

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR - ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté: Sciences de l'Ingénieur

Année : 2009

Département: Electronique

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Intitulée

**Nouvelle approche pour l'estimation des directions
d'arrivée: application aux traitements d'antenne**

Option : Traitement du signal

Par : SEMIRA Hichem

DIRECTEUR DE THESE: Professeur DOGHMANE Nourreddine

DEVANT Le JURY

PRESIDENT: F. SOLTANI Professeur , Univ. de Constantine

EXAMINATEURS:

Mr H. CHEMALI

M. C

Univ. de Setif

Mr T. LAROUSI

M. C

Univ. de Constantine

Mr L. BENNACER

M. C

Univ. de Annaba

Mr M. BENOURETH

M. C

Univ. de Annaba

ملخص

نقترح في هذه الرسالة طرق جديدة خاصة بمعالجة إشارات الهوائيات. في القسم الأول نستعرض طريقة جديدة للكشف عن زوايا اتجاه إشارات صادرة من عدة منابع بعيدة. ثم في القسم الثاني نقترح مصفوفة جديدة للإسقاط مبنية على عينة واحدة من المعلومات المسجلة، و ذلك لإلغاء إشارات التشويش و للكشف عن الزوايا المركبة لعدة منابع من خلال استعمال هوائي مزدوج الأبعاد.

في القسم الأول لهذه الرسالة، نقترح طريقة جديدة للكشف عن زوايا اتجاه P إشارة صادرة من عدة منابع. خلافا للطرق الكلاسيكية القائمة على التحليل الذاتي للمصفوفة، يتضمن المقترح الجديد استعمال أشعة خوارزمية الانحدار المتقارن GC. نكشف بالمحاكاة عن تميز الطريقة الجديدة عن غيرها من الطرق الكلاسيكية القائمة على التحليل الذاتي للمصفوفة كطريقة MUSIC و ESPRIT والطريقة المشابهة AV. وذلك من خلال الكشف عن زوايا منابع جد قريبة، مترابطة كلياً أو غير مترابطة، في حالة وجود عدد قليل من العينات الخاصة بالمعلومة و نسبة ضعيفة من استطاعة الإشارة إلى الضجيج.

و من خلال القسم الثاني للرسالة نستعرض نقطتين أساسيتين:

أولاً، نقترح طريقة جديدة لإزالة إشارات التشويش من خلال استعمال عينة واحدة من المعلومات المسجلة من قبل هوائي خطي و متجانس. في هذه الطريقة نحسب شعاع الترشيح باستعمال مصفوفة جديدة للإسقاط مبنية على عينة واحدة بدلا من التحليل الذاتي للمصفوفة المقدر. محاسن هذه الطريقة الجديدة تكمن في تخفيض وقت الحساب اللازم لتكوين مصفوفة المعلومات وتحليلها من جانب وكذلك تخفيض عدد العينات اللازمة للتحليل من جانب آخر.

ثانياً، نمدد استعمال طريقة العينة الواحدة لنكشف عن الزوايا المركبة لعدة منابع بعيدة من خلال استعمال هوائي مزدوج الأبعاد. الطريقة المقترحة مكونة من إجراء بحثين وحيدى البعد قائمين على مصفوفتين للإسقاط. هاتين الأخيرتين مبنيتين على خطوط وأعمدة مصفوفة المعلومة. في النهاية تتبع هذه الطريقة بفحص ثنائي الأبعاد للكشف عن الزوج الصحيح لسمت والعلو.

Abstract

This thesis is devoted to new subspaces approaches applied to vector-sensor array processing. In a first part of the document, we consider the estimation of the direction of arrival for multiple waves impinging on the antenna. Then, in a second part, we consider a new projection matrix constructed from a single snapshot to deal with the interference cancellation problems, and the estimation of two dimensional (2-D) DOA using a uniform rectangular array.

In the first part of the document, we propose a new algorithm for the direction of arrival (DOA) estimation of P radiating sources. Unlike the classical subspace-based methods, it does not resort to the eigen-decomposition of the covariance matrix of the received data. Indeed, the proposed algorithm involves the building of the signal subspace from the residual vectors of the conjugate gradient (CG) method. This approach is based on the same recently developed procedure which uses a non-eigenvector basis derived from the auxiliary vectors (AV). The AV basis calculation algorithm is replaced by the residual vectors of the CG algorithm. Then, successive orthogonal gradient vectors are derived to form a basis of the signal subspace. A comprehensive performance comparison of the proposed algorithm with the well-known MUSIC and ESPRIT algorithms and the auxiliary vectors (AV)-based algorithm was conducted. It shows clearly the high performance of the proposed CG-based method in terms of the resolution capability of closely spaced uncorrelated and correlated sources with a small number of snapshots and at low signal-to-noise ratio (SNR).

In the second part of the document, our study has dealt with the two following points

- First, we show that a single snapshot using a uniform linear array can be applied to interferences cancellation problems in spatial array signal processing. In this context, the antenna weight vector is calculated using a projection matrix constructed from a single snapshot instead of using the eigen-decomposition of the sample covariance matrix. The benefits of this method are two-fold; it reduces the computational cost required by the eigen-decomposition and the number of snapshots. We demonstrate the effectiveness of the proposed method through simulations of different scenarios including coherent and uncorrelated interferences.
 - Secondly, we address the problem azimuth/elevation directions of arrival estimation using a uniform rectangular array URA based only on a single snapshot. The method consists of two one dimensional (1-D) search Procedures using projection matrices constructed from the rows and the columns of the data matrix, such approach is followed by a pair matching method. Simulations results show that the new method is effective when the signal-to-noise ratio (SNR) is high.
-

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'élaboration des méthodes de traitement d'antenne multicapteur. Dans une première partie de la thèse, nous nous intéressons à l'estimation des directions d'arrivée de plusieurs sources rayonnantes. Puis, dans une seconde partie, nous considérons une nouvelle matrice de projection construite à partir d'un seul échantillon, pour traiter les problèmes d'annulation d'interférences et l'estimation des directions d'arrivée bidimensionnelles en utilisant un réseau rectangulaire uniforme.

Dans la première partie de ce document, nous proposons un nouvel algorithme pour l'estimation des directions d'arrivée (DDA) de P sources rayonnantes. À la différence des méthodes classiques de sous-espaces, cette nouvelle méthode ne fait pas recours à la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance des données reçues. En effet, l'algorithme proposé implique la construction de sous-espace signal à partir des résidus de l'algorithme gradient conjugué (GC). Cette approche est basée sur la même procédure développée récemment qui emploie une base dérivée des vecteurs auxiliaires (AV) et qui évite la décomposition propre de la matrice de covariance. L'algorithme de calcul (AV) est remplacé par les résidus de l'algorithme de GC. Puis, des vecteurs orthogonaux successifs de gradient sont dérivés pour former une base de sous-espace de signal. Nous montrons, à travers des simulations, la robustesse et les performances de cette nouvelle technique. Nous effectuerons une comparaison complète de l'algorithme proposé avec les algorithmes classiques bien connus MUSIC, ESPRIT et l'algorithme des vecteurs auxiliaires. Les simulations montrent clairement les bonnes performances de la méthode proposée en termes de la résolution des sources étroitement espacées dans le cas des signaux non-corrélés ou corrélés avec un faible support de donnée et à un SNR faible.

Dans la deuxième partie de ce document, notre contribution a porté principalement sur les deux points suivants

- Nous proposons un algorithme de filtrage spatial pour la rejection des interférences, en se basant sur un seul échantillon enregistré par une antenne rectiligne et uniforme. Dans ce contexte, le vecteur de pondération est calculé à l'aide d'une matrice de projection construite d'un simple échantillon, au lieu d'employer une décomposition en valeurs propres (EVD) de la matrice de covariance estimée. Les avantages de cette méthode sont doubles; elle réduit le coût de calcul exigé par l'EVD et le nombre d'échantillon. Nous prouvons aussi par des simulations, l'efficacité de la méthode proposée pour différents scénarios comprenant des interférences cohérentes et non-corrélatives.
 - nous étendons le principe de l'approche d'un seul échantillon à l'estimation de l'azimut et l'élévation en utilisant un réseau rectangulaire uniforme. La méthode proposée est composée de deux procédures de recherche monodimensionnelles basées sur des matrices de projection construites des lignes et des colonnes de la matrice de données. Ensuite, cette approche est suivie d'une méthode de vérification afin de déterminer les paires exactes de l'azimut/élévation. Les résultats de simulation prouvent que la nouvelle méthode est efficace quand le rapport signal à bruit (SNR) est élevé.
-

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont apporté leur soutien et leur expérience tout au long de ce travail de thèse.

Je veux avant tout remercier mon directeur de thèse, Noureddine DOGHMANE, qui m'a apporté sa compétence scientifique et s'est montré disponible pendant toute cette période. Il a su accompagner mon travail tout en m'accordant la liberté d'approfondir les thèmes de recherche qui me conviennent.

Je remercie aussi Sylvie MARCOS directeur de recherche au CNRS et le Docteur Hocine BELKACEMI, qui m'ont accueilli au sein du Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS) Supélec, Gif-sur-Yvette, France. C'était un environnement très favorable à la réussite de ces travaux de recherche.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur Faouzi SOLTANI, Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, pour l'honneur qu'il m'a fait de bien vouloir présider ce jury de thèse.

Je suis également très reconnaissant envers Monsieur H. CHEMALI Maître de Conférences à l'Université de Setif, Monsieur T. LAAROUSSI Maître de Conférences à l'université de Constantine, Monsieur L. BENNACER Maître de Conférences à l'Université de Annaba et Monsieur M. BENOUARETH Maître de Conférences à l'Université de Annaba, qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury et me faire part de leurs critiques constructives sur mon travail.

Un grand merci à l'ensemble du personnel enseignant et administratif du département d'électronique de l'université d'Annaba. Un merci particulier à mon collègue du bureau Mohamed ZADAM avec qui j'ai eu le plaisir de partager des heures de labeur. Ses conseils avisés et sa clairvoyance m'ont été d'une aide précieuse.

Merci à Imed SAID, pour sa précieuse aide qui m'a permis d'améliorer de façon significative mon manuscrit.

Merci enfin à mes parents pour m'avoir toujours soutenu, et à ma femme pour m'avoir encouragé tout au long de cette aventure. Sa patience et son attention m'auront été extrêmement profitables.

SOMMAIRE

Résumé	i
Remerciements	iv
Sommaire	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	x
Notations et abréviations	xi
I. INTRODUCTION	1
I.1 Introduction.....	1
I.2 Historique.....	2
I.3 Modèle du signal.....	3
I.4 Aperçu sur les méthodes d'estimation existantes.....	6
I.4.1 Méthode de Capon.....	7
I.4.2 Méthode de Pisarenko.....	8
I.4.3 Méthodes sous-espace.....	8
I.4.3.1 MUSIC.....	8
I.4.3.2 Minimum Norm Method.....	9
I.4.3.3 Root-MUSIC.....	11
I.4.3.4 ESPRIT.....	12
I.4.3.5 Propagateur.....	14
I.5 Motivation.....	15
I.6 Organisation de la thèse.....	16
II. FONDEMENTS THEORIQUES	18
II.1 Rappels en algèbre linéaire.....	19
II.1.1 Espace de Hilbert.....	19

II.1.2	Produit scalaire, norme.....	19
II.1.3	Sous-espaces vectoriels.....	20
II.1.4	Indépendance et Base.....	20
II.1.5	Orthogonalité et projections orthogonales.....	21
II.1.6	Matrice hermitienne, matrice unitaire et matrice tridiagonale.....	22
II.1.7	La décomposition en valeurs propres d'une matrice.....	22
II.2	Formulation du problème et modèle des observations.....	23
II.3	Sous-espaces de Krylov.....	28
II.3.1	Filtre à multi-étage de Wiener.....	30
II.3.2	Algorithme des vecteurs auxiliaires.....	33
II.3.3	Algorithme de gradient conjugué.....	35
II.4	Conclusion.....	37
III.	METHODE A HAUTE RESOLUTION POUR LA LOCALISATION DES SOURCES	38
	BASEE SUR LE GRADIENT CONJUGUE	
III.1	Motivation.....	39
III.2	L'algorithme Gradient Conjugué pour l'estimation des DDA.....	41
III.2.1	La méthode proposée.....	42
III.2.2	La relation entre la méthode GC et la méthode AV.....	47
III.2.3	La relation entre la méthode GC et les méthodes de sous-espaces basées sur l'EVD.....	50
III.3	Résultats et discussions.....	53
III.4	Conclusion.....	61
	METHODE BASEE SUR UN SEUL ECHANTILLON POUR LA CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE PROJECTION	62
	Partie 1: Suppression d'interférences basée sur un seul échantillon	63
IV.1	Introduction et contribution.....	63

IV.2 Formation de voies optimale.....	65
IV.2.1 Modèle des signaux.....	65
IV.2.2 Minimum Variance Distortionless Response (MVDR).....	68
IV.2.3 Minimum Mean Square Error (MMSE).....	68
IV.2.4 Maximum Signal to Interference plus Noise Ratio (MSINR).....	69
IV.3 Algorithme Sample Matrix Inversion (SMI).....	70
IV.4 Algorithme de l'Eigencanceler (EC).....	71
IV.5 Formation de voies basée sur un seul échantillon.....	75
IV.6 Résultats et simulations.....	76
IV.7 Conclusion.....	79
Partie 2: Méthode de projection basée sur un seul échantillon pour l'estimation de l'azimut et l'élévation	81
IV.8 Introduction.....	81
IV.9 Modèle des observations.....	82
IV.10 Estimation de l'azimut et l'élévation par l'utilisation d'un seul échantillon.....	84
IV.11 Simulations.....	87
IV.12 Conclusion.....	90
Conclusions et perspectives.....	91
Bibliographie.....	95

Liste des figures

I.1	La goniométrie (détermination des angles) pendant la 1ère guerre mondiale.....	3
I.2	Schéma bloc d'un système de réception et de traitement de données.....	4
II.1	Direction d'arrivée d'une onde plane émise par une source sur un réseau linéaire uniforme à M capteurs.....	24
II.2	Illustration d'un filtre de Wiener à 4 étages.....	30
III.1	Spectres des algorithmes GC, AV, MUSIC ($\theta_1 = -1^\circ, \theta_2 = 1^\circ, SNR1 = SNR2 = 10dB, K = 50$).....	54
III.2	Probabilité de résolution en fonction de SNR (séparation $3^\circ, K = 50$).....	55
III.3	Probabilité de résolution en fonction de nombre d'échantillons K (séparation $3^\circ, SNR = 0dB$).....	55
III.4	Probabilité de résolution en fonction de SNR (séparation $3^\circ, K = 50, r = 0.7$)..	57
III.5	Probabilité de résolution en fonction de nombre d'échantillons K (séparation $3^\circ, SNR = 5dB, r = 0.7$).....	58
III.6	Probabilité de résolution en fonction de SNR (séparation $3^\circ, K = 50, r = 0.9$)..	59
III.7	Probabilité de résolution en fonction de nombre d'échantillons K (séparation $3^\circ, SNR = 5dB, r = 0.9$).....	60
IV.1	Formation de voies adaptative pour un réseau de capteurs linéaire et uniforme...	67
IV.2	schéma fonctionnel d'un supprimeur d'interférences.....	71
IV.3	Comparaison des spectres de SINR des algorithmes SMI et EC par rapport à l'optimal en fonction de nombre d'échantillons pour $M = 10$ en présence de 3 brouilleurs.....	74
IV.4	Comparaison des diagrammes spatiaux des algorithmes SMI et EC par rapport à l'optimal pour $M = 10$ en présence de 3 brouilleurs : (a) $K = 10$ (b) $K = 20$...	74

IV.5	Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) sans blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 0 \text{ dB}$, 3 interférences non corrélées avec un $INR = 30 \text{ dB}$	77
IV.6	Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) sans blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20 \text{ dB}$, 3 interférences non corrélées avec un $INR = 30 \text{ dB}$	78
IV.7	Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) avec blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20 \text{ dB}$, 3 interférences non corrélées avec un $INR = 30 \text{ dB}$	78
IV.8	Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) avec blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20 \text{ dB}$, 3 interférences cohérentes avec un $INR = 30 \text{ dB}$	80
IV.9	Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) avec blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20 \text{ dB}$, 1 interférences non corrélée ($-30^\circ, 30\text{dB}$) et 2 interférences cohérentes ($30^\circ, 30\text{dB}$) et ($60^\circ, 30\text{dB}$).....	80
IV.10	réseau rectangulaire de $M \times D$ capteurs.....	82
IV.11	une recherche monodimensionnelle selon les lignes, cas de sources non corrélées.....	88
IV.12	une recherche monodimensionnelle selon les colonnes, cas de sources non corrélées.....	88
IV.13	une recherche monodimensionnelle selon les lignes, cas de sources cohérentes.....	89
IV.14	une recherche monodimensionnelle selon les colonnes, cas de sources cohérentes.....	89

Liste des tableaux

II.1	Algorithme de MSWF de rang D.....	31
II.2	Algorithme de Lanczos.....	31
II.3	Algorithme AVF.....	34
II.4	Algorithme de génération des vecteurs auxiliaires.....	34
II.5	Algorithme de Gradient Conjugué (GC)	35
III.1	Complexité de calcul	46
IV.1	Vérification 2D de la combinaison correcte pour des sources non corrélées.....	88
IV.2	Vérification 2D de la combinaison correcte pour des sources cohérentes.....	90

Notations et abréviations

Abréviations

Dans ce document, les abréviations suivantes seront utilisées :

2D : deux Dimension

AIC : Akaike Information Criteria

AV : Vecteur Auxiliaire

AVF : Auxiliary Vectors Filter

dB : décibels

DDA : Direction d'arrivée

EC : Eigencanceler

ESPRIT : Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

EVD : Eigen Value Decomposition

FBSS : Forward/Backward Spatial Smoothing

FFA : Far-Field Approximation

GC : Gradient Conjugué

HR : Haute Résolution

i.i.d : indépendant et identiquement distribué

INR : Interference to Noise Ratio

MDL : Minimum Description Length

MLE : Maximum Likelihood Estimator

MMSE : Minimum Mean Square Error

MSINR : Maximum Signal to Interference plus Noise Ratio

MSWF : Multistage Wiener Filter

MVDR : Minimum Variance Distortionless Response

MUSIC : MULTiple Signal Classification

RR : Rayleigh-Ritz

SMI : Sample Matrix Inversion

SNR : Signal to Noise Ratio

SSP : Signal Subspace Processing

SVD : Singular Value Decomposition

Notations

Dans tout le texte, les scalaires seront écrits avec le style d'écriture standard, les vecteurs en minuscule gras et les matrices majuscule gras. Puis, nous utiliserons les notations suivantes :

Symbole	Signification
P	Le nombre de sources
θ	Direction d'arrivée
Θ	Vecteur des Directions D'arrivée
M	Nombre de capteurs de l'antenne
K	Nombre d'échantillons
$s_i(k)$	L'enveloppe complexe du $i^{\text{ème}}$ signal
$(.)^T$	Transposé
$(.)^H$	Transposé conjugué
$(.)^{-1}$	Inversion
$\mathbf{a}(\theta)$	Vecteur source
$\mathbf{A}(\Theta)$	Matrice source
σ^2	Variance du bruit
σ_i^2	Puissance de la $i^{\text{ème}}$ source
\mathbf{I}	Matrice Identité
$\hat{\cdot}$	Estimée
λ_0	Longueur d'onde
ν_0	Fréquence porteuse du signal émis
c	la célérité de l'onde reçue
λ_i	Valeur propre
$\mathfrak{S}(p)$	Fonction de décision
\perp	Orthogonalité
$\Psi(\theta)$	Fonction de Localisation
$\arg(\cdot)$	Argument d'un nombre complexe
\dagger	Pseudo inverse de de Moore-Penrose
$\ \cdot\ $	Norme
$ \cdot $	Valeur absolue
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
$\text{span}\{\mathbf{A}\}$	Espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice \mathbf{A}
\equiv	Equivalent à
$\wp_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$	La projection orthogonale de \mathbf{v} sur \mathbf{A}
\mathbf{A}^{\perp}	Le sous-espace orthogonale à \mathbf{A}
$\wp_{\mathbf{A}^{\perp}}(\mathbf{v})$	La projection orthogonale de \mathbf{v} sur le sous-espace orthogonal \mathbf{A}^{\perp}
$\text{diag}\{.\}$	Diagonale d'une matrice
δ_{ij}	Symbole de Kronecker (vaut 1 si $i = j$, 0 sinon)
$E[.]$	Espérance mathématique
$\mathcal{K}^{\mathcal{D}}(\mathbf{R}, \mathbf{b})$	Sous-espace de Krylov associé au couple \mathbf{R} et \mathbf{b}
$\Phi(\mathbf{w})$	Fonction coût
$\Re(.)$	Partie réel de l'argument
$\nabla(\Phi)$	Gradient de la fonction Φ
$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$	Distribution normale de moyenne nulle et variance σ^2
\otimes	Produit Kronecker

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I.1 Introduction

Depuis plusieurs décennies les scientifiques ont adoptées plusieurs techniques de traitement du signal aux traitements d'antennes. Ceci dans le but, entre autres, de détecter une source voire plusieurs sources simultanément. Par détection nous entendons estimer certains paramètres pertinents caractérisant ces sources comme par exemple leur nombre, leur position spatiale ...etc.

Actuellement, le traitement d'antenne est renforcé par suite de l'augmentation des moyens de calculs en rapidité et en volume. Il couvre des domaines aussi différents tels que la géophysique, la télécommunication, la sismologie, l'astronomie, les radars et les sonars.

Le traitement d'antenne est le traitement de signal que l'on doit réaliser en aval des capteurs. Ces antennes peuvent être utilisées de deux manières:

- l'écoute passive, c'est la réception des sources étrangères ou des signaux émis par des émetteurs indépendants. Nous pouvons citer comme exemples, les radios et le radar en électromagnétisme, l'écoute des bruits émis par des navires ou des sous marins en sonar, des bruits émis par des véhicules ou des avions en acoustique aérienne.
- l'écoute active, c'est la détection des réflexions des signaux émis par l'antenne elle même ou par un dispositif lui étant associé, sur des corps étrangers.

L'objectif du traitement d'antenne est de déterminer à partir des signaux reçus pendant un intervalle de temps de durée finie, sur un ensemble de capteurs constituant une antenne, des paramètres caractérisant les sources rayonnantes situées dans un milieu de propagation donné. Ces paramètres sont :

- ✓ Le nombre de sources P
- ✓ Les angles d'arrivée (Direction Of Arrival, DOA) de l'onde issue de chaque source, par rapport à un repère fixe de l'antenne.
- ✓ L'intensité des signaux émis par ces sources

Deux d'objectifs essentiels sont visés par le traitement d'antenne:

- la détection: Une source, est-elle présente ?
- la localisation: Quelles sont les caractéristiques de la source (direction d'arrivée (DDA), puissance, polarisation, etc.) ?

Pour cela un estimateur approprié est appliqué aux données collectées d'un réseau formé de plusieurs capteurs. Ces capteurs peuvent être isotropiques et correctement dimensionnés pour assurer une meilleure réception. Ces données résultent de la superposition des signaux provenant des sources. Elles peuvent être soit déterministes mais inconnus soit aléatoires, contaminés par un bruit essentiellement additif.

I.2 Historique

Historiquement [Mir05], les premiers essais de localisation de sources à l'aide d'antennes sont mentionnés dans le domaine acoustique. Leonard de Vinci est le précurseur du sonar passif tel qu'on le connaît aujourd'hui [Bur84]. Il s'est rendu compte du fait que les navires en mouvement engendrent des sons dans l'eau qui peuvent se propager à des distances considérables. Il a décrit un dispositif d'écoute sous forme d'un tube rempli d'air, capable de transformer les ondes se propageant dans l'eau en ondes sonores aériennes. A l'aide de ce dispositif, il était possible de détecter les bateaux à des distances importantes.

Néanmoins, le premier à avoir compris et intégré le rôle de la diversité spatiale dans la localisation des sources est Lord Rayleigh [Ray09]. Jusqu'au XIX^{ème} siècle, il était généralement admis que la localisation par l'homme d'une source de bruit était liée aux différences d'intensité du signal acoustique arrivant sur les oreilles droite et gauche. Lord Rayleigh montra que ce principe n'est pas suffisant, notamment pour les fréquences très basses. Sa conclusion fut que, en plus des différences d'intensité, l'ensemble oreilles et cerveau est sensible aux retards (ou aux déphasages) entre les signaux reçus sur les deux oreilles. À partir de ce principe, des appareils astucieux ont été construits pendant la première guerre mondiale pour détecter et localiser les avions et autres aéronefs (figure I.1) [Bur84]. En 1917, le physicien français Paul Langevin a fait la première démonstration d'un sonar actif. Cette idée a été ensuite reprise et développée aux États-Unis, au Naval Research Laboratory, pour créer des systèmes destinés à la détection et localisation des sous-marins. La deuxième guerre mondiale et les besoins technologiques associés ont permis l'apparition du RADAR (développé au MIT Radiation Laboratory, USA) et ont ainsi étendu le traitement d'antenne aux signaux électromagnétiques.

Un progrès important dans le traitement d'antenne fut l'apparition des techniques de traitement numérique du signal dans les années soixante. Une des premières applications

numériques en acoustique sous-marine a été la réalisation du système DIMUS [And60] qui utilisait des registres pour retarder les signaux afin de réaliser une formation de voies.

Cette méthode classique (la formation de voies) est encore utilisée aujourd'hui grâce à sa robustesse et sa mise en œuvre facile. Elle consiste à remettre les signaux en phase pour une direction d'intérêt, et à les sommer avec l'espoir que la sommation multipliera l'amplitude du signal d'un facteur bien plus important que le facteur d'amplification du bruit. L'introduction des transformées de Fourier rapides, ainsi que l'évolution technologique dans le domaine numérique ont permis l'implémentation de systèmes de localisation entièrement numériques à la fin des années soixante et au début des années soixante-dix.

Dans ce contexte, un nouvel outil technique a fait son apparition; il est connu aujourd'hui sous le nom de méthode à haute résolution (HR). Les méthodes HR sont essentiellement basées sur des techniques matricielles. Afin de faciliter la présentation de principe de fonctionnement des estimateurs utilisés en traitement d'antennes, nous considérons utile un bref rappel sur le modèle des signaux à traiter.

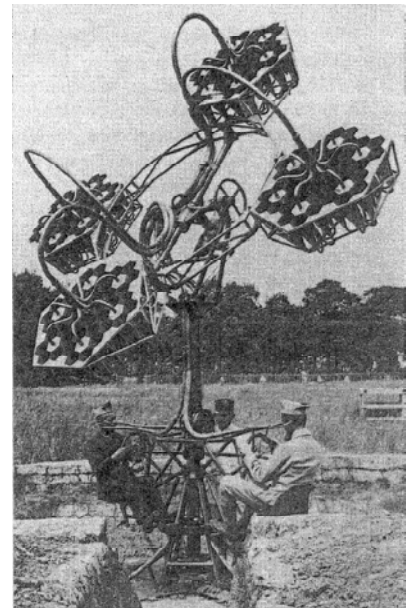
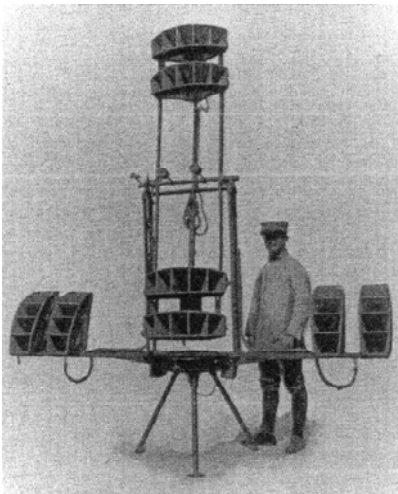


Fig. I.1 La goniométrie (détermination des angles) pendant la 1ère guerre mondiale

I.3 Modèle du signal

Le système considéré (figure I.2) est un réseau linéaire composé de M capteurs identiques et uniformément espacés. L'information qui nous intéresse dans cette thèse est l'estimation des directions d'arrivée de P sources supposées suffisamment éloignées pour pouvoir assimiler les signaux qu'elles émettent à des ondes planes.

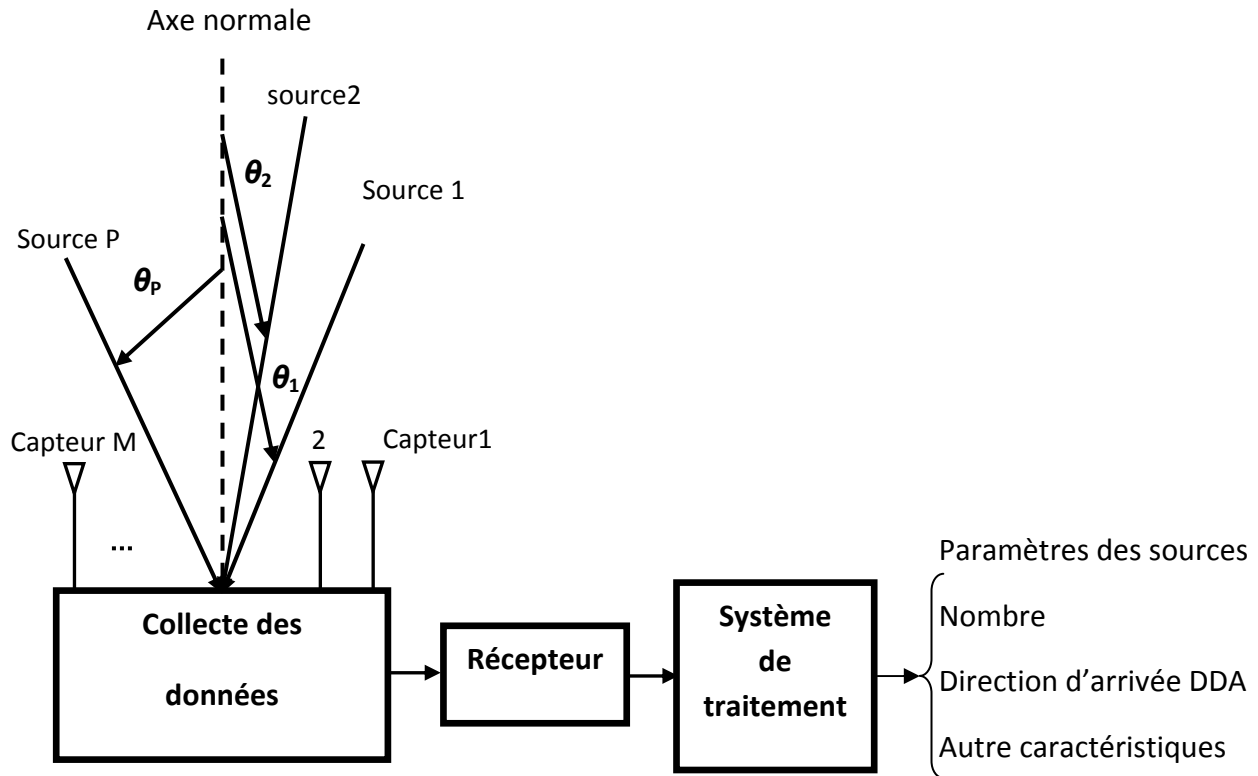


Fig. I.2 Schéma bloc d'un système de réception et de traitement de données

La séquence de données observées au niveau du $m^{\text{ème}}$ capteur peut être exprimé par son enveloppe complexe tel que

$$x_m(k) = \sum_{i=1}^P a_m(\theta_i) s_i(k) + n_m(k) \quad m = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{I-1})$$

où K est le nombre des échantillons, $s_i(k)$ est l'enveloppe complexe du $i^{\text{ème}}$ signal, T désigne la transposée, Θ est le vecteur $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P]^T$ tel que θ_i est la $i^{\text{ème}}$ position angulaire qui correspond à la $i^{\text{ème}}$ source, $a_m(\theta_i)$ est la réponse du $m^{\text{ème}}$ capteur à la $i^{\text{ème}}$ source et $n_m(k)$ est le bruit additif associé au $m^{\text{ème}}$ capteur. L'équation (I-1) peut être exprimée sous forme vectorielle ou matricielle comme suit

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^P \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) + \mathbf{n}(k) \quad (\text{I-2})$$

et

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (\text{I-3})$$

$\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)]$ est la matrice de direction (matrice source) de dimension $M \times P$ où $\mathbf{a}(\theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, P$, est le vecteur source de dimension $M \times 1$ correspondant à la $i^{\text{ème}}$ source. $\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_P(k)]^T$ est un vecteur de dimension, $P \times 1$

contenant les amplitudes complexes des sources et $\mathbf{n}(k) = [n_1(k), n_2(k), \dots, n_M(k)]^T$ est un vecteur de bruit de dimension $M \times 1$. Les éléments de $\mathbf{s}(k)$ et $\mathbf{n}(k)$ sont supposés être des processus aléatoires gaussiens circulaires, ergodiques, stationnaires et à moyenne nulle. De plus, le bruit est supposé être non corrélé avec un signal, non corrélé d'un capteur à l'autre et a une variance σ^2 .

Les vecteurs sources $\mathbf{a}(\theta_i)$ représentent la réponse complexe de l'antenne à des fronts d'ondes élémentaires arrivant dans des directions d'arrivées (DDA) données. Ils dépendent des paramètres géométriques de l'antenne, des gains des capteurs et de la géométrie des fronts d'onde. Suivant les applications, d'autres paramètres peuvent être pris en compte dans ce modèle tel que la distance de la source à l'antenne, la polarisation des sources, etc. Dans toute la suite, nous supposons que tous ces paramètres sont connus de sorte que les vecteurs sources ne dépendent que des DDA.

Sous l'hypothèse que le vecteur \mathbf{s} des amplitudes complexes des sources et le vecteur de bruit \mathbf{n} sont des vecteurs aléatoires, stationnaires, centrés et non corrélés, la matrice de covariance de dimension $M \times M$ des signaux reçus sur l'antenne s'écrit

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta) + \sigma^2\mathbf{I} \quad (\text{I-4})$$

où H représente l'opérateur de transposition hermitienne, $\sigma^2\mathbf{I}$ est la matrice de covariance du vecteur bruit de dimension $M \times M$ et \mathbf{I} est la matrice identité. \mathbf{R}_s est la matrice de corrélation du vecteur source de dimension $P \times P$. Cette matrice est en général une matrice diagonale lorsque les sources sont non corrélées et non diagonal pour des sources partiellement corrélées. Elle peut-être singulière pour des sources cohérentes. Dans la pratique, la matrice de covariance \mathbf{R} des données n'est pas disponible. Cependant, Si on dispose de K réalisations $\mathbf{x}(k)$ du vecteur \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{R}}$ peut être estimée de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k) \quad (\text{I-5})$$

Le problème à résoudre consiste à estimer à la fois:

- le nombre P de sources à bandes étroites supposées suffisamment éloignées « Far Field » (champ lointain),
- leurs positions ou directions d'arrivée θ_i .

Plusieurs méthodes d'analyse spectrale paramétrique ont été appliquées au traitement d'antenne. Ceci, a conduit à une certaine amélioration par rapport aux méthodes traditionnelles, d'où la dénomination techniques à haute résolution.

I.4 Aperçu sur les méthodes d'estimation existantes

Dans le domaine de la détection des sources et l'estimation de leurs paramètres, Schmidt et Franks [SF85, Sch86] ont montré que le nombre de sources peut être estimé à partir de la matrice de covariance \mathbf{R} des données observées. En réalité ceci est obtenu à partir de la multiplicité de la plus petite valeur propre correspond exactement à la variance du bruit. D'où l'idée de diviser l'espace d'observation en deux sous-espaces; l'un décrivant l'espace bruit et l'autre décrivant l'espace signal. Ainsi nous pouvons écrire

$$\lambda_1 = \lambda_1^s + \sigma^2 \geq \lambda_2 = \lambda_2^s + \sigma^2 \geq \dots \geq \lambda_P = \lambda_P^s + \sigma^2 \geq \lambda_{P+1} = \dots = \lambda_M = \sigma^2 \quad (\text{I-6})$$

où $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, M$, sont les valeurs propres de \mathbf{R} , $\lambda_i^s, i = 1, 2, \dots, P$, sont les valeurs propres de $\mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta)$; de là, le nombre de sources (signaux incidents) est égale à $\hat{P} = M - N$ où N est la multiplicité de la plus petite valeur propre de \mathbf{R} .

En pratique, le nombre des échantillons est fini. La matrice de covariance n'est pas alors calculée exactement mais estimée à partir des échantillons collectés au niveau des capteurs. Donc, les plus petites valeurs propres de cette matrice ne seront pas égales. Ceci impose le choix subjectif d'un seuil de décision qui permet de séparer les plus petites valeurs propres correspondant au sous-espace signal. Pour éviter toutes considérations subjectives dans le choix du seuil de décision, Wax et Kailath [WK83] ont utilisé les critères MDL (Minimum Description Length) et AIC (Akaike Information Criteria). Ces critères sont basés sur la théorie de l'information (Information Theorie Criteria). Une fonction de décision $\mathfrak{S}(p)$ a été donc formulée par l'estimateur de vraisemblance (Maximum Likelihood Estimator, MLE) des valeurs propres de la matrice de covariance \mathbf{R} telle que

$$\mathfrak{S}(p) = K(M - p) \log \left[\frac{\zeta(p)}{\gamma(p)} \right] + q(p, k) \quad (\text{I-7})$$

où $\zeta(p)$ et $\gamma(p)$ sont respectivement, les moyennes arithmétiques et géométriques des premières $(M - p)$ petites valeurs propres de \mathbf{R} . $q(p, k)$ est une fonction de pénalité. Le nombre de sources est la valeur de p pour laquelle la fonction de décision $\mathfrak{S}(p)$ est minimale.

La performance des estimateurs utilisés pour l'estimation des directions d'arrivée joue un rôle très important dans la détermination de l'efficacité d'un système de surveillance. A cet effet, plusieurs techniques ont été proposées. L'une des techniques les plus célèbres pour l'estimation des paramètres est la méthode du maximum de vraisemblance ou MLE. Le principe du maximum de vraisemblance est une méthode générale d'estimation de paramètres.

Il fournit des estimateurs asymptotiquement efficaces et sans biais. Alors, il est souvent plus sollicité que les autres techniques d'estimation surtout lorsqu'il possède une solution analytique simple. Cette méthode a été utilisée par Ziskind et Wax [ZW88] pour l'estimation de paramètres déterministes. Dans [Boh84], Boheme a appliqué MLE pour la localisation de P sources et il a montré que cet estimateur est largement non biaisé.

Le principe de la méthode MLE dans l'estimation des directions d'arrivée des sources lointaines est de déterminer soit:

- la fonction de vraisemblance (likelihood function) $f(\mathbf{x}/\Theta)$, ou,
- le logarithme de la fonction de vraisemblance, $L(\Theta) = \log(f(\mathbf{x}/\Theta))$,

où \mathbf{x} est le vecteur de données tel que $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$. Avec $x_m(k)$, $m = 1, 2, \dots, M$, représentant les valeurs correspondant aux M observations de la variable aléatoire \mathbf{x} . Puis, nous prenons la dérivée de $L(\Theta)$

$$\frac{\partial L(\Theta)}{\partial \theta_p} = \frac{\partial \log(f(\mathbf{x}/\Theta))}{\partial \theta_p} \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{I-8})$$

Pour un nombre modéré d'échantillons, le MLE est un bon estimateur.

I.4.1 Méthode de Capon

Une autre approche parmi les méthodes dites des sous-espaces «Signal Subspace Processing, SSP» s'appuyant sur une décomposition de l'espace en un espace bruit et un espace signal. Ceci est obtenu par la recherche des valeurs propres. Plusieurs travaux ont été effectués à partir de cette approche. Néanmoins, toutes ces études ont été menées sur la base de la méthode de Capon [Cap69] (souvent appelée dans la littérature la méthode de maximum de vraisemblance).

La première méthode de localisation, en traitements d'antenne est la formation de voies. Elle consiste à tourner l'antenne dans une direction privilégiée pour conclure sur la présence ou non d'un signal en provenance de cette direction, en estimant la puissance reçue. Afin d'améliorer cette méthode, Capon [Cap69] a développé une version plus performante que la formation de voies classique. A partir de sa méthode, un bon nombre d'algorithmes de localisation de sources rayonnantes ont été développés. L'estimateur de Capon consiste à estimer la puissance du signal par construction d'un filtre adapté à la direction de visée. Ce filtre minimise la contribution des autres sources, tout en gardant un gain unitaire dans la direction de visée. La méthode d'estimation de Capon comprend les étapes suivantes:

- Construire la matrice $\hat{\mathbf{R}}$ à partir des enregistrements observés par les capteurs.

