الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY
Faculté des sciences
Département de mathématiques

جامعة باجي مختار – عنابـــة

Pour l'usage des étudiants de (1 ère Année licence Sciences de la Matière et Sciences Techniques LMD)

Recueil d'Exercices Corrigés avec Rappels de Cours en Algèbre et en Analyse

Présenté par :

Dr. Meradji Selma

Année Universitaire : 2025/2026

Table des matières

Introduction

Ce Recueil d'exercices corrigés avec rappels de cours, couvre le programme d'algèbre et d'analyse de la première année universitaire.

Le lecteur y trouvera des rappels de cours présentant les notions fondamentales enseignées, suivis d'exercices résolus à la fin de chaque chapitre. Ces exercices sont directement inspirés des travaux dirigés dispensés en présentiel et s'inscrivent dans une parfaite continuité avec ceux-ci. Ils ont été sélectionnés de manière à illustrer les concepts théoriques étudiés, à développer le raisonnement scientifique et à préparer efficacement les étudiants aux contrôles continus et aux examens.

Ce recueil s'adresse principalement aux étudiants de première année en sciences de la matière et sciences techniques, mais peut également constituer une référence utile pour toute personne souhaitant acquérir ou consolider les bases de l'algèbre et de l'analyse.

Nous espérons qu'il sera un outil efficace pour la réussite des étudiants.

CHAPITRE 1 Éléments de logique et méthodes de raisonnement

Ce chapitre commence par un rappel des définitions essentielles dont nous aurons besoin pour aborder les exercices.

1.1 Règles de la logique formelle

Définition 1.1.1 *Soit P une proposition. La négation de P est une proposition représentant son contraire, notée (non P), ou $\overline{P}$, voici sa table de vérité :*

P	$\overline{P}$
1	*0*
0	*1*

.

Les connecteurs logiques.

1) La conjonction $\wedge$:

Définition 1.1.2 *Pour deux propositions logiques P et Q, leur conjonction $P \wedge Q$ est définie comme la proposition qui est vraie précisément lorsque P et Q sont toutes les deux vraies. La table de vérité est la suivante :*

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

.

2) La disjonction $\vee$:

La disjonction de P et Q est la proposition logique notée $(P \vee Q)$ qui est vraie si au moins l'une des propositions (P ou Q) est vraie. Sa table de vérité est donnée par :

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

.

3) L'implication :

Définition 1.1.3 *L'implication de deux propositions P, Q se note $P \Rightarrow Q$ (lue "P implique Q" ou "si P, alors Q"). $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse, dans tous les autres cas, $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.*

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

.

1) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $\left(P \wedge \overline{Q}\right)$.

2)La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$.

3)La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

4) L'équivalence :

Définition 1.1.4 *On dit que (P est équivalente à Q) ou (P si et seulement si Q). Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. La table de vérité de l'équivalence est :*

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*0*
0	*0*	*1*

.

Les quantificateurs.

(1) Le quantificateur universel, noté $\forall$

La relation pour tout x tel que $P(x)$ est notée : $\forall x,\ P(x)$ et se lit pour tout x, $P(x)$.

(2) Le quantificateur existentiel, noté $\exists$

La relation il existe un x tel que $P(x)$ est notée : $\exists x,\ P(x)$.

1.2 Méthodes de raisonnement

Pour démontrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on peut utiliser les méthodes suivantes :

(1) Méthode de raisonnement direct

On suppose que P est vraie et on prouve que Q est également vraie.

(2) Méthode de raisonnement par la contraposée

Étant donné que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$, pour prouver $(P \Rightarrow Q)$ par contraposée, il suffit de montrer directement $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$: on suppose que $\overline{Q}$ est vraie et on prouve que $\overline{P}$ est vraie.

(3) Raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'une proposition R est vraie, on suppose que $\overline{R}$ est vrai et on tombe sur une contradiction (quelque chose d'absurde). Lorsque $R : P \Rightarrow Q$ est une implication par l'absurde, on suppose que $\overline{R} : P \wedge \overline{Q}$ est vraie et on tombe sur une contradicition.

(4) Contre exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de fournir ce qu'on appelle un contre-exemple, c'est-à-dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

(5) Raisonnement par recurrence

Pour démontrer $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n(x)$ est vraie, on suit les étapes suivantes :

(a) On montre que $P(n_0)$ est vraie (valeur initiale).

(b) On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n.

(c) On prouve que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$.

Alors, P est vrai pour tous $n \geq n_0$.

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1 *Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des propositions ? Dans le cas d'une proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse.*

(1) $2+3=5$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+2=4$.

(3) $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n+2=3$.

(4) *Cet exercice est difficile.*

(5) $x \in \mathbb{N}$.

Solution 1.3.1 *Avant de répondre, rappelons qu'une proposition est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer de manière objective une valeur de vérité : vrai ou faux.*

(1) *Cette expression est une proposition vraie.*

(2) *Cette expression est une proposition fausse, car pour* $n=1 \in \mathbb{N}$, *on a* $n+2=3 \neq 4$.

(3) *Cette expression est une proposition vraie, car il existe un élément* $n=1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $n+2=3$.

(4) *Cette expression n'est pas une proposition, car on ne peut pas lui attribuer une valeur de vérité.*

(5) *Cette expression n'est pas une proposition, car la nature de l'élément* x *n'étant pas précisée, on ne peut pas lui attribuer une valeur de vérité.*

Exercice 1.3.2 *Dans quels cas les propositions suivantes sont-elles vraies ?*

(1) $(P \Rightarrow Q) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)$.

(2) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

Solution 1.3.2 **(1)** $(P \Rightarrow Q) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)$,

P	Q	$\overline{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)$
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
0	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*

(2) $\underbrace{((P \vee Q) \Rightarrow R)}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)}_{(2)},$

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	(1)	(2)	(1) $\Leftrightarrow$ (2)
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*
0	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Exercice 1.3.3 *Donnez la négation des énoncés suivants :*

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n.$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x + y = 0) \wedge (y \neq -x)\,.$

3) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon)\,.$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x)\,.$

Solution 1.3.3 *Avant de déterminer la négation, il convient de rappeler les règles de négation suivantes :*

Soit $P(x)$ une proposition.

- La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est : $\exists x \in E, \overline{P}(x)\,.$
- La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est : $\forall x \in E, \overline{P}(x)\,.$

1) $P : \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n.$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n.$

2) $P : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x + y = 0) \wedge (y \neq -x)\,.$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x + y \neq 0) \vee (y = -x)\,.$

3) $P : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon)\,.$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, (|x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \epsilon)\,.$

4) $P : \forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x)\,.$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}, (x > 0 \wedge \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \neq x)\,.$

Exercice 1.3.4 *Donner la négation des propositions suivantes :*

1) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - L| < \epsilon.$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x.$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 \text{ est pair}).$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1 \Rightarrow x^2 > 1).$

Solution 1.3.4 **1)** $P : \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - L| < \epsilon.$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |a_n - L| \geq \epsilon.$

2) $P : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x.$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq x.$

3) $P : \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 \text{ est pair}).$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists n \in \mathbb{N}, (n \text{ est pair et } n^2 \text{ n'est pas pair}).$

4) $P : \forall x \in \mathbb{R}, (x > 1 \Rightarrow x^2 > 1).$

$\Leftrightarrow \overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}, (x > 1 \text{ et } x^2 \leq 1).$

Exercice 1.3.5 *Démontrer par l'absurde :*

(1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, *(n^2 est pair)$\Rightarrow$(n est pair).*

Solution 1.3.5 **(1)** *Preuve par l'absurde : Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$, premiers entre eux ($\gcd(a, b) = 1$), tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Alors $\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow 2b^2 = a^2$, donc 2 divise a^2, ce qui implique que a est pair. Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$. En substituant, on obtient $2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$, donc b est également pair. Mais cela contredit l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux. Par conséquent, notre supposition initiale est fausse, ce qui signifie que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

(2) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'absurde, supposons que n^2 soit pair et n soit impair. Alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$, donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, où $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que n^2 est impair, ce qui contredit l'hypothèse que n^2 est pair. Par conséquent, notre hypothèse initiale est fausse, ce qui signifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, (n^2 est pair)$\Rightarrow$(n est pair) est vrai.*

Exercice 1.3.6 *Utiliser la preuve par l'absurde pour démontrer :*

(1) *Si un entier n est impair, alors n^3 est également impair.*

(2) *Si n est un entier et n^2 est divisible par 4, alors n est divisible par 2.*

Solution 1.3.6 **(1)** *Supposons : n est impair, mais n^3 est pair. Puisque n est impair, il peut s'écrire sous la forme : $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Calculons n^3 :*

$$n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1,$$

Mettons 2 en facteur dans les trois premiers termes :

$$n^3 = 2\left(4k^3 + 6k^2 + 3k\right) + 1,$$

ce qui est de la forme $2m+1$, donc c'est impair. Ainsi, n^3 ne peut pas être pair. Cela contredit notre hypothèse que n^3 est pair. Par conséquent, l'hypothèse est fausse, et nous concluons :

Si n est impair, alors n^3 est également impair.

(2) *Nous voulons montrer :*

$$4 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n.$$

Supposons le contraire n n'est pas divisible par 2, ce qui signifie que n est impair, donc n peut s'écrire :

$$n = 2k+1 \text{ pour un certain entier } k,$$

calculons n^2 :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4\left(k^2 + k\right) + 1,$$

donc n^2 a la forme

$$n^2 = 4m + 1,$$

n^2 laisse un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 4, par conséquent n^2 n'est pas divisible par 4, mais cela contredit notre hypothèse que :

$$4 \mid n^2.$$

Ainsi, notre hypothèse que n est impair doit être fausse, nous concluons donc que si n^2 est divisible par 4, alors n doit être divisible par 2.

Exercice 1.3.7 *Démontrer par contraposée les propositions suivantes :*

(1) *Pour tout entier* n*, si* (n^2-1) *n'est pas divisible par* 8*, alors* n *est pair.*

(2) $(\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$.

Solution 1.3.7 **(1)** *Montrons que sa contraposée : (n est impair)*$\Rightarrow$ (n^2-1) *est divisible par* 8 *est vraie. Soit* n *un nombre impair, alors* $\exists k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n = 2k+1$ *et donc* $n^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2-1 = 4k^2+4k$*. Maintenant, nous avons deux cas :* k *est pair ou* k *est impair.*

- *Si nous supposons que* k *est pair, alors il existe un entier* k' *tel que* $k = 2k'$*, donc*

$$\begin{aligned} n^2-1 &= 4k^2+4k = 4\,(2k')^2 + 4\,(2k') \\ &= 16k'^2 + 8k' = 8\left(2k'^2 + k'\right) = 8p. \end{aligned}$$

- *Si* k *est impair, alors il existe un entier* k'' *tel que* $k = 2k''+1$*, nous avons :*

$$\begin{aligned} n^2-1 &= 4k^2+4k = 4\,(2k''+1)^2 + 4\,(2k''+1) \\ &= 4\left[(2k'')^2 + 2\times(2k'')\times 1 + 1^2\right] + 8k'' + 4 \\ &= 16k''^2 + 16k'' + 4 + 8k'' + 4 \\ &= 16k''^2 + 24k'' + 8 = 8\left(2k''^2 + 3k'' + 1\right) = 8p'. \end{aligned}$$

Par conséquent, (n^2-1) *est divisible par* 8*.*

(2) *Montrons que sa contraposée :* $(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, |x| > \epsilon)$ *est vraie. Soit* $x \neq 0$*, il existe* $\epsilon = \frac{|x|}{2} > 0$ *tel que* $|x| > \frac{|x|}{2}$ *car* $x \neq 0$*, d'où le résultat.*

Exercice 1.3.8 *Démontrer par contraposée les propositions suivantes :*

1) *Si l'entier* n^2 *n'est pas divisible par* 4*, alors* n *est impair.*

2) *Si* $3n+5$ *est impair, alors* n *est pair.*

Solution 1.3.8 **1)** *La contraposée de " si l'entier* n^2 *n'est pas divisible par* 4*, alors* n *est impair " est " Si* n *n'est pas impair (c'est-à-dire si* n *est pair), alors* n^2 *est divisible par* 4*". Supposons que* n *est pair. Alors* $n = 2k$ *pour un certain entier* k*. Calculons* n^2 *:*

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

ce qui est clairement divisible par 4. Ainsi, par contraposée, si l'entier n^2 n'est pas divisible par 4, alors n est impair.

2) *La contraposée de " si $3n+5$ est impair, alors n est pair" est " si n est impair, alors $3n+5$ est pair". Supposons que n est impair,*

$$n = 2k+1 \text{ pour un certain entier } k.$$

Calculons

$$\begin{aligned} 3n+5 &= 3(2k+1)+5 = 6k+3+5 \\ &= 6k+8 = 2(3k+4), \end{aligned}$$

donc c'est pair. Ceci prouve la contraposée. Comme la contraposée est vraie, l'énoncé original est vrai : " si $3n+5$ est impair, alors n est pair".

Exercice 1.3.9 *Démontrer par récurrence que :*

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1$ *est un multiple de* 9.

Solution 1.3.9 **(1)** *Montrons que* $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- *Pour* $(n = 1)$ *: Nous avons* $1^3 = \frac{1^2(2)^2}{4} = 1$, *donc* $P(1)$ *est vraie.*
- *Supposons que* $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *est vraie.*
- *Montrons que* $1^3 + 2^3 + ... + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ *est vraie. En utilisant* $P(n)$ *nous obtenons :*

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + ... + (n+1)^3 &= 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ *est vraie, donc* $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(2) *Montrons que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $4^n + 6n - 1$ *est un multiple de* 9, *c'est-à-dire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *il existe un entier* k *tel que* $4^n + 6n - 1 = 9k$.

- *Pour* $n = 1$, *nous avons : Il existe un* $k = 1 \in \mathbb{Z}$ *tel que* $4^1 + 6(1) - 1 = 9 = 9(1)$. *Donc,* $P(1)$ *est vraie.*
- *Nous supposons que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $4^n + 6n - 1 = 9k$ *est vraie.*
- *Nous montrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *il existe un entier* $k' \in \mathbb{Z}$ *tel que* $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'$ *est vraie.*

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 &= 4.4^n + 6n + 6 - 1 = (9-5)\,4^n + 6n + 5 \\ &= 9.4^n - 5.4^n - 5(6n) + 36n + 5 \\ &= -5(4^n + 6n - 1) + 9.4^n + 36n, \text{ en utilisant la propriété } P(n) \\ &= -5(9k) + 9.4^n + 9.(4n) = 9(-5k + 4^n + 4n) \\ &\Rightarrow \exists k' = -5k + 4^n + 4n \in \mathbb{Z}, 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'. \end{aligned}$$

Exercice 1.3.10 *Prouver par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $7^n - 2^n$ *est divisible par* 5.

Solution 1.3.10 • *Pour* $n = 1$, *nous avons :*

$$7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5,$$

5 *est divisible par* 5.

- *Supposons pour* $n = k$ *:*

$$7^k - 2^k = 5m \text{ pour un certain } m \in \mathbb{Z}.$$

- *Considérons maintenant* $n = k + 1$:

$$7^{k+1} - 2^{k+1} = 7.7^k - 2.2^k.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$7^k = 5m + 2^k.$$

On substitue :

$$\begin{aligned} 7.7^k - 2.2^k &= 7.\left(5m + 2^k\right) - 2.2^k \\ &= 35m + 7.2^k - 2.2^k \\ &= 35m + 5.2^k = 5\left(7m + 2^k\right). \end{aligned}$$

Ceci est divisible par 5. *Par récurrence, la propriété est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

CHAPITRE 2

Théorie des ensembles

2.1 La notion d'ensemble et ses propriétés

- **Ensemble**

Définition 2.1.1 *Un ensemble est une collection d'objets mathématiques (éléments) rassemblés selon une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés suffisent à déterminer si un objet appartient ou n'appartient pas à un ensemble.*

- **Inclusion**

Définition 2.1.2 *On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B, et on le note $A \subset B$,*

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)).$$

La négation :

$$A \text{ n'est pas inclus dans } B \Leftrightarrow (\exists x, (x \in A \wedge x \notin B)).$$

- **Egalité de deux ensembles**

Définition 2.1.3 *Soient A et B deux ensembles tels que $A = B$, cela signifie que :*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ et } (B \subset A).$$

- **Différence de deux ensembles**

Définition 2.1.4 *La différence de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B, notée $A - B$.*

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Si $A \subset B$ alors $B - A$ est aussi appelé le complément de A dans B, noté C_B^A, A^c ou A'.

$$C_B^A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\}.$$

• **Les opérations sur les ensembles**

Définition 2.1.5 *(L'union) L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B, notée $A \cup B$.*

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

La négation :

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B).$$

Définition 2.1.6 *(L'intersection) L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B, notée $A \cap B$.*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

La négation :

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B).$$

Définition 2.1.7 *(Différence symétrique) La différence symétrique de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A - B$ ou à $B - A$, notée $A \triangle B$.*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \left(A \cap C_E^B\right) \cup \left(B \cap C_E^A\right) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}.$$

2.2 Applications et relations d'équivalences

• **Image directe et image réciproque**

$*$ L'image directe :

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction et soit $A \subset E$. L'image de A par f est un sous-ensemble de F, noté $f(A)$, et est définie par :

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\},$$

on notera que $f(A) \subset F$, et que A et $f(A)$ sont tous deux des ensembles.

$*$ L'image réciproque :

Soit $f : E \to F$ une fonction et soit $B \subset F$. L'image réciproque (ou préimage) de B par f est le sous-ensemble de E, noté $f^{-1}(B)$, défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\},$$

on notera que $f^{-1}(B) \subset E$, et que B et $f^{-1}(B)$ sont tous deux des ensembles.

$*$ La surjection

Définition 2.2.1 *L'image $f(E)$ de E par f est un sous-ensemble de F. Si chaque élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E, alors f est dite surjective (ou une surjection) de E vers F. Dans ce cas, on a : $f(E) = F$*

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow (\forall y \in F), (\exists x \in E) \text{ tel que } f(x) = y.$$

$*$ L'injection

Définition 2.2.2 *Lorsque deux éléments distincts de E correspondent, par f, à deux images distinctes dans F, la fonction f est dite injective. On obtient alors les définitions équivalentes suivantes :*

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

ou, de manière équivalente :

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

$*$ La bijection

Définition 2.2.3 *f est une fonction bijective si elle est à la fois injective et surjective, ce qui signifie que tout élément de F est l'image d'exactement un élément de E. f est bijective si et seulement si :*

$$(\forall y \in F), (\exists! x \in E), (f(x) = y).$$

($\exists!$ signifie "il existe un unique").

Remarque 2.2.1 *Lorsqu'une fonction f est bijective, cela signifie que la fonction réciproque f^{-1} existe. la fonction f^{-1} est également bijective de F vers E et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

2.3 Relations binaires dans un ensemble.

Définition 2.3.1 *Soit $x \in E$, $y \in F$. Une relation $\mathcal{R}$ entre x et y est une correspondance entre x et y. Le couple (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, noté $x\mathcal{R}y$. Si $E = F$, la relation est dite binaire.*

- **Propriétés des relations binaires**

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E, et soient $x, y, z \in E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation

(1) Réflexive : $(\forall x \in E), (x\mathcal{R}x)$.

(2) Symétrique : $(\forall x \in E), (\forall y \in E), (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$.

(3) Antisymétrique : $(\forall x \in E), (\forall y \in E), ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)) \Rightarrow (x = y)$.

(4) Transitive : $(\forall x, y, z \in E), ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.

- **Classe d'équivalence**

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation $\mathcal{R}$ avec x, notée C_x, où :

$$\overline{x} = C_x = \dot{x} = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}.$$

Définition 2.3.2 *L'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E est appelé l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, noté $E_{/\mathcal{R}}$,*

$$E_{/\mathcal{R}} = \{\dot{x} / x \in E\}.$$

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 *Considérons les ensembles suivants :*

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{\{a, b\}, c\}$, $C = \{a, b, c\}$, $D = \{\{a, b, c\}\}$, $E = \{c, a, b\}$, $F = \{\{a\}, \{b\}, c\}$.

(1) *Quelles relations d'égalité ou d'inclusion existent entre ces ensembles ?*

(2) *Déterminer : A/B, $B \cup F$ et $D \cap E$.*

(3) *Si l'ensemble universel est $U = \{a, b, c, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, quel est le complémentaire de A dans U ?*

Solution 2.4.1 **(1)** *Relations :*

* *Égalité :* $A = C = E$ *(l'ordre des éléments n'a pas d'importance).*

* *Inclusion* $(\subset)$ *: Aucune inclusion stricte non triviale entre ces ensembles (en dehors des inclusions réflexives* $A \subseteq A, etc.$*).*

* *Non-inclusion :* A *n'est pas inclus dans* B *car* $a \in A$ *mais* $a \notin B$*.* D *est un ensemble contenant un seul élément (qui est lui-même un ensemble), donc il n'est pas un sous-ensemble des autres d'une manière simple.*

(2) *Opérations :*

* $A/B = \{a, b\}$ *(L'élément* c *est commun, mais* a *et* b *en tant qu'éléments individuels ne sont pas dans* B*).*

* $B \cup F = \{\{a, b\}, c, \{a\}, \{b\}\}$.

* $D \cap E = \emptyset$ *(Ils n'ont aucun élément en commun,* D *contient un ensemble,* E *contient des éléments simples).*

(3) *Complémentaire :*

$A^c = U/A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$*. Il contient tous les éléments de* U *qui ne sont pas les éléments simples* a*,* b *ou* c*.*

Exercice 2.4.2 *On considère les ensembles suivants :*

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{\{2, 4\}, 6\}$, $C = \{\{2, 4, 6\}\}$, $D = \{2, 4, 6, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$, $E = \{6, 2, 4\}$, $F = \{\{2\}, \{4\}, 6\}$, $G = \{\{2, 4\}, \{6\}, 6\}$, $H = \{6, \{2\}, \{4\}\}$.

