وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2017/2018

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l’obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques

TITRE

Valeurs propres des matrices aléatoires et lien avec les G-équations différentielles stochastiques.

Option
Modélisation Mathématiques-Probabilités et Statistique
Par
STIHI Sara

DIRECTEUR DE THÈSE : BOUTABIA Hacène Prof U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT :	REMITA Md Riad	Prof	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	KANDOUCI Abdeldjabbar	Prof	U.Moulay Taher Saida
EXAMINATEUR :	GUENDOUZI Toufik	Prof	U.Moulay Taher Saida
EXAMINATEUR :	HADJI Md Lakhdar	M.C.A	U.B.M. Annaba

Table des matières

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR DE ANNABA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **Doctorat**

Par

STIHI Sara

Intitulé :
Valeurs propres des matrices aléatoires et lien avec les G-équations différentielles stochastiques

Option

Probabilité et statistiques

Année : 2018

Directeur de thèse : BOUTABIA *Hacène* Prof. U.B.M. Annaba

Membres du Jury

Président : REMITA Md Riad Prof. U.B.M. Annaba

Rapporteur : BOUTABIA Hacène Prof. U.B.M. Annaba

Examinateur : KANDOUCI Abdeldjabbar Prof. U.Moulay Tahar Saida

Examinateur : GUENDOUZI Toufik Prof. U.Moulay Tahar Saida

Examinateur : HADJI Md Lakhdar M. C. A U.B.M. Annaba

Résumé (en arabe)

في هذه الأطروحة، قمنا بدراسة أنماط القيم الذاتية و الأشعة الذاتية لمصفوفة أنماط متماثلة X_{t_t}. حيث X_t هو حل لمعادلة تفاضلية ستوكاستيكية معرفة بواسطة مصفوفة جي الحركة البراونية.

أعطينا أيضا المعادلات التفاضلية الستوكاستيكية لقيم الذاتية و الأشعة الذاتية.هذا العمل هو تمديد للنتائج المحصل عليها من طرف غراسزيك و ملاكي

الكلمات المفتاحية: جي مصفوفة الحركة البراونية، جي المعادلات التفاضلية الستوكستيكية، المصفوفات العشوائية، القيم الذاتية، الأشعة الذاتية .

Abstract

In this thesis, We investigate the processes of eigenvalues and eigenvectors of a symmetric matrix valued process X_t, where X_t is the solution of a general SDE driven by a $G-$Brownian motion matrix. Stochastic differential equations of these processes are given. This extends results obtained by P. Graczyk and J. Malecki (2013) [16].

Keywords : $G-$Brownian motion matrix, $G-$stochastic differential equations, random matrices, eigenvalues, eigenvectors.

Résumé

Dans cette thèse, on examine les processus de valeurs propres et des vecteurs propres d'un processus matriciel symétrique X_t, où X_t est la solution d'une équation différentielle stochastique générale définie à partir d'un $G-$mouvement Brownien matrice. On donne les équations différentielles stochastiques de ces processus. Ces travaux constituent une généralisation des résultats obtenus par P. Graczyk et J. Malecki (2013) (voir [16]).

Mots-clés : $G-$mouvement Brownien matriciel, $G-$équations différentielles stochastiques, matrices aléatoires, valeurs propres, vecteurs propres.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout-puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

J'aimerais tout d'abord remercier Le Professeur BOUTABIA Hacène, c'est un véritable honneur de commencer ma vie de chercheur avec une personne aussi brillante. Je le remercie profondément d'avoir essayé de me transmettre sa rigueur, sa pédagogie et un peu de sa créativité mais aussi de m'avoir soutenu et encouragé pendant ces années. C'est une vraie chance d'avoir eu un directeur de thèse aussi disponible et attentif scientifiquement comme humainement.

Je souhaite exprimer ma gratitude et ma haute considération au Professeur REMITA Mohamed Riad, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba de m'avoir honoré en acceptant de présider le jury.

Je suis très reconnaissante aux Professeurs KANDOUCI Abdeldjabbar et GUENDOUZI Toufik, Professeurs à l'université du Dr. Moulay Tahar de Saida d'avoir accepté la lourde tâche d'être examinateurs de ma thèse. Je les remercie pour le déplacement qu'ils ont fait pour faire partie de mon jury.

Je remercie vivement Docteur HADJI Mohamed Lakhdar, Maître de Conférences A, pour avoir accepté d'être examinateurs de ma thèse et pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse.

Je tiens également à remercier ceux qui avant ma thèse m'ont permis d'avoir une bonne formation, de développer mon sentiment d'appartenance

au Laboratoire LaPS ainsi l'université de Badji Mokhtar Annaba et un goût certain pour le milieu universitaire.

Je remercie vivement ma chère amie Meradji Selma pour l'aide, le soutien et les encouragements dont elle a toujours fait preuve à mon égard. Je remercie mes soeurs et mes frères qui m'ont toujours encouragé et soutenu.

Je tiens à remercier ma mère, mon père et ma grande mère de m'avoir encouragé devant toute la durée de mes études et de m'avoir apporté un soutien indispensable à ma réussite.

Je remercie aussi tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réussite de cette démarche de recherche.

Introduction

La théorie des matrices aléatoires est un domaine de recherche très actif en mathématique moderne avec de nombreuses applications en physique mathématique et théorique, en analyse mathématique et également en probabilité. Les applications de la théorie des matrices aléatoires en statistique mathématique trouvent leurs origines dans les travaux de Wishart obtenus en 1928 sur les matrices de corrélation (*c.f.* [33, 47]). Le véritable début de la recherche dans le domaine des matrices aléatoires est principalement dû aux travaux très influents de Eugene Wigner durant les années 1950, motivés par des applications en physique nucléaire (voir [1, 6, 8, 12, 33]).

Plus récemment en 2013, Graczyk et Malecki [16, 17] ont donné, dans un contexte général, le système des équations différentielles stochastiques (EDS) satisfaites par les valeurs propres et les vecteurs propres de la solution X_t, dans l'espace des matrices symétriques d'ordre $n \times n$, d'une EDS gouvernée par un mouvement Brownien matrice classique de dimension $n \times n$. Sous certaines conditions sur l'équation différentielle stochastique satisfaite par X_t, ils ont établi l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres et ont montré que les valeurs propres ne se rencontrent jamais.

D'autre part, au cours de la dernière décennie, la théorie et la méthodologie d'espérance non linéaire ont été bien développées et ont reçu beaucoup d'attention dans certains domaines d'application tels que la finance, la mesure des risques et le contrôle. Un exemple typique d'espérance non linéaire, appelée $G-$espérance a été introduit par Peng (voir [38, 39, 41, 42, 44, 46]). Dans ce cadre de la $G-$espérance, un nouveau type de mouvement Brownien, appelé $G-$mouvement Brownien a été construit et le calcul stochastique connexe a été établi.

Le but de cette thèse est d'unifier la notion de matrices aléatoires et le $G-$calcul stochastique pour étudier les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres pour un processus matriciel. A cet effet, on considère la $G-$EDS générale suivante

$$dX_t = g(X_t)\, dB_t h(X_t) + h(X_t)\, dB_t^T g(X_t) + a(X_t)\, dt + c(X_t)\, d\langle B\rangle_t$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $G-$mouvement Brownien matriciel de dimension $n \times n$ et B_t^T désigne la transposée de la matrice B_t.

Le processus stochastique matriciel X_t prend des valeurs dans l'espace des matrices symétriques d'ordre $n \times n$ et les fonctions $g, h, a, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ agissent sur le spectre de X_t. Les principales difficultés résident dans le fait que la $G-$espérance n'est pas linéaire et que $\langle B\rangle$ n'est pas un processus déterministe. La notion d'indépendance des variables aléatoires par rapport à une espérance non linéaire étant délicate, on supposera que $\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}b^j$ pour certains processus croissants b^j. Comme dans [16], on dérive un système d'EDS pour les valeurs propres et les vecteurs propres de la solution de X_t, qui est garantie par les conditions de Lipschitz et de croissance linéaires, et on prouve que les valeurs propres ne se rencontrent jamais.

Le reste de la thèse est rédigé sous forme de trois chapitres, d'un appendice et d'une conclusion générale et est organisé comme suit.

Dans le chapitre 1, on rappelle le cadre de la $G-$espérance et on adapte ce concept en fonction de notre objectif. En outre, on donne les propriétés connexes du $G-$mouvement Brownien matriciel et la $G-$formule d'Itô.

Dans le chapitre 2, on donne nos principaux résultats à savoir les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres de X_t ainsi que le fait que le temps de collision est infini quasi surement.

Dans le chapitre 3, on énonce et on démontre le théorème d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques gouvernées par le $G-$mouvement Brownien matriciel.

Dans l'appendice, on présente quelques notations d'algèbre matricielle qui seront utilisées tout au long de ce travail. On donne également quelques notions de base sur le calcul matriciel et les processus matrices en général.

Enfin, on termine par une conclusion et quelques perspectives.

Ce travail a permis la production scientifique suivante :

•Publications internationales :

1$-$Stochastic differential equations for random matrices processes in the nonlinear framework by Sara Stihi, Hacène Boutabia and Selma Meradji, to appear in "Opuscula Mathematica".

2$-$Stochastic differential equations for eigenvalues and eigenvectors of a $G-$Wishart process with drift by Selma Meradji, Hacène Boutabia and Sara Stihi, to appear in "Ukrainian Mathematical Journal".

•Communications internationales :

1)Convergence de densité spectrale dans l'ensemble de Wishart, Stihi Sara, Hacène Boutabia and Selma Meradji, 6th Operational Research Practice in Africa Conference (ORPA' 2015, $20-22$ Avril 2015, à Algiers, Algeria).

2)Le processus matriciel de Wishart et leurs caractéristiques, $20^{ème}$ Colloque de la SMT, ($16-19$ Mars 2015, à Sousse, Tunisie).

3)Les notations de base et les préliminaires de $G-$calcul stochastique, Selma Meradji, Hacène Boutabia and Sara Stihi, 6th Operational Research Practice in Africa Conference (ORPA'2015, $20-22$ Avril 2015, à Algiers, Algeria).

4)Stochastic calculus for matrix fractional Brownian motion and applications, Sara Stihi, Hacène Boutabia and Selma Meradji, Conference-School on Discrete Mathematics and Computer Science (DIMACOS'15, $15-19$ Novembre 2015, à Sidi Bel Abbès).

5)The local time under sublinear expectations and applications, Selma Meradji, Hacène Boutabia and Sara stihi, Conference-School on Discrete Mathematics and Computer Science (DIMACOS'15, $15-19$ Novembre 2015, à Sidi Bel Abbès).

•Communications nationales :

1)Le $G-$calcul stochastique matriciel, Sara Stihi, Hacène Boutabia and Selma Meradji, Journées Jeunes Chercheurs (JJC'2014, 30 Septembre$-$01 Octobre 2014, à Annaba).

2)Les matrices de Wishart définitions et applications, Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées (JNMA'2014, $26-27$ Novembre 2014, à Skikda).

3)Eigenvalues of matrix stochastic process, Journées Ouvertes sur les Mathématiques et l'Informatique (JOMI'2015, $25-26$ Mai 2015, à Tebessa).

Chapitre 1

$G-$espérance et $G-$mouvement Brownien

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats sur la $G-$espérance et le $G-$mouvement Brownien. Pour plus des détails concernant la $G-$espérance, ses applications en finance et les connaissances des mesures des risques cohérents, on renvoi le lecteur aux références $[2, 7, 13, 15, 23, 46, 52, 56, 57]$.

1.1 $G-$espérance

Soient Ω un ensemble donné et $\mathcal{H}$ un espace linéaire des fonctions à valeurs réelles définies sur Ω tel que : $1 \in \mathcal{H}$ et $|X| \in \mathcal{H}$ pour tout $X \in \mathcal{H}$.

Définition 1.1.1 *Une espérance sous linéaire E sur $\mathcal{H}$ est une fonction $E : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes : Pour tout $X, Y \in \mathcal{H}$, on a*

1. ***Monotonicité*** *: $E[X] \geq E[Y]$ si $X \geq Y$.*

2. ***Préservation des constantes*** *: $E[c] = c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

3. ***Sous–additivité*** *: $E[X] - E[Y] \leq E[X - Y]$.*

4. ***Homogénéité positive*** *: $E[\lambda X] = \lambda E[X]$, pour tout $\lambda \geq 0$.*

le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, E)$ est appelé espace d'espérance sous-linéaire.

Remarque 1.1.1 *L'espace $\mathcal{H}$ peut être considéré comme l'espace des variables aléatoires.*

Dans ce qui suit, on considère le type d'espace des variables aléatoires $\mathcal{H}$ avec la propriété supplémentaire de stabilité par rapport aux fonctions bornées Lipschitziennes. Plus précisément, on suppose que si $X_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, ..., d$ alors

$$\varphi\left(X_1, ..., X_d\right) \in \mathcal{H} \text{ pour tout } \varphi \in C_{b \cdot Lip}(\mathbb{R}^d),$$

où $C_{b \cdot Lip}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace linéaire des fonctions bornées Lipschtiziennes sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.1.1 *(voir* $[7, 20, 36]$*) Soit* $(\Omega, \mathcal{H}, E)$ *un espace d'espérance sous-linéaire. Alors il existe une famille de mesures de probabilités* $\mathcal{P}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ *telle que*

$$E[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[X] \ \textit{ pour } X \in \mathcal{H},$$

où $\mathcal{B}(\Omega)$ *désigne la tribu borélienne sur* Ω *et* E_P *désigne l'espérance linéaire sous* P*.*

Naturellement, on peut définir une capacité de Choquet sur $\mathcal{H}$ par

$$c(A) := \sup_{P \in \mathcal{P}} P[A], \ A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter $[27, 36]$.

Définition 1.1.2 *On dit qu'un ensemble* $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ *est polaire si et seulement si* $c(A) = 0$ *et qu'une propriété a lieu quasi-sûrement (q.s. en abrégé) si elle a lieu en dehors d'un ensemble polaire.*

Remarque 1.1.2 *Une propriété est dite vraie quasi-sûrement (q.s.) si et seulement si elle est vraie presque sûrement pour chaque* $P \in \mathcal{P}$*.*

Définition 1.1.3 *Soit* $X = (X_1, ..., X_d)$ *un vecteur aléatoire , où* $X_i \in \mathcal{H}$*,* $i = 1, ..., d$*. La distribution de* X *est donnée par la fonction* $F_X[.]$ *suivante : pour tout* $\varphi \in C_{b.Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$*,*

$$F_X[\varphi] := E[\varphi(X)]$$

De plus, si X' *est un autre vecteur aléatoire* $d-$*dimensionnel et pour tout* $\varphi \in C_{b.Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$*,* $F_X[\varphi] = F_{X'}[\varphi]$*,* X *et* X' *sont dit identiquement distribués (*$X \stackrel{d}{=} X'$*).*

Soit $Y := (Y_1, ..., Y_m)$*, où* $Y_i \in \mathcal{H}, i = 1, ..., m$*. Le vecteur* Y *est dit indépendant de* X *si pour chaque* $\varphi \in C_{b.Lip}\left(\mathbb{R}^{d+m}\right)$

$$E[\varphi(X, Y)] = E\left[E[\varphi(x, Y)]_{x=X}\right].$$

On remarque que ces nouvelles définitions sont compatibles avec celles du cadre classique si l'espérance E est linéaire.

1.1.1 Distribution $G-$normale et $G-$mouvement Brownien

Après les définitions de base ci-dessus on introduit maintenant la notion de la distribution $G-$normale.

Définition 1.1.4 *Un vecteur aléatoire à $d-$dimension $X = (X_1, ..., X_d)$ défini sur un espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, E)$ est dit $G-$normalement distribué si pour tout $a, b \geq 0$:*

$$aX + b\overline{X} \overset{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2}X,$$

où $\overline{X}$ est une copie indépendante de X, et

$$G(A) := \frac{1}{2}E[\langle AX, X\rangle] : \mathbb{S}_d \to \mathbb{R},$$

ici $\mathbb{S}_d$ désigne l'ensemble des matrices symétriques d'ordre d.

Dans [40, 41, 45], Peng montre que $X = (X_1, ..., X_d)$ est $G-$normalement distribué si et seulement si $u(t, x) := E\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right], (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est l'unique solution de viscosité de l'équation parabolique aux dérivées partielles, appelée $G-$équation de la chaleur, suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = G(Du(t, x)), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}, \tag{1.1}$$

où $Du(t, x)$ est la matrice hessienne de $u(t, x)$.

$G(.) : \mathbb{S}_d \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone et sous-linéaire sur $\mathbb{S}_d$, à partir de laquelle on peut déduire qu'il existe un sous-ensemble $\Sigma \in \mathbb{S}_d^+$ fermé, borné et convexe tel que

$$G(A) = \frac{1}{2}\sup_{B\in\Sigma} tr(AB).$$

On écrit $X \sim \mathcal{N}(0; \Sigma)$.

Remarque 1.1.3 *Le cas réel $(d = 1)$ correspond à $\Sigma = [\underline{\sigma}^2; \overline{\sigma}^2]$ avec $0 \leq \underline{\sigma} \leq \overline{\sigma}$ et $G = G_{\overline{\sigma},\underline{\sigma}}$ étant la fonction sous-linéaire paramétrée par $\underline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$:*

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2\alpha^+ - \underline{\sigma}^2\alpha^-\right), \ \alpha \in \mathbb{R},$$

où $\overline{\sigma}^2 = E[X^2]$, $\underline{\sigma}^2 = -E[-X^2]$, $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$ et $\alpha^- = \max\{-\alpha, 0\}$. Dans ce cas on écrit $X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2; \overline{\sigma}^2])$ (c.f. [20], [50], [52]).