- Obtenir la formule du critère de capon: $\frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{a}(\theta)}$.
- Cette fonction est maximale pour θ correspondant à l'angle de la source.

I.4.2 Méthode de Pisarenko

Pisarenko [Pis73] a eu l'idée en 1973 de faire une décomposition en valeur singulière (Singular Value Decomposition, SVD) sur la matrice d'auto-corrélation du signal. Ainsi, il montra que la plus petite valeur propre correspondait au bruit, ce qui permettait de faire une décomposition de l'espace et de déduire les angles. La méthode de Pisarenko consiste à

- Construire la matrice $\hat{\mathbf{R}}$
- Déterminer le vecteur propre $\hat{\mathbf{u}}$ de $\hat{\mathbf{R}}$ associé à la plus petite valeur propre
- Les DDA sont déterminées à partir des pics de la fonction coût suivante $\frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}^H\mathbf{a}(\theta)}$

I.4.3 Méthodes sous-espace

Les méthodes de Capon et de Pisarenko constituent les plus anciennes méthodes à Haute Résolution HR. Mais elles s'avèrent peu robustes en pratique, c'est pourquoi les méthodes de type sous-espace, proposées plus récemment, leur sont généralement préférées. Dans le même esprit que la méthode de Pisarenko, les méthodes HR modernes reposent sur une décomposition de la matrice \mathbf{R} .

I.4.3.1 MUSIC

MUSIC (MULTiple Signal Classification) a été le premier traitement digne du label «HR». Il a été développé aux Etats-Unis par Schmidt [Sch81]. L'algorithme MUSIC reste encore aujourd'hui un traitement de référence et il constitue le point de départ pour toute une famille de technique HR. Dans cette approche, on détermine les directions et les puissances des sources à partir des propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de covariance \mathbf{R} [Sch86]. Son principe est basé sur la propriété d'orthogonalité entre le sous-espace bruit engendré par les vecteurs propres du bruit et le sous-espace signal engendré par les vecteurs sources $\mathbf{a}(\theta)$ tel que

$$[\mathbf{u}_{P+1}, \mathbf{u}_{P+2}, \dots, \mathbf{u}_M] \perp [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)] \quad (\text{I-9})$$

ou

$$\mathbf{A}^H(\theta)\mathbf{u}_i = 0; \quad i = P + 1, P + 2, \dots, M. \quad (\text{I-10})$$

où \perp désigne l'orthogonalité. En pratique nous avons toujours affaire à des valeurs estimées des vecteurs propres de $\widehat{\mathbf{R}}$ obtenues par un traitement de données de dimensions finies. Donc, le principe d'orthogonalité n'est vérifié qu'approximativement. Mais tout de même, l'algorithme résultant de l'application approximative de ce principe reste valable pour l'estimation des DDA du signal reçu. Notons par $\widehat{\mathbf{U}}_n$ la matrice des vecteurs propres estimée du sous-espace bruit de dimension $M \times M - P$. Pour mesurer le degré d'orthogonalité entre le sous-espace bruit et le sous-espace signal engendrés par les vecteurs sources, nous calculons la fonction de localisation suivante

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\widehat{\mathbf{U}}_n\widehat{\mathbf{U}}_n^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (\text{I-11})$$

Le tracé de $\Psi(\theta)$ permet d'obtenir une courbe présentant des pics dont le nombre et la position sont respectivement le nombre et les DDA de plusieurs ondes planes.

I.4.3.2 Minimum Norm Method

Reddi [Red79], Kurmaresan et Tufts [KT83] ont présenté eux aussi une méthode à norme minimale «Minimum Norm Method» qui est une technique sous-espace pour la localisation des sources lointaines. Dans cette méthode à norme minimale les angles d'arrivée sont déterminés par la localisation des pics de $\Psi_m(\theta)$ donnée par

$$\Psi_m(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\widehat{\boldsymbol{\beta}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (\text{I-12})$$

où $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ est donnée par [KT83]

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\widehat{\mathbf{U}}_n' \widehat{\mathbf{c}}^* / \widehat{\mathbf{c}}^H \widehat{\mathbf{c}} \right] \quad (\text{I-13})$$

$\widehat{\mathbf{c}}^T$ est la première ligne du sous bruit $\widehat{\mathbf{U}}_n$ et $\widehat{\mathbf{U}}_n'$ de dimension $M - 1 \times M$ est le même sous-espace $\widehat{\mathbf{U}}_n$ moins $\widehat{\mathbf{c}}^T$. Après certaine simplification algébrique $\Psi_m(\theta)$ peut s'écrire [KFP92]

$$\Psi_m(\theta) = \frac{\|\mathbf{e}^T \widehat{\mathbf{U}}_n \widehat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{e}\|^2}{\|\mathbf{e}^T \widehat{\mathbf{U}}_n \widehat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{a}(\theta)\|^2} \quad (\text{I-14})$$

où $\mathbf{e}^T = [1, 0, \dots, 0]$ est de dimension $1 \times M$.

Les méthodes sous-espaces qui reposent sur une décomposition de la matrice \mathbf{R} ont été proposées pour des sources lointaines. Cependant, pour une estimation des sources proches où les sources sont caractérisées par leurs directions et leurs portées, ces méthodes sont beaucoup

moins performantes. Pour palier à ce problème Chen et *al.* [CLY90, CLY92] ont proposé une méthode mathématique pour approximer la structure de la matrice de covariance des sources proches. Ainsi, la structure de la matrice des sources proches est approximée grâce à la structure de la matrice des sources lointaines. Ceci est appelé FFA (Far-Field Approximation). Grâce à la FFA nous pouvons appliquer directement les méthodes de sous-espace pour estimer les DDA des sources proches. Parmi les chercheurs ayant exploité MUSIC dans le cas de sources proches, Huang et Barkat [HB91a] ont modifié l'algorithme MUSIC pour estimer les angles d'arrivée et la portée des sources dans un champ proche.

Les techniques MUSIC et Min-Norm connaissent actuellement une évolution importante et un très grand champ d'application dû essentiellement à leur implantation hardware facile et leur coût relativement intéressant. Cependant, quand le nombre des échantillons est petit et/ou le rapport signal à bruit «Signal to Noise Ratio, SNR» est faible, les performances de ces algorithmes sont inférieures aux estimateurs ML [SN89,SN90] aussi bien dans la détermination du nombre de sources qu'à leurs localisations. Les SSP ne peuvent permettre la localisation de sources cohérentes (complètement corrélées). Pour cela, Shan et *al.* [SWK85] ont proposé d'utiliser la technique du lissage spatiale «Spatial Smoothing» pour éliminer la cohérence des sources et par conséquent augmenter le rang de la matrice de corrélation \mathbf{R} . Cette méthode est basée sur une subdivision du réseau principal de réception en sous-réseaux. Ensuite, cette technique propose de moyennner les matrices spectrales des sous-réseaux. En plus des hypothèses classiques sur les bruits (non corrélés avec les signaux émis, non corrélés entre eux et de même puissance sur tous les capteurs), cette méthode suppose que l'antenne de réception est linéaire et à capteurs équidistants. Elle suppose également que les propriétés statistiques du signal sont invariantes par translation dans l'espace.

Soit M le nombre total de capteurs divisés en m sous réseaux, chacun de dimension l . Les capteurs $[1, \dots, l]$ forment le premier sous-réseau, les capteurs $[2, \dots, l + 1]$ le deuxième sous-réseau, le nombre m de sous-réseaux est $m = M - l + 1$. La matrice de covariance «lissée» $\bar{\mathbf{R}}$ est définie comme suit

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{m} \sum_k^m \mathbf{R}^k \quad (\text{I-15})$$

\mathbf{R}^k est la matrice de covariance obtenue à partir du $k^{\text{ème}}$ sous-réseau. Shan et *al.* [SWK85] ont montré que même avec des sources parfaitement corrélées, la matrice $\bar{\mathbf{R}}$ est de rang maximal P si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $l \geq P + 1$ (condition classique du traitement d'antenne, $P < M$);
- $m = M - l + 1 \geq P$.

Pour identifier P sources corrélées, il faut que le nombre M de capteurs nécessaires est au moins égal à $2P$ ($M \geq 2P$). Si l'on compare cette condition avec la condition habituelle en traitement d'antenne ($M \geq P + 1$), il est évident que la méthode du lissage spatial nécessite environ deux fois plus de « temps de calcul » et de « moyens techniques » qu'il en faudrait habituellement. Cet inconvénient est néanmoins subordonné aux performances des résultats qu'on désire obtenir.

I.4.3.3 Root-MUSIC

Les techniques présentées ci-dessus sont appelées procédures de recherche «search procedures» parce qu'elles sont compliquées du point de vue calcul et nécessitent un espace mémoire important pour stocker toutes les informations nécessaires. Pour palier à ces problèmes, des procédures appelées «Non search procedures» ont été introduites et développées. Barabell [Bar83] a proposé Une autre variation de MUSIC appelé Root-MUSIC. Root-MUSIC est semblable à MUSIC dans plusieurs aspects, sauf que les DDA sont déterminées à partir des racines d'un polynôme obtenu du sous-espace bruit au lieu du tracé de $\Psi(\theta)$. Le principe de l'algorithme Root-MUSIC est de trouver les valeurs de θ du signal reçu comme étant les valeurs pour lesquelles la quantité

$$\mathbf{F}_{\text{MUSIC}}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{a}(\theta) = \|\hat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{a}(\theta)\|^2 \cong 0 \quad (\text{I-16})$$

La fonction $\mathbf{F}_{\text{MUSIC}}(\theta)$ est le spectre nul de signal reçu. Définissons la variable complexe z comme suit (voir la section II.2)

$$z = \exp\left(j2\pi \frac{d}{\lambda_0} \sin \theta\right) \quad (\text{I-17})$$

où d et λ_0 sont respectivement l'espacement entre les capteurs et la longueur d'onde du signal émis, donc si nous posons

$$\mathbf{a}(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{M-1}]^T \quad (\text{I-18})$$

Il est facile de vérifier que le spectre nul $\mathbf{F}_{\text{MUSIC}}(\theta)$ dans (I-16) s'exprime sous la forme d'un polynôme de variable complexe z donné par [Bar83]

$$\begin{aligned} y(z) &= \mathbf{a}^T\left(\frac{1}{z}\right) \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{a}(z) \\ &= \sum_{i=-M+1}^{M-1} \hat{b}_i z^i \end{aligned} \quad (\text{I-19})$$

où \hat{b}_i est la somme des éléments de $\hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H$ à travers la $i^{\text{ème}}$ diagonale. L'évaluation du spectre $\Psi(\theta)$ est équivalente à l'évaluation du polynôme $y(z)$ sur le cercle unitaire. Il est clair que les pics du $\Psi(\theta)$ sont dus aux racines de $y(z)$ qui sont proches du cercle unitaire. Si \hat{z}_p représente l'une des P racines sélectionnées pour l'estimation des angles d'arrivée alors les DDA sont déterminées par l'utilisation de (I-17) comme suit

$$\hat{\theta}_p = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\pi(d/\lambda_0)} \arg(\hat{z}_p) \right) \quad (\text{I-20})$$

où $\arg(\hat{z}_p)$ représente l'argument de la racine complexe \hat{z}_p . Nous choisissons les P racines qui sont plus proches du cercle unitaire. Bien que l'algorithme MUSIC soit applicable à un réseau de géométrie arbitraire, Root-MUSIC est appliqué seulement à un réseau linéaire composé de capteurs uniformément espacés. Pour utiliser Root-MUSIC avec un réseau de géométrie arbitraire, Friedlander [Fri93] a proposé une procédure d'interpolation linéaire qui consiste à transformer les données d'un réseau de géométrie arbitraire en des données d'un réseau linéaire virtuel et appliquer par la suite Root-MUSIC. Krim et *al.* [KFP92], après certaines simplifications algébriques sur la méthode à norme minimale de [KT83], ont obtenu un polynôme simple à norme minimale. Les zéros de ce polynôme permettent d'obtenir les DDA estimées. Cette méthode est appelée Root-Min-Norm.

I.4.3.4 ESPRIT

Paulraj et *al.* [PRK86, RK89, RPK86] ont proposé une autre méthode HR appelée ESPRIT «Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques» qui est une méthode de localisation de sources à bandes étroites s'appliquant dans le cas particulier d'un réseau de capteurs constitué de deux sous-antennes identiques, et déduites l'une par rapport à l'autre par une translation dont le vecteur caractéristique est supposé connu. ESPRIT réalise une estimation directe des directions d'arrivée à partir des propriétés de sous-espace signal au lieu de sous-espace bruit. Cette méthode, lorsqu'elle est applicable, permet d'éviter la recherche numériquement lourde (comme dans l'algorithme MUSIC) des maxima d'une puissance de sortie. Cependant, cette méthode comme Root-MUSIC et Root-Min-Norm impose l'utilisation d'un réseau linéaire et équidistant. La méthode ESPRIT s'appuie sur une propriété particulière de l'espace signal: l'invariance rotationnelle. On travaille avec deux réseaux d'antennes X et Y identiques déplacés d'un vecteur Δ et on obtient la mesure des angles par rapport à la direction de Δ . En général, le plus simple est de travailler qu'avec un

seul réseau de M antennes que l'on décompose en deux sous réseaux X et Y de dimension $M - 1$. Δ correspondant alors à l'écart entre deux antennes. Reprenons l'expression de la matrice d'autocorrélation (I-4) sans bruit [DMC98]

$$\mathbf{R}^s = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta) \quad (\text{I-21})$$

avec

$$\mathbf{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j2\pi\frac{d}{\lambda_0}\sin\theta_1} & \cdots & e^{j2\pi\frac{d}{\lambda_0}\sin\theta_P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\frac{d}{\lambda_0}(M-1)\sin\theta_1} & \cdots & e^{j2\pi\frac{d}{\lambda_0}(M-1)\sin\theta_P} \end{bmatrix} \quad (\text{I-22})$$

et

$$\mathbf{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_X(\Theta) \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ \mathbf{A}_Y(\Theta) \end{bmatrix} \quad (\text{I-23})$$

où $\mathbf{A}_X(\Theta)$ représente les $M - 1$ premières lignes de la matrice $\mathbf{A}(\Theta)$ et $\mathbf{A}_Y(\Theta)$ les $M - 1$ dernières lignes de la matrice $\mathbf{A}(\Theta)$. Ces deux matrices sont reliées par la relation:

$$\mathbf{A}_Y(\Theta) = \mathbf{A}_X(\Theta)\mathbf{\Phi} \quad (\text{I-24})$$

où $\mathbf{\Phi}$ est une matrice diagonale de dimension $P \times P$ dont les éléments non nuls valent $e^{(j2\pi\frac{\Delta}{\lambda_0}\sin\theta_p)}$, $p = 1, 2, \dots, P$. Les P vecteurs propres \mathbf{u}_p du sous-espace signal (ceux associés aux valeurs propres non nulles) de la matrice \mathbf{R}^s vérifient une relation semblable à (I-24):

$$\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_P] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ \mathbf{U}_Y \end{bmatrix} \quad (\text{I-25})$$

$$\mathbf{U}_Y = \mathbf{U}_X\mathbf{\Omega} \quad (\text{I-26})$$

où la matrice $\mathbf{\Omega}$ est telle que ses valeurs propres sont les éléments diagonaux de $\mathbf{\Phi}$. Ce résultat constitue le principe de la méthode ESPRIT, qui peut être résumé de la façon suivante:

- Estimation de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$
- Calcul des P principaux vecteurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ et construction des estimations des matrices \mathbf{U}_X et \mathbf{U}_Y notée respectivement par $\hat{\mathbf{U}}_s^X$ et $\hat{\mathbf{U}}_s^Y$:

$$\hat{\mathbf{U}}_s = [\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_P] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_s^X \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ \hat{\mathbf{U}}_s^Y \end{bmatrix}$$

- Estimation de la matrice $\hat{\mathbf{\Omega}}$

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = (\hat{\mathbf{U}}_s^X)^\dagger \hat{\mathbf{U}}_s^Y, \text{ où } \dagger \text{ désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose } (\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H).$$

- on trouve ensuite les angles d'arrivée par la formule suivante:

$$\hat{\theta}_p = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda_0 \arg(\hat{\lambda}_p)}{2\pi\Delta} \right), p = 1, 2, \dots, P, \text{ où les } \hat{\lambda}_p \text{ sont les valeurs propres de } \hat{\mathbf{\Omega}}$$

I.4.3.5 Propagateur

A l'opposé des méthodes HR, basées sur la décomposition de la matrice de covariance des signaux reçus en éléments propres, la méthode du propagateur, proposée par Munier [Mun87], qui est aussi une méthode à haute résolution, est basée sur le partitionnement de cette matrice sans passer par ses éléments propres. Le propagateur est qualifié de linéaire puisque seules des opérations linéaires sont appliquées à la matrice de covariance des signaux reçus. Son application au problème de l'estimation des DDA a été plus particulièrement développée par S. Marcos et *al.* [MMB95, MS97]. Sous l'hypothèse que $\mathbf{A}(\Theta)$ est de rang plein et égal à P . Il existe P lignes de $\mathbf{A}(\Theta)$ linéairement indépendantes. On note $\bar{\mathbf{A}}(\Theta)$ la matrice non singulière de dimension $P \times P$ contenant ces P lignes indépendantes de $\mathbf{A}(\Theta)$. Les $M - P$ autres lignes de $\mathbf{A}(\Theta)$ que l'on regroupe dans $\tilde{\mathbf{A}}(\Theta)$ de dimension $M - P \times P$ peuvent alors s'exprimer de manière unique à l'aide d'une combinaison linéaire des lignes de $\mathbf{A}(\Theta)$. Le Propagateur \mathbf{P} est alors l'unique opérateur de dimension $P \times M - P$ défini par les relations équivalentes

$$\mathbf{P}^H \bar{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}^H \mathbf{Q} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}^H = [\mathbf{P}^H \quad -\mathbf{I}_{M-P}] \quad (\text{I-27})$$

avec \mathbf{I}_{M-P} la matrice identité de dimension $M - P$. La relation (I-27) signifie que le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice \mathbf{Q} est orthogonal au sous-espace engendré par $\mathbf{A}(\Theta)$. De plus, puisque \mathbf{Q} contient la matrice \mathbf{I}_{M-P} , ses $M - P$ colonnes sont linéairement indépendantes et engendrent donc le sous-espace bruit. Une fois le sous-espace bruit déterminé par le propagateur, les DDA sont données comme étant les arguments des minima de la fonction localisation suivante

$$\mathbf{F}_p(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{a}(\theta) = \|\mathbf{Q}^H \mathbf{a}(\theta)\|^2 \quad (\text{I-28})$$

En absence de bruit, la relation (I-27) implique que l'on peut extraire le Propagateur directement de la matrice des signaux capteurs

$$\mathbf{R}^S = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H(\Theta) = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{P} \quad (\text{I-29})$$

où \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 sont des matrices de dimensions respectives $M \times P$ et $M \times M - P$. En présence de bruit la relation (I-29) n'est plus vérifiée. Seulement, on peut procéder par les moindres carrés en cherchant l'estimé de \mathbf{P} qui minimise la norme de frobenius de $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\mathbf{P}$ (minimiser la fonction coût suivante : $\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\mathbf{P}\|_F^2$), dans la solution optimale est :

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_1^\dagger \mathbf{R}_2 \quad (\text{I-30})$$

L'estimateur de propagateur fournit par (I-30) n'est pas consistant. De plus pour des rapports signal à bruit faibles; les performances de la méthode du propagateur sont sérieusement affectées.

I.5 Motivation

En principe les méthodes de sous-espaces, souvent appelées méthodes à haute résolution, fournissent une estimation des angles d'arrivée avec une résolution infinie, indépendamment du rapport signal à bruit. Cependant, les performances mesurées en termes de taux de détection et du pouvoir de résolution de ces méthodes se dégradent en présence d'un rapport signal à bruit très faible et leurs performances d'estimations varient considérablement en fonction de la séparation angulaire et du nombre d'observations.

Face à ces inconvénients et afin d'optimiser de mieux les DDA de sources et d'augmenter le pouvoir de résolution ainsi que les performances de localisation de sources nous avons développé une nouvelle méthode, à haute résolution, de sous-espace pour la localisation de sources basée sur l'algorithme de Gradient Conjugué (GC). Contrairement aux méthodes de sous-espaces classiques (MUSIC, Min-Norm et ESPRIT), la méthode proposée ne fait pas recours à la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance des données reçues. Cette méthode comme l'ESPRIT s'appuie sur le sous-espace signal au lieu de sous-espace bruit. En effet, l'algorithme proposé implique la construction de sous-espace signal à partir des vecteurs résidus du Gradient Conjugué. Cette approche est basée sur la même procédure proposée récemment par Grover et *al.* [GPM05, GPM07], qui trouve une base orthonormée de sous-espace signal à partir des vecteurs auxiliaires (Auxiliary Vector, AV). En revanche, nous remplaçons l'algorithme des vecteurs auxiliaires par les vecteurs résidus de l'algorithme GC. Par la suite, nous obtenons une base orthonormée de sous-espace signal engendrée par les vecteurs résidus de GC. Pour illustrer les performances de l'algorithme à haute résolution proposé pour l'estimation des DDA, nous effectuons une comparaison de cette méthode avec les fameuses méthodes MUSIC et ESPRIT et avec son concurrent l'algorithme AV, basé lui aussi sur les sous-espaces de Krylov [GL96]. Nous montrons

clairement la surperformance de notre méthode fondée sur le Gradient Conjugué, en terme de capacité de résolution pour des sources très proches, dans le cas des sources non corrélées et corrélées avec un petit support de données reçues et à faible rapport signal sur bruit.

Dans le même contexte, pour éviter la décomposition de la matrice de covariance en éléments propres (Eigen Value Decomposition, EVD). Nous proposons une méthode basée sur un seul échantillon spatiale afin d'estimer le sous-espace signal. Cette méthode nous permet de résoudre deux problèmes:

- la complexité des calculs liée à la décomposition en éléments propres pour obtenir le sous-espace signal.
- Le nombre d'échantillons et la stationnarité des données exigés pour estimer la matrice de covariance

Cette méthode est l'extension du travail de Zhang et *al.* [ZYL91a]. Nous montrons les avantages apportés par cette méthode lorsqu'elle est utilisée pour la suppression des interférences dans le cas d'un réseau linéaire (formation de voies), ainsi les avantages apportés pour l'estimation des DDA dans le cas d'un réseau planaire passif.

I.6 Organisation de la thèse

Nous présenterons ci-après un aperçu des différents chapitres de ce mémoire. Le chapitre 2 a pour but d'introduire les outils algébriques utilisés pour l'élaboration des algorithmes basés sur les sous-espaces de Krylov proposés plus loin dans ce deuxième chapitre. Dans une deuxième phase nous présentons le problème de localisation de sources lointaines à bande étroite en expliquant son principe, en donnant son modèle mathématique pour un réseau de capteurs linéaire équidistant et nous exposons aussi le principe de calcul de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance.

Dans le chapitre 3 nous montrerons comment effectuer une estimation des directions d'arrivées des sources lointaines à bande étroite en utilisant une méthode basée sur l'algorithme algébrique Gradient Conjugué. Les avantages de cette approche résident dans le fait qu'elle permet la localisation des sources assez proches pour un faible support de données et à un SNR faible. Dans le même chapitre nous élaborons clairement la relation entre la méthode GC et la méthode AV proposée par Grover et *al.* [GL96]. Nous proposons aussi une analyse de performances en effectuant une étude comparative de notre méthode avec l'algorithme AV et les méthodes à structures propres. Ceci sera validé par plusieurs résultats de simulation.

Finalement, nous nous sommes intéressés dans le chapitre 4 à une méthode de construction de sous-espace signal en se basant sur un seul échantillon. Dans la première partie nous exposerons le problème de la suppression des interférences pour la formation de voies. Nous nous intéressons dans cette thèse qu'aux algorithmes de sous-espaces. L'idée clé de ces derniers est l'exploitation du faible rang de la matrice de covariance d'interférence pour la séparation de l'espace d'observation en deux sous-espaces; le sous-espace interférence et le sous-espace bruit, suivie par une projection des observations sur le sous-espace bruit [Hai96]. La méthode communément utilisée pour déterminer ces deux sous-espaces est la décomposition en vecteurs propres (EVD) de la matrice de covariance. L'algorithme le plus connu basé sur l'EVD est l'algorithme Eigencanceler (EC). Les performances de l'EC se dégradent en présence des signaux corrélés et non stationnaire. Pour remédier à ce problème et en même temps réduire le coût de calcul lié à la construction de la matrice de covariance ainsi qu'à sa décomposition en vecteurs propres, nous présenterons une méthode efficace de suppression qui se base uniquement sur un seul échantillon. Des simulations seront conduites à la fin de cette partie afin de montrer la supériorité de la méthode de suppression à un seul échantillon par rapport à l'Eigencanceler [HB91b,Hai96]. Enfin, dans la deuxième partie nous reprendrons la même méthode, mais cette fois ci, pour estimer les directions d'arrivées en utilisant un réseau de capteurs planaire. Nous entamerons cette partie par une description du problème d'estimation en deux dimensions des directions d'arrivées (2D DDA), l'azimut et l'élévation, pour des sources lointaines à bande étroites captées par un réseau à deux dimensions. Nous terminerons cette partie par des résultats de simulation où nous montrerons l'efficacité de cette méthode pour l'estimation des DDA en 2D.

Nous terminons notre thèse par une conclusion qui résume les apports de nos travaux et ouvre un ensemble de perspectives en localisation de sources.

CHAPITRE II

FONDEMENTS THEORIQUES

Dans ce deuxième chapitre, nous rappellerons des notions élémentaires d'algèbre linéaire, nécessaires pour la mise en œuvre des algorithmes de traitement d'antenne à haute résolution.

Nous montrerons ensuite le principe de fonctionnement des algorithmes basés sur la décomposition en éléments propres. Dans ce but la matrice de covariance sera introduite ainsi que sa décomposition en valeurs et vecteurs propres. Cette matrice de covariance est construite à partir des observations enregistrées par un réseau linéaire de capteurs équidistants. Nous nous intéressons à l'extraction d'une seule caractéristique à savoir la direction d'arrivée des sources incidentes.

La dernière partie de ce chapitre est un tour d'horizon sur les méthodes basées sur les sous-espaces de Krylov. Ces méthodes sont bien connues en algèbre linéaire pour la résolution des systèmes linéaires. A titre d'exemples nous citons :

- l'algorithme de Gradient Conjugué «GC» [GL96],
- les méthodes proposées récemment pour le filtrage adaptatif comme l'algorithme de Multistage Wiener Filter «MSWF» [GRS98] et l'algorithme des vecteurs auxiliaires «AV» [PB99].

II.1 Rappels en algèbre linéaire

Nous aborderons dans cette section quelques notions et concepts en algèbre linéaire [GL96, Lay97] utilisés le long de cette thèse. Plusieurs définitions de base en algèbre linéaire seront rappelées comme le produit scalaire, la norme, le sous-espace vectoriel, l'indépendance, la base, l'orthogonalité des vecteurs et les techniques de décomposition en valeurs propres d'une matrice carrée.

II.1.1 Espace de Hilbert

Nous utiliserons, dans ce mémoire, des espaces vectoriels normés, munis d'un produit scalaire. En mathématiques, un espace vectoriel est un ensemble d'objets (appelés vecteurs) qui, grosso modo, peuvent être multipliés et additionnés, c'est-à-dire, dont on peut faire des combinaisons linéaires. Plus formellement, un espace vectoriel est un ensemble sur lequel deux opérations, nommément l'addition vectorielle et la multiplication scalaire, sont définies et satisfont un certain nombre d'axiomes naturels (commutative, associative, etc.).

Définition 1: Un espace vectoriel normé sur \mathbb{C}^M est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet.

II.1.2 Produit scalaire, norme

Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$, deux vecteurs de \mathbb{C}^M . Le produit scalaire de \mathbf{u} et \mathbf{v} est noté $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ et est défini par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^H \mathbf{u} = v_1^* u_1 + v_2^* u_2 + \dots + v_M^* u_M \quad (\text{II-1})$$

avec \mathbf{v}^H le transposé conjugué de \mathbf{v} . Le produit scalaire assigne un nombre complexe à chaque pair de vecteurs de même dimension.

La norme euclidienne (ou longueur) d'un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$ dans \mathbb{C}^M est le scalaire positif ou nul $\|\mathbf{v}\|$ défini par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots + (v_M)^2} \quad (\text{II-2})$$

Quel que soit le scalaire α , la longueur de $\alpha \mathbf{v}$ est égale à $|\alpha|$ fois la longueur de \mathbf{v} , ce qui s'écrit $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est 1. Si \mathbf{v} est un vecteur non nul, alors le vecteur $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ est un vecteur unitaire dans la même direction que \mathbf{v} . Créer à partir de \mathbf{v} un vecteur unitaire s'appelle normaliser \mathbf{v} .

II.1.3 Sous-espaces vectoriels

Un sous-espace d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble U de V possédant les trois propriétés :

- Le vecteur nul de V appartient à U .
- U est fermé pour l'addition vectorielle, c'est-à-dire que la somme $u + v$ appartient à U quels que soient u et v dans U .
- U est fermé pour la multiplication par un scalaire, c'est-à-dire que le vecteur αu appartient à U quels que soient u dans U et α dans \mathbb{C} .

Définition 2: Si les vecteurs v_1, \dots, v_N appartiennent à un espace vectoriel V , alors l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs noté $\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_N\}$ est un sous-espace de V .

Autrement dit, $\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_N\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui peuvent être écrits sous la forme $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_N v_N$ où c_1, c_2, \dots, c_N sont des scalaires. $\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_N\}$ est appelé le sous-espace engendré (ou sous-tendu) par $\{v_1, \dots, v_N\}$ noté $span\{v_1, \dots, v_N\}$. Etant donné un sous-espace quelconque U de V , un ensemble générateur (ou partie génératrice) de U est un ensemble $\{v_1, \dots, v_N\}$ d'éléments de U tels que $U = \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_N\}$ qui s'écrit $U = span\{v_1, \dots, v_N\}$.

II.1.4 Indépendance et Base

Soit \mathbb{C}^M l'espace linéaire des vecteurs de taille M sur \mathbb{C} . Un ensemble indicé de vecteurs $\{v_1, \dots, v_N\}$ de \mathbb{C}^M est dit linéairement dépendant s'il existe des poids $\{c_1, c_2, \dots, c_N\} \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^N c_i v_i = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_N v_N = \mathbf{0} \quad (\text{II-3})$$

Dans le cas contraire, Un ensemble indicé de vecteurs $\{v_1, \dots, v_N\}$ de \mathbb{C}^M est dit linéairement indépendant si l'équation vectorielle (II-3) n'admet que la solution triviale $c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$.

Au lieu de considérer la dépendance ou l'indépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs $\{v_1, \dots, v_N\}$ de \mathbb{C}^M , on considère les solutions de l'équation matricielle $\mathbf{B}x = 0$ où les colonnes de \mathbf{B} sont les vecteurs $\{v_1, \dots, v_N\}$ qui s'écrit $\mathbf{B} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]$

Théorème 1: Les colonnes d'une matrice \mathbf{B} sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $\mathbf{B}x = 0$ n'admet que la solution triviale.

Définition 3: Soit U un sous-espace d'un espace vectoriel V . Un ensemble indicé de vecteur $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M\}$ de V est une base de U si

- \mathcal{B} est un ensemble linéairement indépendant et si
- le sous-espace engendré par \mathcal{B} coïncide avec U , ce qui s'écrit $U = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M\}$.

Définition 4: On suppose que $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M\}$ est une base de l'espace vectoriel V et que \mathbf{x} est un élément de V . Les coordonnées de \mathbf{x} par rapport à la base \mathcal{B} sont les poids $\{c_1, c_2, \dots, c_M\} \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_M\mathbf{b}_M$

Définition 5: Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$ M vecteurs de V , avec V espace de dimension M , deux à deux orthogonaux et unitaire ($\forall i \|\mathbf{e}_i\| = 1$). Alors, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$ est une base dite orthonormée.

II.1.5 Orthogonalité et projections orthogonales

La notion d'orthogonalité joue un rôle essentiel dans les algorithmes proposés dans cette thèse. Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ de \mathbb{C}^M est orthogonal si $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, pour tout $i \neq j$. L'ensemble est dit orthonormal si $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$, avec δ_{ij} le symbole de Kronecker.

Théorème 2: Un ensemble orthogonal $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M\}$ de vecteurs non nuls de \mathbb{C}^M est linéairement indépendant, et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.

Définition 6: Soient F et G deux sous-espaces. F est orthogonal à $G \Leftrightarrow \forall \mathbf{f} \in F, \forall \mathbf{g} \in G, \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = 0$.

Définition 7: Soit U un sous espace de V . On appelle orthogonale de U l'ensemble des vecteurs de V qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de U . On note :

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in V / \mathbf{u} \in U, \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0\} \quad (\text{II-4})$$

Définition 8: Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M\}$ une base orthonormée de U où U est un sous espace de V . Soit \mathbf{v} un vecteur de V de coordonnées (v_1, v_2, \dots, v_M) , On obtient donc le projeté orthogonale de \mathbf{v} sur U , noté $\wp_U(\mathbf{v})$:

$$\wp_U(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_M \rangle \mathbf{b}_M \quad (\text{II-5})$$

si $U = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_M]$ alors

$$\wp_U(\mathbf{v}) = \mathbf{U}\mathbf{U}^H \mathbf{v} \quad (\text{II-6})$$

Notons que la projection orthogonale de \mathbf{v} sur le sous-espace orthogonal \mathbf{U}^\perp , noté $\wp_U^\perp(\mathbf{v})$:

$$\wp_U^\perp(\mathbf{v}) = (\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^H)\mathbf{v} \quad (\text{II-7})$$

donc $\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^H$ est la matrice de projection orthogonale sur \mathbf{U}^\perp .

II.1.6 Matrice hermitienne, matrice unitaire et matrice tridiagonale

Une matrice $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ est dite hermitienne si la matrice \mathbf{R} vérifie la propriété suivante

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^H \quad (\text{II-8})$$

mais lorsque $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ la matrice est dite symétrique et elle est unitaire si elle vérifie l'égalité suivante

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^H = \mathbf{R}^H\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (\text{II-9})$$

avec \mathbf{I} la matrice identité de dimension $M \times M$, par suite, les matrices unitaires sont donc inversibles, d'inverse

$$\mathbf{R}^H = \mathbf{R}^{-1} \quad (\text{II-10})$$

Notons par r_{ij} les coefficients (éléments) de $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$, alors \mathbf{R} tridiagonale si et seulement si $r_{ij} = 0$, pour tous (i, j) tels que $|i - j| > 1$

II.1.7 La décomposition en valeurs propres d'une matrice (EVD)

Un vecteur \mathbf{u} non nul de \mathbb{C}^M est appelé vecteur propre d'une matrice $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathbf{R}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (\text{II-11})$$

Le scalaire λ est appelé valeur propre de \mathbf{R} associée à \mathbf{u} . L'ensemble des M valeurs propres est le spectre de la matrice \mathbf{R} . Notons par $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_M] \in \mathbb{C}^{M \times M}$ la matrice dont les colonnes \mathbf{u}_i sont les vecteurs propres de $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ et par $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ la matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_i , alors \mathbf{R} peut se décomposer comme:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (\text{II-12})$$

Si la matrice \mathbf{R} est hermitienne, ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres sont orthogonaux. Soit $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_P] \in \mathbb{C}^{M \times P}$, la matrice construite à partir des P premiers vecteurs propres de \mathbf{R} , le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par les colonnes de \mathbf{V} est défini par:

$$\rho_{\mathbf{V}} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H \quad (\text{II-13})$$

II.2 Formulation du problème et modèle des observations

Nous présentons le problème de l'estimation des directions d'arrivée de sources supposées lointaines à partir des signaux mesurés simultanément sur un réseau de capteurs appelé antenne. Nous ne reviendrons pas sur les hypothèses physiques permettant de modéliser le vecteur des signaux reçus sur les capteurs [Nai01].

Pour estimer les directions d'arrivée de P sources à bandes étroites centrées à la même fréquence ν_0 , nous considérons un réseau linéaire constitué de M capteurs identiques avec un espacement uniforme d comme le montre la figure II.1. Les sources se trouvent suffisamment éloignées pour pouvoir assimiler les signaux qu'elles émettent à des ondes planes. En utilisant la représentation complexe du signal, le signal reçu au $m^{\text{ème}}$ capteur peut s'écrire sous la forme standard suivante

$$\mathbf{x}_m(t) = \sum_{p=1}^P \alpha_p e^{j2\pi\nu_0(m-1)\tau_p} s_p(t) + \mathbf{n}_m(t) \quad (\text{II-14})$$

où $s_p(t)$ représente l'enveloppe complexe du $p^{\text{ème}}$ signal, α_p est la réponse complexe du capteur à la $p^{\text{ème}}$ front d'onde, τ_p est le retard inter-capteur et ceci par rapport au premier capteur pris comme référence et $\mathbf{n}_m(t)$ est le bruit additif au $m^{\text{ème}}$ capteur.

