour un certain $\tau \in (0, 1)$,

$$Q(t, X_t) - Q(t, \tilde{X}_t) = Q' \left(t, (X_t + \tau(\tilde{X}_t - X_t)) \right) (\tilde{X}_t - X_t).$$

Il résulte des hypothèses **(H1)** et **(H3)**, que

$$\begin{aligned}
 \|h\| |\xi_t| &= \left| Q' \left(t, X_t + \tau \left(\tilde{X}_t - X_t \right) \right) \left(\tilde{X}_t - X_t \right) - Q' \left(t, X_t \right) \left(Y_t(h) \right) \right| \\
 &\leq \left| Q' \left(t, X_t + \tau \left(\tilde{X}_t - X_t \right) \right) \left(\tilde{X}_t - X_t - Y_t(h) \right) \right| \\
 &\quad + \left| \left(Q' \left(t, X_t + \tau \left(\tilde{X}_t - X_t \right) \right) - Q' \left(t, X_t \right) \right) \left(Y_t \right) \left(h \right) \right| \\
 &\leq \kappa \left\| \tilde{X}_t - X_t - Y_t(h) \right\| \\
 &\quad + \|h\| \left| Q' \left(t, X_t + \tau \left(\tilde{X}_t - X_t \right) \right) - Q' \left(t, X_t \right) \right|_r \|Y_t\|_r \\
 &\leq \|h\| \left(\kappa \sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)| \right. \\
 &\quad \left. + C_2 \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\| \left(1 + \|X_t\|^{n_0} + \left\| X_t + \tau \left(\tilde{X}_t - X_t \right) \right\|^{n_0} \right) \|Y_t\|_r \right).
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $(a + b)^{n_0} \leq 2^{n_0} (a^{n_0} + b^{n_0})$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |\xi_t| &\leq \kappa \sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)| + \\
 C_2 \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\| &\left(1 + (2^{n_0} + 1) \|X_t\|^{n_0} + 2^{n_0} \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\|^{n_0} \right) \|Y_t\|_r.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 |\xi_t|^2 &\leq 2\kappa^2 \sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|^2 \\
 + 2 \left(C_2 \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\| \right. &\left. \left(1 + (2^{n_0} + 1) \|X_t\|^{n_0} + 2^{n_0} \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\|^{n_0} \right) \right)^2 \|Y_t\|_r^2 \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$, Nous avons

$$\begin{aligned}
 2 \left(C_2 \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\| \right. &\left. \left(1 + (2^{n_0} + 1) \|X_t\|^{n_0} + 2^{n_0} \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\|^{n_0} \right) \right)^2 \|Y_t\|_r^2 \\
 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(C_2 \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\| \right. &\left. \left(1 + (2^{n_0} + 1) \|X_t\|^{n_0} + 2^{n_0} \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\|^{n_0} \right) \right)^4 \\
 &\quad + \varepsilon \|Y_t\|_r^4 \\
 &\leq \frac{J(t, h)}{\varepsilon} + \varepsilon \|Y_t\|_r^4 \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 J(t, h) &:= (3C_2)^4 \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\|^4 \\
 &\times \left(1 + (2^{n_0} + 1)^4 \|X_t\|^{4n_0} + 2^{4n_0} \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\|^{4n_0} \right) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION D'UNE
G-EDSN PAR RAPPORT À LA CONDITION INITIALE

par les inégalités (3.12), (3.13) and (3.14), nous pouvons écrire

$$\sup_{0 \leq u \leq t} |\xi_u|^2 \leq 2C_1^2 \sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|^2 + \varepsilon \sup_{0 \leq u \leq t} \|Y_u\|_r^4 + \sup_{0 \leq u \leq t} \frac{J(u, h)}{\varepsilon} \quad (3.15)$$

En appliquant la G -inégalité de Hölder, on obtient que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}[J(u, h)] &\leq (3C_2)^4 \sqrt{\widehat{\mathbb{E}}\left(\|\tilde{X}_u - X_u\|^8\right)} \\ &\times \sqrt{\widehat{\mathbb{E}}\left(\left(1 + (2^{n_0} + 1)^4 \|X_u\|^{4n_0} + 2^{4n_0} \|\tilde{X}_u - X_u\|^{4n_0}\right)^2\right)} \\ &\leq 3(3C_2)^4 \sqrt{\widehat{\mathbb{E}}\left(\|\tilde{X}_u - X_u\|^8\right)} \\ &\times \sqrt{\widehat{\mathbb{E}}\left(1 + (2^{n_0} + 1)^8 \|X_u\|^{8n_0} + 2^{8n_0} \|\tilde{X}_u - X_u\|^{8n_0}\right)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Il a été prouvé dans [21] qu'il existe une constante positive C_9 telle que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(\sup_{-r \leq t \leq T} |X(t)|^p\right) \leq C_9 \quad \text{pour tout } p \geq 2.$$

Il s'ensuit que, en utilisant la proposition 3.3.1, que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{0 \leq u \leq t} J(u, h)\right] \leq \Phi(h) \quad (3.17)$$

où

$$\Phi(h) := 3(3C_2)^4 \sqrt{L_1} \|h\|^4 \sqrt{1 + (2^{n_0} + 1)^8 M + (2\|h\|)^{8n_0} L_1} \quad (3.18)$$

Par suite, en appliquant la G -espérance à l'inégalité (3.15), en utilisant l'inégalité (3.17) et la proposition 3.3.2, nous obtenons

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |\xi_u|^2\right) \leq 2\kappa^2 \widehat{\mathbb{E}}\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|^2\right) + \varepsilon L_2 + \frac{\Phi(h)}{\varepsilon} \quad (3.19)$$

De même, en utilisant exactement les mêmes arguments, nous prouvons (ii), ce qui achève la démonstration. ■

3.3.2 Théorème de différentiabilité

Nous arrivons maintenant au théorème principal de la différentiabilité de la solution.

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), la solution $X(t)$ du G-EDSN (3.3) est différentiable par rapport à x , et la dérivée est $Y(t)$ q.s.*

Preuve. Nous utilisons les mêmes notations utilisées dans la démonstration précédente. A partir des équations (3.3) et (3.4), nous pouvons écrire

$$|Z(t)| \leq \xi_t + \frac{|Q(t, x+h) - Q(t, x) - Q'(t, x)(h)|}{\|h\|} + \sum_{l=0}^d \left| \int_0^t \xi_s^{A_l} dB_s^l \right| + \sum_{i,j=1}^d \left| \int_0^t \xi_s^{A_{i,j}} d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|.$$

Il s'ensuit que

$$|Z(t)|^2 \leq 2|\xi_t|^2 + \frac{2}{\|h\|^2} (|Q(t, x+h) - Q(t, x) - Q'(t, x)(h)| + \sum_{l=0}^d \left| \int_0^t \xi_s^{A_l} dB_s^l \right| + \sum_{i,j=1}^d \left| \int_0^t \xi_s^{A_{i,j}} d\langle B^i, B^j \rangle_s \right|)^2.$$

En prenant la G -espérance de l'inégalité ci-dessus, puis en appliquant la G -inégalité de Hölder, les lemmes 1.9.1 et 1.9.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Z(u)|^2 \right) \leq 2\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |\xi_u|^2 \right) \\ & + C_{10} \left(\frac{|Q(t, x+h) - Q(t, x) - Q'(t, x)(h)|^2}{\|h\|^2} + T \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |\xi_u^{A_0}|^2 \right) ds \right. \\ & \left. + K_1 \sum_{l=0}^d \int_0^t \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |\xi_u^{A_l}|^2 \right) ds + TK_2 \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |\xi_u^{A_{i,j}}|^2 \right) ds \right) \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION D'UNE
G-EDSN PAR RAPPORT À LA CONDITION INITIALE

où $C_{10} = 2(d^2 + d + 2)^2$. Il résulte du lemme 3.3.2 que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Z(u)|^2 \right) &\leq 4C_1^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Z(u)|^2 \right) + 2 \left(\varepsilon L_2 + \frac{\Phi(h)}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + C_{10} \left(\frac{|Q(t, x+h) - Q(t, x) - Q'(t, x)(h)|^2}{\|h\|^2} \right. \\ &\quad \left. + (T + dK_1 + d^2K_2T) \int_0^T \left(2\kappa^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) + \varepsilon L_2 + \frac{\Phi(h)}{\varepsilon} \right) ds \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (1 - 4\kappa^2) \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Z(u)|^2 \right) &\leq \left(C_{10} \frac{|Q(t, x+h) - Q(t, x) - Q'(t, x)(h)|^2}{\|h\|^2} \right. \\ &\quad \left. (2 + C_{10}T(T + dK_1 + d^2TK_2)) \left(\varepsilon L_2 + \frac{\Phi(h)}{\varepsilon} \right) \right) \\ &\quad + C_{11} \int_0^t \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) ds, \end{aligned}$$

où $C_{11} = 2(T + dK_1 + d^2K_2T)C_1^2C_{10}$, ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Z(u)|^2 \right) &\leq \frac{1}{1 - 4\kappa^2} \\ &\times \left(C_{10} \frac{|Q(t, x+h) - Q(t, x) - Q'(t, x)h|^2}{\|h\|^2} \right. \\ &\quad \left. + A_\varepsilon(h) + C_{11} \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) ds \right), \end{aligned}$$

telle que

$$A_\varepsilon(h) := (2 + C_{10}T(T + dK_1 + d^2TK_2)) \left(\varepsilon L_2 + \frac{\Phi(h)}{\varepsilon} \right).$$