Définition 1.1.5 *Un processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *à* $d-$*dimension défini sur* $(\Omega, \mathcal{H}, E)$ *est dit* $G-$*mouvement Brownien de dimension* d *(réel dans le cas où* $d = 1$*) si les propriétés suivantes sont satisfaisantes :*

(i) $B_0 = 0$;

(ii) *pour chaque* $t, s \geq 0$*, l'accroissement* $B_{t+s} - B_t$ *est* $\mathcal{N}(0; s\Sigma) -$*distribué et indépendant de* $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq t$.

Pour la simplicité de notation comme dans [3, 7, 27], on désigne par B^i la $i^{ème}$ coordonnée de B et on notera

$$B_t^a := \langle a, B_t \rangle \ \ \textit{pour tout } a = (a_1, ..., a_d)^T \in \mathbb{R}^d$$

Selon la définition ci-dessus, on a la proposition suivante qui est importante pour les développements ultérieures.

Proposition 1.1.1 *(c.f. [44]) Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $G-$*mouvement Brownien à d-dimension défini sur un espace d'espérance sous linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, E)$*. Alors* $(B_t^a)_{t\geq 0}$ *est un* G_a-*mouvement Brownien à* $1-$*dimension, où*

$$G_a(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^+ - \underline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^-\right)$$

avec

$$\overline{\sigma}^2_{aa^T} = 2G\left(aa^T\right) = E\left[\langle a, B_1\rangle^2\right] \ \ \textit{et} \ \underline{\sigma}^2_{aa^T} = -2G\left(-aa^T\right) = -E\left[-\langle a, B_1\rangle^2\right].$$

En particulier, pour tout $t, s \geq 0$, $B^a_{t+s} - B^a_t \sim \mathcal{N}\left(0, \left[s\underline{\sigma}^2_{aa^T}, s\overline{\sigma}^2_{aa^T}\right]\right)$.

1.1.2 $G-$espérance conditionnelle

On considère $\Omega = C_0\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ l'espace des fonctions continues $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ définies sur $\mathbb{R}_+$,à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant $\omega_0 = \mathbf{0}$, muni de la distance suivante :

$$\rho\left(\omega^1, \omega^2\right) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\left[\left(\max_{t\in[0,i]}\left|\omega^1_t - \omega^2_t\right|\right) \wedge 1\right], \ \omega^1, \omega^2 \in \Omega.$$

Pour tout $t \in [0; \infty)$, on pose $\Omega_t := \{\omega_{.\wedge t} : \omega \in \Omega\}$. Les espaces des fonctions Lipschitziennes sur Ω sont notés par :

$$Lip\left(\Omega_t\right) = \left\{\varphi\left(B_{t_1\wedge t}, ..., B_{t_n\wedge t}\right) : \ t_1, ..., t_n \in [0; \infty), \ \varphi \in C_{b.Lip}\left(\mathbb{R}^n\right)\right\},$$

$$Lip(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Lip(\Omega_n).$$

Ici, on utilise $C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ seulement pour la commodité des techniques. En général, $C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ peut être remplacé par l'un des espaces des fonctions défini sur $\mathbb{R}^n$ suivantes.

•$L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions bornées Borel-mesurables,

•$C_{unif}(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions bornées et uniformément continues,

•$C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions continues, localement Lipschitziennes,

•$Lip(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $T > 0$ un temps fixé. On désigne par $L_G^p(\Omega_T)$, $p \geq 1$, l'adhérence de $Lip(\Omega_T)$ par rapport à la norme $\|X\|_{p,G} := (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$. Peng dans [39, 43, 45] , a construit une espérance sous-linéaire sur $(\Omega, Lip(\Omega))$ de telle sorte que le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ soit un $G-$mouvement Brownien de la manière suivante : soit $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite des vecteurs aléatoires à $d-$dimension sur un espace d'espérance sous-linéaire $\left(\Omega, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{E}\right)$ telle que ξ_i soit $G-$normalement distribuée et ξ_{i+1} indépendante de $(\xi_1, ..., \xi_i)$ pour tout $i = 1, 2, ...$

On introduit une espérance sous-linéaire E définie sur $Lip(\Omega)$, via la procédure suivante : Pour tout $X \in Lip(\Omega)$ avec

$$X = \varphi\left(B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$$

pour $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ et pour $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$, on pose :

$$E[X] = \widetilde{E}\left[\varphi\left(\sqrt{t_1 - t_0}\xi_1, ..., \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right],$$

D'après Peng [40, 43], E ainsi définie est une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega)$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $G-$mouvement Brownien. Comme $Lip(\Omega_T) \subseteq Lip(\Omega)$, E est également une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega_T)$.

Définition 1.1.6 *L'espérance conditionnelle de X par rapport à Ω_{t_j} est définie par*

$$E\left[X \left|\Omega_{t_j}\right.\right] = \psi\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \tag{1.2}$$

où

$$\psi(x_1, ..., x_j) = \widetilde{E}\left[\varphi\left(x_1, ..., x_j, \sqrt{t_{j+1} - t_j}\xi_{j+1}, ..., \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right].$$

Définition 1.1.7 *Un vecteur aléatoire à n−dimension* $Y \in (L_G^1(\Omega))^n$ *est dit indépendant de* Ω_t *(* $t \geq 0$*), si pour tout* $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathcal{M}_n)$ *on a*

$$E[\varphi(Y)|\Omega_t] = E[\varphi(Y)].$$

Proposition 1.1.2 *Soient* $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ *tels que* $E[Y|\Omega_t] = -E[-Y|\Omega_t]$ *pour certains* $t \in [0, T]$. *Alors on a*

$$E[X + Y|\Omega_t] = E[X|\Omega_t] + E[Y|\Omega_t].$$

En particulier, si $E[Y|\Omega_t] = E[-Y|\Omega_t] = 0$, *alors*

$$E[X + Y|\Omega_t] = E[X|\Omega_t].$$

Preuve. (voir [15], [20]). ■

Exemple 1.1.1 *Pour tout* $a \in \mathbb{R}^d$ *fixé,* $s \leq t$, *on a*

$$E[B_t^a - B_s^a|\Omega_s] = E[-(B_t^a - B_s^a)|\Omega_s] = 0$$

$$\begin{aligned} E\left[(B_t^a - B_s^a)^2|\Omega_s\right] &= \overline{\sigma}^2_{aa^T}(t-s), \\ E\left[-(B_t^a - B_s^a)^2|\Omega_s\right] &= -\underline{\sigma}^2_{aa^T}(t-s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[(B_t^a - B_s^a)^4|\Omega_s\right] &= 3\overline{\sigma}^4_{aa^T}(t-s)^2, \\ E\left[-(B_t^a - B_s^a)^4|\Omega_s\right] &= -3\underline{\sigma}^4_{aa^T}(t-s)^2. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 *Pour tout* $a \in \mathbb{R}^d$ *fixé,* $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq T, X \in L_G^1(\Omega_t)$ *et* $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned} E[X\varphi(B_T^a - B_t^a)|\Omega_t] &= X^+E[\varphi(B_T^a - B_t^a)|\Omega_t] + X^-E[-\varphi(B_T^a - B_t^a)|\Omega_t] \\ &= X^+E[\varphi(B_T^a - B_t^a)] + X^-E[-\varphi(B_T^a - B_t^a)]. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$E[X(B_T^a - B_t^a)|\Omega_t] = X^+E[(B_T^a - B_t^a)] + X^-E[-(B_T^a - B_t^a)] = 0.$$

Ceci, combiné avec la proposition ci-dessus donne

$$E[Y + X(B_T^a - B_t^a)|\Omega_t] = E[Y|\Omega_t], \text{ pour tout } Y \in L_G^1(\Omega).$$

On a également

$$\begin{aligned} E\left[X\left(B_T^a - B_t^a\right)^2 |\Omega_t\right] &= X^+ E\left[\left(B_T^a - B_t^a\right)^2\right] \\ &\quad + X^- E\left[-\left(B_T^a - B_t^a\right)^2\right] \\ &= \left[X^+ \overline{\sigma}_{aa^T}^2 - X^- \underline{\sigma}_{aa^T}^2\right](T-t) \end{aligned}$$

et pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} E\left[X\left(B_T^a - B_t^a\right)^{2n-1} |\Omega_t\right] &= X^+ E\left[\left(B_T^a - B_t^a\right)^{2n-1}\right] \\ &\quad + X^- E\left[-\left(B_T^a - B_t^a\right)^{2n-1}\right] \\ &= |X| \, E\left[\left(B_{T-t}^a\right)^{2n-1}\right]. \end{aligned}$$

Définition 1.1.8 *(voir* $[58, 50]$*) Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est appelé* $G-$*martingale si pour tout* $t \in [0;T]$, $M_t \in L_G^1(\Omega_t)$ *et pour tout* $s \in [0,t]$ *on a*

$$E\left[M_t |\Omega_s\right] = M_s \ q.s..$$

1.2 $G-$mouvement Brownien matrice et $G-$calcul stochastique

Dans ce qui suit on identifie chaque matrice carrée d'ordre n à un vecteur de dimension n^2 et on considère maintenant $\Omega = C_0(\mathcal{M}_n)$ l'espace des fonctions continues $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n$ satisfaisant $\omega_0 = \mathbf{0}$. Les définitions du paragraphe précédent restent valables sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n$.

Dans toute la suite, on considère le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ (i.e. $B_t(\omega) = \omega_t$) défini sur $(\Omega, Lip(\Omega), E)$ où $\Omega = C_0(\mathcal{M}_n)$. $\left(B_t^{ij}\right)$ est donc un $G_{\underline{\sigma_{ij}},\overline{\sigma_{ij}}}-$mouvement Brownien réel où

$$\overline{\sigma_{ij}}^2 = E\left[\left(B_1^{ij}\right)^2\right] \text{ et } \underline{\sigma_{ij}}^2 = -E\left[-\left(B_1^{ij}\right)^2\right].$$

Soit $\pi_T^k = \left\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_N^k = T\right\}$ une suite de subdivisions de $[0,T]$, dont le pas

$$\mu\left(\pi_T^k\right) = \max\left\{\left|t_{i+1}^k - t_i^k\right| : i = 0, 1, ..., N-1\right\},$$

tend vers 0 lorsque $k \to \infty$. Par abus d'écriture on écrit $\pi_T = \{t_0, t_1, ..., t_N\}$ au lieu de $\pi_T^k = \left\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_N^k = T\right\}$. Pour tout $p \geq 1$, on considère l'espace des processus simples $M_G^{p,0}(0,T)$ tels que

$$\eta = \eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t), \text{ pour } 0 = t_0 < ... < t_N = T,$$

où $\xi_j \in L_G^p\left(\Omega_{t_j}\right); j = 0, ..., N-1$.

Pour tout $p \geq 1$, on note par $M_G^p(0,T)$ l'adhérence de $M_G^{p,0}(0,T)$ sous la norme

$$\|\eta\|_{M_G^p(0,T)} = \left\{E\left[\int_0^T |\eta_t|^p \, dt\right]\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que $M_G^p(0,T)$ un espace de Banach.

Définition 1.2.1 *L'intégrale de Bochner de* (η_t) *est définie par*

$$\int_0^T \eta_t(\omega) \, dt = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)(t_{j+1} - t_j).$$

On donne maintenant la définition de la $G-$intégrale d'Itô.

Définition 1.2.2 *Pour tout* $\alpha \in M_G^{2,0}(0,T)$, *on définit la* $G-$*intégrale d'Itô par*

$$I(\alpha) := \int_0^T \alpha_t dB_t^{ij} = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \left(B_{t_{j+1}}^{ij} - B_{t_j}^{ij}\right).$$

Notons que $I(\alpha)$ est complètement indépendante de G, et $\left(\int_0^t \alpha_s dB_s^{ij}\right)_{0 \leq t \leq T}$ est une $G-$martingale (voir [58]).

Lemme 1.2.1 *L'application* $I : M_G^{2,0}(0,T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$ *est linéaire, continue et peut-être donc prolongée par continuité à* $M_G^2(0,T)$ *et on a*

$$E\left(\int_0^T \alpha_t dB_t^{ij}\right) = 0 \tag{1.3}$$

et

$$E\left[\left(\int_0^T \alpha_t dB_t^{ij}\right)^2\right] \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 E\left(\int_0^T \alpha_t dt\right) \tag{1.4}$$

Preuve. (voir [3], [25]). ■

Proposition 1.2.1 *Soient $\eta, \theta \in M_G^2(0,T)$ et $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. Alors on a*

(i) $\int_s^t \eta_u dB_u^{ij} = \int_s^r \eta_u dB_u^{ij} + \int_r^t \eta_u dB_u^{ij}$,

(ii) $\int_s^t (\alpha\eta_u + \theta_u) dB_u^{ij} = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u^{ij} + \int_s^t \theta_u dB_u^{ij}$, *si* α *est bornée dans* $L_G^1(\Omega_s)$,

(iii) $E\left[X + \int_r^T \eta_u dB_u^{ij} \,|\Omega_s\right] = E[X\,|\Omega_s]$ *pour* $X \in L_G^1(\Omega_s)$.

Processus de variation quadratique

Le processus de variation quadratique du $G-$mouvement Brownien est un processus très intéressant. On a vu que le $G-$mouvement Brownien est un processus de variance incertaine mais de moyenne certaine centrée. Cette incertitude est concentrée dans sa variation quadratique $\langle B^{ij}\rangle$. Par ailleurs $\langle B^{ij}\rangle$ lui-même est un processus de moyenne-variance.

Soit $\pi_t^N, N = 1, 2, ...$ une suite de subdivisions de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0. On a alors

$$\begin{aligned} B_t^{ij2} &= \sum_{p=0}^{N-1}\left(B_{t_{p+1}^N}^{ij2} - B_{t_p^N}^{ij2}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} 2B_{t_p^N}^{ij}\left(B_{t_{p+1}^N}^{ij} - B_{t_p^N}^{ij}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(B_{t_{p+1}^N}^{ij} - B_{t_p^N}^{ij}\right)^2. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3 *La variation quadratique de $\left(B_t^{ij}\right)_{t\geq 0}$ est définie par la limite $L_G^2(\Omega)$ suivante*

$$\left\langle B^{ij}\right\rangle_t := \lim_{\mu\left(\pi_T^N\right)\to 0} \sum_{l=0}^{N-1}\left(B_{t_{l+1}}^{ij} - B_{t_l}^{ij}\right)^2 = \left(B_t^{ij}\right)^2 - 2\int_0^t B_s^{ij} dB_s^{ij}.$$

Remarque 1.2.1 *Il est important de garder à l'esprit que* $\langle B^{ij}\rangle$ *n'est pas un processus déterministe sauf dans le cas où* $\overline{\sigma_{ij}} = \underline{\sigma_{ij}}$*, alors* B^{ij} *devient un mouvement Brownien classique.*

Proposition 1.2.2 *(voir* [43]*)Pour tout* $0 \leq s \leq t \leq \infty$*, on a*

$$E\left[\left\langle B^{ij}\right\rangle_t - \left\langle B^{ij}\right\rangle_s |\Omega_s\right] = \overline{\sigma_{ij}}^2 (t-s) \tag{1.5}$$

$$E\left[-\left(\left\langle B^{ij}\right\rangle_t - \left\langle B^{ij}\right\rangle_s\right) |\Omega_s\right] = -\underline{\sigma_{ij}}^2 (t-s) \tag{1.6}$$

Corollaire 1.2.1 [45] *Pour tout* $0 \leq s \leq t \leq T$*, on a*

$$\underline{\sigma_{ij}^2} t \leq \left(\left\langle B^{ij}\right\rangle_{t+s} - \left\langle B^{ij}\right\rangle_s\right) \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 t.$$

Définition 1.2.4 *L'intégrale d'un processus* $\eta \in M_G^{1,0}(0,T)$ *par rapport à* $\langle B^{ij}\rangle_t$ *est définie par*

$$Q(\eta) = \int_0^T \eta_t d\left\langle B^{ij}\right\rangle_t := \sum_{l=0}^{N-1} \xi_l \left(\left\langle B^{ij}\right\rangle_{t_{l+1}} - \left\langle B^{ij}\right\rangle_{t_l}\right) \tag{1.7}$$

L'application $Q : M_G^{1,0}(0,T) \to L_G^1(\Omega_T)$ *est continue et peut donc se prolonger par continuité à* $M_G^1(0,T)$.

Proposition 1.2.3 *(voir* [43]*) Soit* $\eta \in M_G^2(0,T)$ *, alors*

$$E\left[\left(\int_0^t \eta_s dB_s^{ij}\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \eta_s^2 d\left\langle B^{ij}\right\rangle_s\right].$$

Le théorème suivant exprime les inégalités Burkholder-Davis-Gundy (BDG) pour les $G-$intégrales stochastiques relativement par rapport au $G-$mouvement brownien réel B^{ij} (voir [13]).

Théorème 1.2.1 1) *Soient* $p \geq 1$, $\eta \in M_G^p(0,T)$ *et* $0 \leq s \leq t \leq T$*. Alors on a*

$$E\left[\sup_{s\leq u\leq t}\left|\int_s^u \eta_r d\left\langle B^{ij}\right\rangle_r\right|^p\right] \leq C_1 (t-s)^{p-1}\int_s^t E\left[|\eta_u|^p\right] du \tag{1.8}$$

où $C_1 > 0$ *est une constante independante de* η.

2) *Soient* $p \geq 2$, $\eta \in M_G^p(0,T)$ *et* $0 \leq s \leq t \leq T$*. Alors on a*

$$E\left[\sup_{s\leq u\leq t}\left|\int_s^u \eta_r dB_r^{ij}\right|^p\right] \leq C_2 |t-s|^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t E\left[|\eta_u|^p\right] du \tag{1.9}$$

où $C_2 > 0$ *est une constante independante de* η.