Nous supposons que les signaux et le bruit sont des processus aléatoires indépendants, circulaires, gaussiens, ergodiques, stationnaires et à moyenne nulle. De plus le bruit est supposé non corrélé avec les signaux et non corrélé d'un capteur à un autre avec une variance σ^2 . Pour simplifier les calculs, nous supposons que les capteurs sont omnidirectionnels avec un gain unitaire; c'est-à-dire, $\alpha_p \equiv 1$. Pour une représentation plus compacte, les données arrivant sur l'antenne peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (\text{II-15})$$

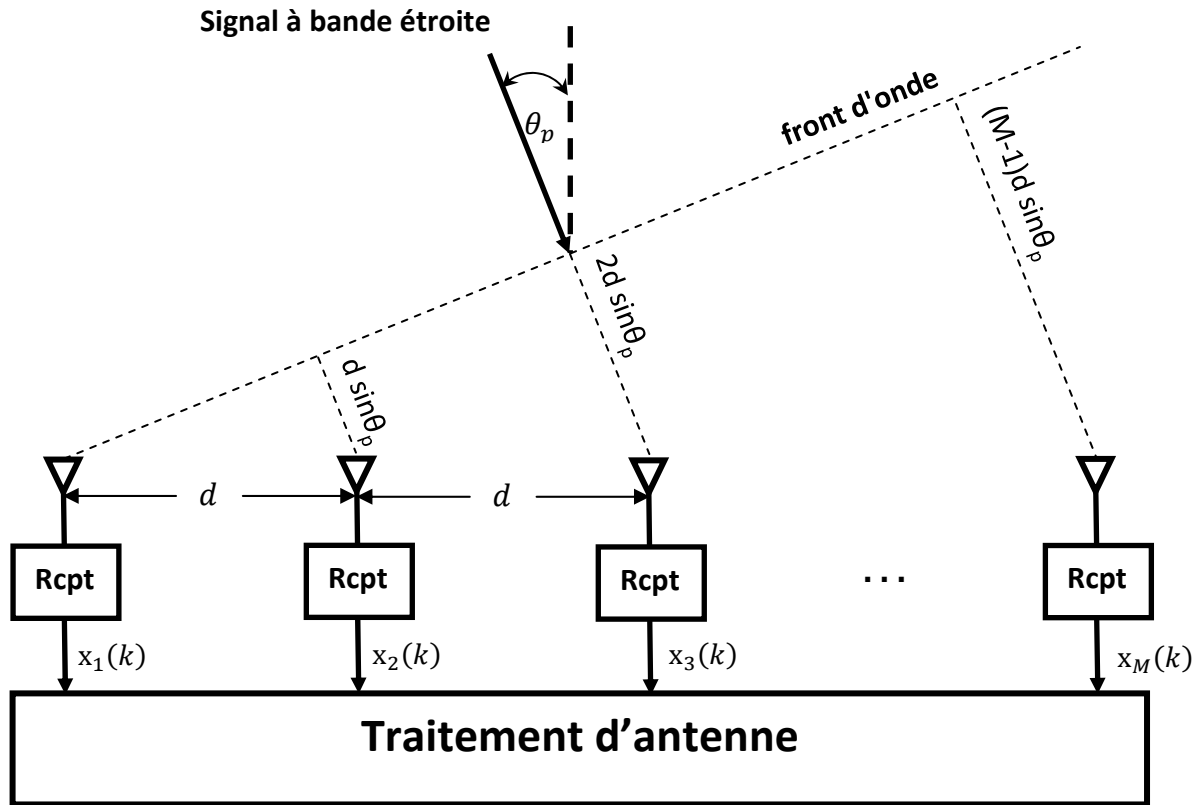


Fig. II.1 Direction d'arrivée d'une onde plane émise par une source sur un réseau linéaire uniforme à M capteurs

$\mathbf{x}(t)$ est le vecteur de donnée de dimension $M \times 1$ tel que $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_M(t)]^T$, $\mathbf{s}(t)$ est le vecteur signal de dimension $P \times 1$ contenant les amplitudes complexes des sources tel que $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_P(t)]^T$, $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur bruit de dimension $M \times 1$ tel que $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_M(t)]^T$ et $\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_p)]$ est la matrice source de dimension $M \times P$ constituée par des vecteurs sources $\mathbf{a}(\theta_i)$. Les vecteurs sources $\mathbf{a}(\theta_i)$ représentent la réponse complexe de l'antenne à des fronts d'ondes élémentaires arrivant dans des DDA données. Ils dépendent des paramètres géométriques de l'antenne, des gains des capteurs et de la géométrie des fronts d'onde. Suivant les applications, d'autres paramètres peuvent être pris en compte dans ce modèle, tels que la distance de la source à l'antenne, la polarisation des sources, etc. Dans toute la suite, nous supposons que tous ces paramètres sont connus de sorte que les vecteurs sources ne dépendent que des DDA. $\mathbf{a}(\theta_i)$ est défini à la fréquence centrale comme

$$\mathbf{a}(\theta_p) = [1 \ e^{j2\pi\nu_0\tau_p} \ \dots \ e^{j2\pi\nu_0(M-1)\tau_p}]^T \quad (\text{II-16})$$

avec $\tau_p = \frac{d}{c} \sin \theta_p$ et c étant la célérité de l'onde reçue, si nous posons $\omega_p = 2\pi\nu_0 \frac{d}{c} \sin \theta_p$, $\mathbf{a}(\theta_p)$ devient

$$\mathbf{a}(\theta_p) = [1 \quad e^{j\omega_p} \quad \dots \quad e^{j(M-1)\omega_p}]^T \quad (\text{II-17})$$

En substituant (II-17) dans $\mathbf{A}(\Theta)$, nous pouvons écrire

$$\mathbf{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \dots & e^{j\omega_P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(M-1)\omega_1} & \dots & e^{j(M-1)\omega_P} \end{bmatrix} \quad (\text{II-18})$$

Une matrice ayant la structure de $\mathbf{A}(\Theta)$ s'appelle matrice de Vandermonde. En pratique, nous effectuons généralement plusieurs mesures à des instants bien définis avant le traitement. Ces mesures seront de la forme

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II-19})$$

où K est le nombre total des échantillons. Cependant, il est impératif de s'assurer que pendant la durée de traitement, l'angle d'arrivée n'a pas changé de façon significative. Si l'intervalle d'observation entre les échantillons adjacents est plus grand que leurs temps de corrélation, la matrice de corrélation (covariance) peut être écrite sous la forme suivante

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k) \quad (\text{II-20})$$

$\hat{\mathbf{R}}$ est l'estimation de la vraie matrice de covariance, cette dernière est calculée à partir du vecteur conjugué transposé du vecteur $\mathbf{x}(t)$ donné par

$$\mathbf{x}^H(t) = \mathbf{s}^H(t)\mathbf{A}^H(\Theta) + \mathbf{n}^H(t) \quad (\text{II-21})$$

Si nous multiplions $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}^H(t)$ et nous prenons la moyenne nous aurons

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] &= \mathbf{A}(\Theta)E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]\mathbf{A}^H(\Theta) + \mathbf{A}(\Theta)E[\mathbf{s}(t)\mathbf{n}^H(t)] + \\ & \quad E[\mathbf{n}(t)\mathbf{s}^H(t)]\mathbf{A}^H(\Theta) + E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

sous l'hypothèse que $\mathbf{s}(t)$ et $\mathbf{n}(t)$ sont non corrélés et statiquement indépendants, l'équation (II-22) devient

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta) + \sigma^2\mathbf{I} \quad (\text{II-23})$$

avec $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ de dimension $P \times P$ est la matrice de covariance du vecteur source et $E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma^2\mathbf{I}$ est la matrice de covariance du vecteur bruit. \mathbf{I} est la matrice identité de dimension $M \times M$. Dans toute la suite on supposera que \mathbf{R}_s est non singulière ce qui correspond à l'hypothèse que les sources ne sont pas totalement corrélées. Si cette hypothèse, n'est pas vérifiée, on peut avoir recours à la technique du lissage spatial [SWK85].

Notons par $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$ et $\lambda_1^s \geq \lambda_2^s \geq \dots \geq \lambda_M^s$ les valeurs propres de \mathbf{R} et de $\mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta)$ respectivement. D'après la relation (II-23), il peut être montré que les valeurs propres $\lambda_m, m = 1, 2, \dots, M$ de \mathbf{R} sont reliés aux $\lambda_m^s, m = 1, 2, \dots, M$ par la relation suivante :

$$\lambda_m = \lambda_m^s + \sigma^2 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (\text{II-24})$$

En supposant que les colonnes de la matrice $\mathbf{A}(\Theta)$ sont différentes et linéairement indépendantes. Si nous notons par $\sigma_1^2, \dots, \sigma_P^2$ les puissances source, pour \mathbf{R}_s diagonal

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_P^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II-25})$$

et

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 \mathbf{a}(\theta_p)\mathbf{a}^H(\theta_p) + \sigma^2\mathbf{I} \quad (\text{II-26})$$

L'équation (II-26) montre que les observations $\mathbf{x}(t)$, sont contenues dans un espace vectoriel de dimension M (M : le nombre de capteurs). Dans cet espace vectoriel, les signaux sources forment un sous-espace de dimension P (P : le nombre de sources). La contribution de chaque source dans la matrice de covariance est donnée par un terme de rang 1, comme nous pouvons le constater dans la relation (II-26), alors le rang de $\mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta)$ est P . Ainsi les $M - P$ plus petites valeurs propres de $\mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta)$ sont toutes égales à zéro

$$\lambda_{P+1}^s = \lambda_{P+2}^s = \dots = \lambda_M^s = 0 \quad (\text{II-27})$$

Donc, de la relation (II-24) nous trouvons

$$\lambda_{P+1} = \lambda_{P+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2 \quad (\text{II-28})$$

Alors, nous pouvons conclure que pour la matrice de covariance \mathbf{R} de dimension $M \times M$, sa plus petite valeur propre est égale à σ^2 avec une multiplicité $M - P$. Si nous notons par \mathbf{u}_m les vecteurs propres de \mathbf{R} associés aux valeurs propres λ_m , nous pouvons écrire par définition

$$\mathbf{R}\mathbf{u}_m = \lambda_m \mathbf{u}_m \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (\text{II-29})$$

et pour $m = P + 1, P + 2, \dots, M$, nous avons $\lambda_m = \sigma^2$ et par conséquent la relation (II-29) peut alors s'écrire

$$(\mathbf{R} - \sigma^2 \mathbf{I})\mathbf{u}_m = 0 \quad m = P + 1, P + 2, \dots, M \quad (\text{II-30})$$

en substituant (II-23) dans (II-30), nous trouvons

$$\mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta)\mathbf{u}_m = 0 \quad m = P + 1, P + 2, \dots, M \quad (\text{II-31})$$

Comme les colonnes de $\mathbf{A}(\Theta)$ sont linéairement indépendantes et en sachant que \mathbf{R}_s est une matrice diagonale, alors la relation (II-31) ne peut être satisfaite que si :

$$\mathbf{A}^H(\Theta)\mathbf{u}_m = 0 \quad m = P + 1, P + 2, \dots, M \quad (\text{II-32})$$

Les colonnes de la matrice $\mathbf{A}(\Theta)$ sont de type Vandermonde, donc la relation (II-32) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{a}^H(\theta_p)\mathbf{u}_m = 0 \quad m = P + 1, P + 2, \dots, M \quad (\text{II-33})$$

ou d'une façon plus explicite; nous avons:

$$[\mathbf{u}_{P+1}, \mathbf{u}_{P+2}, \dots, \mathbf{u}_M] \perp [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)] \quad (\text{II-34})$$

Nous référons à l'ensemble des vecteurs propres $[\mathbf{u}_{P+1}, \mathbf{u}_{P+2}, \dots, \mathbf{u}_M]$ associés aux $M - P$ plus petites valeurs propres de \mathbf{R} le sous-espace bruit et à $[\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)]$ le sous-espace signal. Selon la relation (II-34) le sous-espace bruit engendré par les $M - P$ vecteurs propres associés aux $M - P$ plus petites valeurs propres de \mathbf{R} est orthogonal au sous-espace signal engendré par les vecteurs sources.

L'idée de décomposer l'espace d'observation en deux sous-espaces, le sous-espace signal et le sous-espace bruit de dimensions finies n'est valable que pour des valeurs propres exactes de la matrice de covariance \mathbf{R} . Cependant, en pratique, nous avons toujours affaire à des vecteurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ obtenue par un traitement de données de dimensions finie. Donc, le principe d'orthogonalité n'est vérifié qu'approximativement. Néanmoins, l'algorithme résultant de l'application approximative de ce principe reste valable pour l'estimation des DDA des signaux reçus. Si $\hat{\mathbf{R}}$ admet une décomposition en valeurs propres, elle s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{U}}^H = \sum_{m=1}^M \hat{\lambda}_m \hat{\mathbf{u}}_m \hat{\mathbf{u}}_m^H \quad (\text{II-35})$$

Ainsi, les vecteurs propres $\hat{\mathbf{u}}_m$ forment une base orthonormée dans l'espace vectoriel engendré par les observations $\mathbf{x}(k)$. Les $\hat{\lambda}_m$ sont les valeurs propres associées rangées par ordre décroissant. Compte tenu que $\hat{\mathbf{R}}$ est une matrice complexe hermitienne, ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres orthogonaux. Cependant, comme le signal est spatialement cohérent et que le bruit ne l'est pas, nous pouvons considérer que les P premiers vecteurs propres, de covariance maximale, définissent une base orthonormée dans le sous-espace signal, tandis que les autres $M - P$ correspondent au sous-espace bruit. Il est alors possible de décomposer la matrice de covariance en deux sous-espaces orthogonaux, signal et bruit, engendrés par les vecteurs propres correspondant aux P premières valeurs propres $\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_P\}$ pour le sous-espace signal et aux $M - P$ dernières valeurs propres pour le sous-espace.

Les méthodes de détection et d'estimation liées aux structures propres sont basées sur l'exploitation des deux propriétés données dans (II-28) et (II-34) avec l'exigence que la matrice de covariance des sources \mathbf{R}_s est non singulière. Il est important de noter que \mathbf{R}_s devient une matrice diagonale dans le cas des sources non corrélées (II-25), elle devient non diagonale et non singulière dans le cas de sources partiellement corrélées, et non diagonale et singulière dans le cas de sources totalement corrélées.

Après avoir explicité le modèle à bande étroite des signaux et le principe de base des méthodes liées à la structure propre de la matrice covariance des échantillons observés, nous nous intéressons dans le prochain paragraphe aux méthodes de sous-espaces de Krylov.

II.3 Sous-espaces de KRYLOV

Considérons une matrice symétrique positive $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ et le vecteur non nul $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, le sous-espace défini par

$$\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b}) \equiv \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{R}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{R}^{D-1}\mathbf{b}\} \quad (\text{II-36})$$

est connu sous l'appellation de sous-espace de Krylov d'ordre D associés à \mathbf{R} et \mathbf{b} [GL96, Saa96, Vos00]. Le sous-espace de Krylov est largement utilisé dans les calculs d'algèbre linéaire pour la résolution de grands systèmes d'équations linéaires. Elles ont été très sollicitées dans des applications liées au filtrage adaptatif [PB99, BA02, HX00]. Il s'agit, dans ces applications, de trouver une solution approximative à l'équation de Wiener-Hopf

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{b} \quad (\text{II-37})$$

Ceci, sans passer par le calcul direct de l'inverse de la matrice, où \mathbf{w} est un vecteur complexe de dimension $M \times 1$ qui constitue les éléments de filtre désiré. En utilisant le théorème de Cayley Hamilton, l'inverse de la matrice \mathbf{R} noté par \mathbf{R}^{-1} peut être exprimé avec une combinaison linéaire de la puissance de la matrice \mathbf{R} [Bro85]

$$\mathbf{R}^{-1} = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \mathbf{R}^i = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{R} + \alpha_2 \mathbf{R}^2 + \dots + \alpha_{M-1} \mathbf{R}^{M-1} \quad (\text{II-38})$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Considérons maintenant la solution de Wiener-Hopf

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{II-39})$$

En substituant l'équation (II-38) dans l'équation (II-39), il vient que

$$\mathbf{w} = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \mathbf{R}^i \mathbf{b} = \alpha_0 \mathbf{b} + \alpha_1 \mathbf{R}\mathbf{b} + \dots + \alpha_{M-1} \mathbf{R}^{M-1} \mathbf{b} \quad (\text{II-40})$$

ainsi, \mathbf{w} est une combinaison linéaire de $\{\mathbf{b}, \mathbf{R}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{R}^{M-1}\mathbf{b}\}$, qui sont précisément les vecteurs de base de sous-espace de Krylov. Où $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ est le premier vecteur de cette base. Cette solution consiste à rechercher un vecteur \mathbf{w} dans un espace de dimension M , aussi pour réduire la dimension de l'espace dans laquelle s'effectue l'optimisation, un filtre à rang réduit \mathbf{w} est obtenu en utilisant uniquement un ordre D ($D < M$) d'approximation de \mathbf{R}^{-1} en tronquant le côté droit de (II-40) à D termes et en multipliant le résultat par \mathbf{b} [MKS96]. Une propriété utile de sous-espace de Krylov est leur lien avec la tridiagonalisation unitaire d'une matrice hermitienne comme décrit dans le théorème suivant [GL96]

Théorème 3: si $\mathbf{G}^H \mathbf{R} \mathbf{G} = \mathbf{T}_D$ est une décomposition tridiagonale de la matrice hermitienne \mathbf{R} , alors les colonnes de \mathbf{G} engendrent un sous-espace de Krylov $\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{g}_1)$ où \mathbf{g}_1 est la première colonne de \mathbf{G} .

Selon le théorème 3, nous constatons qu'il existe de nombreuses matrices \mathbf{G} pour tridiagonaliser la matrice \mathbf{R} , chacune est déterminée par la première colonne. Ce théorème fournit un moyen pratique pour trouver des bases pour le sous-espace de Krylov à l'aide d'un algorithme qui fournit une tridiagonalisation unitaire de la matrice hermitienne \mathbf{R} . Parmi ces algorithmes les méthodes à rang réduit qui ont été proposées récemment, tels que l'algorithme de Wiener multi-étage (Multistage Wiener Filter, MSWF) [GRS98], l'algorithme des vecteurs auxiliaires (Auxiliary-Vector Filter, AVF) [PB99, PK01] et l'algorithme de Gradient

Conjugué (Conjugate-gradient reduced-rank filter, CGRRF) [BA02], dont l'objectif est de résoudre l'équation de Wiener-Hopf en utilisant un sous-espace réduit de rang $< M$. L'idée de base consiste à projeter l'espace engendré par les observations $\mathbf{x}(k)$ sur un sous-espace réduit de dimension $D < M$, défini par un ensemble de vecteurs de base qui engendrent le sous-espace de Krylov, afin de réduire la complexité liée au temps de calcul quand $D \ll M$, et assurer une meilleure convergence que les algorithmes à structure propre. Nous allons maintenant examiner les trois algorithmes de réduction de rang basés sur les sous-espaces de Krylov. Nous nous limitons à leurs aspect algorithmique en relation avec le sous-espace de Krylov sans entrer dans les détails liés à leurs conceptions pour le filtrage adaptatifs.

II.3.1 Filtre à multi-étage de Wiener

Le filtre de Wiener à multi-étage MSWF a été présenté dans [GRS98] pour résoudre l'équation de Wiener-Hopf au sens des moindres carrés (Minimum Mean Square Error, MMSE). Dans cette méthode la réduction de rang se fait sur le sous-espace engendré par la matrice bloquante \mathbf{B} dans l'approche annulation de bruit. L'algorithme de Wiener à multi-étage peut être divisé en deux étapes. Etape d'analyse qui consiste à établir une base orthonormale de sous-espace de krylov. L'étape de synthèse qui consiste à résoudre l'équation de Wiener avec la nouvelle base formée. La figure II.2 illustre une structure standard de cet algorithme à $D = 4$ étages.

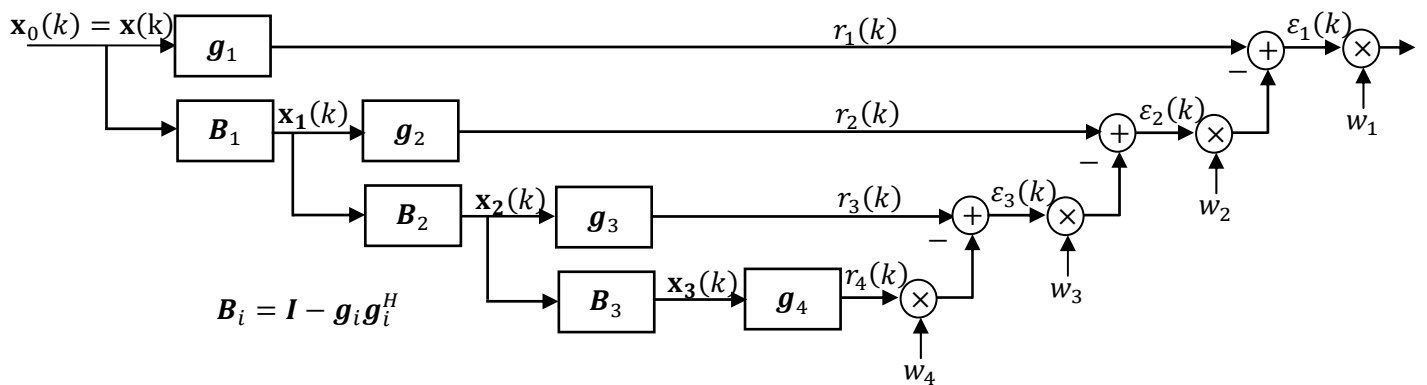


Fig. II.2. Illustration d'un filtre de Wiener à 4 étages

L'algorithme de MSWF est résumé dans le tableau II.1. Les vecteurs orthonormales de dimension M , $\mathbf{g}_{mw,i} = \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{B}_j^H \mathbf{g}_i$ qui constituent la base déterminée à partir de l'algorithme du tableau II.1 pourront être déterminés par l'algorithme de Lanczos [BA02, JZ00]. Le tableau II.2 représente un autre algorithme efficace donnant la même base obtenue en étape d'analyse de l'algorithme MSWF et engendrant le sous-espace de krylov $\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b})$.

<p>Initialisation :</p> $\mathbf{h}_1 = \mathbf{b}; \delta_1 = \ \mathbf{b}\ ; \mathbf{X}_0(k) = \mathbf{X}(k)$ <p><u>Analyse :</u></p> <p>For $i = 1$ to D do</p> $\mathbf{g}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{\delta_i}$ $\mathbf{X}_i(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^H) \mathbf{X}_{i-1}(k)$ $\mathbf{r}_i(k) = \mathbf{g}_i^H \mathbf{X}_{i-1}(k)$ $\mathbf{h}_{i+1} = E[\mathbf{X}_{i-1}(k) \mathbf{r}_{i-1}^*(k)]$ $\delta_{i+1} = \ \mathbf{h}_{i+1}\ $ <p>End for</p>
<p><u>Synthèse :</u></p> $\boldsymbol{\varepsilon}_D(k) = \mathbf{r}_D(k)$ <p>Decrement $i = D, \dots, 1$</p> $\mathbf{w}_i = \frac{E[\mathbf{r}_{i-1}(k) \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(k)]}{E[\boldsymbol{\varepsilon}_i(k) ^2]}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}(k) = \mathbf{r}_{i-1}(k) - \mathbf{w}_i^* \boldsymbol{\varepsilon}_i(k)$

Tableau II.1: Algorithme de MSWF de rang D

<p>Initialisation :</p> $\mathbf{h}_1 = \mathbf{b}; \delta_1 = \ \mathbf{h}_1\ , \mathbf{g}_{mw,0} = \mathbf{0},$ <p>For $i = 1$ to D do</p> $\mathbf{g}_{mw,i} = \frac{\mathbf{h}_i}{\delta_i}$ $\mathbf{c} = \mathbf{R} \mathbf{g}_{mw,i}$ $i = i + 1$ $\mathbf{h}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_{mw,i-1} \mathbf{g}_{mw,i-1}^H - \mathbf{g}_{mw,i-2} \mathbf{g}_{mw,i-2}^H) \mathbf{c}$ $\delta_i = \ \mathbf{h}_i\ $ <p>End for</p>
--

Tableau II.2: Algorithme de Lanczos

En général, le MSWF revient à transformer la matrice de covariance \mathbf{R} à rang complet en une matrice à rang réduit \mathbf{T}_{mw} donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{mw} &= E[\mathbf{r}\mathbf{r}^H] = \mathbf{G}_{mw,D}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{mw,D} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \delta_2 & & 0 \\ \delta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \delta_D \\ 0 & & \delta_D & \alpha_D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

où

$$\delta_i = \mathbf{g}_{mw,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{mw,i-1} = \|\mathbf{h}_i\| \quad (\text{II.42})$$

$$\alpha_i = \mathbf{g}_{mw,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{mw,i} \quad (\text{II.43})$$

et $\mathbf{G}_{mw,D} \in \mathbb{C}^{M \times D}$ est la matrice de transformation donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{mw,D} &= [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{B}_1^H \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{B}_1^H \mathbf{B}_2^H \mathbf{g}_3 \quad \cdots \quad \prod_{i=1}^{D-1} \mathbf{B}_i^H \mathbf{g}_D] \\ &= [\mathbf{g}_{mw,1} \quad \mathbf{g}_{mw,2} \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{mw,D}] \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

où les vecteurs \mathbf{g}_i sont définis comme étant les inter-corrélations normalisées entre le signal de référence \mathbf{r}_{i-1} et le vecteur observé $\mathbf{x}_{i-1}(k)$ de chaque étage avec le précédent et $\mathbf{B}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^H)$ sont les matrices de blocage, c'est-à-dire $\mathbf{B}_i \mathbf{g}_i = 0$. Le rang du MSWF correspond au nombre d'étages retenus après une troncature à un rang D . Il suit de [GRS98, HX00] que les colonnes de la base $\mathbf{G}_{mw,D} \in \mathbb{C}^{M \times D}$ calculée dans l'étape d'analyse engendrent un sous-espace de krylov

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{G}_{mw,D}\} &= \text{span}\{\mathbf{g}_{mw,1}, \mathbf{g}_{mw,2}, \cdots, \mathbf{g}_{mw,D}\} \\ &\equiv \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{R}\mathbf{b}, \cdots, \mathbf{R}^{D-1}\mathbf{b}\} \\ &\equiv \mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Après l'analyse, nous commençons la synthèse le long de la chaîne inférieure (Figure II.2) de droite à gauche d'une manière récursive. Cette méthode permet de transformer un problème de filtrage de Wiener vectoriel en une succession de filtrages de Wiener scalaires. En d'autres termes, nous calculons le vecteur \mathbf{w} réduit en minimisant l'erreur quadratique moyenne au-delà de tous les vecteurs possibles $\mathbf{G}_{mw,D}$ qui engendrent le sous-espace de Krylov.

II.3.2 Algorithme des Vecteurs Auxiliaires (AV)

Cet algorithme proposé dans [PB99], détermine un vecteur auxiliaire $\mathbf{g}_{av,i}$ (voir le tableau II.3) en se basant sur la maximisation de la corrélation entre les sorties du filtre et le vecteur de référence d'un coté et les filtres auxiliaires précédemment calculés de l'autre coté. Une optimisation conditionnelle récursive des vecteurs auxiliaires a été également présentée dans [PB99] et les résultats de cette procédure d'optimisation ont donné la matrice de projection suivante

$$\mathbf{G}_{av,D} = [\mathbf{g}_{av,0} \quad \mathbf{g}_{av,1} \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{av,D-1}] \quad (\text{II-46})$$

où le vecteur auxiliaire $\mathbf{g}_{av,i} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ maximise le module de l'inter-corrélation entre $\mathbf{w}_{i-1}^H \mathbf{x}$ et $\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{x}$, c'est-à-dire, $|\mathbf{w}_{i-1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}|$ et μ_i est le scalaire qui minimise l'erreur quadratique entre $\mathbf{w}_{i-1}^H \mathbf{x}$ et $\mu_i^* \mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{x}$. Notons que les vecteurs auxiliaires $\{\mathbf{g}_{av,0}, \mathbf{g}_{av,1}, \dots, \mathbf{g}_{av,D-1}\}$ sont strictement orthonormales avec le premier vecteur $\mathbf{g}_{av,0} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ et D est la dimension réduite de la dimension originale M . Après certaines simplifications mathématiques des vecteurs auxiliaires afin de réduire la complexité de calcul, une version simplifiée des vecteurs auxiliaires $\mathbf{g}_{av,i}$; $i > 2$ est donnée par [CMS02]

$$\mathbf{g}_{av,i+1} = \frac{(\mathbf{I} - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}}{\|(\mathbf{I} - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}\|} \quad (\text{II-47})$$

En se basant sur cette simplification nous pouvons montrer que les vecteurs AV et le MSWF sont équivalents [CMS02] au sens que leurs base coïncident en engendrant le même sous-espace de Krylov, par conséquent

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{G}_{av,D}\} &= \text{span}\{\mathbf{g}_{av,0}, \mathbf{g}_{av,1}, \dots, \mathbf{g}_{av,D-1}\} \\ &\equiv \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{R}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{R}^{D-1}\mathbf{b}\} \\ &\equiv \mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{II-48})$$

et la matrice \mathbf{T}_{av} de dimension $D \times D$ définie par

$$\mathbf{T}_{av} = \mathbf{G}_{av,D}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{av,D} \quad (\text{II-49})$$

est une matrice symétrique réelle et tridiagonale.

<p>Initialisation :</p> $\mathbf{g}_{av,0} = \frac{\mathbf{b}}{\ \mathbf{b}\ }, \mathbf{w}_0 = \mathbf{g}_{av,0}$ <p>For $i = 1$ to $D - 1$ do</p> $\mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_{av,0} \mathbf{g}_{av,0}^H - \sum_{l=1}^{i-1} \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{w}_{i-1}$ $\mathbf{g}_{av,i} = \frac{\mathbf{c}}{\ \mathbf{c}\ }$ $\mu_i = \frac{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{w}_{i-1}}{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}}$ $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} - \mu_i \mathbf{g}_{av,i}$ <p>End for</p>

Tableau II.3: Algorithme AVF

<p>Initialisation :</p> $\mathbf{g}_{av,0} = \frac{\mathbf{b}}{\ \mathbf{b}\ }, \mathbf{g}_{av,1} = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{g}_{av,0} \mathbf{g}_{av,0}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0}}{\ (\mathbf{I} - \mathbf{g}_{av,0} \mathbf{g}_{av,0}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0}\ }$ $\mu_1 = \frac{\mathbf{g}_{av,1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0}}{\mathbf{g}_{av,1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,1}}$ <p>For $i = 2$ to $D - 1$ do</p> $\mathbf{c}_i = (\mathbf{I} - \sum_{l=i-2}^{i-1} \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i-1}$ $\mathbf{g}_{av,i} = \frac{\mathbf{c}_i}{\ \mathbf{c}_i\ }$ $\mu_i = \mu_{i-1} \left(\frac{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i-1}}{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}} \right)$ <p>End for</p> $\mathbf{g}_{av,D-1} = (-1)^D \mu_{D-1} \mathbf{c}_{D-1}$

Tableau II.4: Algorithme de génération des vecteurs auxiliaires

Le calcul des vecteurs auxiliaires $\mathbf{g}_{av,1}, \mathbf{g}_{av,2}, \dots, \mathbf{g}_{av,D-1}$ (Tableau II.3) exige les vecteurs intermédiaires \mathbf{w}_i et $\mu_i, i = 1, 2, \dots, D - 1$. Le tableau II.4 montre un autre calcul récursif des vecteurs $\mathbf{g}_{av,2}, \mathbf{g}_{av,3}, \dots, \mathbf{g}_{av,D-1}$ sans passer par le calcul de w_i et μ_i [CMS02, GPM05, GPM07], sauf que le calcul du dernier vecteur $\mathbf{g}_{av,D-1}$ non normalisé exige une récursion de μ_i .

II.3.3 Algorithme de Gradient Conjugué (GC)

La méthode de Gradient Conjugué (GC) est une technique itérative d'inversion pour la solution des systèmes linéaires symétriques définis positifs. Il y a plusieurs approches pour la dérivation des Gradients Conjugués. Nous considérons dans cette thèse l'approche de [GL96], qui consiste à ramener la résolution du système linéaire de Wiener-Hopf (II-37) à celui de la minimisation de la fonction coût suivante

$$(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - 2\Re(\mathbf{b}^H \mathbf{w}) \quad (\text{II.50})$$

Le tableau II.5 résume une version de base du Gradient Conjugué où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ est un scalaire représentant le pas qui réduit au minimum la fonction de coût $\Phi(\mathbf{w})$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ est un autre scalaire réel vérifiant que les vecteurs directions \mathbf{d}_i soient \mathbf{R} -conjugués, et $\mathbf{g}_{gc,i}$ est le vecteur résidu défini par

$$\mathbf{g}_{gc,i} = \mathbf{b} - \mathbf{R} \mathbf{w}_i = -\nabla(\Phi(\mathbf{w}_i)) \quad (\text{II.51})$$

avec $\nabla(\Phi)$ représente le gradient de la fonction Φ .

<p>Initialisation :</p> $\mathbf{w}_0 = 0, \mathbf{d}_1 = \mathbf{g}_{gc,0} = \mathbf{b}, \rho_0 = \mathbf{g}_{gc,0}^H \mathbf{g}_{gc,0}$ <p>For $i = 2$ to $D - 1$ do</p> $\mathbf{v}_i = \mathbf{R} \mathbf{d}_i$ $\alpha_i = \frac{\rho_{i-1}}{\mathbf{d}_i^H \mathbf{v}_i}$ $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{d}_i$ $\mathbf{g}_{gc,i} = \mathbf{g}_{gc,i-1} - \alpha_i \mathbf{v}_i$ $\rho_i = \mathbf{g}_{gc,i}^H \mathbf{g}_{gc,i}$ $\beta_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}} = \frac{\ \mathbf{g}_{gc,i}\ ^2}{\ \mathbf{g}_{gc,i-1}\ ^2}$ $\mathbf{d}_{i+1} = \beta_i \mathbf{d}_i + \mathbf{g}_{gc,i}$ <p>End for</p>

Tableau II.5: Algorithme de Gradient Conjugué (GC)

Après D itérations de l'algorithme Gradient Conjugué les vecteurs de recherches $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_D\}$ et l'ensemble de gradients (résidus) $\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,D-1}\}$ vérifient les propriétés suivantes

(i) les vecteurs directions \mathbf{d}_i sont \mathbf{R} -conjugués (ou \mathbf{R} -orthogonales), c'est-à-dire, des directions orthogonales au sens de la métrique de \mathbf{R} vérifiant

$$\mathbf{d}_i^H \mathbf{R} \mathbf{d}_l = 0, \text{ pour tous } i \neq l \quad (\text{II.52})$$

(ii) Les vecteurs gradients (vecteurs résidus) sont mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire

$$\mathbf{g}_{gc,i}^H \mathbf{g}_{gc,l} = 0, \text{ pour tous } i \neq l \quad (\text{II.53})$$

(iii) $\mathbf{g}_{gc,i}^H \mathbf{d}_l = 0$, pour tous $l < i$. (II.54)

(iv) Si nous normalisons les vecteurs gradients $\mathbf{g}_{gc,i}, i = 0, 1, \dots, D-1$ la matrice de transformation construite

$$\mathbf{G}_{gc,D} = [\mathbf{g}_{gc,0} \quad \mathbf{g}_{gc,1} \quad \dots \quad \mathbf{g}_{gc,D-1}] \quad (\text{II.55})$$

et la matrice des vecteurs directions

$$\mathcal{D}_D = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad \mathbf{d}_D] \quad (\text{II.56})$$

Engendrent le sous-espace de krylov

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{G}_{gc,D}\} &= \text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,D-1}\} \\ &\equiv \text{span}\{\mathcal{D}_D\} \\ &\equiv \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{R}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{R}^{D-1}\mathbf{b}\} \\ &\equiv \mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

(v) La matrice \mathbf{T}_{gc} de dimension $D \times D$ définie par

$$\mathbf{T}_{gc} = \mathbf{G}_{gc,D}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{gc,D} \quad (\text{II.58})$$

est une matrice réelle symétrique et tridiagonale.

Après D itérations, l'algorithme de GC produit une méthode itérative de réduction de rang ($D < M$) pour résoudre l'équation de Wiener-Hopf. Selon les équations (II.45), (II.48) et

(II.57) les matrices $\mathbf{G}_{mw,D}$, $\mathbf{G}_{av,D}$ et $\mathbf{G}_{gc,D}$ engendrent le même sous-espace de Krylov $\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b})$ entraînant l'équivalence des solutions du MSWF, AVF et du GC.

II.4 Conclusion

Ce deuxième chapitre nous a permis de présenter des notions de base en algèbre linéaire et la structure des signaux à traiter, nécessaires à la compréhension de la méthode qui sera développée dans la suite. Nous avons montré que la décomposition en éléments propres de \mathbf{R} permet de séparer les deux sous espaces, sous espace signal et sous espace bruit, engendrés respectivement par les P premiers vecteurs propres et les $M - P$ derniers vecteurs propres. Ce principe est complètement exploité par l'algorithme MUSIC et ESPRIT pour déterminer les directions d'arrivée des sources incidentes.

En fin de chapitre, nous avons exposé les méthodes à rang réduit basées sur le sous-espace de Krylov. L'idée derrière la réduction du rang est de projeter l'espace engendré par les données observées sur un sous-espace de rang réduit ($D < M$), défini par un ensemble de vecteurs de base [BA02]. Théoriquement ces algorithmes rapportent asymptotiquement la même solution de l'équation de Wiener-Hopf. En effet, ils utilisent le même critère de minimisation et le même sous-espace de projection [CMS02]. Cependant, les procédures utilisées pour l'obtention de la solution diffèrent d'une méthode à l'autre.

Dans le chapitre suivant nous proposerons une nouvelle méthode à haute résolution pour l'estimation des directions d'arrivée, basée sur les résidus de l'algorithme Gradient Conjugué qui engendrent un sous-espace de Krylov. Nous montrerons aussi la relation entre la nouvelle base formée et celle basée sur la décomposition EVD de la matrice \mathbf{R} .

CHAPITRE III

METHODE A HAUTE RESOLUTION POUR LA LOCALISATION DES SOURCES BASEE SUR LE GRADIENT CONJUGUE

Une nouvelle approche à haute résolution, en traitement d'antenne pour l'estimation des directions d'arrivée, est donc proposée. Elle est classée dans la catégorie des méthodes sous-espaces car elle est basée sur l'utilisation des résidus de l'algorithme Gradient Conjugué pour déterminer le sous-espace signal. Son principal atout est qu'elle permet de déterminer le sous-espace signal sans passer par la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance. Cependant, elle présente aussi l'avantage d'utiliser une nouvelle fonction de localisation liée uniquement aux résidus de l'algorithme GC.

Nous commençons ce chapitre par un état d'art en montrant l'utilisation de l'algorithme Gradient Conjugué dans le domaine de traitement d'antenne. Cette étude nous a permis de comparer notre contribution, tout en montrant son efficacité, par rapport à des travaux de recherches déjà effectués dans ce domaine pour l'algorithme GC.

Dans la seconde partie nous détaillons la méthode proposée tout en montrant ses points communs avec les autres méthodes basées sur le même sous-espace de Krylov. Nous exposerons aussi la relation de la méthode GC proposée avec les méthodes de décomposition en éléments propres.

La dernière partie sera consacrée à la présentation des résultats de nos simulations. Les performances de l'estimateur introduit dans la deuxième partie seront comparées d'un côté avec celles des estimateurs de sous-espace classiques MUSIC et ESPRIT, et de l'autre côté avec son homologue l'algorithme AV.

III.1 Motivation

Le traitement d'antenne traite le problème d'extraction de l'information des signaux reçus par un ensemble de capteurs formant une antenne. La direction d'arrivée (DDA) des sources rayonnantes captées par cette antenne est une information très pertinente et très sollicitées dans plusieurs domaines d'applications tels que le radar, l'acoustique sous-marine et la géophysique...etc.

Au cours de plusieurs années, un certain nombre d'approches pour l'estimation des DDA ont été proposées [KV96]. Les méthodes de sous-espace, qui recourent à la décomposition de l'espace d'observation en sous-espace bruit et en sous-espace signal, sont connues sous le nom de méthodes à haute résolution (HR). Ces approches fournissent une estimation des angles d'arrivée avec une résolution infinie. Parmi les méthodes de haute résolution les plus célèbres nous avons MUSIC [Sch86], ESPRIT [RK89], Min-norme [KT83] et WSF (Weighted Subspace Fitting) [VOK91]. Cependant, les performances mesurées en termes de taux de détection et du pouvoir de résolution de Ces méthodes se dégradent en présence d'un rapport signal à bruit très faible et leurs performances d'estimations varient considérablement en fonction de la séparation angulaire et du nombre d'observations. Ces méthodes font appel à la décomposition en valeurs propres (EVD) ou à la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de covariance des données observées, dans le but d'établir le sous-espace signal ou le sous-espace bruit. Cette technique présente un coût de calcul très élevé quand la dimension de la matrice de covariance est grande.

Au début, L'algorithme du Gradient Conjugué a été proposé dans les domaines relatifs à l'estimation spectrale et l'estimation des directions d'arrivée (goniométrie) afin de réduire la complexité du calcul liée à l'évaluation des sous-espaces signal et bruit. En effet, les travaux antérieurs [CSDB86, YSA89, CW96] sur l'estimation spectrale adaptative ont prouvé que l'algorithme modifié du GC semble être la méthode de descente la plus appropriée pour la recherche itérative de la plus petite valeur propre et son vecteur propre associé d'une matrice symétrique. Pour l'estimation spectrale, Chang et Willson [CW96] ont présenté une version modifiée de l'algorithme de GC pour résoudre le problème de la valeur propre minimale avec contrainte, pour une implémentation itérative de la méthode de Pisarenko. Si la matrice de covariance de bruit est connue a priori, cette méthode pourra être également utilisée pour estimer le spectre du signal dans le cas d'un bruit coloré. Dans le travail de Fu et de Dowling

[FD95], la méthode de GC a été employée pour la poursuite des valeurs propres dominantes et leurs vecteurs propres associés d'une matrice hermitienne qui change dans le temps. Ils ont montrés que le GC présente une convergence rapide et fournissait le sous-espace signal requis pour des versions adaptatives des méthodes MUSIC et Min-Norm pour l'estimation spectrale et l'estimation des DDA. Dans [CSC95], Choi et *al.* ont proposé deux méthodes alternatives pour l'estimation de DDA. Les deux approches emploient une version modifiée de l'algorithme GC pour trouver itérativement un vecteur de poids orthogonal au sous-espace de signal. La première méthode trouve le vecteur propre de bruit correspondant à la plus petite valeur propre en réduisant au minimum le quotient de Rayleigh de la matrice de covariance. La seconde technique trouve un vecteur orthogonal au sous-espace de signal. Il est évalué directement à partir de la matrice de covariance en calculant un ensemble de poids qui réduit au minimum la puissance du signal à la sortie de l'antenne. Les deux méthodes estiment les DDA de la même manière que l'estimateur classique MUSIC. Dans [CW97], un autre algorithme adaptatif de Pisarenko employant le GC avec le lissage spatial a été utilisé pour estimer les DDA des signaux cohérents.

Dans la majorité de ces travaux, le GC a été employé d'une manière semblable à la technique de l'EVD l'objectif est de trouver le vecteur propre qui engendre le sous-espace de bruit, et d'implanter par la suite n'importe quelle méthode de sous-espace utilisant la structure propre pour estimer les DDA des sources rayonnantes.