(1) *Quelles sont les relations d'égalité et d'inclusion entre ces ensembles ?*

(2) *Calculer :* A/B*,* $G \cup H$ *et* E/F*.*

(3) *Déterminer le complémentaire de* A *dans* D*.*

Solution 2.4.2 **(1)** *Relations d'égalité et d'inclusion*

* *Égalité :* $A = E$ *(les ensembles ont exactement les mêmes éléments, l'ordre n'a pas d'importance),* $F = H$ *(mêmes éléments :* $\{2\}, \{4\}, 6$*).*

* *Inclusions :* $A \subset D$*, car* $2, 4, 6 \in D$*,* $E \subset D$*, puisque* $E = A$*,* $B \subset D$ *(tous les éléments de* B *sont dans* D *:* $\{2, 4\} \in D$ *et* $6 \in D$*),* $B \subset G$ *(tous les éléments de* B *sont dans* G *:* $\{2, 4\} \in G$ *et* $6 \in G$*),* $F \subset D$ *(tous les éléments de* F *sont dans* D*),* $H \subset D$ *(tous les éléments de* H *sont dans* D*).*

(2) ** A/B :*

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{\{2, 4\}, 6\}.$$

Seuls les éléments de A qui ne sont pas dans B : $2 \notin B$ et $4 \notin B$ (car B contient l'ensemble $\{2, 4\}$ mais pas 2 ni 4 individuellement), donc

$$A/B = \{2, 4\}.$$

** $G \cup H$:*

$$G = \{\{2, 4\}, \{6\}, 6\}, H = \{6, \{2\}, \{4\}\}.$$

Union : tous les éléments distincts de G et H, donc

$$G \cup H = \{\{2, 4\}, \{6\}, 6, \{2\}, \{4\}\}.$$

** E/F :*

$$E = \{6, 2, 4\}, F = \{\{2\}, \{4\}, 6\}.$$

$6 \in F$, donc exclus, $2 \notin F$ et $4 \notin F$, donc

$$E/F = \{2, 4\}.$$

(3) *Complémentaire de A dans D : Le complémentaire de A dans D est D/A.*

$$D = \{2, 4, 6, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}, A = \{2, 4, 6\},$$

donc

$$D/A = \{\{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}.$$

Exercice 2.4.3 *Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.*

a) *Démontrer que :*

(1) $(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c$.

(2) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

(3) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$.

b) *Simplifier :*

(1) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \overline{A})}$.

(2) $\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(C\cap\overline{A})}$.

Solution 2.4.3 *Avant d'entamer la résolution, il est utile de rappeler que :*

Pour tous ensembles A, B et C on a :

▷ *Commutativité :*

$$\begin{aligned} A\cap B &= B\cap A, \\ A\cup B &= B\cup A. \end{aligned}$$

▷ *Associativité :*

$$\begin{aligned} A\cap(B\cap C) &= (A\cap B)\cap C, \\ A\cup(B\cup C) &= (A\cup B)\cup C. \end{aligned}$$

▷ *Distributivité :*

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C), \\ A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C). \end{aligned}$$

▷ *Idempotence :*

$$A\cup A=A,\ A\cap A=A.$$

▷ *Lois de de Morgan :*

$$\begin{aligned} (A\cup B)^c &= A^c\cap B^c, \\ (A\cap B)^c &= A^c\cup B^c. \end{aligned}$$

a) (1)

$$(A\cap B)\cup B^c=A\cup B^c.$$

Soit

$$\begin{aligned} x &\in (A\cap B)\cup B^c \Leftrightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in B^c, \\ x &\in (A\cap B)\cup B^c \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\notin B) \\ &\Leftrightarrow (x\in A\vee x\notin B)\wedge(x\in B\vee x\notin B) \\ &\Leftrightarrow x\in(A\cup B^c)\wedge x\in(B\cup B^c) \\ &\Leftrightarrow x\in(A\cup B^c)\cap E \\ &\Leftrightarrow x\in A\cup B^c. \end{aligned}$$

Puisque $E = B \cup B^c$ *et que* $A \cup B^c$ *est un sous-ensemble de* E.

(2)

$$(A - B) - C = A - (B \cup C).$$

Soit

$$x \in (A - B) - C,$$

on a :

$$\begin{aligned} x &\in (A - B) - C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B^c \cap C^c) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \;\; (\textit{Lois Morgan}) \\ &\Leftrightarrow x \in A - (B \cup C). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= (A - B) \cap (A - C). \\ x &\in A - (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

b) (1)

$$\overline{(A \cup B)} \cap \overline{\left(C \cup \overline{A}\right)}.$$

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} \cap \overline{\left(C \cup \overline{A}\right)} &= \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{C} \cap A\right) \\ &= \left(\overline{A} \cap A\right) \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \\ &= \emptyset \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = \emptyset. \end{aligned}$$

(2)

$$\left(\overline{A \cap B}\right) \cup \left(\overline{C \cap \overline{A}}\right).$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{A \cap B}\right) \cup \left(\overline{C \cap \overline{A}}\right) &= \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cup \left(\overline{C} \cup A\right) \\ &= \left(\overline{A} \cup A\right) \cup \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) \\ &= E \cup \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) = E. \end{aligned}$$

Exercice 2.4.4 *Soient* $E=[0,1]$, $F=[-1,1]$ *et* $G=[0,2]$ *trois intervalles de* $\mathbb{R}$.

On considère la fonction f *de* E *dans* G *définie par :*

$$f(x)=2-x,$$

et la fonction g *de* F *dans* G *définie par :*

$$g(x)=x^2+1.$$

(1) *Déterminer :* $f\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$, $f^{-1}(\{0\})$, $g([-1,1])$, $g^{-1}([0,2])$.

(2) *La fonction* f *est-elle bijective ? Justifier.*

(3) *La fonction* g *est-elle bijective ? Justifier.*

Solution 2.4.4 **(1)** •

$$\begin{aligned} f\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) &= \left\{f(x)\in[0,2]\,/x=\frac{1}{2}\right\}, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2}\in[0,2],\ \text{alors} \end{aligned}$$

$$f\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

•

$$f^{-1}(\{0\})=\{x\in[-1,1]\,/f(x)=0\},$$

on a :

$$f(x)=2-x=0\Rightarrow x=2\notin[-1,1],$$

donc :

$$f^{-1}(\{0\})=\emptyset.$$

•

$$g([-1,1])=\{g(x)\in[0,2]\,/x\in[-1,1]\},$$

on a :

$$x\in[-1,0]\cup]0,1].$$

$$\begin{aligned} x &\in [-1,0]\Rightarrow -1\leq x\leq 0 \\ &\Rightarrow 0\leq x^2\leq 1 \\ &\Rightarrow 1\leq x^2+1\leq 2 \\ &\Rightarrow g(x)\in[1,2]\subset[0,2], \end{aligned}$$

d'où, $g([-1,0]) = [1,2]$.

$$\begin{aligned} x &\in \left]0,1\right] \Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 < x+1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in \left]1,2\right] \subset [0,2], \end{aligned}$$

par conséquent $g(\left]0,1\right]) = \left]1,2\right]$, $g([-1,1]) = [1,2]$.

•

$$g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1] / g(x) \in [0,2]\},$$

on a

$$\begin{aligned} g(x) &\in [0,2] \Rightarrow 0 \leq x^2+1 \leq 2 \\ &\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow \left(-1 \leq x^2 \leq 0\right) \vee \left(0 \leq x^2 \leq 1\right), \end{aligned}$$

L'inégalité $-1 \leq x^2 \leq 0$ *n'a aucune solution*

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1,$$

donc

$$g^{-1}([0,2]) = \emptyset \cup [-1,1] = [-1,1].$$

(2) *Puisque* $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, *c'est-à-dire que l'élément* $0 \in [0,2]$ *n'a pas d'antécédent par* f *dans* $[-1,1]$, *alors* f *n'est pas surjective et, par conséquent, n'est pas bijective.*

(3) *La fonction* g *est paire, donc* $g(-1) = g(1)$, *mais* $-1 \neq 1$, *donc* g *n'est pas injective. Par conséquent,* g *ne peut pas être bijective. De plus, nous remarquons que* $g([-1,1]) = [1,2] \neq [0,2]$, *donc* g *n'est pas surjective. Ainsi, elle n'est pas non plus bijective.*

Exercice 2.4.5 *On définit la relation* $\mathcal{R}$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \Leftrightarrow x+y = x'+y'.$$

(1) *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence du couple* $(0,0)$.

Solution 2.4.5 *Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

(1) ** $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y)\,\mathcal{R}\,(x,y)$. Or,*

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x,y) \Leftrightarrow x+y = x+y,$$

ce qui est toujours vrai. Donc, $\mathcal{R}$ est réflexive.

** $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si*

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \Rightarrow (x',y')\,\mathcal{R}\,(x,y),$$

en effet,

$$\begin{aligned} (x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') &\Rightarrow x+y = x'+y' \\ &\Rightarrow x'+y' = x+y \\ &\Rightarrow (x',y')\,\mathcal{R}\,(x,y), \end{aligned}$$

donc, $\mathcal{R}$ est symétrique.

** $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si*

$$\begin{aligned} \forall (x,y), (x',y'), \left(x'',y''\right) &\in \mathbb{R}^2, (x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \wedge (x',y')\,\mathcal{R}\left(x'',y''\right) \\ &\Rightarrow (x,y)\,\mathcal{R}\left(x'',y''\right), \end{aligned}$$

en effet,

$$\begin{aligned} (x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \wedge (x',y')\,\mathcal{R}\left(x'',y''\right) &\Rightarrow \begin{cases} x+y = x'+y' \\ \wedge \\ x'+y' = x''+y'' \end{cases} \\ &\Rightarrow x+y = x''+y'' \\ &\Rightarrow (x,y)\,\mathcal{R}\left(x'',y''\right), \end{aligned}$$

ainsi, $\mathcal{R}$ est transitive. On conclut donc que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) *Cherchons la classe d'équivalence du couple $(0,0)$.*

$$\begin{aligned} C((0,0)) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y)\,\mathcal{R}\,(0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\right\} \\ &= \left\{(x,-x) / x \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 2.4.6 *On définit la relation T sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$(x,y)\,T\,(x',y') \Leftrightarrow xy = x'y'.$$

(1) *Montrer que T est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence du couple $(1,1)$.*

Solution 2.4.6 **(1)** *Montrons que T est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.*

* *Réflexivité : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $xy = xy$, donc $(x,y)\,T\,(x,y)$.*

* *Symétrie : Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\,T\,(x',y')$, c'est-à-dire $xy = x'y'$. Alors $x'y' = xy$, donc $(x',y')\,T\,(x,y)$.*

* *Transitivité : Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\,T\,(x',y')$ et $(x',y')\,T\,(x'',y'')$, c'est-à-dire $xy = x'y'$ et $x'y' = x''y''$. Alors $xy = x''y''$, donc $(x,y)\,T\,(x'',y'')$. Ainsi, T est réflexive, symétrique et transitive, donc une relation d'équivalence.*

(2) *Classe d'équivalence de $(1,1)$: Par définition,*

$$C((1,1)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \,(x,y)\,T\,(1,1)\right\}.$$

Or

$$(x,y)\,T\,(1,1) \Leftrightarrow xy = 1 \times 1 = 1.$$

Donc

$$C((1,1)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\right\}.$$

Cet ensemble correspond à l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$ dans le plan, excluant les points où $x = 0$ ou $y = 0$ (car $0 \times y = 0 \neq 1$). On peut aussi l'écrire :

$$C((1,1)) = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) / x \in \mathbb{R}^*\right\}.$$

Exercice 2.4.7 *On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation T par :*

$$(x,y)\,T\,(x',y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y.$$

(1) *Vérifier que T est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?*

(2) *Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, décrire l'ensemble*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \,(x,y)\,T\,(a,b)\right\}.$$

Solution 2.4.7 *La relation T est une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

(1) ** T est réflexive si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\,T\,(x,y)$. Or,*

$$(x,y)\,T\,(x,y) \Leftrightarrow |x-x| \leq y-y \Rightarrow 0 \leq 0,$$

donc, T est réflexive.

** T est antisymétrique si et seulement si*

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, ((x,y)\,T\,(x',y')) \cap ((x',y')\,T\,(x,y)) \Rightarrow (x,y) = (x',y').$$

$$\begin{aligned}
(x,y)\,T\,(x',y') \cap (x',y')\,T\,(x,y) &\Rightarrow \begin{cases} |x-x'| \leq y'-y \\ \quad and \\ |x'-x| \leq y-y' \end{cases} \\
&\Rightarrow 2\,|x-x'| \leq 0 \Rightarrow |x-x'| = 0 \\
&\Rightarrow x = x' \Rightarrow y'-y \geq 0 \wedge y-y' \geq 0 \\
&\Rightarrow y'-y \geq 0 \wedge y'-y \leq 0 \\
&\Rightarrow y'-y = 0 \Rightarrow y = y',
\end{aligned}$$

ainsi, $(x,y) = (x',y')$, donc T est antisymétrique.

** T est transitive si et seulement si*

$$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2, ((x,y)\,T\,(x',y')) \wedge ((x',y')\,T\,(x'',y'')) \Rightarrow (x,y)\,T\left(x'',y''\right).$$

$$\begin{aligned}
(x,y)\,T\,(x',y') \wedge (x',y')\,T\,(x'',y'') &\Rightarrow \begin{cases} |x-x'| \leq y'-y \\ \quad and \\ |x'-x''| \leq y''-y' \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} -y'+y \leq x-x' \leq y'-y \\ \quad and \\ -y''+y' \leq x'-x'' \leq y''-y' \end{cases} \\
&\Rightarrow -y''+y \leq x-x'' \leq y''-y \\
&\Rightarrow |x-x''| \leq y''-y \\
&\Rightarrow (x,y)\,T\,(x'',y''),
\end{aligned}$$

par conséquent T est transitive. On conclut que T est une relation d'ordre.

- *Il convient de rappeler qu'une relation d'ordre sur un ensemble E est appelée un ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables :* $\forall x, y \in E$, *on a* $x\mathcal{R}y$ *ou* $y\mathcal{R}x$.
- *Une relation d'ordre est appelée un ordre partiel si elle n'est pas un ordre total.*

Dans le cas présent, cet ordre n'est pas total, car il existe par exemple $(x, y) = (2, 3)$ *et* $(x', y') = (4, 3)$ *tels que :*

$$(x, y)\, T\, (x', y') \Rightarrow |2-4| \leq 0,$$

ce qui est faux, et

$$(x', y')\, T\, (x, y) \Rightarrow |4-2| \leq 0,$$

ce qui est également faux.

(2) *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,. *Déterminons l'ensemble*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, (x, y)\, T\, (a, b)\right\}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
(x, y)\, T\, (a, b) &\Leftrightarrow |x-a| \leq b-y \\
&\Leftrightarrow (x-a)^2 - (y-b)^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(x-a)+(y-b)]\,[(x-a)-(y-b)] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(x-a+y-b) \geq 0 \wedge (x-a)-(y-b) < 0] \\
&\quad\ \vee [(x-a+y-b) < 0 \wedge (x-a)-(y-b) \geq 0]\,.
\end{aligned}$$

Posons :

- D_{p_1} *le demi-plan fermé d'équation* $(x-y-a+b) \geq 0$.
- D_{p_2} *le demi-plan ouvert d'équation* $(x+y-a-b) < 0$.
- D_{p_3} *le demi-plan ouvert d'équation* $(x-y-a+b) < 0$.
- D_{p_4} *le demi-plan fermé d'équation* $(x+y-a-b) \geq 0$

Alors :

$$(a, b) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, (x, y)\, T\, (a, b)\right\} = (D_{p_1} \cap D_{p_2}) \cup (D_{p_3} \cap D_{p_4})\,.$$

Exercice 2.4.8 *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la relation* $\aleph$ *par :*

$$(x, y)\, \aleph\, (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

(1) *Vérifier que* $\aleph$ *est une relation d'ordre sur* $\mathbb{R}^2$. *Cet ordre est-il total ?*

(2) *Pour* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *décrire l'ensemble*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, (x,y) \aleph (a,b)\right\}.$$

Solution 2.4.8 **(1)** *Vérifions que* $\aleph$ *est une relation d'ordre sur* $\mathbb{R}^2$ *:*

* *Réflexivité : Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $x \leq x$ *et* $y \leq y$, *donc* $(x,y) \aleph (x,y)$.

* *Antisymétrie : Soient* $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $(x,y) \aleph (x',y')$ *et* $(x',y') \aleph (x,y)$. *Alors*

$$x \leq x', y \leq y' \text{ et } x' \leq x, y' \leq y.$$

Donc

$$x = x' \text{ et } y = y',$$

d'où

$$(x,y) = (x',y').$$

* *Transitivité : Soient* $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $(x,y) \aleph (x',y')$ *et* $(x',y') \aleph (x'',y'')$. *Alors*

$$x \leq x', y \leq y' \text{ et } x' \leq x'', y' \leq y''.$$

Par transitivité de $\leq$ *sur* $\mathbb{R}$, *on obtient*

$$x \leq x'' \text{ et } y \leq y'',$$

donc

$$(x,y) \aleph (x'',y'').$$

Ainsi, $\aleph$ *est bien une relation d'ordre.*

L'ordre est-il total ? Non, cet ordre n'est pas total. Pour qu'il le soit, il faudrait que pour tout couple $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, *on ait* $(x,y) \aleph (x',y')$ *ou* $(x',y') \aleph (x,y)$. *Or, prenons par exemple* $(1,2)$ *et* $(2,1)$ *:*

- *On n'a pas* $(1,2) \aleph (2,1)$ *car* $1 \leq 2$ *est vrai mais* $2 \leq 1$ *est faux.*
- *On n'a pas* $(2,1) \aleph (1,2)$ *car* $2 \leq 1$ *est faux. Ces deux éléments ne sont pas comparables, donc l'ordre n'est pas total.*

(2) *Pour* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *l'ensemble*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, (x,y) \aleph (a,b)\right\}$$

est défini par les conditions $x \leq a$ *et* $y \leq b$. *Géométriquement, c'est l'ensemble des points situés « en dessous et à gauche » de* (a,b), *bords inclus. On peut l'écrire comme le produit cartésien :*

$$]-\infty, a] \times]-\infty, b] \, .$$

Exercice 2.4.9 *On définit sur* $\mathbb{N}^*$ *la relation suivante :*

$$\forall \, (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, n \perp m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km.$$

1) *Montrer que la relation* $\perp$ *est un ordre partiel sur* $\mathbb{N}^*$.

2) *Dans la suite, on suppose que* $\mathbb{N}^*$ *est ordonné par la relation* $\perp$.

a) $\mathbb{N}^*$ *admet-il un maximum ? Un minimum ?*

b) *L'ensemble* $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *admet-il : un maximum ? un minimum ? une borne supérieure (supremum) ? une borne inférieure (infimum) ?*

Solution 2.4.9 *On définit sur* $\mathbb{N}^*$ *la relation suivante :*

$$\forall \, (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, n \perp m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km.$$

Cette relation signifie que m *est un diviseur de* n.

1) *Montrons que la relation* $\perp$ *est une relation d'ordre partiel sur* $\mathbb{N}^*$.

▷ *La réflexivité : Pour montrer la réflexivité il suffit de prendre* $k = 1$. *Alors, on a* $n \perp n$.

▷ *On dit que* $\perp$ *est une relation antisymétrie si et seulement si :*

$$\forall \, (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \text{ si } n \perp m \text{ et } m \perp n \Rightarrow n = m.$$

Alors, supposont que $n \perp m$ *et* $m \perp n \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{il existe un } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km \\ \text{il existe un } k' \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m = k'n \end{cases},$$

ainsi $n = km = k(k'n)$, *ce implique* $n = kk'n$, *d'où* $kk' = 1$ *et comme* k *et* $k' \in \mathbb{N}^*$, *on déduit que* $k = k' = 1$. *D'où* $n = m$.

▷ *La transitivité : Soit* n, m *et* l *dans* $\mathbb{N}^*$. *Si* $n \perp m$ *et* $m \perp l$, *alors :*

$$\begin{cases} \text{il existe un } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km \\ \text{il existe un } k' \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m = k'l \end{cases},$$

ce qui implique $n = km = kk'l$, *ainsi il existe un* $k'' = kk' \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = k''l \Rightarrow n \perp l$. *Par conséquent, la relation est transitive. On en déduit que cette relation est une relation d'ordre, mais partiel, car il existe des couples* (x, y) *qui ne sont pas en relation, par exemple* $(4, 3)$ $(5, 7)$.

2) a) * *On dit que l'ensemble* $\mathbb{N}^*$ *possède un majorant* N *pour la relation* $\perp$ *si*

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}^*, \text{ on a } n \perp N \Leftrightarrow \\ \exists k &\in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = kN, \end{aligned}$$

donc, il suffit de prendre $N = 1$, *car pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *il existe toujours un* $k = n$ *tel que* $n = n.1$.

* *On dit que l'ensemble* $\mathbb{N}^*$ *possède un minorant* m *pour la relation* $\perp$ *si*

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}^*, \text{ on a } m \perp n \Leftrightarrow \\ \exists k &\in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m = kn, \end{aligned}$$

donc, le m *est multiple de tous les entiers naturels non nuls, cette élément ne poura jamais exister, puisqu'il y a une infinité de nombres entiers non nuls dans* $\mathbb{N}^*$. *S'il n'y a pas de minorant, il n'existe pas, non plus, de minimum, car le maximum d'un ensemble ordonné, quand il existe, est le plus petit des minorant.*

b) *L'ensemble* $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *admet-il : un maximum ? un minimum ? une borne supérieure (supremum) ? une borne inférieure (infimum) ?*

* *Comme le seul diviseur commun pour les éléments de* A *est* 1. *Alors le majorant de* A *est* 1, *car pour tout éléments* n *de* A *il existe un* $k \in A$ *tel que* $n \perp N$, *cest à dire :*

$$\forall n \in A, \exists k = n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = n.1,$$

et on dit aussi que 1 *est la borne supérieure de* A *car c'est le seul et le plus petit dans* $\mathbb{N}^*$ *mais il ne peut pas être un maximum du fait que* $1 \notin A$.