Il s'ensuit d'après le lemme de Grönwall, que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Z(u)|^2 \right) \leq f(\varepsilon, h) \tag{3.20}$$

où

$$f(\varepsilon, h) := \frac{1}{1 - 4\kappa^2} \\ \times \left(C_{10} \frac{\|Q(t, x+h) - Q(t, x) - Q'(t, x)(h)\|^2}{\|h\|^2} + A_\varepsilon(h) \right) e^{\gamma T}, \\ \gamma = \frac{C_{11}}{1 - 4\kappa^2}.$$

Comme

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(\varepsilon, h) = \frac{C_{11} e^{\gamma T}}{1 - 4\kappa^2} (2 + C_{10} T (T + dK_1 + d^2 T K_2)) \varepsilon L_2,$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(\varepsilon, h) \right) = 0,$$

alors, en utilisant l'inégalité [\(3.20\)](#)

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |Z(u)|^2 \right) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon, h) \right) = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{X(t, x) - X(t, x+h)}{\|h\|} = Y(t, x) \quad q.s. \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

d'où le théorème. ■

3.4 Application

Dans cette section, nous donnons deux exemples à titre d'application pour illustrer les résultats théoriquement obtenus.

Exemple 3.4.1 *Comme il est très difficile d'obtenir, voir impossible dans plusieurs cas la solution analytique, nous choisissons d'abord le terme neutre Q et un processus $X(t)$ qui est censé être la solution du G -EDSN. On donne alors l'équation satisfaite par $X(t) - Q(t, X_t)$, ce qui nous permet de trouver les coefficients de dB_t , $d\langle B \rangle_t$ et dt . Par exemple, nous choisissons $X(t) = x(0) + \sin B_t$ et $Q(t, x) = \frac{x(0)(1 + \sin B_t)}{8}$, où $x \in BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ et (B_t) est un G -mouvement Brownien unidimensionnel. Notons que Q vérifie les hypothèses **(H1)**-**(H3)** et $Q'(t, x) = \frac{\phi(1 + \sin B_t)}{8}$. Nous avons*

$$X(t) - Q(t, X_t) = X(t) - \frac{X(t)(1 + \sin B_t)}{8} = \frac{X(t)(7 - \sin B_t)}{8}.$$

CHAPITRE 3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION D'UNE
G-EDSN PAR RAPPORT À LA CONDITION INITIALE

En utilisant la G-formule d'Itô, nous avons

$$dX(t) = \cos B_t dB_t - \frac{1}{2} \sin B_t d\langle B \rangle_t,$$

et

$$d\left(\frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) = -\frac{1}{8} \left(\cos B_t dB_t - \frac{1}{2} \sin B_t d\langle B \rangle_t\right).$$

Selon la G-formule d'intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} d(X(t) - Q(t, X_t)) &= X(t) d\left(\frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) + \left(\frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) dX(t) \\ &\quad + dX(t) d\left(\frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) \\ &= \frac{1}{8} \left(-X(t) + \frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) \left(\cos B_t dB_t - \frac{1}{2} \sin B_t d\langle B \rangle_t\right) \\ &\quad - \frac{1}{8} \cos^2 B_t d\langle B \rangle_t \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(-X(t) + \frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) \cos B_t \right] dB_t \\ &\quad - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \sin B_t \left(-X(t) + \frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) + \cos^2 B_t \right] d\langle B \rangle_t. \end{aligned}$$

Cela signifie que $X(t)$ est la solution du G-EDSN suivante :

$$\begin{cases} d(X(t) - Q(t, X_t)) = A_1(t, X_t) dB_t + A_2(t, X_t) d\langle B \rangle_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (3.21)$$

où

$$A_1(t, x) = \frac{1}{8} \left[\cos B_t \left(-x(0) + \frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) \right],$$

et

$$A_2(t, x) = -\frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \sin B_t \left(-x(0) + \frac{(7 - \sin B_t)}{8}\right) + \cos^2 B_t \right].$$

Puisque

$$A'_1(t, x) = -\frac{\phi}{8} \cos B_t \quad \text{et} \quad A'_2(t, x) = \frac{\phi}{16} \sin B_t,$$

alors A_1 et A_2 vérifient les conditions **(H1)**-**(H3)**. Il s'ensuit que $X(t)$ est l'unique solution du G-EDSN (3.21). Alors en appliquant le théorème 3.3.1, la dérivée $Y(t)$ de $X(t)$ est l'unique solution du G-EDSN suivante :

$$\begin{cases} d(Y(t) - Q'(t, X_t)(Y_t)) = A'_1(t, X_t)(Y_t) dB_t \\ \quad + A'_2(t, X_t)(Y_t) d\langle B \rangle_t \\ Y_0 = Id \end{cases} \quad (3.22)$$

Comme

$$Q'(t, X_t) \circ Y_t = \frac{Y(t)(1 + \sin B_t)}{8}, \quad A'_1(t, X_t) \circ Y_t = -\frac{Y(t)}{8} \cos B_t,$$

et

$$A'_2(t, X_t) \circ Y_t = \frac{Y(t)}{16} \sin B_t,$$

alors l'équation (3.22) s'écrit,

$$\begin{cases} d\left(\frac{Y(t)(1+\sin B_t)}{8}\right) = -\frac{Y(t)}{8} \cos B_t dB_t + \frac{Y(t)}{16} \sin B_t d\langle B \rangle_t \\ Y_0 = Id \end{cases}$$

Il est facile de voir que la dérivée $Y(t) = \phi$ de $X(t)$ est l'unique solution triviale de l'équation (3.22).

L'exemple suivant montre le passage entre le résultat obtenu dans ce chapitre et celui de Bougherra et al [9].

Exemple 3.4.2 Considérons la G -EDS suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \sum_{l=0}^d f_l(X(t)) dB_t^l + \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}(X(t)) d\langle B^i, B^j \rangle_t \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.23)$$

où $B_t^0 = t$, les fonctions $f_l, \sigma_{i,j} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $l \in \overline{0, d}$ et $i, j \in \overline{1, d}$ sont différentiables par rapport à x et satisfont les hypothèses suivantes :

Pour $H = f_l, \sigma_{i,j}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

($\tilde{H}1$) :

$$|H'(x)| \leq C_1.$$

($\tilde{H}2$) :

$$|H(t, 0)| < \infty.$$

($\tilde{H}3$) :

$$H' \in C_{l, lip}(\mathbb{R}^n).$$

tel que H' désigne les dérivées par rapport à x (matrices jacobiennes). Considérons maintenant les fonctions $A_l, A_{i,j} : BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, définies comme suit :

$$A_l(x) := f_l(x(0)) = f_l(\phi(x)) \quad \text{et} \quad A_{i,j}(x) := \sigma_{i,j}(x(0)) = \sigma_{i,j}(\phi(x)).$$

Il est facile de vérifier que les fonctions $A_l, A_{i,j}$ sont différentiables et vérifient les hypothèses (**H1**)-(**H3**). Alors, la G -EDSN de terme neutre $Q := 0$, suivante :

$$\begin{cases} dZ(t) = \sum_{l=0}^d A_l(Z_t) dB_t^l + \sum_{i,j=1}^d A_{i,j}(Z_t) d\langle B^i, B^j \rangle_t \\ Z_0 = z \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (3.24)$$

CHAPITRE 3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION D'UNE
G-EDSN PAR RAPPORT À LA CONDITION INITIALE

admet une solution unique. Par conséquent, l'équation (3.23) admet une solution unique

$$X(t, x) := Z(t, \rho(x)),$$

telle que $\rho(x) \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ défini par $\rho(x)(\theta) = x$ pour tout $\theta \in [-r, 0]$. Les dérivées sont données par

$$A_l'(z) = f_l'(\phi(z)) \circ \phi \quad \text{et} \quad A_{i,j}'(z) = \sigma_{i,j}'(\phi(z)) \circ \phi.$$