Dans ce travail de thèse, l'algorithme de GC avec sa version de base illustrée dans [GL96], est appliqué pour produire une base de sous-espace signal. Contrairement aux méthodes de sous-espace, utilisant une base formée à partir de la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance, la nouvelle base est plutôt produite directement à partir des vecteurs résidus de l'algorithme de GC en résolvant l'équation de Wiener-Hopf. Dans cette approche, nous utilisons une fonction de localisation de Grover et *al.* [GPM05, GPM07] basée sur le critère de diminution du rang. Ainsi, nous formons un estimateur des DDA basé sur la réduction du rang d'un sous-espace signal prolongé de $P + 1$ à P (où P est le nombre de sources). Ceci a comme conséquence une nouvelle technique à haute résolution de goniométrie avec une très bonne performance en termes de résolution pour le cas des sources étroitement espacées, non-corrélées et/ou corrélées, avec un nombre restreint d'échantillons de données collectées et à un SNR faible. Nous présentons dans le paragraphe suivant cette nouvelle technique.

III.2 L'algorithme Gradient Conjugué pour l'estimation des DDA

Considérons une antenne constituée de M capteurs équidistants arrangés suivant une géométrie rectiligne dans un plan et qui reçoit les ondes provenant de P sources ponctuelles situées à l'infini dans un plan contenant l'antenne. Ces sources sont repérées par les paramètres angulaires $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$ des signaux sur l'antenne. Nous supposons que le signal reçu est à bande étroite autour de la fréquence ν_0 , que les P sources sont non corrélées et que l'on a $P < M$. Pour une mesure ou réalisation donnée du signal (correspondant au temps d'observation considéré), le $k^{\text{ème}}$ échantillon du vecteur de dimension M des signaux reçus à la sortie des capteurs s'écrit

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\theta_p) s_p(k) + \mathbf{n}(k) \quad (\text{III-1})$$

où

$$\mathbf{a}(\theta_p) = [1 \quad e^{j\pi \sin \theta_p} \quad \dots \quad e^{j(M-1)\pi \sin \theta_p}]^T \quad (\text{III-2})$$

L'équation (III-1) peut être écrite sous une forme plus compacte comme suit

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (\text{III-3})$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\Theta) &= [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_P)] \\ \mathbf{s}(k) &= [s_1(k) \quad s_2(k) \quad \dots \quad s_P(k)]^T \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

où $\Theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_P]$. Considérons de plus les hypothèses suivantes:

- $E[\mathbf{n}(k)] = 0$ et $E[\mathbf{x}(k)] = 0$
- $E[\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^H(k)] = \sigma^2 \mathbf{I}$ et $E[\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^T(k)] = 0$
- $E[\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(k)] = \mathbf{R}_s$ et $E[\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^T(k)] = 0$

Nous pouvons maintenant former la matrice de covariance $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ des signaux reçus

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\Theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (\text{III.5})$$

Qui résume complètement les caractéristiques statistiques du signal reçu lorsque les sources sont gaussiennes circulaires.

III.2.1 La méthode proposée

Pour estimer les DDA des sources captés par l'antenne considérée, nous allons construire un sous-espace signal étendu de rang $P + 1$ non basé sur les vecteurs propres de la matrice de covariance \mathbf{R} en suivant la même procédure développée dans le travail de Grover et al. [GPM05, GPM07]. Définissons le vecteur initial $\mathbf{b}(\theta)$ comme suit :

$$\mathbf{b}(\theta) = \frac{\mathbf{R} \mathbf{a}(\theta)}{\|\mathbf{R} \mathbf{a}(\theta)\|} \quad (\text{III-6})$$

avec $\mathbf{a}(\theta)$ un vecteur source de la même forme que celui défini dans (III.2) défini pour toutes directions $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Si les P sources sont non corrélées et l'angle d'arrivée égale à l'une des direction d'arrivée à estimer, c'est-à-dire, $\theta = \theta_p$, $p = 1, \dots, P$, nous avons:

$$\mathbf{R} \mathbf{a}(\theta_p) = (E[s_p^2]M + \sigma^2) \mathbf{a}(\theta_p) + \sum_{l=1; l \neq p}^P E[s_l^2] (\mathbf{a}^H(\theta_l) \mathbf{a}(\theta_p)) \mathbf{a}(\theta_l) \quad (\text{III-7})$$

Nous constatons que $\mathbf{b}(\theta_p)$ est une combinaison linéaire de P vecteurs source, il appartient donc au sous-espace signal de dimension P engendré par les P vecteurs sources. Cependant, lorsque $\theta \neq \theta_p$ pour $p \in \{1, 2, \dots, P\}$,

$$\mathbf{R} \mathbf{a}(\theta) = \sum_{p=1}^P E[s_p^2] (\mathbf{a}^H(\theta_p) \mathbf{a}(\theta)) \mathbf{a}(\theta_p) + \sigma^2 \mathbf{a}(\theta) \quad (\text{III-8})$$

$\mathbf{b}(\theta)$ est alors une combinaison linéaire de $P + 1$ vecteurs source $\{\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)\}$, il ainsi appartient au sous-espace signal étendu de dimension $P + 1$ qui inclut à la fois le sous-espace signal réel de dimension P plus le vecteur de recherche $\mathbf{a}(\theta)$.

Pour chaque vecteur initial décrit ci-dessus (III-6) il est nécessaire d'effectuer les P itérations ($D = P$) de l'algorithme GC (voir le tableau II-5) pour résoudre l'équation de Wiener-Hopf suivante:

$$\mathbf{R} \mathbf{w} = \mathbf{b}(\theta) \quad (\text{III-9})$$

où \mathbf{R} est la matrice de covariance, nous formons un ensemble de vecteurs gradients (résidus) $\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}, \mathbf{g}_{gc,P}\}$ qui sont normalisés par :

$$\mathbf{g}_{gc,i} = \frac{\mathbf{g}_{gc,i}}{\|\mathbf{g}_{gc,i}\|}, \quad i = 0, 2, \dots, P - 1 \quad (\text{III-10})$$

Sauf que le dernier vecteur $\mathbf{g}_{gc,P}$ reste sans normalisation. Notons à partir des équations (III-7) et (III-8) que le vecteur $\mathbf{b}(\theta) \in \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$, il résulte de l'algorithme GC du tableau II-5 que:

$$\mathbf{g}_{gc,1} = \mathbf{b}(\theta) - \alpha_1 \mathbf{Rb}(\theta) \quad (\text{III-11})$$

et compte tenu que:

$$\mathbf{Rb}(\theta) = \sum_{p=1}^P E[s_p^2] \left(\mathbf{a}^H(\theta_p) \mathbf{b}(\theta) \right) \mathbf{a}(\theta_p) + \sigma^2 \mathbf{b}(\theta) \quad (\text{III-12})$$

est une combinaison linéaire des vecteurs $\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$, alors le gradient $\mathbf{g}_{gc,1}$ appartient aussi au sous-espace engendré par $\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$. Nous remarquons que le vecteur direction $\mathbf{d}_2 = \mathbf{g}_{gc,1} + \beta_1 \mathbf{d}_1$ appartient également à $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$ avec $\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}(\theta)$. De la même manière, le vecteur:

$$\mathbf{g}_{gc,2} = \mathbf{g}_{gc,1} - \alpha_2 \mathbf{v}_2 \quad (\text{III-13})$$

avec

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{Rd}_2 \quad (\text{III-14})$$

Appartient aussi au sous-espace étendu $\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$ du faite que:

$$\mathbf{Rd}_2 = \sum_{p=1}^P E[s_p^2] \left(\mathbf{a}^H(\theta_p) \mathbf{d}_2(\theta) \right) \mathbf{a}(\theta_p) + \sigma^2 \mathbf{d}_2(\theta) \quad (\text{III-15})$$

Plus généralement, il est alors facile de vérifier, lorsque $\mathbf{g}_{gc,i-1}$ et \mathbf{d}_{i-1} sont des vecteurs de $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$, que $\mathbf{g}_{gc,i}$ et \mathbf{d}_i sont également des vecteurs de $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$. Dans le cas où $\theta = \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$ le sous-espace étendu est réduit à $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$. Par conséquent, si le vecteur initial $\mathbf{b}(\theta)$ est contenu dans le sous-espace signal défini par les colonnes de la matrice source $\mathbf{A}(\Theta)$, alors les vecteurs $\mathbf{G}_{gc,P} = \{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}\}$ seront également contenu dans l'espace des colonnes de la matrice $\mathbf{A}(\Theta)$, ainsi la matrice orthonormée $\mathbf{G}_{gc,P}$ engendre le sous-espace réel pour $\theta = \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{G}_{gc,P}\} &= \text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}\} \\ &\equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\} \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

le vecteur solution donné par $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)/\|\mathbf{R}\mathbf{a}(\theta)\|$ appartient également au sous-espace signal

$$\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}\} \quad (\text{III-17})$$

Maintenant, lorsque $\theta \neq \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$, la matrice $\mathbf{G}_{gc,P+1}$ engendre le sous-espace signal étendu, donnant:

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{G}_{gc,P+1}\} &= \text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}, \mathbf{g}_{gc,P}\} \\ &\equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\} \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

Dans ce cas, \mathbf{w} est aussi dans le sous-espace signal étendu, c'est-à-dire:

$$\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}, \mathbf{g}_{gc,P}\} \quad (\text{III-19})$$

Ainsi, après P itérations de l'algorithme GC avec un vecteur initial $\mathbf{b}(\theta)$ appartenant au sous-espace engendré par les vecteurs sources, nous construisons un sous-espace signal basé complètement sur les gradients de GC et son étendu dans le cas où $\mathbf{b}(\theta)$ n'est pas formé à partir de la DDA désirée. Nous allons maintenant exploiter le dernier résultat pour fonder une nouvelle approche pour l'estimation des directions d'arrivée basée uniquement sur le sous-espace signal.

Proposition 1: *Après P itérations de l'algorithme GC l'égalité suivante est vérifiée pour $\theta = \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$*

$$\mathbf{g}_{gc,P}^H = \mathbf{0} \quad (\text{III-20})$$

où $\mathbf{g}_{gc,P}$ est le vecteur gradient de la $P^{\text{ème}}$ itération maintenu non normalisé.

Démonstration : *tant que les vecteurs gradients $\mathbf{g}_{gc,i}$ générés par l'algorithme GC sont orthogonaux [GL96], alors le rang de la matrice $\mathbf{G}_{gc,P+1}$ est $P + 1$. Nous savons bien que lorsque $\theta = \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$*

$$\text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\} \quad (\text{III-21})$$

Il vient donc

$$\text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}, \mathbf{g}_{gc,P}\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{g}_{gc,P}\} \quad (\text{III-22})$$

Nous venons de montrer, que si le vecteur initial $\mathbf{b}(\theta)$ appartient au sous-espace signal $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$, alors chaque vecteur résidu de l'algorithme GC fait également partie du même sous-espace $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$. C'est aussi le cas pour le dernier vecteur $\mathbf{g}_{gc,P}$. Par conséquent, le rang de $\text{span}\{\mathbf{g}_{gc,0}, \mathbf{g}_{gc,1}, \dots, \mathbf{g}_{gc,P-1}, \mathbf{g}_{gc,P}\}$ se réduit à P . Comme les vecteurs gradients sont orthogonaux entre eux alors le vecteur $\mathbf{g}_{gc,P}$ doit être égale à $\mathbf{0}$. ■

En raison de la proposition 1, nous employons la fonction suivante de localisation comme elle a été définie par Grover et *al.* dans [GPM07, équation (22)] :

$$\mathcal{F}_K(\theta^{(n)}) = \|\mathbf{g}_{gc,P}^H(\theta^{(n)})\mathbf{G}_{gc,P+1}(\theta^{(n-1)})\|^{-2} \quad (\text{III-23})$$

où

$$\mathbf{G}_{gc,P+1}(\theta^{(n)}) = [\mathbf{g}_{gc,0}(\theta^{(n)}) \quad \mathbf{g}_{gc,1}(\theta^{(n)}) \quad \dots \quad \mathbf{g}_{gc,P}(\theta^{(n)})] \quad (\text{III-24})$$

est la matrice calculée à l'étape n en effectuant $D = P$ itérations de l'algorithme GC dont le vecteur résidu initial $\mathbf{g}_{gc,0}(\theta^{(n)}) = \mathbf{b}(\theta^{(n)})$, et $\theta^{(n)} = n\Delta$ avec $n = 1, 2, \dots, \frac{180^\circ}{\Delta^\circ}$ où Δ est le pas de l'angle de recherche.

Dans un premier temps, nous avons choisi d'employer la fonction $1/\|\mathbf{g}_{gc,P}(\theta^{(n)})\|^2$ comme fonction de localisation. En effet, les résultats étaient non satisfaisants. La fonction définie dans (III-23) a été finalement adoptée. Il est facile de prouver que nous pouvons obtenir une crête dans le spectre défini par l'équation (III-23) si $\theta^{(n)} = \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$, puisque le dernier vecteur $\mathbf{g}_{gc,P}(\theta^{(n)}) = \mathbf{0}$. Néanmoins, quand $\theta^{(n)} \neq \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$, alors $\mathbf{g}_{gc,P}(\theta^{(n)})$ appartient au sous-espace signal étendu $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta^{(n)})\}$ et l'équation suivante est donc vérifiée:

$$\text{span}\{\mathbf{G}_{gc,P+1}(\theta^{(n-1)})\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta^{(n-1)})\} \quad (\text{III-25})$$

Dans la pratique, la matrice de covariance \mathbf{R} des données n'est pas disponible, mais si nous disposons de K enregistrements de données reçues, \mathbf{R} est remplacée par son estimée $\widehat{\mathbf{R}}$ (II-20). Notons à partir du spectre défini par (III-23), lorsque $\theta^{(n)} = \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$, la fonction $\|\widehat{\mathbf{g}}_{gc,P}^H(\theta^{(n)})\widehat{\mathbf{G}}_{gc,P+1}(\theta^{(n-1)})\|$ n'est pas nulle. Seulement, elle est très petite donc $\widehat{\mathcal{F}}_K(\theta^{(n)})$ est très grande mais finie. Finalement, la nouvelle méthode d'estimation des DDA basée sur l'algorithme GC comprend les étapes suivantes

- Calculer la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ à partir de K enregistrements de données par l'équation (II-20)
- Pour chaque angle de recherche $\theta^{(n)} \in [-90^\circ \quad 90^\circ]$, avec un pas d'itération choisi
 - Calculer le vecteur initial $\hat{\mathbf{b}}(\theta^{(n)}) = \frac{\mathbf{R} \mathbf{a}(\theta^{(n)})}{\|\mathbf{R} \mathbf{a}(\theta^{(n)})\|}$
 - Exécuter l'algorithme GC à P itérations
 - Normaliser les P résidus obtenus
 - En déduire une base de sous-espace signal étendu de dimension $P + 1$ à partir des P résidus normalisés et le dernier résidu $\hat{\mathbf{g}}_{gc,P}(\theta^{(n)})$ non normalisé
 - Trouver la valeur de $\hat{\mathcal{F}}_K(\theta^{(n)})$
- Choisir les DDA désirées qui correspondent aux pics du tracé de $\hat{\mathcal{F}}_K(\theta^{(n)})$

En ce qui concerne la complexité liée au temps de calcul, il est intéressant de noter que l'estimateur GC proposé est plus complexe que l'algorithme MUSIC. En effet, la base de sous-espace signal nécessaire pour la construction de pseudo-spectre est calculée pour chaque angle de recherche et c'est également le cas de l'estimateur AV proposé dans [GPM05, GPM07]. Le tableau III-1 montre cette complexité évaluée en termes de multiplication par bloc comportant la normalisation pour le calcul de la base de sous-espace de Krylov pour déterminer tout le spectre. Nous avons comme référence de comparaison l'algorithme MUSIC et ESPRIT qui impliquent la décomposition de la matrice de covariance, ce qui suppose un coût de calcul de $\mathcal{O}(M^3)$. L'algorithme proposé trouve son intérêt d'application si la capacité de résolution est très demandée dans des situations où il y a un faible rapport signal à bruit et un nombre réduit d'observations.

Algorithme	Nombre de multiplications par bloc
GC	$\frac{180^\circ}{\Delta^\circ} \{M^2 + M + P(M^2 + 2M)\}$
AV	$\frac{180^\circ}{\Delta^\circ} \{M^2 + M + P(2M^2 + M)\}$
MUSIC et ESPRIT	M^3

Tableau III.1 complexité de calcul

III.2.2 La relation entre la méthode GC et la méthode AV

Dans cette section nous décrivons la relation entre le pseudo-spectre de la méthode GC avec celui de la méthode AV de Grover et *al.* [GPM05, GPM07]. L'algorithme GC et l'algorithme AVF réduisent au minimum la même fonction de coût et fonctionnent dans le même sous-espace, à savoir le sous-espace de Krylov. Ainsi, ils vont produire le même vecteur de poids \mathbf{w} , étape par étape, lorsqu'ils sont appliqués à l'équation de Wiener-Hopf. Selon la version modifiée du vecteur auxiliaire donnée dans [CMS02], les vecteurs gradients normalisés de l'algorithme GC et les vecteurs AV modifiés sont identiques. Cela est vrai parce que la récurrence de l'algorithme AV est formellement la même que la récurrence de Lanczos [GL96]. Nous donnons par la suite la relation entre les vecteurs $\mathbf{g}_{av,i}$ et les vecteurs $\mathbf{g}_{gc,i}$, afin d'établir la dépendance entre les deux fonctions de localisations. Suivant le tableau II-4 le vecteur auxiliaire $\mathbf{g}_{av,i+1}$, $i \geq 1$ est donné par [CMS02]

$$\mathbf{g}_{av,i+1} = \frac{(I - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}}{\|(I - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}\|} \quad (\text{III-26})$$

$$\mathbf{g}_{av,1} = \frac{(I - \mathbf{g}_{av,0} \mathbf{g}_{av,0}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0}}{\|(I - \mathbf{g}_{av,0} \mathbf{g}_{av,0}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0}\|} \quad (\text{III-27})$$

où $\mathbf{g}_{av,0}$ est le premier vecteur de la base AV. Notons que les vecteurs AV doivent être orthonormaux contrairement aux vecteurs non orthogonaux calculés dans [PK01, QB03]. Rappelons que si les vecteurs initiaux des deux algorithmes GC et AV sont égaux, c'est-à-dire,

$$\mathbf{g}_{av,0} = \mathbf{g}_{gc,0} = \mathbf{b}(\theta), \quad (\text{III-28})$$

il est alors facile de montrer à partir du tableau II-5 l'égalité suivante

$$\frac{\mathbf{g}_{gc,1}}{\|\mathbf{g}_{gc,1}\|} = - \frac{(I - \mathbf{g}_{gc,0} \mathbf{g}_{gc,0}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{gc,0}}{\|(I - \mathbf{g}_{gc,0} \mathbf{g}_{gc,0}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{gc,0}\|} = -\mathbf{g}_{av,1} \quad (\text{III-29})$$

A partir de l'équation (III-26), nous obtenons

$$\|\mathbf{c}_i\| \mathbf{g}_{av,i+1} = \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i} - (\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}) \mathbf{g}_{av,i} - (\mathbf{g}_{av,i-1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}) \mathbf{g}_{av,i-1}$$

$$\delta_i \mathbf{g}_{av,i+1} = \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i} - \gamma_i \mathbf{g}_{av,i} - \delta_{i-1} \mathbf{g}_{av,i-1} \quad (\text{III-30})$$

Ainsi, la dernière équation (III-30) est la récurrence bien connue de Lanczos (voir le tableau II-2), où $\|\mathbf{c}_i\| = \|(\mathbf{I} - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}\|$ et les coefficients ρ_i et δ_i sont les éléments de la matrice tridiagonale $\mathbf{T}_{av} = \mathbf{G}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{av,i}$, avec $\mathbf{G}_{av,i}$ est la matrice orthonormée formée par les i vecteurs orthonormaux. De l'interprétation de l'algorithme de Lanczos, lorsque le premier vecteur $\mathbf{g}_{gc,0}$ de l'algorithme GC est égale au premier vecteur $\mathbf{g}_{av,0}$ de l'algorithme AV, alors tous les gradients successifs normalisés GC sont les mêmes que les vecteurs auxiliaires (AV), il vient donc [GL96]

$$\mathbf{g}_{av,i} = (-1)^i \frac{\mathbf{g}_{gc,i}}{\|\mathbf{g}_{gc,i}\|}, \quad i \geq 1 \quad (\text{III-31})$$

De l'expression de l'algorithme GC, nous pouvons exprimer le vecteur gradient $\mathbf{g}_{gc,i+1}$ en fonction des vecteurs précédents en utilisant les lignes 6 et 9 du tableau II-5, alors nous pouvons écrire

$$\frac{\mathbf{g}_{gc,i+1}}{\alpha_{i+1}} = -\mathbf{R} \mathbf{g}_{gc,i} + \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \mathbf{g}_{gc,i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \mathbf{g}_{gc,i-1} \quad (\text{III-32})$$

La multiplication et la division de chaque terme de l'équation (III-32) par la norme du vecteur gradient correspondant [SIS03], nous donne

$$\frac{\sqrt{\beta_{i+1}}}{\alpha_{i+1}} \frac{\mathbf{g}_{gc,i+1}}{\|\mathbf{g}_{gc,i+1}\|} = -\mathbf{R} \frac{\mathbf{g}_{gc,i}}{\|\mathbf{g}_{gc,i}\|} + \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \frac{\mathbf{g}_{gc,i}}{\|\mathbf{g}_{gc,i}\|} - \frac{\sqrt{\beta_i}}{\alpha_i} \frac{\mathbf{g}_{gc,i-1}}{\|\mathbf{g}_{gc,i-1}\|} \quad (\text{III-33})$$

Si l'équation (III-33) est comparée avec l'équation (III-30), nous obtenons la relation entre les coefficients de l'algorithme GC et l'algorithme AV :

$$\delta_i = \frac{\sqrt{\beta_{i+1}}}{\alpha_{i+1}},$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \quad i \geq 1, \quad (\text{III-34})$$

$$\gamma_1 = \mathbf{g}_{av,0}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0} = \frac{1}{\alpha_1}.$$

Nous allons maintenant déterminer la relation entre les deux derniers vecteurs non normalisés $\mathbf{g}_{gc,P}$ et $\mathbf{g}_{av,P}$. Selon Grover et al. [GPM05] Le vecteur $\mathbf{g}_{av,P}$ est donné par

$$\mathbf{g}_{av,P} = (-1)^{P+1} \mu_{P-1} \left(\mathbf{I} - \sum_{l=P-1}^{P-2} \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H \right) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,P-1} \quad (\text{III-35})$$

où

$$\mu_i = \mu_{i-1} \frac{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i-1}}{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}}, \quad i > 1 \quad (\text{III-36})$$

$$\mu_1 = \frac{\mathbf{g}_{av,1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0}}{\mathbf{g}_{av,1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,1}} \quad (\text{III-37})$$

Par l'utilisation des équations (III-30) et (III-34), l'expression de μ_1 (III-37) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\mu_1 = \frac{\delta_1}{\gamma_2} = \frac{\sqrt{\beta_2}}{\alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^{-1} \quad (\text{III-38})$$

À partir de (III-38), une nouvelle récurrence de μ_i (coefficient de l'algorithme AV) est donnée en fonction des coefficients de l'algorithme GC comme suit

$$\mu_i = \mu_{i-1} \frac{\sqrt{\beta_{i+1}}}{\alpha_{i+1}} \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{-1}, \quad i > 1 \quad (\text{III-39})$$

Par conséquent, à partir de (III-31), nous obtenons

$$\mathbf{g}_{gc,p} = (-1)^p \frac{\|\mathbf{g}_{gc,p}\|}{|\mu_{p-1}| \sqrt{\beta_p}} \frac{\alpha_p}{\sqrt{\beta_p}} \mathbf{g}_{av,p} \quad (\text{III-40})$$

Ainsi la différence entre le dernier vecteur non normalisée de la base formée de l'algorithme GC et celui de la base formée de l'algorithme AV est un scalaire défini par

$$\zeta_p = (-1)^p \frac{\|\mathbf{g}_{gc,p}\|}{|\mu_{p-1}| \sqrt{\beta_p}} \frac{\alpha_p}{\sqrt{\beta_p}} \quad (\text{III-41})$$

Il est facile maintenant de montrer que le spectre proposé pour l'estimation des DDA est lié au spectre de son homologue l'algorithme AV par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_K(\theta^{(n)}) = & |\zeta_p(\theta^{(n)})|^{-2} \times \left(\|\mathbf{g}_{av,p}^H(\theta^{(n)}) \mathbf{g}_{av,0}(\theta^{(n-1)})\|^2 + \dots + \right. \\ & \left. |\zeta_p(\theta^{(n-1)})|^2 \times \|\mathbf{g}_{av,p}^H(\theta^{(n)}) \mathbf{g}_{av,p}(\theta^{(n-1)})\|^2 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III-42})$$

où

$$\zeta_p(\theta^{(n)}) = (-1)^p \frac{\|\mathbf{g}_{gc,p}(\theta^{(n)})\|}{|\mu_{p-1}(\theta^{(n)})|} \frac{\alpha_p(\theta^{(n)})}{\sqrt{\beta_p(\theta^{(n)})}} \quad (\text{III-43})$$

La différence entre le spectre AV, donné dans [GPM05, GPM07], et le spectre GC est un scalaire $|\zeta_p(\theta^{(n)})|^2$ calculé aux pas $n - 1$ et n en raison du dernier vecteur de la base GC

qui reste non normalisé. Après avoir établi la relation entre les spectres des deux méthodes de sous-espace de Krylov, dans la prochaine section nous donnons la relation entre ces méthodes et les méthodes HR classiques.

III.2.3 La relation entre la méthode GC et les méthodes de sous-espaces basées sur l'EVD

Rappelons encore la forme de la matrice de covariance $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ comme elle a été définie dans l'équation (III.5). Si nous effectuons une décomposition en valeurs propres de la matrice \mathbf{R} , nous pouvons écrire :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H \quad (\text{III-44})$$

où $\mathbf{\Lambda}_s$ est une matrice diagonale de dimension $P \times P$ composée des P valeurs propres principales $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, P$ de la matrice \mathbf{R} . Les colonnes de la matrice $\mathbf{U}_s \in \mathbb{C}^{M \times P}$ sont les vecteurs propres associés aux P valeurs propres principales, et $\mathbf{U}_n \in \mathbb{C}^{M \times (M-P)}$ est l'ensemble de vecteurs propres associés aux $M - P$ plus petites valeurs propres $\lambda_i, i = P + 1, P + 2, \dots, M$. Nous référons à la matrice $\mathbf{U}_s \in \mathbb{C}^{M \times P}$ le sous-espace signal (engendré par la matrice source $\mathbf{A}(\theta)$) et à la matrice $\mathbf{U}_n \in \mathbb{C}^{M \times (M-P)}$ le sous-espace bruit. Les deux sous-espaces engendrés sont orthogonaux l'un à l'autre au sens de la norme euclidienne, c'est-à-dire,

$$\text{span}(\mathbf{U}_n) \perp \text{span}(\mathbf{U}_s) \quad (\text{III-45})$$

L'une des propriétés de l'algorithme GC (c'est aussi le cas pour l'algorithme AV et les algorithmes de sous-espace de Krylov) est que la matrice de covariance transformée $\mathbf{T}_i = \mathbf{G}_{gc,i}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{gc,i}$ est une matrice tridiagonale [GL96], où $\mathbf{G}_{gc,i} \in \mathbb{C}^{M \times i}$ est une matrice orthonormée formée par la normalisation de tous les gradients de l'algorithme GC à l'itération i . Définissons le vecteur initial par $\mathbf{g}_{gc,0} = \mathbf{b}(\theta)$ (voir l'équation (III-6)), il est clair donc, si $\theta = \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$, alors $\mathbf{g}_{gc,p} = 0$ et l'algorithme GC se terminera à l'itération $i = P$. Une fois que la matrice tridiagonale $\mathbf{T}_P \in \mathbb{R}^{P \times P}$ est obtenue par l'utilisation des coefficients α_i et β_i de l'algorithme GC comme suit,

$$\mathbf{T}_P = \mathbf{G}_{gc,P}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{gc,P} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \delta_2 & & 0 \\ \delta_2 & \gamma_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \delta_P \\ 0 & & \delta_P & \gamma_P \end{bmatrix} \quad (\text{III-46})$$

Où les coefficients $\gamma_i, i = 1, \dots, P$ et $\delta_i, i = 1, \dots, P$ sont définis dans l'équation (III-34). La décomposition en valeurs propres de la matrice $\mathbf{T}_P \in \mathbb{R}^{P \times P}$ pourra alors s'écrire

$$\mathbf{T}_P = \sum_{i=1}^P \varrho_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (\text{III-47})$$

où ϱ_i, \mathbf{v}_i sont respectivement la $i^{\text{ème}}$ valeur propre et son vecteur propre correspondant. Xu et Kailath dans [XK94a, XK94b] ont montré que les P valeurs propres (les valeurs de Ritz) $\{\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_P\}$ de la matrice tridiagonale \mathbf{T}_P sont exactement les valeurs propres dominantes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P\}$ de la matrice \mathbf{R} , c'est-à-dire, $\varrho_i = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, P$ et les vecteurs

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_{gc,P} \mathbf{v}_i, i = 1, 2, \dots, P \quad (\text{III-48})$$

appelés souvent les vecteurs de Rayleigh-Ritz (RR) associé au $\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b})$, sont asymptotiquement équivalents aux vecteurs propres principales de la matrice \mathbf{R} , donc

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \dots, \mathbf{y}_P\} &\equiv \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_P\} \\ &\equiv \text{span}\{\mathbf{G}_{gc,P}\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\} \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

Maintenant, lorsque $\theta \neq \theta_p, p = 1, 2, \dots, P$ l'algorithme GC s'arrêtera à l'itération $P + 1$ car cette fois ci c'est le vecteur $\mathbf{g}_{gc,P+1} = \mathbf{0}$. Donc nous pouvons montrer que les valeurs propres de la matrice tridiagonale $\mathbf{T}_{P+1} = \mathbf{G}_{gc,P+1}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{gc,P+1}$ de dimension $(P + 1) \times (P + 1)$ sont $\{\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_P, \sigma^2\}$, où $\{\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_P\}$ sont les P valeurs propres dominantes de la matrice \mathbf{R} et σ^2 est sa plus petite valeur propre. Les premiers P vecteurs de RR de l'ensemble $\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_{gc,P+1} \mathbf{v}_i, i = 1, 2, \dots, P + 1$ sont asymptotiquement équivalents aux vecteurs propres principales de la matrice \mathbf{R} qui engendrent le même sous-espace signal comme il est montré dans l'équation (III-49). Alors que le dernier vecteur RR \mathbf{y}_{P+1} associé à la valeur propre $\lambda_{P+1} = \sigma^2$ appartient au sous-espace de bruit. Par conséquent il forme une base orthogonal au sous-espace signal engendré par les vecteurs sources, nous pouvons écrire alors:

$$\mathbf{y}_{P+1}^H \mathbf{A}(\Theta) = \mathbf{0} \quad (\text{III-50})$$

Notons ici que l'estimation du dernier vecteur propre (le dernier vecteur RR) est garantie parce que le vecteur initial $\mathbf{b}(\theta)$ se trouve dans le sous-espace signal étendu lorsque $\theta \neq$

$\theta_p, p = 1, 2, \dots, P$. Donc une partie de $\mathbf{b}(\theta)$ est liée au sous-espace signal et l'autre partie est liée au sous-espace bruit, c'est-à-dire:

$$\mathbf{R}\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{U}_s \boldsymbol{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}(\theta) + \sigma^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta) \quad (\text{III-51})$$

qui assure également la convergence rapide de l'algorithme pour l'estimation des principaux vecteurs propres parce que $\mathbf{b}(\theta)$ appartient toujours au sous-espace signal et n'est pas orthogonal à aucun des vecteurs propres à estimer [XK94a, XK94b]

$$\mathbf{b}^H(\theta) \mathbf{y}_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, P + 1 \quad (\text{III-52})$$

Le processus entier s'appelle l'approximation de Rayleigh-Ritz [XK94a, XK94b]. Avec la nouvelle base de l'algorithme GC ou AV, le problème de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres désirés de la matrice complexe $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ se transforme à un problème de décomposition en éléments propres d'une petite matrice tridiagonale et réelle. En pratique, la matrice \mathbf{R} est remplacée par son estimé $\hat{\mathbf{R}}$ déterminé à partir d'un nombre fini d'observations K . Par conséquent, pour avoir une bonne estimation de sous-espace signal (engendré par les principaux vecteurs propres) de la matrice $\hat{\mathbf{R}}$, nous suivons les étapes suivantes

- initialiser l'algorithme GC à l'aide de l'équation (III-6) en fixant un angle arbitraire $\theta \in [-90^\circ \quad 90^\circ]$
- effectuer $P + 1$ itérations de l'algorithme GC
- effectuer une décomposition en valeurs propres de la matrice tridiagonale $\hat{\mathbf{T}}_{P+1} = \hat{\mathbf{G}}_{gc,P+1}^H \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{G}}_{gc,P+1}$ (obtenue également par l'intermédiaire des coefficients $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_i$), où $\hat{\mathbf{G}}_{gc,P+1}$ est une matrice orthonormée construite à partir des gradients normalisés après $P + 1$ itérations.
- Enfin, prendre les premiers P vecteurs de Rayleigh-Ritz $\hat{\mathbf{y}}_i = \hat{\mathbf{G}}_{gc,P+1} \hat{\mathbf{v}}_i, i = 1, 2, \dots, P$ qui peut être utilisé avec n'importe quel algorithme de sous-espace propre tels que MUSIC ou ESPRIT pour estimer les DDA.

Donc l'algorithme GC pourra être utilisé pour réduire la complexité calculatoire due à la décomposition en valeurs propres d'une matrice complexe. En transformant le problème en une décomposition propre d'une matrice réelle et tridiagonale de dimension réduite.

III.3 Résultats et discussions

Dans cette section, nous comparons les performances de la méthode GC avec celles de l'algorithme AV et celles des méthodes HR classiques MUSIC et ESPRIT via des simulations numériques.

Une antenne linéaire et uniforme contient $M = 10$ capteurs disposés de façon rectiligne, espacés d'une demi-longueur d'onde reçoit des signaux rayonnés par deux sources ($P = 2$) émettant des ondes planes avec la même puissance. Dans toute la suite, nous faisons l'hypothèse que le nombre de sources est connu. Les capteurs sont supposés omnidirectionnels et parfaitement identiques de gain unitaire. Un bruit qui existe à chaque élément capteur est modélisé par un processus blanc, additif est gaussien, avec une puissance normalisée à 1. Nous supposons de plus que le bruit est statistiquement indépendant des signaux reçus et que ces composantes sont non corrélées d'un capteur à l'autre. Les angles d'arrivée sont mesurés par rapport au plan contenant le réseau de capteurs.

D'abord, nous fixons les angles d'arrivée des deux signaux à $\theta_1 = -1^\circ$ et $\theta_2 = 1^\circ$ avec un rapport signal à bruit $SNR = 10dB$ par source et par capteur. La figure III.1 montre le spectre obtenu par la fonction de localisation proposée lors d'un enregistrement de $K = 50$ observations de données, par rapport à celui de l'algorithme AV [PB99, PK01, GPM05, GPM07] et de l'algorithme MUSIC. Le pseudo-spectre de l'algorithme GC arrive à distinguer correctement les deux sources avec une grande précision par rapport à l'algorithme AV. Alors que la méthode de sous-espace classique MUSIC échoue complètement et ne localise aucune source. Notons que le gain plus élevé de la méthode proposée GC est dû au facteur ζ_P qui dépend de la norme du gradient.

Par la suite, afin d'analyser la performance des algorithmes en fonction de la probabilité de résolution, nous employons l'inégalité aléatoire suivante [Zha95]:

$$\mathcal{F}_K(\theta_m) - \frac{1}{2}(\mathcal{F}_K(\theta_1) + \mathcal{F}_K(\theta_2)) < 0 \quad (\text{III.53})$$

où θ_1 et θ_2 sont les angles d'arrivée des deux signaux et θ_m dénote leur moyenne. $\mathcal{F}_K(\theta)$ est le pseudo-spectre défini dans (III-23) en fonction de la direction d'arrivée. Pour illustrer les performances de l'algorithme proposé, nous allons réaliser deux expériences différentes calculées à partir de 1500 réalisations indépendantes (1500 Monte-Carlo runs). Dans la première nous traitons le cas de la localisation des sources non corrélées, puis dans la deuxième expérience nous examinons les performances pour des sources corrélées.

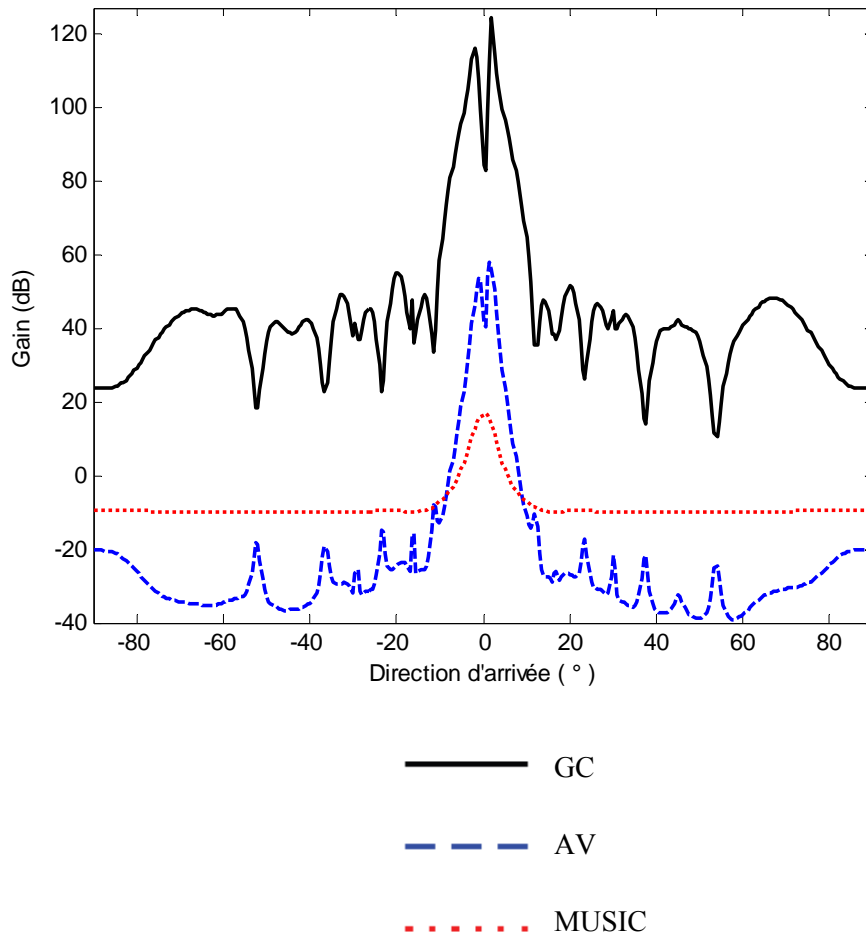


Fig. III.1 Spectres des algorithmes GC, AV, MUSIC ($\theta_1 = -1^\circ, \theta_2 = 1^\circ, SNR1 = SNR2 = 10dB, K = 50$)

Expérience 1 : cas de sources non corrélées

Dans cette expérience, nous considérons la présence de deux sources non corrélées séparées de 3° qui sont générées par un processus aléatoire gaussien et complexe. Dans les figures III.2 et III.3 nous montrons respectivement, la probabilité de résolution en fonction du rapport signal à bruit lorsque $K = 50$ et la probabilité de résolution en fonction du nombre d'observations enregistrées avec un $SNR = 0dB$. Pour des raisons de comparaisons avec les méthodes de sous-espace HR existante, nous avons ajouté l'algorithme ESPRIT. Comme prévu, la capacité de résolution s'améliore nettement avec l'augmentation du nombre d'échantillons K utilisés à l'estimation de la matrice de covariance et l'augmentation du SNR . Dans la figure III.2 nous pouvons clairement remarquer l'échec des méthodes MUSIC et ESPRIT pour la résolution des sources proches avec un faible SNR , $SNR < 16dB$ pour le MUSIC et un $SNR < 10dB$ pour l'ESPRIT.