La covariation quadratique du $G-$mouvement Brownien matrice

On définit le processus de covariation quadratique par

$$\left\langle B^{ij}, B^{km} \right\rangle := \frac{1}{4}\left[\left\langle B^{ij} + B^{km} \right\rangle - \left\langle B^{ij} - B^{km} \right\rangle\right] \tag{1.10}$$

et on observe que

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{N-1} \left(B^{ij}_{t^N_{p+1}} - B^{ij}_{t^N_p}\right)\left(B^{km}_{t^N_{p+1}} - B^{km}_{t^N_p}\right) &= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{N-1}\left\{\left[\left(B^{ij}_{t_{p+1}} + B^{km}_{t_{p+1}}\right)\right.\right. \\ &\quad \left. - \left(B^{ij}_{t_p} + B^{km}_{t_p}\right)\right]^2 \\ &\quad - \left[\left(B^{ij}_{t_{p+1}} - B^{km}_{t_{p+1}}\right)\right. \\ &\quad \left.\left. - \left(B^{ij}_{t_p} - B^{km}_{t_p}\right)\right]^2\right\}, \end{aligned}$$

d'où, puisque $\mu\left(\pi^N_t\right) \to 0$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{p=0}^{N-1} \left(B^{ij}_{t^N_{p+1}} - B^{ij}_{t^N_p}\right)\left(B^{km}_{t^N_{p+1}} - B^{km}_{t^N_p}\right) = \left\langle B^{ij}, B^{km} \right\rangle,$$

et aussi

$$\begin{aligned} \left\langle B^{ij}, B^{km} \right\rangle_t &= \frac{1}{4}\left[\left\langle B^{ij} + B^{km} \right\rangle_t - \left\langle B^{ij} - B^{km} \right\rangle_t\right] \\ &= B^{ij}_t B^{km}_t - \int_0^t B^{ij}_s dB^{km}_s - \int_0^t B^{km}_s dB^{ij}_s. \end{aligned}$$

Il résulte que, pour tout $\eta \in M^1_G(0,T;\mathbb{R})$ on a

$$\int_0^T \eta_s d\left\langle B^{ij}, B^{km} \right\rangle_s = \frac{1}{4}\int_0^T \eta_s d\left\langle B^{ij} + B^{km} \right\rangle_s - \frac{1}{4}\int_0^T \eta_s d\left\langle B^{ij} - B^{km} \right\rangle_s.$$

1.2.1 $G-$Formule d'Itô

On donne maintenant la $G-$formule d'Itô dans un cadre général (voir [25, 26] pour le cas vectoriel). Dans la suite, nous adoptons la convention de notation d'Einstein.

Théorème 1.2.2 *Soit φ une fonction de classe C^2 sur $\mathcal{M}_n$ de telle sorte que $\partial_{x^{pq}}\varphi$, $\partial^2_{x^{p'q'}x^{pq}}\varphi \in C_{b.Lip}(\mathcal{M}_n)$. Soit $X = (X^{ij})$ un processus d'Itô matriciel sur $[0,T]$ avec*

$$X_t^{pq} = X_0^{pq} + \int_0^t \alpha^{pq}(s)\,ds + \int_0^t \theta_{ijkl}^{pq}(s)\,d\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle_s + \int_0^t \beta_{kl}^{pq}(s)\,dB_s^{kl}, \quad (1.11)$$

où α^{pq}, $\theta_{ijkl}^{pq} \in M_G^1(0,T)$ et $\beta_{kl}^{pq} \in M_G^2(0,T)$. Alors pour chaque $t \in [0,T]$, on a q.s.,

$$\begin{aligned}\varphi(X_t) - \varphi(X_0) &= \int_0^t \partial_{x^{pq}}\varphi(X_u)\,\beta_{kl}^{pq}(u)\,dB_u^{kl} + \int_0^t \partial_{x^{pq}}\varphi(X_u)\,\alpha^{pq}(u)\,du \\ &\quad + \int_0^t \Big[\partial_{x^{pq}}\varphi(X_u)\,\theta_{ijkl}^{pq}(u) \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial^2_{x^{p'q'}x^{pq}}\varphi(X_u)\,\beta_{ij}^{pq}(u)\,\beta_{kl}^{p'q'}(u)\Big]\,d\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle_u \quad (1.12)\end{aligned}$$

Remarque 1.2.2 *Notons que cette formule reste valide si X n'est pas une matrice carrée.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème (1.2.2). Dans toute la suite, on pose :

$$dX_t^{pq}dX_t^{mn} = \sum_{i,j,k,l} \beta_t^{pqij}\beta_t^{mnkl}d\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle_t.$$

Corollaire 1.2.2 *(voir [31])*

1. *La formule d'intégration par partie suivante a lieu :*

$$d\left(X_t^{pq}X_t^{mn}\right) = dX_t^{pq}X_t^{mn} + X_t^{pq}dX_t^{mn} + dX_t^{pq}dX_t^{mn}, \quad (1.13)$$

2. *On a $d\left\langle X_t^{pq}, X_t^{mn}\right\rangle = dX_t^{pq}dX_t^{mn}$.*

Preuve. 1. La $G-$formule d'Itô appliquée avec $\varphi(x,y)=xy$, donne

$$\begin{aligned}
d\left(X_t^{pq}X_t^{mn}\right) &= \left(\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x}\alpha^{pq}(t)+\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial y}\alpha^{mn}(t)\right)dt \\
&\quad+\left(\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x}\beta_{kl}^{pq}(t)+\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial y}\beta_{kl}^{mn}(t)\right)dB_t^{kl} \\
&\quad+\left(\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x}\theta_{ijkl}^{pq}(t)+\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial y}\theta_{ijkl}^{mn}(t)\right. \\
&\quad\left.+\frac{\partial^2\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x\partial y}\beta_{kl}^{pq}(t)\,\beta_{kl}^{mn}(t)\right)d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&= X_t^{mn}\alpha^{pq}(t)\,dt+X_t^{mn}\beta_{kl}^{pq}(t)\,dB_t^{kl}+X_t^{mn}\theta_{ijkl}^{pq}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&\quad+X_t^{pq}\alpha^{mn}(t)\,dt+X_t^{pq}\beta_{kl}^{mn}(t)\,dB_t^{kl}+X_t^{pq}\theta_{ijkl}^{mn}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&\quad+\beta_{kl}^{pq}(t)\,\beta_{kl}^{mn}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&= X_t^{mn}dX_t^{pq}+X_t^{pq}dX_t^{mn}+\beta_{kl}^{pq}(t)\,\beta_{kl}^{mn}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t.
\end{aligned}$$

2. Provient des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
dB_t^{ij}dB_t^{kl} &= d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t, \\
dtdB_t^{ij} &= dtd\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t=0.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.3 *Dans ce qui suit, on écrit* $\langle B^{ij}\rangle_t$ *au lieu de* $\langle B^{ij},B^{ij}\rangle_t$.

Définition 1.2.5 *Comme dans le cas classique, on définit l'intégrale de Stratonovich* $\circ$ *pour deux processus d'Itô matrices* X *et* Y *:*

$$X\circ dY=XdY+\frac{1}{2}dXdY \text{ et } dX\circ Y=dXY+\frac{1}{2}dXdY,$$

où $dXdY$ *est le produit matriciel classique.*

La proposition suivante a lieu.

Proposition 1.2.4 *(voir* [51]*) Soient* X *et* Y *deux processus matriciels d'Itô. Alors on a*

(i) *La formule d'intégration par parties :*

$$d(XY)=XdY+dXY+dXdY \tag{1.14}$$

(ii)

$$d(XY) = dX \circ Y + X \circ dY \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} dX \circ (YZ) &= (dX \circ Y) \circ Z \qquad (1.16)\\ (YZ) \circ dX &= (Y \circ Z) \circ dX \qquad (1.17) \end{aligned}$$

et

$$(X \circ dY)^T = dY^T \circ X^T \tag{1.18}$$

Y^T désigne la transposée de la matrice Y.

Preuve. Soient X, Y, Z des processus matrices d'Itô.
(i) Pour tout $i, j \in \overline{1, n}$, on a

$$\begin{aligned} d(XY)^{ij} &= d\left(\sum_k X^{ik}Y^{kj}\right) = \sum_k d\left(X^{ik}Y^{kj}\right)\\ &= \sum_k \left(dX^{ik}Y^{kj} + X^{ik}dY^{kj} + dX^{ik}dY^{kj}\right)\\ &= (dXY)^{ij} + (XdY)^{ij} + (dXdY)^{ij}, \end{aligned}$$

d'où

$$d(XY) = XdY + dXY + dXdY.$$

(ii) Par un calcul simple, on trouve

$$\begin{aligned} dX \circ Y + X \circ dY &= dXY + \frac{1}{2}dXdY + XdY + \frac{1}{2}dXdY\\ &= dXY + XdY + dXdY = d(XY). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} dX \circ (YZ) &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dXd(YZ)\\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dX(dYZ + YdZ). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (dX \circ Y) \circ Z &= \left(dXY + \frac{1}{2}dXdY\right) \circ Z\\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dXdYZ + \frac{1}{2}\left(dXYdZ + \frac{1}{2}dXdYdZ\right)\\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dX(dYZ + YdZ), \end{aligned}$$

d'où (1.16). L'égalité (1.17) se démontre de la même manière.

La formule (1.18) provient de la définition de l'intégrale de Stratonovich et du fait que

$$(dXdY)^T = dY^T dX^T.$$

■

Chapitre 2

$G-$EDS des valeurs propres et des vecteurs propres des processus matrices

L'objectif de ce chapitre est de donner les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres des processus qui sont eux même solutions d'EDS gouvernées par un $G-$mouvement Brownien matrice. Pour contourner les difficultés liées au fait que les entrées d'un $G-$mouvement Brownien matrice ne sont pas forcément indépendantes, on supposera que leurs covariations quadratiques sont nulles.

2.1 Le modèle

Dans le reste de cette thèse, on suppose que B satisfait l'hypothèse suivante :

(A) Il existe un processus réel et croissant b^j tel que $\left\langle B^{ij}, B^{kl} \right\rangle_t = \delta_{ik}\delta_{jl}b_t^j$ $q.s.$ pour chaque $i, j, k, l \in \overline{1, n}$, où δ_{uv} est le symbole de Kronecker.

On a alors $\underline{\sigma}^2 t \leq b_t^j \leq \overline{\sigma}^2 t$ où $\overline{\sigma} := \max\limits_{i,j} \overline{\sigma_{ij}}$ et $\underline{\sigma} := \min\limits_{i,j} \underline{\sigma_{ij}}$. Notons que dans le cas classique, l'hypothèse (A) est satisfaite avec $b_t^j = t$ pour tout $t \in [0, T]$.

On considère la $G-$équation différentielle stochastique générale définie par

$$dX_t = g(X_t)\, dB_t h(X_t) + h(X_t)\, dB_t^T g(X_t) + a(X_t)\, dt + c(X_t)\, d\langle B \rangle_t \quad (2.1)$$

où les fonctions $g, h, a, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ opèrent sur le spectre de X_t, et $X_0 \in \widetilde{\mathbb{S}}_n$ l'ensemble des matrices symétriques avec n valeurs propres différentes. La matrice variation quadratique $d\langle B\rangle$ est définie par $d\langle B\rangle := dBdB$. Notons que grâce à l'hypothèse (A), $d\langle B\rangle$ est une matrice diagonale où $d\langle B\rangle^{ij} = \delta_{ij}db^i$.

Dans ce qui suit, soit $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de dimension n identifié à $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Soit X_t la solution de l'EDS (2.1) lorsqu'elle existe et soit $H_t^T X_t H_t = \Lambda_t := diag\left(\lambda_i\left(t\right)\right)$ la forme de diagonalisation de X_t, où H_t est une matrice orthonormale. Notons que $X \in \mathbb{S}_n$ et que pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a $f\left(X\right) = Hf\left(\Lambda\right)H^T$. On suppose que $X_0 \in \widetilde{\mathbb{S}}_n$ et que les valeurs propres de X_t soient ordonnées de manière croissante : $\lambda_1\left(t\right) \leq \lambda_2\left(t\right) \leq ... \leq \lambda_n\left(t\right)$ jusqu'au premier temps de collision défini de la manière suivante :

Définition 2.1.1 *On définit le premier temps de collision des valeurs propres par*

$$\tau = \inf\left\{t : \lambda_i\left(t\right) = \lambda_j\left(t\right) \text{ pour } i \neq j\right\}.$$

2.2 $G-$équations différentielles stochastiques des valeurs propres

Maintenant on est en mesure d'énoncer le résultat principal de cette thèse. Notons que dans notre modèle, l'équation différentielle stochastique à étudier (2.1) se comporte comme dans le cas linéaire [4, 5, 14, 16, 37]. Les techniques utilisées sont inspirées par le cas linéaire, où le $G-$ mouvement Brownien joue le rôle d'un mouvement Brownien classique. Pour cela on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 [31] *Soit $X_t \in \mathbb{S}_n$ une solution de* (2.1). *Alors la matrice des valeurs propres Λ_t est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$d\Lambda = dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA, \tag{2.2}$$

où $dN = H^T \circ dX \circ H$ et A est la matrice logarithme stochastique de H définie par

$$dA = H^T \circ dH. \tag{2.3}$$

Preuve. Comme dans [4, 16], on considère la décomposition

$$\Lambda = H^T X H,$$

d'où

$$d\Lambda = d\left(H^T X H\right). \tag{2.4}$$

D'après la formule (2.4) et les notations d'Itô Stratonovich, on peut écrire

$$\begin{aligned} d\Lambda &= dH^T \circ (XH) + H^T \circ d(XH) \\ &= \left(dH^T \circ X\right) \circ H + H^T \circ (dX \circ H + X \circ dH) \\ &= \left(dH^T \circ X\right) \circ H + H^T \circ dX \circ H + H^T \circ X \circ dH, \end{aligned}$$

d'où en posant $dN = H^T \circ dX \circ H$,

$$d\Lambda = \left(dH^T \circ H\Lambda H^T\right) \circ H + dN + H^T \circ H\Lambda H^T \circ dH.$$

On obtient en utilisant les formules (1.16) et (1.17) :

$$\begin{aligned} d\Lambda &= dN + dH^T \circ H\Lambda + H^T H\Lambda H^T \circ dH \\ &= dN + dH^T \circ H\Lambda + \Lambda H^T \circ dH \\ &= dN + dH^T \circ H \circ \Lambda + \Lambda \circ H^T \circ dH \\ &= dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.1 [51] *Soit X_t une solution de l'équation* (2.1) *telle que $X_0 \in \widetilde{\mathbb{S}}_n$. Alors il existe un $G-$mouvement Brownien réel w^i tel que $w^i w^j = \delta_{ij} b^j$. Pour tout $i, j \in \overline{1,n}$ et pour $t < \tau$ le processus des valeurs propres Λ_t est solution du système suivant :*

$$d\lambda_i = 2g(\lambda_i)\, h(\lambda_i) \sum_k H^{ki} dw^k + a(\lambda_i)\, dt + dV^{ii} \tag{2.5}$$

où

$$dV^{ij} = \delta_{ij} c(\lambda_i) \sum_k \left(H^{ki}\right)^2 db^k + dR^{ij} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned} dR^{ij} = \sum_{k\neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} &\left[\delta_{ik} g^2(\lambda_k)\, h(\lambda_k)\, h(\lambda_j)\right. \\ &+ g^2(\lambda_k)\, h(\lambda_i)\, h(\lambda_j) \sum_l H^{li} H^{lj} db^l \\ &\left. + \delta_{ij} g^2(\lambda_j)\, h^2(\lambda_k) \sum_l \left(H^{lk}\right)^2 db^l\right]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

On a également

$$\begin{aligned} E\left[X\left(B_T^a-B_t^a\right)^2|\Omega_t\right] &= X^+E\left[\left(B_T^a-B_t^a\right)^2\right] \\ &\quad +X^-E\left[-\left(B_T^a-B_t^a\right)^2\right] \\ &= \left[X^+\overline{\sigma}_{aa^T}^2-X^-\underline{\sigma}_{aa^T}^2\right](T-t) \end{aligned}$$

et pour tout $n\geq 1$

$$\begin{aligned} E\left[X\left(B_T^a-B_t^a\right)^{2n-1}|\Omega_t\right] &= X^+E\left[\left(B_T^a-B_t^a\right)^{2n-1}\right] \\ &\quad +X^-E\left[-\left(B_T^a-B_t^a\right)^{2n-1}\right] \\ &= |X|\,E\left[\left(B_{T-t}^a\right)^{2n-1}\right]. \end{aligned}$$

Définition 1.1.8 *(voir* $[58,50]$*) Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est appelé* $G-$*martingale si pour tout* $t\in[0;T]$, $M_t\in L_G^1(\Omega_t)$ *et pour tout* $s\in[0,t]$ *on a*

$$E\left[M_t|\Omega_s\right]=M_s\ q.s..$$

1.2 $G-$mouvement Brownien matrice et $G-$calcul stochastique

Dans ce qui suit on identifie chaque matrice carrée d'ordre n à un vecteur de dimension n^2 et on considère maintenant $\Omega=C_0(\mathcal{M}_n)$ l'espace des fonctions continues $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n$ satisfaisant $\omega_0=\mathbf{0}$. Les définitions du paragraphe précédent restent valables sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n$.