Donc, par le théorème 3.3.1, la solution de l'équation (3.24) est différentiable par rapport à z , et la dérivée satisfait la G-EDS suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dV(t) = \sum_{l=0}^d A_l'(Z_t)(V_t) dB_t^l + \sum_{i,j=1}^d A_{i,j}'(Z_t)(V_t) d\langle B^i, B^j \rangle_t \\ V(0) = \phi \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Il s'ensuit que $X(t, x)$ est différentiable par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$ et la dérivée est

$$Y(t, x) = V(t, \rho(x)) \circ \rho.$$

D'autre part, nous avons

$$Y(0, x) = \phi \circ \rho(x) = I, \text{ l'identité sur } \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que la solution de l'équation (3.23) est différentiable et la dérivée est l'unique solution de l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dY(t, x) = \sum_{l=0}^d f_l'(X(t, x)) Y(t, x) dB_t^l \\ \quad + \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}'(X(t, x)) Y(t, x) d\langle B^i, B^j \rangle_t \\ Y(0, x) = I \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Enfin, du fait que $f_l'(X(t, x))$ et $\sigma_{i,j}'(X(t, x))$ sont des processus matriciels, alors $Y(t)$ est nécessairement un processus stochastique à valeurs matricielles. Il résulte que la G-EDS (3.26) est une équation différentielle stochastique matricielle. En fait, c'est l'un des principaux résultats obtenus par Bougherra et al. [9], sous d'autres hypothèses.

Chapitre 4

Différentiabilité des G -EDSNs par rapport à un paramètre

Dans ce chapitre, nous étudions la différentiabilité de la solution des G -EDSNs par rapport à un paramètre, lorsque la condition initiale dépend de ce paramètre. Pour simplifier les calculs, nous considérons le cas où les coefficients dans les G -EDSNs étudiées sont à valeurs réelles.

4.1 Formulation du problème

Dans de nombreuses applications, il est important de déterminer comment la solution d'équation différentielle dépend d'un paramètre change par rapport au paramètre d'intérêt. Le changement de la solution peut être quantifié en calculant la dérivée de la solution par rapport aux paramètres, ce qui permet de voir l'influence de ces paramètres sur la solution. Dans notre cas, le système considéré est gouverné par la G -EDSN paramétrée suivante :

$$d[X^\alpha(t) - Q(t, X_t^\alpha)] = f(t, X_t^\alpha)dt + \sigma(t, X_t^\alpha)dB_t + g(t, X_t^\alpha)d\langle B \rangle_t \quad (4.1)$$

avec la condition initiale $X_0^\alpha = x(\alpha, \cdot) := (x(\alpha, \theta))_{-r \leq \theta \leq 0}$, telle que

$$(x(\cdot, \theta))_{-r \leq \theta \leq 0} : \mathbb{R} \longrightarrow BC([-r, 0]; \mathbb{R}),$$

où $X_t^\alpha = \{X^\alpha(t + \theta) : -r \leq \theta \leq 0\}$ est un processus stochastique à valeurs dans $BC([-r, 0]; \mathbb{R})$. L'équation (4.1) peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$\begin{aligned} X^\alpha(t) &= Q(t, X_t^\alpha) + x(\alpha, 0) - Q(0, x(\alpha, \cdot)) + \int_0^t f(s, X_s^\alpha)ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma(s, X_s^\alpha)dB_s + \int_0^t g(s, X_s^\alpha)d\langle B \rangle_s \end{aligned} \quad (4.2)$$

CHAPITRE 4. DIFFÉRENTIABILITÉ DES G -EDSNS PAR RAPPORT
À UN PARAMÈTRE

Soit $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R})$ l'espace des opérateurs linéaires à valeurs dans \mathbb{R} , définis sur $BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ muni de la norme suivante :

$$\|W\|_r = \sup \{|W(h)| : h \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}), \|h\| \leq 1\}.$$

Supposons que les fonctions Q , f , σ et g soient différentiables par rapport à la deuxième variable. Puisque \mathbb{R} et $BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ sont des espaces de Banach, alors les dérivées $Q'(t, x)$, $f'(t, x)$, $\sigma'(t, x)$ et $g'(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times BC([-r, 0]; \mathbb{R})$, appartiennent à $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R})$.

Définition 4.1.1 Soient $U(\alpha, \cdot), V(\alpha, \cdot) \in BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que $U(\alpha, \cdot)$ est différentiable dans $BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ par rapport à α , et admet $V(\alpha, \cdot)$ comme dérivée, si

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|U(\alpha + \tau, \cdot) - U(\alpha, \cdot) - \tau V(\alpha, \cdot)\|}{|\tau|} = 0.$$

Nous écrivons $U'(\alpha, \cdot) = V(\alpha, \cdot)$.

Remarque 4.1.1 Notons que $U'(\alpha, \cdot) = V(\alpha, \cdot)$ implique que la fonction $U(\alpha, \theta)$ est différentiable par rapport à α au sens usuel, et $\frac{\partial U}{\partial \alpha}(\alpha, \theta) = V(\alpha, \theta)$.

Nous supposons que $x(\alpha, \cdot)$ est différentiable dans $BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ par rapport à α , de dérivée uniformément bornée, i.e., $\|x'(\alpha, \cdot)\| \leq M_3$, où M_3 est une constante positive.

L'objectif principal est d'étudier la dérivabilité de la solution au G -EDSN paramétrée (4.2), par rapport au paramètre α . Nous montrons sous des hypothèses appropriées que la solution $X^\alpha(t)$ est différentiable, et la dérivée $Y^\alpha(t)$ satisfait la G -EDSN suivante :

$$\begin{aligned} Y^\alpha(t) &= Q'(t, X_t^\alpha)(Y_t^\alpha) + \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, 0) - Q'(0, x(\alpha, \cdot))(x'(\alpha, \cdot)) \quad (4.3) \\ &+ \int_0^t f'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) ds + \int_0^t \sigma'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) dB_s + \int_0^t g'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \quad q.s. \end{aligned}$$

où $Y_t^\alpha = (Y^\alpha(t + \theta))_{-r \leq \theta \leq 0}$. Notez que, puisque $X^\alpha(0) = X_0^\alpha(0) = x(\alpha, 0)$ alors, la dérivée de $X^\alpha(0)$ par rapport à α est

$$Y^\alpha(0) = \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, 0).$$

Nous avons besoin des hypothèses suivantes : Pour chaque $x, y \in BC([-r, 0]; \mathbb{R})$,

(H4) :

$$|D'(t, x)|_r \leq M_1 \text{ et } |Q'(t, x)|_r \leq \kappa \quad q.s.,$$

uniformément par rapport à t , où $D = f, \sigma, g$, M_1 est une constante positive et $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$.

(H5) :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |I(t, 0)| < \infty \quad q.s.,$$

où $I = Q, f, \sigma$ et g .

(H6) : Il existe une constante positive M_2 et $n_0 \in \mathbb{N}^*$, telle que

$$|J(t, x) - J(t, y)|_r \leq M_2 \|x - y\| (1 + \|x\|^{n_0} + \|y\|^{n_0}) \quad q.s.,$$

uniformément par rapport à t , où $J = Q', f', \sigma'$ et g' .

Remarque 4.1.2 *Puisque la dérivée $x'(\alpha, \cdot)$ est uniformément bornée par M_3 , alors*

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, \theta) \right| \leq M_3,$$

et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\|x(\alpha, \cdot) - x(\beta, \cdot)\| \leq M_3 |\alpha - \beta|.$$

Remarque 4.1.3 *Notons que l'hypothèse (H4) implique que*

$$|D(t, x) - D(t, y)| \leq M_1 \|x - y\| \quad q.s.,$$

et

$$|Q(t, x) - Q(t, y)| \leq \kappa \|x - y\| \quad q.s.,$$

uniformément par rapport à t , où $D = f, \sigma$ et g .

Remarque 4.1.4 *Les hypothèses (H4) et (H5) impliquent que*

$$|I(t, x)| \leq M_4 (1 + \|x\|) \quad q.s.,$$

uniformément par rapport à t , où $I = Q, f, \sigma, g$ et M_4 est une constante positive.

D'après les remarques [4.1.3](#) et [4.1.4](#), la G -EDSN paramétrée [\(4.2\)](#) admet une solution unique, (see [\[23\]](#)).

4.2 Existence et unicité de la solution de la dérivée

Théorème 4.2.1 La G -EDSN (4.3) de la dérivée admet une solution unique.