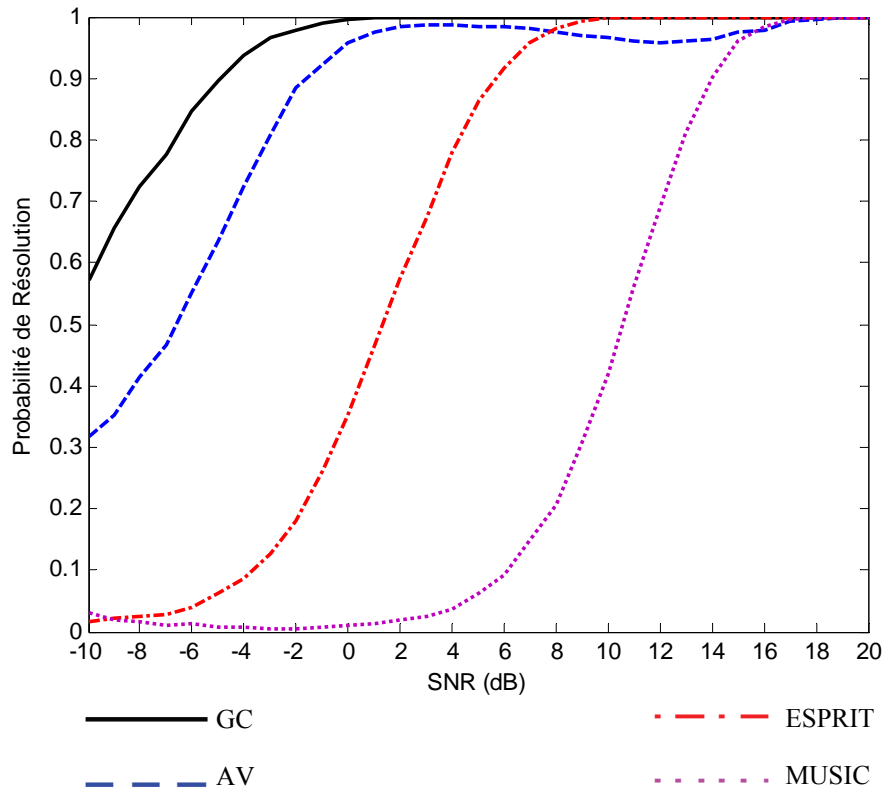


Fig. III.2 Probabilité de résolution en fonction de SNR (séparation 3° , $K = 50$)

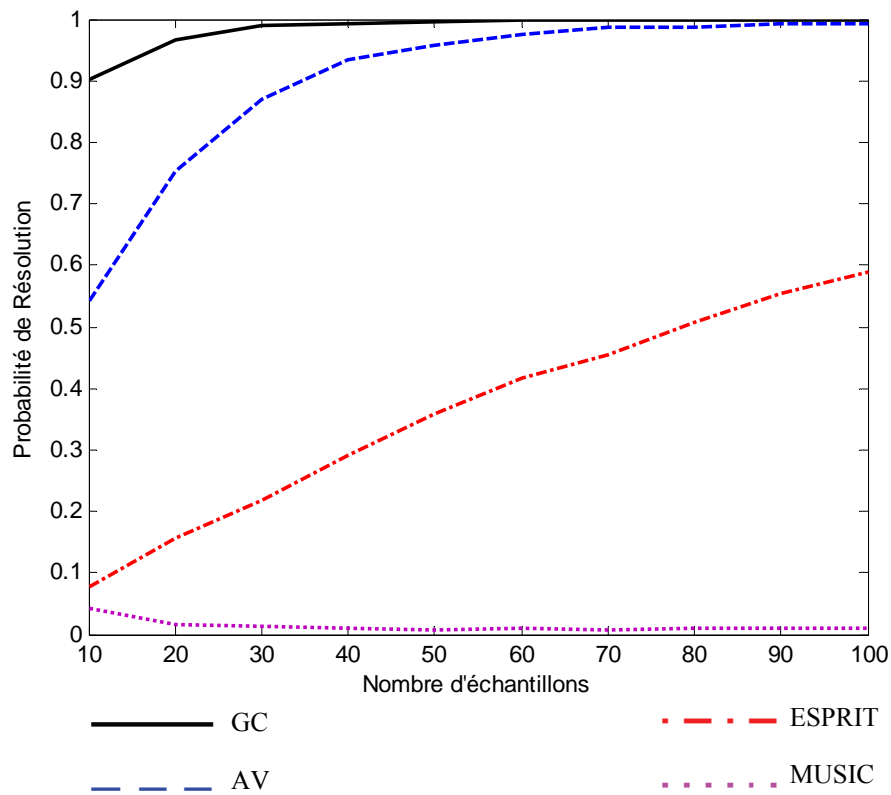


Fig. III.3 Probabilité de résolution en fonction de nombre d'échantillons K (séparation 3° , $SNR = 0dB$)

Pour le nombre réduit d'enregistrements utilisés en simulation nous remarquons clairement dans la figure III.3 que les deux méthodes HR classiques n'arrivent plus à améliorer leur résolution malgré l'augmentation du K . Au contraire les deux méthodes GC et AV basées sur le sous-espace de Krylov arrivent à localiser et à distinguer mieux les deux sources même à un faible SNR et pour un K réduit. Les deux figures montrent également la supériorité de l'algorithme GC par rapport aux autres techniques en termes de probabilité de résolution.

Expérience 2 : cas de sources corrélées

Dans cette expérience, nous considérons la présence de deux sources corrélées séparées de 3° et générées par un processus aléatoire gaussien et complexe comme suit

$$\mathbf{s}_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2), \quad \mathbf{s}_2 = r\mathbf{s}_1 + \sqrt{1-r^2}\mathbf{s}_3 \quad (\text{III.54})$$

où $\mathbf{s}_3 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$ et r le coefficient de corrélation. Les figures III.4 et III.5 montrent la probabilité de la résolution des algorithmes pour une valeur élevée de corrélation $r = 0.7$ avec et sans lissage spatial aval/amont (forward/backward spatial smoothing, FBSS) [PK89]. La figure III.4 illustre les performances des estimateurs en terme de résolution en fonction du SNR lorsque le nombre d'observations $K = 50$. Là encore, nous pouvons voir que les performances de l'estimateur basé sur l'algorithme GC surpassent les performances de l'estimateur basé sur l'algorithme AV avec ou sans utilisation du lissage spatial FBSS. Les mêmes résultats sont constatés dans la figure III.5 qui illustre les performances en fonction du nombre d'échantillons lorsque le $SNR = 5dB$. Nous constatons également que les performances des deux estimateurs GC et AV sont toujours meilleures que celles des méthodes MUSIC et ESPRIT à faible SNR et quelle que soit la taille du support de données enregistrées. Les deux figures montrent bien la capacité des estimateurs GC et AV pour discerner des sources corrélées sans application de FBSS par rapport aux méthodes HR classique MUSIC et ESPRIT avec ou sans FBSS.

Enfin, nous répétons les simulations précédentes pour des sources fortement corrélées $r = 0.9$. A faible rapport signal sur bruit. La figure III.6, montre bien que la méthode basée sur l'algorithme GC, même sans FBSS, donne toujours de meilleurs résultats par rapport à la méthode fondée sur les vecteurs auxiliaires AV. De la même façon que la première expérience les performances des méthodes de sous-espace de Krylov surpassent clairement les performances des méthodes MUSIC et ESPRIT avec ou sans FSSB. Notons que pour un $SNR < 8dB$ le GC sans FBSS est meilleur que l'ESPRIT avec FBSS. Dans la

figure III.7, l'algorithme proposé se révèle encore plus performant que les algorithmes de sous-espace propre MUSIC et ESPRIT avec ou sans FBSS. Alors que l'algorithme AV sans FBSS possède moins de capacité de résolution par rapport à l'ESPRIT avec FBSS lorsque le nombre d'observations < 70 . Nous pouvons également constater l'amélioration de la probabilité de résolution à la fois pour les deux algorithmes GC et AV basés sur l'utilisation de FBSS.

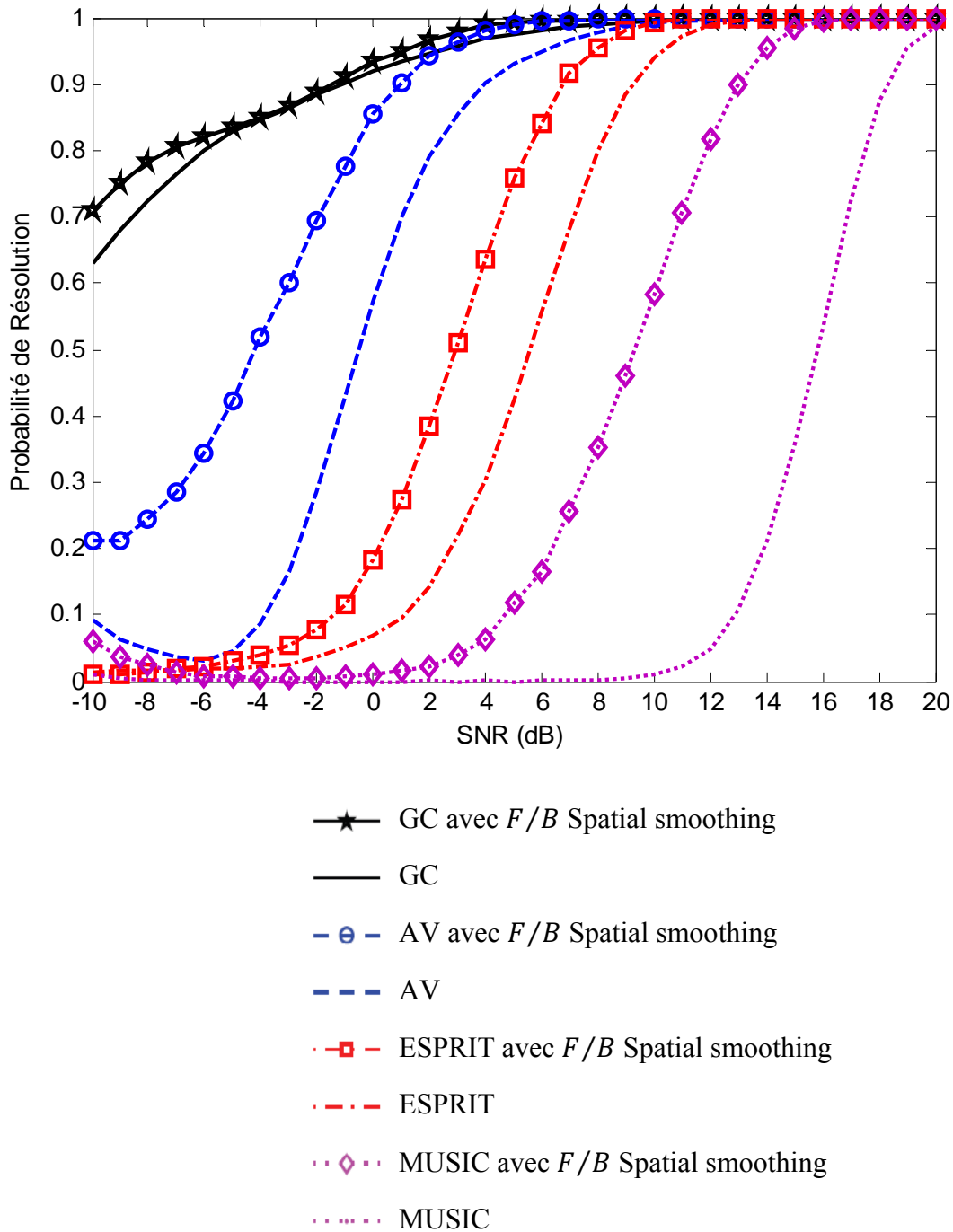


Fig. III.4 Probabilité de résolution en fonction de SNR (séparation 3° , $K = 50$, $r = 0.7$)

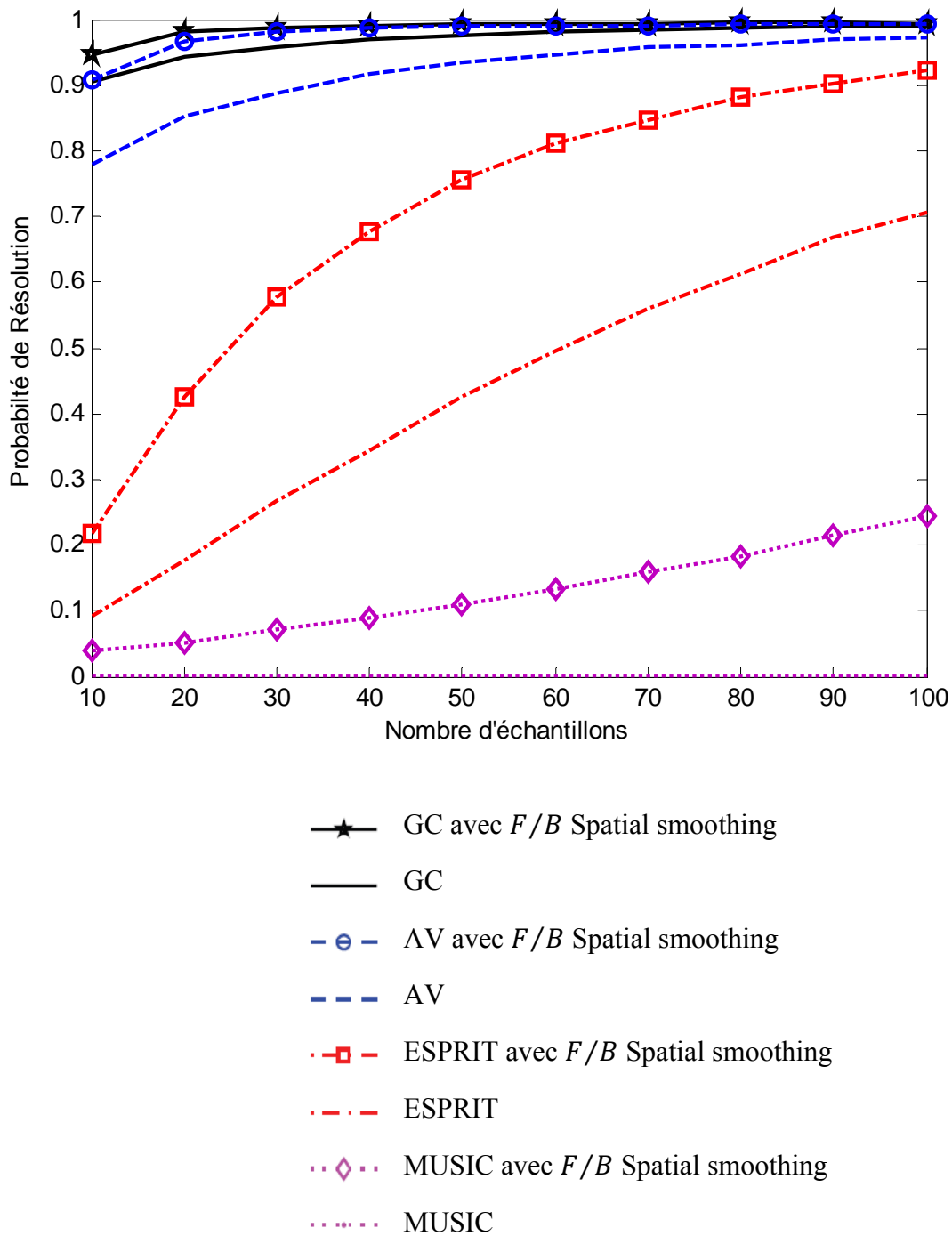


Fig. III.5 Probabilité de résolution en fonction de nombre d'échantillons K (séparation 3° , $SNR = 5dB$, $r = 0.7$)

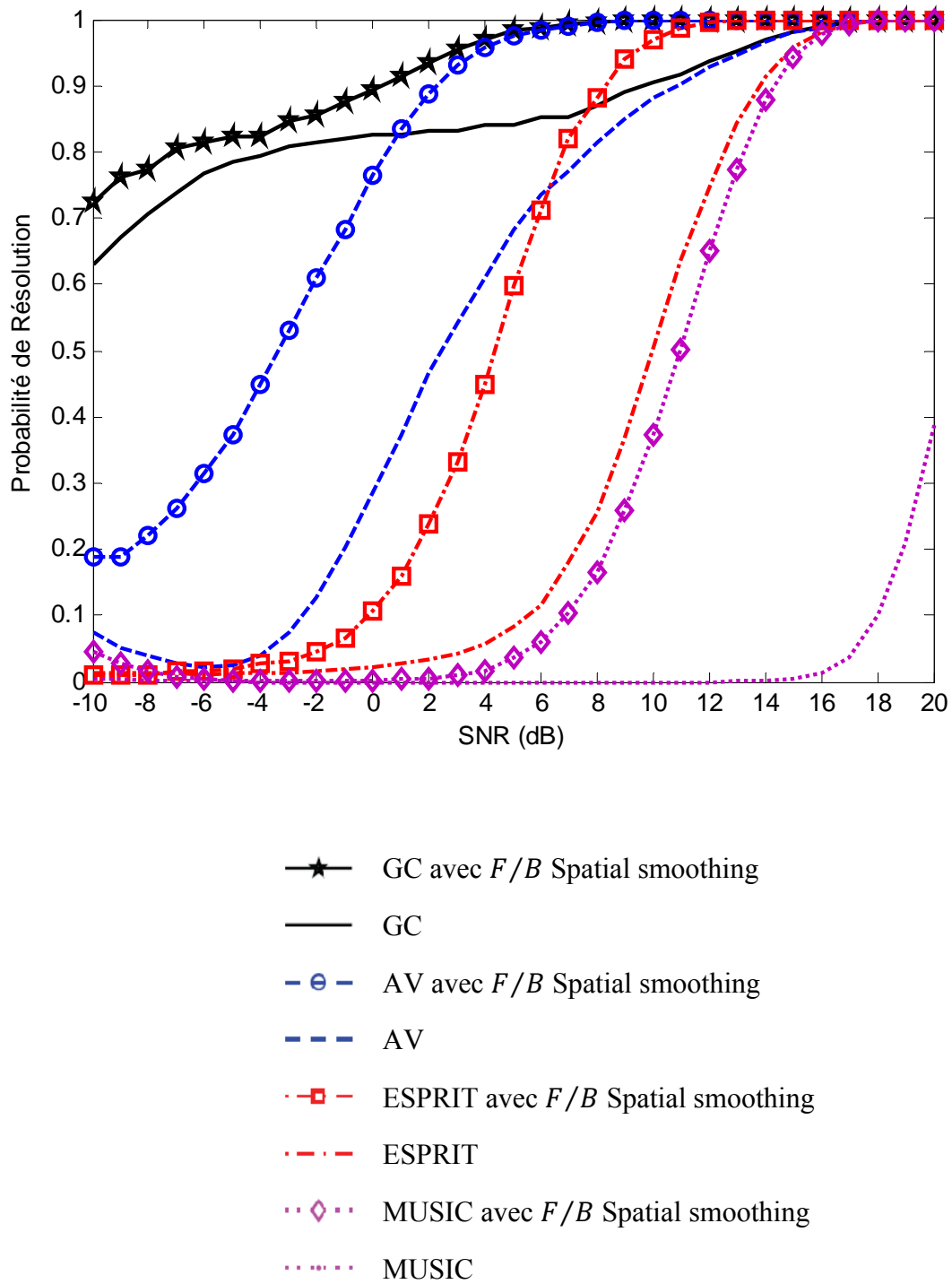


Fig. III.6 Probabilité de résolution en fonction de SNR (séparation 3° , $K = 50$, $r = 0.9$)

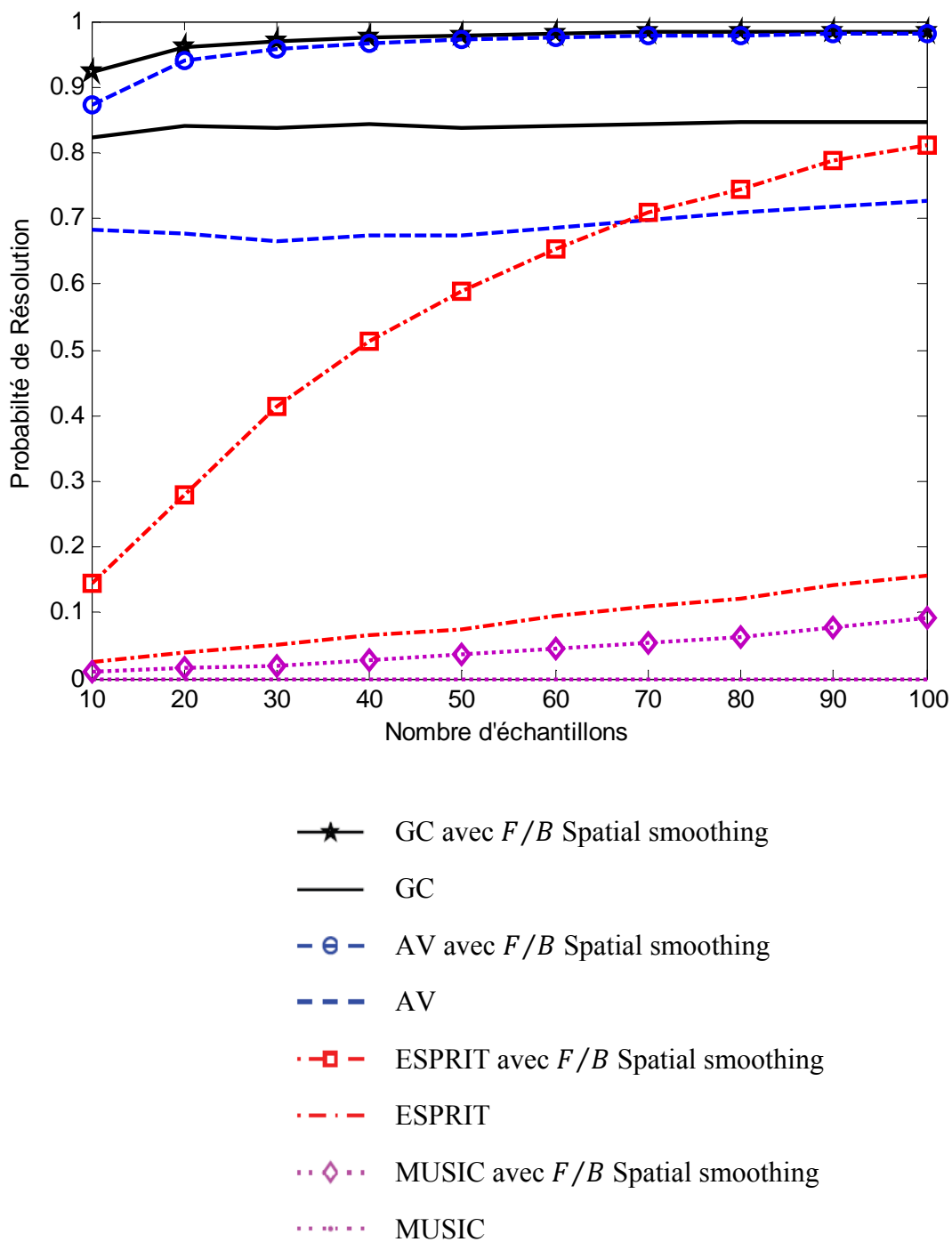


Fig. III.7 Probabilité de résolution en fonction de nombre d'échantillons K (séparation 3° , $SNR = 5dB$, $r = 0.9$)

III.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est la présentation et l'analyse de notre nouvelle méthode à haute résolution pour l'estimation des DDA des sources très proches. Cette méthode est basée sur une version de base de l'algorithme GC très utilisé pour la résolution des systèmes linéaires. Après un panorama sur l'application du Gradient Conjugué pour l'estimation spectrale et le traitement d'antenne, nous avons constaté que tous les travaux de recherches réalisés utilisent le GC pour accélérer le calcul de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des données collectées. Une autre méthode pour la localisation des sources basée sur l'algorithme AV, partageant le même sous-espace de Krylov avec l'algorithme GC, a été proposée. D'où l'idée d'étendre les mêmes procédures de recherches des DDA de la méthode AV pour le Gradient Conjugué. Mais cette fois-ci le GC avec ses propres gradients contribuent à l'estimation des DDA, ce qui n'était pas le cas pour les travaux de recherches déjà cités.

Après l'extraction du sous-espace signal par Le GC, une fonction de localisation a été utilisée avec ce nouveau sous-espace signal en se basant sur le principe de réduction du rang. Par la suite, Nous avons établi la relation entre les deux fonctions de localisation de l'algorithme AV et l'algorithme GC. Enfin, plusieurs comparaisons ont montré l'amélioration apportée par le Gradient Conjugué par rapport à l'algorithme AV et les méthodes de sous-espace classiques MUSIC et ESPRIT.

CHAPITRE IV

METHODE BASEE SUR UN SEUL ECHANTILLON POUR LA CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE PROJECTION

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'une des méthodes utilisée en traitement d'antenne est la construction d'une matrice de projection basée sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des signaux reçus. Cette matrice est souvent formée à partir de sous-espace bruit engendré par les vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres, ou par l'espace orthogonal au sous-espace signal engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres dominantes. Nous proposons, dans ce quatrième chapitre, l'utilisation d'une approche basée sur un seul vecteur d'observations pour la construction de la matrice de projection. Nous montrons l'efficacité de cette méthode pour la réjection des interférences enregistrées sur une antenne rectiligne. Nous montrons également sa performance pour l'estimation de l'azimut et l'élévation à partir des signaux captés par une antenne à deux dimensions.

Dans la première partie, nous allons étudier l'application de l'approche d'un seul échantillon pour la formation des voies. Cette partie commencera par une introduction et une contribution. Nous décrivons ensuite le modèle des signaux reçus par une antenne sous l'hypothèse de la présence d'une seule cible et plusieurs interférences, ainsi le concept de filtrage spatial optimal. Après la présentation de la méthode SMI et EC, nous présentons une nouvelle méthode pour la réjection des interférences basée sur un seul échantillon. Nous terminons cette partie par des simulations et une conclusion.

Dans la deuxième partie, nous consacrons notre étude sur l'application de l'approche d'un seul échantillon pour l'estimation des directions d'arrivée des signaux enregistrés par une antenne rectangulaire. En premier temps, nous allons décrire le modèle des signaux captés par un ensemble de capteurs distribués de façon planaire. Ensuite, nous proposons une nouvelle méthode pour l'estimation de l'azimut et l'élévation. Les simulations sont conduites sur des données synthétiques afin de montrer l'efficacité de cette nouvelle approche.

Première partie

Suppression d'interférences basée sur un seul échantillon

IV.1 Introduction et contribution

Le traitement d'antenne est la discipline qui utilise un réseau de capteurs répartis dans l'espace pour recevoir des signaux provenant de différentes sources. Son principe est d'exploiter les caractéristiques spatiales des signaux reçus afin d'en extraire de l'information. Ainsi, le réseau de capteurs effectue un échantillonnage spatial d'un champ d'ondes (pouvant être de nature acoustique ou électromagnétique) et un traitement est appliqué sur les échantillons formés. Généralement, des signaux perturbateurs (interférences) viennent s'ajouter au signal d'intérêt. Comme leurs directions d'arrivée sont la plupart du temps différentes, il est possible de les séparer par filtrage spatial appelé souvent formation de voies (Beamforming).

La formation de voies pour une antenne de plusieurs capteurs est une méthode efficace pour supprimer les interférences dont les angles d'arrivée sont différents de la direction souhaitée. Les principaux domaines d'utilisation de la formation de voies sont les systèmes radar, le sonar, l'acoustique, la sismologie et les systèmes de communication en raison de sa capacité d'annuler automatiquement les interférences des données reçues [VB88, KV96, Nai01, Tre02]. Les algorithmes de formation de voies sont conçus pour optimiser certains critères spécifiques, tel que le critère de Minimum Variance Distortionless Response (MVDR), le critère de Minimum Mean Square Error (MMSE) et le critère de Maximum Signal to Interference plus Noise Ratio (MSINR) [MM80]. Lorsque l'optimal d'un critère peut être atteint par un algorithme, ce dernier est qualifié d'optimal au sens du critère considéré.

La technique la plus largement utilisée pour concevoir des algorithmes adaptatifs de la formation de voies est de choisir une série de poids pour minimiser la puissance résultante de bruit, tout en imposant une contrainte de non distorsion du signal utile venant d'une direction désirée. L'optimisation de ce critère exige la connaissance des statistiques de second ordre du bruit et la matrice de covariance des interférences. Cependant, dans la pratique, la matrice de

covariance de bruit et des interférences doit être estimée à partir des données enregistrées par l'antenne. Une simple implémentation du filtre spatial (vecteur de pondération) consiste à multiplier l'inverse de la matrice de covariance estimée par le vecteur source désiré. Cette implémentation est connue sous le nom SMI (Sample Matrix Inversion) et a été étudiée pour la première fois dans [BR73, RMB74]. Dans l'article historique [RMB74], Sous l'hypothèse que les vecteurs d'observations sont complexes Gaussiens indépendants stationnaires au second ordre et identiquement distribués (i.i.d), les auteurs ont déduit une règle pour le choix du nombre d'échantillons à utiliser dans l'estimation de la matrice de covariance. Cette règle stipule que le nombre d'échantillons nécessaires pour être à 3 dB de l'optimum est égal au double du nombre d'antenne ($2M$). En fonction de la durée de stationnarité de l'environnement, un nombre plus ou moins important d'échantillons peut être utilisé, conduisant à des estimées plus ou moins précises de la matrice de covariance de bruit. Un des inconvénients majeurs de l'algorithme SMI est le grand support de données nécessaire pour le calcul du vecteur de pondération. Cet inconvénient est dû aux lobes secondaires de la réponse du SMI qui sont fluctuants et élevés [Car88]. Toutefois, si moins d'échantillons sont disponibles et le SMI est utilisé, les performances se dégradent.

Pour remédier à ce problème, plusieurs algorithmes adaptatifs appelés méthodes de réduction de rang ont été proposées pour améliorer la convergence (voir, par exemple, [KT94, GR97, GRS98, HX01]). Parmi ces techniques, nous trouvons la méthode de Eigencanceler (EC) [HB91b, Hai96] qui est basée sur la décomposition de l'espace des vecteurs d'observations complexes de dimension M en sous-espace des interférences et sous-espace de bruit, et calculer par la suite le vecteur de pondération qui appartient au sous-espace bruit avec une contrainte d'orthogonalité entre les deux sous-espaces. Il a été montré dans une analyse asymptotique que cet algorithme peut atteindre les mêmes performances que l'algorithme SMI pour un support de données de $2r$ vecteurs d'observations (où r est le rang de la matrice de covariance d'interférences, en général $\ll M$) avec une faible fluctuation des lobes secondaires [Hai97].

Malgré le fait que les performances de l'algorithme EC sont nettement meilleures par rapport à celles du SMI, la complexité calculatoire impliquée dans le calcul des sous-espaces (de l'ordre de $\mathcal{O}(M^3)$) et le nombre d'échantillons requis présente toujours des imperfections dans une application en temps réel. Bien que les détails diffèrent d'une technique à l'autre, la plupart des filtres proposés supposent les mêmes hypothèses. En particulier, une hypothèse importante dans tous les travaux cités précédemment, c'est que les signaux et les interférences sont stationnaires et non corrélées, dans le cas contraire les algorithmes adaptatifs échouent à

supprimer les brouilleurs. Afin de lutter contre cette dégradation et réduire en même temps la charge de calcul avec un support de données réduit. Nous extrapolons, dans cette partie, le travail de Zhang et al. [ZYL91a, ZYL91b] pour la réjection des interférences. Par conséquent, nous proposons un nouvel algorithme de calcul du vecteur de pondération de la formation de voies par l'utilisation d'un seul échantillon.

IV.2 Formation de voies optimale

Nous nous intéressons dans cette section au problème du filtrage linéaire optimal (optimal dans le sens où la matrice de covariance de bruit plus interférence est connue). L'objectif principal est de maximiser la réponse du filtre au signal utile tout en minimisant sa réponse aux interférences. Pour cela, on introduit maintenant les trois principaux critères d'optimisation des filtres spatiaux. Notons qu'un filtre peut être optimal au sens d'un certain critère mais ne pas l'être au sens d'un autre.

IV.2.1 Modèle des signaux

Considérons une antenne linéaire uniforme (ALU) constituée de M capteurs omnidirectionnels, espacés d'une distance d dans un plan et qui reçoit les ondes provenant de P ($P = 1 + r$, $P < M$) sources à bandes étroites centrées à la même fréquence ν_0 et de longueur d'onde correspondante λ_0 . Nous supposons que le milieu de propagation des ondes est homogène, c'est à dire que la vitesse de propagation est constante. Cette vitesse est notée c . De plus, on suppose que les sources sont suffisamment éloignées de l'antenne, de sorte que l'on peut considérer un modèle d'onde plane. Les rayons reçus par les différents capteurs peuvent ainsi être supposés parallèles. Ces sources sont repérées par les paramètres angulaires $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$ appelés angles d'arrivée ou directions d'arrivée (DDA) des signaux sur l'antenne. L'angle d'arrivée θ_1 de la source désirée (signal utile) est supposé connu et les autres angles d'arrivée $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{r+1}$ des interférences (signaux non désirés) sont supposés inconnus. Les signaux mesurés sur une certaine durée d'observation à la sortie des capteurs subissent une transformée de Fourier. Ainsi, pour une fréquence donnée et pour une mesure ou réalisation donnée du signal (correspondant au temps d'observation considéré), le vecteur de dimension M des signaux reçus à la sortie des capteurs s'écrit

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (\text{IV-1})$$

où

$$\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_{r+1})] \quad (\text{IV-2})$$

est la matrice de dimension $M \times P$ des vecteurs sources $\mathbf{a}(\theta_p)$ définis par

$$\mathbf{a}(\theta_p) = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[1 \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}d \sin \theta_p} \quad \dots \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}d(M-1) \sin \theta_p} \right]^T \quad (\text{IV-3})$$

où $\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_{r+1}]^T \in \mathbb{C}^{P \times 1}$ est un vecteur contenant les amplitudes complexes des sources et $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ est un vecteur de bruit. Les vecteurs sources $\mathbf{a}(\theta_p)$ représentent la réponse complexe de l'antenne à des fronts d'ondes élémentaires arrivant dans des DDA données.

Sous l'hypothèse que le vecteur des amplitudes complexes des sources \mathbf{s} et le vecteur de bruit \mathbf{n} sont des vecteurs aléatoires, stationnaires, centrés et décorrélés, la matrice de covariance de dimension $M \times M$ des signaux reçus sur l'antenne s'écrit

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{xx}^H] = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (\text{IV-4})$$

avec $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{ss}^H]$ de dimension $P \times P$ est la matrice de covariance du vecteur source et $E[\mathbf{nn}^H] = \sigma^2 \mathbf{I}$ est la matrice de covariance du vecteur bruit. \mathbf{I} est la matrice identité de dimension $M \times M$. Nous notons que la corrélation entre les signaux peut être arbitraire. Plus précisément, le signal désiré peut être totalement en corrélation avec les interférences, comme cela se passe dans le cas d'une propagation multi-trajet (specular multi-path propagation) ou un brouillage intelligent (smart jamming).

Afin de simplifier la présentation des différents critères d'optimisation des filtres, nous supposons que les données reçues s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{x} = s_1 \mathbf{a}(\theta_1) + \mathbf{b} \quad (\text{IV-5})$$

où $s_1 \mathbf{a}(\theta_1)$ correspond à la partie signal utile et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ est le bruit total (qui se décomposera par la suite en un terme d'interférences et un terme de bruit). Nous supposons que \mathbf{b} est modélisé par un processus aléatoire complexe stationnaire au second ordre, centré et de matrice de covariance connue égale à \mathbf{R}_b . Le signal de source s_1 peut être modélisé par un processus aléatoire complexe stationnaire au second ordre ou être supposé déterministe mais inconnu. Finalement, en notant $\sigma_s^2 = E[|s_1|^2]$ la puissance du signal utile, la matrice de covariance des données est égale à

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{xx}^H] = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}^H(\theta_1) + \mathbf{R}_b \quad (\text{IV-6})$$

et

$$\mathbf{R}_b = E[\mathbf{bb}^H] = \mathbf{R}_l + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (\text{IV-7})$$

où \mathbf{R}_I est la matrice de covariance des interférences donnée par

$$\mathbf{R}_I = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i) \quad (\text{IV-8})$$

où $\sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, r$ est la puissance de l'interférence et $\mathbf{a}(\theta_i), i = 1, 2, \dots, r$ est le vecteur source associé à la DDA θ_i de l'interférence. L'objectif principal de filtre de réjection est de maximiser la réponse du filtre au signal utile tout en minimisant sa réponse aux interférences. Comme il est montré sur la figure IV.1, une fois que le signal a été numérisé nous appliquons un poids complexe à la sortie de chaque récepteur et nous additionnons le résultat. Nous nous référons à cette procédure comme combinateur linéaire adaptatif [WS85]. Les données $y \in \mathbb{C}$ sont égales à:

$$y = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = s_1 \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_1) + \mathbf{w}^H \mathbf{b} \quad (\text{IV-9})$$

Nous explicitons maintenant les trois principaux critères d'optimisation du filtre spatial.

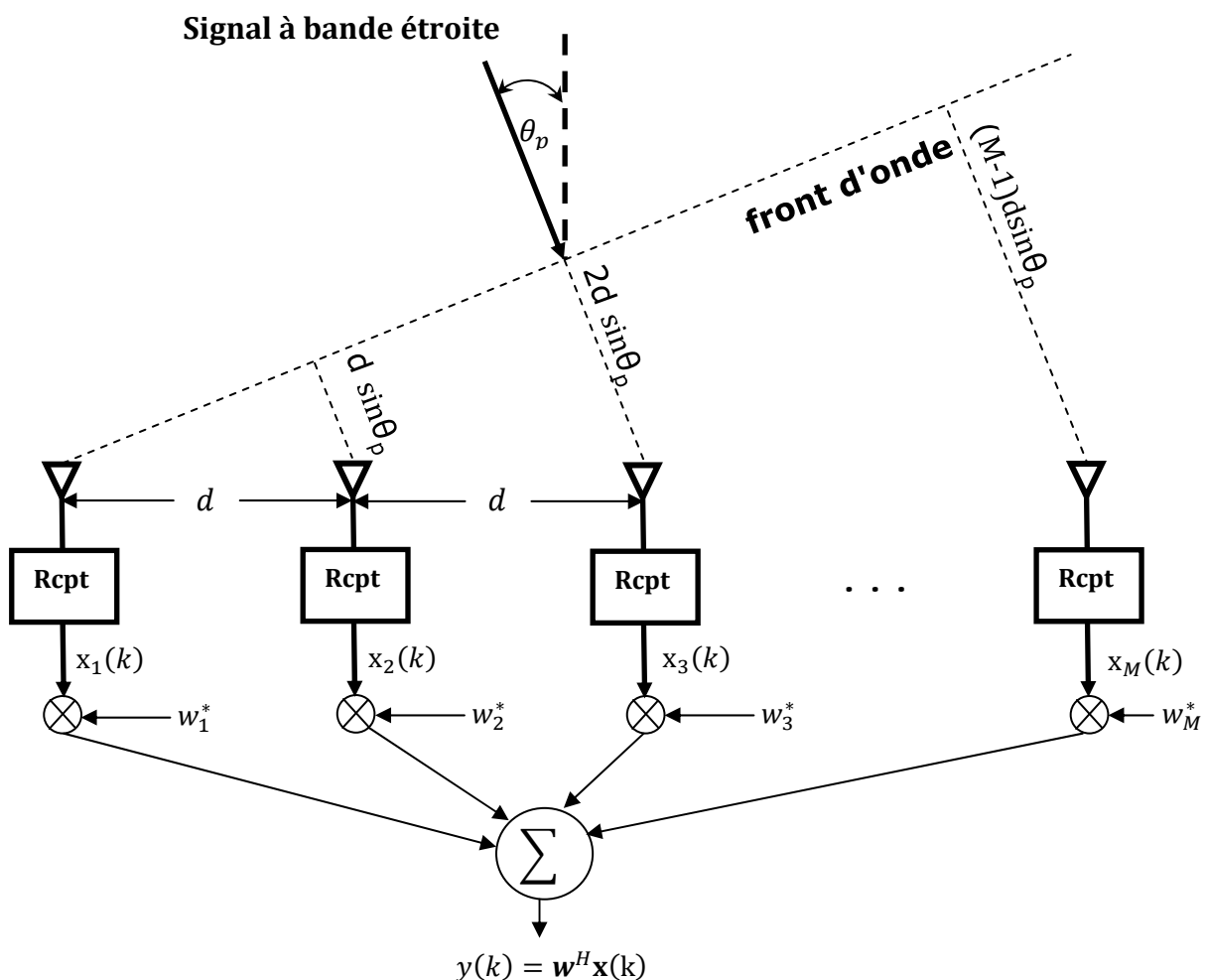


Fig. IV.1 Formation de voies adaptative pour un réseau de capteurs linéaire et uniforme

IV.2.2 Minimum Variance Distortionless Response (MVDR)

Le critère MVDR consiste à rechercher le vecteur de pondération qui minimise la puissance de l'interférence plus bruit en sortie tout en maintenant un gain unité dans la direction souhaitée. Plus précisément, il s'agit de minimiser la variance de bruit

$$E[(\mathbf{w}^H \mathbf{b})^* (\mathbf{w}^H \mathbf{b})] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_b \mathbf{w} \quad (\text{IV-10})$$

sous la contrainte sur le filtrage de la partie utile

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_1) = 1 \quad (\text{IV-11})$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on trouve alors l'expression du filtre optimal au sens du critère MVDR :

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1)} \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1) \quad (\text{IV-12})$$

IV.2.3 Minimum Mean Square Error (MMSE)

Le critère MMSE consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre le signal utile et son estimation par les données filtrées. L'erreur quadratique moyenne a pour expression:

$$E[|s_1 - y|^2] = E[|s_1 - \mathbf{w}^H \mathbf{x}|^2] \quad (\text{IV-13})$$

Le filtre est optimal au sens de la MMSE si l'erreur de projection du signal sur l'espace des données est orthogonale à ses vecteurs. Nous obtenons donc:

$$E[(s_1 - \mathbf{w}^H \mathbf{x})^* \mathbf{x}] = 0 \quad (\text{IV-14})$$

d'où on déduit l'expression du filtre MMSE optimal:

$$\mathbf{w}_{MMSE} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]^{-1} E[s_1^* \mathbf{x}] \quad (\text{IV-15})$$

Le signal utile et le bruit étant supposés décorrélés, nous avons:

$$E[s_1^* \mathbf{x}] = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_1) \quad (\text{IV-16})$$

Puis, en utilisant le lemme d'inversion matricielle sur (IV-15), nous obtenons:

$$E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]^{-1} = \mathbf{R}_b^{-1} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{R}_b^{-1}}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1)} \quad (\text{IV-17})$$

En insérant (IV-16) et (IV-17) dans (IV-15), nous trouvons l'expression finale du filtre MMSE optimal:

$$\mathbf{w}_{MMSE} = \frac{\sigma_s^2}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1)} \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1) \quad (\text{IV-18})$$

IV.2.4 Maximum Signal to Interference plus Noise Ratio (MSINR)

Un des objectifs de la théorie de la détection est de maximiser la probabilité de la détection ou maximiser le rapport signal à bruit. A cet effet, le filtre optimal \mathbf{w}_{opt} peut donc être calculé en maximisant comme fonction objective le rapport signal à interférence plus bruit (SINR) donné par:

$$SINR = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_1)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_b \mathbf{w}} \quad (\text{IV-19})$$

Etant donnée \mathbf{R}_b définie positive, (IV-19) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$SINR = \frac{\sigma_s^2 \left| \mathbf{w}^H \mathbf{R}_b^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_b^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a}(\theta_1) \right|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_b \mathbf{w}} \quad (\text{IV-20})$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient:

$$\begin{aligned} SINR &\leq \frac{\sigma_s^2 (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_b \mathbf{w}) (\mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1))}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_b \mathbf{w}} \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_1) \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1) \end{aligned} \quad (\text{IV-21})$$

Nous aurons l'égalité pour:

$$\mathbf{w}_{MSINR} = \kappa \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1) \quad (\text{IV-22})$$

où κ est une constante arbitraire.