Dans toute la suite, on considère le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ (i.e. $B_t(\omega)=\omega_t$) défini sur $(\Omega, Lip(\Omega), E)$ où $\Omega=C_0(\mathcal{M}_n)$. $\left(B_t^{ij}\right)$ est donc un $G_{\underline{\sigma_{ij}},\overline{\sigma_{ij}}}-$mouvement Brownien réel où

$$\overline{\sigma_{ij}}^2=E\left[\left(B_1^{ij}\right)^2\right] \text{ et } \underline{\sigma_{ij}}^2=-E\left[-\left(B_1^{ij}\right)^2\right].$$

Soit $\pi_T^k=\left\{0=t_0^k<t_1^k<...<t_N^k=T\right\}$ une suite de subdivisions de $[0,T]$, dont le pas

$$\mu\left(\pi_T^k\right)=\max\left\{\left|t_{i+1}^k-t_i^k\right|:i=0,1,...,N-1\right\},$$

tend vers 0 lorsque $k \to \infty$. Par abus d'écriture on écrit $\pi_T = \{t_0, t_1, ..., t_N\}$ au lieu de $\pi_T^k = \left\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_N^k = T\right\}$. Pour tout $p \geq 1$, on considère l'espace des processus simples $M_G^{p,0}(0,T)$ tels que

$$\eta = \eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t), \text{ pour } 0 = t_0 < ... < t_N = T,$$

où $\xi_j \in L_G^p\left(\Omega_{t_j}\right); j = 0, ..., N-1$.

Pour tout $p \geq 1$, on note par $M_G^p(0,T)$ l'adhérence de $M_G^{p,0}(0,T)$ sous la norme

$$\|\eta\|_{M_G^p(0,T)} = \left\{E\left[\int_0^T |\eta_t|^p \, dt\right]\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que $M_G^p(0,T)$ un espace de Banach.

Définition 1.2.1 *L'intégrale de Bochner de* (η_t) *est définie par*

$$\int_0^T \eta_t(\omega)\, dt = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)(t_{j+1} - t_j).$$

On donne maintenant la définition de la $G-$intégrale d'Itô.

Définition 1.2.2 *Pour tout* $\alpha \in M_G^{2,0}(0,T)$, *on définit la* $G-$*intégrale d'Itô par*

$$I(\alpha) := \int_0^T \alpha_t dB_t^{ij} = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \left(B_{t_{j+1}}^{ij} - B_{t_j}^{ij}\right).$$

Notons que $I(\alpha)$ est complètement indépendante de G, et $\left(\int_0^t \alpha_s dB_s^{ij}\right)_{0 \leq t \leq T}$ est une $G-$martingale (voir [58]).

Lemme 1.2.1 *L'application* $I : M_G^{2,0}(0,T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$ *est linéaire, continue et peut-être donc prolongée par continuité à* $M_G^2(0,T)$ *et on a*

$$E\left(\int_0^T \alpha_t dB_t^{ij}\right) = 0 \tag{1.3}$$

et

$$E\left[\left(\int_0^T \alpha_t dB_t^{ij}\right)^2\right] \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 E\left(\int_0^T \alpha_t dt\right) \tag{1.4}$$

Preuve. (voir [3], [25]). ■

Proposition 1.2.1 *Soient $\eta, \theta \in M_G^2(0,T)$ et $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. Alors on a*

(i) $\int_s^t \eta_u dB_u^{ij} = \int_s^r \eta_u dB_u^{ij} + \int_r^t \eta_u dB_u^{ij}$,

(ii) $\int_s^t (\alpha\eta_u + \theta_u) dB_u^{ij} = \alpha\int_s^t \eta_u dB_u^{ij} + \int_s^t \theta_u dB_u^{ij}$, *si α est bornée dans $L_G^1(\Omega_s)$*,

(iii) $E\left[X + \int_r^T \eta_u dB_u^{ij} \,|\Omega_s\right] = E[X\,|\Omega_s]$ *pour $X \in L_G^1(\Omega_s)$.*

Processus de variation quadratique

Le processus de variation quadratique du $G-$mouvement Brownien est un processus très intéressant. On a vu que le $G-$mouvement Brownien est un processus de variance incertaine mais de moyenne certaine centrée. Cette incertitude est concentrée dans sa variation quadratique $\langle B^{ij}\rangle$. Par ailleurs $\langle B^{ij}\rangle$ lui-même est un processus de moyenne-variance.

Soit $\pi_t^N, N = 1, 2, ...$ une suite de subdivisions de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0. On a alors

$$\begin{aligned} B_t^{ij2} &= \sum_{p=0}^{N-1}\left(B_{t_{p+1}^N}^{ij2} - B_{t_p^N}^{ij2}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} 2B_{t_p^N}^{ij}\left(B_{t_{p+1}^N}^{ij} - B_{t_p^N}^{ij}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(B_{t_{p+1}^N}^{ij} - B_{t_p^N}^{ij}\right)^2. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3 *La variation quadratique de $\left(B_t^{ij}\right)_{t\geq 0}$ est définie par la limite $L_G^2(\Omega)$ suivante*

$$\left\langle B^{ij}\right\rangle_t := \lim_{\mu\left(\pi_T^N\right)\to 0} \sum_{l=0}^{N-1}\left(B_{t_{l+1}}^{ij} - B_{t_l}^{ij}\right)^2 = \left(B_t^{ij}\right)^2 - 2\int_0^t B_s^{ij} dB_s^{ij}.$$

Remarque 1.2.1 *Il est important de garder à l'esprit que $\langle B^{ij}\rangle$ n'est pas un processus déterministe sauf dans le cas où $\overline{\sigma_{ij}} = \underline{\sigma_{ij}}$, alors B^{ij} devient un mouvement Brownien classique.*

Proposition 1.2.2 *(voir [43])Pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty$, on a*

$$E\left[\left\langle B^{ij}\right\rangle_t - \left\langle B^{ij}\right\rangle_s |\Omega_s\right] = \overline{\sigma_{ij}}^2 (t-s) \tag{1.5}$$

$$E\left[-\left(\left\langle B^{ij}\right\rangle_t - \left\langle B^{ij}\right\rangle_s\right) |\Omega_s\right] = -\underline{\sigma_{ij}}^2 (t-s) \tag{1.6}$$

Corollaire 1.2.1 [45] *Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, on a*

$$\underline{\sigma_{ij}^2} t \leq \left(\left\langle B^{ij}\right\rangle_{t+s} - \left\langle B^{ij}\right\rangle_s\right) \leq \overline{\sigma_{ij}}^2 t.$$

Définition 1.2.4 *L'intégrale d'un processus $\eta \in M_G^{1,0}(0,T)$ par rapport à $\langle B^{ij}\rangle_t$ est définie par*

$$Q(\eta) = \int_0^T \eta_t d\left\langle B^{ij}\right\rangle_t := \sum_{l=0}^{N-1} \xi_l \left(\left\langle B^{ij}\right\rangle_{t_{l+1}} - \left\langle B^{ij}\right\rangle_{t_l}\right) \tag{1.7}$$

L'application $Q : M_G^{1,0}(0,T) \to L_G^1(\Omega_T)$ est continue et peut donc se prolonger par continuité à $M_G^1(0,T)$.

Proposition 1.2.3 *(voir [43]) Soit $\eta \in M_G^2(0,T)$, alors*

$$E\left[\left(\int_0^t \eta_s dB_s^{ij}\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \eta_s^2 d\left\langle B^{ij}\right\rangle_s\right].$$

Le théorème suivant exprime les inégalités Burkholder-Davis-Gundy (BDG) pour les $G-$intégrales stochastiques relativement par rapport au $G-$mouvement brownien réel B^{ij} (voir [13]).

Théorème 1.2.1 1) *Soient $p \geq 1$, $\eta \in M_G^p(0,T)$ et $0 \leq s \leq t \leq T$. Alors on a*

$$E\left[\sup_{s\leq u\leq t}\left|\int_s^u \eta_r d\left\langle B^{ij}\right\rangle_r\right|^p\right] \leq C_1 (t-s)^{p-1} \int_s^t E\left[|\eta_u|^p\right] du \tag{1.8}$$

où $C_1 > 0$ est une constante independante de η.

2) *Soient $p \geq 2$, $\eta \in M_G^p(0,T)$ et $0 \leq s \leq t \leq T$. Alors on a*

$$E\left[\sup_{s\leq u\leq t}\left|\int_s^u \eta_r dB_r^{ij}\right|^p\right] \leq C_2 |t-s|^{\frac{p}{2}-1} \int_s^t E\left[|\eta_u|^p\right] du \tag{1.9}$$

où $C_2 > 0$ est une constante independante de η.

La covariation quadratique du $G-$mouvement Brownien matrice

On définit le processus de covariation quadratique par

$$\left\langle B^{ij},B^{km}\right\rangle :=\frac{1}{4}\left[\left\langle B^{ij}+B^{km}\right\rangle -\left\langle B^{ij}-B^{km}\right\rangle\right] \tag{1.10}$$

et on observe que

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{N-1}\left(B^{ij}_{t^N_{p+1}}-B^{ij}_{t^N_p}\right)\left(B^{km}_{t^N_{p+1}}-B^{km}_{t^N_p}\right) &= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{N-1}\Bigg\{\Bigg[\left(B^{ij}_{t_{p+1}}+B^{km}_{t_{p+1}}\right)\\ &\quad -\left(B^{ij}_{t_p}+B^{km}_{t_p}\right)\Bigg]^2\\ &\quad -\Bigg[\left(B^{ij}_{t_{p+1}}-B^{km}_{t_{p+1}}\right)\\ &\quad -\left(B^{ij}_{t_p}-B^{km}_{t_p}\right)\Bigg]^2\Bigg\},\end{aligned}$$

d'où, puisque $\mu\left(\pi^N_t\right)\to 0$, on a

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{p=0}^{N-1}\left(B^{ij}_{t^N_{p+1}}-B^{ij}_{t^N_p}\right)\left(B^{km}_{t^N_{p+1}}-B^{km}_{t^N_p}\right)=\left\langle B^{ij},B^{km}\right\rangle,$$

et aussi

$$\begin{aligned}\left\langle B^{ij},B^{km}\right\rangle_t &= \frac{1}{4}\left[\left\langle B^{ij}+B^{km}\right\rangle_t-\left\langle B^{ij}-B^{km}\right\rangle_t\right]\\ &= B^{ij}_tB^{km}_t-\int_0^t B^{ij}_s dB^{km}_s-\int_0^t B^{km}_s dB^{ij}_s.\end{aligned}$$

Il résulte que, pour tout $\eta\in M^1_G\left(0,T;\mathbb{R}\right)$ on a

$$\int_0^T \eta_s d\left\langle B^{ij},B^{km}\right\rangle_s=\frac{1}{4}\int_0^T\eta_s d\left\langle B^{ij}+B^{km}\right\rangle_s-\frac{1}{4}\int_0^T\eta_s d\left\langle B^{ij}-B^{km}\right\rangle_s.$$

1.2.1 $G-$Formule d'Itô

On donne maintenant la $G-$formule d'Itô dans un cadre général (voir [25, 26] pour le cas vectoriel). Dans la suite, nous adoptons la convention de notation d'Einstein.

Théorème 1.2.2 *Soit φ une fonction de classe C^2 sur $\mathcal{M}_n$ de telle sorte que $\partial_{x^{pq}}\varphi$, $\partial^2_{x^{p'q'}x^{pq}}\varphi \in C_{b.Lip}(\mathcal{M}_n)$. Soit $X = (X^{ij})$ un processus d'Itô matriciel sur $[0,T]$ avec*

$$X_t^{pq} = X_0^{pq} + \int_0^t \alpha^{pq}(s)\,ds + \int_0^t \theta_{ijkl}^{pq}(s)\,d\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle_s + \int_0^t \beta_{kl}^{pq}(s)\,dB_s^{kl}, \quad (1.11)$$

où α^{pq}, $\theta_{ijkl}^{pq} \in M_G^1(0,T)$ et $\beta_{kl}^{pq} \in M_G^2(0,T)$. Alors pour chaque $t \in [0,T]$, on a q.s.,

$$\begin{aligned}
\varphi(X_t) - \varphi(X_0) &= \int_0^t \partial_{x^{pq}}\varphi(X_u)\,\beta_{kl}^{pq}(u)\,dB_u^{kl} + \int_0^t \partial_{x^{pq}}\varphi(X_u)\,\alpha^{pq}(u)\,du \\
&\quad + \int_0^t \Big[\partial_{x^{pq}}\varphi(X_u)\,\theta_{ijkl}^{pq}(u) \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial^2_{x^{p'q'}x^{pq}}\varphi(X_u)\,\beta_{ij}^{pq}(u)\,\beta_{kl}^{p'q'}(u)\Big]\,d\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle_u \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.2 *Notons que cette formule reste valide si X n'est pas une matrice carrée.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème $(1.2.2)$. Dans toute la suite, on pose :

$$dX_t^{pq}dX_t^{mn} = \sum_{i,j,k,l} \beta_t^{pqij}\beta_t^{mnkl}\,d\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle_t.$$

Corollaire 1.2.2 *(voir [31])*

1. *La formule d'intégration par partie suivante a lieu :*

$$d\left(X_t^{pq}X_t^{mn}\right) = dX_t^{pq}X_t^{mn} + X_t^{pq}dX_t^{mn} + dX_t^{pq}dX_t^{mn}, \quad (1.13)$$

2. *On a $d\left\langle X_t^{pq}, X_t^{mn}\right\rangle = dX_t^{pq}dX_t^{mn}$.*

Preuve. 1. La $G-$formule d'Itô appliquée avec $\varphi(x,y)=xy$, donne

$$\begin{aligned}
d\left(X_t^{pq}X_t^{mn}\right) &= \left(\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x}\alpha^{pq}(t)+\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial y}\alpha^{mn}(t)\right)dt \\
&\quad+\left(\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x}\beta_{kl}^{pq}(t)+\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial y}\beta_{kl}^{mn}(t)\right)dB_t^{kl} \\
&\quad+\left(\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x}\theta_{ijkl}^{pq}(t)+\frac{\partial\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial y}\theta_{ijkl}^{mn}(t)\right. \\
&\quad\left.+\frac{\partial^2\varphi\left(X_t^{pq},X_t^{mn}\right)}{\partial x\partial y}\beta_{kl}^{pq}(t)\,\beta_{kl}^{mn}(t)\right)d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&= X_t^{mn}\alpha^{pq}(t)\,dt+X_t^{mn}\beta_{kl}^{pq}(t)\,dB_t^{kl}+X_t^{mn}\theta_{ijkl}^{pq}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&\quad+X_t^{pq}\alpha^{mn}(t)\,dt+X_t^{pq}\beta_{kl}^{mn}(t)\,dB_t^{kl}+X_t^{pq}\theta_{ijkl}^{mn}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&\quad+\beta_{kl}^{pq}(t)\,\beta_{kl}^{mn}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t \\
&= X_t^{mn}dX_t^{pq}+X_t^{pq}dX_t^{mn}+\beta_{kl}^{pq}(t)\,\beta_{kl}^{mn}(t)\,d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t.
\end{aligned}$$

2. Provient des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
dB_t^{ij}dB_t^{kl} &= d\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t, \\
dtdB_t^{ij} &= dtd\left\langle B^{ij},B^{kl}\right\rangle_t=0.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.3 *Dans ce qui suit, on écrit* $\langle B^{ij}\rangle_t$ *au lieu de* $\langle B^{ij},B^{ij}\rangle_t$.

Définition 1.2.5 *Comme dans le cas classique, on définit l'intégrale de Stratonovich* $\circ$ *pour deux processus d'Itô matrices* X *et* Y *:*

$$X\circ dY=XdY+\frac{1}{2}dXdY \text{ et } dX\circ Y=dXY+\frac{1}{2}dXdY,$$

où $dXdY$ *est le produit matriciel classique.*

La proposition suivante a lieu.

Proposition 1.2.4 *(voir* [51]*) Soient* X *et* Y *deux processus matriciels d'Itô. Alors on a*

(i) La formule d'intégration par parties :

$$d(XY)=XdY+dXY+dXdY \tag{1.14}$$

(ii)

$$d(XY) = dX \circ Y + X \circ dY \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} dX \circ (YZ) &= (dX \circ Y) \circ Z & (1.16) \\ (YZ) \circ dX &= (Y \circ Z) \circ dX & (1.17) \end{aligned}$$

et

$$(X \circ dY)^T = dY^T \circ X^T \tag{1.18}$$

Y^T désigne la transposée de la matrice Y.

Preuve. Soient X, Y, Z des processus matrices d'Itô.

(i) Pour tout $i, j \in \overline{1, n}$, on a

$$\begin{aligned} d(XY)^{ij} &= d\left(\sum_k X^{ik}Y^{kj}\right) = \sum_k d\left(X^{ik}Y^{kj}\right) \\ &= \sum_k \left(dX^{ik}Y^{kj} + X^{ik}dY^{kj} + dX^{ik}dY^{kj}\right) \\ &= (dXY)^{ij} + (XdY)^{ij} + (dXdY)^{ij}, \end{aligned}$$

d'où

$$d(XY) = XdY + dXY + dXdY.$$

(ii) Par un calcul simple, on trouve

$$\begin{aligned} dX \circ Y + X \circ dY &= dXY + \frac{1}{2}dXdY + XdY + \frac{1}{2}dXdY \\ &= dXY + XdY + dXdY = d(XY). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} dX \circ (YZ) &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dXd(YZ) \\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dX(dYZ + YdZ). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (dX \circ Y) \circ Z &= \left(dXY + \frac{1}{2}dXdY\right) \circ Z \\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dXdYZ + \frac{1}{2}\left(dXYdZ + \frac{1}{2}dXdYdZ\right) \\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dX(dYZ + YdZ), \end{aligned}$$

d'où (1.16). L'égalité (1.17) se démontre de la même manière.