* *On dit que l'ensemble* A *possède un minorant* m *pour la relation* $\perp$ *si*

$$\forall n \in A, \ \textit{on a } m \perp n \Leftrightarrow \textit{il existe un } k \in \mathbb{N}^* \textit{ tel que } m = kn,$$

ceci dit m *est le multiple de tous les éléments de* A*, c'est ce qu'on appelle le plus petit multiple commun, ou P.P.C.M. On l'obtient en décomposant les éléments de* A *en facteurs premiers :*

$$m = 2^3 \times 5 \times 3^2 \times 7 = 2520 \notin A.$$

Donc le 2520 *est minorant de* A *ce n'est pas minimum car* $2520 \notin A$.

CHAPITRE 3

Structures algébriques

Un rappel sur les structures algébriques est proposé en introduction aux exercices.

3.1 Groupe

Définition 3.1.1 *(Groupe) Soit G un ensemble muni d'une loi de composition $*$. On dit que $(G,*)$ est un groupe si :*

1. *La loi $*$ est interne,*
$$\forall x, y \in G,\ x * y \in G.$$
2. *La loi $*$ est associative,*
$$\forall x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)\,.$$
3. *$*$ admet un élément neutre,*
$$\exists e \in G, \forall x \in G,\ x * e = e * x = x.$$
4. *Tout élément de G admet un symétrique dans G,*
$$\forall x \in G, \exists x' \in G,\ x * x' = x' * x = e.$$

Si $*$ est commutative, c'est-à-dire si
$$\forall x, y \in G,\ x * y = y * z,$$
on dit que $(G,*)$ est un groupe commutatif (ou groupe abélien).

3.2 Anneau

Définition 3.2.1 *(Anneau) Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $*, \delta$, on dit que $(A, *, \delta)$ est un anneau si :*

1. *$(A, *)$ est un groupe commutatif.*
2. *$\forall x, y, z \in A$,*

$$x\delta\,(y * z) = (x\delta y) * (x\delta z) \;\; \text{et} \;\; (x * y)\,\delta z = (x\delta z) * (y\delta z)\,,$$

   (distributivité à droite et à gauche).

3. *δ est associative.*

   - Si, de plus, δ est commutative, on dit que $(A, *, \delta)$ est un anneau commutatif.

   - Si δ possède un élément neutre (ou élément identité), on dit que $(A, *, \delta)$ est un anneau unitaire.

3.3 Corps

Définition 3.3.1 *(Corps) Soit $\Bbbk$ un ensemble muni de deux lois de composition internes $*, \delta$, on dit que $(\Bbbk, *, \delta)$ est un corps si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$(\Bbbk, *, \delta)$ est un anneau unitaire.*
2. *$(\Bbbk - \{e\}, \delta)$ est un groupe, où e est l'élément neutre de $*$.*

- Si de plus δ est commutative, on dit que $(\Bbbk, *, \delta)$ est un corps commutatif.

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 *Soit $*$ une loi définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$x * y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

1. *Vérifier que $*$ est commutative, non associative, et admet un élément neutre.*

2. *Résoudre les équations suivantes : $2 * y = 5$, $x * x = 1$.*

Solution 3.4.1 1.

$*$ *est commutative si et seulement si :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ x * y = y * x.$$

$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y * x.$

Ceci est vrai car le produit et la somme sont commutatifs.

$*$ *n'est pas associative. Supposons par l'absurde qu'elle l'est, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \ (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \left(xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\right) * z \qquad (3.4.1)\\ &= \left(xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\right) z + \left(\left(xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\right)^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\\ &= xyz + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right) z + x^2 y^2 \left(z^2 - 1\right) + 2xy\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\\ &\quad + \left(x^2 - 1\right)^2\left(y^2 - 1\right)^2\left(z^2 - 1\right) - \left(z^2 - 1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * \left(yz + \left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\right) \qquad (3.4.2)\\ &= x\left(yz + \left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(\left(yz + \left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\right)^2 - 1\right)\\ &= xyz + x\left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right) + \left(x^2 - 1\right) y^2 z^2 + 2yz\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\\ &\quad + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)^2\left(z^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 - 1\right)\end{aligned}$$

contradiction (3.4.1)$\neq$(3.4.2) donc $*$ n'est pas associative.

$*$ *admet un élément neutre si et seulement si*

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ \ x * e = e * x = x.$$

Il suffit de considérer une seule équation car la loi est commutative.

$$\begin{aligned}\forall x &\in \mathbb{R},\ \ x * e = x\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ xe + \left(x^2 - 1\right)\left(e^2 - 1\right) = x\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ (e - 1)\left(x + \left(x^2 - 1\right)(e + 1)\right) = 0.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\left\{\begin{array}{c} e - 1 = 0 \\ ou \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ x + (x^2 - 1)(e + 1) = 0 \end{array}\right. .$$

On sait qu'un polynôme est nul $\forall x$ *si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, étant donné que le coefficient de* x *est* $1 \neq 0$*, le polynôme ne peut pas être identiquement nul. Il s'ensuit que la condition est satisfaite uniquement pour* $e = 1$*. Ainsi,* $e = 1$ *est bien l'élément neutre.*

2.

$2 * y = 5 \Rightarrow 2y + 3\left(y^2 - 1\right) = 5 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$ *ou* $y = -2$.
$x * x = 1 \Rightarrow x^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$ *ou* $x = -1$.

Exercice 3.4.2 *On considère une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$ *définie par :* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *:*

$$a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. *Montrer que* $(\mathbb{R}, *)$ *est un groupe abélien.*

2. *On considère les deux applications définies de* $(\mathbb{R}, *)$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$ *par :*

$$g(x) = 3x \text{ et } h(x) = 3x + \frac{1}{2}.$$

Ces applications sont-elles des morphismes de groupes ?

Solution 3.4.2 **1.** *Montrons que* $(\mathbb{R}, *)$ *est un groupe abélien.*

- $*$ *est commutative si et seulement si :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ a * b = b * a.$$

On a

$$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a,$$

donc l'opération $*$ *est commutative.*

- $*$ *est associative si et seulement si :*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ \ (a * b) * c = a * (b * c).$$

On a

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= \left(a + b + \frac{1}{6}\right) * c = a + b + \frac{1}{6} + c + \frac{1}{6} \\ &= a + b + c + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a*\left(b+c+\frac{1}{6}\right)=a+b+c+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} \\ &= a+b+c+\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $*$ *est associative.*

• *Puisque l'opération est commutative, il suffit de trouver l'existence d'un élément* $e\in\mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $a\in\mathbb{R}$*, on a* $a*e=a$*. Alors,*

$$a*e=a+e+\frac{1}{6}=a,$$

puis,

$$e=-\frac{1}{6}\in\mathbb{R}.$$

• *Pour l'élément inverse, on doit vérifier que*

$$\forall a\in\mathbb{R},\exists a'\in\mathbb{R},\ a*a'=e=-\frac{1}{6}.$$

donc

$$a*a'=a+a'+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6},$$

d'où

$$a'=-\frac{1}{3}-a\in\mathbb{R}.$$

On conclut donc que $(\mathbb{R},*)$ *est un groupe abélien.*

2. *Pour répondre à la question (2), il est nécessaire de rappeler et d'appliquer la définition d'un morphisme de groupes.*

• *Soient* $(G,*)$ *et* $(G',\circ)$ *deux groupes. Une application* $f:G\to G'$ *est un morphisme de groupes si :*

$$\forall x,x'\in G,\ f(x*x')=f(x)\circ f(x').$$

Dans le cas présent : On dit que g *est un morphisme de groupes si et seulement si*

$$\forall x,y\in\mathbb{R}:\ g(x*y)=g(x)+g(y).$$

On a

$$\begin{aligned} g(x*y) &= 3(x*y)=3\left(x+y+\frac{1}{6}\right) \\ &= 3x+3y+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or

$$g(x)+g(y)=3x+3y.$$

Ainsi, g n'est pas un morphisme de groupes.

Soient $x,y\in\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} h(x*y) &= 3(x*y)+\frac{1}{2} \\ &= 3\left(x+y+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}=3x+3y+1. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} h(x)+h(y) &= 3x+\frac{1}{2}+3y+\frac{1}{2} \\ &= 3x+3y+1. \end{aligned}$$

Ainsi, h est un morphisme de groupes.

Exercice 3.4.3 *Soit*

$$F=\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/a\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}\},$$

où chaque fonction est définie par

$$f_{a,b}(x)=ax+b.$$

On munit F de l'opération de composition des fonctions, notée $\circ$.

Montrer que $(F,\circ)$ est un groupe non commutatif.

Solution 3.4.3 *1) $\forall f_{a_1,b_1},f_{a_2,b_2}\in F$,*

$$\begin{aligned} f_{a_1,b_1}\circ f_{a_2,b_2} &= f_{a_1,b_1}(f_{a_2,b_2}(x))=f_{a_1,b_1}(a_2x+b_2) \\ &= a_1(a_2x+b_2)+b_1=a_1a_2x+a_1b_2+b_1 \\ &= Ax+B, \end{aligned}$$

Comme $a_1,a_2\in\mathbb{R}^*$, on a $A=a_1a_2\in\mathbb{R}^*$, et $B=a_1b_2+b_1\in\mathbb{R}$. Ainsi, $Ax+B\in F$.

2) $\forall f_{a_1,b_1},f_{a_2,b_2}$ et $f_{a_3,b_3}\in F$,

- $$\begin{aligned} (f_{a_1,b_1}\circ f_{a_2,b_2})\circ f_{a_3,b_3} &= (a_1a_2x+a_1b_2+b_1)\circ(a_3x+b_3) \\ &= a_1a_2(a_3x+b_3)+a_1b_2+b_1 \\ &= a_1a_2a_3x+a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} f_{a_1,b_1} \circ (f_{a_2,b_2} \circ f_{a_3,b_3}) &= f_{a_1,b_1} \circ (a_2 (a_3 x + b_3) + b_2) \\ &= f_{a_1,b_1} \circ (a_2 a_3 x + a_2 b_3 + b_2) \\ &= a_1 a_2 a_3 x + a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 + b_1. \end{aligned}$$

3) $\exists\ f_{a',b'} \in F, \forall f_{a,b} \in F,$

$$\begin{aligned} f_{a,b} \circ f_{a',b'} &= f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{a,b}, \\ &\Rightarrow a (a'x + b') + b = ax + b \\ &\Rightarrow aa'x + ab' + b = ax + b \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} aa' = a \\ ab' + b = b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a' = 1 \\ b' = 0 \end{array} \right. , \end{aligned}$$

ainsi, (x est l'élément neutre).

4) $\forall f_{a,b} \in F, \exists f_{a',b'} \in F,$

$$\begin{aligned} f_{a,b} \circ f_{a',b'} &= f_{a',b'} \circ f_{a,b} = x \\ &\Rightarrow aa'x + ab' + b = x \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} aa' = 1 \\ ab' + b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a' = \frac{1}{a} \\ b' = -\frac{b}{a} \end{array} \right. , \end{aligned}$$

ainsi, ($\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ est l'élément inverse). Mais : $\forall f_{a,b}, f_{a',b'} \in F,$

$$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = aa'x + ab' + b,$$

et

$$f_{a',b'} \circ f_{a,b} = a' (ax + b) + b' = a'ax + a'b + b'.$$

Par conséquent, F est non commutatif.

Exercice 3.4.4 *Montrer que l'ensemble*

$$G =]-1, 1[,$$

muni de l'opération

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy},$$

forme un groupe.

Solution 3.4.4 *Nous cherchons à prouver que $(G,*)$ est un groupe en vérifiant les quatre axiomes de groupe :*

- *Il faut montrer que si $x,y\in G$, alors $x*y\in G$, i.e.,*

$$-1 < x*y = \frac{x+y}{1+xy} < 1.$$

Commençons par

$$\frac{x+y}{1+xy} \overset{?}{<} 1 \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} - 1 < 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{1+xy} - 1 &= \frac{x+y-1-xy}{1+xy}\\ &= \frac{(x-1)-y(x-1)}{1+xy} = \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy},\end{aligned}$$

puisque $x,y\in\,]-1,1[$, on a

$$\begin{cases}|x|<1\\ \quad et\\ |y|<1\end{cases} \Rightarrow |xy|<1 \Rightarrow -1<xy<1 \Rightarrow 1+xy>0,$$

donc le dénominateur est positif. Maintenant, considérons :

$$x\in\,]-1,1[\, \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow x-1<0,$$

et

$$\begin{aligned} y &\in \,]-1,1[\, \Rightarrow -1<y<1\\ &\Rightarrow -1<-y<1 \Rightarrow 0<1-y,\end{aligned}$$

ainsi,

$$(x-1)(1-y)<0,$$

on conclut que

$$\frac{(x-1)(1-y)}{1+xy}<0,$$

donc

$$\frac{x+y}{1+xy}<1.$$

De même pour :

$$\frac{x+y}{1+xy}>-1.$$

- *Il faut montrer que pour tous $x, y, z \in G$:*

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Calculons le membre gauche :

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) z} \\ &= \frac{\frac{x+y+z+xyz}{1+xy}}{\frac{1+xy+xz+yz}{1+xy}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.\end{aligned}$$

Calculons le membre droit :

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * \left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)} \\ &= \frac{\frac{x+xyz+y+z}{1+yz}}{\frac{1+yz+xy+xz}{1+yz}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.\end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales, donc l'associativité est vérifiée.

- *On cherche $e \in]-1, 1[$ tel que pour tout $x \in]-1, 1[$:*

$$x * e = e * x = x.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}x * e &= \frac{x+e}{1+xe} = x \Rightarrow x + e = x + x^2 e \\ &\Rightarrow e\left(x^2 - 1\right) = 0,\end{aligned}$$

puisque $x^2 - 1 \neq 0$ pour $x \in]-1, 1[$, on doit avoir $e = 0$, ainsi, l'élément neutre est 0.

- *Pour chaque $x \in]-1, 1[$, on cherche $y \in]-1, 1[$ tel que :*

$$\begin{aligned}x * y &= y * x = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} = 0 \\ &\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x,\end{aligned}$$

ainsi, tout élément x admet un inverse $-x$, nous avons vérifié les quatre axiomes de groupe, par conséquent, $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 3.4.5 *On définit sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne $\perp$ par :*

$$\forall (x, y), (x', y') \in G, \ \ (x, y) \perp (x', y') = (xx', xy' + y).$$

Montrer que $(G, \perp)$ est un groupe non commutatif.

Solution 3.4.5 $(G, \perp)$ *est un groupe si et seulement si :*

$$\begin{cases} \perp \text{ est associative} \\ \perp \text{ admet un élément neutre} \\ \text{Tout élément de } G \text{ admet un inverse dans } G \end{cases}$$

(i) $\perp$ *est associative si et seulement si :*

$$\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in G, \ \ [(x,y) \perp (x',y')] \perp (x'',y'') \stackrel{?}{=} (x,y) \perp [(x',y') \perp (x'',y'')]$$

$$\begin{aligned} [(x,y) \perp (x',y')] & \perp (x'',y'') = (xx', xy' + y) \perp (x'',y'') \\ & = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{aligned} (x,y) & \perp [(x',y') \perp (x'',y'')] = (x,y) \perp (x'x'', x'y'' + y') \\ & = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

(3.4.3)=(3.4.4) donc, $\perp$ *est associative.*

(ii) $(e,e') \in G$ *est un élément neutre de* G *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in G, (x,y) \perp (e,e') = (e,e') \perp (x,y) = (x,y)$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x,y) \perp (e,e') = (x,y) \\ (e,e') \perp (x,y) = (x,y) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} (xe, xe' + y) = (x,y) \\ (ex, ey + e') = (x,y) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} xe = x \\ xe' + y = y \\ ex = x \\ ey + e' = y \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} e = 1 \in \mathbb{R}^*, x \neq 0 \\ e' = 0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi, $(e,e') = (1,0) \in G$ *est l'élément neutre.*

(iii)

$$\forall (x,y) \in G, \exists (x',y') \in G, \ (x,y) \perp (x',y') = (x',y') \perp (x,y) = (e,e') = (1,0).$$

$$\begin{cases} (x,y) \perp (x',y') = (1,0) \\ (x',y') \perp (x,y) = (1,0) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (xx', xy' + y) = (1,0) \\ (x'x, x'y + y') = (1,0) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \\ x'x = 1 \\ x'y + y' = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*, x \neq 0 \\ y' = -\frac{y}{x} \in \mathbb{R}, x \neq 0 \end{cases}$$

ainsi, le symétrique de $(x,y) \in G$ est $(x',y') = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) \in G$, donc $(G,\perp)$ est un groupe.

(iv) $\perp$ *est non commutative si et seulement si*

$$\exists (x,y) = (3,0) \in G, \exists (x',y') = (2,2) \in G, \ (x,y) \perp (x',y') \neq (x',y') \perp (x,y).$$

$$\begin{cases} (3,0) \perp (2,2) = (6,6) \\ (2,2) \perp (3,0) = (6,2) \end{cases},$$

On en conclut que $(G,\perp)$ est un groupe non commutatif.

Exercice 3.4.6 *Montrer que l'ensemble $F = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.*

Solution 3.4.6 *Un sous-ensemble H d'un groupe G est un sous-groupe si et seulement si :*

- $e_G \in H$.
- *Pour tous $a,b \in H$, le produit $a.b \in H$.*
- *Pour tout $a \in H$, l'inverse $a^{-1} \in H$.*

* *Prenons $n = 0$. Alors $2^0 = 1 \in F$. Donc $F \neq \emptyset$.*

* *Soient $a,b \in F$. Alors il existe des entiers $m,n \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$a = 2^m, b = 2^n.$$

Leur produit est

$$a \times b = 2^m \times 2^n = 2^{m+n}.$$

Puisque $m + n \in \mathbb{Z}$, on a $2^{m+n} \in F$. Ainsi, F est stable pour la multiplication.

** Soit $a \in F$. Alors $a = 2^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. L'inverse de a dans $\mathbb{R}^*$ est*

$$a^{-1} = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}.$$

Puisque $-n \in \mathbb{Z}$, on a $2^{-n} \in F$. Donc tout élément de F possède un inverse dans F. Puisque F est non vide, stable pour la multiplication et que tout élément admet un inverse, alors, F est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 3.4.7 *Montrer que si H et H' sont deux sous-groupes de $(G, *)$, alors $H \cap H'$ est aussi un sous-groupe.*

Solution 3.4.7 *Soit H et H' deux sous-groupes de $(G, *)$. Montrons que $H \cap H'$ est aussi un sous-groupe.*

** Comme H et H' sont des sous-groupes, ils contiennent tous les deux l'élément neutre e de G. Donc,*

$$e \in H \text{ et } e \in H', \text{ ce qui implique } e \in H \cap H'.$$

Ainsi, $H \cap H' \neq \emptyset$.

** Soient $a, b \in H \cap H'$. Alors $a, b \in H$ et $a, b \in H'$. Puisque H est un sous-groupe, $a * b \in H$. De même, puisque H' est un sous-groupe, $a * b \in H'$. Par conséquent, $a * b \in H \cap H'$.*

** Soit $a \in H \cap H'$. Alors $a \in H$ et $a \in H'$. Comme H est un sous-groupe, $a^{-1} \in H$. De même, comme H' est un sous-groupe, $a^{-1} \in H'$. Donc, $a^{-1} \in H \cap H'$. Par conséquent, $H \cap H'$ est un sous-groupe de $(G, *)$.*

Exercice 3.4.8 *Soient $\circ$ et $*$ deux lois de composition interne définies par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y - 2 \text{ et } x \circ y = x + y - xy$$

$(\mathbb{R}, *, \circ)$ est-il un anneau ?

Solution 3.4.8 *Pour établir que $(\mathbb{R}, *, \circ)$ forme un anneau, la première étape est de vérifier que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.*

1- $(\mathbb{R}, *)$ *est un groupe commutatif si et seulement si :*

-$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y - 2 \in \mathbb{R}$.

-$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x * y) * z = (x + y - 2) * z = x + y + z - 4, \tag{3.4.5}$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - 2) = x + y + z - 4, \tag{3.4.6}$$

(3.4.5)=(3.4.6), donc l'associativité est vérifiée pour $*$.

-$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$x * e = e * x = x \Rightarrow x + e - 2 = x \Rightarrow e = 2.$$

-$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$,

$$x * x' = x' * x = 2 \Rightarrow x + x' - 2 = 2 \Rightarrow x' = 4 - x.$$

-$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$x * y = x + y - 2 = y + x - 2 = y * x.$$

Par conséquent, $(\mathbb{R}, *)$ *est un groupe commutatif.*

2- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \circ (y * z) &= x \circ (y + z - 2) = x + y + z - 2 - xy - xz + 2x \\ &= 3x + y + z - xy - xz - 2, \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

et

$$\begin{aligned} (x \circ y) * (x \circ z) &= (x + y - xy) * (x + z - xz) \\ &= x + y - xy + x + z - xz - 2 \\ &= 2x + y + z - xy - xz - 2. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

(3.4.7)$\neq$(3.4.8), donc $\circ$ n'est pas distributive par rapport à $* \Rightarrow (\mathbb{R}, *, \circ)$ n'est pas un anneau.

Exercice 3.4.9 *Soit*

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1. *Montrer que* $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],+,.\right)$ *est un anneau.*

2. *On note* $N\left(a+b\sqrt{2}\right)=a^2-2b^2$, *Montrer que pour tous* $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, *on a*

$$N(xy)=N(x)N(y).$$

3. *En déduire qu'un élément* $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ *est inversible si et seulement si* $N(x)=+1$ *ou* $N(x)=-1$.