Finalement, les filtres MVDR (IV-12), MMSE (IV-18) et MSINR (IV-22) diffèrent seulement d'un facteur d'échelle. De plus, les filtres MVDR et MMSE sont optimaux au sens du critère MSINR. Dans la suite, on se limite à l'expression MVDR du filtre optimal, les différents filtres optimaux étant proportionnels. Nous nous intéresserons dans la prochaine section à l'implémentation de ce dernier critère. Nous nous limitons à la présentation de deux algorithmes le SMI (Sample Matrix Inversion) qui consiste en une implémentation directe et l'algorithme de sous-espace l'Eigencanceler (EC).

IV.3 Algorithme Sample Matrix Inversion (SMI)

En pratique, la matrice de covariance \mathbf{R}_b est inconnue. Une estimation courante de \mathbf{R}_b à partir d'un ensemble de vecteurs d'observations est donnée par :

$$\hat{\mathbf{R}}_b = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \quad (\text{IV-23})$$

où K représente le nombre d'échantillons disponible pour l'estimation. Sous l'hypothèse où les données spatiales sont modélisées par des échantillons de vecteurs aléatoires gaussiens complexes, i.i.d. (indépendants et identiquement distribués), cette matrice est l'estimée de la matrice de covariance des données au sens du maximum de vraisemblance. Ensuite, cette matrice est directement inversée pour calculer le filtre spatial correspondant. L'algorithme basé sur cet estimateur est appelé Sample Matrix Inversion (SMI) [BR73] et le vecteur de pondération est donné par

$$\mathbf{w}_{SMI} = \hat{\kappa} \hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \mathbf{a}(\theta_1) \quad (\text{IV-24})$$

où $\hat{\kappa}$ est une constante. Pour éviter ce que l'on appelle le self-nulling du signal utile (supprimer le signal désiré), les échantillons utilisés pour l'estimation de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}_b$ ne devront pas contenir le signal utile. Cette condition est vérifiée par l'utilisation d'un filtre spatial pour exclure le signal désiré des échantillons enregistrés par l'antenne.

Pour étudier les performances de cet algorithme, Reed *et al.* [RMB74] ont étudié l'implémentation SMI de la solution MSINR (IV-22) et donnent l'expression du SINR normalisé lorsque les échantillons utilisés dans la matrice ne contiennent pas de signal utile et sont gaussiens, indépendants et identiquement distribués. Dans ce cas, ils ont déduit une règle pour le choix du nombre d'échantillons à utiliser dans l'estimation de la matrice de covariance. Cette règle stipule que le nombre d'échantillons nécessaires pour être à 3 dB de l'optimum est égal à $2M$.

En général, les algorithmes sont choisis selon deux critères: (i) convergence; (ii) coût de calcul. La méthode SMI présente une faible vitesse de convergence: $2M$ échantillons pour un SINR de 3dB au dessous de l'optimal et un coût de calcul élevé $\mathcal{O}(M^3)$. Pour accélérer la convergence, les auteurs dans [HB91b, Hai96, Hai97, GR97] ont proposé des méthodes de sous-espaces basées sur la décomposition en valeurs propres (EVD) de $\hat{\mathbf{R}}_b$. L'algorithme le plus connu basé sur la EVD est l'algorithme de Eigencanceler (EC). Cet algorithme peut réduire le support de données $2r$, où r est le rang de la matrice de covariance d'interférence

pour les mêmes performances que la méthode SMI. L'idée clé est l'exploitation du faible rang de la matrice de covariance d'interférence pour la séparation de l'espace d'observation en deux sous-espaces: le sous-espace interférence et le sous-espace bruit suivi par une projection des observations sur le sous-espace bruit.

IV.4 Algorithme de l'Eigencanceler (EC)

Pour l'annulation des interférences, les signaux ne sont pas traités de la même manière. Le signal désiré doit être gardé tandis que les interférences doivent être supprimées. Il est donc nécessaire, avant n'importe quelle analyse, d'empêcher le signal venant de la direction désirée θ_1 . Ceci permet d'exclure son annulation et de maintenir seulement la contribution des interférences. Pour accomplir ceci, nous suggérons d'employer le schéma fonctionnel de la figure IV.2. Par conséquent, une matrice de blocage $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{(M-1) \times M}$ est convenablement conçue de telle sorte que \mathbf{B} engendre le sous-espace nul de $\mathbf{a}(\theta_1)$, c'est-à-dire:

$$\mathbf{B}\mathbf{a}(\theta_1) = \mathbf{0} \quad (\text{IV-25})$$

La matrice de blocage \mathbf{B} qui exclut le signal désiré des données est obtenue à partir de la relation [HB91b]¹

$$\mathbf{B}\mathbf{a}(\theta) = (e^{j\omega} - e^{j\omega_1})\tilde{\mathbf{a}}(\theta) \quad (\text{IV-26})$$

où $\omega_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta_i$, $\mathbf{a}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ est le vecteur source associé à une DDA θ et $\tilde{\mathbf{a}}(\theta) \in \mathbb{C}^{M-1}$ est identique à $\mathbf{a}(\theta)$ limité à la dimension $(M - 1)$.

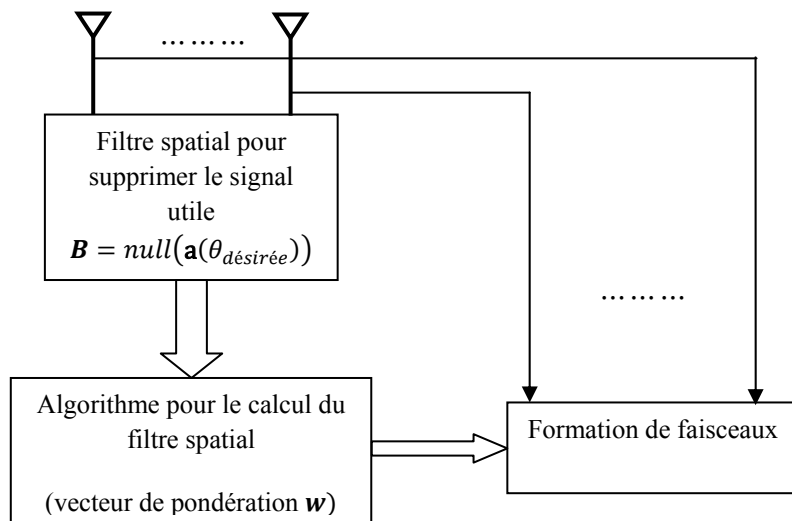


Fig. IV.2 schéma fonctionnel d'un suppresseur d'interférences

¹Pour le blocage de P signaux la matrice de blocage \mathbf{B} est obtenue à partir de l'équation suivante [HB91b]
 $\mathbf{B}\mathbf{a}(\theta) = (e^{j\omega} - e^{j\omega_1})(e^{j\omega} - e^{j\omega_2}) \dots (e^{j\omega} - e^{j\omega_P})\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$ où $\tilde{\mathbf{a}}(\theta) \in \mathbb{C}^{(M-P) \times 1}$

Les éléments de \mathbf{B} peuvent être trouvés de l'équation (IV-26) en égalisant les coefficients des deux polynômes égaux, ce qui donne

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -e^{j\omega_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -e^{j\omega_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -e^{j\omega_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-27})$$

Notons que (IV-27) est équivalent à réaliser une soustraction entre les paires successives de capteurs dans la direction $\theta_1 = 0^\circ$ [GJ82]. Les données observées $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{M-1}$ après filtrage par la matrice de blocage \mathbf{B} peuvent être définies par

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}(\Theta)\tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{B}\mathbf{n} \quad (\text{IV-28})$$

où $\tilde{\mathbf{A}}(\Theta) = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_2), \tilde{\mathbf{a}}(\theta_3), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\theta_{r+1})] \in \mathbb{C}^{(M-1) \times r}$ est la matrice source d'interférences et $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{s}_2 \ \tilde{s}_3 \ \cdots \ \tilde{s}_{r+1}]^T \in \mathbb{C}^r$ est un vecteur contenant les amplitudes complexes altérées des sources où $\tilde{s}_p = (e^{j\omega_p} - e^{j\omega_1})s_p$. La matrice de covariance de l'interférence plus la composante de bruit $\hat{\mathbf{R}}_b \in \mathbb{C}^{(M-1) \times (M-1)}$ est donnée par

$$\hat{\mathbf{R}}_b = \mathbf{B}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{B}^H \quad (\text{IV-29})$$

où $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ est l'estimée de la matrice de covariance des observations enregistrées par l'antenne (y compris le signal utile). Notons que la réduction de dimension de l'espace d'observations à $M - 1$ est imposée par la suppression du signal utile. Nous souhaitons concevoir un combinateur linéaire (un vecteur de pondération complexe $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{M-1}$) pour supprimer les interférences et maintenir le signal utile sans distorsion.

Nous présentons maintenant une méthode de réduction de rang dans laquelle le sous-espace réduit est formé à partir des données. Cette méthode est dénommée EC (Eigencanceler) ou méthode de composante principale (PC). Elle est basée sur la décomposition de l'espace des vecteurs complexes de dimension $M - 1$ (où de dimension M si nous utilisons M cellules secondaires différentes de la cellule primaire de test) en sous-espace des interférences et sous-espace de bruit. La méthode repose sur la décomposition en éléments propres de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_b$

$$\hat{\mathbf{R}}_b = \hat{\mathbf{U}}_I \hat{\mathbf{\Lambda}}_I \hat{\mathbf{U}}_I^H + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{\Lambda}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \quad (\text{IV-30})$$

où $\hat{\mathbf{U}}_I \in \mathbb{C}^{(M-1) \times r}$ est la matrice des vecteurs propres du sous-espace des interférences, $\hat{\Lambda}_I$ la matrice diagonale des valeurs propres associées, $\hat{\mathbf{U}}_n \in \mathbb{C}^{(M-1) \times P-r-1}$ la matrice des vecteurs propres du sous-espace de bruit et $\hat{\Lambda}_n = \sigma^2 \mathbf{I}$. La méthode de EC consiste à obtenir ce vecteur de pondération en résolvant le problème d'optimisation suivant:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_b \mathbf{w} \quad \text{sous les contraintes } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_1) = 1 \text{ et } \hat{\mathbf{U}}_I^H \mathbf{w} = 0 \quad (\text{IV-31})$$

La contrainte additionnelle $\mathbf{U}_r^H \mathbf{w} = \mathbf{0}$ garantit que \mathbf{w} appartient au sous-espace bruit. En minimisant la fonction coût (IV-31), le vecteur de pondération obtenu est donné par [HB91b]

$$\mathbf{w}_{EC} = \hat{\kappa} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{U}}_I \hat{\mathbf{U}}_I^H) \tilde{\mathbf{a}}(\theta_1) \quad (\text{IV-32})$$

où $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1)$ est le vecteur source désiré de dimension $(M-1) \times 1$ et les colonnes de la matrice $\hat{\mathbf{U}}_I \in \mathbb{C}^{(M-1) \times r}$ engendrent le sous espace interférence.

Sur la figure IV.3, nous avons tracé par simulation le spectre du SINR de l'algorithme EC comparé simultanément à celui de SMI et à celui de l'optimal. La comparaison est établit en fonction du support K dans le cas de 3 interférences d' $INR = 30dB$ et un signal utile de $SNR = 10dB$. Le SINR est défini par:

$$SINR = \sigma_s^2 \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_1)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_b \mathbf{w}} \quad (\text{IV-33})$$

L'algorithme SMI présente une convergence lente par rapport à l'EC. Par exemple pour un SINR de -3dB au dessous de l'optimal il faut $K_{3dB} \cong 2M$ pour le SMI et $K_{3dB} \cong 2r$ pour le EC. Une des mesures de performance communément utilisée pour l'évaluation des algorithmes de formation de voies est la réponse en angle du filtre spatial appelé diagramme spatial, ou simplement le beampattern en anglais, définie comme suit:

$$Beam(\theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2 \quad \theta \in [-90^\circ, 90^\circ] \quad (\text{IV-34})$$

Idéalement, la réponse du filtre $Beam(\theta)$ doit être à gain maximal en direction de la cible présumée (signal utile) et zéro dans la direction des interférences (brouilleurs). La figure IV.4, illustre la réponse de filtre EC comparé à ceux du filtre SMI et l'optimal en présence de trois brouilleurs à -30° , 30° et 60° et d'une cible à $\theta_1 = 0^\circ$. Nous constatons une parfaite annulation des interférences et l'extraction de la cible. Nous remarquons pour un faible support de données $K = 1M$ (figure (a)) une annulation des interférences mais avec une distorsion des lobes secondaires et du lobe principal du filtre SMI par comparaison au filtre

EC et l'optimal. Une amélioration des performances du filtre SMI est constatée pour un support de données un peu élevé $K = 2M$ (voir la figure IV.4 (b)) mais toujours de performances moindres par rapport au filtre EC.

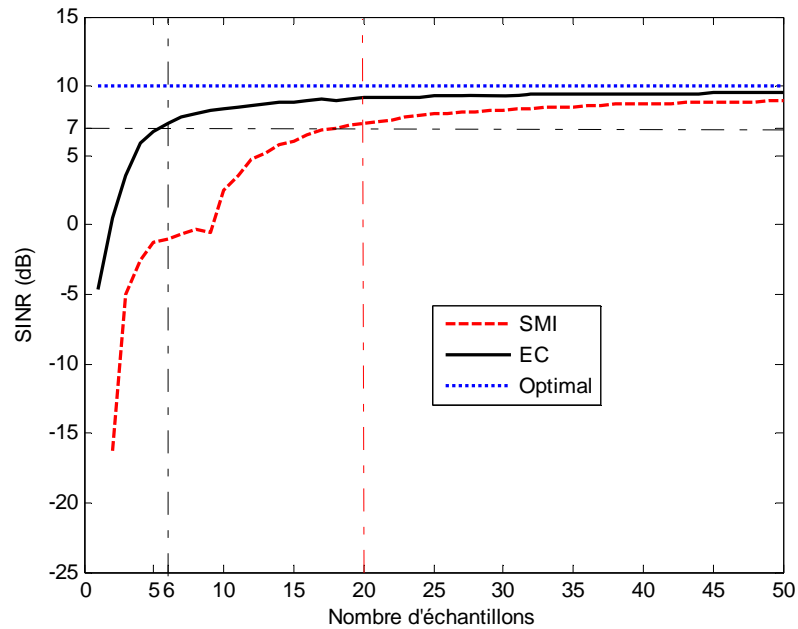


Fig. IV.3 Comparaison des Spectres de SINR des algorithmes EC et SMI par rapport à l'optimal en fonction de nombre d'échantillons pour $M = 10$ en présence de 3 brouilleurs

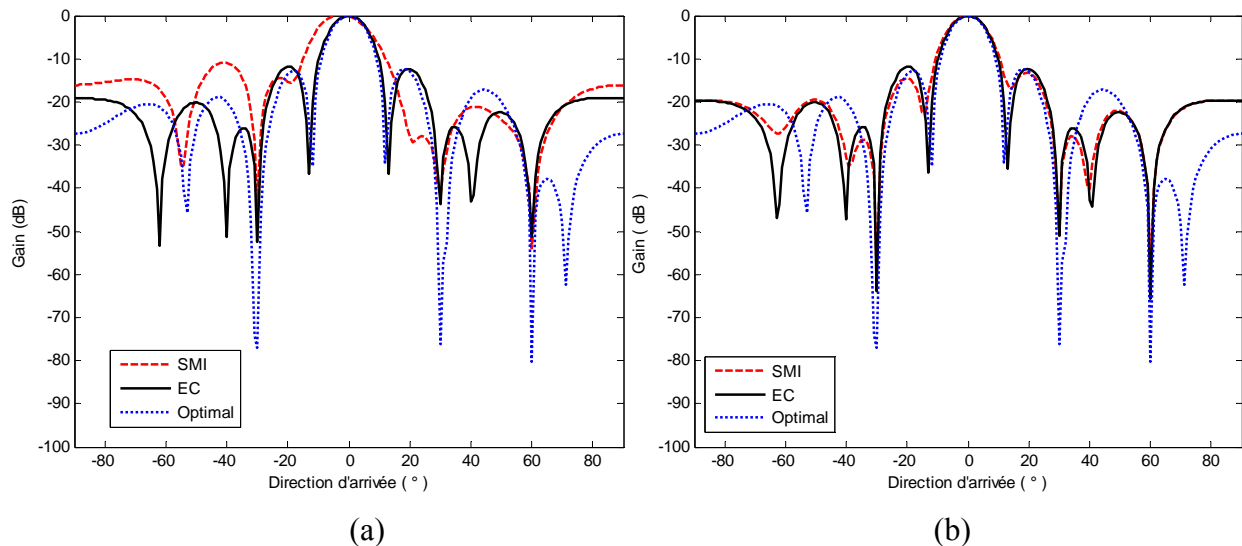


Fig. IV.4 Comparaison des diagrammes spatiaux des algorithmes SMI et EC par rapport à l'optimal pour $M=10$ en présence de 3 brouilleurs (a) $K = 10$ (b) $K = 20$

Malgré le fait que les performances de l'algorithme EC sont nettement meilleures que celles du SMI, sa complexité calculatoire reste élevée, de l'ordre de $\mathcal{O}(M^3)$. Afin de pallier à ce problème, nous proposons dans la section suivante l'application d'une simple matrice de projection non basée sur la décomposition en valeurs propres ni sur un support de données élevé.

IV.5 Formation de voies basée sur un seul échantillon

L'inconvénient principal de la méthode EC est le coût élevé de calcul nécessaire au développement de la matrice de projection, en raison de la décomposition en valeurs propres (EVD) de la matrice de covariance estimée. Le besoin d'un grand support d'échantillons (nombre d'échantillons pour estimer la matrice de covariance) et le problème de la nature non stationnaire inhérente des processus, nous poussent à employer une méthode de calcul simple de la matrice de projection [ZYL91a, ZYL91b] pour supprimer les interférences. Cette méthode est fondée uniquement sur un seul échantillon des données spatiales. La structure de filtrage adapté pour mener cette nouvelle méthode est basée sur la structure illustrée sur la figure IV.2. Après filtrage par la matrice de blocage \mathbf{B} , l'échantillon enregistré par le $m^{\text{ème}}$ capteur est donné par:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_m = \tilde{\mathbf{x}}_m = \sum_{i=2}^{r+1} \tilde{s}_i e^{j(m-1)\omega_i} + \tilde{\mathbf{n}}_m \quad (\text{IV-35})$$

Définissons les r vecteurs suivants:

$$\mathbf{h}_l = [h_{l0} \quad h_{l1} \quad \cdots \quad h_{lL-1}]^T \quad l = 1, 2, \dots, r \quad (\text{IV-36})$$

où

$$h_{ln} = \sum_{m=L}^{M-1} \tilde{x}_{m-l} \tilde{x}_{m-n}^* + \tilde{x}_{m-L+l+1}^* \tilde{x}_{m-L+n+1} \quad (\text{IV-37})$$

En fait, le vecteur \mathbf{h}_l est constitué en effectuant un lissage spatial en amont et en aval (Forward and backward spatial smoothing) des signaux sur $(M-L)$ sous-réseaux ($M-L$ antennes), chacun est composé de L capteurs $1 \leq L \leq M-1$. Pour un rapport interférence sur bruit (INR) élevé, l'équation (IV-37) peut être approximée par:

$$h_{ln} \cong \sum_{m=L}^{M-1} \left(\sum_{i=2}^{r+1} \sum_{k=2}^{r+1} \tilde{s}_i \tilde{s}_k^* e^{j(m-1)\omega_i} e^{-jl\omega_i} e^{-j(m-1)\omega_k} e^{jn\omega_k} + \right. \\ \left. \sum_{i=2}^{r+1} \sum_{k=2}^{r+1} \tilde{s}_i^* \tilde{s}_k e^{-j(m-L)\omega_i} e^{-jl\omega_i} e^{j(m-L)\omega_k} e^{jn\omega_k} \right) \quad (\text{IV-38})$$

De manière compacte:

$$h_{ln} \cong \sum_{k=2}^{r+1} \left(\sum_{i=2}^{r+1} v_{ki} e^{-jl\omega_i} \right) e^{jn\omega_k} \quad n = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{IV-39})$$

où

$$v_{ki} = \sum_{m=L}^{M-1} (\tilde{s}_i \tilde{s}_k^* e^{j(m-1)\omega_i} e^{-j(m-1)\omega_k} + \tilde{s}_i^* \tilde{s}_k e^{-j(m-L)\omega_i} e^{j(m-L)\omega_k}) \quad (\text{IV-40})$$

Remplaçant (IV-39) dans (IV-36) et après quelques manipulations algébriques nous obtenons:

$$\mathbf{h}_l \cong [\mathbf{a}_L(\theta_2) \quad \mathbf{a}_L(\theta_3) \quad \dots \quad \mathbf{a}_L(\theta_{r+1})] \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^{r+1} v_{1i} e^{-jl\omega_i} & \sum_{i=2}^{r+1} v_{2i} e^{-jl\omega_i} & \dots & \sum_{i=2}^{r+1} v_{ri} e^{-jl\omega_i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{IV-41})$$

où $\mathbf{a}_L(\theta_p) = [1, e^{j\omega_p}, \dots, e^{j(L-1)\omega_p}]^T$ est le vecteur source associé à la $p^{\text{ème}}$ source de dimension $L \times 1$, et à partir de l'équation (IV-41) nous obtenons:

$$\mathbf{h}_l \cong \sum_{p=2}^{r+1} \alpha_{pl} \mathbf{a}_L(\theta_p) \quad l = 1, 2, \dots, r \quad (\text{IV-42})$$

où

$$\alpha_{pl} = \sum_{k=2}^{r+1} v_{pk} e^{-jl\omega_k} \quad (\text{IV-43})$$

Le vecteur \mathbf{h}_l est une combinaison linéaire des $\mathbf{a}_L(\theta_p)$, $p = 2, 3, \dots, r+1$. Nous concluons que les vecteurs $\mathbf{h}_l, l = 1, 2, \dots, r$, appartiennent approximativement au sous-espace d'interférences tant que le INR est élevé. Nous pouvons écrire donc:

$$\text{span}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_r\} \cong \text{span}\{\mathbf{a}_L(\theta_2), \mathbf{a}_L(\theta_3), \dots, \mathbf{a}_L(\theta_{r+1})\} \quad (\text{IV-44})$$

Un sous-espace orthonormé $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_r]$ avec $\mathbf{q}_l \in \mathbb{C}^{L \times 1}, l = 1, 2, \dots, r$, peut être obtenu par l'application de la procédure d'orthogonalisation de Gramme-Schmidt aux vecteurs $\mathbf{h}_l, l = 1, 2, \dots, r$. Le vecteur de pondération de la formation de voies est obtenue alors par:

$$\mathbf{w}_{proposé} = (\mathbf{I}_L - \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H) \mathbf{a}_L(\theta_1) \quad (\text{IV-45})$$

où \mathbf{I}_L est la matrice identité de dimension $L \times L$ et $\mathbf{a}_L(\theta_1)$ est le vecteur source du signal désiré de dimension $L \times 1$.

IV.6 Résultats et simulations

Dans cette section, nous donnons quelques résultats de simulation pour illustrer l'efficacité de l'algorithme proposé, basé sur un seul échantillon. Une antenne linéaire et uniforme contient $M = 10$ capteurs disposés de façon rectiligne est employée dans toutes les

simulations. Nous considérons qu'il y a quatre signaux empiétant sur le réseau d'antenne, une cible (signal utile) dans la direction du lobe principal à 0° avec la présence de trois brouilleurs définis par leurs directions d'arrivée et les rapports interférences sur bruit INR comme suit: $(-30^\circ, 30dB)$, $(30^\circ, 30dB)$ et $(60^\circ, 30dB)$.

Dans le premier scénario de la simulation nous présentons les performances de la méthode proposée sans matrice de blocage. Dans la figure IV.5 nous considérons le cas où le signal désiré est de faible puissance avec la présence de trois brouilleurs non-corrélés entre eux-mêmes et avec le signal utile. Nous pouvons clairement noter la réjection des trois interférences avec une légère altération du signal désiré. Ceci est expliqué par le fait que le signal désiré de faible puissance s'est trouvé dans le sous-espace bruit. Cependant, dans le cas où le signal utile est de forte puissance, comme le montre la figure IV.6, les deux méthodes atténuent les quatre signaux (signal désiré y compris). Dans ce cas le signal utile est considéré comme une interférence. Il est alors nécessaire d'enlever le signal désiré des données collectées pour empêcher sa rejection. Cette opération est réalisée par un filtre spatial calculé par rapport à la direction de la cible à détecter.

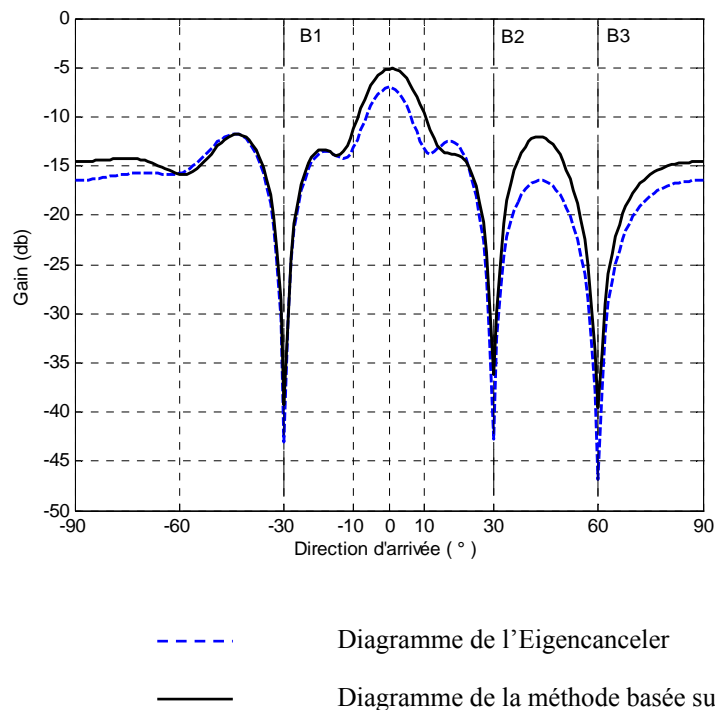


Fig. IV.5 Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) sans blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 0 \text{ dB}$, 3 interférences non corrélées avec un $INR = 30 \text{ dB}$

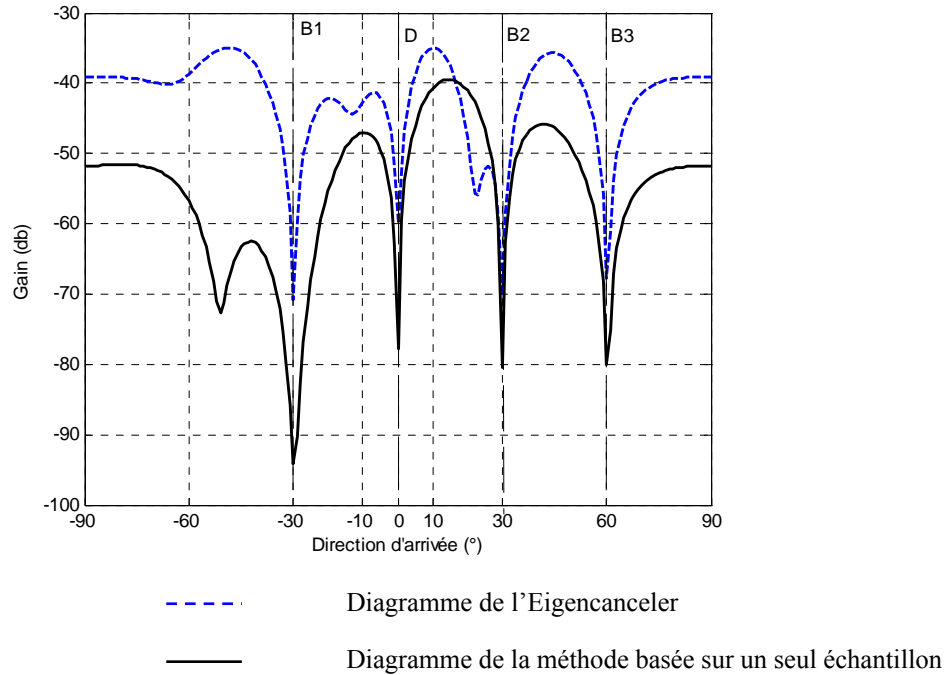


Fig. IV.6 Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) sans blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20 \text{ dB}$, 3 interférences non corrélées avec un $INR = 30 \text{ dB}$

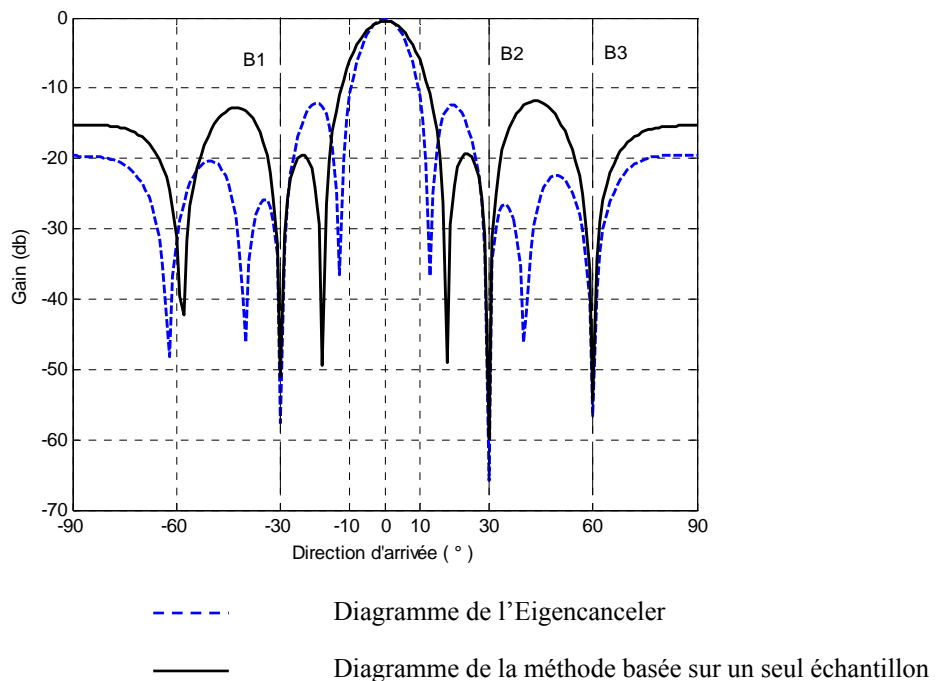


Fig. IV.7 Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) avec blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20 \text{ dB}$, 3 interférences non corrélées avec un $INR = 30 \text{ dB}$

Nous considérons maintenant le même scénario mais avec un blocage du signal désiré par l'utilisation de la matrice de blocage \mathbf{B} comme elle est définie en (IV-27). Sur la figure IV-7, nous remarquons clairement la rejection de chacun des trois brouilleurs tandis que le signal désiré est maintenu. Il est logique de voir que la largeur du lobe principal de l'algorithme EC est plus petite que celle de la méthode proposée car l'ouverture du réseau a été réduite à cause de l'utilisation de $(N - L)$ sous-réseaux.

Dans le deuxième scénario, nous examinons le cas de la présence des brouilleurs entièrement corrélés (cohérents) entre eux-mêmes et avec le signal désiré. La figure IV.8, montre que la réjection des interférences par la méthode proposée est meilleure que celle fournie par l'algorithme EC dans le cas des signaux cohérents. Ceci est expliqué par le fait que la méthode proposée inclut un processus de lissage spatial. Ce processus sert à décorrélérer les signaux corrélés et améliore ainsi les performances de la méthode proposée qui n'est pas le cas dans la méthode de l'Eigencanceler.

Finalement, dans le troisième scénario nous gardons le même scénario que le second, mais le brouilleur arrivant de $\theta = -30^\circ$ est considéré non-corrélé avec les trois autres signaux (source désirée et les deux brouilleurs). Comme il est illustré sur la figure IV.9 l'algorithme proposé présente des pics de très fortes atténuations dans la direction de l'arrivée de tous les brouilleurs.

IV.7 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté une annulation significative d'interférences en utilisant une antenne linéaire et uniforme dans le cas d'un seul échantillon. La méthode proposée ne calcule pas la matrice de covariance ou sa décomposition en valeurs propres. Elle emploie seulement un seul échantillon des données spatiales. Par conséquent la méthode présente certains avantages que nous pouvons résumer par:

- 1) complexité calculatoire réduite.
- 2) réduire les besoins en support de données nécessaires pour le calcul du vecteur de pondération.
- 3) permettre des statistiques arbitraires de signal et d'interférences: non stationnaire et cohérent.

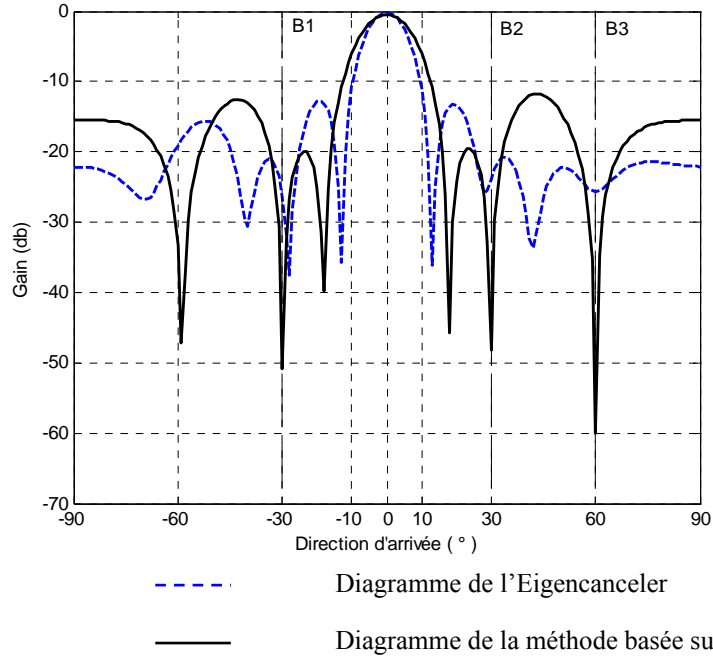


Fig. IV.8 Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) avec blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20$ dB, 3 interférences cohérentes avec un $INR = 30$ dB

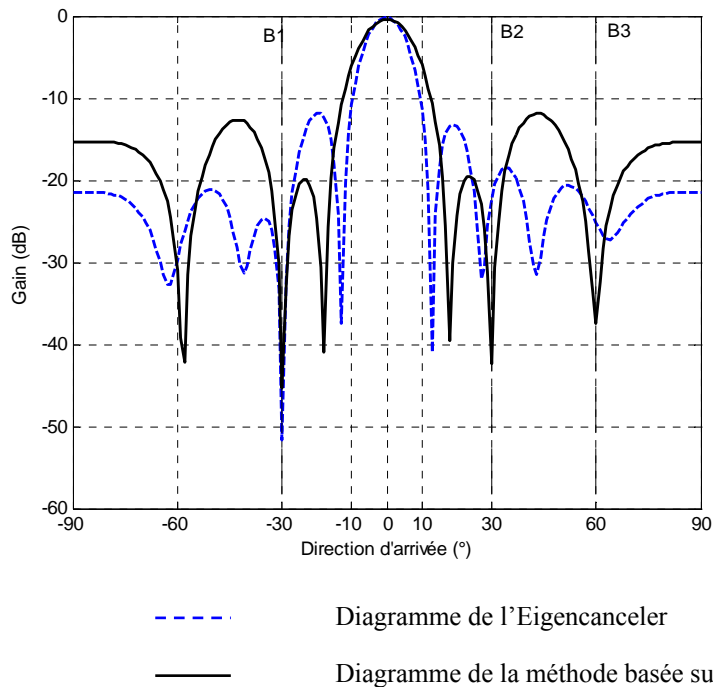


Fig. IV.9 Diagrammes spatiaux de la méthode basée sur un seul échantillon ($L = 7$) et de l'Eigencanceler ($K = 2M$) avec blocage du signal utile, signal utile à $\theta = 0^\circ$ avec $SNR = 20$ dB, 1 interférence non corrélée ($-30^\circ, 30$ dB) et 2 interférences cohérentes ($30^\circ, 30$ dB) et ($60^\circ, 30$ dB)

Deuxième partie

Méthode de projection basée sur un seul échantillon pour l'estimation de l'azimut et l'élévation

IV.8 Introduction:

Les techniques de haute résolution les plus utilisées pour la localisation de sources étroitement espacés sont les méthodes de sous-espaces comme l'algorithme MUSIC [Sch86]. Malgré leurs bonnes performances, ces techniques ne sont pas adéquates pour une application en temps réel en raison de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance, qui souffre d'un coût de calcul élevé. Bien que la généralisation de ces techniques à l'estimation des DDA à deux dimensions en utilisant un réseau rectangulaire est relativement simple et a reçu beaucoup d'attention dans la littérature [YLC89, Sek98, PB02], sa complexité calculatoire et les coûts relatifs au stockage sont également augmenté en raison de la procédure de recherche des pics en deux dimensions. Afin de remédier à ce dernier problème Yeh et *al.* [YLC89] ont proposé une approche simple de calcul basée sur une recherche monodimensionnel selon les lignes et les colonnes de l'antenne rectangulaire, mais cette approche utilise toujours des sous-espaces formés de la décomposition propre de la matrice de covariance estimée à partir de plusieurs observations spatiales.