La formule (1.18) provient de la définition de l'intégrale de Stratonovich et du fait que

$$(dXdY)^T = dY^T dX^T.$$

■

Chapitre 2

$G-$EDS des valeurs propres et des vecteurs propres des processus matrices

L'objectif de ce chapitre est de donner les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres des processus qui sont eux même solutions d'EDS gouvernées par un $G-$mouvement Brownien matrice. Pour contourner les difficultés liées au fait que les entrées d'un $G-$mouvement Brownien matrice ne sont pas forcément indépendantes, on supposera que leurs covariations quadratiques sont nulles.

2.1 Le modèle

Dans le reste de cette thèse, on suppose que B satisfait l'hypothèse suivante :

(A) Il existe un processus réel et croissant b^j tel que $\left\langle B^{ij}, B^{kl}\right\rangle_t = \delta_{ik}\delta_{jl}b_t^j$ $q.s.$ pour chaque $i, j, k, l \in \overline{1, n}$, où δ_{uv} est le symbole de Kronecker.

On a alors $\underline{\sigma}^2 t \leq b_t^j \leq \overline{\sigma}^2 t$ où $\overline{\sigma} := \max\limits_{i,j} \overline{\sigma_{ij}}$ et $\underline{\sigma} := \min\limits_{i,j} \underline{\sigma_{ij}}$. Notons que dans le cas classique, l'hypothèse (A) est satisfaite avec $b_t^j = t$ pour tout $t \in [0, T]$.

On considère la $G-$équation différentielle stochastique générale définie par

$$dX_t = g\left(X_t\right) dB_t h\left(X_t\right) + h\left(X_t\right) dB_t^T g\left(X_t\right) + a\left(X_t\right) dt + c\left(X_t\right) d\left\langle B\right\rangle_t \quad (2.1)$$

où les fonctions $g, h, a, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opèrent sur le spectre de X_t, et $X_0 \in \widetilde{\mathbb{S}}_n$ l'ensemble des matrices symétriques avec n valeurs propres différentes. La matrice variation quadratique $d\langle B\rangle$ est définie par $d\langle B\rangle := dBdB$. Notons que grâce à l'hypothèse (A), $d\langle B\rangle$ est une matrice diagonale où $d\langle B\rangle^{ij} = \delta_{ij}db^i$.

Dans ce qui suit, soit $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de dimension n identifié à $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Soit X_t la solution de l'EDS (2.1) lorsqu'elle existe et soit $H_t^T X_t H_t = \Lambda_t := diag(\lambda_i(t))$ la forme de diagonalisation de X_t, où H_t est une matrice orthonormale. Notons que $X \in \mathbb{S}_n$ et que pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a $f(X) = Hf(\Lambda)H^T$. On suppose que $X_0 \in \widetilde{\mathbb{S}}_n$ et que les valeurs propres de X_t soient ordonnées de manière croissante : $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq ... \leq \lambda_n(t)$ jusqu'au premier temps de collision défini de la manière suivante :

Définition 2.1.1 *On définit le premier temps de collision des valeurs propres par*

$$\tau = \inf\{t : \lambda_i(t) = \lambda_j(t) \;\; pour\ i \neq j\}.$$

2.2 $G-$équations différentielles stochastiques des valeurs propres

Maintenant on est en mesure d'énoncer le résultat principal de cette thèse. Notons que dans notre modèle, l'équation différentielle stochastique à étudier (2.1) se comporte comme dans le cas linéaire [4, 5, 14, 16, 37]. Les techniques utilisées sont inspirées par le cas linéaire, où le $G-$ mouvement Brownien joue le rôle d'un mouvement Brownien classique. Pour cela on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 [31] *Soit $X_t \in \mathbb{S}_n$ une solution de* (2.1). *Alors la matrice des valeurs propres Λ_t est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$d\Lambda = dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA, \tag{2.2}$$

où $dN = H^T \circ dX \circ H$ et A est la matrice logarithme stochastique de H définie par

$$dA = H^T \circ dH. \tag{2.3}$$

Preuve. Comme dans [4, 16], on considère la décomposition

$$\Lambda = H^T X H,$$

d'où

$$d\Lambda = d\left(H^T X H\right). \tag{2.4}$$

D'après la formule (2.4) et les notations d'Itô Stratonovich, on peut écrire

$$\begin{aligned} d\Lambda &= dH^T \circ (XH) + H^T \circ d(XH) \\ &= \left(dH^T \circ X\right) \circ H + H^T \circ (dX \circ H + X \circ dH) \\ &= \left(dH^T \circ X\right) \circ H + H^T \circ dX \circ H + H^T \circ X \circ dH, \end{aligned}$$

d'où en posant $dN = H^T \circ dX \circ H$,

$$d\Lambda = \left(dH^T \circ H\Lambda H^T\right) \circ H + dN + H^T \circ H\Lambda H^T \circ dH.$$

On obtient en utilisant les formules (1.16) et (1.17) :

$$\begin{aligned} d\Lambda &= dN + dH^T \circ H\Lambda + H^T H\Lambda H^T \circ dH \\ &= dN + dH^T \circ H\Lambda + \Lambda H^T \circ dH \\ &= dN + dH^T \circ H \circ \Lambda + \Lambda \circ H^T \circ dH \\ &= dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.1 [51] *Soit X_t une solution de l'équation (2.1) telle que $X_0 \in \widetilde{\mathbb{S}}_n$. Alors il existe un $G-$mouvement Brownien réel w^i tel que $w^i w^j = \delta_{ij} b^j$. Pour tout $i, j \in \overline{1,n}$ et pour $t < \tau$ le processus des valeurs propres Λ_t est solution du système suivant :*

$$d\lambda_i = 2g(\lambda_i)\, h(\lambda_i) \sum_k H^{ki} dw^k + a(\lambda_i)\, dt + dV^{ii} \tag{2.5}$$

où

$$dV^{ij} = \delta_{ij} c(\lambda_i) \sum_k \left(H^{ki}\right)^2 db^k + dR^{ij} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned} dR^{ij} &= \sum_{k \neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \left[\delta_{ik} g^2(\lambda_k)\, h(\lambda_k)\, h(\lambda_j)\right. \\ &\quad + g^2(\lambda_k)\, h(\lambda_i)\, h(\lambda_j) \sum_l H^{li} H^{lj} db^l \\ &\quad \left. + \delta_{ij} g^2(\lambda_j)\, h^2(\lambda_k) \sum_l \left(H^{lk}\right)^2 db^l\right]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Preuve. Par souci de simplicité, on utilise la notation Ψ^{ij} au lieu de $\Psi(X_t)^{ij}$ pour $\Psi = g, g^2, h, a$ et c. D'après la proposition précédente on a $d\Lambda = dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA$. Observons maintenant que le processus $\Lambda \circ dA - dA \circ \Lambda$ est nul sur la diagonale. Par conséquent $d\lambda_i = dN^{ii}$ et on a $0 = dN^{ij} + (\lambda_i - \lambda_j)\, dA^{ij}$ si $i \neq j$ et donc

$$dA^{ij} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} dN^{ij} \text{ pour } i \neq j \tag{2.8}$$

On a d'après l'équation (2.1)

$$dX^{ij} = \sum_{p,q} g^{ip} dB_t^{pq} h^{qj} + \sum_{p,q} h^{ip} dB_t^{qp} g^{qj} + a^{ij} dt + \sum_{p,q} c^{ip} d\left\langle B^{pq}, B^{qj}\right\rangle_t,$$

d'où

$$\begin{aligned}
dX_t^{ij} dX_t^{km} &= \left(\sum_{p,q} g^{ip} dB_t^{pq} h^{qj} + \sum_{p,q} h^{ip} dB_t^{qp} g^{qj}\right) \\
&\quad * \left(\sum_{p',q'} g^{kp'} dB_t^{p'q'} h^{q'm} + \sum_{p,q} h^{kp'} dB_t^{q'p'} g^{q'm}\right) \\
&= \sum_{p,q} g^{ip} dB_t^{pq} h^{qj} \sum_{p',q'} g^{kp'} dB_t^{p'q'} h^{q'm} \\
&\quad + \sum_{p,q} g^{ip} dB_t^{pq} h^{qj} \sum_{p',q'} h^{kp'} dB_t^{q'p'} g^{q'm} \\
&\quad + \sum_{p,q} h^{ip} dB_t^{qp} g^{qj} \sum_{p',q'} g^{kp'} dB_t^{p'q'} h^{q'm} \\
&\quad + \sum_{p,q} h^{ip} dB_t^{qp} g^{qj} \sum_{p',q'} h^{kp'} dB_t^{q'p'} g^{q'm} \\
&= \sum_{p,q,p',q'} g^{ip} h^{qj} g^{kp} h^{qm} \delta_{pp'} \delta_{qq'} db_t^q + \sum_{p,q,p',q'} g^{ip} h^{qj} h^{kq} g^{pm} \delta_{pq'} \delta_{qp'} db_t^q \\
&\quad + \sum_{p,q} h^{ip} g^{qj} g^{kq} h^{pm} \delta_{qp'} \delta_{pq'} db_t^p + \sum_{p,q} h^{ip} g^{qj} h^{kp} g^{qm} \delta_{qq'} \delta_{pp'} db_t^p.
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
dX_t^{ij} dX_t^{km} &= \sum_{p,q} [g^{ip} h^{qj} g^{kp} h^{qm} + g^{ip} h^{qj} g^{pm} h^{kq}] db_t^q \\
&\quad + \sum_{p,q} [h^{ip} g^{qj} g^{kq} h^{pm} + h^{ip} g^{qj} h^{kp} g^{qm}] db_t^p \\
&= \sum_l \Big[\left(g^2\right)^{ik} h^{lj} h^{lm} + \left(g^2\right)^{im} h^{lj} h^{kl} \\
&\quad + \left(g^2\right)^{kj} h^{il} h^{lm} + \left(g^2\right)^{jm} h^{il} h^{kl} \Big] db_t^l.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} dX_t^{ij} dX_t^{km} &= \sum_l \Big[\left(g^2\right)^{ik} h^{lj} h^{lm} + \left(g^2\right)^{kj} h^{li} h^{lm} \\ &\quad + \left(g^2\right)^{im} h^{lj} h^{lk} + \left(g^2\right)^{jm} h^{li} h^{lk} \Big] db_t^l \end{aligned} \tag{2.9}$$

Il est facile de vérifier que

$$dN = H^T dXH + \frac{1}{2} H^T dX dH + \frac{1}{2} dH^T dXH, \tag{2.10}$$

il résulte alors que la partie $G-$martingale de dN est égale à la partie $G-$martingale de $H^T dXH$, donnée par :

$$\begin{aligned} dN^{ij} dN^{km} &= \left(H^T dXH\right)^{ij} \left(H^T dXH\right)^{km} \\ &= \sum_{pq} H^{pi} dX^{pq} H^{qj} \sum_{p'q'} H^{p'k} dX^{p'q'} H^{q'm}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

La formule (2.11) écrite avec (p, q, p', q') au lieu de (i, j, k, m), devient

$$\begin{aligned} dN^{ij} dN^{km} &= \sum_l \sum_{p,q,p',q'} H^{pi} H^{qj} H^{p'k} H^{q'm} \Big[\left(g^2\right)^{pp'} h^{lq} h^{lq'} + \left(g^2\right)^{p'q} h^{lp} h^{lq'} \\ &\quad + \left(g^2\right)^{pq'} h^{lq} h^{lp'} + \left(g^2\right)^{qq'} h^{lp} h^{lp'} \Big] db^l \qquad (2.12) \\ &= \underbrace{\sum_l \left[\sum_{p,p'} H^{pi} \left(g^2\right)^{pp'} H^{p'k} \sum_{q,q'} H^{qj} h^{lq} h^{lq'} H^{q'm} \right] db^l}_{(I)} \\ &\quad \underbrace{+ \sum_l \left[\sum_{q,p'} H^{qj} \left(g^2\right)^{p'q} H^{p'k} \sum_{q',p} H^{pi} h^{lp} h^{lq'} H^{q'm} \right] db^l}_{(II)} \\ &\quad \underbrace{+ \sum_l \left[\sum_{p,q'} H^{pi} \left(g^2\right)^{pq'} H^{q'm} \sum_{q,p'} H^{qj} h^{lq} h^{lp'} H^{p'k} \right] db^l}_{(III)} \\ &\quad \underbrace{+ \sum_l \left[\sum_{q,q'} H^{qj} \left(g^2\right)^{qq'} H^{q'm} \sum_{p,p'} H^{pi} h^{lp} h^{lp'} H^{p'k} \right] db^l.}_{(IV)} \end{aligned}$$

Observons maintenant que

$$\sum_{p,p'} H^{pi}\left(g^2\right)^{pp'} H^{p'k} = \left(H^T g^2 H\right)^{ik} = g^2\left(\Lambda\right)^{ik} = \delta_{ik} g^2\left(\lambda_k\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
(I) &= \delta_{ik} g^2\left(\lambda_k\right) \sum_{q,q'} H^{qj}\left(\sum_l h^{lq} h^{lq'} db^l\right) H^{q'm} \\
&= \delta_{ik} g^2\left(\lambda_k\right) \sum_{q,q'} H^{qj}\left(h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right)\right)^{qq'} H^{q'm} \\
&= \delta_{ik} g^2\left(\lambda_k\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{jm},
\end{aligned}$$

et de façon similaire, on a

$$(II) = \delta_{jk} g^2\left(\lambda_k\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{im},$$

$$(III) = \delta_{im} g^2\left(\lambda_m\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{jk},$$

$$(IV) = \delta_{jm} g^2\left(\lambda_m\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{ik}.$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
dN^{ij} dN^{km} &= \delta_{ik} g^2\left(\lambda_k\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{jm} \\
&\quad + \delta_{jk} g^2\left(\lambda_k\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{im} \\
&\quad + \delta_{im} g^2\left(\lambda_m\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{kj} \\
&\quad + \delta_{jm} g^2\left(\lambda_m\right)\left(H^T h\left(X\right) d\left\langle B\right\rangle h\left(X\right) H\right)^{ik},
\end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $h\left(X\right) H = Hh\left(\Lambda\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& dN^{ij} dN^{km} = \delta_{ik} g^2\left(\lambda_k\right)\left(h\left(\Lambda\right) H^T d\left\langle B\right\rangle Hh\left(\Lambda\right)\right)^{jm} \\
& + \delta_{jk} g^2\left(\lambda_k\right)\left(h\left(\Lambda\right) H^T d\left\langle B\right\rangle Hh\left(\Lambda\right)\right)^{im} \\
& + \delta_{im} g^2\left(\lambda_m\right)\left(h\left(\Lambda\right) H^T d\left\langle B\right\rangle Hh\left(\Lambda\right)\right)^{kj} \\
& + \delta_{jm} g^2\left(\lambda_m\right)\left(h\left(\Lambda\right) H^T d\left\langle B\right\rangle Hh\left(\Lambda\right)\right)^{ik}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Comme $\left(H^T d\left\langle B\right\rangle H\right)^{ij} = \sum_l H^{li} H^{lj} db^l$, alors

$$\left(h\left(\Lambda\right) H^T d\left\langle B\right\rangle Hh\left(\Lambda\right)\right)^{ij} = h\left(\lambda_i\right) h\left(\lambda_j\right) \sum_l H^{li} H^{lj} db^l,$$

d'où d'après la formule (2.12)

$$\begin{aligned} dN^{ij}dN^{km} &= \delta_{ik}g^2(\lambda_k)h(\lambda_j)h(\lambda_m)\sum_l H^{lj}H^{lm}db^l \\ &+\delta_{jk}g^2(\lambda_k)h(\lambda_i)h(\lambda_m)\sum_l H^{li}H^{lm}db^l \\ &+\delta_{im}g^2(\lambda_m)h(\lambda_k)h(\lambda_j)\sum_l H^{lk}H^{lj}db^l \\ &+\delta_{jm}g^2(\lambda_m)h(\lambda_i)h(\lambda_k)\sum_l H^{li}H^{lk}db^l, \end{aligned} \tag{2.14}$$

et donc,

$$dN^{ii}dN^{jj} = 4\delta_{ij}g^2(\lambda_i)h^2(\lambda_i)\sum_l \left(H^{li}\right)^2 db^l. \tag{2.15}$$

Il s'ensuit qu'il existe un $G-$mouvement Brownien w^i satisfaisant $\langle w^i, w^j\rangle = \delta_{ij}b^j$, tel que la partie $G-$martingale de $d\lambda_i$ soit égale à

$$2g(\lambda_i)h(\lambda_i)\sum_k H^{ki}dw^k \tag{2.16}$$

Passons maintenant à la partie à variation finie dF de dN. On a

$$dF_t = H^T aH dt = a(\Lambda_t)dt.$$

On en déduit que F est diagonale et

$$dF_t^{ii} = a(\lambda_i(t))dt \tag{2.17}$$

D'autre part, la partie intégrale dV par rapport à db^i de dN :

$$\begin{aligned} dV &= H^T cd\langle B\rangle H + \frac{1}{2}\left(dH^T dXH + H^T dXdH\right) \\ &= H^T cHH^T d\langle B\rangle H + \frac{1}{2}\left(\left(dH^T H\right)\left(H^T dXH\right) + \left(H^T dXH\right)\left(H^T dH\right)\right) \\ &= c(\Lambda)H^T d\langle B\rangle H + \frac{1}{2}\left(dNdA + (dNdA)^T\right). \end{aligned}$$

Notons que $\left(c(\Lambda)H^T d\langle B\rangle H\right)^{ij} = \delta_{ij}c(\lambda_i)\sum_k \left(H^{ki}\right)^2 db^k$. Il s'ensuit que, si $i \neq j$,

$$(dNdA)^{ij} = \sum_k dN^{ik}dA^{kj} = \sum_{k\neq j}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}dN^{ik}dN^{kj}.$$