Preuve. Définissons les fonctions N, F, G et $H : [0, T] \times BC([-r, 0]; \mathbb{R}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, comme suit

$$\begin{aligned} N(t, y) & : = Q'(t, X_t^\alpha)(y), \quad F(t, y) := f'(t, X_t^\alpha)(y), \\ H(t, y) & : = \sigma'(t, X_t^\alpha)(y) \text{ et } G(t, y) := g'(t, X_t^\alpha)(y). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (4.3) peut s'écrire comme suit

$$d[Y^\alpha(t) - N(t, Y_t)] = F(t, Y_t^\alpha)dt + H(t, Y_t^\alpha)dB_t + G(t, Y_t^\alpha)d\langle B \rangle_t$$

Notez que les fonctions F, H et G satisfont la condition de Lipschitz et la condition de croissance linéaire, cependant N est une contraction. En effet, pour chaque $x, y \in BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} |F(t, x) - F(t, y)| \vee |H(t, x) - H(t, y)| \vee |G(t, x) - G(t, y)| \\ \leq M_1 \|x - y\|, \end{aligned}$$

et

$$|F(t, y)| \vee |H(t, y)| \vee |G(t, y)| \leq M_4 (1 + \|y\|).$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} |N(t, x) - N(t, y)| & = |Q'(t, X_t^\alpha)(x) - Q'(t, X_t^\alpha)(y)| \\ & \leq \kappa \|x - y\|. \end{aligned}$$

Par conséquent la G -EDSN (4.3) admet une solution unique, voir [23]. ■

4.3 Différentiabilité de la solution par rapport au paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$

Dans le but de montrer la différentiabilité de la solution par rapport à α , nous avons besoin de quelques lemmes.

Lemme 4.3.1 Pour tout $p \geq 2$, $\lambda \neq 0$ et $t \in [0, T]$, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t)|^p \right) \leq L_3 |\lambda|^p,$$

où L_3 est une constante positive.

4.3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AU
PARAMÈTRE $\alpha \in \mathbb{R}$

Preuve. De l'équation (4.2), on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right| &\leq \left| Q(t, X_t^{\alpha+\lambda}) - Q(t, X_t^\alpha) \right| + |x(\alpha + \lambda, 0) - x(\alpha, 0)| \\ &\quad + \left| Q(0, x(\alpha, \cdot)) - Q(0, x(\alpha + \lambda, \cdot)) \right| + \left| \int_0^t f(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - f(s, X_s^\alpha) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \sigma(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - \sigma(s, X_s^\alpha) dB_s \right| + \left| \int_0^t g(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - g(s, X_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right|. \end{aligned}$$

Par la remarque 4.1.3, nous avons

$$\begin{aligned} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right| &\leq \kappa \left\| X_t^{\alpha+\lambda} - X_t^\alpha \right\| + |x(\alpha + \lambda, 0) - x(\alpha, 0)| \\ &\quad + \kappa \|x(\alpha, \cdot) - x(\alpha + \lambda, \cdot)\| + \left| \int_0^t f(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - f(s, X_s^\alpha) ds \right| \quad (4.4) \\ &\quad + \left| \int_0^t \sigma(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - \sigma(s, X_s^\alpha) dB_s \right| + \left| \int_0^t g(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - g(s, X_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right| \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| X_t^{\alpha+\lambda} - X_t^\alpha \right\| &\leq \sup_{-r \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right| \\ &\leq \|x(\alpha + \lambda, \cdot) - x(\alpha, \cdot)\| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right| \\ &\leq M_3 |\lambda| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right| \quad (4.5) \end{aligned}$$

Ainsi, par la remarque 4.1.2 et l'inégalité (4.5), l'inégalité (4.4) nous donne

$$\begin{aligned} (1 - \kappa) \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right| &\leq (2\kappa + 1) M_3 |\lambda| \\ &\quad + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - f(s, X_s^\alpha) ds \right| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - \sigma(s, X_s^\alpha) dB_s \right| \\ &\quad + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - g(s, X_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.8), nous avons

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right|^p \leq \frac{4^{p-1}}{(1-\kappa)^p} \times ((2\kappa M_3 + M_3)^p |\lambda|^p \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - f(s, X_s^\alpha) ds \right|^p + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - \sigma(s, X_s^\alpha) dB_s \right|^p \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - g(s, X_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right|^p \Bigg), \end{aligned}$$

et en appliquant la G -espérance à l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right|^p \right) \leq \frac{4^{p-1}}{(1-\kappa)^p} \times \\ & \left[(2\kappa M_3 + M_3)^p |\lambda|^p + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - f(s, X_s^\alpha) ds \right|^p \right) \right. \\ & \quad + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - \sigma(s, X_s^\alpha) dB_s \right|^p \right) \\ & \quad \left. + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g(s, X_s^{\alpha+\lambda}) - g(s, X_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right|^p \right) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant la G -inégalité de Hölder et les G -inégalités BDG, puis la remarque 4.1.3, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right|^p \right) \leq \frac{4^{p-1}}{(1-\kappa)^p} \times ((2\kappa M_3 + M_3)^p |\lambda|^p \\ & + M_1^p \left(T^{p-1} + K_1 T^{\frac{p}{2}-1} + K_2 T^{p-1} \right) \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\| X_s^{\alpha+\lambda} - X_s^\alpha \|^p \right) ds \Bigg), \end{aligned}$$

et en utilisant les inégalités (4.5) et (3.8), il en résulte que

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right|^p \right) \leq A_0 |\lambda|^p \\ & + 2^{p-1} B_0 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(M_3^p |\lambda|^p + \sup_{0 \leq t \leq s} \left| X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t) \right|^p \right) ds, \end{aligned}$$

4.3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AU
PARAMÈTRE $\alpha \in \mathbb{R}$

où $A_0 = \frac{4^{p-1}(2\kappa M_3 + M_3)^p}{(1-\kappa)^p}$ et $B_0 = \frac{4^{p-1}(T^{p-1} + K_1 T^{\frac{p}{2}-1} + K_2 T^{p-1})M_1^p}{(1-\kappa)^p}$. Donc

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t)|^p \right) \leq A_1 |\lambda|^p \\ & + 2^{p-1} B_0 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq s} |X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t)|^p \right) ds, \end{aligned}$$

telle que $A_1 = (A_0 + 2^{p-1} M_3^p B_0 T)$. On déduit par le lemme de Grönwall que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t)|^p \right) \leq L_3 |\lambda|^p,$$

où $L_3 = A_1 e^{2^{p-1} B_0 T}$. ■

Remarque 4.3.1 D'après le lemme 4.3.1, nous pouvons facilement déduire que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^{\alpha+\lambda} - X_t^\alpha\|^p \right) \leq L_4 |\lambda|^p,$$

où L_4 est une constante positive. En effet, nous avons

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^{\alpha+\lambda} - X_t^\alpha\| \leq M_3 |\lambda| + \sup_{0 \leq t \leq T} |X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t)|,$$

d'où

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^{\alpha+\lambda} - X_t^\alpha\|^p \leq 2^{p-1} \left(M_3^p |\lambda|^p + \sup_{0 \leq t \leq T} |X^{\alpha+\lambda}(t) - X^\alpha(t)|^p \right),$$

et en passant à la G -espérance, nous aurons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^{\alpha+\lambda} - X_t^\alpha\|^p \right) \leq 2^{p-1} (M_3^p + L_3) |\lambda|^p,$$

avec $L_4 = 2^{p-1} (M_3^p + L_3)$.