4. *Montrer que* $1+\sqrt{2}$ *est inversible. Quel est son inverse ?*

Solution 3.4.9 *1. Puisque* $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\subset\mathbb{R}$, *nous montrons que* $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ *est un sous-anneau de l'anneau* $(\mathbb{R},+,.)$. *En effet,*

(i) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\neq\emptyset$, *car* $0=0+0\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

(ii) $\forall a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\left(a+b\sqrt{2}\right)-\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a-c)+(b-d)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

(iii) $\forall a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

2. On a

$$N(xy)=(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2+4b^2d^2,$$

et

$$N(x)N(y)=\left(a^2-2b^2\right)\left(c^2-2d^2\right)=a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2+4b^2d^2.$$

Ainsi,

$$N(xy)=N(x)N(y).$$

3. $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ *est inversible* $\Leftrightarrow\exists y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\ xy=1\Leftrightarrow N(xy)=1\Leftrightarrow N(x)N(y)=1\Leftrightarrow N(x)=+1$ *ou* $N(x)=-1$.

4. Puisque $N\left(1+\sqrt{2}\right)=-1$, *d'après 3)* $1+\sqrt{2}$ *est inversible. Si* $a+b\sqrt{2}$ *est l'inverse de* $1+\sqrt{2}\Rightarrow\left(1+\sqrt{2}\right)\left(a+b\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow(a+2b-1)+(a+b)\sqrt{2}=0\Rightarrow a+2b-1=a+b=0\Rightarrow b=1$ *et* $a=-1$.

Exercice 3.4.10 *Soit* $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Q}^*,\times)$ *définie par*

$$f(n)=2^n.$$

1. *Montrer que* f *est un morphisme de groupes.*

2. *Déterminer le noyau de f, f est-elle injective ? surjective ?*

Solution 3.4.10 *1. Nous avons la fonction :*

$$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \times), \ f(n) = 2^n.$$

Pour montrer que f est un morphisme de groupes, on vérifie :

$$f(n+m) = 2^{n+m} = 2^n \times 2^m = f(n) \times f(m).$$

Ainsi, f est un morphisme de groupes.

2. Noyau de f :

$$\ker(f) = \{n \in \mathbb{Z} / f(n) = 1\} = \{n \in \mathbb{Z} / 2^n = 1\},$$

Puisque $2^n = 1$ uniquement lorsque $n = 0$, nous avons

$$\ker(f) = \{0\}.$$

Injectivité :

Un morphisme de groupes est injectif si et seulement si son noyau est trivial. Puisque $\ker(f) = \{0\}$, le morphisme f est injectif.

Surjectivité :

L'image de f est :

$$f(\mathbb{Z}) = \left\{ ..., \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, ... \right\}.$$

Cet ensemble ne comprend pas tous les nombres rationnels (par exemple, 3 n'en fait pas partie), donc f n'est pas surjective.

CHAPITRE 4

Notion d'espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{k}$

Avant de passer aux exercices, voici quelques définitions essentielles.

4.1 Espace vectoriel et sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne que l'on note $(+)$:

$$(+) : E \times E \to E$$
$$(x, y) \to x + y$$

et d'une loi de composition externe notée $(\cdot)$:

$$(.) : \mathbb{k} \times E \to E$$
$$(\lambda, x) \to \lambda.x$$

Définition 4.1.1 ***(Espace vectoriel)*** *Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$ ou un $\mathbb{k}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$ tel que :*

(1) $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x, y \in E, \ \lambda. (x + y) = \lambda.x + \lambda.y.$

(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \ (\lambda + \mu) .x = \lambda.x + \mu.x.$

(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \ (\lambda.\mu) .x = \lambda. (\mu.x) .$

(5) $\forall x \in E, \ 1_{\mathbb{k}}.x = x.$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés vecteurs, et ceux de $\mathbb{k}$ sont appelés scalaires.

Définition 4.1.2 ***(Sous-espace vectoriel)*** *Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est lui-même un $\mathbb{k}$-espace vectoriel.*

Théorème 4.1.1 *Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, et soit $F \subset E$ une partie non vide. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *F est un sous espace vectoriel de E.*

(2) *F est stable par l'addition et par la multiplication c'est à dire :*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{k},\ x + y \in F, \lambda.x \in F.$$

(3) *$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k},\ \lambda.x + \mu.y \in F$, d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \lambda.x + \mu.y \in F. \end{cases}$$

(4) *$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k},\ \lambda.x + \mu.y \in F$, d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \lambda.x + \mu.y \in F. \end{cases}$$

4.2 Familles génératrices, familles libres et bases

Définition 4.2.1 *Soit E un espace vectoriel, et soient $e_1, e_2, ..., e_n$ des éléments de E,*

(1) *On dit que la famille $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est libre ou linéairement indépendante si, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$:*

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0, \text{ unique solution.}$$

Sinon, on dit qu'elle est linéairement dépendante.

(2) *On dit que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille génératrice de E, ou que E est engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ si pour tout $x \in E$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$,*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n.$$

(3) *Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est à la fois une famille libre et une famille génératrice de E, alors on appelle $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E.*

Définition 4.2.2 *Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel de base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Alors $dim\,(E) = Card\,(B)$.*

Remarque 4.2.1 *Ainsi, trouver une base d'un espace vectoriel E revient à trouver une famille de vecteurs de E qui forme une famille libre et génératrice de E. Le nombre d'éléments de cette famille représente la dimension de E $\dim E$.*

4.3 Notion d'application linéaire

Définition 4.3.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$. Une application f de E dans F est dite linéaire si :*

$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \Bbbk,$

* $f\,(x+y) = f\,(x) + f\,(y)\,,$

* $f\,(\lambda x) = \lambda f\,(x)\,,$

ou de manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \Bbbk, f\,(\lambda x + \mu y) = \lambda f\,(x) + \mu f\,(y)\,.$$

Définition 4.3.2 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(1) *L'image de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble défini par :*

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E : f\,(x) = y\} = \{f\,(x)\,/ x \in E\}\,.$$

(2) *Le noyau de f (noté $\ker f$) est l'ensemble défini par :*

$$\ker f = \{x \in E / f\,(x) = 0_F\}\,,$$

Le noyau $\ker f$ s'écrit parfois $f^{-1}\,(\{0\})\,.$

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1 *Étudier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}\,,$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}\,,$

3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geq 0\}$,

4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$,

5. $E_5 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est croissante}\}$,

6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z + 2 = 0\}$,

Solution 4.4.1 **1-** E_1 *est un sous-espace vectoriel si et seulement si :*

$$\begin{cases} 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1 \\ \forall u, v \in E_1,\ u + v \in E_1 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in E_1,\ \lambda u \in E_1 \end{cases}$$

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E_1$, *car* $0 + 0 = 0$.
- $\forall u(x, y, z), v(x', y', z') \in E_1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ x' + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow (x + x') + (y + y') = 0$
$\Rightarrow u + v \in E_1$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u(x, y, z) \in E_1 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \lambda x + \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda u \in E_1$. *Par conséquent,* E_1 *est un sous-espace vectoriel.*

2- E_2 *est un sous-espace vectoriel, car*

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E_2$, *car* $0 - 0 + 0 = 0$.
- $\forall u(x, y, z), v(x', y', z') \in E_2 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0, \\ x' - y' + z' = 0 \end{cases} \Rightarrow (x + x') - (y + y') + (z + z') = 0$
$\Rightarrow u + v \in E_2$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u(x, y, z) \in E_2 \Rightarrow x - y + z = 0 \Rightarrow \lambda x - \lambda y + \lambda z = 0 \Rightarrow \lambda u \in E_2$. *Nous concluons que* E_2 *est un sous-espace vectoriel.*

3- E_3 *n'est pas un sous-espace vectoriel, car on a*

$$u(1, 2), v(-2, 1) \in E_3,$$

mais

$$u + v(-1, 3) \notin E_3,\ \text{car } (-1)^2 + 3(-1) = -2 < 0.$$

4- E_4 *n'est pas un sous-espace vectoriel, car on a*

$$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin E_4 \text{ puisque } 0^2 + 0^2 = 0 < 1.$$

5- *E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel, car si l'on prend $\lambda = -1 \Rightarrow$ la fonction λf n'est pas une fonction croissante.*

6- *E_6 n'est pas un sous-espace vectoriel, car on a*

$$0_{\mathbb{R}^3} \notin E_6 \text{ car, } 0+0+2=2 \neq 0.$$

Exercice 4.4.2 *Considérons les ensembles suivants :*

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\right\}$$

et

$$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-y=x+z=0\right\}.$$

1. *Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Trouver une base de E_1 et une base de E_2, et en déduire $\dim(E_1)$ et $\dim(E_2)$.*

Solution 4.4.2 **1.** *E_1 est un sous-espace vectoriel, car*

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_1$, *puisque* $0+0+0=0$.

- $\forall u(x,y,z), v(x',y',z') \in E_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0, \\ x'+y'+z'=0 \end{cases} \Rightarrow (x+x')+(y+y')+(z+z')=0$$

$\Rightarrow u+v \in E_1$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u(x,y,z) \in E_1 \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow \lambda x+\lambda y+\lambda z=0 \Rightarrow \lambda u \in E_1$. *Par conséquent, E_1 est un sous-espace vectoriel.*

Et E_2 est un sous-espace vectoriel, car :

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_2$, *puisque* $0-0=0+0=0$.

- $\forall u(x,y,z), v(x',y',z') \in E_2 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \text{ et } x+z=0, \\ x'-y'=0 \text{ et } x'+z'=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x+x')-(y+y')=0$ *et* $(x+x')+(z+z')=0 \Rightarrow u+v \in E_2$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u(x,y,z) \in E_2 \Rightarrow x-y=0$ *et* $x+z=0$

$\Rightarrow \lambda x-\lambda y=0$ *et* $\lambda x+\lambda z=0 \Rightarrow \lambda u \in E_2$. *Ainsi, E_2 est un sous-espace vectoriel.*

2. *Pour la base de E_1, on a :*

$$x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z,$$

donc

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (-y-z,y,z) = (-y,y,0) + (-z,0,z) \\ &= y\,(-1,1,0) + z\,(-1,0,1)\,,\end{aligned}$$

Ainsi,

$$B_{E_1} = \{(-1,1,0)\,,(-1,0,1)\} \Rightarrow \dim E_1 = 2.$$

Pour la base de E_2, on a

$$x - y = x + z = 0 \Rightarrow x = y \text{ and } z = -x,$$

Ainsi

$$(x,y,z) = (x,x,-x) = x\,(1,1,-1)\,,$$

Par conséquent

$$B_{E_2} = \{(1,1,-1)\} \Rightarrow \dim E_2 = 1.$$

Exercice 4.4.3 *Étudier l'indépendance linéaire des vecteurs suivants :*

(1)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution 4.4.3

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants si et seulement si :*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\;\; \lambda_1\,(2,1,1) + \lambda_2\,(1,0,1) + \lambda_3\,(0,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1\,(2,1,1) + \lambda_2\,(1,0,1) + \lambda_3\,(0,1,0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants.*

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants si et seulement si :*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 (3,0,4) + \lambda_2 (1,0,0) + \lambda_3 (1,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1 (3,0,4) + \lambda_2 (1,0,0) + \lambda_3 (1,1,0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants.*

Exercice 4.4.4 *1. On considère les vecteurs :*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles v_1, v_2, v_3 constituent une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Solution 4.4.4 1. $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *si* B *est une famille libre et génératrice.*

– B ***est libre*** *: on pose*

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\ 2\alpha+9\beta+3\gamma=0\\ \alpha+4\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0 & \\ 5\beta-3\gamma=0 & \leftarrow -2l_1+l_2\\ -2\beta+\gamma=0 & \leftarrow -l_1+l_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0 & \\ 5\beta-3\gamma=0 & \\ -\frac{\gamma}{5}=0 & \leftarrow \frac{2}{5}l_2+l_3\end{cases}\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0,$$

par conséquent, B est une famille libre.

– B ***est génératrice*** *: la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est génératrice si et seulement si :*

$$\forall\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R},\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, *cherchons $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que :*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\\2\lambda_1+9\lambda_2+3\lambda_3\\\lambda_1+4\lambda_3\end{pmatrix},$$

par conséquent :

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=x\\ 2\lambda_1+9\lambda_2+3\lambda_3=y\\ \lambda_1+4\lambda_3=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=x & \\ 5\lambda_2-3\lambda_3=y-2x & \leftarrow -2l_1+l_2\\ -2\lambda_2+\lambda_3=z-x & \leftarrow -l_1+l_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=x & \\ 5\lambda_2-3\lambda_3=y-2x & \\ -\frac{\lambda_3}{5}=\frac{2}{5}(y-2x)+(z-x) & \leftarrow \frac{2}{5}l_2+l_3\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_3 = -2(y-2x) - 5(z-x) = 9x - 2y - 5z,$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{5}(y - 2x + 3\lambda_3) = 5x - y - 3z$$

et

$$\lambda_1 = x - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = -36x + 8y + 21z.$$

Par conséquent, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une famille génératrice* $\Rightarrow$ B *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

2. *Nous avons* 3 *vecteurs* $= dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ *il suffit de montrer que les vecteurs sont linéairement indépendants.*

On pose :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + t\beta + t\gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \\ 2\beta + 0\gamma = 0 & \leftarrow -l_1 + l_2 \Rightarrow \ \beta = 0 \\ (t-4)\beta + (t-4)\gamma = 0 & \leftarrow -4l_1 + l_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 0 \\ (t-4)\gamma = 0 \end{array} \right. ,$$

• *si* $t - 4 \neq 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$*, donc si* $t \neq 4$ *la famille est linéairement indépendante et forme ainsi une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 4.4.5 *Soit la famille des vecteurs suivante :*

$$B = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,1,0)\}.$$

1. *Montrer que la famille* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

2. *Trouver les composantes du vecteur* $w = (1,1,1)$ *dans cette base.*

Solution 4.4.5 **1.** *Montrer que* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *: il suffit de montrer que les vecteurs sont libres (car* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = card(B)$*). On pose :*

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 &= 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha.0 + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 0 + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta = -\gamma = 0 \\
&\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Alors $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une base.*

2. *Composantes de* $w = (1,1,1)$ *dans* B *: on cherche* α, β, γ *tels que :*

$$w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3.$$

Cela donne le système :

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 & \textit{(1)} \\ \alpha + \gamma = 1 & \textit{(2)} \\ \alpha + \beta = 1 & \textit{(3)} \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
\textit{de (2)} &: \alpha = 1 - \gamma \\
\textit{et de (3)} &: \alpha = 1 - \beta,
\end{aligned}$$

on en déduit

$$1 - \gamma = 1 - \beta \Rightarrow \beta = \gamma,$$

Remplaçons dans (1) :

$$2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}, \ \textit{donc } \gamma = \frac{1}{2},$$

puis

$$\alpha = 1 - \gamma = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc les composantes de w *dans* B *sont :*

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 4.4.6 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ *où* $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

1. *Vérifier que* f *est une application linéaire.*

2. *Déterminer le* $\ker f$, *une base de* $\ker f$, *et déduire* $\dim(\ker f)$.

3. f *est elle injective.*

4. *Donner* $\dim(\operatorname{Im} f)$, *puis donner une base de* $\operatorname{Im} f$, f *est elle surjective.*

Solution 4.4.6 **1.** *Vérifier que* f *est une application linéaire :*

- *Soient* $u(x, y, z), v(x', y', z')$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= ((x + x') + (y + y'), (x + x') + (z + z')) \\ &= (x + y, x + z) + (x' + y', x' + z') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

- *Soient* $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda z) \\ &= \lambda(x + y, x + z) = \lambda f(u). \end{aligned}$$

Donc f *est bien une application linéaire.*

2. *Noyau de* f *:*

$$\ker f = \left\{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}.$$

Cela donne le système :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases},$$

on en déduit :

$$y = -x \text{ et } z = -x,$$

donc

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, -x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(1, -1, -1)\}. \end{aligned}$$

Une base de $\ker f$ *est* $\{(1,-1,-1)\}$, *et* $\dim \ker f = 1$.

3. *Avant de traiter la question 3, rappelons que pour une application linéaire* $f : E \to F$, *on a les équivalences suivantes :*

- f *est surjective* $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.
- f *est injective* $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.

Or dans notre cas $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow f$ *n'est pas injective.*

4. $\dim(\operatorname{Im} f)$?

La résolution de la question 4 *repose sur une application du théorème du rang : Si* f *est une application linéaire de* E *dans* F, *où* E *est de dimension finie. Alors :*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

En appliquant cela à notre cas, on obtient :

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) &= \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) \\ &\Rightarrow 3 = 1 + \dim(\operatorname{Im} f) \\ &\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ *et* $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, *on a* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. *Ainsi,* f *est surjective. Pour trouver une base de* $\operatorname{Im} f$, *on peut prendre les images des vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^3$:

$$f(1,0,0) = (1,1)\,,\, f(0,1,0) = (1,0)\,,\, f(0,0,1) = (0,1)\,.$$

Les vecteurs $(1,0)$ *et* $(0,1)$ *sont déjà dans* $\operatorname{Im} f$ *(ils sont linéairement indépendants). Une base de* $\operatorname{Im} f$ *est donc la base canonique de* $\mathbb{R}^2$: $\{(1,0),(0,1)\}$.

Exercice 4.4.7 *Soit l'application* $f : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y,z) = (x + 2y + z, 2x + 4y + 2z)$$

1. *Justifier que* f *est linéaire.*

2. *Déterminer une base et la dimension de* $ker f$, *et en déduire le rang de* f.

3. *L'application* f *est-elle injective ?*

Solution 4.4.7 **1.** *f est linéaire si :*

$$\begin{aligned} \bullet \forall u, v &\in \mathbb{R}^3, f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \bullet \forall u &\in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u) = \lambda f(u). \end{aligned}$$

Alors, $\forall u(x,y,z), v(x',y',z') \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x') + 2(y+y') + (z+z'), 2(x+x') + 4(y+y') + 2(z+z')) \\ &= (x+2y+z, 2x+4y+2z) + (x'+2y'+z', 2x'+4y'+2z') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

$\forall u(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + 2\lambda y + \lambda z, 2\lambda x + 4\lambda y + 2\lambda z) \\ &= \lambda(x+2y+z, 2x+4y+2z) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$*f est une application linéaire.*

2.

$$\ker(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ 2x+4y+2z=0 \end{array}\right. \Rightarrow x = -2y - z,$$

donc, $\forall u \in \ker(f),$

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} -2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \ker(f) = vect\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim\ker(f) = 2. \end{aligned}$$

$\star$ *Pour calculer* $rang(f)$*, on utilise le « Théorème du rang »* $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \\ &\Rightarrow rang(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

3. *La fonction f n'est pas injective puisque* $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$

Exercice 4.4.8 **1- a)** *Montrer que l'ensemble*

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2t = 0, y = 2z\right\},$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *sur le corps* $\mathbb{R}$.

b) *Déterminer une base de* F *et déduire sa dimension.*

2- a) *Etudier la linéairité de l'application*

$$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y).$$

b) *Trouver* $\ker f$ *et une base de* $\ker f$ *et déduire* $\dim \ker f$ *et* $\dim \operatorname{Im} f$.

Solution 4.4.8 **1- a)** *Montrons que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *:*

- $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ *car* $0 - 2 \times 0 = 0$ *et* $0 = 2 \times 0$.
- *Soient* $u(x_1, y_1, z_1, t_1), v(x_2, y_2, z_2, t_2) \in F \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - 2t_1 = 0 \text{ et } y_1 = 2z_1 \\ x_2 - 2t_2 = 0 \text{ et } y_2 = 2z_2 \end{cases}$$

alors

$$(x_1 + x_2) - 2(t_1 + t_2) = 0 \text{ et } y_1 + y_2 = 2(z_1 + z_2),$$

donc $u + v \in F$.

- *Soient* $u(x, y, z, t) \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\begin{aligned} x - 2t &= 0, y = 2z \Rightarrow \\ \lambda x - 2\lambda t &= 0, \lambda y = 2\lambda z, \end{aligned}$$

donc $\lambda u \in F$. F *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

b) *Base et dimension de* F *: Un vecteur de* F *s'écrit :*

$$(x, y, z, t) = (2t, 2z, z, t) = t(2, 0, 0, 1) + z(0, 2, 1, 0).$$

Les vecteurs $(2, 0, 0, 1)$ *et* $(0, 2, 1, 0)$ *sont linéairement indépendants et engendrent* F. *Une base de* F *est :*

$$\mathcal{B}_F = \{(2, 0, 0, 1), (0, 2, 1, 0)\}.$$

La dimension de F est :

$$\dim F = 2.$$

2- a) *Linéarité de f :*

$$f(x,y) = (2x - 4y, x - 2y),$$

- *Soient $u(x,y), v(x',y') \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y') \\ &= (2(x+x') - 4(y+y'), (x+x') - 2(y+y')) \\ &= (2x-4y, x-2y) + (2x'-4y', x'-2y') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

- *Soient $u(x,y) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (2\lambda x - 4\lambda y, \lambda x - \lambda 2y) \\ &= \lambda(2x - 4y, x - 2y) \\ &= \lambda f(u), \end{aligned}$$

alors f est une application linéaire.

b) *Noyau et image de f :*

- *Noyau :*

$$\ker f = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}.$$

Cela donne le système :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y,$$

ainsi :

$$\ker f = \{(2y, y) / y \in \mathbb{R}\} = Vect\{(2,1)\}.$$

Une base de $\ker f$ est :

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \{(2,1)\}, \dim \ker f = 1.$$

Image : par le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim \mathbb{R}^2 &= \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \\ &\Rightarrow 2 = 1 + \dim \operatorname{Im} f \\ &\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 - 1 = 1.\end{aligned}$$

Exercice 4.4.9 **1.** *Montrer que les vecteurs*

$$v_1 = (1,1,1)\,, v_2 = (1,-1,1)\,, v_3 = (1,1,0)$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. *Soit l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f\,(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x+y)$$

(a) *Trouver* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* $w\,(k^2-4,0,0) \in \ker(f)$.