On a d'après la formule (2.14) avec (i,k,k,j) au lieu de (i,j,k,m),

$$\begin{aligned}(dNdA)^{ij} &= \sum_{k\neq j}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}\Big[\delta_{ik}g^2(\lambda_k)\,h(\lambda_k)\,h(\lambda_j)\sum_l H^{lk}H^{lj}db^l\\ &\quad +g^2(\lambda_k)\,h(\lambda_i)\,h(\lambda_j)\sum_l H^{li}H^{lj}db^l\\ &\quad +\delta_{ij}g^2(\lambda_j)\,h^2(\lambda_k)\sum_l H^{lk}H^{lk}db^l\\ &\quad +\delta_{kj}g^2(\lambda_j)\,h(\lambda_i)\,h(\lambda_k)\sum_l H^{li}H^{lk}db^l\Big]\\ &= \sum_{k\neq j}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}\Big[\delta_{ik}g^2(\lambda_k)\,h(\lambda_k)\,h(\lambda_j)\sum_l H^{lk}H^{lj}db^l\\ &\quad +g^2(\lambda_k)\,h(\lambda_i)\,h(\lambda_j)\sum_l H^{li}H^{lj}db^l\Big]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(dNdA)^{ii} &= \sum_{k\neq i}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k}\Big[g^2(\lambda_k)\,h^2(\lambda_i)\sum_l\left(H^{li}\right)^2db^l\\ &\quad +g^2(\lambda_i)\,h^2(\lambda_k)\sum_l\left(H^{lk}\right)^2db^l\Big],\end{aligned}$$

ce qui implique que, pour $i\neq j$

$$dV^{ij}=\sum_{k\neq j}\tfrac{1}{\lambda_j-\lambda_k}\Big[\big(\delta_{ik}g^2(\lambda_k)\,h(\lambda_k)\,h(\lambda_j)+g^2(\lambda_k)\,h(\lambda_i)\,h(\lambda_j)\big)\sum_l H^{li}H^{lj}db^l\Big] \tag{2.18}$$

et que

$$\begin{aligned}dV^{ii} &= c(\lambda_i)\sum_k\left(H^{ki}\right)^2db^k+\sum_{k\neq i}\tfrac{1}{\lambda_i-\lambda_k}\Big[g^2(\lambda_k)\,h^2(\lambda_i)\sum_l\left(H^{li}\right)^2db^l\\ &\quad +g^2(\lambda_i)\,h^2(\lambda_k)\sum_l\left(H^{lk}\right)^2db^l\Big]\end{aligned} \tag{2.19}$$

Par conséquent, $d\lambda_i = 2g(\lambda_i)\,h(\lambda_i)\sum_k H^{ki}dw^k + a(\lambda_i)\,dt + dV^{ii}$, d'où le résultat désiré. ■

Notons que dans [34, 35], les auteurs traitent le cas des mouvements Browniens avec des méthodes analogues.

2.3 $G-$equations différentielles stochastiques des vecteurs propres

Pour expliciter les $G-$équations différentielles stochastiques des vecteurs propres, on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 [31] *La matrice H_t satisfait l'équation suivante :*

$$dH = H \circ dA = HdA + \frac{1}{2}HdAdA. \tag{2.20}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} dA &= H^T \circ dH \\ &= H^T dH + \frac{1}{2}dH^T dH. \end{aligned}$$

En multipliant cette égalité à gauche par H et en ajoutant $\frac{1}{2}dHdA$ des deux côtés, on obtient

$$HdA + \frac{1}{2}dHdA = dH + \frac{1}{2}HdH^T dH + \frac{1}{2}dHdA.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(HdH^T dH + dHdA\right) &= \frac{1}{2}\left(HdH^T dH + dH\left(H^T dH + \frac{1}{2}dH^T dH\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(HdH^T + dHH^T\right)dH, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$0 = dI = d\left(HH^T\right) = HdH^T + dHH^T + dHdH^T,$$

d'où

$$HdH^T + dHH^T = -dHdH^T,$$

et

$$\frac{1}{2}\left(HdH^T dH + dHdA\right) = -\frac{1}{2}dHdH^T dH = 0,$$

et en combinant ces égalités, on obtient

$$dH = H \circ dA = HdA + \frac{1}{2}HdAdA.$$

■

Théorème 2.3.1 *(voir [51]) La matrice des vecteurs propres H_t satisfait l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{aligned} dH^{ij} &= \sum_{k\neq j} \frac{H^{ik}}{\lambda_j-\lambda_k}\left\{\left[g(\lambda_k)h(\lambda_j)(d\beta H)^{jj}+g(\lambda_j)h(\lambda_k)(d\beta H)^{kk}\right]\right. \\ &\quad \left.+dV^{kj}\right\}-\frac{1}{2}\sum_k H^{ik}dQ^{kj} \end{aligned} \tag{2.21}$$

où dV^{kj} est donné par l'équation (2.6),

$$\begin{aligned} dQ^{kj} &= \sum_{l\neq k, l\neq j}\frac{1}{(\lambda_l-\lambda_k)(\lambda_l-\lambda_j)}\left[\delta_{kj}g^2(\lambda_k)h^2(\lambda_l)\sum_p \left(H^{pl}\right)^2 db^p\right. \\ &\quad \left.+g^2(\lambda_l)h(\lambda_k)h(\lambda_j)\sum_p H^{pk}H^{pj}db^p\right], \end{aligned}$$

et $\left(\beta^{ij}\right)$ est un $G-$mouvement Brownien matriciel satisfait l'hypothèse (A).

Preuve. On a d'après la proposition (2.3.1)

$$dH = HdA+\frac{1}{2}HdAdA,$$

d'où

$$dH^{ij}=\sum_l H^{il}dA^{lj}+\frac{1}{2}\sum_l H^{il}(dAdA)^{lj}.$$

D'une part, on a d'après l'équation (2.8) :

$$\begin{aligned} (dAdA)^{ij} &= \sum_k dA^{ik}dA^{kj} \\ &= \sum_{k\neq i,k\neq j}\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k)}dN^{ik}dN^{kj} \qquad (2.22) \\ &= \sum_{k\neq i,k\neq j}\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k)}\left[\delta_{ij}g^2(\lambda_i)h^2(\lambda_k)\sum_l\left(H^{lk}\right)^2db^l+\right. \\ &\quad \left. g^2(\lambda_k)h(\lambda_i)h(\lambda_j)\sum_l H^{li}H^{lj}db^l\right] \end{aligned}$$

D'autre part, à l'aide de l'équation (2.14), on déduit que si $i\neq j$,

$$dN^{ij}dN^{ij}=\left[g^2(\lambda_i)h^2(\lambda_j)\sum_l\left(H^{lj}\right)^2db^l+g^2(\lambda_j)h^2(\lambda_i)\sum_l\left(H^{li}\right)^2db^l\right].$$

Il s'ensuit que la partie $G-$martingale de dN^{ij} est

$$\begin{aligned}
& \left[g(\lambda_i)\, h(\lambda_j) \sum_l H^{lj} d\beta^{jl} + g(\lambda_j)\, h(\lambda_i) \sum_l H^{li} d\beta^{il}\right] \\
= & \left[g(\lambda_i)\, h(\lambda_j)\, (d\beta H)^{jj} + g(\lambda_j)\, h(\lambda_i)\, (d\beta H)^{ii}\right],
\end{aligned}$$

où $\beta := \left(\beta^{ij}\right)$ est un $G-$mouvement Brownien matriciel satisfait l'hypothèse (A) et que si $i \neq j$

$$\begin{aligned}
dA^{ij} &= \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} dN^{ij} \qquad (2.23) \\
&= \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\left[g(\lambda_i)\, h(\lambda_j)\, (d\beta H)^{jj} + g(\lambda_j)\, h(\lambda_i)\, (d\beta H)^{ii}\right] + dV^{ij}
\end{aligned}$$

La formule (2.21) découle de (2.20), (2.22) et (2.23). ■

2.4 Temps de collision

Le Théorème de Lèvy ci-dessous nous donne une manière facile d'affirmer quand est-ce-qu'une martingale locale continue est un mouvement Brownien.

Théorème 2.4.1 *(Théorème de Lévy voir* [47]*)*
Soit W une martingale locale continue de dimension $n \times n$, nulle en 0 telle que

$$\left\langle W^{ij}, W^{kl}\right\rangle_t = \begin{cases} t, & si\ i = k\ et\ j = l \\ 0, & sinon \end{cases}.$$

Alors W est un mouvement Brownien.
Preuve. *Il suffit de montrer que $X := vec(W)$ est un mouvement Brownien n^2-dimensionnel. Soient $a, b \in \{1, ..., n^2\}$. Alors, il existe $i, j, k, l \in \{1, ..., n\}$ tel que $a = n(j-1) + i$ et $b = n(l-1) + k$. Clairement, $i = k$ et $j = l$ impliquent $a = b$, et inversement. Ainsi,*

$$\left\langle X^a, X^b\right\rangle = \left\langle W^{ij}, W^{kl}\right\rangle = t\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}} = t\mathbf{1}_{\{a=b\}}.$$

On conclut d'après le théorème 40, chapitre 2 Protter [48] *que X est un mouvement Brownien n^2-dimensionnel.* ■

(i) Il existe une fonction ρ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et telle que $\frac{1}{\rho} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$ et $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) b est une fonction continue Lipschitzinne.

Alors l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dB_t + b(X_t)\,dt \tag{3.1}$$

admet une solution forte unique.

P. Graczyk et J. Malecki sont les premiers auteurs qui ont proposé une version multidimensionnelle de ce théorème, qui a été la clé de l'étude de l'existence et l'unicité de l'EDS de type (2.1). On aura besoin du lemme suivant

Lemme 3.1.1 [21, 30] *(Lemme de Gronwall) Soient φ une fonction continue non négative sur un segment $[a,b]$ et vérifiant l'inégalité :*

$$\forall t \in [a,b]\,; \varphi(t) \leq C + A \int_a^t \varphi(s)\,ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b]\,; \varphi(t) \leq Ce^{At}.$$

Théorème 3.1.2 [16] *Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ et $a_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, i = \overline{1,p}$ et $c_k, d_j : \mathbb{R}^{p+r} \to \mathbb{R}$, $k = p+1, ..., p+q$; $j = p+1, ..., p+r$ des fonctions à valeurs réelles bornées et continues, satisfaisant les conditions de Lipschitz suivantes :*

1. $|a_i(y_1) - a_i(y_2)| < A\|y_1 - y_2\|, i = \overline{1,p}$;
2. $|c_k(y_1, z_1) - c_k(y_2, z_2)| < A\|(y_1, z_1) - (y_2, z_2)\|, k = \overline{p+1, p+q}$;
3. $|d_j(y_1, z_1) - d_j(y_2, z_2)| < A\|(y_1, z_1) - (y_2, z_2)\|, j = \overline{p+1, p+r}$,

pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^p$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^r$. De plus, soit $\sigma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = \overline{1,p}$ un ensemble des fonctions boréliennes bornées telles que

$$|\sigma_i(x) - \sigma_i(y)|^2 \leq \rho_i(|x-y|), \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

où $\rho_i : (0,\infty) \to (0,\infty)$ sont des fonctions boréliennes telles que :

$$\int_{0^+} \rho_i^{-1}(x)\,dx = \infty.$$

Alors le système des équations différentielles stochastiques suivant

$$dY^i = \sigma_i\left(Y^i\right)dB^i + a_i\left(Y\right)dt; i = \overline{1,p} \tag{3.2}$$

$$dZ^j = \sum_{k=p+1}^{p+q} c_k\left(Y,Z\right)dB^k + a_j\left(Y,Z\right)dt; j = \overline{p+1,p+r} \tag{3.3}$$

admet une solution forte unique.

Signification de p, q et r :
p : nombre de coordonnées de Y,
q : nombre de mouvements Browniens dans les EDS pour dZ,
r : nombre de coordonnées de Z.

Preuve. La preuve est basée sur l'approche présentée dans Revuz,Yor [49], en particulier sur les résultats de Le Gall [24].

Soit (Y,Z) et $\left(\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right)$ deux solutions de (3.2) et (3.3) définies avec le même mouvement Brownien $B=(B_i)_{i\leq p+q}$ telles que :

$$Y_0 = \widetilde{Y}_0 \text{ et } Z_0 = \widetilde{Z}_0 \ \ p.s..$$

On a pour tout $i=1,...,p$,

$$Y^i - \widetilde{Y}^i = \int_0^t \left(\sigma_i\left(Y_s^i\right) - \sigma_i\left(\widetilde{Y}_s^i\right)\right)dB_s^i + \int_0^t \left(a_i\left(Y_s\right) - a_i\left(\widetilde{Y}_s\right)\right)ds \tag{3.4}$$

ce qui implique que

$$d\left\langle Y^i - \widetilde{Y}^i, Y^i - \widetilde{Y}^i\right\rangle_t = \left(\sigma_i\left(Y_t^i\right) - \sigma_i\left(\widetilde{Y}_t^i\right)\right)\left(\sigma_i\left(Y_t^i\right) - \sigma_i\left(\widetilde{Y}_t^i\right)\right)dt \tag{3.5}$$

et en multipliant par $\int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\left\{Y_s^i > \widetilde{Y}_s^i\right\}}}{\rho_i\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right)}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\left\{Y_s^i > \widetilde{Y}_s^i\right\}}}{\rho_i\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right)} d\left\langle Y^i - \widetilde{Y}^i, Y^i - \widetilde{Y}^i\right\rangle &= \int_0^t \frac{\left(\sigma_i\left(Y_s^i\right) - \sigma_i\left(\widetilde{Y}_s^i\right)\right)^2}{\rho_i\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right)} \mathbf{1}_{\left\{Y_s^i > \widetilde{Y}_s^i\right\}} ds \\ &\leq t,\end{aligned}$$

d'où d'après le lemme 3.3 de [49] p.389, le temps local de $Y^i - \widetilde{Y}^i$ en 0, $L_t^0\left(Y^i - \widetilde{Y}^i\right)$ est identiquement nul. Par conséquent, par la formule de Tanaka on a

$$\begin{aligned}
\left|Y_t^i - \widetilde{Y}_t^i\right| &= \int_0^t sgn\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right) d\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right) + \frac{1}{2}L_t^0\left(Y^i - \widetilde{Y}^i\right) \\
&= \int_0^t sgn\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right) d\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right) \\
&= \int_0^t sgn\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right)\left(\sigma_i\left(Y_s^i\right) - \sigma_i\left(\widetilde{Y}_s^i\right)\right) dB_s^i \\
&\quad + \int_0^t sgn\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right)\left(a_i\left(Y_s\right) - a_i\left(\widetilde{Y}_s\right)\right) ds.
\end{aligned}$$

Comme σ_i est bornnée, alors

$$\left|Y_t^i - \widetilde{Y}_t^i\right| - \int_0^t sgn\left(Y_s^i - \widetilde{Y}_s^i\right)\left(a_i\left(Y_s\right) - a_i\left(\widetilde{Y}_s\right)\right) ds$$

est une martingale nulle en 0, d'où d'après les conditions de Lipschitz satisfaites par les a_i,

$$E\left|Y_t^i - \widetilde{Y}_t^i\right| \leq A\int_0^t E\left\|Y_s - \widetilde{Y}_s\right\| ds.$$

En sommant ces dernières inégalités par rapport à i, on obtient

$$E\left\|Y_s - \widetilde{Y}_s\right\| \leq C\int_0^t E\left\|Y_s - \widetilde{Y}_s\right\| ds,$$

d'où d'après le lemme de Gronwall $Y_t = \widetilde{Y}_t$ pour tout $t > 0$ $p.s.$.

Il résulte, d'après les propriétés de l'intégrale d'Itô et de l'inégalité de Schwartz, que pour tout $t \in [0;T]$

$$
\begin{aligned}
E\left|Z_t^j - \widetilde{Z}_t^j\right|^2 &\leq C \sum_{k=p+1}^{p+q} E\left(\int_0^t \left(c_k\left(Y_s, Z_s\right) - c_k\left(\widetilde{Y}_s, \widetilde{Z}_s\right)\right) dB_s^k\right)^2 \\
&+CE\left(\int_0^t \left(a_j\left(Y_s, Z_s\right) - a_j\left(\widetilde{Y}_s, \widetilde{Z}_s\right)\right) ds\right)^2 \\
&\leq C \sum_{k=p+1}^{p+q} E\int_0^t \left(c_k\left(Y_s, Z_s\right) - c_k\left(\widetilde{Y}_s, \widetilde{Z}_s\right)\right)^2 ds \\
&+CTE\int_0^t \left(a_j\left(Y_s, Z_s\right) - a_j\left(\widetilde{Y}_s, \widetilde{Z}_s\right)\right)^2 ds \\
&\leq CA^2\left(q+T\right) E\int_0^t \left(\left\|Y_s - \widetilde{Y}_s\right\|^2 + \left\|Z_s - \widetilde{Z}_s\right\|^2\right) ds.
\end{aligned}
$$

Ainsi, d'après l'argument utilisé précédemment on a $Y = \widetilde{Y}$ et on obtient

$$
E\left\|Z_t - \widetilde{Z}_t\right\|^2 \leq CA^2\left(q+T\right) r \int_0^t E\left\|Z_s - \widetilde{Z}_s\right\|^2 ds.
$$

On conclut d'après le lemme de Gronwall que $Z_t = \widetilde{Z}_t$ $p.s.$ pour tout $t \in [0,T]$. ■

3.2 Cas des $G-$équations différentielles stochastiques

Dans ce paragraphe, on utilise les hypothèses de croissance linéaire et de Lipschitz sur les fonctions g, h, a, c comme fonction de matrices (voir l'appendice) et non de variables réelles.