Lemme 4.3.2 Pour tout $p \geq 2$ et pour tout $t \in [0, T]$, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|^p \right) \leq L_3.$$

Preuve. Par l'équation (1.4), nous avons

$$\begin{aligned} |Y^\alpha(t)| &\leq |Q'(t, X_t^\alpha)|_r \|Y_t^\alpha\| + \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, 0) \right| + |Q'(0, x(\alpha, \cdot))|_r \|x'(\alpha, \cdot)\| \\ &\quad + \left| \int_0^t f'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) ds \right| + \left| \int_0^t \sigma'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) dB_s \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t g'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right|, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (H4) et le fait que $|\frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, \theta)| \leq M_3$,

$$\begin{aligned} |Y^\alpha(t)| &\leq \kappa \|Y_t^\alpha\| + M_3 + \kappa M_3 + \left| \int_0^t f'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \sigma'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) dB_s \right| + \left| \int_0^t g'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right| \end{aligned} \quad (4.6)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|Y_t^\alpha\| &\leq \sup_{-r \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)| \\ &\leq \sup_{-r \leq t \leq 0} |Y^\alpha(t)| + \sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)| \\ &\leq \|Y_0^\alpha\| + \sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)| \\ &\leq M_3 + \sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)| \end{aligned} \quad (4.7)$$

A partir de l'inégalité (4.6) et l'inégalité (4.7), nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)| &\leq \frac{1}{1 - \kappa} \times \left((2\kappa M_3 + M_3) + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) ds \right| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) dB_s \right| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right| \right). \end{aligned}$$

4.3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AU
PARAMÈTRE $\alpha \in \mathbb{R}$

Il s'ensuit, grâce à l'inégalité (3.8), que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|^p &\leq \frac{4^{p-1}}{(1-\kappa)^p} \times \left((2\kappa M_3 + M_3)^p + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) ds \right|^p \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) dB_s \right|^p + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g'(s, X_s^\alpha)(Y_s^\alpha) d\langle B \rangle_s \right|^p \right), \end{aligned}$$

en appliquant la G -espérance des deux côtés, puis en utilisant la G -inégalité de Hölder, les G -BDG inégalités et l'hypothèse **(H4)**,

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|^p \right) \leq \frac{4^{p-1}}{(1-\kappa)^p} \\ &\times \left((2\kappa M_3 + M_3)^p + M_1^p \left(T^{p-1} + K_1 T^{\frac{p}{2}-1} + K_2 T^{p-1} \right) \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} \|Y_u^\alpha\|^p \right) ds \right). \end{aligned}$$

Il résulte de l'inégalité (4.7) que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|^p \right) \leq A_0 + B_0 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\left[M_3 + \sup_{0 \leq u \leq s} |Y^\alpha(u)| \right]^p \right) ds,$$

d'où

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|^p \right) \leq A_1 + 2^{p-1} B_0 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Y^\alpha(u)|^p \right) ds.$$

Il résulte du lemme de Grönwall que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|^p \right) \leq L_3,$$

d'où l'affirmation. ■

Remarque 4.3.2 Par le lemme 4.3.2, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|Y_t^\alpha\|^p \right) \leq L_4.$$

En effet,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|Y_t^\alpha\| \leq M_3 + \sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|,$$

et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|Y_t^\alpha\|^p \leq 2^{p-1} \left(M_3^p + \sup_{0 \leq t \leq T} |Y^\alpha(t)|^p \right),$$

en appliquant la G -espérance,

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|Y_t^\alpha\|^p \right) \leq L_4.$$

Lemme 4.3.3 Soient $\tau \neq 0$, et soient les processus

$$Z(t) := \frac{X^{\alpha+\tau}(t) - X^\alpha(t) - \tau Y^\alpha(t)}{|\tau|},$$

$$\xi_t := \frac{1}{|\tau|} (Q(t, X_t^{\alpha+\tau}) - Q(t, X_t^\alpha) - \tau Q'(t, X_t^\alpha)(Y_t))$$

et

$$\xi_t^P := \frac{1}{|\tau|} (P(t, X_t^{\alpha+\tau}) - P(t, X_t^\alpha) - \tau P'(t, X_t^\alpha)(Y_t))$$

où $P = f, g$ et σ . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in]0, T]$, nous avons

(i) :

$$|\xi_0| \leq \kappa \rho(\tau) + \widetilde{\Phi}(\tau),$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |\xi_u|^2 \right) \leq 2\kappa^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|^2 \right) + 4(\rho(\tau))^2 + \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + 2\varepsilon L_4,$$

(ii) :

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |\xi_u^P|^2 \right) \leq 2M_1^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |Z(u)|^2 \right) + 4(\rho(\tau))^2 + \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + 2\varepsilon L_4,$$

où

$$\rho(\tau) = \frac{\|x(\alpha + \tau, \cdot) - x(\alpha, \cdot) - \tau x'(\alpha, \cdot)\|}{|\tau|},$$

où $\widetilde{\Phi}$ et Ψ sont des fonctions positives indépendantes de ε telles que $\lim_{t \rightarrow 0} \widetilde{\Phi}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t) = 0$.

Preuve. Pour simplifier, nous posons

$$\widetilde{X}(t) = X^{\alpha+\tau}(t), X(t) = X^\alpha(t), Y(t) = Y^\alpha(t), Y_t = Y_t^\alpha$$

et

$$Z(t) = \frac{\widetilde{X}(t) - X(t) - \tau Y(t)}{\tau}.$$

4.3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AU
PARAMÈTRE $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) : Soit $u \leq t$. Par le théorème des accroissements finis, nous avons pour un certain $\beta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} & Q(u, \tilde{X}_u) - Q(u, X_u) - \tau Q'(u, X_u)(Y_u) \\ &= Q'(u, X_u + \beta(\tilde{X}_u - X_u))(\tilde{X}_u - X_u) - \tau Q'(u, X_u)(Y_u) \\ &= Q'(u, X_u + \beta(\tilde{X}_u - X_u))(\tilde{X}_u - X_u - \tau Y_u) \\ &+ \tau \left[Q'(u, X_u + \beta(\tilde{X}_u - X_u)) - Q'(u, X_u) \right](Y_u), \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse **(H4)**,

$$\begin{aligned} & \left| Q(u, \tilde{X}_u) - Q(u, X_u) - \tau Q'(u, X_u)(Y_u) \right| \leq \kappa \left\| \tilde{X}_u - X_u - \tau Y_u \right\| \\ &+ |\tau| \left| \left[Q'(u, X_u + \beta(\tilde{X}_u - X_u)) - Q'(u, X_u) \right](Y_u) \right| \end{aligned}$$

et par l'hypothèse **(H6)**, nous aurons

$$\begin{aligned} & \left| Q(u, \tilde{X}_u) - Q(u, X_u) - \tau Q'(u, X_u)(Y_u) \right| \leq \kappa \left\| \tilde{X}_u - X_u - \tau Y_u \right\| \\ &+ M_2 |\tau| \left\| \beta(\tilde{X}_u - X_u) \right\| \\ &\times \left(1 + \left\| X_u + \beta(\tilde{X}_u - X_u) \right\|^{n_0} + \|X_u\|^{n_0} \right) \|Y_u\|. \end{aligned}$$

Nous avons, d'après l'inégalité [\(3.8\)](#) et le fait que $0 < \beta < 1$,

$$\begin{aligned} |\xi_u| &\leq \kappa \frac{\left\| \tilde{X}_u - X_u - \tau Y_u \right\|}{|\tau|} + M_2 \left\| \tilde{X}_t - X_t \right\| \\ &\times \left(1 + (2^{n_0-1} + 1) \|X_u\|^{n_0} + 2^{n_0-1} \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^{n_0} \right) \|Y_u\| \end{aligned} \quad (4.8)$$

d'après l'hypothèse **(H6)**, en posant

$$\tilde{\Phi}(\tau) = M_2 M_3 |\tau| \left(1 + (2^{n_0-1} + 1) \|x(\alpha, \cdot)\|^{n_0} + 2^{n_0-1} |\tau|^{n_0} \right) \|x'(\alpha, \cdot)\|,$$

$$\begin{aligned} |\xi_0| &\leq \kappa \frac{\|x(\alpha + \tau, \cdot) - x(\alpha, \cdot) - \tau x'(\alpha, \cdot)\|}{|\tau|} + M_2 \|x(\alpha + \tau, \cdot) - x(\alpha, \cdot)\| \\ &\times \left(1 + (2^{n_0-1} + 1) \|x(\alpha, \cdot)\|^{n_0} + 2^{n_0-1} \|x(\alpha + \tau, \cdot) - x(\alpha, \cdot)\|^{n_0} \right) \|x'(\alpha, \cdot)\| \\ &\leq \kappa \rho(\tau) + \tilde{\Phi}(\tau). \end{aligned}$$

CHAPITRE 4. DIFFÉRENTIABILITÉ DES G -EDSNS PAR RAPPORT
À UN PARAMÈTRE

D'autre part, du fait que $\tilde{X}(s) = X_0^{\alpha+\tau}(s) = x(\alpha + \tau, s)$, $X(s) = x(\alpha, s)$ et $Y(s) = Y_0^\alpha(s) = \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, s)$ pour tout $-r \leq s \leq 0$, nous avons pour tout $t \in]0, T]$,

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{X}_u - X_u - \tau Y_u \right\| \leq \sup_{-r \leq s \leq t} \left| \tilde{X}(s) - X(s) - \tau Y(s) \right| \\ & \leq \sup_{-r \leq s \leq 0} \left| \tilde{X}(s) - X(s) - \tau Y(s) \right| + \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \tilde{X}(s) - X(s) - \tau Y(s) \right| \\ & \leq |\tau| \rho(\tau) + |\tau| \sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)| \end{aligned} \quad (4.9)$$