Dans cette deuxième partie, nous proposons une nouvelle approche sous-espace pour l'estimation de l'azimut et l'élévation en utilisant une antenne rectangulaire et uniforme. Cette approche comme le travail de Yeh et *al.* consiste à remplacer la fonction de localisation de deux dimensions par deux fonctions de localisation monodimensionnelles suivie par une procédure de vérification. Les deux fonctions de localisation sont fondées sur des matrices de projection formées à partir d'un seul échantillon selon les lignes et les colonnes de l'antenne rectangulaire. Dans la prochaine section nous présentons le problème de l'estimation des directions d'arrivée en deux dimensions l'azimut et l'élévation de sources supposées lointaines à partir des signaux mesurés sur un réseau rectangulaire de capteurs.

IV.9 Modèle des observations

Considérons une antenne rectangulaire et uniforme constituée de $M \times D$ capteurs identiques et omnidirectionnels avec un espacement d_x dans la direction de l'axe X et d_y dans la direction de l'axe Y comme est montré sur la figure IV.10. Cette antenne est utilisée pour recevoir les émissions de P sources lointaines à bande étroite de longueur d'onde λ_0 . Ces sources sont repérées par leurs directions d'arrivée $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2), \dots, (\theta_P, \phi_P)$ qui sont mesurées par rapport au plan contenant le réseau de capteurs. Sans perte de généralité, nous supposons que $d_x = d_y = \frac{\lambda_0}{2}$. Nous supposons de plus que le nombre de sources est strictement inférieur au nombre de capteurs $P < M$ et $P < D$. En utilisant la représentation complexe du signal, le signal reçu au $md^{\text{ème}}$ capteur (situé à l'intersection de la $m^{\text{ème}}$ ligne et la $d^{\text{ème}}$ colonne du réseau) peut s'écrire sous la forme standard suivante

$$x_{md} = \sum_{p=1}^P s_p e^{j\pi((m-1)u_p + (d-1)v_p)} + n_{md} \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (\text{IV-46})$$

$$d = 1, 2, \dots, D$$

où s_p représente l'amplitude complexe du $p^{\text{ème}}$ signal, $u_p = \sin \theta_p \cos \phi_p$, $v_p = \sin \theta_p \sin \phi_p$ et n_{md} est le bruit blanc additif au $(m, d)^{\text{ème}}$ élément du réseau.

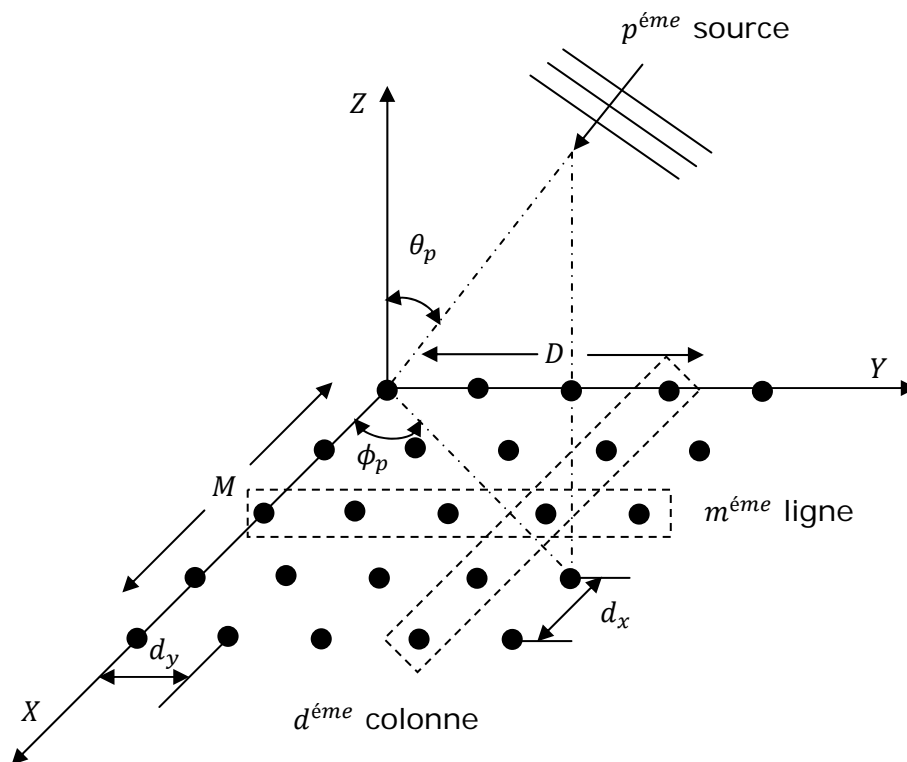


Fig. IV.10 réseau rectangulaire de $M \times D$ capteurs

Le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{MD \times 1}$ des signaux reçus à la sortie du réseau rectangulaire peut s'écrire:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_M^T]^T = \sum_{p=1}^P s_p \mathbf{a}(\theta_p, \phi_p) + \mathbf{n} \quad (\text{IV-47})$$

où $\mathbf{x}_m \in \mathbb{C}^{D \times 1}$, $m = 1, 2, \dots, M$, sont les vecteurs reçus à la $m^{\text{ème}}$ ligne et $\mathbf{a}(\theta_p, \phi_p) \in \mathbb{C}^{MD \times 1}$ est le vecteur source associé à la DDA (θ_p, ϕ_p) défini comme

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta_p, \phi_p) &= [\mathbf{a}^T(v_p), e^{j\pi u_p} \mathbf{a}^T(v_p), \dots, e^{j\pi(M-1)u_p} \mathbf{a}^T(v_p)]^T \\ &= \mathbf{a}(u_p) \otimes \mathbf{a}(v_p) \end{aligned} \quad (\text{IV-48})$$

avec $\mathbf{a}(u_p) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ et $\mathbf{a}(v_p) \in \mathbb{C}^{D \times 1}$ sont les vecteurs sources associés respectivement à la $m^{\text{ème}}$ ligne et la $d^{\text{ème}}$ colonne donnés par

$$\mathbf{a}(u_p) = [1, e^{j\pi u_p}, \dots, e^{j\pi(M-1)u_p}]^T \quad (\text{IV-49})$$

$$\mathbf{a}(v_p) = [1, e^{j\pi v_p}, \dots, e^{j\pi(D-1)v_p}]^T \quad (\text{IV-50})$$

Dans la suite, nous définissons les vecteurs des signaux $\mathbf{x}_m \in \mathbb{C}^{D \times 1}$ et $\mathbf{x}_d \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ reçus par la $m^{\text{ème}}$ ligne et la $d^{\text{ème}}$ colonne du réseau comme suit

$$\mathbf{x}_m = [x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mD}]^T = \sum_{p=1}^P s_p e^{j\pi(m-1)u_p} \mathbf{a}(v_p) + \mathbf{n}_m \quad (\text{IV-51})$$

$$\mathbf{x}_d = [x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{Md}]^T = \sum_{p=1}^P s_p e^{j\pi(d-1)v_p} \mathbf{a}(u_p) + \mathbf{n}_d \quad (\text{IV-52})$$

où $\mathbf{n}_m \in \mathbb{C}^{D \times 1}$ et $\mathbf{n}_d \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ sont respectivement les vecteurs bruit de la $m^{\text{ème}}$ ligne et la $d^{\text{ème}}$ colonne du réseau. La mise du signal reçu sous une forme plus compacte nous donne

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\Theta, \Phi) \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (\text{IV-53})$$

où

$$\mathbf{A}(\Theta, \Phi) = [\mathbf{a}(\theta_1, \phi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \phi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P, \phi_P)] \quad (\text{IV-54})$$

est la matrice source de dimension $MN \times P$ et

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_P]^T \quad (\text{IV-55})$$

est le vecteur signal de dimension $P \times 1$ contenant les amplitudes complexes des sources.

IV.10 Estimation de l'azimut et l'élévation par l'utilisation d'un seul échantillon

L'inconvénient principal de l'estimation 2D basée sur les techniques sous-espaces classiques, tel que l'algorithme MUSIC, est leur complexité calculatoire élevée. Cette complexité est due à la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance estimée et la recherche bidimensionnelle pour déterminer les pics de la fonction de localisation relatifs aux directions d'arrivée à estimer. Dans cette section nous présentons une approche simple à faible coût de calcul pour déterminer une matrice de projection [ZYL91a] basée sur un seul échantillon. L'approche proposée consiste à utiliser deux procédures de recherche monodimensionnelle (1D) suivie par une procédure de vérification bidimensionnelle. Cette méthode nous permet d'économiser assez de temps de calcul comparée à celui de la méthode classique 2D de recherche. L'idée clé est basée sur le fait que les DDA de P sources (θ_p, ϕ_p) peuvent être résolu des fréquences spatiales u_p et v_p si elles sont correctement estimées. Par la suite, l'estimation de u_p et v_p est étudiée respectivement par l'utilisation des lignes et des colonnes de la matrice de données d'un seul échantillon. Nous considérons d'abord l'évaluation de la fréquence spatiale $v_p, p = 1, 2, \dots, P$.

Estimation de la fréquence spatiale v_p

Définissons les P ($P < D$) vecteurs suivants [ZYL91a]

$$\mathbf{h}_l^m = [h_{l0}^m \quad h_{l1}^m \quad \dots \quad h_{lL_b-1}^m]^T \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (\text{IV-56})$$

où

$$h_{lt}^m = \sum_{d=L_b}^D \mathbf{x}_m(d-l) \mathbf{x}_m^*(d-t) + \mathbf{x}_m^*(d-L_b+l+1) \mathbf{x}_m(d-L_b+t+1) \quad (\text{IV-57})$$

En fait, le vecteur \mathbf{h}_l^m est formée en effectuant un lissage spatial en amont et en aval des signaux sur $(D - L_b + 1)$ sous-réseaux sur la $m^{\text{ème}}$ ligne de l'antenne rectangulaire, chacun est composé de L_b capteurs $1 \leq L_b \leq D$. Pour un rapport signal sur bruit (SNR) élevé, l'équation (IV-57) peut être approximée par

$$\mathbf{h}_{lt}^m = \sum_{d=L_b}^D \left\{ \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^P s_p s_k^* e^{j(m-1)\mu_p} e^{j(d-1)\vartheta_p} e^{-jl\vartheta_p} e^{-j(m-1)\mu_k} e^{-j(d-1)\vartheta_k} e^{jt\vartheta_k} + \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^P s_p^* s_k e^{-j(m-1)\mu_p} e^{-j(d-L_b)\vartheta_p} e^{-jl\vartheta_p} e^{j(m-1)\mu_k} e^{j(d-L_b)\vartheta_k} e^{jt\vartheta_k} \right\} \quad (\text{IV-58})$$

où $\mu_p = \pi u_p$ et $\vartheta_p = \pi v_p$. Pour une représentation plus compacte, l'équation (IV-58) peut s'écrire

$$\mathbf{h}_{lt}^m \cong \sum_{k=1}^P \left(\sum_{p=1}^P \beta_{kp}^m e^{-jl\vartheta_p} \right) e^{jt\vartheta_k} \quad t = 0, 1, \dots, L_b - 1 \quad (\text{IV-59})$$

où

$$\beta_{kp}^m = \sum_{d=L_b}^D \left(s_p s_k^* e^{j(m-1)\mu_p} e^{j(d-1)\vartheta_p} e^{-j(m-1)\mu_k} e^{-j(d-1)\vartheta_k} + s_p^* s_k e^{-j(m-1)\mu_p} e^{-j(d-L_b)\vartheta_p} e^{j(m-1)\mu_k} e^{j(d-L_b)\vartheta_k} \right) \quad (\text{IV-60})$$

En substituant l'équation (IV-59) dans (IV-56) et après quelques manipulations algébriques nous obtenons

$$\mathbf{h}_l^m \cong [\mathbf{a}_{L_b}(v_1) \quad \mathbf{a}_{L_b}(v_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}_{L_b}(v_P)] \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^P \beta_{1p}^m e^{-jl\vartheta_p} & \sum_{p=1}^P \beta_{2p}^m e^{-jl\vartheta_p} & \dots \\ \sum_{p=1}^P \beta_{pp}^m e^{-jl\vartheta_p} \end{bmatrix}^T \quad (\text{IV-61})$$

où $\mathbf{a}_{L_b}(v_p) = [1, e^{j\pi v_p}, \dots, e^{j\pi(L_b-1)v_p}]^T$ est le vecteur source de dimension $L_b \times 1$, à partir de l'équation (IV-61) nous pouvons écrire

$$\mathbf{h}_l^m \cong \sum_{p=1}^P \alpha_{pl}^m \mathbf{a}_{L_b}(v_p) \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (\text{IV-62})$$

avec

$$\alpha_{kl}^m = \sum_{p=1}^P \beta_{kp}^m e^{-jl\vartheta_p} \quad (\text{IV-63})$$

Après avoir obtenu les vecteurs $\mathbf{h}_l^m, l = 1, 2, \dots, P, m = 1, 2, \dots, M$, le vecteur final $\mathbf{h}_l, l = 1, 2, \dots, P$, peut être calculé en moyenne sur l'ensemble des M vecteurs \mathbf{h}_l^m comme suit

$$\mathbf{h}_l = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{h}_l^m \cong \sum_{p=1}^P \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \alpha_{pl}^m \right) \mathbf{a}_{L_b}(v_p) \quad (\text{IV-64})$$

Le vecteur \mathbf{h}_l est une combinaison linéaire de vecteurs $\mathbf{a}_{L_b}(v_p), p = 1, 2, \dots, P$. Ainsi, il appartient au sous-espace signal tant que le SNR est élevé. En conséquence, les vecteurs \mathbf{h}_l pour $l = 1, 2, \dots, P$ engendrent le sous-espace signal, c'est-à-dire

$$\text{span}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P\} = \text{span}\{\mathbf{a}_{L_b}(v_1), \mathbf{a}_{L_b}(v_2), \dots, \mathbf{a}_{L_b}(v_P)\} \quad (\text{IV-65})$$

Un sous-espace orthonormé $\mathbf{Q}_b = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_P]$ avec $\mathbf{q}_l \in \mathbb{C}^{L_b \times 1}, l = 1, 2, \dots, P$ peut être obtenu par l'application de la procédure d'orthogonalisation de Gramme-Schmidt aux vecteurs $\mathbf{h}_l, l = 1, 2, \dots, P$. La matrice de projection sur les lignes est ensuite donnée par

$$\mathcal{P}_{\mathbf{Q}_b}^\perp = \mathbf{I}_{L_b} - \mathbf{Q}_b \mathbf{Q}_b^H \quad (\text{IV-66})$$

où \mathbf{I}_{L_b} désigne la matrice identité de dimension $L_b \times L_b$. Ainsi, le spectre spatial pour la localisation des sources en utilisant uniquement les lignes du réseau rectangulaire peut être estimé comme

$$\Psi_b(v) = \frac{1}{\mathbf{a}_{L_b}^H(v) (\varphi_{Q_b}^\perp)^H \varphi_{Q_b}^\perp \mathbf{a}_{L_b}(v)} \quad (\text{IV-67})$$

où $\mathbf{a}_{L_b}(v) \in \mathbb{C}^{L_b \times 1}$ est le vecteur de recherche avec $-1 \leq v \leq 1$. Le tracé de $\Psi_b(v)$ permet d'obtenir une courbe présentant des pics dont le nombre et la position sont respectivement le nombre et les fréquences spatiales $v_p, p = 1, 2, \dots, P$.

Estimation de la fréquence spatiale u_p

En procédant de la même manière, la fréquence spatiale u_p peut être estimée par l'exécution du lissage spatial en amont et en aval des signaux sur $(M - L_c + 1)$ sous-réseaux sur la $d^{\text{ème}}$ colonne de l'antenne rectangulaire, chacun est composé de L_c capteurs $1 \leq L_c \leq M$. Par conséquent, nous obtenons un sous-espace équivalent de signal défini par l'ensemble de vecteurs $\mathbf{g}_l, l = 1, 2, \dots, P$, comme suit

$$\text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_P\} = \text{span}\{\mathbf{a}_{L_c}(u_1), \mathbf{a}_{L_c}(u_2), \dots, \mathbf{a}_{L_c}(u_P)\} \quad (\text{IV-68})$$

où $\mathbf{a}_{L_c}(u_p) = [1, e^{j\pi u_p}, \dots, e^{j\pi(L_c-1)u_p}]^T$ est le vecteur source de dimension $L_c \times 1$, avec

$$\mathbf{g}_l = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \mathbf{g}_l^d \quad (\text{IV-69})$$

où

$$\mathbf{g}_l^d = [g_{l0}^d \quad g_{l1}^d \quad \dots \quad g_{lL_c-1}^d]^T, l = 1, 2, \dots, P \quad (\text{IV-70})$$

et

$$g_{lt}^d = \sum_{d=L_c}^M X_{(m-l)d} X_{(m-t)d}^* + X_{(m-L_c+l+1)d}^* X_{(m-L_c+t+1)d} \quad (\text{IV-71})$$

alors, les fréquences spatiales $u_p, p = 1, 2, \dots, P$ peuvent être estimée à partir du spectre spatial construit par l'utilisation des colonnes du réseau rectangulaire défini par

$$\Psi_c(u) = \frac{1}{\mathbf{a}_{L_c}^H(u) (\varphi_{Q_c}^\perp)^H \varphi_{Q_c}^\perp \mathbf{a}_{L_c}(u)} \quad (\text{IV-72})$$

où $\mathbf{a}_{L_c}(u) \in \mathbb{C}^{L_c \times 1}$ est le vecteur de recherche avec $-1 \leq u \leq 1$, et

$$\wp_{\mathbf{Q}_c}^\perp = \mathbf{I}_{L_c} - \mathbf{Q}_c \mathbf{Q}_c^H \quad (\text{IV-73})$$

est la matrice de projection définie pour les colonnes du réseau rectangulaire, avec $\mathbf{Q}_c \in \mathbb{C}^{L_c \times P}$ ($P < M$) est le sous-espace orthonormé obtenu par l'application de la procédure d'orthogonalisation de Gramme-Schmidt aux vecteurs $\mathbf{g}_l, l = 1, 2, \dots, P$. Les positions des crêtes du spectre $\Psi_c(u)$ vont indiquer les valeurs des fréquences spatiales $u_p, p = 1, 2, \dots, P$.

Une fois les fréquences spatiales v_p et $u_p, p = 1, 2, \dots, P$ sont estimées, nous utilisons une procédure de recherche à 2D afin d'assortir ces deux ensembles de données. Ici, nous utilisons la fonction coût de maximum de vraisemblance condensée (Condensed Maximum Likelihood, CML) défini comme suit [SN89, SN90, RB97]

$$f_{ML} = \log \left[\mathbf{x}^H \wp_{\mathbf{a}(\theta_p, \phi_p)}^\perp \mathbf{x} \right] \quad (\text{IV-74})$$

où $\wp_{\mathbf{a}(\theta_p, \phi_p)}^\perp = \mathbf{I}_{MD} - \mathbf{a}(\theta_p, \phi_p) \mathbf{a}^\dagger(\theta_p, \phi_p)$ est la matrice de projection qui projette sur le sous-espace orthogonal au sous-espace des vecteurs $\mathbf{a}(\theta_p, \phi_p)$, et le symbole \dagger désigne le pseudo-inverse. Nous aurons en total P^2 combinaisons de (u_p, v_p) à vérifier. Les P plus petits résultats de la fonction de coût f_{ML} indiquent la combinaison correcte de (u_p, v_p) . Puis, (u_p, v_p) est correctement accordé à la paire (θ_p, ϕ_p) équivalente.

IV.11 Simulations

Dans cette section, la simulation est réalisée afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée basée sur un seul échantillon. Supposons qu'il y a deux sources non corrélées situées à $(45^\circ, 10^\circ)$ et $(45^\circ, 65^\circ)$ avec le même $SNR = 10 \text{ dB}$. Une antenne rectangulaire constituée de 5×5 capteurs équidistants est utilisée. La distance inter-capteurs est égale à la demi-longueur d'onde correspondante à la fréquence d'analyse. Dans les simulations, nous avons employé $L_b = L_c = 4$.

Les figures IV.11 et IV.12 montrent les spectres $\hat{\Psi}_b(v)$ et $\hat{\Psi}_c(u)$ en fonction des fréquences spatiales v et u . Nous remarquons que les deux sources sont clairement résolues avec des crêtes localisées à $(v_1 = 0.1242, v_2 = 0.6404)$ et $(u_1 = 0.2946, u_2 = 0.7138)$.

La combinaison correcte de v_p et u_p sont déterminées en exécutant une procédure de séparation à 2D basée sur la fonction de coût CML comme est défini dans l'équation (IV-74), les résultats sont récapitulés dans le tableau IV.1. Les directions d'arrivée calculées à partir des combinaisons ayant le plus faible coût sont $(46.42^\circ, 9.7^\circ)$ et $(44.82^\circ, 65.29^\circ)$.

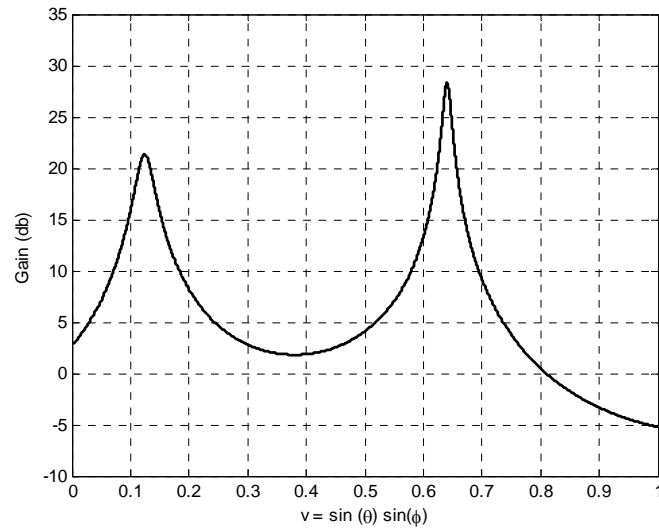


Fig. IV.11 Une recherche monodimensionnelle selon les lignes, cas de sources non corrélées

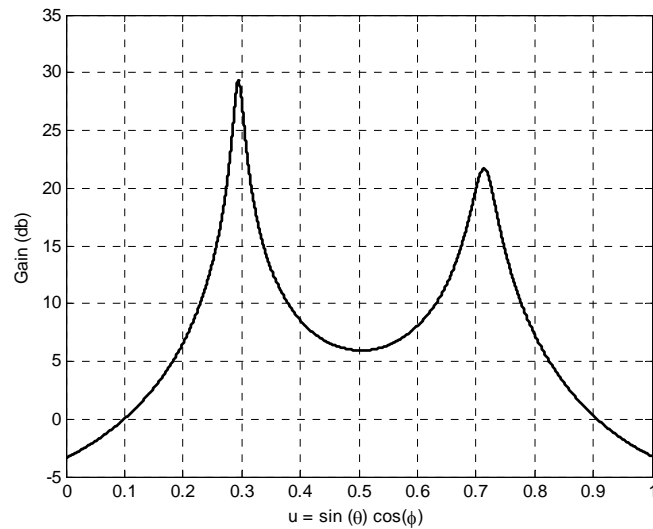


Fig. IV.12 Une recherche monodimensionnelle selon les colonnes, cas de sources non corrélées

Combinaisons	$f_{ML}(dB)$
$v = 0.1242$ $u = 0.2946$	30.2
$v = 0.6404$ $u = 0.2946$	29.54
$v = 0.1242$ $u = 0.7138$	23.25
$v = 0.6404$ $u = 0.7138$	30.34

Tableau IV.1 Vérification 2D de la combinaison correcte pour de sources non corrélées

Les figures IV.13 et IV.14 montrent les spectres $\hat{\Psi}_b(v)$ et $\hat{\Psi}_c(u)$ pour la localisation de sources complètement corrélées situées aux mêmes positions que le scénario précédent. Nous remarquons aussi que les deux sources cohérentes sont clairement résolues avec des crêtes localisées à $(v_1 = 0.1990, v_2 = 0.6210)$ et $(u_1 = 0.2690, u_2 = 0.7210)$.

Par l'utilisation de la même procédure de vérification (voir le tableau IV.2), Les directions d'arrivée calculées à partir des combinaisons ayant le plus faible coût sont $(48.4^\circ, 15.4^\circ)$ et $(42.59^\circ, 66.5^\circ)$.

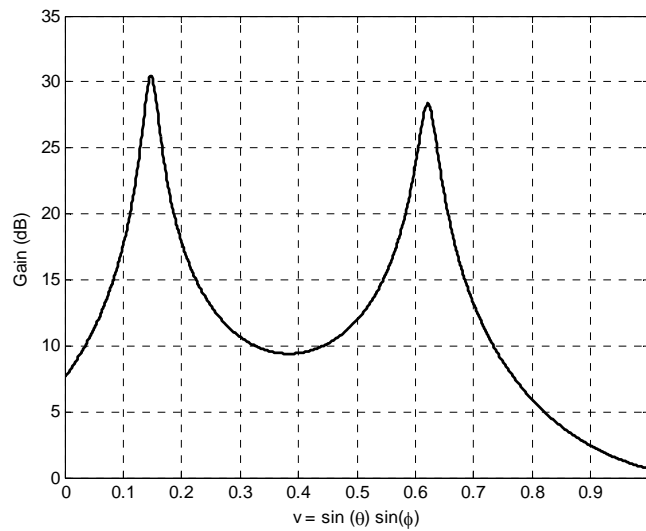


Fig. IV.13 Une recherche monodimensionnelle selon les lignes, cas de sources cohérentes

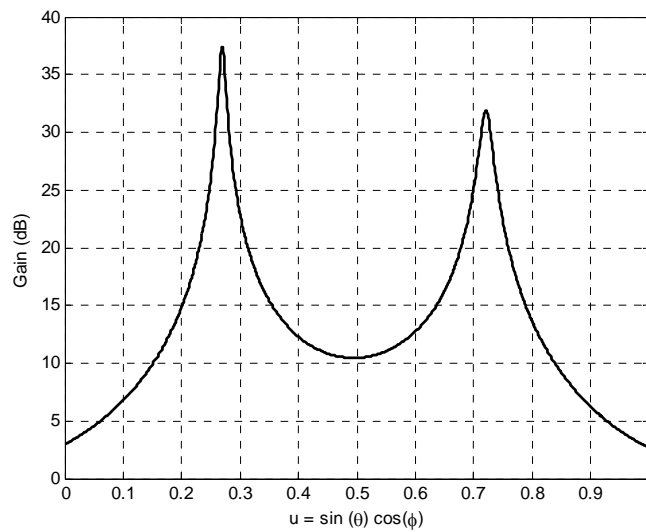


Fig. IV.14 Une recherche monodimensionnelle selon les colonnes, cas de sources cohérentes

Combinaisons	$f_{ML}(dB)$
$v = 0.1990$ $u = 0.2690$	29.65
$v = 0.6210$ $u = 0.2690$	27.08
$v = 0.1990$ $u = 0.7210$	26.90
$v = 0.6210$ $u = 0.7210$	29.49

Tableau IV.2 Vérification 2D de la combinaison correcte pour de sources cohérentes

IV.12 Conclusion

Dans cette partie, une simple méthode de projection pour l'estimation des directions d'arrivée à deux dimensions est présentée. La méthode proposée n'implique pas le calcul de la matrice de covariance ni sa décomposition en valeurs propres pour calculer la matrice de projection. Elle présente un faible coût de calcul et elle est bénéfique pour le traitement en temps réel comme elle est fondée sur un seul échantillon.

Conclusion et perspectives

Le travail de recherche présenté dans cette thèse a permis la mise en œuvre de nouvelles méthodes de traitements d'antenne pour l'estimation des directions d'arrivée et la rejection d'interférences sur des signaux à bandes étroites.

Dans le cas de l'estimation des directions d'arrivée de sources lointaines captées par une antenne rectiligne, nous avons proposé l'application de l'algorithme de Gradient Conjugué GC. Cet algorithme permet, entre autres, la localisation de ces sources. La nouvelle méthode ne fait pas recourt à la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance de données observées. Au contraire, elle emploie une nouvelle base pour déterminer le sous-espace signal basé sur les vecteurs résidus de l'algorithme GC. Les performances de cette nouvelle méthode ont été montrées à l'aide de simulations numériques.

Les techniques de traitements d'antenne existantes pour l'estimation des directions d'arrivée, dont les principes sont exposés dans le premier chapitre, sont en grande majorité basées sur la décomposition en valeurs propres (EVD) de la matrice de covariance. L'originalité du travail exposé dans ce manuscrit est représentée par la recherche d'une nouvelle technique qui n'utilise pas la structure propre de la matrice de covariance des données collectées.

Dans un premier temps, nous avons présenté un aperçu de notre recherche bibliographique. Cet état de l'art nous a permis d'effectuer un tour d'horizon sur la majorité des algorithmes et des approches utilisés pour l'estimation du nombre et direction d'arrivée des sources. Parmi ces algorithmes certains nécessitent une décomposition de l'espace d'observation en un sous-espace bruit et un sous-espace signal par la recherche des valeurs propres de la matrice interspectrale, obtenue à partir des données collectées à travers l'antenne. Ces techniques sont connues souvent sous l'appellation de méthodes à haute résolution (HR). En effet, ces approches fournissent une estimation des angles d'arrivée avec une résolution «théoriquement infinie». Parmi les méthodes de haute résolution les plus célèbres nous avons MUSIC et ESPRIT. La méthode MUSIC estime les directions d'arrivée des sources rayonnantes en exploitant la propriété d'orthogonalité entre le sous-espace bruit engendré par les vecteurs propres associés aux petites valeurs propres, et le sous-espace signal engendré par les vecteurs sources. Au contraire la technique ESPRIT réalise une estimation

directe des directions d'arrivée à partir des propriétés de sous-espace signal au lieu de sous-espace bruit en se basant sur une propriété particulière de l'invariance rotationnelle.

La seconde partie de ce travail commence par des rappels sur l'algèbre linéaire nécessaires à la compréhension des algorithmes HR. Ainsi, nous avons présenté succinctement le principe sur lequel se base les algorithmes HR classiques MUSIC et ESPRIT. Aussi et afin de comprendre le principe de base de la méthode proposée, un exposé sur les méthodes de sous-espace de Krylov a été illustré. Nous avons pu constater que l'intérêt de ces approches est de ramener la solution de l'équation de Wiener-Hopf de l'espace complet de dimension M à un sous-espace de rang réduit. Ceci permet d'éviter le calcul de l'inverse de la matrice de covariance dans le cas d'un calcul adaptatif du filtre \mathbf{w} . L'idée de base consiste à projeter l'espace engendré par les observations $\mathbf{x}(k)$ sur un sous-espace réduit de dimension $D < M$, défini par un ensemble de vecteurs de base qui engendrent le sous-espace de Krylov.

Récemment, une méthode à Haute résolution basée sur l'algorithme des vecteurs auxiliaires qui engendrent un sous-espace de Krylov a été proposée. Sa première application était dans le domaine de filtrage adaptatif pour la suppression des signaux non désirés. Cette méthode a été ensuite appliquée pour l'estimation des directions d'arrivée. Son principe est de construire une nouvelle fonction de localisation complètement liée au fondement de réduction du rang. Bien que les autres algorithmes de sous-espaces de Krylov comme MSWF et GC, rapportent asymptotiquement la même solution de l'équation de Wiener-Hopf, la façon d'obtenir la solution est différente, ce qui donne des performances différentes à leurs applications. D'où l'idée de reprendre le même principe de l'algorithme AV, c'est-à-dire, le fondement de la fonction de localisation mais en changeant les vecteurs auxiliaires par les résidus de l'algorithme GC. Cela a donné naissance à une nouvelle méthode à haute résolution pour la localisation des sources lointaines à bandes étroites fondée autour de l'algorithme Gradient Conjugué. Nous avons aussi démontré le principe de la fonction de localisation utilisée par cette nouvelle méthode. Cette démonstration pourra être une clé pour l'utilisation d'autres algorithmes qui engendrent le sous-espace de Krylov. Comme ces deux méthodes engendrent le même sous-espace, nous avons donné la relation qui existe entre leurs fonctions de localisation. A partir de cette relation nous avons pu expliquer la différence entre les deux algorithmes en termes de performance malgré qu'ils fournissent une base du même sous-espace signal. Enfin, nous avons effectué des simulations numériques pour comparer les performances de la méthode proposée avec celles de la technique AV et des techniques classiques MUSIC et ESPRIT. Selon le critère choisi, nous avons montré que les

performances de la méthode proposée a surpassé aussi bien les performances de la technique AV que celles des méthodes MUSIC et ESPRIT en termes de résolution. Cette comparaison a été effectuée dans le cas d'un petit support de données et un faible rapport signal à bruit.

Dans le cas du filtrage de signaux à bandes étroites enregistrés par une antenne rectiligne, nous avons présenté une méthode simple pour le calcul de sous-espace des interférences basée sur un seul échantillon. L'avantage de cette méthode est de réduire la complexité calculatoire liée à l'EVD pour la détermination des sous-espaces et réduire en même temps les besoins en support de données nécessaires pour le calcul du vecteur de pondération. Les résultats des simulations effectuées sur des signaux synthétiques ont montré la supériorité de l'algorithme proposé par rapport à l'Eigencanceler pour le cas de signaux complètement corrélés. Ensuite, dans la deuxième partie, nous avons consacré notre étude sur l'application de l'approche d'un seul échantillon pour l'estimation des directions d'arrivée des signaux enregistrés par une antenne rectangulaire. L'approche proposée permet l'estimation de l'azimut et l'élévation en utilisant deux fonctions de localisation monodimensionnelles suivie par une procédure de vérification. Les deux fonctions de localisation sont fondées sur des matrices de projection formées à partir d'un seul échantillon selon les lignes et les colonnes de l'antenne rectangulaire. Les résultats de simulations montrent bien que la méthode proposée est efficace quand le rapport signal à bruit (SNR) est suffisamment élevé.

Perspectives

Les perspectives des travaux présentés dans ce manuscrit sont liées aux résultats très encourageants obtenus par l'utilisation des algorithmes de sous-espace de Krylov en traitements d'antenne pour la localisation des sources lointaines à bandes étroites. Il serait intéressant d'étendre l'utilisation de la méthode GC pour l'estimation des directions d'arrivée des sources proches à bande large. Dans la méthode incohérente de sous-espace signal, les signaux larges bandes sont décomposés en un ensemble de composants discrets à bandes étroites disjointes (pas de chevauchement entre les bandes). Ainsi, tout algorithme de sous-espace à bande étroite pourra être appliqué avec succès pour estimer les DDA. Nous calculons la moyenne des résultats préliminaires pour estimer les DDA finales. Malheureusement, cette méthode devient inefficace pour des sources étroitement séparées avec un faible SNR. Nous proposerons, compte tenu des performances remarquables de notre méthode dans le cas de sources très proches avec une faible puissance, de l'appliquer au cas des sources lointaines à bande large.

La suite logique de ces travaux de recherche, selon notre vision, serait l'analyse approfondie des performances des estimateurs de sous-espace de Krylov de point de vue statistique. De même, il est très intéressant de procéder à une comparaison de cette analyse avec celle obtenue pour les méthodes classiques MUSIC et ESPRIT. Nous devons aussi étudier comment l'hypothèse de non circularité des variables aléatoires influe sur les performances des algorithmes de sous-espace de Krylov. L'extension de la notion de non circularité devrait être étudiée, ainsi que son influence sur ces méthodes. Un travail théorique important reste à faire sur ces nouvelles méthodes d'estimation des DDA.

Nous nous sommes dans cette thèse limités au filtrage spatial basé sur un seul vecteur d'observation, il serait intéressant d'étendre ce principe au cas de traitement adaptatif spatio-temporel en radar pour la détermination de vecteur de pondération. Dans ce cas de traitement, le filtrage consiste à adapter conjointement le filtre spatio-temporel à partir des données afin de filtrer le fouillis et les brouilleurs dans le plan fréquence-Doppler/DDA. Cependant, en pratique, l'utilisation du filtrage STAP tout adaptatif est limitée par des contraintes de complexité d'implémentation liée aux tailles des vecteur spatio-temporel d'observation et la non stationnarité des retours du fouillis radar. Il s'avère donc que la méthode d'un seul échantillon améliore le traitement spatio-temporel en termes de la complexité calculatoire et la non stationnarité des données reçues. Nous proposons aussi d'effectuer une étude de performances asymptotiques pour analyser la méthode proposée surtout dans le cas où il y a des vibrations au niveau de l'antenne.

Les simulations montrent bien l'efficacité de l'estimateur proposé pour déterminer les DDA à 2D basé sur un seul vecteur d'observation. Cependant, cette technique reste efficace seulement pour l'estimation des DDA de sources bien espacées avec un SNR élevé. Nous suggérerons donc pour des recherches futures d'effectuer un prétraitement spatial (filtrage) à 2D pour augmenter la résolution du spectre proposé. Nous contons aussi que le rapport effectif du signal sur bruit pourra être augmenté par le filtre spatial.

La suite naturelle de ces travaux de recherche est la validation des algorithmes développés dans le cadre de cette étude en utilisant des signaux issus d'enregistrements effectués dans un environnement réel. Cette liste est bien entendu non exhaustive et nous permet d'avoir une visibilité à moyen et court terme sur nos travaux futurs.

Bibliographie

- [And60] V. C. Anderson. “*Digital Array Phasing*”. J. Acoust. Soc. Am., 32 pp. 867-870, 1960.
- [BA02] S. Burykh and K. Abed-meraim. “*Reduced-rank adaptive filtering using krylov subspace*”. EURASIP JASP, Vol. 2002, N° 12, pp. 1387–1400, Dec. 2002.
- [Bar83] A. J. Barabell. “*Improving the Resolution Performance of Eigenstructure-Based Direction Finding Algorithms*”. IEEE Proceeding on International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 336-339, Boston 1983.
- [Boh84] J. Boheme. “*Estimating the Source Parameters by Maximum Likelihood Estimator and Nonlinear Regression*”. Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 731-734, 1984.
- [BR73] L.E. Brennan and I.S. Reed. “*Theory of adaptive radar*”. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-9, pp. 237–252, Mar. 1973.
- [Bro85] W. L. Brogan. “*Modern Control Theory*”. 2nd ed. NJ: Prentice-Hall, Englewoods Cliffs. 1985.
- [Bur84] W. S. Burdic. “*Underwater acoustic system analysis*”. Prentice-Hall Signal Processing. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [Cap69] J. Capon. “*High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis*”. Proc. IEEE, Vol. 57, pp. 1408-1418, Aug. 1969.
- [Car88] B. Carlson. “*Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays*”. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 24, N° 4, pp. 397–401, July 1988.
- [CLY90] Y. Chen, J. Lee and C. Yeh. “*Bearing Estimating in the Presence of Near-Field Sources*”. IEEE Antennas Propagation Soc. Int. Symp. Dig., Dallas, Tx, pp. 1474-1477, 1990.
- [CLY92] Y. Chen, J. Lee and C. Yeh. “*Two-Dimensional Angle-of-Arrival Estimation in the Presence of Finite Distance Sources*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-40, N°9, pp. 1011-1022, 1992.
- [CMS02] W. Chen, U. Mitra, and P. Schniter. “*On the equivalence of three reduced rank linear estimators with applications to ds-cdma*”. IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 48, N° 9, pp. 2609–2614, Sep. 2002.
- [CSC95] S. Choi, T. K. Sarkar, and J. Choi. “*Adaptive antenna array for direction-of-arrival estimation utilizing the conjugate gradient method*”. Signal Processing, Vol. 45, N° 3, pp. 313–327, 1995.