Hypothèses : On suppose que $g, h, a, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfont les conditions suivantes :

(i) Condition Lipschitz : pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$
\left|J\left(X\right) - J\left(Y\right)\right|^2 \leq A\left|X - Y\right|^2,
$$

où $J(X) = g(X)^{ik} h(X)^{jl}$, $a(X)$ et $c(X)$ respectivement et A est un constante positive.

(ii) Condition de croissance linéaire : pour tout $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$|J(X)|^2 \leq K\left(1+|X|^2\right),$$

où $J(X) = g(X)^{ik} h(X)^{jl}, a(X)$ et $c(X)$ respectivement et K est un constante positive.

Théorème 3.2.1 [51] *Sous les hypothèses* (i) *et* (ii), *on a l'unicité en trajectoires de la solustion de l'équation différentielle stochastique* (2.1).

Preuve. On a

$$dX^{ij} = \sum_{k,l}\left(g(X)^{ik} h(X)^{lj} + g(X)^{kj} h(X)^{il}\right) dB^{kl} + a(X)^{ij}\,dt + c(X)^{ij}\,d\left\langle B^{jj}\right\rangle \tag{3.6}$$

Soient $X(x_k), k=1,2$ deux solutions de l'EDS (2.1) avec les conditions initiales $x_k = \left(x_k^{ij}\right)$. Par souci de simplicité, on utilise la notation

$$J^{ijkl}(X) := g(X)^{ik} h(X)^{lj} + g(X)^{kj} h(X)^{il}$$

pour $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors on a pour tout $u \leq t$

$$\begin{aligned} X_u^{ij}(x_1) - X_u^{ij}(x_2) &= \left|x_1^{ij} - x_2^{ij}\right| + \int_0^u \sum_{k,l}\left(J^{ijkl}(X_s(x_1)) - J^{ijkl}(X_s(x_2))\right) dB^{kl} \\ &\quad + \int_0^u \left(a(X_s(x_1))^{ij} - a(X_s(x_2))^{ij}\right) ds \\ &\quad + \int_0^u \left(c(X_s(x_1))^{ij} - c(X_s(x_2))^{ij}\right) d\left\langle B^{jj}\right\rangle_s, \end{aligned}$$

d'où

$$E\left|X_u^{ij}(x_1) - X_u^{ij}(x_2)\right|^2 \leq C\left\{\left|x_1^{ij} - x_2^{ij}\right|^2 + (I') + (II') + (III')\right\},$$

où

$$\begin{aligned} (I') &= \sum_{k,l} E\left(\left|\int_0^u \left(J^{ijkl}(X_s(x_1)) - J^{ijkl}(X_s(x_2))\right) dB_s^{kl}\right|^2\right), \\ (II') &= E\left(\left|\int_0^u \left(a(X_s(x_1))^{ij} - a(X_s(x_2))^{ij}\right) ds\right|^2\right) \end{aligned}$$

et

$$(III') = E\left(\left|\int_0^u \left(c\left(X_s\left(x_1\right)\right)^{ij} - c\left(X_s\left(x_2\right)\right)^{ij}\right) d\left\langle B^{jj}\right\rangle_s\right|^2\right).$$

Pour (I'), on applique l'inégalité BDG (1.9) avec $p = 2$ et on a

$$\begin{aligned}(I') &\leq E\left(\sup_{u\leq t}\sum_{k,l}\left|\int_0^u \left(J^{ijkl}\left(X_s\left(x_1\right)\right) - J^{ijkl}\left(X_s\left(x_2\right)\right)\right) dB_s^{kl}\right|\right)^2 \\ &\leq E\left(\sum_{k,l}\sup_{u\leq t}\left(\left|\int_0^u \left(J^{ijkl}\left(X_s\left(x_1\right)\right) - J^{ijkl}\left(X_s\left(x_2\right)\right)\right) dB_s^{kl}\right|\right)\right)^2 \\ &\leq C\sum_{k,l}\int_0^u E\left(\left|J^{ijkl}\left(X_s\left(x_1\right)\right) - J^{ijkl}\left(X_s\left(x_2\right)\right)\right|^2 ds\right),\end{aligned}$$

d'où d'après la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned}(I') &\leq C\sum_{k,l}\int_0^u E\left(\left|X_s\left(x_1\right) - X_s\left(x_2\right)\right|^2 ds\right) \\ &\leq C\int_0^t E\left(\sup_{u\leq s}\left|X_u\left(x_1\right) - X_u\left(x_2\right)\right|^2 ds\right).\end{aligned}$$

Pour (II')

$$\begin{aligned}(II') &\leq E\left(\int_0^u \left|a\left(X_s\left(x_1\right)\right)^{ij} - a\left(X_s\left(x_2\right)\right)^{ij}\right|^2\right) ds \\ &\leq \int_0^u E\left(\left|X_s\left(x_1\right)^{ij} - X_s\left(x_2\right)^{ij}\right|^2\right) ds \\ &\leq C\int_0^t E\left(\sup_{u\leq s}\left|X_u\left(x_1\right) - X_u\left(x_2\right)\right|^2 ds\right).\end{aligned}$$

On a d'après l'inégalité BDG (1.8) pour $p=2$

$$\begin{aligned}
(III') &\leq Ct\left(\int_0^u E\left(\left|\left(c\left(X_s\left(x_1\right)\right)^{ij}-c\left(X_s\left(x_2\right)\right)^{ij}\right)\right|^2\right)ds\right)\\
&\leq Ct\left(\int_0^u E\left(\left|X_s\left(x_1\right)^{ij}-X_s\left(x_2\right)^{ij}\right|^2\right)ds\right)\\
&\leq CT\left(\int_0^t E\left(\sup_{u\leq s}\left|X_u\left(x_1\right)-X_u\left(x_2\right)\right|^2\right)ds\right).
\end{aligned}$$

On obtient finalement en sommant $(I'),(II')$ et (III')

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{u\leq t}\left|X_u\left(x_1\right)-X_u\left(x_2\right)\right|^2\right) &\leq C(T,n)\left(\left|x_1-x_2\right|^2\right.\\
&\quad\left.+\int_0^t E\left(\sup_{u\leq s}\left|X_u\left(x_1\right)-X_u\left(x_2\right)\right|^2\right)ds\right),
\end{aligned}$$

d'où d'après le lemme de Gronwall,

$$0\leq E\left(\sup_{u\leq t}\left|X_u\left(x_1\right)-X_u\left(x_2\right)\right|^2\right)\leq C(T,n)\left|x_1-x_2\right|^2 e^{C(T,n)t}.$$

En particulier, si $x_1=x_2$ on obtient l'unicité en trajectoires de X_t. ■

Théorème 3.2.2 [51] *Sous les hypothèses* (i) *et* (ii) *l'EDS* (2.1) *admet une solution unique.*

Preuve. Pour l'existence de la solution de l'EDS (2.1), on considère la suite de Picard ${}^mX=\left({}^mX^{ij}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par

$${}^0X_t^{ij}=x^{ij}\in\mathbb{R},\quad 0\leq t\leq T$$

et pour $m\in\mathbb{N}$

$${}^{m+1}X_t^{ij}=x^{ij}+\sum_{k,l}\int_0^t J^{ijkl}\left({}^mX_s\right)dB_s^{kl}+\int_0^t a\left({}^mX_s\right)^{ij}ds+\int_0^t c\left({}^mX_s\right)^{ij}d\left\langle B^{jj}\right\rangle_s \tag{3.7}$$

On a

$$\begin{aligned} E\left(\left|{}^{m+1}X_t^{ij}\right|^2\right) &\leq C'\left\{\left|x^{ij}\right|^2+\sum_{k,l}E\left(\left|\int_0^t J^{ijkl}\left({}^mX_s\right)dB_s^{kl}\right|^2\right)\right. \\ &\quad +E\left(\left|\int_0^t a\left({}^mX_s\right)^{ij}ds\right|^2\right) \\ &\quad \left.+E\left(\left|\int_0^t c\left({}^mX_s\right)^{ij}d\left\langle B^{jj}\right\rangle_s\right|^2\right)\right\}. \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire que celui utilisé dans le théorème précédent, on obtient d'après l'hypothèse de croissance linéaire :

$$E\left(\left|{}^{m+1}X_t^{ij}\right|^2\right)\leq C'\left(T,n\right)\left(\left|x^{ij}\right|^2+\int_0^t\left(1+E\left(\left|{}^mX_s^{ij}\right|^2\right)\right)ds\right),$$

et en sommant par rapport à i et j, on obtient

$$E\left(\left|{}^{m+1}X_t\right|^2\right)\leq C'\left(T,n\right)\left(|x|^2+T+\int_0^t E\left(\left|{}^mX_s\right|^2\right)ds\right).$$

Il résulte que, d'après le lemme de Gronwall,

$$E\left(\left|{}^{m+1}X_t\right|^2\right)\leq C'\left(T,n\right)\left(|x|^2+T\right)e^{C'(T,n)t}.$$

Maintenant, on montre que $\left({}^mX\right)$ est une séquence de Cauchy dans $L_G^2\left(\Omega_T\right)$. On a

$$\begin{aligned} {}^{k+1}X_t^{ij}-{}^kX_t^{ij} &= \sum_{k,l}\int_0^t\left(J^{ijkl}\left({}^kX_s\right)-J^{ijkl}\left({}^{k-1}X_s\right)\right)dB_s^{kl} \\ &\quad +\int_0^t\left(a\left({}^kX_s\right)^{ij}-a\left({}^{k-1}X_s\right)^{ij}\right)ds \\ &\quad +\int_0^t\left(c\left({}^kX_s\right)^{ij}-c\left({}^{k-1}X_s\right)^{ij}\right)d\left\langle B^{jj}\right\rangle_s. \end{aligned}$$

Par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de l'unicité, on obtient que

$$\begin{aligned} E\left(\left|{}^{k+1}X_t - {}^{k}X_t\right|^2\right) &\leq \widetilde{C}(T,n)\left(\int_0^t E\left(\left|{}^{k}X_s - {}^{k-1}X_s\right|^2\right) ds\right) \\ &\leq \widetilde{C}(T,n)^2\left(\int_0^t\int_0^{t_1} E\left(\left|{}^{k-1}X_{t_2} - {}^{k-2}X_{t_2}\right|^2\right) dt_1 dt_2\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

et en répétant cette procédure on obtient

$$E\left(\left|{}^{k+1}X_t - {}^{k}X_t\right|^2\right) \leq \widetilde{C}(T,n)^{k+1}\left(\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_k} E\left(\left|{}^{1}X_{t_k} - x\right|^2\right) dt_1 dt_2\cdots dt_k\right)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} E\left(\left|{}^{1}X_{t_k} - x\right|^2\right) &= E\left(\sum_{i,j}\left(\sum_{p,q}\int_0^{t_k} J^{ijpq}(x)\, dB_s^{pq} + \int_0^{t_k} a(x)^{ij}\, ds\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_0^{t_k} c(x)^{ij}\, d\left\langle B^{jj}\right\rangle_s\right)^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i,j}\left(\sum_{p,q} J^{ijpq}(x)\, B_{t_k}^{pq} + a(x)^{ij}\, t_k + c(x)^{ij}\left\langle B^{jj}\right\rangle_{t_k}\right)^2\right) \\ &\leq K(n)\sum_{i,j}\left[\sum_{p,q}\left(J^{ijpq}(x)\right)^2 E\left(B_{t_k}^{pq}\right)^2 + \left(a(x)^{ij}\right)^2 T^2\right. \\ &\quad \left. + \left(c(x)^{ij}\right)^2 E\left(\left\langle B^{jj}\right\rangle_{t_k}\right)^2\right] \\ &\leq K(n,x,\overline{\sigma},T), \end{aligned}$$

d'où

$$\left\|{}^{k+1}X_t - {}^{k}X_t\right\|_2^2 = E\left(\left|{}^{k+1}X_t - {}^{k}X_t\right|^2\right) \leq K(n,x,\overline{\sigma},T)\,\frac{\left(C"(T,n)\,T\right)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

et par conséquent pour tout $p, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\| {}^{m+p}X_t - {}^{m}X_t \right\|_2 &\leq \sum_{k=m}^{m+p-1} \left\| {}^{k+1}X_t - {}^{k}X_t \right\|_2 \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left\| {}^{k+1}X_t - {}^{k}X_t \right\|_2 \\
&\leq \sqrt{K(n, x, \overline{\sigma}, T)} \sum_{k=m}^{\infty} \sqrt{\frac{(C"(T,n)T)^{k+1}}{(k+1)!}}.
\end{aligned}$$

On conclut que $({}^{m}X_t)$ est une suite de Cauchy.

Soit maintenant X_t la limite de ${}^{m}X_t$ dans $L_G^2(\Omega_T)$ et montrons que X_t est bien la solution de l'équation (2.1). Il suffit alors de prouver que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t \left(J^{ijpq}({}^{m}X_s) - J^{ijpq}(X_s)\right) dB_s^{pq}\right)^2 &= 0, \\
\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t \left(a({}^{m}X_s)^{ij} - a(X_s)^{ij}\right) ds\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t \left(c({}^{m}X_s)^{ij} - c(X_s)^{ij}\right) d\left\langle B^{jj}\right\rangle\right)^2 = 0,$$

La première et la troisième égalité sont assurées par les conditions de Lipschitz et l'inégalité BDG. Pour la seconde égalité, on a d'après l'inégalité de Holder et la condition de Lipschitz :

$$\left(\int_0^t \left(a({}^{m}X_s)^{ij} - a(X_s)^{ij}\right) ds\right)^2 \leq TA\int_0^t \left|{}^{m}X_s - X_s\right|^2 ds.$$

On conclut en appliquant les deux membres de cette inégalité E et le fait que ${}^{m}X$ converge vers X. ■

Chapitre 4

Appendice

4.1 Algèbre matricielle

Dans cette section, on résume les définitions et les techniques préalables qui sont nécessaires pour les matrices aléatoires.

Définition 4.1.1

(i) $\mathbb{S}_n$:= *le sous-espace linéaire de toutes les matrices symétriques de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathbb{S}_n^+$ *(resp.* $\mathbb{S}_n^-$*) = l'ensemble de toutes les matrices symétriques définies positives (négatives) de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(iii) $\overline{\mathbb{S}_n^+}$ = *la fermeture de* $\mathbb{S}_n^+$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire l'ensemble de toutes les matrices symétriques semi-définies positives de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le théorème suivant décrit les matrices définies positives.

Théorème 4.1.1 *(Matrices définies positives)*

(i) $A \in \mathbb{S}_n^+$ *si et seulement si* $x^T A x > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0$.

(ii) $A \in \mathbb{S}_n^+$ *si et seulement si* $x^T A x > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1$.

(iii) $A \in \mathbb{S}_n^+$ *si et seulement si* A *est diagonalisable par une matrice orthogonale avec des valeurs propres positives, i.e. il existe une matrice orthogonale* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $UU^T = I_n$, *telle que* $A = UDU^T$ *avec une matrice diagonale* $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, *où* $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., n$, *sont les valeurs propres positives de* A.

(iv) *Si* $A \in \mathbb{S}_n^+$ *alors* $A^{-1} \in \mathbb{S}_n^+$.

(v) $A^T A \in \mathbb{S}_n^+$ *pour toute matrice* A *inversible.*

(*vi*) $A \in \overline{\mathbb{S}_n^+}$ *si et seulement si* A *est diagonalisable par une matrice orthogonale avec des valeurs propres non négatives.*

(*vii*) $M^T M \in \overline{\mathbb{S}_n^+}$ *pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*

Preuve. (voir Muirhead [32] ou Fischer [11]). ■

Définition 4.1.2 *Soit* $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On définit l'opérateur différentiel* $D_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial S^{ij}}\right)^{ij}$ *pour toutes les fonctions différentiables* $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, la matrice de toutes les dérivées partielles* $D_{ij} f(S)$ *de* $f(S)$*.*

Règles de calcul pour les déterminants

Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S \in GL(n)$ l'ensemble des matrices inversibles et $H_t : \mathbb{R} \to GL(n)$ différentiable, alors

Lemme 4.1.1

(*i*) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *et* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(*ii*) *Si* $A \in GL(n)$ *ou* $B \in GL(n)$ *alors* $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$.

(*iii*) $\frac{d}{dt}\det(H_t) = \det(H_t)\, tr\left(H_t^{-1} \frac{d}{dt} H_t\right)$.

(*iv*) $D(\det(S)) = \det(S)\left(S^{-1}\right)^T$.

(*v*) $\det(A)$ *est le produit des valeurs propres de* A*.*

En outre, si S *est symétrique, alors*

(*vi*) $D(\det(S)) = \det(S)\, S^{-1}$.

(*vii*) $\frac{\partial^2}{\partial S^{ij} \partial S^{kl}}(\det(S)) = \det(S)\left[\left(S^{-1}\right)^{kl}\left(S^{-1}\right)^{ij} - \left(S^{-1}\right)^{ik}\left(S^{-1}\right)^{lj}\right]$

Où $\left(S^{-1}\right)^{ij}$ *désigne la* i*,* $j-$*ième entrée de* S^{-1}*.*

Preuve. (voir Fisher[11] et [47, 49]). ■

Lemme 4.1.2 *(Règles de calcul pour la trace).*

Pour tout $A, B, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

(*i*) $tr(AB) = tr(BA)$ *et* $tr(\alpha A + B) = \alpha tr(A) + tr(B)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(*ii*) $tr(A)$ *est la somme des valeurs propres de* A*.*

Preuve. (voir Fischer[11]). ■

La définition suivante nous donne une relation entre les vecteurs et les matrices. L'idée est la suivante : supposons que nous voulions transférer un théorème qui tient pour des processus stochastiques multivariés à un qui tient pour des processus stochastiques matriciels S. Ensuite, on peut appliquer le théorème à $vec(S)$ aux processus multivariés résultants pour obtenir le théorème dans une version matricielle.