En substituant l'inégalité (4.9) dans (4.8), nous aurons

$$\begin{aligned} |\xi_u| & \leq \kappa \sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)| + \kappa \rho(\tau) \\ & + M_5 \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\| \left(1 + \|X_u\|^{n_0} + \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^{n_0} \right) \|Y_u\|, \end{aligned}$$

où $M_5 = M_2(2^{n_0-1} + 1)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\xi_u|^2 & \leq 2\kappa^2 \sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)|^2 \\ & + 2 \left(\kappa \rho(\tau) + M_5 \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\| \left(1 + \|X_u\|^{n_0} + \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^{n_0} \right) \|Y_u\| \right)^2 \\ & \leq 2\kappa^2 \sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)|^2 + 4(\kappa \rho(\tau))^2 \\ & + 4M_5^2 \left(\left\| \tilde{X}_u - X_u \right\| \left(1 + \|X_u\|^{n_0} + \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^{n_0} \right) \right)^2 \|Y_u\|^2. \end{aligned}$$

d'où d'après l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$,

$$\begin{aligned} |\xi_u|^2 & \leq 2\kappa^2 \sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)|^2 + 4(\rho(\tau))^2 + 2\varepsilon \|Y_u\|^4 \\ & + \frac{2M_5^4}{\varepsilon} \left(\left\| \tilde{X}_u - X_u \right\| + \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\| \|X_u\|^{n_0} + \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^{n_0+1} \right)^4 \\ & \leq 2\kappa^2 \sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)|^2 + 4(\rho(\tau))^2 + 2\varepsilon \|Y_u\|^4 \\ & + \frac{54M_5^4}{\varepsilon} \left(\left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^4 + \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^4 \|X_u\|^{4n_0} + \left\| \tilde{X}_u - X_u \right\|^{4n_0+4} \right), \end{aligned}$$

et en passant à la G -espérance et en utilisant l'inégalité (3.8) puis la G -inégalité

4.3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AU
PARAMÈTRE $\alpha \in \mathbb{R}$

de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^2 \right) \leq 2\kappa^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)|^2 \right) \\
 & + 4(\rho(\tau))^2 + \frac{54M_5^4}{\varepsilon} \left[\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} \|\tilde{X}_u - X_u\|^4 \right) \right. \\
 & + \sqrt{\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} \|\tilde{X}_u - X_u\|^8 \right)} \sqrt{\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} \|X_u\|^{8n_0} \right)} \\
 & \left. + \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} \|\tilde{X}_u - X_u\|^{4n_0+4} \right) \right] + 2\varepsilon \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} \|Y_u\|_r^4 \right) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Grâce aux remarques [4.3.1](#) et [4.3.2](#), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 & \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^2 \right) \leq 2\kappa^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq u} |Z(s)|^2 \right) + 4(\rho(\tau))^2 \\
 & + \frac{54M_5^4}{\varepsilon} \left(L_4 |\tau|^4 + |\tau|^4 \sqrt{L_4} \sqrt{\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} \|X_u\|^{8n_0} \right)} + L_4 |\tau|^{4n_0+4} \right) + 2\varepsilon L_4.
 \end{aligned}$$

Observons que

$$\sup_{0 \leq u \leq T} \|X_u\| \leq \sup_{-r \leq u \leq T} |X(u)|$$

et comme $\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{-r \leq u \leq T} |X(u)|^p \right) < \infty$, $p \geq 2$ (voir [21](#)), alors il existe une

constante positive M_6 tel que $\sqrt{\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} \|X_u\|^{8m_0} \right)} \leq M_6$, d'où

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^2 \right) \leq 2\kappa^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Z(s)|^2 \right) + 4(\rho(\tau))^2 + \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + 2\varepsilon L_4 \quad (4.11)$$

où

$$\Psi(\tau) = 54M_5^4 \left(L_4 |\tau|^4 + |\tau|^4 \sqrt{L_4} M_6 + L_4 |\tau|^{4n_0+4} \right).$$

(ii) : Découle des mêmes arguments utilisés dans la preuve de (i). ■

Maintenant, nous sommes en mesure d'établir le théorème fondamental sur la différentiabilité de la solution par rapport au paramètre α .

Théorème 4.3.1 *Pour tout $t \in [0, T]$, la solution $X^\alpha(t)$ est différentiable q.s. par rapport à α . De plus, la dérivée $Y^\alpha(t) := \frac{dX^\alpha(t)}{d\alpha}$ est l'unique solution de l'équation [\(4.3\)](#).*

Preuve. En adoptant les mêmes notations utilisées dans le lemme précédent, à partir des équations (4.2) et (4.3), nous avons

$$\begin{aligned} Z(t) &= \xi_t + \frac{1}{\tau} \left(x(\alpha + \tau, 0) - x(\alpha, 0) - \tau \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, 0) \right) \\ &\quad + \xi_0 + \int_0^t \xi_s^f ds + \int_0^t \xi_s^\sigma dB_s + \int_0^t \xi_s^g d\langle B \rangle_s \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'idée est de montrer que :

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^2 \right) = 0.$$

En appliquant la G -inégalité de Hölder et le lemme 4.3.3, nous avons

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^f ds \right|^2 \right) \leq T \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(|\xi_s^f|^2 \right) ds \\ &\leq T \int_0^T \left(2M_1^2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) + 4(\rho(\tau))^2 + \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + 2\varepsilon L_4 \right) ds, \\ &\leq 2TM_1^2 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) ds + T^2 \left(4(\rho(\tau))^2 + \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + 2\varepsilon L_4 \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

par les G -inégalités BDG et le lemme 4.3.3, on obtient

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^\sigma dB_s \right|^2 \right) \leq K_1 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(|\xi_s^\sigma|^2 \right) ds \\ &\leq 2K_1 M_1^2 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) ds + K_1 T \left(4(\rho(\tau))^2 + \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + 2\varepsilon L_4 \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

et

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^g d\langle B \rangle_s \right|^2 \right) \leq K_2 T \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(|\xi_s^g|^2 \right) ds \\ &\leq 2K_2 T M_1^2 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) ds + K_2 T^2 \left(4(\rho(\tau))^2 + \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + 2\varepsilon L_4 \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AU
PARAMÈTRE $\alpha \in \mathbb{R}$

D'autre part, à partir de l'équation (4.12), nous avons

$$\begin{aligned}
 & \sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^2 \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_t|^2 \\
 & + 2 \left(\frac{1}{|\tau|} \left| x(\alpha + \tau, 0) - x(\alpha, 0) - \tau \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, 0) \right| \right. \\
 & \left. + |\xi_0|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^f ds \right| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^\sigma dB_s \right| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^g d\langle B \rangle_s \right| \right)^2 \\
 & \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_t|^2 + 10 \left(\frac{1}{|\tau|^2} \left| x(\alpha + \tau, 0) - x(\alpha, 0) - \tau \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, 0) \right|^2 \right. \\
 & \left. + |\xi_0|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^f ds \right|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^\sigma dB_s \right|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \xi_s^g d\langle B \rangle_s \right|^2 \right),
 \end{aligned}$$

en substituant les inégalités (4.11), (4.13), (4.14) et (4.15) dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^2 \right) & \leq \frac{10}{1 - 4\kappa^2} \left(|\rho(\tau)|^2 + 2(\kappa|\rho(\tau)|)^2 + 2|\Phi(\tau)|^2 \right. \\
 & \left. M_7 \int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Z(u)|^2 \right) ds + M_8 \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + M_8 L_4 \varepsilon \right),
 \end{aligned}$$

où $M_7 = 2M_1^2(T + K_1 + K_2T)$ et $M_8 = (T^2 + K_1T + K_2T^2 + 4)$. Il s'ensuit, d'après l'inégalité de Grönwall

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^2 \right) \leq \varsigma(\varepsilon, \tau),$$

telle que

$$\varsigma(\varepsilon, \tau) = \frac{10e^{\frac{10M_7T}{1-4\kappa^2}}}{1 - 4\kappa^2} \left((1 + 2\kappa^2) |\rho(\tau)|^2 + 2|\Phi(\tau)|^2 + M_8 \frac{\Psi(\tau)}{\varepsilon} + M_8 L_4 \varepsilon \right).$$

Comme

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \rho(\tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \Phi(\tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \Psi(\tau) = 0,$$

alors

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \varsigma(\varepsilon, \tau) = \frac{10e^{\frac{10M_7T}{1-4\kappa^2}}}{1 - 4\kappa^2} M_8 L_4 \varepsilon,$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \rho(\varepsilon, \tau) \right) = 0.$$