(b) *Déterminer* $\ker(f)$. *L'application* f *est-elle injective ?*

Solution 4.4.9 **1.** *Nous avons* 3 *vecteurs* $=$ *dim* $(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ *il suffit de montrer que les vecteurs sont linéairement indépendants.*

On pose :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha-\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ -2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha = -\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

puisque v_1, v_2, v_3 *sont linéairement indépendants, ils forment une base de* $\mathbb{R}^3$.

2.

(a) *Puisque* $w = (k^2-4,0,0) \in \ker(f)$, *on a*

$$\begin{aligned} f\,(w) &= 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f\left(k^2-4,0,0\right) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \left(k^2-4, k^2-4, k^2-4\right) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow k^2-4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \end{aligned}$$

d'où $k_1 = 2$ *et* $k_2 = -2$.

(b)

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \left\{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\
&\Leftrightarrow (x+y+z, x-y+z, x+y) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z=0 \\ -2y=0 \Rightarrow y=0 \\ x=-y \end{array}\right. \\
&\Rightarrow x=y=z=0,
\end{aligned}$$

donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. *Ainsi,* f *est injective.*

CHAPITRE 5

Fonctions numériques d'une variable réelle

Avant de commencer les exercices, quelques rappels essentiels sont donnés pour en faciliter la résolution.

5.1 Notions de continuité et de dérivabilité des fonctions

Limite d'une fonction

Définition 5.1.1 *On dit qu'une fonction f définie au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$ (éventuellement sauf en x_0), admet une limite l en x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in V,\ |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$.

Proposition 5.1.1 *Si une fonction f admet une limite en un point x_0, alors cette limite est unique.*

Notion de continuité d'une fonction

Définition 5.1.2 *Soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est continue au point x_0, si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, quand x tend vers x_0 pour tout $x \in I$.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

On peut formuler ceci de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\epsilon, x_0) > 0\ \forall x \in V, \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Définition 5.1.3 *On en déduit qu'une fonction f est continue en point x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de ce point. Autrement dit :*

$$f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Définition 5.1.4 *Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si elle est continue en chacun des points de I.*

Théorème 5.1.1 *Soit*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R},$$

une fonction continue, alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire :

$$\forall c \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) = c.$$

Autrement dit, le graphe de f ne présente aucune discontinuité entre les points

$$A = (a, f(a)) \text{ et } B = (b, f(b)).$$

Théorème 5.1.2 *Si une fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et que $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que*

$$f(x_0) = 0.$$

Fonctions et dérivabilité

Définition 5.1.5 *Soit $x_0 \in I$. On dit qu'une fonction f est dérivable en x_0 si son taux d'accroissement*

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tend vers une limite finie lorsque x tend vers x_0 avec $x \neq x_0$. Cette limite, appelée dérivée de f en x_0, se note

$$f^{'}(x_0).$$

Définition 5.1.6 *La fonction qui associe à chaque $x \in I$ la valeur $f'(x)$ dans $\mathbb{R}$ s'appelle la fonction dérivée de f, et se note par f' ou $\frac{df}{dx}$.*

Théorèmes de Rolle et des Accroissements finis

Théorème 5.1.3 ***(Rolle)*** *Soient $I = [a, b]$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que*

$$f(a) = f(b).$$

Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$f^{'}(x_0) = 0.$$

Théorème 5.1.4 ***(Accroissement finis)*** *Soient $I = [a, b]$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f^{'}(x_0).$$

Corollaire 5.1.1 *(**Règle de l'Hôpital**) Supposons que les fonctions f et g soient dérivables sur l'intervalle $]a, b[$, avec $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ et que*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \ \ (L \text{ est fini ou } +\infty).$$

Alors, on a

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Ce résultat s'applique notamment dans les cas d'indétermination suivants :

1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$. *Correspondant à la forme $\frac{0}{0}$.*

2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$. *Correspondant à la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Le même raisonnement reste valable lorsque $x \to b^-$, y compris dans le cas où b est infini.*

5.2 Fonctions usuelles

Fonctions trigonomètriques

Fonction $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$:

Les application $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$ sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Elles vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \text{et } |\cos x| \leq 1 \text{ et } |\sin x| \leq 1. \\
\cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x). \\
\cos(-x) &= \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x). \\
\sin^{'}(x) &= \cos(x) \text{ et } \cos^{'}(x) = -\sin(x).
\end{aligned}$$

Fonction $x \to \tan x$:

l'application $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x : x \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi\}$

$$\tan^{'} x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

En posant $t = \tan \frac{\pi}{2}$,on peut exprimer les trois application suivantes sous la forme

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Fonctions trigonomètriques inverses

Fonction $x \to \arcsin(x)$:

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
(\arcsin(x))^{'} &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > 0 \ \ |x| \leq 1.
\end{aligned}$$

Fonction $x \to \arccos(x)$

$$\begin{aligned}
y &= \arccos(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ -\pi \leq y \leq 0 \end{cases} \\
(\arccos(x))^{'} &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} < 0, \ \ |x| \leq 1. \\
\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Fonction $x \to \arctan x$

$$\begin{aligned}
y &= \arctan(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
(\arctan(x))^{'} &= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

5.3 Exercices

Exercice 5.3.1 *Calculer les limites suivantes*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-1}{2x^2-6}\right]^{5x^2}$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+x}{x^2+3x+2}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(4x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos(2x)\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

Solution 5.3.1 1) • *On pose :* $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-1}{2x^2-6}\right]^{5x^2}=1^{\infty}F.I.$, *puis*

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{x\to\infty}\left[1-1+\frac{2x^2-1}{2x^2-6}\right]^{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-2x^2+6+2x^2-1}{2x^2-6}\right]^{5x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{5}{2x^2-6}\right]^{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{2x^2-6}\right)^{\frac{2x^2-6}{5}}\right]^{\frac{25x^2}{2x^2-6}}, \end{aligned}$$

on pose :

$$t=\underset{x\to\infty}{\frac{5}{2x^2-6}}\to0,$$

alors,

$$l_1=\lim_{\substack{x\to\infty\\ t\to0}}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{25x^2}{2x^2-6}}=e^{\frac{25}{2}},$$

car

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \text{ et } \lim_{x\to\infty}\frac{25x^2}{2x^2-6}=\frac{25}{2}.$$

• *On pose :* $l_2=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+x}{x^2+3x+2}=\frac{0}{0}F.I.$, *on factorise le dénominateur :*

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2),$$

donc :

$$l_2=\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+2}=1.$$

• *On pose :* $l_3=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}=\frac{0}{0}F.I.$, *on multiplie par le conjugué :*

$$\begin{aligned} l_3 &= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{(2x+1)-3}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2) • *On pose :* $l_4 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(4x)}{x^2} = \frac{0}{0} F.I,$ *on utilise :*

$$\cos(4x) = 1 - \frac{(4x)^2}{2} + o\left(x^2\right),$$

donc

$$1 - \cos(4x) \sim 8x^2,$$

ainsi

$$l_4 = \lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{x^2} = 8.$$

• *On pose* : $l_5 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{0}{0} F.I,$

$$l_5 = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} = 3.$$

• *On pose* : $l_6 = \lim\limits_{x\to 0} [\cos(2x)]^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty} F.I.,$

$$\begin{aligned} l_6 &= \lim_{x\to 0} [1 - 1 + \cos(2x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} [1 + (\cos(2x) - 1)]^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \left[(1 + (\cos(2x) - 1))^{\frac{1}{\cos(2x)-1}}\right]^{\frac{\cos(2x)-1}{x^2}}, \end{aligned}$$

on pose :

$$t = \cos(2x) - 1 \underset{x\to 0}{\to} 0,$$

alors

$$l_6 = \lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0}} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{\cos(2x)-1}{x^2}} = e^{\frac{\cos(2x)-1}{x^2}},$$

on calcule maintenant

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{x^2} = -2, \end{aligned}$$

car

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o\left(x^2\right),$$

alors

$$l_6 = e^{-2}.$$

Exercice 5.3.2 *Pour chacune des fonctions définies ci-après, examinez la continuité et la dérivabilité au point spécifié :*

1.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & si\ x<0\\ \frac{1}{2}, & si\ x=0\\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & si\ x>0\end{cases}\quad au\ point\ x_0=0,$$

2.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{|x-2|}{x-2}, & si\ x\neq 2\\ 0, & si\ x=2\end{cases}\quad au\ point\ x_0=2,$$

3.

$$h(x)=\begin{cases}\cos(x), & si\ x\leq\frac{\pi}{4}\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}, & si\ x\geq\frac{\pi}{4}\end{cases}\quad au\ point\ x_0=\frac{\pi}{4}.$$

Solution 5.3.2 **1.** ***Continuité :***

Limite à gauche :

- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$
$=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}=f(0)=\frac{1}{2}.$
$\Rightarrow$ *f est continue à gauche.*

Limite à droite :

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1\neq f(0)=\frac{1}{2}.$
$\Rightarrow$ *f n'est pas continue à droite. Donc f n'est pas continue en 0. Par conséquent, f n'est pas dérivable en 0.*

2.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{|x-2|}{x-2}, & si\ x\neq 2\\ 0, & si\ x=2\end{cases}=\begin{cases}\frac{x-2}{x-2}=1, & si\ x>2\\ 0, & si\ x=2\\ \frac{-(x-2)}{x-2}=-1, & si\ x<2\end{cases},$$

Continuité :

Limite à gauche :

- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} g(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}-1=-1\neq g(2)=0.$
$\Rightarrow$ *g n'est pas continue à gauche.*

Limite à droite :

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} 1 = 1 \neq g(2) = 0.$

$\Rightarrow$ *g n'est pas continue à droite. Donc g n'est pas continue en 2. Par conséquent, g n'est pas dérivable en 2.*

3.

$$h(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

Continuité :

Limite à gauche :

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} h(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = h\left(\frac{\pi}{4}\right).$

$\Rightarrow$ *h est continue à gauche.*

Limite à droite :

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} h(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = h\left(\frac{\pi}{4}\right).$

$\Rightarrow$ *h est continue à droite. Donc h est continue en $\frac{\pi}{4}$.*

Dérivabilité :

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x)}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = h'\left(\frac{\pi}{4}\right).$

$\Rightarrow$ *h est dérivable à gauche.*

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1} = 1 \neq h'\left(\frac{\pi}{4}\right).$

$\Rightarrow$ *h n'est pas dérivable à droite.*

Donc h n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 5.3.3 *On définit :*

$$g(x) = \begin{cases} mx + n \ \ si \ x \leq 1 \\ \sqrt{x} \qquad si \ x > 1 \end{cases},$$

1. *Déterminer la condition sur m et n pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.*

2. *Déterminer m et n pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Solution 5.3.3 **1.** ***Continuité :*** *g est continue si :*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = g(1).$$

- $\lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} mx + n = m + n = g(1)$,
- $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \sqrt{x} = 1$, *alors on a :*

$$m + n = 1$$

2. ***Dérivabilité :*** *g est dérivable si :*

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1).$$

- $\lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \frac{mx+n-(m+n)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \frac{mx+n-1}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \frac{m}{1} = m = g'(1)$,
- $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \frac{\sqrt{x}-(m+n)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$, *on a alors*

$$m = \frac{1}{2}.$$

On remplace dans $m + n = 1$, *on trouve :*

$$n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 5.3.4 *Soit* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & si\ x \leq 1 \\ \ln(x) + c & si\ x > 1 \end{cases},$$

1. *Déterminer les conditions sur* a, b, c *pour que* h *soit continue sur* $\mathbb{R}$.

2. *Déterminer* a, b, c *pour que* h *soit dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Solution 5.3.4 **1.** ***Continuité :*** *h est continue si :*

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} 1} h(x) = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 1} h(x) = h(1).$$

- $\lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} h(x) = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} ax^2 + bx + 2 = a + b + 2 = h(1)$,
- $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} h(x) = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} (\ln(x) + c) = c$, *alors on a :*

$$a + b + 2 = c.$$

2. ***Dérivabilité :*** *h est dérivable si :*

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1).$$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\left(ax^2+bx+2\right)-(a+b+2)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{ax^2+bx+2-c}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{2ax+b}{1} = 2a+b = h'(1)$,
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\ln(x)+c-c}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$, *on a alors*

$$2a+b=1.$$

Alors on a le système :

$$\begin{cases} a+b+2=c \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow b = 1-2a,$$

on remplace dans $a+b+2=c$, *on trouve*

$$a+1-2a+2=c \Rightarrow 3-a=c.$$

Exercice 5.3.5 *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*
1) $f(x) = x^2.e^{\sin(x)}$, 2) $g(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x+1}}$, 3) $h(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}.\arctan(x)$.
4) $p(x) = e^{x^2}.\cos\left(x^3+1\right)$, 5) $q(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{x^2+1}$.

Solution 5.3.5 1)

$$f(x) = x^2.e^{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \left(x^2\right)'.e^{\sin(x)} + x^2.\left(e^{\sin(x)}\right)',$$

pour $\left(e^{\sin(x)}\right)'$, *on applique la règle :*

$$g(h(x))' = g'(h(x)) \times h'(x),$$

alors

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x \Rightarrow g'(x) = e^x \\ h(x) &= \sin(x) \Rightarrow h'(x) = \cos(x), \end{aligned}$$

puis

$$\left(e^{\sin(x)}\right)' = e^{\sin(x)} \times \cos(x),$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x.e^{\sin(x)} + x^2.e^{\sin(x)} \times \cos(x) \\ &= e^{\sin(x)}\left(2x. + x^2\cos(x)\right). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{(\ln(x^2+1))' \times \sqrt{x+1} - \ln(x^2+1) \times \left(\sqrt{x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times \sqrt{x+1} - \ln(x^2+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\ &= \frac{2x\sqrt{x+1}}{(x^2+1)(x+1)} - \frac{\ln(x^2+1)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{\sqrt{x^2+1}}.\arctan(x) \Rightarrow h'(x) = \left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)'.\arctan(x) + e^{\sqrt{x^2+1}}.(\arctan(x))' \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.e^{\sqrt{x^2+1}}.\arctan(x) + e^{\sqrt{x^2+1}}.\frac{1}{x^2+1} \\ &= e^{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{x\arctan(x)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x^2+1}\right). \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{x^2}.\cos\left(x^3+1\right) \Rightarrow p'(x) = \left(e^{x^2}\right)'.\cos\left(x^3+1\right) + e^{x^2}.\left(\cos\left(x^3+1\right)\right)' \\ &= 2xe^{x^2}.\cos\left(x^3+1\right) - e^{x^2}.3x^2\sin\left(x^3+1\right) \\ &= e^{x^2}\left(2x\cos\left(x^3+1\right) - 3x^2\sin\left(x^3+1\right)\right). \end{aligned}$$

5)

$$q(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{x^2+1} \Rightarrow q(x)' = \frac{(\arctan\sqrt{x})' \times (x^2+1) - (\arctan\sqrt{x}) \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2},$$

pour $(\arctan\sqrt{x})'$, *on applique la règle :*

$$g(h(x))' = g'(h(x)) \times h'(x),$$

alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \arctan(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2+1} \\ h(x) &= \sqrt{x} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

puis

$$\left(\arctan\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)},$$

donc

$$\begin{aligned} q(x)' &= \frac{(\arctan\sqrt{x})' \times (x^2+1) - (\arctan\sqrt{x}) \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \times (x^2+1) - (\arctan\sqrt{x}) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)(x^2+1)} - \frac{2x\arctan\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 5.3.6 *Déterminer la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

2) $g(x) = x^2 \ln(x)$

Solution 5.3.6 1) *On a*

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)^2} = (x+3)^{-2},$$

on calcule

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times (x+3)^{-3} \\ f^{(2)}(x) &= 3 \times 2 \times (x+3)^{-4} \\ f^{(3)}(x) &= -4 \times 3 \times 2 \times (x+3)^{-5}, \end{aligned}$$

on conclut

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^n (n+1)! \, (x+3)^{-(n+2)} \\ &= \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+3)^{(n+2)}}. \end{aligned}$$

2) *On a*

$$g(x) = x^2 \ln(x),$$

on utilise la formule de Leibniz :

$$(f.h)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(n-p)} h^{(p)},$$

avec

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x), & h(x) &= x^2 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & h'(x) &= 2x \\ f''(x) &= -x^{-2} & h''(x) &= 2 \\ f^{(3)}(x) &= 2 \times x^{-3} & h^{(3)}(x) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= -3 \times 2 \times x^{-4} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\ln(x))^{(n-p)} \left(x^2\right)^{(p)} \\ &= C_n^0 (\ln(x))^{(n)} \left(x^2\right)^{(0)} + C_n^1 (\ln(x))^{(n-1)} \left(x^2\right)^{(1)} + C_n^2 (\ln(x))^{(n-2)} \left(x^2\right)^{(2)} + 0, \end{aligned}$$

avec

$$C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

puis

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-2}} + \frac{2n(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-2}} + \frac{n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} \\ &= \frac{1}{x^{n-2}} \left[(-1)^{n-1}(n-1)! + 2n(-1)^{n-2}(n-2)! + n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!\right]. \end{aligned}$$

Exercice 5.3.7 *Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :*

1.

$$f(x) = \left(x^3 + 5x^2\right) \ln(1+x)$$

2.

$$g(x) = x^4 \ln(3+x).$$

Solution 5.3.7 **1.** *On utilise la formule de Leibniz :*

$$(k.h)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p k^{(n-p)} h^{(p)},$$

on pose

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3+5x^2, & k(x) &= \ln(1+x) \\ h'(x) &= 3x^2+10x & k'(x) &= (1+x)^{-1} \\ h''(x) &= 6x+10 & k''(x) &= -(1+x)^{-2} \\ h^{(3)}(x) &= 6 & k^{(3)}(x) &= 2(1+x)^{-3} \\ h^{(4)}(x) &= 0 & k^{(4)}(x) &= -3.2(1+x)^{-4} \\ &. & &. \\ &. & &. \\ h^{(n)}(x) &= 0 & k^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\ln(1+x))^{(n-p)} \left(x^3+5x^2\right)^{(p)} \\ &= C_n^0 (\ln(1+x))^{(n)} \left(x^3+5x^2\right)^{(0)} + C_n^1 (\ln(1+x))^{(n-1)} \left(x^3+5x^2\right)^{(1)} \\ &\quad + C_n^2 (\ln(1+x))^{(n-2)} \left(x^3+5x^2\right)^{(2)} + C_n^3 (\ln(1+x))^{(n-3)} \left(x^3+5x^2\right)^{(3)} + 0. \end{aligned}$$

2. *On utilise la formule de Leibniz :*

$$(k.h)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p k^{(n-p)} h^{(p)},$$

on pose

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4, & k(x) &= \ln(3+x) \\ h'(x) &= 4x^3 & k'(x) &= (3+x)^{-1} \\ h''(x) &= 12x^2 & k''(x) &= -(3+x)^{-2} \\ h^{(3)}(x) &= 24x & k^{(3)}(x) &= 2(3+x)^{-3} \\ h^{(4)}(x) &= 24 & k^{(4)}(x) &= -3.2(3+x)^{-4} \\ h^{(5)}(x) &= 0 & & \\ h^{(n)}(x) &= 0 & k^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(3+x)^{-n}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\ln(3+x))^{(n-p)} \left(x^4\right)^{(p)} \\ &= C_n^0 (\ln(3+x))^{(n)} \left(x^4\right)^{(0)} + C_n^1 (\ln(3+x))^{(n-1)} \left(x^4\right)^{(1)} \\ &\quad + C_n^2 (\ln(3+x))^{(n-2)} \left(x^4\right)^{(2)} + C_n^3 (\ln(3+x))^{(n-3)} \left(x^4\right)^{(3)} \\ &\quad + C_n^4 (\ln(3+x))^{(n-4)} \left(x^4\right)^{(4)\circ} + 0. \end{aligned}$$

Exercice 5.3.8 **1.** *Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par*

$$f(x) = \arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

L'équation $f(x) = 0$ admet elle une solution dans $[0,1]$.

2. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2\left(x^3 + 5x^2\right), \\ g(x) &= \ln\left(sh^2(x) + 1\right) - \arctan(x). \end{aligned}$$

3. *Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction*

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a,b]$, préciser le nombre c de $]a,b[$.

Solution 5.3.8 **1.** ***Existence d'une solution pour*** $f(x) = 0$ *:*

$f(x) = \arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$ *est continue sur* $[0,1]$.

On a $f(0) = -\frac{\pi}{2} < 0$ *et* $f(1) = \arcsin(1) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} > 0$. *Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un* $c \in [0,1]$ *tel que* $f(c) = 0$.

2. ***Dérivées :***

Il convient de rappeler que les fonctions hyperboliques sont définies par :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } ch = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Leurs dérivées successives vérifient :

$$(sh(x))' = ch(x),\ (ch(x))' = sh(x),$$

et elles satisfont également l'identité fondamentale :

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2\left(x^3+5x^2\right) \Rightarrow f'(x) = 2\cos\left(x^3+5x^2\right)\left(\cos\left(x^3+5x^2\right)\right)' \\ &= -2\left(3x^2+10x\right)\cos\left(x^3+5x^2\right)\sin\left(x^3+5x^2\right) = -\left(3x^2+10x\right)\sin\left(2x^3+10x^2\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(sh^2(x)+1\right) - \arctan(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{\left(sh^2(x)+1\right)'}{sh^2(x)+1} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{2sh(x).sh(x)'}{sh^2(x)+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{2sh(x).ch(x)}{sh^2(x)+1} - \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

3. ***Application du théorème des accroissements finis :***

On a la fonction $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *est continue et dérivable sur* $[a,b]$, *donc d'aprés le théorème des accroissements finis :* $\exists c \in \left]a,b\right[$ *tel que :*

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(c)(b-a) \\ &\Rightarrow \left(\alpha b^2+\beta b+\gamma\right) - \left(\alpha a^2+\beta a+\gamma\right) = (2\alpha c+\beta)(b-a) \\ &\Rightarrow \alpha\left(b^2-a^2\right) + \beta(b-a) = (2\alpha c+\beta)(b-a) \\ &\Rightarrow \alpha(b-a)(b+a) + \beta(b-a) = (2\alpha c+\beta)(b-a) \\ &\Rightarrow \alpha(b+a) + \beta = 2\alpha c + \beta \Rightarrow \alpha(b+a) = 2\alpha c \\ &\Rightarrow c = \frac{\alpha(b+a)}{2\alpha} = \frac{(b+a)}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 5.3.9 *Soit la fonction*

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\pi}{4},$$

définie sur $[0,1]$.

1. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* $[0,1]$.

2. *Calculer les dérivées suivantes*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right) \\ g(x) &= Arc\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right). \end{aligned}$$

3. *On considère la fonction*

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Appliquer le théorème des accroissements finis sur $[a,b]$, *montrer qu'il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$3\alpha c^2 + 2\beta c + \gamma = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

4. *Interpréter géométriquement le résultat.*

Solution 5.3.9 1. ***Existence d'une solution pour*** $f(x) = 0$ *:*

Les fonctions $\arctan(x)$ *et* $\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$, *donc* f *est continue sur* $[0,1]$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} < 0, \\ f(1) &= \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) > 0. \end{aligned}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution dans $]0,1[$.

2.

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right) = \ln(2+\cos(x)) - \ln(2-\cos(x))$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)} = \frac{-\sin(x)(2-\cos(x)) - \sin(x)(2+\cos(x))}{(2-\cos(x))(2+\cos(x))} \\ &= \frac{-2\sin(x) + \sin(x)\cos(x) - 2\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{4-\cos^2(x)} = \frac{-4\sin(x)}{4-\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right),$$

on utilise

$$\arcsin(u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

alors

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}},$$

on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \left(x\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' \\
&= \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} + x\left(\frac{-1}{2}\right)(2x)\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Et

$$u^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow 1-u^2 = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Puis, on trouve

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

3. *On a la fonction* $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ *est continue et dérivable sur* $[a,b]$, *donc d'aprés le théorème des accroissements finis :* $\exists c \in \left]a,b\right[$ *tel que :*

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= f'(c)(b-a) \\
&\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 3\alpha c^2 + 2\beta c + \gamma.
\end{aligned}$$

4. ***Interprétation géométrique*** *:*

Il existe un point c où :

la tangente est parallèle à la corde reliant $(a, f(a)), (b, f(b))$.

CHAPITRE 6

Développements limités et formule de Taylor

Avant d'aborder les exercices, nous fournissons des points clés qui seront utiles pour les résoudre efficacement.

6.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 6.1.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et supposée de classe C^n sur I, c'est-à-dire dérivable jusqu'à l'ordre n avec des dérivées continues. Si $x_0 \in I$, alors f admet au voisinage de x_0, un développement limité d'ordre n donné par la formule de Taylor :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x). \end{aligned}$$

Où

$$\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

On écrit également le reste sous la forme

$$o((x - x_0)^n).$$

6.2 Formules de Taylor en 0 pour les fonctions usuelles

1. Fonction exponentielle :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. Fonction sinus :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .... + o\left(x^n\right).$$

3. Fonction cosinus :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - .... + o\left(x^n\right).$$

4. Fonction logarithme népérien :

$$\ln\left(1+x\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + o\left(x^n\right), \quad \left(|x| < 1\right).$$

5. Fonction puissance :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{3!}x^3 \\ &+ ... + o\left(x^n\right).\end{aligned}$$

6. Fonction tangente :

$$\tan\left(x\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ... + o\left(x^n\right).$$

7. Fonction arctangente :

$$\arctan\left(x\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + o\left(x^n\right), \quad \left(|x| \leq 1\right).$$

8. Fonction racine carrée :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + ... + o\left(x^n\right), \quad \left(|x| < 1\right).$$

9. Fonction inverse :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + ... + o\left(x^n\right), \quad \left(|x| < 1\right).$$

10. Fonction $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + o\left(x^n\right), \quad \left(|x| < 1\right).$$

11. Fonction arcsinus :

$$\arcsin\left(x\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + ... + o\left(x^n\right).$$

12. Fonction arccosinus :

$$\arcsin\left(x\right) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + ... + o\left(x^n\right).$$

6.3 Calculs et opérations sur les DL

Soient f et g deux fonctions qui admettent, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x),$$

où

$$\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Proposition 6.3.1 *La fonction $f+g$ admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n donné par :*

$$(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Proposition 6.3.2 *La fonction $f.g$ admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n :*

$$(f.g)(x) = H_n(x) + x^n \epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0,$$

où H_n, désigne le polynôme obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit $P_n(x).Q_n(x)$.

Proposition 6.3.3 *Si $Q_n(x) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathbb{Z}_n(x) + x^n \epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0,$$

où $\mathbb{Z}_n(x)$ désigne le polynôme obtenu en effectuant la division de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ terme par terme, en ne conservant que les puissances jusqu'au degré n.

6.4 Exercices

Exercice 6.4.1 *Trouver le développement limité au point $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = e^x . \sin(x)$ (*ordre* 4).

2. $f(x) = \ln(1+x^2)$ (*ordre* 4).

3. $f(x) = \cos(x) - 1$ (*ordre* 4).

4. $f(x) = xe^x$ (*ordre* 3).

5. $f(x) = (\arctan(x))^2$ (*ordre* 4).

6. $f(x) = \sinh(x)\cosh(x)$ (*ordre* 3).

Solution 6.4.1 **1.** *On utilise les DL connus :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Produit des deux :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

2. *DL connu :*

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - ...,$$

ici $u = x^2 \to u^2 = x^4$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \frac{\left(x^2\right)^2}{2} + o\left(x^4\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

3. *DL de* $\cos(x)$ *:*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) - 1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

4. *DL de* e^x *jusqu'à* x^2 *(car on multiplie par* x*) :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

5. *DL de* $\arctan(x)$ *:*

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),$$

$$(\arctan(x))^2 = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 = x^2 - 2\frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right).$$

6. *DL connus :*

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &= x + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Exercice 6.4.2 *Déterminer le développement limité au voisinage de* 0 *des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :*

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $($*ordre* $4)$.

2. $f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$ $($*ordre* $2)$.

3. $f(x) = \sin(2x)$ $($*ordre* $5)$.

4. $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ $($*ordre* $2)$.

5. $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ $($*ordre* $4)$.

6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x}\right)$ $($*ordre* $3)$.

Solution 6.4.2 **1.** *On utilise le DL :*

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o\left(u^4\right) \ \textit{pour} \ |u| < 1.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right).$$

2. *DL de :*

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right),$$

alors

$$\ln\left(1+x^2\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right),$$

puis

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

3. *DL de :*

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o\left(u^5\right),$$

alors

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\ &= 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

4. *DL de :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right),$$
$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

5. *DL de :*

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right),$$
$$\frac{\tan(x)}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o\left(x^4\right).$$

6.

$$\ln\left(\sqrt{1+x}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x),$$

DL de :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{1+x}\right) &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Exercice 6.4.3 *Donner le développement limité au voisinage de* 0 *à l'ordre* n *des fonctions suivantes :*

$$1)\ \frac{\ln(1+x)}{1+x}\ \ (\textit{ordre } n=4),\ \ 2)\ e^{\cos x}\ \ (\textit{ordre } n=4),$$
$$3)\ (1+x)^x\ \ (\textit{ordre } n=5),\ \ 4)\ \cos\left[\ln(1-x)\right]\ \ (\textit{ordre } n=4).$$

Solution 6.4.3 1) *On sait que*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right),$$

et

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right),$$

d'où, en multipliant les deux développements limités et en conservant les termes ayant un degré inférieur ou égal à 4*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{1+x} &= \ln(1+x)(1+x)^{-1} \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4\right) + o\left(x^4\right) \\
&= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

2) *On sait que*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) \text{ et } e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + o\left(y^4\right),$$

pour x et y au voisinage de 0. D'où

$$e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)} = e^1 e^{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)},$$

mais puisque $-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ est proche de 0*, alors*

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!} + o\left(x^4\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right),
\end{aligned}$$

et on n'a pas écrit les autres termes (dans la première égalité) car on est sûr qu'ils nous donneront des termes dont le degré est supérieur ou égal à 5*. Ainsi*

$$e^{\cos x} = e\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)\right) + o\left(x^4\right).$$

3) *Puisque x est au voisinage de* 0*, alors $x > -1$ et donc on peut écrire $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$. Puisqu'on a besoin du développement limité de notre fonction à l'ordre 5, on écrira celui de $\ln(1+x)$ à l'ordre* 4 *et on sait que*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right),$$

d'où

$$x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o\left(x^5\right).$$

Pour finir, on a besoin seulement du développement de l'exponentielle à l'ordre 2 *et on a :*

$$\begin{aligned} e^{x\ln(1+x)} &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4}\right)^2}{2!} + o\left(x^5\right) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} - \frac{3x^5}{4} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

4) *Si x est proche de* 0*, alors $-x$ est proche de* 0 *et donc on peut écrire :*

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + o\left(x^4\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \cos\left[\ln(1-x)\right] &= 1 - \frac{\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^4}{24} + o\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{12} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Exercice 6.4.4 *En utilisant le développement limité, calculer les limites suivantes :*

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^3 + x^2}.$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m}} - (1+x)^{\frac{1}{n}}}{x}.$$

Solution 6.4.4 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^3 + x^2} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right),$$

et

$$\sin(x) = x + o\left(x^2\right),$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^3 + x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right).x}{x^3 + x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 - \frac{x^3}{2}}{x^3 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 - \frac{x}{2}}{x+1} = -1. \end{aligned}$$

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-(1+x)^{\frac{1}{n}}}{x}=\frac{0}{0}\ F.I.$$

On a :
$$(1+x)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}x+o(x),$$

et
$$(1+x)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}x+o(x),$$

alors
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-(1+x)^{\frac{1}{n}}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{m}x-1-\frac{1}{n}x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}{x}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Exercice 6.4.5 *En utilisant le développement limité, calculer les limites suivantes :*
$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-5^x}{2^x-4^x},\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x},\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt{1+x}-x\left(e^x-1\right)}{\left[\ln(1+x)\right]^4}.$$

Solution 6.4.5 **1)** *Un développement limité à l'ordre* 1 *est suffisant pour trouver la limite dans cette question. On a*
$$3^x-5^x=e^{x\ln 3}-e^{x\ln 5}=(1+x\ln 3)-(1+x\ln 5)+o(x),$$

d'où
$$3^x-5^x=x(\ln 3-\ln 5)+o(x).$$

De la même manière on obtient :
$$\begin{aligned}2^x-4^x &= e^{x\ln 2}-e^{x\ln 4}=(1+x\ln 2)-(1+x\ln 4)+o(x)\\ &= x(\ln 2-\ln 4)+o(x).\end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3^x-5^x}{2^x-4^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x(\ln 3-\ln 5)+o(x)}{x(\ln 2-\ln 4)+o(x)}\\ &= \frac{\ln 3-\ln 5}{\ln 2-\ln 4}.\end{aligned}$$

2) *On a besoin d'un développement d'ordre* 3 *pour calculer cette limite. On a*
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right),$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right),$$

et alors

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \frac{\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)},$$

et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1.$$

3) *On a*

$$\begin{aligned} x^2\sqrt{1+x} &= x^2\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right) \\ &= x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\ &\Rightarrow x\left(e^x - 1\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right), \end{aligned}$$

et

$$\ln(1+x) = x + o(x) \Rightarrow [\ln(1+x)]^4 = x^4 + o\left(x^4\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} x^2\sqrt{1+x} - x\left(e^x - 1\right) &= -\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right) \\ &= \frac{-14x^4}{48} + o\left(x^4\right) = \frac{-7x^4}{24} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x^2\sqrt{1+x} - x\left(e^x - 1\right)}{[\ln(1+x)]^4} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-7x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^4\right)} \\ &= \frac{-7}{24}. \end{aligned}$$

Exercice 6.4.6 *En utilisant le développement limité, calculer les limites suivantes :*

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin(x))^4}.$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) + \cos x - xe^{2x} - 1}{-2x^2}.$$

Solution 6.4.6 **1.** *Le DL de :*

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right),$$

et

$$\sin(x) = x + o(x),$$

alors

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin(x))^4} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(x + o(x))^4} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. *DL nécessaires :*

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \\ e^{2x} &= 1 + 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) + \cos x - xe^{2x} - 1}{-2x^2} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} - x(1 + 2x + 2x^2) - 1}{-2x^2} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} - x - 2x^2 - 2x^3 - 1}{-2x^2} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 - 2x^3}{-2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2(3 + 2x)}{-2x^2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 6.4.7 *En utilisant le développement limité, calculer les limites suivantes :*

$$1)\ \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\ln x) - 1}{(e^x - e)^2},\ \ 2)\ \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Solution 6.4.7 **1)** *Un développement d'ordre* 2 *est suffisant dans ce cas. Posons* $x = 1+t$ *et donc si* x *est proche de* 1, *alors* t *est proche de* 0. *D'où*

$$\ln x = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}\cos(\ln(1+t)) &= 1 - \frac{\left(t - \frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + o\left(t^2\right) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$e^x - e = e^{1+t} - e = e\left(e^t - 1\right) = e\left(1 + t + o(t) - 1\right),$$

d'où

$$\left(e^x - e\right)^2 = e^2 t^2 + o\left(t^2\right).$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\ln x) - 1}{\left(e^x - e\right)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{t^2}{2}}{e^2 t^2} = -\frac{1}{2e^2}.$$

2) *On a*

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x}\ln x}.$$

Posons $x = 1 + y$ *et donc* $(x \to 1 \Leftrightarrow y \to 0)$, *d'où*

$$\begin{aligned}\frac{\ln x}{1-x} &= \frac{\ln(1+y)}{-y} = \frac{y + o(y)}{-y} \\ &\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y + o(y)}{-y} = -1,\end{aligned}$$

et puisque la fonction exponentielle est continue, alors

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

CHAPITRE 7

Matrices

7.1 Éléments essentiels du calcul matriciel

Avant d'aborder les exercices, nous rappelons les notions essentielles sur les matrices.

Définition 7.1.1 *Une matrice de $\mathbb{k}$ de type (n,p) est un tableau rectangulair A d'éléments de $\mathbb{k}$ à n lignes et p colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On note a_{ij} l'élément situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne, et on représente la matrice A par

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}.$$

L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{k}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{k})$.

- *Pour $n = 1$, A est appelée une matrice ligne, $A = (a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,p})$.*
- *Pour $p = 1$, A est appelée une matrice colonne, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ .. \\ a_{1p} \end{pmatrix}$.*
- *Pour $n = p$, A est appelée une matrice carrée d'ordre n et est notée $A \in M_n(\mathbb{k})$.*
- *La matrice (de taille $n\times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0.*

Définition 7.1.2 *Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ deux matrices de type (n,p),*

- *On dit que* $A = B$ *if* $\forall i = 1, ..., n,\ \forall j = 1, ..., p;\ a_{ij} = b_{ij}$.
- *La transposée de la matrice* A *est une matrice notée* A^T *définie par*

$$A^T = (a_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n},$$

c'est-à-dire que A^T *est la matrice de taille* $p \times n$ *obtenue en échangeant les lignes et les colonnes.*

Définition 7.1.3 *Soient* A *et* B *deux matrices ayant la même taille* $n \times p$. *Leur somme* $C = A + B$ *est la matrice de taille* $n \times p$ *définie par*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Définition 7.1.4 *Soient* $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $B \in M_{p,m}(\mathbb{k})$, *on définit le produit matriciel* $A \times B$ *comme la matrice* $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in M_{n,m}(\mathbb{k})$, *où*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}.$$

Définition 7.1.5 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$,

* *L'ensemble des éléments* $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ *est appelé la diagonale principale de* A.

* A *est une matrice diagonale si* $a_{ij} = 0$ *dès que* $i \neq j$.

* *Une matrice* A *est dite symétrique si* $A^T = A$.

Determinants

Définition 7.1.6 *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, *une matrice carrée.*

1- *Développement suivant la colonne* j *: Le déterminant de* A *est donné par :*

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j}D_{2j} + ... + (-1)^{n+j} a_{nj}D_{nj},\ j = 1, ..., n,$$

où D_{ij} *est le mineur de l'élément* a_{ij}, *c'est-à-dire le déterminant de la matrice* $(n-1) \times (n-1)$ *obtenue en supprimant la ligne* i *et la colonne* j *de* A.

2- *Développement suivant la ligne* i *: Le déterminant de* A *est aussi donné par :*

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}D_{i2} + ... + (-1)^{i+n} a_{in}D_{in},\ i = 1, ..., n,$$

avec D_{ij} *défini comme ci-dessus.*

Définition 7.1.7 *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_n(\mathbb{k})$ *. On définit le cofacteur (i,j) de A comme*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Où A_{ij} *désigne la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne* i *et la colonne* j*.*

La matrice $C = (c_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ *est appelée matrice des cofacteurs, et la matrice* C^T *est appelée matrice adjointe de A.*

Diagonalisation

Définition 7.1.8 *Une matrice* $A \in M_n(\mathbb{k})$ *est dite diagonalisable si elle peut s'écrire sous la forme* $A = PDP^{-1}$*, où* P *est une matrice inversible (appelée matrice de passage) et* D *est une matrice diagonale.*

Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un système de n léquations linéaires à p inconnues sur $\mathbb{k}$ est tout système qui peut s'exprimer sous la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases},$$

où les $(x_j)_{j=1,\dots,p}$ sont les inconnues, et les coefficients (a_{ij}), $b_j \in \mathbb{k}$.

*** Forme matricielle du système**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ Le système (S) s'écrit alors :

$$AX = B.$$

*** Solution du système**

Définition 7.1.9 *On appelle solution du système* (S) *tout élément* $X = (x_1, ..., x_p)$ *satisfaisant les* n *équations de* (S)*. Cela revient à trouver un vecteur* X *tel que* $AX = B$*.*

Règle de Cramer

Définition 7.1.10 *Le système (S) est appelé un système de Cramer si $n = p = r$, c'est-à-dire si (S) est un système $n \times n$ (avec n équations et n inconnues) et que* $\det(A) \neq 0$.

Théorème 7.1.1 *Tout système de Cramer admet une unique solution, exprimée par :*

$$X = A^{-1}B.$$

7.2 Exercices

Exercice 7.2.1

(1) *Soient les matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants s'ils sont définis : $A.B$, $B.A$, $A.C$, $C.A$, A^2, B^2.

(2) *Soient :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

Calculer l'expression matricielle $A^2 + AB + A$, puis en déduire la matrice inverse A^{-1}.

Solution 7.2.1 **(1)** *Rappelons que :*

- *Le produit matriciel $A \times B$ est défini si et seulement si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.*
- *Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{k})$, On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{k})$ telle que*

$$A.B = B.A = I_n.$$

On obtient donc :

* *L'opération $A \times B$ n'est pas définie car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.*

* *Nous pouvons calculer $B \times A$ car les matrices ont des dimensions compatibles, donc nous avons*

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 3 \times (-2) & 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 3 + 3 \times 1 \\ 3 \times 2 + (-1)(-2) & 3 \times 1 + (-1) \times 2 & 3 \times 3 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

* *La multiplication matricielle $A \times C$ est possible car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de C, donc nous avons*

$$A \times C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 2 \\ (-2) \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

* *L'opération $C \times A$ n'est pas définie car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.*
* *Le produit $A \times A$ n'est pas défini car les dimensions sont incompatibles.*
* *Nous pouvons calculer $B \times B$ car les matrices ont des dimensions compatibles, donc nous avons*

$$\begin{aligned} B^2 &= B \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 3 \times 3 & 2 \times 3 + 3 \times (-1) \\ 3 \times 2 + (-1) \times 3 & 3 \times 3 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) *Calculons $A^2 + AB + A$,*

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 2 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-3) + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times (-3) \\ 1 \times (-3) + 1 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} A^2 + AB + A &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

* *On a,*

$$A^2 + AB + A = I_2 \Rightarrow A\left(A + B + I_2\right) = I_2,$$

par conséquent, la matrice A est inversible et

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A + B + I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 7.2.2 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

(1) *Calculer A^2, puis déterminer deux réels α, β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$, où*

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est la matrice identité d'ordre 3.

(2) *En utilisant le résultat précédent, montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.*

(3) *Retrouver la matrice inverse A^{-1} en utilisant la méthode de la comatrice (ou matrice des cofacteurs).*

Solution 7.2.2 *Rappelons que :*

- *La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$. On a :*

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas, la matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.C^T,$$

où C^T est la matrice adjointe de A.

(1)

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

on a donc :

$$\begin{aligned} A^2 &= \alpha A + \beta I_3 \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & -3\alpha & 6\alpha \\ 6\alpha & -8\alpha & 12\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -3\alpha & 6\alpha \\ 6\alpha & -8\alpha+\beta & 12\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ -3\alpha=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=1-\alpha=2 \\ \alpha=-1 \end{cases},$$

on en déduit :

$$A^2=-A+2I_3.$$

(2) *En utilisant le résultat précédent, on a :*

$$\begin{aligned} A^2 &= -A+2I_3 \Leftrightarrow A^2+A=2I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(A^2+A\right)=I_3 \\ &\Leftrightarrow A.\frac{1}{2}\left(A+I_3\right)=I_3 \Rightarrow A \text{ est inversible,} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2}\left(A+I_3\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) *En utilisant la méthode des cofacteurs, on obtient :*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^T,$$

où C est la matrice des cofacteurs.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}.(1).\begin{vmatrix} -8 & 12 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.(-3).\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+3}.(6).\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 4\neq 0, \end{aligned}$$

Calculons maintenant la matrice des cofacteurs,

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -8 & 12 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 12 & 6 \\ -6 & -14 & -6 \\ 12 & 24 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 12 \\ 12 & -14 & 24 \\ 6 & -6 & 10 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad & A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 12 \\ 12 & -14 & 24 \\ 6 & -6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.2.3 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *La matrice A est-elle inversible ?*

2. *Calculer A^3.*

3. *En déduire que $(I - A)$ est inversible et en déduire l'expression $(I - A)^{-1}$.*

4. *Retrouver $(I - A)^{-1}$ par la méthode classique (en utilisant la comatrice).*

Solution 7.2.3 **1.** *La matrice A est-elle inversible ?*

Le déterminant de A est :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2(1) - 1(2) = 0.
\end{aligned}$$

Comme $\det(A) = 0$, *la matrice A n'est pas inversible.*

2. *Calcul de A^3 :*

On calcule d'abord A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Inversibilité de* $(I - A)$ *et expression de* $(I - A)^{-1}$:

Comme $A^3 = 0$, *alors* $I = I - A^3$, *d'un autre coté*

$$I = I - A^3 = (I - A)\left(I + A + A^2\right),$$

ce qui permet de conclure que $(I - A)$ *est inversible et*

$$\begin{aligned} (I - A)^{-1} &= I + A + A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. *Retrouver* $(I - A)^{-1}$ *par la comatrice :*

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

déterminant de $(I - A)$:

$$\begin{aligned} \det(I - A) &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4 + 5 = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

alors $(I - A)$ *est inversible.*

Comatrice de $(I-A)$:

$$com\,(I-A)=\begin{pmatrix}4&-5&2\\2&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

puis

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{\det(I-A)}com\,(I-A)^t\,,$$

alors

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&1\\-5&-2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

On retrouve bien le même résultat.