Définition 4.1.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec les colonnes $a_i \in \mathbb{R}^m; i = 1, ..., n$. on définit la fonction vec : $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ par*

$$vec(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Parfois, nous considérerons aussi $vec(A)$ comme un élément de $\mathcal{M}_{mn,1}(\mathbb{R})$

Remarque 4.1.1

$$vec\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \widetilde{a}_m^T \end{pmatrix}$$

où $\widetilde{a}_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, ..., m$ désigne le vecteur colonne de A.

Lemme 4.1.3 *(voir*[18] *Théorèm* (1.2.22)*) Pour $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ il est vrais que $tr\left(A^T B\right) = vec(A)^T vec(B)$.*

4.2 Matrices aléatoires

Dans cette thèse, on a utilisé les définitions sur les processus matrices suivantes :

Définition 4.2.1 *Une fonction mesurable $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $(t, w) \to X(t, w) = X_t(w)$ est appelée un processus stochastique (variable matricielle) si $X(t, w)$ est une matrice aléatoire pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 4.2.2 *Un processus stochastique matriciel X est appelé martingale locale, si chaque entrée de X est une martingale locale, i.e. s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt strictement monotones $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T_n \overset{p.s}{\to} \infty$, tel que $(X_{t\wedge T_n})_{i,j}$ est une martingale pour tout i, j.*

Définition 4.2.3 *Un mouvement Brownien matriciel B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice composée de mouvements Browniens réels indépendants, i.e. $B = \left(B^{ij}\right)_{i,j}$ où B^{ij} sont des mouvements Browniens indépendants et unidimensionnels, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.*

Définition 4.2.4 *Un processus stochastique matriciel X est appelé semimartingale si X peut être décomposé en $X = X_0 + M + A$ où M est une martingale locale et A un processus adapté à variation finie.*

4.3 Fonction de matrices

Soit $m_1, ..., m_r$ des entiers strictement positifs et n leur somme. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_r$ des nombres complexes distincts. On pose

$$P_0(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Soit A une matrice dont le polynôme minimal est P_0, et τ un endomorphisme dont la matrice est A dans une base donnée.

Dans la suite, on pose $\mathcal{E}_{P_0} = \mathbb{C}[X] / P_0[X]$ et $\mathcal{M}_A = \{P(A) | P \in \mathbb{C}[X]\}$.

Définition 4.3.1 *Soient A et B deux matrices de $\mathbb{C}^{n,p}$, on dit que A est équivalent à B s'il existe deux matrices carrées inversibles $Q' \in \mathbb{C}^p$ et $Q \in \mathbb{C}^n$ telles que :*

$$A = QBQ'.$$

Remarque 4.3.1 *-Si A et B sont des matrices carrées équivalentes telles que*

$$A = Q^{-1}BQ$$

les espaces $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_B$ sont isomorphes, et pour tout polynôme.

$$P(A) = Q^{-1}P(B)Q$$

-Si P_1 est le polynôme

$$P_1(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda'_i)^{m_i}$$

où $(\lambda'_1, ..., \lambda'_r)$ sont des nombres complexes distincts, les espaces $\mathcal{E}_{P_0}$ et $\mathcal{E}_{P_1}$ sont isomorphes.

On veut définir maintenant $f(A)$. Les fonctions envisagées possèderont la propriété $(*)$ suivante : pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, la fonction f possède des dérivées d'ordre $m_i - 1$ en i. Par exemple :

1. la fonction f est holomorphe dans un ouvert contenant les λ_i ;
2. si les λ_i sont réels, la fonction f est dérivable $m_i - 1$ fois en tout point λ_i ;
3. si les m_i sont tous égaux à 1, la fonction f est définie en λ_i.

Théorème 4.3.1 [59]*Soit $\mathcal{E}$ une algèbre de fonctions possédant la propriété $(*)$ et contenant les polynômes. Il existe un morphisme χ d'algèbres de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}_A$, tel que, pour tout polynôme P, on ait*

$$\chi(P) = P(A)$$

Les valeurs propres de $\chi(f)$ sont les nombres $f(\lambda_i)$, associés aux mêmes sous-espaces propres que ceux de A (en prenant éventuellement la somme directe des sous-espaces propres associés à des valeurs propres ayant la même image par f).

Preuve. Notons φ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}^n$ définie par

$$\varphi(f) = \left(f^{(j)}(\lambda_i)\right)$$

c'est un morphisme d'algèbre et l'on pose

$$\chi = \dot{\psi} \circ \dot{\varphi}^{-1} \circ \varphi.$$

On obtient ainsi un morphisme d'algèbre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}_A$, et pour un polynôme P, on a bien

$$\chi(P) = P(A).$$

D'autre part, si

$$\chi(f) = P(A),$$

on a

$$\varphi(f) = \varphi(P),$$

et donc

$$f(\lambda_i) = P(\lambda_i).$$

La seconde propriété est vraie, puisqu'elle l'est pour les polynômes.

On notera dans la suite

$$\chi(f) = P(A).$$

■

Remarque 4.3.2 *-Ce qui précède permet de définir $f(\tau)$ pour un endomorphisme de matrice A.*

-A toute relation fonctionnelle correspond une relation matricielle analogue. Par exemple

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$$

ou

$$\sin^2 A + \cos^2 A = I.$$

Quelques cas particuliers

1. Si f est une fonction continue en λ

$$f(\lambda I) = f(\lambda) I.$$

2. Si A à pour valeur propre unique λ d'ordre m, et si f est $m-1$ fois dérivable en λ, on a

$$f(A) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{f^{(p)}(\lambda)}{p!} (A - \lambda I)^p,$$

car le polynôme

$$P(X) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{f^{(p)}(\lambda)}{p!} (X - \lambda)^p,$$

est tel que, si $0 \leq j \leq m-1$;

$$P^{(j)}(\lambda) = f^{(j)}(\lambda).$$

3. Si les racines de P_0 sont toutes simples, on a

$$f(A) = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i) \frac{(A - \lambda_1 I) \ldots (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \ldots (A - \lambda_r I)}{(\lambda_i - \lambda_1) \ldots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \ldots (\lambda_i - \lambda_r)}$$

en partant du polynôme d'interpolation de Lagrange.

4. Si A est inversible et si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on a $f(A) = A^{-1}$.

5. Si $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles en λ_i, alors

$$f(A) = P(A) . Q(A)^{-1}.$$

Théorème 4.3.2 [53] *Soit f une fonction possédant la propriété $(*)$ en λ_i et g une fonction possédant la propriété $(*)$ en $f(\lambda_i)$. Alors $g \circ f$ possède la propriété $(*)$ en λ_i et*

$$g \circ f(A) = g(f(A)).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que si P est un polynôme tel que, pour i et j tels que $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq m_i - 1$, on a

$$f^{(j)}(\lambda_i) = P^{(j)}(\lambda_i)$$

et que si Q est un polynôme tel que, pour i et j tels que $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq m_i - 1$, on a

$$g^{(j)}(f(\lambda_i)) = Q^{(j)}(f(\lambda_i)) = Q^{(j)}(P(\lambda_i))$$

Alors

$$(g \circ f)^{(j)}(\lambda_i) = (Q \circ P)^{(j)}(\lambda_i)$$

et donc

$$\begin{aligned}(g \circ f)(A) &= (Q \circ P)(A) \\ &= Q(P(A)) = g(f(A))\end{aligned}$$

■

Corollaire 4.3.1 *Si f admet une fonction réciproque f^{-1} avec les conditions de dérivabilité voulues, alors*

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

Si les λ_i sont positives et si 0 est au plus racine simple de P_0, on peut définir $\sqrt{A}, |A|$ et l'on aura $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ et $\sqrt{A^2} = |A|$.

Théorème 4.3.3 *Soient A et B deux matrices semblables telles que $A = Q^{-1}BQ$, et f une fonction telle que, pour tout i compris entre 1 et r, f soit $m_i - 1$ fois dérivable en λ_i. Alors*

$$f(A) = Q^{-1} f(B) Q$$

Conclusion et perspectives

Dans notre travail, on a donné le système des EDS des valeurs propres et des vecteurs propres de la solution d'une équation différentielle stochastique générale définie à l'aide d'un $G-$mouvement Brownien matriciel. Ce système a été difficile à obtenir à cause de la nature du $G-$mouvement Brownien et de la non-linéarité de la $G-$espérance. Ajoutée à cela, notre principale difficulté réside dans le fait que les entrées d'une matrice $G-$Brownienne ne sont pas indépendantes en général. Pour contourner ces difficultés, on a supposé dans notre modèle que la variation quadratique $\langle B \rangle$ est une matrice diagonale. La $G-$formule d'intégration par parties matricielle a été la clé de ce travail. Un résultat intermédiaire sur le fait que les valeurs propres ne se rencontrent jamais a été également obtenu dans un cadre général

Comme perspectives, nous envisageons de traiter le cas d'autres processus liés à un $G-$mouvement Brownien et éventuellement considérer d'autres modèles.

Bibliographie

[1] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge University Press, 2009.

[2] X. P. Bai, Y. Q. Lin, *On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion with integral-Lipschitz coefficients*, Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. **30** (2014) , 589 − 610.

[3] H. Boutabia, I. Grabsia, *Chaotic expansion in the $G-$expectation space*, Opuscula Math. **33** (2013) , 647 − 666.

[4] M. F. Bru, *Diffusions of perturbed principal component analysis*, J. Multivariate Anal. **29**(1989), 127 − 136.

[5] N. Demni, *The Laguerre process and generalized Hartman-Waston law*, Bernoulli **13**(2007), 556 − 580.

[6] N. Demni, *Processus stochastiques matriciels, système de racines et probabilités non commutatives*, thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie curie Paris, France (2007).

[7] L. Denis, M. Hu and S. Peng, *Function spaces and capacity related to a sublinear expectation :application to G-Brownian motion paths*, Potential Anal. **34**(2011), 139 − 161.

[8] P. Diaconis, P. J. Forrester, *A. Hurwitz and the origins of random matrix theory in mathematics*, Random Matrices Theory Appl. **6** (2017), 1 − 26.

[9] F. Faizullah, *A note on the carathéodory approximation scheme for stochastic differential equations under $G-$Brownian motion*, Z. Naturforsch. **67a** (2012), 699 − 704.

[10] F. Faizullah, *Existence of solutions for stochastic differential equations under $G-$Brownian motion with discontinuous coefficients*, Z. Naturforsch. **67a** (2012), 692 − 698.

[11] G. Fischer, *Linear Algebra*, Vieweg, 2005.

[12] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices, London Mathematical Society Monographs Series*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010.

[13] F. Gao, *Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equation driven by $G-$Brownian motion,* Stochastic Process. Appl. **119** (2009), $3356-3382$.

[14] V. L. Girko, *Theory of Random Determinants*, VSP, chapter 18, The distribution of eigenvalues and eigenvectors of additive random matrix-valued processes, $1990, pp.442-467$.

[15] I. Grabsia, *Chaos de Wiener par rapport au $G-$mouvement Brownien.* Thése de Doctorat de l'université Badji Mokhtar Annaba, Algérie (2014).

[16] P. Graczyk, J. Malecki, *Multidimensional Yamada-Watanabe theorem and its applications to particle systems*, J. Math. Phys. **54**(2013), 021503.

[17] P. Graczyk, J. Małecki, *Strong solutions of non-colliding particle systems,* Electron. J. Probab. **19** (2014), $1-21$.

[18] A. K. Gupta, D. K. Nagar. *Matrix Variate Distributions.* Chapman & Hall/CRC, 1999.

[19] Y. Hu, N. Lerner, *On the existence and uniqueness of solutions to stochastic equations in infinite dimension with integral-Lipschitz coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. **42** (2002), $579-598$.

[20] M. Hu, S. Peng, *On the representation theorem of $G-$expectations and paths of $G-$Brownian motion*, Acta Math. Appl. Sini. Engl. Seri. **25**(2009), $539-546$.

[21] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Diferential Equations and Difusion Processes*, North-Holland Mathematical Library, 1981.

[22] M. Katori, H. Tanemura, *Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems*, J.Math. Phys. **45** (2004), $3058-3085$.

[23] M. Katori, H. Tanemura, *Complex Brownian motion representation of the Dyson model*, Electron. Commun. Probab. **18**(2013), $1-16$.

[24] J.-F. Le Gall, *Applications du Temps Local aux Equations Diférentielles Stochastiques Unidimensionnelles*, Sém. Prob., XVII, $15-31$, Lecture Notes in Math., 986, Springer, Berlin, 1983.

[25] X. Li, S. Peng, *Stopping times and related Itô's calculus with $G-$Brownian motion*, Stochastic Process. Appl.**121** (2011), 1492 – 1508.

[26] Q. Lin, *Local time and Tanaka formula for the $G-$Brownian motion*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2012), 315 – 334.

[27] Y. Lin, *Équations différentielles stochastiques sous les espérances mathématiques non-linéaires et applications.* Thése de Doctorat de l'université de Rennes 1, France (2013) .

[28] P. Luo, F Wanga, *Stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion and ordinary differential equations,* Stochastic Process. Appl. **124** (2014), 3869 – 3885.

[29] E. Mayerhofer, O. Pfaffel, R. Stelzer, *On strong solutions for positive definite jump diffusions*, Stoch. Proc. Appl. **121**(2011), 2072 – 2086.

[30] H. P. McKean, *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York, 1969.

[31] S. Meradji, H. Boutabia, S. Stihi, *Stochastic differential equations for eigenvalues and eigenvectors of a $G-$ Wishart process with drift*, à paraître dans Ukrainian Math. J..

[32] R. J. Muirhead. *A Spects of Multivariate Statistical Theory*, Wiley, 2005.

[33] C. Nadal, *Matrices aléatoires et leurs applications à la physique statistique et physique quantique.* Thése de Doctorat de l'université Paris-Sud XI, France (2011).

[34] J. R. Norris, L. C. G. Rogers, D. Williams, *Brownian motions of ellipsoids*, Trans. Amer. Math. Soc. **294**(1986), 757 – 765.

[35] D. Nualart, V. Pérez-Abreu, *On the eigenvalue process of a matrix fractional Brownian motion*, Stochastic Process. Appl. **124** (2014) , 4266 – 4282.

[36] M. Nutz, R. V. Handel, *Constructing sublinear expectations on path space,* Stochastic Process. Appl. **123** (2013), 3100 – 3121.

[37] L. Pastur, M. Shcherbina, *Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices*, American Mathematical Society, 2011.

[38] S. Peng, *Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains*, Chin. Ann. Math. **26** (2005) , 159 – 184.

[39] S. Peng, *$G-$Brownian Motion and Dynamic Risk Measure under Volatility Uncertainty*, arXiv : 0711.2834v1 [math.PR] (2007).

[40] S. Peng, *G−expectation, G−Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type*, Stochastic analysis and applications, 541 − 567 (2007), Abel Symp., 2, Springer, Berlin.

[41] S. Peng, *Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations*, arXiv : 0702358v1 [math.PR] (2007) .

[42] S. Peng, *A new central limit theorem under sublinear expectations*, arXiv : 0803.2656v1 [math.PR] (2008).

[43] S. Peng, *Multi-dimensional G−Brownian motion and related stochastic calculus under G−expectation*, Stochastic Process. Appl. **118** (2008), 2223 − 2253.

[44] S. Peng, *Survey on normal distributions, Central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations*, Sci. China Math. **52** (2009) , 1391 − 1411.

[45] S. Peng ; *Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty with robust central limit theorem and G−Brownian motion*, arXiv :1002.4546v1 [math.PR](2010).

[46] S. Peng, A. Bensoussan and J. Sung, *Real Options, Ambiguity, Risk and Insurance*, IOS Press, Amsterdam-Berlin-Tokyo-Washington DC, 2013.

[47] O. Pfaffel, *Wishart Processes*, arXiv : 1201.3256v1 [math.PR] (2012) .

[48] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[49] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, New York, 1999.

[50] H. M. Soner, N. Touzi, J. Zhang, *Martingale Representation Theorem for the G−expectation*, Stoch. Proc. Appl. **121**(2011), 265 − 287.

[51] S. Stihi, H. Boutabia, S. Meradji, *Stochastic differential equations for Random matrices processes in the nonlinear framework*, Opuscula Math. **2** (2018), 261 − 283.

[52] Z. Sun, X. Zhang, J. Guo, *A stochastic maximum principle for processes driven by G−Brownian motion and applications to finance*, Optimal Control Appl. Methods (2017) DOI : 10.1002/oca.2299.

[53] J. S. Vandergraft, *Spectral properties of matrices which have invariant cones*, SIAM J. Appl. Math. **16** (1968), 1208 − 1222.

[54] P. Wu, Z. Chen, I*nvariance principles for the law of the iterated logarithm under G−framework*, Sci. China Math. **58** (2011) , 1251 − 1264.

[55] Y. Yamada, S. Watanabe, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. **11**(1971), 155 − 167.

[56] D. Zhangab, Z. Chena, *Exponential stability for stochastic differential equation driven by G−Brownian motion*, Appl. Math. Lett. **25** (2012), 1906 − 1910.

[57] H. Zhang, *A complex version of G−expectation and its application to conformal martingale*, arxiv : 1502.02787v1 [math.PR] (2015).

[58] Z. Zheng, X. Bi, S. Zhang, *Stochastic optimization theory of backward stochastic differential equations driven by G−Brownian motion*, Abstr. Appl. Anal. **2013** (2013) , 1 − 11.

[59] http ://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/1F.pdf.