Nous concluons que

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \widehat{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^2 \right) = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \frac{X^{\alpha+\tau}(t) - X^\alpha(t)}{\tau} = Y^\alpha(t) \quad q.s. \text{ pour chaque } t \in [0, T],$$

d'où le résultat désiré. ■

Corollaire 4.3.1 Soient les fonctions $\tilde{f}, \tilde{\sigma}, \tilde{g} : [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables par rapport à la deuxième variable avec des dérivées partielles bornées $q.s.$,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(t, x), \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(t, x), \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(t, x) \in C_{l, lip}(\mathbb{R}),$$

tels que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{J}(t, 0) < \infty$$

pour $\tilde{J} = \tilde{f}, \tilde{\sigma}, \tilde{g}$. Soit la fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on suppose dérivable. Alors, la solution $X^\alpha(t)$ de la G -EDS suivante :

$$\begin{cases} dX^\alpha(t) = \tilde{f}(t, X^\alpha(t)) dt + \tilde{\sigma}(t, X^\alpha(t)) dB_t + \tilde{g}(t, X^\alpha(t)) d\langle B \rangle_t \\ X^\alpha(0) = x(\alpha) \end{cases} \quad (4.16)$$

est différentiable par rapport à α , et la dérivée est l'unique solution du G -EDS suivante :

$$\begin{cases} dY^\alpha(t) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(t, X^\alpha(t)) Y^\alpha(t) dt + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(t, X^\alpha(t)) Y^\alpha(t) dB_t \\ \quad + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(t, X^\alpha(t)) Y^\alpha(t) d\langle B \rangle_t \\ Y^\alpha(0) = x'(\alpha) \end{cases} \quad (4.17)$$

Notons que ce résultat a été obtenu par Lin [37].

Preuve. Observons tout d'abord que la G -EDS (4.16) peut être considérée comme une G -EDSN

$$\begin{cases} dX^\alpha(t) = f(t, X_t^\alpha) dt + \sigma(t, X_t^\alpha) dB_t + g(t, X_t^\alpha) d\langle B \rangle_t \\ X_0^\alpha = x(\alpha, \cdot) \in BC([-r, 0]; \mathbb{R}) \end{cases},$$

où $x(\alpha, \theta) \equiv x(\alpha)$ et les fonctions $f, \sigma, g : [0, T] \times BC([-r, 0]; \mathbb{R}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$f(t, x) = \tilde{f}(t, x(0)), \sigma(t, x) = \tilde{\sigma}(t, x(0)) \text{ et } g(t, x) = \tilde{g}(t, x(0)).$$

4.3. DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE $\alpha \in \mathbb{R}$

Il est facile de vérifier que les fonctions f, σ, g vérifient les hypothèses **(H4)**-**(H6)**. Alors, d'après le théorème [4.2.1](#), la G -EDS [\(4.16\)](#) admet une solution unique, qui est différentiable par rapport à α et la dérivée $Y^\alpha(t)$ est l'unique solution de la G -EDSN suivante :

$$\begin{cases} dY^\alpha(t) = f'(t, X_t^\alpha)(Y_t^\alpha) dt + \sigma'(t, X_t^\alpha)(Y_t^\alpha) dB_t \\ \quad + g'(t, X_t^\alpha)(Y_t^\alpha) d\langle B \rangle_t \\ Y_0^\alpha = x'(\alpha, \cdot) \equiv x'(\alpha) \end{cases} \quad (4.18)$$

où $f'(t, x)$, $\sigma'(t, x)$ et $g'(t, x)$ sont les dérivées par rapport à $x \in BC([-r, 0]; \mathbb{R})$. Nous avons

$$\tilde{J}'(t, x) = \frac{\partial J}{\partial x}(t, x(0)) \varphi \quad \text{pour } J = f, \sigma, g,$$

où φ est l'opérateur linéaire de $BC([-r, 0]; \mathbb{R})$ à \mathbb{R} défini par $\varphi(x) = x(0)$, alors

$$\tilde{J}'(t, X_t^\alpha)(Y_t^\alpha) = \frac{\partial J}{\partial x}(t, X^\alpha(t)) Y^\alpha(t).$$

Il s'ensuit que la G -EDSN [\(4.18\)](#) est exactement la G -EDS [\(4.17\)](#), ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple 4.3.1 *Considérons la G -EDS [\(4.16\)](#), telle que*

$$\tilde{f}(t, x) = a(t)x + b(t), \quad \tilde{\sigma}(t, x) = c(t)x + d(t) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(t, x) = e(t)x + h(t),$$

les fonctions a, c, d, e et h sont déterministes et bornées. Alors la G -EDS [\(4.16\)](#) est linéaire, ce qui peut être résolu explicitement. Plus précisément, la solution est

$$\begin{aligned} X^\alpha(t) = & U(t) \left(x(\alpha) + \int_0^t (U(s))^{-1} [b(s) - \bar{\sigma}^2(e(s)h(s) + c(s)d(s))] ds \right. \\ & \left. + \int_0^t (U(s))^{-1} d(s) dB_s + \int_0^t (U(s))^{-1} h(s) d\langle B \rangle_s \right), \end{aligned}$$

où $\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}((B_1)^2)$ et

$$U(t) = \exp \left(\int_0^t a(s) ds + \int_0^t c(s) dB_s + \int_0^t (e(s) - c^2(s)) dB_s \right)$$

(pour plus de détails, voir théorème 4.1 in [\[29\]](#)). D'après le corollaire [4.3.1](#), $X^\alpha(t)$ est différentiable par rapport à α et la dérivée $Y^\alpha(t)$ est l'unique solution du G -EDS [\(4.17\)](#), qui peut s'écrire dans ce cas comme suit

$$\begin{cases} dY^\alpha(t) = a(t) Y_t^\alpha dt + c(t) Y_t^\alpha dB_t + e(t) Y_t^\alpha d\langle B \rangle_t \\ Y_0^\alpha = x'(\alpha, \cdot) \equiv x'(\alpha) \end{cases} \quad (4.19)$$

CHAPITRE 4. DIFFÉRENTIABILITÉ DES G -EDSNS PAR RAPPORT
À UN PARAMÈTRE

Il est facile de voir que la dérivée $Y^\alpha(t) = U(t)x'(\alpha)$, est la solution exacte du G -EDS linéaire (4.19).

Conclusion et perspectives :

Dans cette thèse, nous avons étudié la différentiabilité de la solution d'une EDSN par rapport à la condition initiale et aussi par rapport à paramètre dans le cadre de la théorie de la G -espérance. En plus du fait que l'espérance n'est pas linéaire, la principale difficulté pour la résolution de ces problèmes a été le fait que la condition initiale d'une G -EDSN est une fonction, ce qui nous a conduit à considérer la différentiabilité au sens de Fréchet.

Dans un premier temps, nous avons défini l'espace de Banach $\mathcal{L}_{BC}(\mathbb{R}^n)$ auquel appartient la solution de la G -EDSN satisfaite par la dérivée. Ensuite, nous avons étendu les inégalités G -BDG aux processus à valeurs opérateurs afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution de la dérivée.

Dans un second temps, nous avons démontré la différentiabilité de la solution d'une G -EDSN, dont la condition initiale dépend d'un paramètre, par rapport celui-ci.

Nous avons réussi à retrouver de manière non triviale les résultats de la différentiabilité obtenus par Lin [37] ainsi que par Bougherra et al. [9] concernant la différentiabilité de la solution d'une G -EDS.

Comme perspectives nous intéressons aux questions suivantes :

- Définir l'intégrale stochastique par rapport à un G -sous mouvement Brownien fractionnaire.
- Étudier la différentiabilité des solutions des EDSs gouvernées par un G -sous mouvement Brownien fractionnaire.
- Étudier la sensibilité des systèmes gouvernés par des G -EDSNs aux petites perturbations des conditions initiales pour comprendre la robustesse de ces systèmes et pour concevoir des stratégies de contrôle qui peuvent minimiser l'impact des incertitudes dans les conditions initiales.
- Trouver des applications potentielles de la différentiabilité des solutions des G -EDSNs par rapport aux conditions initiales, dans différents domaines de la science et de l'ingénierie.