Exercice 7.2.4 *Considérons la matrice suivante :*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&5\\2&5&-1\end{pmatrix}.$$

(1) *Montrer que* A *est inversible et déterminer* A^{-1}.

(2) *Écrire le système* (S) *sous forme matricielle* $A.X=b$, *où*

$$(S)=\begin{cases}x+y+z=6\\2y+5z=-4\\2x+5y-z=27\end{cases}.$$

(3) *En déduire la solution du système* (S).

Solution 7.2.4 **(1)** *La matrice* A *est inversible si* $\det(A)\neq 0$,

$$\begin{aligned}\det(A)&=(-1)^{2+1}.0.\begin{vmatrix}1&1\\5&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}.2.\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}\\&\quad+(-1)^{2+3}.5.\begin{vmatrix}1&1\\2&5\end{vmatrix}\\&=0-6-15=-21\neq 0,\end{aligned}$$

donc, A *est inversible et*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^T,$$

procédons au calcul de la matrice des cofacteurs,

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -27 & 10 & -4 \\ 6 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \\
&\Rightarrow \ A^{-1} = -\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) *Le système (S) sous forme matricielle $AX = b$,*

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

(3) *La solution du système (S) est*

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}b \\
&= -\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercice 7.2.5 *Soit α un paramètre réel, on considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Pour quelles valeurs du paramètre α. La matrice A est-elle inversible ?*

2. *Lorsque cela est possible, calculer* A^{-1}. *(On rappelle que* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com\,(A)^t$*).*

3. *En déduire la solution du système*

$$\begin{cases} y + z = 4 \\ 2x + 2y = 16 \\ 3x + 3z = 12 \end{cases}.$$

Solution 7.2.5 **1.** *Inversibilité de* A :

La matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

son déterminant est :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 - \alpha^3 = -\left(1 + \alpha^3\right), \end{aligned}$$

la matrice A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$, *c'est-à-dire*

$$-\left(1 + \alpha^3\right) \neq 0 \Rightarrow \alpha^3 \neq -1 \Rightarrow \alpha \neq -1.$$

2. *Calcul* A^{-1} *pour* $\alpha \neq -1$:

On a $\det(A) = -(1 + \alpha^3)$, *la comatrice de* A *est :*

$$com\,(A) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

comme A *est symétrique,* $com\,(A)^t = com\,(A)$. *Ainsi,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com\,(A)^t = -\frac{1}{1 + \alpha^3} \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

3. *Résolution du système :*

Le système

$$\begin{cases} \quad y+z=4 \\ 2x+2y=16 \\ 3x+3z=12 \end{cases},$$

se simplifie en :

$$\begin{cases} y+z=4 \\ x+y=8 \\ x+z=4 \end{cases},$$

en réarrangeant les équations on trouve

$$\begin{cases} x+z=4 \\ y+z=4 \\ x+y=8 \end{cases},$$

on reconnaît la matrice A avec $\alpha = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = 1$,

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la solution est $X = A^{-1}b$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la solution du système est $x = 4, y = 4, z = 0$.

Exercice 7.2.6 *Soit la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) *Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de la matrice A.*

(2) *Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres.*

(3) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

Solution 7.2.6 *Rappelons que : Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{k})$ et soit $\lambda \in \mathbb{k}$.*

• *On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$. Le vecteur v est alors appelé un vecteur propre associé à λ.*

• *λ est une valeur propre de A si et seulement si il vérifie l'équation caractéristique* $\det(A - \lambda I) = 0$.

• *Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est appelé le polynôme caractéristique de A.*

• *L'ensemble E_λ défini par :*

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n / Av = \lambda v\},$$

est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) *Le polynôme caractéristique de la matrice A est égal à :*

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

En développant selon la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (-1)^{2+1}.0. \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.(2-\lambda). \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3}.0. \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda).\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda).\left[((3-\lambda)-1)((3-\lambda)+1)\right] \\ &= (2-\lambda).(2-\lambda).(4-\lambda) = (2-\lambda)^2.(4-\lambda). \end{aligned}$$

(2)

* *Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$, donc*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{2, 2, 4\}.$$

* *Détermination des vecteurs propres $\{v_1, v_2, v_3\}$,*

(a) *Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,*

$$\begin{aligned}
Av_1 &= 2v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x - y - z = 2x \\ 2y = 2y \\ -x + y + 3z = 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - y - z = 0 \\ y = y \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow x = y + z,
\end{aligned}$$

on obtient alors,

$$\begin{aligned}
v_{1,2} &= \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) *Pour $\lambda_3 = 4$,*

$$\begin{aligned}
Av_3 &= 4v_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x - y - z = 4x \\ 2y = 4y \\ -x + y + 3z = 4z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ x = -z \end{array} \right.,
\end{aligned}$$

on obtient alors,

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

les vecteurs propres sont donc

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(3) $*$ *Souvenons-nous : une matrice $n\times n$ qui a n valeurs propres distinctes est nécessairement diagonalisable.*

Ici, dans notre exercice, l'existence de trois vecteurs propres distincts garantit que la matrice A est diagonalisable.

Exercice 7.2.7 *On considère la matrice $M\in M_3(\mathbb{R})$ suivante*

$$M=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M.*

2. *Déterminer le spectre de M, c'est à dire l'ensemble des valeurs propres de M.*

3. *La matrice M est-elle diagonalisable ?*

Solution 7.2.7 *On considère la matrice $M\in M_3(\mathbb{R})$ suivante*

$$M=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

1. *Polynôme caractéristique de M :*

Le polynôme caractéristique de la matrice M est égal à :

$$\chi_M(X)=\begin{vmatrix}-1-X&1&0\\2&-X&-2\\0&0&-2-X\end{vmatrix},$$

en développant par rapport à la dernière ligne, on trouve

$$\begin{aligned}\chi_M(X)&=-(X+2)\begin{vmatrix}-1-X&1\\2&-X\end{vmatrix}\\&=-(X+2)(X(X+1)-2)\\&=-(X+2)\left(X^2+X-2\right)\\&=-(X+2)^2(X-1).\end{aligned}$$

2. *Spectre de M :*

Déterminer le spectre de M, c'est à dire l'ensemble des valeurs propres de M. Le spectre de M est égal à l'ensemble des racines du polynôme caractéristique :

$$SpecM = \{1, -2\}.$$

3. *Diagonalisabilité de M :*

Le sous espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 est défini par

$$E_{-2} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 / MX = -2X\right\},$$

si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'équation $MX = -2X$ devient

$$\begin{cases} -x + y = -2x \\ 2x - 2z = -2y \\ -2z = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

donc, le sous espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 est égal à

$$E_{-2} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice M est diagonalisable SSi les dimensions des sous-espaces propres (non réduits au vecteur nul) sont égales à la multiplicité algébrique des valeurs propres dans le polynôme caractéristique :

Ici la dimension de E_{-2} est $1 < 2$, donc la matrice M n'est pas diagonalisable.

Exercice 7.2.8 *Soit le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

1. *Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = B$.*

2. *Démontrer que (S) admet une solution.*

3. *Résoudre le système par la méthode de Cramer.*

Solution 7.2.8 **1.** *Forme matricielle $AX = B$:*

La forme matricielle s'écrit $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Existence d'une solution :*

Le déterminant de A est :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1. \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 + 2 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Puisque $\det(A) \neq 0$*, la matrice A est inversible et le système admet une unique solution.*

3. *Résolution par la méthode de Cramer :*

Les solutions sont données par $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, où A_i est la matrice A avec la i-ème colonne remplacée par B.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 2 \times (-1) + (-1)(-3) = 1, \\ x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1 \times (-3) - 2(-2) - 1 \times 0 = 1, \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 1 \times (3) + 2(-2) = -1, \end{aligned}$$

Exercice 7.2.9 *Considérons le système suivant :*

$$(S) = \begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ x - y + z = 1 \\ -2x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

(1) *Écrire le système* (S) *sous forme matricielle* $A.X = b$.

(2) *Montrer que* (S) *admet une solution.*

(3) *Résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.*

Solution 7.2.9 **(1)** *Le système* (S) *sous forme matricielle :*

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) *Le système* (S) *admet une solution si* $\det(A) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}.1. \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(-2). \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3}.1. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1 + 2 + 0 = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

par conséquent, le système (S) *admet une solution.*

(3) *On utilise la méthode de Cramer pour résoudre le système* (S),

$$\begin{aligned} x &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 1, \\ y &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 4, \\ z &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 4. \end{aligned}$$

CHAPITRE 8 Primitives et calcul de l'intégrale pour une fonction continue

Dans ce chapitre, nous présentons certaines définitions essentielles à la résolution des exercices.

8.1 Primitives d'une fonction continue

Définition 8.1.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x appartenant à I, on a*

$$F^{'}(x) = f(x).$$

Théorème 8.1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F est une primitive de f sur cet intervalle. Alors toute primitive de f sur I s'écrit sous la forme :*

$$F(x) + C,$$

où C est une constante réelle. Autrement dit, si une fonction admet une primitive sur I, alors cette primitive n'est pas unique.

Définition 8.1.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F l'une de ces primitives sur cet intervalle. On note généralement l'ensemble des primitives de f sous la forme :*

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Cette écriture est appelée intégrale indéfinie de la fonction f.

Proposition 8.1.1 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$:*

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

2. *Pour tout réel λ :* $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$

Ces propriétés montrent que l'intégrale est une application linéaire :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

Cependant, en général :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \neq \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_a^b g(x)\, dx \right).$$

8.2 Techniques d'intégration

Intégration par parties

Proposition 8.2.1 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors, on a la relation suivante :*

$$\int u(x)v^{'}(x)dx = u(x)v(x) - \int u^{'}(x)v(x)dx.$$

Intégration par changement de variable

Proposition 8.2.2 *Si f est continue et φ est dérivable, alors en posant $u = \varphi(x)$, on obtient :*

$$\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

Autrement dit, on remplace $\varphi(x)$ par u pour simplifier le calcul de l'intégrale.

8.3 Primitives des fonctions usuelles

1. $\int e^x dx = e^x + c$ sur $\mathbb{R}$.

2. $\int \cos x dx = \sin x + c$ sur $\mathbb{R}$.

3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ sur $\mathbb{R}$.

4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$.

5. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \in \mathbb{R}/\{-1\})$ sur $]0, +\infty[$.

6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.

7. $\int shx dx = chx + c$, $\int chx dx = shx + c$ sur $\mathbb{R}$.

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} dx = \arctan x + c$ sur $\mathbb{R}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$ sur $]-1, 1[$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} dx = \begin{cases} \arg shx + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \arg chx + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$ sur $x \in]1, +\infty[$.

8.4 Exercices

Exercice 8.4.1 *Calculer les intégrales indéfinies suivantes :*

$$\begin{aligned} 1) I_1 &= \int \left(2x^3 + x\right) e^x dx,\ 2) I_2 = \int \left(x^2 + 2\right) \cos(x)\, dx,\ 3) I_3 = \int \ln(x)\, dx, \\ 4) I_4 &= \int x \arctan(x)\, dx,\ 5) I_5 = \int x^3 \ln(x)\, dx,\ 6) I_6 = \int \arccos(x)\, dx. \end{aligned}$$

Solution 8.4.1 1)

$$I_1 = \int \left(2x^3 + x\right) e^x dx = 2\underbrace{\int x^3 e^x dx}_{I_1'} + \underbrace{\int x e^x dx}_{I_2'}.$$

Pour calculer I_1', on utilise l'intégration par parties, on pose :

$$\begin{aligned} u' &= e^x, u = e^x \\ v &= x^3, v' = 3x^2 dx, \end{aligned}$$

alors,

$$I_1' = x^3 e^x - 3\underbrace{\int x^2 e^x dx}_{I_3'},$$

on pratique à nouveau l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u' &= e^x, u = e^x \\ v &= x^2, v' = 2xdx, \end{aligned}$$

alors,

$$I_3' = x^2e^x - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{I_4'},$$

refaisons une intégration par parties

$$\begin{aligned} u' &= e^x, u = e^x \\ v &= x, v' = 1dx, \end{aligned}$$

alors,

$$I_4' = xe^x - \int e^x dx = e^x (x-1) + c,$$

puis,

$$\begin{aligned} I_1 &= 2x^3e^x - 6x^2e^x + 12e^x (x-1) + e^x (x-1) + c \\ &= 2e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + e^x (x-1) + c \\ &= e^x \left(2x^3 - 6x^2 + 13x - 13\right) + c. \end{aligned}$$

2)

$$I_2 = \int \left(x^2+2\right) \cos(x)\, dx = \underbrace{\int x^2 \cos(x)\, dx}_{I_2'} + 2\int \cos(x)\, dx,$$

Pour calculer I_2', on utilise l'intégration par parties, on pose :

$$\begin{aligned} u' &= \cos(x), u = \sin(x) \\ v &= x^2, v' = 2xdx, \end{aligned}$$

alors,

$$I_2' = x^2 \sin(x) - 2\underbrace{\int x \sin(x) dx}_{I_2''},$$

refaisons une intégration par parties

$$\begin{aligned} u' &= \sin(x), u = -\cos(x) \\ v &= x, v' = 1dx, \end{aligned}$$

alors,

$$I_2'' = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c,$$

puis,

$$\begin{aligned} I_2 &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + 2\sin(x) + c \\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) + c. \end{aligned}$$

3)

$$I_3 = \int \ln(x)\,dx,$$

on utilise l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u' &= 1, u = x \\ v &= \ln(x), v' = \frac{1}{x}dx, \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} I_3 &= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + c \\ &= x(\ln(x) - 1) + c \end{aligned}$$

4)

$$I_4 = \int x\arctan(x)\,dx,$$

pour calculer cette intégrale, on utilise la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u' &= x, u = \frac{x^2}{2} \\ v &= \arctan(x), v' = \frac{1}{x^2+1}dx, \end{aligned}$$

puis,

$$I_4 = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx,$$

et

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1},$$

donc

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2+1}dx &= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= x - \arctan(x) + c, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}I_4 &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x) + c\\ &= \frac{x^2+1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}x + c.\end{aligned}$$

5)

$$I_5 = \int x^3 \ln(x)\, dx,$$

on effectue une intégration par parties

$$\begin{aligned}u' &= x^3, u = \frac{x^4}{4}\\ v &= \ln(x), v' = \frac{1}{x}dx,\end{aligned}$$

on trouve,

$$\begin{aligned}I_5 &= \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3 dx\\ &= \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + c\\ &= \frac{x^4}{4}\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right) + c.\end{aligned}$$

6)

$$I_6 = \int \arccos(x)\, dx,$$

on applique l'intégration par parties

$$\begin{aligned}u' &= 1, u = x\\ v &= \arccos(x), v' = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},\end{aligned}$$

on trouve,

$$\begin{aligned}I_6 &= x\arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= x\arccos(x) - \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

Exercice 8.4.2 *Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :*

$$\begin{aligned}1)\ I_1 &= \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx,\ 2)\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx,\\ 3)\ I_3 &= \int \frac{\ln(3x)}{x}dx,\ 4)\ I_4 = \int \frac{1}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}dx.\end{aligned}$$

Solution 8.4.2 **1)** *Posons :*

$$u = 1 + x^2, du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}.$$

Changement des bornes :

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 0 \Rightarrow u = 1, \\ \text{Si } x &= 1 \Rightarrow u = 2. \end{aligned}$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 1\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right]. \end{aligned}$$

2) *Posons :*

$$u = 1 + \sin x,$$

alors

$$du = \cos x dx.$$

Changement des bornes :

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 0 \Rightarrow u = 1, \\ \text{Si } x &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}dx = \int_1^2 \frac{du}{u} \\ &= [\ln |u|]_1^2 = \ln 2. \end{aligned}$$

3) *Posons*

$$u = \ln(3x),$$

alors

$$du = \frac{1}{x}dx,$$

donc

$$I_3 = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln(3x))^2}{2} + c.$$

4) *On utilise le changement classique :*

$$t = \tan x,$$

alors

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

et

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Le dénominateur devient

$$4\sin^2 x + 9\cos^2 x = \frac{4t^2+9}{1+t^2},$$

donc

$$I_4 = \int \frac{1}{\frac{4t^2+9}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{4t^2+9},$$

or

$$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right).$$

Donc

$$I_4 = \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2t}{3}\right) + c,$$

en remplaçant

$$t = \tan x,$$

on trouve

$$I_4 = \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2\tan x}{3}\right) + c.$$

Exercice 8.4.3 *Calculer les intégrales indéfinies suivantes :*

1. $I_1 = \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx.$

2. $I_2 = \int \frac{x-2}{x^2+4x+5} dx.$

3. $I_3 = \int \frac{1}{x^2-8x+12} dx.$

4. $I_4 = \int \frac{x-3}{(x^2+6x+10)^2} dx.$

Solution 8.4.3 1.

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx.$$

On complète le carré :

$$x^2+4x+8 = \left(x^2+4x+4\right)+4 = (x+2)^2+4.$$

On utilise la formule

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a},$$

alors

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + c.$$

2.

$$I_2 = \int \frac{x-2}{x^2+4x+5} dx.$$

On écrit $x-2 = \frac{1}{2}(2x+4) - 4$ *pour séparer la fraction :*

$$\frac{x-2}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2} \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{4}{x^2+4x+5},$$

– *Première partie :*

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx = \ln\left|x^2+4x+5\right|,$$

– *Deuxième partie :*

$$\int \frac{4}{x^2+4x+5} dx = 4 \int \frac{dx}{(x+2)^2+1^2} = 4 \arctan(x+2),$$

donc :

$$I_2 = \frac{1}{2} \ln\left|x^2+4x+5\right| - 4 \arctan(x+2) + c.$$

3.

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2-8x+12} dx.$$

On complète le carré :

$$x^2-8x+12 = \left(x^2-8x+16\right)-4 = (x-4)^2-2^2.$$

On utilise la formule

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|,$$

alors

$$I_3 = \int \frac{1}{(x-4)^2 - 2^2} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-4-2}{x-4+2} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-6}{x-2} \right| + c.$$

4.

$$I_4 = \int \frac{x-3}{(x^2+6x+10)^2} dx.$$

On complète le carré :

$$x^2 + 6x + 10 = \left(x^2 + 6x + 9\right) + 1 = (x+3)^2 + 1^2.$$

Posons $u = x + 3 \Rightarrow du = dx$, *alors* $x - 3 = u - 6$ *:*

$$\int \frac{u-6}{(u^2+1)^2} du = \int \frac{u}{(u^2+1)^2} du - 6 \int \frac{du}{(u^2+1)^2},$$

– *Première partie :*

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^2} du = -\frac{1}{2(u^2+1)},$$

– *Deuxième partie : on utilise la formule*

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{a^3} \arctan \frac{x}{a} \right) + c,$$

alors

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u^2+1} + \arctan u \right).$$

Donc en remplaçant $u = x + 3$

$$I_4 = -\frac{1}{2\left((x+3)^2+1\right)} - 3 \left(\frac{x+3}{(x+3)^2+1} + \arctan(x+3) \right) + c.$$

Exercice 8.4.4 *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $K_1 = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$

2. $K_2 = \int \frac{dx}{(2+\cos x)^2}.$

3. $K_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$

4. $K_4 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

Solution 8.4.4 **1.**

$$K_1 = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

On pose :

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx,$$

donc :

$$\sin x dx = -du,$$

l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} K_1 &= \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\int \frac{du}{1+u^2} \\ &= -\arctan(u) + c = -\arctan(\cos x) + c. \end{aligned}$$

2.

$$K_2 = \int \frac{dx}{(2+\cos x)^2}.$$

On pose :

$$t = \tan \frac{x}{2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

alors :

$$2 + \cos x = 2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2(1+t^2) + (1-t^2)}{1+t^2} = \frac{3+t^2}{1+t^2},$$

donc :

$$(2+\cos x)^2 = \frac{(3+t^2)^2}{(1+t^2)^2},$$

l'intégrale devient :

$$K_2 = \int \frac{2}{1+t^2} \frac{(1+t^2)^2}{(3+t^2)^2} dt = \int \frac{2(1+t^2)}{(3+t^2)^2} dt.$$

On écrit :

$$\int \frac{2(1+t^2)}{(3+t^2)^2} dt = \int \frac{2}{t^2+3} dt - \int \frac{4}{(t^2+3)^2} dt,$$

on utilise :

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right),$$

et

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan\left(\frac{t}{a}\right),$$

alors :

$$\int \frac{2}{t^2+3} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c,$$

et

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{(t^2+3)^2}dt &= \frac{4t}{6(t^2+3)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+c\\ &= \frac{2t}{3(t^2+3)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+c,\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)-\frac{2t}{3(t^2+3)}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+c\\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)-\frac{2t}{3(t^2+3)}+c.\end{aligned}$$

3.

$$K_3=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx.$$

On pose :

$$u=\sin x \Rightarrow du=\cos x dx,$$

Donc :

$$\begin{aligned}K_3 &= \int_{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\frac{du}{u^3}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{du}{u^3}=\left[-\frac{1}{2u^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\\ &= -\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

4.

$$K_4=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$$

On pose :

$$u=\sin x+\cos x \Rightarrow du=(\cos x-\sin x)\,dx=-(\sin x-\cos x)\,dx,$$

donc :

$$(\sin x-\cos x)\,dx=-du,$$

alors :

$$K_4=\int\frac{-du}{u}=-\ln|u|+c=-\ln|\sin x+\cos x|+c.$$

Exercice 8.4.5 *Calculer*

1. $I_1 = \int \cos^4 x \sin^5 x dx.$

2. $I_2 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x+1} dx.$

3. $I_3 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3} dx.$

Solution 8.4.5 **1.**

$$I_1 = \int \cos^4 x \sin^5 x dx.$$

On pose :

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx,$$

alors :

$$\sin x dx = -du, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2,$$

donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cos^4 x \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx = -\int u^4 \left(1-u^2\right)^2 du \\ &= -\int u^4 \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) du = -\int \left(u^8 - 2u^6 + u^4\right) du \\ &= -\left(\frac{u^9}{9} - 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5}\right) + c = -\frac{\cos^9 x}{9} + 2\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^5 x}{5} + c. \end{aligned}$$

2.

$$I_2 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 1} dx.$$

Posons :

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx,$$

alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{udu}{u^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{u^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left|u^2+1\right| + c = \frac{1}{2} \ln \left(\sin x^2 + 1\right) + c. \end{aligned}$$

3.

$$I_3 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3} dx = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx}_{I_3'} + \underbrace{\int \frac{-3}{x^2+x+3} dx}_{I_3''}\right],$$

on a

$$I_3' = \ln\left|x^2+x+3\right| + c,$$

et pour I_3'', on a

$$x^2+x+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4},$$

donc, on utilisant :

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right),$$

on trouve :

$$\int\frac{dx}{x^2+x+3}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{11}}{2^2}}=\frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)+c,$$

puis :

$$\begin{aligned}I_3 &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+x+3\right|-\frac{6}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)\right]+c\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+3\right|-\frac{3}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)+c.\end{aligned}$$

Exercice 8.4.6 *Calculer*

1. $I_1=\int\frac{(x+\alpha)^{2023}+\beta}{(x+\alpha)^{2024}}dx,\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

2. $I_2=\int(\ln(x))^2\,dx$.