Bibliographie

- [1] Abouagwa, M., Li, J., G -Neutral Stochastic Differential Equations With Variable Delay And non-Lipschitz Coefficients, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, **25** (2020), 1583-1606.
- [2] Adimy, M., Crauste, F., and Ruan, S., Periodic Oscillations in Leukopoiesis Models with Two Delays, *J. Theor. Biol.*, **242**, (2006), 288-299.
- [3] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D., Coherent measures of risk, *Math. Financ.*, **9**(3) : 203-228, 1999.
- [4] Boumezbeur, Z., Boutabia, H., Differentiability of neutral stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with respect the initial data. *Honam Math. J.*, **45** (2023), No. 3, pp. 433-456. <https://doi.org/10.5831/HMJ.2023.45.3.433>
- [5] Braumann, C. A., Introduction to stochastic differential equations with applications to modelling in biology and finance. John Wiley & Sons, 2019.
- [6] Baccouch, M., Temimi, H., Ben-Romdhane, M., A discontinuous Galerkin method for systems of stochastic differential equations with applications to population biology, finance, and physics, *J. Comput. Appl. Math.*, **388** (2021) : 113297.
- [7] Bai, X., Lin, Y., On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with Integral Lipschitz coefficients, arXiv :1002.1046v3 [math.PR] (2010).
- [8] Belksier, M., Boutabia, H., and Bougherra, R., Stochastic Differential Equations for Orthogonal Eigenvectors of (G, ε) -Wishart Process, *Bol. Soc. Paran. Mat. c SPM* -ISSN-2175-1188 on line, <https://doi.org/10.5269/bspm.51618>.
- [9] Bougherra, R., Boutabia, H., & Belksier, M., Differentiability of Stochastic Differential Equation Driven by d -Dimensional G Brownian Motion with Respect to the Initial Data. *Bull. Iran. Math. Soc.* 2020. <https://doi.org/10.1007/s41980-020-00490-7>.
- [10] Bell, D. R., and Mohammed, S. E. A., On the solution of stochastic ordinary differential equations via small delays, *Stoch. stoch. rep.*, **28**(4) (1989), 293-299.

-
- [11] Campbell, S. A., Edwards, R., and Driessche, P., Delayed coupling between two neural network loops, *SIAM J. Appl. Math.*, 65(1), (2004), 316-335.
- [12] Ciupe, M. S., Bivort, B. L., Bortz, D. M., and Nelson, P. W., Estimating kinetic parameters from HIV primary infection data through the eyes of three different mathematical models, *Math. Biosci.*, 200, (2006), 1-27.
- [13] Cooke, K. L., Driessche, P., and Zou, X., Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models, *J. Math. Biol.*, 39, (1999), 332-352.
- [14] Cushing, J. M., *Integro-differential equations and delay models in population dynamics*. Vol. 20. Springer Science & Business Media, (2013).
- [15] Chen, Z., and Epstein, L. G., Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time. *Econometrica*, 70(4) : 1403-1443, 2002.
- [16] Chalabi, E-H., Boutabia, H., On the existence and uniqueness of solution of stochastic differential system driven by G -Brownian motion, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 29 (2019), No. 4, pp. 477-488. <https://doi.org/10.17777/ascm2019.29.4.477>.
- [17] Coddington, E. A., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London 1955.
- [18] Cohen, S. N., Elliott, R. J., *Stochastic Calculus and Applications*. Birkhäuser New York, NY, 2015.
- [19] Denis, L., Hu, M., Peng, S., Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : application to G -Brownian motion paths. *Potential Anal.* 34(2) : 139-161, 2011.
- [20] Epstein, L.G., Ji, S., Ambiguous volatility, possibility and utility in continuous time. arXiv :1103.1652.
- [21] Faizullah, F., Memom, A.A., Rana, M.A., Hanif, M., The p -moment exponential estimates for neutral stochastic functional differential equations in the G -framework. *J. Comput. Anal. Appl.*, 26(1), 81-90 (2019).
- [22] Faizullah, F., Piao, D., Existence of solutions for G -SDEs with upper and lower solutions in the reverse order, *Int. J. Phy. Sci.*, vol 3, no. 7 (2012), 432-439.
- [23] Faizullah, F., Existence results and moment estimates for NSFDEs driven by G -Brownian motion, *J. Comput. Theor. Nanosci.*, 7(13), 4679-4686 (2016).
- [24] Fleming, Wendell., and Pierre-Louis, Lions., *Stochastic differential systems, stochastic control theory and applications : proceedings of a workshop, held at IMA, June 9-19, 1986*. Vol. 10. Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] Gao, F., Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion, *Stoch. Process. their Appl.*, vol 119, no. 10 (2009), 3356-3382.

-
- [26] Gopalsamy, K., Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, In Kluwer Academic Publishers, Volume 74 (1992).
- [27] Gloaguen, Pierre., Etienne, Marie-Pierre., and Sylvain Le Corff., Stochastic differential equation based on a multimodal potential to model movement data in ecology, *J. R. Stat. Soc., C : Appl.*, 67(3), (2018) : 599-619.
- [28] Gustave, Choquet., Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier.*, 5(1954) : 131-295.
- [29] He, X., Han, S., Tao, J., Averaging principle for SDEs of neutral type driven by G -Brownian motion, *Stoch. Dyn.*, (2019), 19(1) : 1950004. DOI : 10.1142/S0219493719500047.
- [30] Hale, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol 3 Spring-Verleg New York Inc, (1977).
- [31] Hartung, F., Krisztin, T., Walther, H.-O., and Wu, J., Functional differential equations with state-dependent delay : theory and applications, in *Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations*, volume 3, edited by A. Canada, P. Drábek and A. Fonda, Elsevier, North-Holand, 2006, 435-545.
- [32] Hartung, F., Parameter Estimation by Quasilinearization in Differential Equations with State-Dependent Delays, *Discrete Contin. Dyn. Syst. - B*, 18 :6 (2013), 1611-1631.
- [33] Kalecki, M., A Macrodynamic theory of the business cycles, *Econometrica*, 3(3), (1935), 327-344.
- [34] Kuang, Y., Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, *Math. Sci. Eng.*, tome 191, New-York : Academic Press (1993).
- [35] Lima, L. S., and Miranda, L. L. B., Price dynamics of the financial markets using the stochastic differential equation for a potential double well, *Phys. A : Stat. Mech. Appl.*, Volume 490, (2018) : 828-833.
- [36] Luo, P., Wang, F., Viability for Stochastic Differential Equations Driven by G -Brownian Motion, *J. Theor. Probab.*, (2017). DOI 10.1007/s10959-017-0791-z.
- [37] Lin, Q., Differentiability of stochastic differential equations driven by G -Brownian motion, *Sci. China Math.*, 56, 20 (2013)
- [38] Mao, X., *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Horwood Publishing Chichester, 1997.
- [39] Mao, X., Approximate solutions for a class of stochastic evolution equations with variable delays, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, **12**, 525 (1991).
- [40] Mao, X., Approximate solutions for stochastic differential equations with pathwise uniqueness, *Stoch. Anal. Appl.*, 12(3), 355-367.

-
- [41] Nelson, P. W., Murray, J. D., and Perelson, A. S., A model of HIV-1 pathogenesis that includes an intracellular delay, *Math. Biosci.*, 163(2), (2000), 201-215.
- [42] Oksendal, B., *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [43] Peng, S., *G*-Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty. arXiv :0711.2834, 2007.
- [44] Peng, S., *G*-expectation, *G*-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type, *Stoch. Anal. Appl., Abel Symp.*, Springer Berlin (2007)2,541-567.
- [45] Peng, S., Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations, arXiv : 0702358v1, 2007.
- [46] Peng, S., A new central limit theorem under sublinear expectations, arXiv : 0803.2656v1, 2008.
- [47] Peng, S., Multi-dimensional *G*-Brownian motion and related stochastic calculus under *G*-expectation, *Stochastic Process. Appl.* 118 (2008), 2223-2253.
- [48] Peng, S., Survey on normal distributions, Central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations, *Sci. China Math.*, 52(2009), 1391-1411.
- [49] Peng, S., Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty with Robust Central Limit Theorem and *G*-Brownian Motion, arXiv : 1002.4546v1, 2010.
- [50] Peng, S., Filtration consistent nonlinear expectations and evaluations of contingent claims, *Acta Math. Appl. Sin.*, 20(2) : 191-214, 2004.
- [51] Peng, S., Nonlinear expectations and nonlinear markov chains, *Chin. Ann. of Math.*, 26(02) : 159-184, 2005.
- [52] Piao, D., A note on the existence of solutions for backward stochastic differential equations under *G*-Brownian motion, *World App. Sci. J.*, (2012).
- [53] Sobczyk, K., *Stochastic differential equations : with applications to physics and engineering*. Vol. 40. Springer Science & Business Media, 2001.
- [54] Turchin, P., Taylor, A. D., Complex dynamics in ecological time series, *Ecology*, 73(1), (1992), 289-305.
- [55] Vielle, B., Chauvet, G., Delay equation analysis of human respiratory stability, *Math. Biosci.*, 152(2), (1998), 105-122.