3. $I_3=\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$.

Solution 8.4.6 **1.**

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\frac{(x+\alpha)^{2023}+\beta}{(x+\alpha)^{2024}}dx=\int\frac{(x+\alpha)^{2023}}{(x+\alpha)^{2024}}dx+\int\frac{\beta}{(x+\alpha)^{2024}}dx\\ &= \int\frac{1}{x+\alpha}dx+\beta\int\frac{dx}{(x+\alpha)^{2024}}=\ln|x+\alpha|-\frac{\beta}{2023\,(x+\alpha)^{2023}}+c.\end{aligned}$$

2.

$$I_2=\int(\ln(x))^2\,dx.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties : on pose

$$\begin{aligned}u' &= 1\Rightarrow u=x\\ v &= (\ln(x))^2\Rightarrow v'=2\frac{\ln(x)}{x}dx,\end{aligned}$$

alors

$$I_2=x(\ln(x))^2-2\int\ln(x)\,dx,$$

une autre fois l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} u' &= 1 \Rightarrow u = x \\ v &= \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}dx, \end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} I_2 &= x(\ln(x))^2 - 2\left[x\ln(x) - \int dx\right] \\ &= x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + c. \end{aligned}$$

3.

$$I_3 = \int x^3\sqrt{4-x^2}dx = 0.$$

Car $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$ *est définie sur* $[-1,1]$ *et elle est impaire.*

CHAPITRE 9 Équations différentielles

Le chapitre débute par quelques définitions essentielles pour faciliter la résolution des exercices.

9.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$y^{'} + a\left(x\right)y = b\left(x\right),$$

où y est une fonction dérivable de la variable x définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et où $a\left(x\right)$ et $b\left(x\right)$ sont des fonctions continues sur cet intervalle.

• Lorsque $b(x) = 0$, l'équation est dite homogène. Elle prend alors la forme :

$$y^{'} + a\left(x\right)y = 0.$$

Les solutions de cette équation homogène sont données par :

$$y_h\left(x\right) = ke^{-\int a(x)dx}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

• Un cas particulier important est celui où $a(x)$ est constante. L'équation devient alors :

$$y^{'} + ay = 0,$$

et ses solutions s'écrivent :

$$y_h\left(x\right) = ke^{-ax}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

• Dans le cas général de l'équation

$$y^{'} + a(x)y = b(x),$$

si l'on connaît une solution particulière $y_p(x)$, alors la solution générale s'écrit comme la somme :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

9.1.1 Équations à variables séparées

Définition 9.1.1 *Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées lorsqu'on peut la mettre sous la forme :*

$$f(y)\,y' = g(x),$$

où, f est une fonction de y et g est une fonction de x.

9.1.2 Équation de Bernoulli

Définition 9.1.2 *On appelle équation différentielle de Bernoulli toute équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :*

$$y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\,y^{\alpha}(x) = 0, \ \ \textit{avec } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

où g et h sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Méthode de résolution :

Pour résoudre cette équation, on effectue le changement de variable :

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x).$$

En dérivant, on obtient :

$$z'(x) = (1-\alpha)\,y'(x)\,y^{-\alpha}(x).$$

En divisant l'équation initiale par $y^{\alpha}(x)$, elle devient :

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} + g(x)\,y^{1-\alpha}(x) + h(x) = 0.$$

En remplaçant, on obtient :

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} + g(x)\,z(x) + h(x) = 0.$$

Ainsi, l'équation de Bernoulli se ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène en z, que l'on peut résoudre par les méthodes classiques, notamment la variation de la constante.

9.2 Équations différentielles de second ordre

Définition 9.2.1 *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

où a, b, c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$, et f est une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

L'équation homogène associée (ou sans second membre) est :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Méthode de résolution

La résolution de l'équation complète se fait en deux étapes :

1. Résoudre l'équation homogène, ce qui donne la solution générale $y_h(x)$.
2. Déterminer une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation avec second membre.

La solution générale de l'équation complète est alors :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Résolution de l'équation homogène

On cherche une solution sous la forme $y(x) = e^{rx}$, avec $r \in \mathbb{R}$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Cette équation est appelée équation caractéristique, de discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Selon le signe de Δ, on distingue trois cas :

– Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

– Si $\Delta = 0$: une racine réelle double r

$$y_h(x) = (c_1 x + c_2) e^{rx}.$$

– Si $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm i\beta$

$$y_h(x) = (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}, \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière

– Si $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, où $P(x)$ est un polynôme de degré p.

$\triangleright$ Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique :

$$y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x},$$

avec Q de degré p.

$\triangleright$ Si α est racine simple :

$$y_p(x) = xQ(x)e^{\alpha x},$$

avec Q de degré p.

$\triangleright$ Si α est racine double :

$$y_p(x) = x^2 Q(x)e^{\alpha x}$$

avec Q de degré p.

– Si $f(x) = K \sin(ax)$ ou $f(x) = K \cos(ax)$:

$\triangleright$ Si ces fonctions ne sont pas solutions de l'équation homogène :

$$y_p(x) = A \cos(ax) + B \sin(ax),$$

$\triangleright$ Sinon :

$$y_p(x) = x (A \cos(ax) + B \sin(ax)),$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

9.3 Exercices

Exercice 9.3.1 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $(1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0.$

2. $xy' = y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right).$

Solution 9.3.1 **1.** *C'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables.*

$$\begin{aligned}
\left(1+x^2\right)^2\frac{dy}{dx}+2x+2xy^2 &= 0 \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)^2\frac{dy}{dx}=-2x\left(1+y^2\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2}dy=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx\\
&\Leftrightarrow \int\frac{1}{1+y^2}dy=-\int\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx\\
&\Leftrightarrow \arctan y=-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)+c=\frac{1}{1+x^2}+c\\
&\Leftrightarrow y=\tan\left(\frac{1}{1+x^2}+c\right).
\end{aligned}$$

2.

$$xy'=y+x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)+\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ((*))$$

équation différentielle homogène de la forme

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

on pose :

$$z=\frac{y}{x}\Leftrightarrow y=xz\Leftrightarrow y'=z+xz',$$

on remplace dans $(*)$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
z+xz' &= z+\cos^2(z)\Leftrightarrow xz'=\cos^2(z)\\
&\Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}=\cos^2(z)\Leftrightarrow\frac{dz}{\cos^2(z)}=\frac{dx}{x}\\
&\Leftrightarrow \int\frac{dz}{\cos^2(z)}=\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\tan z=\ln|x|+c\\
&\Leftrightarrow z=\arctan(\ln|x|+c),
\end{aligned}$$

alors

$$y=xz=x\arctan(\ln|x|+c).$$

Exercice 9.3.2 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $y'+y=2\sin x.$ (E_1)

2. $y' + y = x - e^x + \cos x$. (E_2)

Solution 9.3.2 1.

$$y' + y = 2\sin x,$$

une équation différentielle linéaire d ordre 1*, à coéfficients constantes, avec second membre. Les solutions*

$$y_H = \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin :

$$y_p(x) = a\cos x + b\sin x,$$

et $(E_1) \Leftrightarrow (a+b)\cos x + (b-a)\sin x = 2\sin x$. *Ainsi, en identifiant les coéfficients, on voit que* $y_p(x) = -\cos x + \sin x$ *convient. Les solutions de* (E_1) *sont :*

$$y_G(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x}.$$

2.

$$y' + y = x - e^x + \cos x,$$

une équation différentielle linéaire d ordre 1*, à coéfficients constantes, avec second membre. Les solutions*

$$y_H = \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1*, d'une fonction exponentielle (différente de* e^{-x}*) et d'une fonction trigonométrique. Daprès le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :*

$$y_p(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha\cos x + \beta\sin x,$$

et $(E_2) \Leftrightarrow ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha+\beta)\cos x + (\beta-\alpha)\sin x = x - e^x + \cos x$. *Ainsi, en identifiant les coéfficients, on voit que* $y_p(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$ *convient. Les solutions de* (E_2) *sont :*

$$y_G(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x}.$$

Exercice 9.3.3 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $y' - y = (x+1)\, e^x$ *telle que* $y(0) = 1$.
2. $y' + y = x^2$.

Solution 9.3.3 **1.** *C'est une équation linéaire du premier ordre :*

$$y' - y = (x+1)\, e^x,$$

on a

$$y_G = y_H + y_p,$$

cherchons y_H ?

$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Leftrightarrow \ln y = x + c \Leftrightarrow y_H = Ke^x, \end{aligned}$$

cherchons y_p ?*(Méthode de variation des constantes)*

on pose

$$y_p = K(x)\, e^x,$$

alors

$$y_p' = K'(x)\, e^x + K(x)\, e^x,$$

puis

$$\begin{aligned} K'(x)\, e^x + K(x)\, e^x - K(x)\, e^x &= (x+1)\, e^x \\ &\Leftrightarrow K'(x)\, e^x = (x+1)\, e^x \\ &\Leftrightarrow K'(x) = x + 1 \\ &\Leftrightarrow K(x) = \frac{x^2}{2} + x + A, \end{aligned}$$

donc

$$y_p = \left(\frac{x^2}{2} + x + A\right) e^x,$$

et

$$y_G = Ke^x + \left(\frac{x^2}{2} + x + A\right) e^x = \left(\frac{x^2}{2} + x + \lambda\right) e^x,$$

avec $y(0) = 1$, *on trouve alors*

$$y(0) = \left(\frac{0}{2} + 0 + \lambda\right) e^0 = \lambda = 1,$$

donc

$$y_G = \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) e^x.$$

2. *C'est une équation linéaire du premier ordre :*

$$y' + y = x^2$$

on a

$$y_G = y_H + y_p,$$

cherchons y_H ?

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \Leftrightarrow \ln y = -x + c \Leftrightarrow y_H = Ke^{-x}, \end{aligned}$$

cherchons y_p ?

Second membre polynomial x^2, *on cherche* y_p *sous forme* $ax^2 + bx + c$.

$$y_p' = 2ax + b$$

$$\begin{aligned} y_p' + y_p &= 2ax + b + ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + (2a + b)\, x + (b + c)\,, \end{aligned}$$

on identifie avec $x^2 + 0x + 0$, *on trouve*

$$a = 1, 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2, b + c = 0 \Rightarrow c = 2,$$

donc

$$y_p = x^2 - 2x + 2.$$

Exercice 9.3.4 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $xy' + y = x^2 y^2$.

2. $y' + y = -xy^3$

Solution 9.3.4 **1.** *C'est une équation de Bernoulli. Forme générale :*

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n,$$

ici, on divise par x (pour $x \neq 0$) :

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2,$$

on a $n = 2$, on pose

$$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1},$$

alors

$$z' = -y'y^{-2} \Rightarrow y' = -z'y^2,$$

substituons

$$-z'y^2 + \frac{1}{x}y = xy^2,$$

divisons par y^2 (avec $y \neq 0$) :

$$-z' + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = x,$$

mais $\frac{1}{y} = z$, donc

$$z' = \frac{1}{x}z - x \qquad ((*))$$

c'est une équation linéaire du premier ordre, on cherche z_H?

$$z' = \frac{1}{x}z \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln z = \ln x + c \Leftrightarrow z_H = Kx,$$

cherchons z_p?

$$z_p = K(x)\,x \Leftrightarrow z_p' = K'(x)\,x + K(x),$$

on remplace dans $(*)$,

$$K'(x)\,x + K(x) = K(x) - x \Leftrightarrow K'(x) = -1 \Leftrightarrow K(x) = -x + A,$$

donc

$$z_p = (-x + A)\,x = -x^2 + Ax,$$

et

$$z_G = kx - x^2 + Ax = Cx - x^2,$$

avec

$$y_G = \frac{1}{z_G} = \frac{1}{Cx - x^2}.$$

2. *C'est encore une équation de Bernoulli avec* $n = 3$.

$$y' + y = -xy^3,$$

on pose

$$z = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2},$$

alors

$$z' = -2y'y^{-3} \Rightarrow y' = \frac{-1}{2}z'y^3,$$

substituons

$$\frac{-1}{2}z'y^3 + y = -xy^3,$$

divisons par y^3 *(avec* $y \neq 0$*) :*

$$\frac{-1}{2}z' + \frac{1}{y^2} = -x,$$

mais $\frac{1}{y^2} = z$, *donc :*

$$\frac{-1}{2}z' + z = -x$$

$$\Leftrightarrow z' = 2z + 2x \qquad ((**))$$

c'est une équation linéaire du premier ordre, on cherche z_H?

$$z' = 2z \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = 2dx \Leftrightarrow \ln z = 2x + c \Leftrightarrow z_H = Ke^{2x},$$

cherchons z_p?

$$z_p = K(x)\, e^{2x} \Leftrightarrow z_p' = K'(x)\, e^{2x} + 2K(x)\, e^{2x},$$

on remplace dans $(**)$,

$$\begin{aligned} K'(x)\, e^{2x} + 2K(x)\, e^{2x} &= 2K(x)\, e^{2x} + 2x \\ &\Leftrightarrow K'(x)\, e^{2x} = 2x \Leftrightarrow K'(x) = 2xe^{-2x} \\ &\Leftrightarrow K(x) = \int 2xe^{-2x}, \end{aligned}$$

Par parties : posons

$$\begin{aligned} u' &= e^{-2x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v &= 2x \Rightarrow v' = 2dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\int 2xe^{-2x} &= -xe^{-2x} + \int e^{-2x}dx \\ &= -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c,\end{aligned}$$

donc

$$K(x) = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

alors

$$z_p = \left(-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)e^{2x} = -x - \frac{1}{2} + ce^{2x},$$

ainsi, la solution générale est :

$$z_G = Ke^{2x} - x - \frac{1}{2} + ce^{2x} = -x - \frac{1}{2} + \lambda e^{2x},$$

avec

$$z_G = y_G^{-2},$$

donc

$$\begin{aligned}y_G^{-2} &= -x - \frac{1}{2} + \lambda e^{2x} \Rightarrow y_G^2 = \frac{1}{-x - \frac{1}{2} + \lambda e^{2x}} \\ &\Rightarrow y_G = \pm\frac{1}{\sqrt{-x - \frac{1}{2} + \lambda e^{2x}}}.\end{aligned}$$

Exercice 9.3.5 *Résoudre :*

1. $y^{"} - 3y^{'} + 2y = 0.$
2. $y^{"} + 2y^{'} + 2y = 0.$
3. $y^{"} - 2y^{'} + y = 0.$
4. $y^{"} + y^{'} = 2\cos^2 x.$

Solution 9.3.5 1.

$$y^{"} - 3y^{'} + 2y = 0.$$

C'est une équation différentielle homogène du second ordre, dont l'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

qui admet deux solutions :

$$r = 2 \text{ et } r = 1.$$

Ainsi, les solutions s'écrivent sous la forme suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y^{"} + 2y^{'} + 2y = 0.$$

On associe à cette équation l'équation caractéristique suivante :

$$r^2 + 2r + 2 = 0,$$

qui admet deux solutions :

$$r = -1 + i \text{ et } r = -1 - i.$$

On obtient alors les solutions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{-x} \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y^{"} - 2y^{'} + y = 0.$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

elle possède une racine double $r = 1$. Les solutions de l'équation homogène s'écrivent donc :

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^x, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4.

$$y^{"} + y^{'} = 2\cos^2 x.$$

On obtient pour l'équation homogène les solutions suivantes

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Le second membre peut en fait se réécrire, $cos^2x = 1 + cos2x$ d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = a + \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x.$$

En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1, \alpha = \frac{1}{3}, \beta = 0$,c-à-d: $y_p(x) = 1 - \frac{1}{3} \cos 2x$

Les solutions générales sont donc,

$$y_g(x) = 1 - \frac{1}{3} \cos 2x + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}., \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Donner l'expression générale des solutions pour chacune des équations différentielles.

1. $y^" - 3y^{'} + 2y = xe^{-2x}$.
2. $2y^" + y^{'} - y = e^{7x}$.

1. On considère l'équation différentielle :

$$y^" - 3y^{'} + 2y = xe^{-2x}.$$

On cherche d'abord la solution de l'équation homogène associée en posant $y = e^{kx}$. On obtient alors l'équation caractéristique :

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

dont le discriminant vaut $\triangle = 1$, d'où les racines $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$. La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Ensuite, on cherche une solution particulière. Comme -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on essaie une solution de la forme :

$$y_p = (ax + b) e^{-2x}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y_G = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (ax + b) e^{-2x}$$

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y^{"} + y^{'} - y = e^{7x}.$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée. En posant $y = e^{x}$, on obtient l'équation caractéristique :

$$2k^2 + k - 1 = 0.$$

Son discriminant est $\triangle = 1 + 8 = 9$, d'où les racines :

$$k_1 = \frac{-1-9}{4} = -1, k_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$

Pour trouver une solution particulière, on remarque que le second membre est de la forme e^{7x}.Comme 7 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p = Ke^{7x}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$y_G = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + Ke^{7x}.$$

Exercice 9.3.6 *Pour l' équation différentielle suivante, présenter la forme générale de la solution.*

1. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)\, e^{2x}$.

Solution 9.3.6 **1.** *L'équation caractéristique est*

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

racines

$$r_1 = 1, r_2 = 2,$$

donc

$$y_H(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x},$$

Le second membre est $(x^2+1)\,e^{2x}$. *Puisque* e^{2x} *correspond à une racine* $r=2$ *de l'équation homogène, on utilise la méthode des coefficients indéterminés avec multiplication par* x *:*

$$y_p(x) = x\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x} = \left(ax^3+bx^2+cx\right)e^{2x},$$

où a, b, c *sont des constantes réelles à déterminer par substitution, donc*

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + \left(ax^3+bx^2+cx\right)e^{2x}.$$

Bibliographie

[1] E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, *Problèmes Corrigés de mathématiques*, DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod $2^{\text{ème}}$ édition) Paris **2002**.

[2] E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, *Les mathématiques en Licence*, $1^{\text{ère}}$année, Tome 1 : Cours et exercices corrigés, MIAS.MASS.SM, Ediscience (Dunod $3^{\text{ème}}$ édition) Paris **2007**.

[3] C. Baba Hamed, K. Benhabib, *Algèbre 1* : *Rappels de cours et exercices avec solutions*, OPU **2015**.

[4] G. Christol, *Algèbre 1, Ensembles fondamentaux Arithmétique Polynômes*, MATHS DEUG Ellipses Paris **1995**.

[5] C. Deschamps, A. Warusfel, *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1 : cours complet et exercices corrigés*, Dunod, Paris, **2021**.

[6] J. P. Escofier, *Toute l'analyse de la Licence : cours et exercices corrigés, $3^{\text{ème}}$ édition.* Dunod **2023**.

[7] R. Godement, *Cours d'algèbre.* Hermann, **1966**.

[8] F. Liret, D. Martinais, *Analyse $1^{\text{ère}}$ année : cours, exercices corrigés – Licence MIAS, MASS, SM.* Dunod **2025**.

[9] J. M. Monier, *Algèbre 1 : Cours et 600 exercices corrigés $1^{\text{ère}}$ année MPSI, PCSI, PTS*, Dunod Paris **2000**.

[10] M. H. Mortad, *Exercices Corrigés d'Algèbre*, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair" (Alger-Algérie), **2012.**

[11] B. Oukacha, Mathématiques analyse : cours, exercices corrigés et commentés : $1^{\text{ère}}$ année, Pages Bleues Internationales, **2017**.