- [CSDB86] H. Chen, T. K. Sarkar, S. A. Dianat, and J. D. Brule. “*Adaptive spectral estimation by the conjugate gradient method*”. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 34, N° 2, pp. 272–284, 1986.
- [CW96] P. S. Chang and A. N. Willson Jr. “*Adaptive spectral estimation using the conjugate gradient algorithm*”. In Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '96), Vol. 5, pp. 2979–2982, Atlanta, Ga, USA, May 1996.
- [CW97] P. S. Chang and A. N. Willson Jr.. “*Conjugate gradient method for adaptive direction-of-arrival estimation of coherent signals*”. In Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '97), Vol. 3, pp. 2281–2284, Munich, Germany, April 1997.
- [DMC98] A. Ducasse, C. Mailhes, F. Castanie. “*Estimation de fréquences : panorama des méthodes paramétriques*”. Traitement du Signal, Vol. 15, N°2, pp. 149–162, 1998.
- [FD95] Z. Fu and E. M. Dowling. “*Conjugate gradient eigenstructure tracking for adaptive spectral estimation*”. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, N° 5, pp. 1151–1160, 1995.
- [Fri93] B. Friedlander. “*The Root-MUSIC Algorithm for Direction Finding with Interpolated Arrays*”. Signal Processing, Vol. 30, N°1, pp. 15–29, 1993.
- [GJ82] L. J. GRIFFITHS and C. W. Jim. “*An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming*”. IEEE Trans. Antennas Propagation, Vol. 30, pp. 27–34, Jan. 1982.
- [GL96] G. Golub and C. V. Loan. “*Matrix computations*”. 3rd ed. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996.
- [GPM05] R. Grover, D. A. Pados, and M. J. Medley. “*Super-resolution direction finding with an auxiliary-vector basis*”. In Digital Wireless Communications VII and Space Communication Technologies, 5819 of *Proceedings of SPIE*, pp. 357–365, Orlando, USA, March 2005.
- [GPM07] R. Grover, D. A. Pados, and M. J. Medley. “*Subspace direction finding with an auxiliary-vector basis*”. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 55, N° 2, pp. 758–763, 2007.
- [GR97] J. S. Goldstein and I. S. Reed. “*Reduced rank adaptive filtering*”. Trans. Signal Processing, Vol. 45, N° 2, pp. 492–496, 1997.
- [GRS98] J. S. Goldstein and I. S. Reed and L. L. Scharf. “*A multistage representation of the Wiener filter based on orthogonal projections*”. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 44, N° 2, pp. 2943–2959, Nov. 1998.
- [Hai96] A.M Haimovich. “*The eigencanceller: adaptive radar by eigen-analysis methods*”. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 32, pp.532–542, 1996.
- [Hai97] A.M Haimovich. “*Asymptotic distribution of the conditional signal-to-noise ratio in eigenanalysis-base adaptive array*”. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 33, N° 3, pp. 988 – 997, 1997.

- [HB91a] Y. Huang and M. Barkat. “*Near-Field Multiple Source Localization by Passive Sensor Array*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-39, N°7, pp. 968-975, 1991.
- [HB91b] A. M. Haimovich and Y. Bar-Ness. “*An Eigenanalysis interference canceller*”. IEEE Transactions On Signal Processing, Vol. 39, pp. 76-84, Jan. 1991.
- [HX00] M. L. Honig and W. Xiao, “*Adaptive reduced-rank interference suppression with adaptive rank selection*” . In Proc. Milcom2000, Los Angeles, Calif, USA, October 2000, pp. 747–751.
- [JZ00] M. Joham and M. D. Zoltowski. “*Interpretation of the multi-stage nested wiener filter in the krylov subspace framework*”. TR-ECE-00-51, Purdue University, Tech. Rep., Nov. 2000.
- [KFP92] H. Krim, P. Forster and J. G. Proakis. “*Operator Approach to Performance Analysis of Root-MUSIC and Root-Min-Norm*”. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, N°7, pp. 1687-1695, 1992.
- [KT83] R. Kumaresan and D. Tufts. “*Estimating the Angles of Arrival of Multiple Plane Waves*”. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-19, pp. 134-139, 1983.
- [KT94] I. Kirsteins and D. W. Tufts. “*Adaptive detection using a low rank approximation to a data matrix*”. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., Vol. 30, N° 1, pp. 55–67, Jan. 1994.
- [KV96] H. Krim and M. Viberg. “*Two decades of array signal processing research: the parametric approach*”. IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 13, N°. 4, pp. 67–94, 1996.
- [Lay97] D. C. Lay. “*Linear Algebra and its Application*”. Addison Wesley, 2nd edition, 1997
- [Mir05] S. MIRON. “*Méthodes Multilinéaires et Hypercomplexes en Traitement d’antenne Multicomposante Haute Résolution*”. Thèse de Doctorat, Institut Nationale polytechnique de Grenoble, France, 25 octobre 2005.
- [MKS96] S. Moshavi, E. G. Kanterakis, and D. L. Schilling. “*Multistage linear receiver for ds-cdma systems*”. International Journal of Wireless information Networks, Vol. 3, N° 1, pp. 1–17, 1996.
- [MM80] R. A. Monzingo and T. W. Miller. “*Introduction of Adaptive Arrays*“. New York: Wiley, 1980.
- [MMB95] S. Marcos, A. Marsal, and M. Benidir. “*The propagator method for source bearing Estimation*”. Signal Processing, Vol. 42, pp. 121–138, Mar. 1995.
- [MS97] S. MARCOS et J. SANCHEZ-ARAUJO. “*Méthodes « linéaires » haute résolution pour l’estimation de directions d’arrivée de sources. Performances asymptotiques et complexité*”. Traitement du Signal, Vol. 14, N ° 2, pp. 99-116, 1997.
- [Mun87] J. Munier. “*Identification de front d’ondes corrélés et distordus*”. Traitement du signal, Vol 4, pp. 281–296, 1987.

- [Nai01] P. S. Naidu. “*Sensor Array Signal Processing*”. CRC Press LLC, 2001
- [PB99] D. A. Pados and S. N. Batalama. “*Joint Space-Time Auxiliary-Vector Filtering for DS/CDMA Systems with Antenna Array*”. IEEE Trans. On Communications, Vol. 47, N° 9, pp. 1406-1414, Sep. 1999.
- [PB02] M. Pesavento and J. Bohme. “*Eigenstructure-based azimuth and elevation estimation in sparse uniform rectangular arrays*”. In Proc. IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Conf, pp. 327–331, Aug. 2002.
- [Pis73] V. F. Pisarenko. “*The retrieval of harmonics from a covariance function*”. Geophysical Journal International. Vol. 33, pp. 347–366, 1973.
- [PK89] S. U. Pillai and B. H. Kwon. “*Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification*”. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, N° 1, pp. 8–15, 1989.
- [PK01] D. A. Pados and S. N. Karystinos. “*An iterative algorithm for the computation of the mvdr filter*”. IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 49, N° 2, pp. 290–300, Feb. 2001.
- [PRK86] A. Paulraj, R. Roy and T. Kailath. “*A subspace Rotation Approach to Signal Parameter Estimation*”. Proceedings IEEE Trans. on ASSP, Vol. 34, N° 4, pp. 1340-1342, Oct. 1986.
- [QB03] H. Qian and S. N. Batalama. “*Data record-based criteria for the selection of an auxiliary vector estimator of the MMSE/MVDR filter*”. IEEE Transactions on Communications, Vol. 51, N° 10, pp. 1700–1708, 2003.
- [Ray09] L. Rayleigh. “*On the perception of the direction of sound*”. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol. 83, Issue 559, pp. 61-64, 1909.
- [RB97] B. M. Radich and K. M. Buckley. “*Single-snapshot DOA estimation and source number detection*”. IEEE signal processing letters, Vol. 4, N° 4, pp. 109–111, April 1997.
- [Red79] S. S. Reddi. “*Multiple Source Location-A Digital Approach*”. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-15, pp. 95-105, 1979.
- [RK89] R. Roy and T. Kailath. “*ESPRIT–Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*”. IEEE Transactions On Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, N° 7, pp.984-995, 1989.
- [RMB74] I. S. Reed, J. D. Mallett, and L. Brennan. “*Rapid convergence rates in adaptive arrays*”. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 10, pp. 853–863, Mar. 1974.
- [RPK86] R. Roy, A. Paulraj and T. Kailath. “*ESPRIT - A Subspace Rotation Approach to Estimation of Parameters of Cisoids in Noise*”. IEEE Transactions On Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 34, N°5, pp. 1340-1342, 1986.
- [Saa96] Y. Saad. “*Iterative Methods for sparse linear Systems*”. <http://www.csumnedu/saad/books.html>: PWS - out of print, 1996.

- [Sch81] R. O. Schmidt. “*A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*”. PhD thesis, Stanford University, Stanford, California, USA, November 1981.
- [Sch86] R. O. Schmidt. “*Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-34, pp. 276-280, 1986.
- [Sek98] S. Sekizawa. “*Estimation of arrival directions using MUSIC algorithm with a planar array*”. In Proc. IEEE Universal Personal Communications, Italy, pp. 555–559, 1998.
- [SF85] R. O. Schmidt and R. E. Franks. “*Multiple Source DF Signal Processing: An experimental System*”. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-33, pp. 387-392, 1985.
- [SIS03] D. Segovia-Vargas, F. Iñigo, and M. Sierra-Pérez. “*Generalized eigenspace beamformer based on CG-Lanczos algorithm*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 51, N° 8, pp. 2146–2154, 2003.
- [SN89] P. Stoica and A. Nehorai. “*MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer Rao Bound*”. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-37, N°5, pp. 720-741, 1989.
- [SN90] P. Stoica and A. Nehorai. “*MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer Rao Bound: Further Results and Comparisons*”. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-38, N°12, pp. 2140-2150, 1990.
- [SWK85] T. J. Shan, M. Wax and T. Kailath. “*On Spatial Smoothing for Direction of Arrival Estimation of Coherent Sources*”. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-33, pp. 806-811, 1985.
- [Tre02] H. L. V. Trees. “*Optimum Array Processing*”. New York: Wiley, 2002.
- [VB88] B.D. V. Veen and K. M. Buckley. “*Beamforming: A versatile approach to spatial filtering*”. IEEE Signal Process. Mag, Vol. 5, pp. 4–24, Apr. 1988.
- [VOK91] M. Viberg, B. Ottersten, and T. Kailath. “*Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting*”. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 39, N° 11, pp. 2436–2449, 1991.
- [Vos00] H. A. van der Vost. “*Krylov subspace iteration*”. Computing in Science and Engineering, pp. 32–37, January/February 2000.
- [WK83] M. Wax and T. Kailath. “*Detection of Signals by Information Theoretic Criteria*”. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-31, pp. 1210-1217, 1983.
- [WS85] B. Widrow and S. D. Stearns. “*Adaptive Signal Processing*”. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1985.
- [XK94a] G. Xu and T. Kailath. “*Fast subspace decomposition*”. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 42, N° 3, pp. 539–551, 1994.

- [XK94b] G. Xu and T. Kailath. “Fast Estimation of Principal Eigenspace using Lanczos Algorithm”. SIAM J. Matrix ANAL. Appl., Vol. 15, N° 3, pp. 974-994, 1994.
- [YLC89] C.-C. Yeh, J.-H. Lee, and Y.-M. Chen. “Estimating two-dimensinal angles of arrival in coherent source environment”. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 37, N° 1, pp. 153–155, Jan. 1989.
- [YSA89] X. Yang, T. K. Sarkar, and E. Arvas. “A survey of conjugate gradient algorithms for solution of extreme eigen-problems of a symmetric matrix”. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, N° 10, pp. 1550–1556, 1989.
- [Zha95] Q. T. Zhang. “Probability of resolution of the MUSIC algorithm”. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, N° 4, pp. 978–987, 1995.
- [ZW88] I. Ziskind and M. Wax. “Maximum Localization of Multiple Sources by Alternating Projection”. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 1553-1560, October 1988.
- [ZYL91a] M. Zhang, W. Yang and L. Li. “New method of constructing the projection matrix for array processing in single snapshot case”. Proc. IEE, pt. F, Vol. 138, N° 5, pp. 407-410, Oct. 1991.
- [ZYL91b] M. Zhang, W. Yang and L. Li. “A novel Approach of resolution enhancement with application in array processing of single snapshot”. IEEE Transactions On Antennas Propagations, Vol. 39, N° 8, pp. 1125-1129, Aug. 1991.

Research Article

High-Resolution Source Localization Algorithm Based on the Conjugate Gradient

Hichem Semira,¹ Hocine Belkacemi,² and Sylvie Marcos²

¹*Département d'électronique, Université d'Annaba, BP 12, Sidi Amar, Annaba 23000, Algeria*

²*Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS), CNRS, 3 Rue Joliot-Curie, Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France*

Received 28 September 2006; Revised 5 January 2007; Accepted 25 March 2007

Recommended by Nicola Mastronardi

This paper proposes a new algorithm for the direction of arrival (DOA) estimation of P radiating sources. Unlike the classical subspace-based methods, it does not resort to the eigendecomposition of the covariance matrix of the received data. Indeed, the proposed algorithm involves the building of the signal subspace from the residual vectors of the conjugate gradient (CG) method. This approach is based on the same recently developed procedure which uses a noneigenvector basis derived from the auxiliary vectors (AV). The AV basis calculation algorithm is replaced by the residual vectors of the CG algorithm. Then, successive orthogonal gradient vectors are derived to form a basis of the signal subspace. A comprehensive performance comparison of the proposed algorithm with the well-known MUSIC and ESPRIT algorithms and the auxiliary vectors (AV)-based algorithm was conducted. It shows clearly the high performance of the proposed CG-based method in terms of the resolution capability of closely spaced uncorrelated and correlated sources with a small number of snapshots and at low signal-to-noise ratio (SNR).

Copyright © 2007 Hichem Semira et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. INTRODUCTION

Array processing deals with the problem of extracting information from signals received simultaneously by an array of sensors. In many fields such as radar, underwater acoustics and geophysics, the information of interest is the direction of arrival (DOA) of waves transmitted from radiating sources and impinging on the sensor array. Over the years, many approaches to the problem of source DOA estimation have been proposed [1]. The subspace-based methods, which resort to the decomposition of the observation space into a noise subspace and a source subspace, have proved to have high-resolution (HR) capabilities and to yield accurate estimates. Among the most famous HR methods are MUSIC [2], ESPRIT [3], MIN-NORM [4], and WSF [5]. The performance of these methods however degrades substantially in the case of closely spaced sources with a small number of snapshots and at a low SNR. These methods resort to the eigendecomposition (ED) of the covariance matrix of the received signals or a singular value decomposition (SVD) of the data matrix to build the signal or noise subspace, which is computationally intensive specially when the dimension of these matrices is large.

The conjugate gradient (CG)-based approaches were initially proposed in the related fields of spectral estimation and direction finding in order to reduce the computational complexity for calculating the signal and noise subspaces. Indeed, previous works [6–8] on adaptive spectral estimation have shown that the modified CG algorithm appears to be the most suitable descent method to iteratively seek the minimum eigenvalue and associated eigenvector of a symmetric matrix. In [8], a modified CG spectral estimation algorithm was presented to solve the constrained minimum eigenvalue problem which can also be extended to solve the generalized eigensystem problem, when the noise covariance matrix is known a priori. In the work of Fu and Dowling [9], the CG method has been used to construct an algorithm to track the dominant eigenpair of a Hermitian matrix and to provide the subspace information needed for adaptive versions of MUSIC and MIN-NORM. In [10], Choi et al. have introduced two alternative methods for DOA estimation. Both techniques use a modified version of the CG method for iteratively finding the weight vector which is orthogonal to the signal subspace. The first method finds the noise eigenvector corresponding to the smallest eigenvalue by minimizing the Rayleigh quotient of the full complex-valued covariance

matrix. The second one finds a vector which is orthogonal to the signal subspace directly from the signal matrix by computing a set of weights that minimizes the signal power of the array output. Both methods estimate the DOA in the same way as the classical MUSIC estimator. In [11], an adaptive algorithm using the CG with the incorporation of the spatially smoothing matrix has been proposed to estimate the DOA of coherent signals from an adaptive version of Pisarenko. In almost all research works, the CG has been used in a similar way to the ED technique in the sense that the objective is to find the noise eigenvector and to implement any subspace-based method to find the DOA of the radiating sources.

In this paper, the CG algorithm, with its basic version given in [12], is applied to generate a signal subspace basis which is not based on the eigenvectors. This basis is rather generated using the residual vectors of the CG algorithm. Then, using the localization function and rank-collapse criterion of Grover et al. in [13, 14], we form a DOA estimator based on the collapse of the rank of an extended signal subspace from $P + 1$ to P (where P is the number of sources). This results in a new high-resolution direction finding technique with a good performance in terms of resolution capability for the case of both uncorrelated and correlated closely spaced sources with a small number of snapshots and at low SNR.

The paper is organized as follows. In Section 2, we introduce the data model and the DOA estimation problem. In Section 3, we present the CG algorithm. Our proposed CG-based algorithm for the DOA estimation problem following the same steps in [13, 14] is presented in Section 4. After simulations with comparison of the new algorithm to the MUSIC, ESPRIT, and AV-based algorithms in Section 5, a few concluding remarks are drawn in Section 6.

2. DATA MODEL

We consider a uniformly spaced linear array having M omnidirectional sensors receiving P ($P < M$) stationary random signals emanating from uncorrelated or possibly correlated point sources. The received signals are known to be embedded in zero mean spatially white Gaussian noise with unknown variance σ^2 , with the signals and the noise being mutually statistically independent. We will assume the signals to be narrow-band with center frequency ν_0 . The k th M -dimensional vector of the array output can be represented as

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=1}^P \mathbf{a}(\theta_j) s_j(k) + \mathbf{n}(k), \quad (1)$$

where $s_j(k)$ is the j th signal, $\mathbf{n}(k) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$ is the additive noise vector, and $\mathbf{a}(\theta_j)$ is the steering of the array toward direction θ_j that is measured relatively to the normal of the array and takes the following form:

$$\mathbf{a}(\theta_j) = [1, e^{j2\pi\nu_0\tau_j}, e^{j2\pi2\nu_0\tau_j}, \dots, e^{j2\pi(M-1)\nu_0\tau_j}]^T, \quad (2)$$

where $\tau_j = (d/c) \sin(\theta_j)$, with c and d designating the signal propagation speed and interelement spacing, respectively. Equation (1) can be rewritten in a compact form as

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (3)$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\Theta) &= [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)], \\ \mathbf{s}(k) &= [\mathbf{s}_1(k), \mathbf{s}_2(k), \dots, \mathbf{s}_P(k)]^T, \end{aligned} \quad (4)$$

where $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P]$. We can now form the covariance matrix of the received signals of dimension $M \times M$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}(\Theta)^H + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (5)$$

where $(\cdot)^H$ and \mathbf{I} denote the transpose conjugate and the $M \times M$ identity matrix, respectively. $\mathbf{R}_s = \mathbf{E}[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ is the signal covariance matrix, it is in general a diagonal matrix when the sources are uncorrelated and is nondiagonal and possibly singular for partially correlated sources. In practice, the data covariance matrix \mathbf{R} is not available but a maximum likelihood estimate $\hat{\mathbf{R}}$ based on a finite number K of data samples can be used and is given by

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k). \quad (6)$$

3. CONJUGATE GRADIENT (CG) ALGORITHM

The method of conjugate gradients (CG) is an iterative inversion technique for the solution of symmetric positive definite linear systems. Consider the Wiener-Hopf equation

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (7)$$

where $\mathbf{R} \in \mathcal{C}^{M \times M}$ is symmetric positive definite. There are several ways to derive the CG method. We here consider the approach from [12] which minimizes the following cost function:

$$\Phi(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\text{Re}(\mathbf{b}^H\mathbf{w}). \quad (8)$$

Algorithm 1 depicts a basic version of the CG algorithm. α_i is the step size that minimizes the cost function $\Phi(\mathbf{w})$, β_i provides \mathbf{R} -orthogonality for the direction vector \mathbf{d}_i , \mathbf{g}_i is the residual vector defined as

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{b} - \mathbf{R}\mathbf{w}_i = -\nabla\Phi(\mathbf{w}_i) \quad (9)$$

with $\nabla(\Phi)$ denoting the gradient of function Φ and i denoting the CG iteration.

After D iterations of the conjugate gradient algorithm the set of search directions $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_D\}$ and the set of gradients (residuals) $\mathbf{G}_{\text{cg},D} = \{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},D-1}\}$ have some

$\mathbf{w}_0 = 0, \mathbf{d}_1 = \mathbf{g}_{\text{cg},0} = \mathbf{b}, \rho_0 = \mathbf{g}_{\text{cg},0}^H \mathbf{g}_{\text{cg},0}$
 for $i = 1$ to D do
 $\mathbf{v}_i = \mathbf{R}\mathbf{d}_i$
 $\alpha_i = \frac{\rho_{i-1}}{\mathbf{d}_i^H \mathbf{v}_i}$
 $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{d}_i$
 $\mathbf{g}_{\text{cg},i} = \mathbf{g}_{\text{cg},i-1} - \alpha_i \mathbf{v}_i$
 $\rho_i = \mathbf{g}_{\text{cg},i}^H \mathbf{g}_{\text{cg},i}$
 $\beta_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}} = \frac{\|\mathbf{g}_{\text{cg},i}\|^2}{\|\mathbf{g}_{\text{cg},i-1}\|^2}$
 $\mathbf{d}_{i+1} = \beta_i \mathbf{d}_i + \mathbf{g}_{\text{cg},i}$
 End for

ALGORITHM 1: Basic conjugate gradient algorithm.

properties summarized as follows [12]:

- (i) \mathbf{R} -orthogonality or conjugacy with respect to \mathbf{R} of the vectors \mathbf{d}_i , that is, $\mathbf{d}_i^H \mathbf{R} \mathbf{d}_j = 0$, for all $i \neq j$,
- (ii) the gradient vectors are mutually orthogonal, that is, $\mathbf{g}_{\text{cg},i}^H \mathbf{g}_{\text{cg},j} = 0$, for all $i \neq j$,
- (iii) $\mathbf{g}_{\text{cg},i}^H \mathbf{d}_j = 0$, for all $j < i$,
- (iv) if the gradient vectors $\mathbf{g}_{\text{cg},i}$, $i = 0, \dots, D-1$, are normalized, then the transformed covariance matrix $\mathbf{T}_D = \mathbf{G}_{\text{cg},D}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{\text{cg},D}$ of dimension $D \times D$ is a real symmetric tridiagonal matrix;
- (v) $\mathcal{D}_D = \text{span}\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_D\} \equiv \text{span}\{\mathbf{G}_{\text{cg},D}\} \equiv \mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b})$,

where $\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b}) = \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{R}\mathbf{b}, \mathbf{R}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{R}^{D-1}\mathbf{b}\}$ is the Krylov subspace of dimension D associated with the pair (\mathbf{R}, \mathbf{b}) [12].

After D iterations, the CG algorithm produces an iterative method to solve the reduced rank Wiener solution of (7). Note that the basic idea behind the rank reduction is to project the observation data onto a lower-dimensional subspace ($D < M$), defined by a set of basis vectors [15]. It is then worth noting that other reduced rank solutions have been obtained via the auxiliary vectors-based (AV) algorithm and the powers of \mathbf{R} (POR) algorithm [15]. These algorithms theoretically and asymptotically yield the same solution as the CG algorithm since they proceed from the same minimization criterion and the same projection subspace [16]. However, as the ways of obtaining the solution differ, these methods are expected to have different performance in practical applications.

In the following, we propose a new DOA estimator from the CG algorithm presented above.

4. PROPOSED DOA ESTIMATION ALGORITHM

In this section, the signal model (1)–(5) is considered and an extended signal subspace of rank $P+1$ nonbased on the eigenvector analysis is generated using the same basis proce-

dure developed in the work of Grover et al. [13, 14]. Let us define the initial vector $\mathbf{b}(\theta)$ as follows:

$$\mathbf{b}(\theta) = \frac{\mathbf{R}\mathbf{a}(\theta)}{\|\mathbf{R}\mathbf{a}(\theta)\|}, \quad (10)$$

where $\mathbf{a}(\theta)$ is a search vector of the form (2) depending on $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$. When the P sources are uncorrelated and $\theta = \theta_j$ for $j = 1, \dots, P$, we have

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{a}(\theta_j) &= (E[s_j^2]M + \sigma^2)\mathbf{a}(\theta_j) \\ &+ \sum_{l=1; l \neq j}^P E[s_l^2](\mathbf{a}^H(\theta_l)\mathbf{a}(\theta_j))\mathbf{a}(\theta_l). \end{aligned} \quad (11)$$

It appears that $\mathbf{b}(\theta_j)$ is a linear combination of the P signal steering vectors and thus it lies in the signal subspace of dimension P . However, when $\theta \neq \theta_j$ for $j \in \{1, \dots, P\}$,

$$\mathbf{R}\mathbf{a}(\theta) = \sum_{j=1}^P E[s_j^2](\mathbf{a}^H(\theta_j)\mathbf{a}(\theta))\mathbf{a}(\theta_j) + \sigma^2\mathbf{a}(\theta). \quad (12)$$

$\mathbf{b}(\theta)$ is then a linear combination of the $P+1$ steering vectors $\{\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)\}$ and therefore it belongs to the extended signal subspace of dimension $P+1$ which includes the true signal subspace of dimension P plus the search vector $\mathbf{a}(\theta)$.

For each initial vector described above (10) and after performing P iterations ($D = P$) of the CG algorithm, we form a set of residual gradient vectors $\{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P-1}, \mathbf{g}_{\text{cg},P}\}$ (all these vectors are normalized except $\mathbf{g}_{\text{cg},P}$). Therefore, it can be shown (see Appendix A) that if the initial vector $\mathbf{b}(\theta)$ is contained in the signal subspace, then the set of vectors $\mathbf{G}_{\text{cg},P} = \{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P-1}\}$ will also be contained in the column space of $\mathbf{A}(\Theta)$, hence, the orthonormal matrix $\mathbf{G}_{\text{cg},P}^1$ spans the true signal subspace for $\theta = \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, P$, that is,

$$\text{span}\{\mathbf{G}_{\text{cg},P}\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\} \quad (13)$$

and the solution vector $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}(\theta)/\|\mathbf{R}\mathbf{a}(\theta)\|$ also lies in the signal subspace

$$\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P-1}\}. \quad (14)$$

¹ If we perform an eigendecomposition of the tridiagonal matrix $\mathbf{T}_P = \mathbf{G}_{\text{cg},P}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{\text{cg},P}$, we have $\mathbf{T}_P = \sum_{i=1}^P \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H$, then the P eigenvalues λ_i , $i = 1, \dots, P$, of \mathbf{T}_P are the P principal eigenvalues of the covariance matrix \mathbf{R} , and the vectors $\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_{\text{cg},P} \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, P$, (where \mathbf{e}_i is the i th eigenvector of \mathbf{T}_P and \mathbf{y}_i are the Rayleigh-Ritz vectors associated with $\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b})$) are asymptotically equivalent to the principal eigenvectors of \mathbf{R} [17].

Now, when $\theta \neq \theta_j$ for $j \in \{1, \dots, P\}$, $\mathbf{G}_{\text{cg},P+1}^2$ spans the extended subspace yielding (see Appendix A)

$$\text{span}\{\mathbf{G}_{\text{cg},P+1}\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}. \quad (15)$$

In this case, \mathbf{w} is also in the extended signal subspace, that is,

$$\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P}\}. \quad (16)$$

Proposition 1. *After P iterations of the CG algorithm the following equality holds for $\theta = \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, P$:*

$$\mathbf{g}_{\text{cg},P}^H(\theta) = 0, \quad (17)$$

where $\mathbf{g}_{\text{cg},P}$ is the residual CG vector left unnormalized at iteration P .

Proof. Since the gradient vectors $\mathbf{g}_{\text{cg},i}$ generated by the CG algorithm are orthogonal [12], $\text{span}\{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P}\}$ is of rank $P+1$. Using the fact that when $\theta = \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, P$,

$$\text{span}\{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P-1}\} = \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}. \quad (18)$$

Then

$$\text{span}\{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P-1}, \mathbf{g}_{\text{cg},P}\} = \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{g}_{\text{cg},P}\}. \quad (19)$$

From Appendix A, it is shown that each residual gradient vector generated by the CG algorithm when the initial vector is in the signal subspace $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$ will also belong to the signal subspace. This is then the case for $\mathbf{g}_{\text{cg},P}$. Therefore, the rank of $\text{span}\{\mathbf{g}_{\text{cg},0}, \mathbf{g}_{\text{cg},1}, \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P-1}, \mathbf{g}_{\text{cg},P}\}$ reduces to P yielding that in this case $\mathbf{g}_{\text{cg},P}$ should be zero or a linear combination of the other gradient vectors which is not possible since it is orthogonal to all of them. \square

In view of Proposition 1, we use the following localization function as defined in [14, equation (22)]:

$$\mathcal{P}_K(\theta^{(n)}) = \frac{1}{\|\mathbf{g}_{\text{cg},P}^H(\theta^{(n)})\mathbf{G}_{\text{cg},P+1}(\theta^{(n-1)})\|^2}, \quad (20)$$

where $\mathbf{G}_{\text{cg},P+1}(\theta^{(n)})$ is the matrix calculated at step n by performing $D = P$ iterations of the CG algorithm with initial

² We can show that the eigenvalues of the $(P+1) \times (P+1)$ matrix $\mathbf{T}_{P+1} = \mathbf{G}_{\text{cg},P+1}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{\text{cg},P+1}$ (the last vector $\mathbf{g}_{\text{cg},P}$ is normalized) are $\{\lambda_1, \dots, \lambda_P, \sigma^2\}$, where the eigenvalues λ_i , $i = 1, \dots, P$, are the P principal eigenvalues of \mathbf{R} and σ^2 is the smallest eigenvalue of \mathbf{R} . The first P RR vectors from the set $\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_{\text{cg},P+1} \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, P$, are asymptotically equivalents to the principal eigenvectors of \mathbf{R} [17], and the last (RR) vector associated to σ^2 is orthogonal to the principal eigenspace (belonging to the noise subspace), that is, $\mathbf{y}_{P+1}^H \mathbf{A}(\theta) = \mathbf{0}$.

residual vector $\mathbf{g}_{\text{cg},0}(\theta^{(n)}) = \mathbf{b}(\theta^{(n)})$ as defined in (10), that is,

$$\mathbf{G}_{\text{cg},P+1}(\theta^{(n)}) = [\mathbf{g}_{\text{cg},0}(\theta^{(n)}), \mathbf{g}_{\text{cg},1}(\theta^{(n)}), \dots, \mathbf{g}_{\text{cg},P}(\theta^{(n)})] \quad (21)$$

$\theta^{(n)} = n\Delta$ with $n = 1, 2, 3, \dots, 180^\circ/\Delta^\circ$ and Δ is the search angle step.

Note that the choice of using $1/\|\mathbf{g}_{\text{cg},P}(\theta^{(n)})\|^2$ as a localization function was first considered. Since the results were not satisfactory enough, (20) was finally preferred. According to the modified orthonormal AV [16], the normalized gradient CG and the AV are identical because the AV recurrence is formally the same as Lanczos recurrence [12]. Thus, if the initial vector $\mathbf{g}_{\text{cg},0}$ in CG algorithm is parallel to the initial vector in AV, then all successive normalized gradients in CG will be parallel to the corresponding AV vectors (see Appendix B). Let $\mathbf{g}_{\text{av},i}$, $i = 0, \dots, P-1$, represent the orthonormal basis in AV procedure and the last unnormalized vectors by $\mathbf{g}_{\text{av},P}$. Then, it is easy to show that the CG spectra are related to the AV spectra by

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_K(\theta^{(n)}) &= (|c_P(\theta^{(n)})|^2 \\ &\quad \times (\|\mathbf{g}_{\text{av},P}^H(\theta^{(n)})\mathbf{g}_{\text{av},0}(\theta^{(n-1)})\|^2 \\ &\quad + \dots + |c_P(\theta^{(n-1)})|^2 \\ &\quad \times \|\mathbf{g}_{\text{av},P}^H(\theta^{(n)})\mathbf{g}_{\text{av},P}(\theta^{(n-1)})\|^2))^{-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$|c_P(\theta^{(n)})| = \frac{\|\mathbf{g}_{\text{cg},P}(\theta^{(n)})\|}{|\mu_{P-1}(\theta^{(n)})|} \frac{\alpha_P(\theta^{(n)})}{\sqrt{\beta_P(\theta^{(n)})}}, \quad (23)$$

the difference, therefore, between the AV [13, 14] and CG spectra is the scalars $|c_P(\theta^{(n)})|^2$ calculated at steps $n-1$ and n due to the last basis vector that is unnormalized (see Appendix B for the details). It is easy to show that we can obtain a peak in the spectrum if $\theta^{(n)} = \theta_j$, $j = 1, \dots, P$, because the last vector in the basis $\mathbf{g}_{\text{cg},P}(\theta^{(n)}) = 0$. However, when $\theta^{(n)} \neq \theta_j$, $j = 1, \dots, P$, $\mathbf{g}_{\text{cg},P}(\theta^{(n)})$ is contained in the extended signal subspace $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta^{(n)})\}$ and the following relation holds:

$$\text{span}\{\mathbf{G}_{\text{cg},P+1}(\theta^{(n-1)})\} = \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta^{(n-1)})\}. \quad (24)$$

We can note that $\|\mathbf{g}_{\text{cg},P}^H(\theta^{(n)})\mathbf{G}_{\text{cg},P+1}(\theta^{(n-1)})\| \neq 0$ except when $\mathbf{g}_{\text{cg},P}(\theta^{(n)})$ is proportional to $\mathbf{a}(\theta^{(n)})$ and $\mathbf{a}(\theta^{(n)})$ is orthogonal both to $\mathbf{A}(\Theta)$ and $\mathbf{a}(\theta^{(n-1)})$ which can be considered as a very rare situation in most cases.

In real situations, \mathbf{R} is unknown and we use rather the sample average estimate $\hat{\mathbf{R}}$ as defined in (6). From (20), it is clear that when $\theta^{(n)} = \theta_j$, $j = 1, \dots, P$, we will have $\|\hat{\mathbf{g}}_{\text{cg},P}^H(\theta^{(n)})\hat{\mathbf{G}}_{\text{cg},P+1}(\theta^{(n-1)})\|$ not equal to zero but very small and $\hat{\mathcal{P}}_K(\theta^{(n)})$ very large but not infinite.

Concerning the computational complexity, it is worth noting that the proposed algorithm (it is also the case for the AV-based algorithm proposed in [13, 14]) is more complex

than MUSIC since the gradient vectors forming the signal subspace basis necessary to construct the pseudospectrum must be calculated for each search angle. The proposed algorithm is therefore interesting for applications where a very high resolution capability is required in the case of a small number of snapshots and a low signal-to-noise ratio (SNR). This will be demonstrated through intensive simulations in the next section. Also note that when the search angle area is limited, the new algorithm has a comparable computational complexity as MUSIC.

5. SIMULATION RESULTS

In this section, computer simulations were conducted with a uniform linear array composed of 10 isotropic sensors whose spacing equals half-wavelength. There are two equal-power plane waves arriving on the array. The internal noises of equal power exist at each sensor element and they are statistically independent of the incident signal and of each other. Angles of arrival are measured from the broadside direction of the array. First, we fix the signal angles of arrival at -1° and 1° and the SNR's at 10 dB. In Figure 1, we examine the proposed localization function or pseudo-spectrum when the observation data record $K = 50$ compared with that of the AV-based algorithm [13, 14, 18, 19] and of MUSIC. The CG pseudo-spectrum resolves the two sources better than the AV algorithm where the MUSIC algorithm completely fails. Notice that the higher gain of CG method is due to the factor c_p which depends on the norm of the gradient.

In the following, in order to analyze the performance of the algorithms in terms of the resolution probability, we use the following random inequality [20]:

$$\mathcal{P}_K(\theta_m) - \frac{1}{2}(\mathcal{P}_K(\theta_1) + \mathcal{P}_K(\theta_2)) < 0, \quad (25)$$

where θ_1 and θ_2 are the angles of arrivals of the two signals and θ_m denotes their mean. $\mathcal{P}_K(\theta)$ is the pseudo-spectrum defined in (20) as a function of the angle of arrival θ .

To illustrate the performance of the proposed algorithm two experiments were conducted.

Experiment 1 (uncorrelated sources). In this experiment, we consider the presence of two uncorrelated complex Gaussian sources separated by 3° . In Figures 2 and 3, we show the probability of resolution of the algorithms as a function of the SNR (when $K = 50$) and the number of snapshots (with SNR = 0 dB), respectively. For purpose of comparisons, we added the ESPRIT algorithm [3]. As expected, the resolution capability of all the algorithms increases as we increase the number of snapshots K and the SNR. We also clearly note the complete failure of MUSIC as well as ESPRIT to resolve the two signals compared to the two algorithms CG and AV (Krylov subspace-based algorithms). The two figures show that the CG-based algorithms outperforms its counterparts in terms of resolution probability.

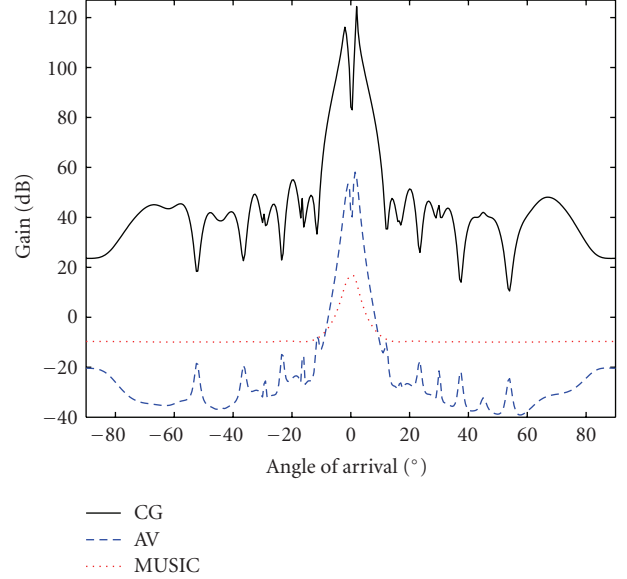


FIGURE 1: CG, AV, and MUSIC spectra ($\theta_1 = -1^\circ$, $\theta_2 = 1^\circ$, SNR1 = SNR2 = 10 dB, $K = 50$).

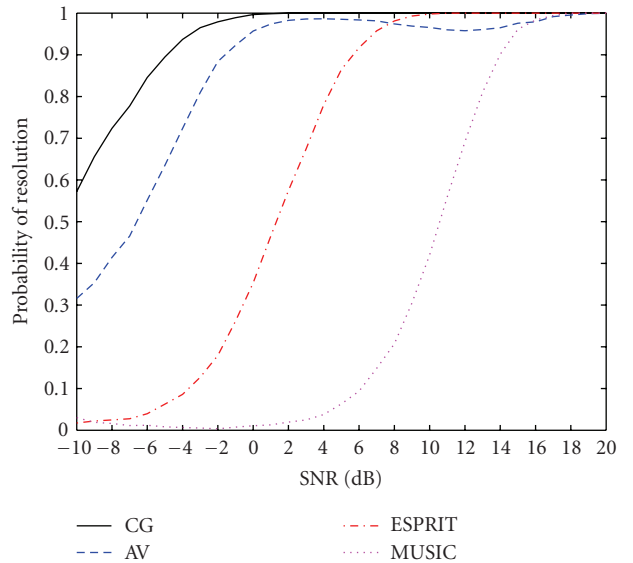


FIGURE 2: Probability of resolution versus SNR (separation 3° , $K = 50$).

Experiment 2 (correlated sources). In this experiment, we consider the presence of two correlated random complex Gaussian sources generated as follows:

$$\mathbf{s}_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2), \quad \mathbf{s}_2 = r\mathbf{s}_1 + \sqrt{1-r^2}\mathbf{s}_3, \quad (26)$$

where $\mathbf{s}_3 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$ and r is the correlation coefficient. Figures 4 and 5 show the probability of resolution of the algorithms for high correlation value $r = 0.7$ with and without

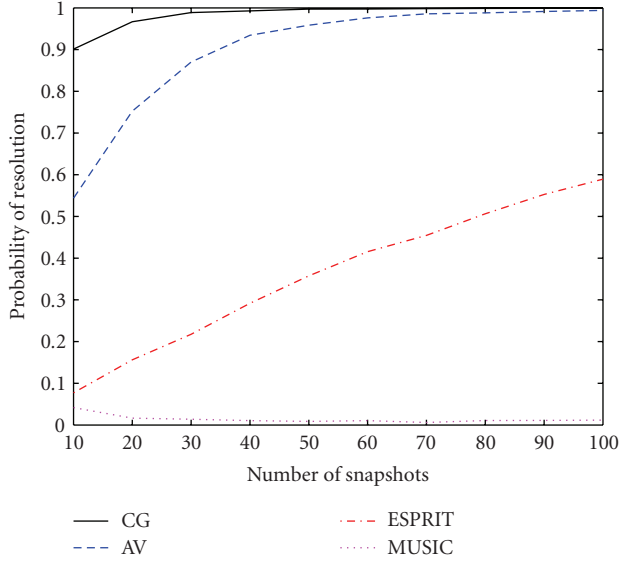


FIGURE 3: Probability of resolution versus number of snapshots (separation 3°, SNR = 0 dB).

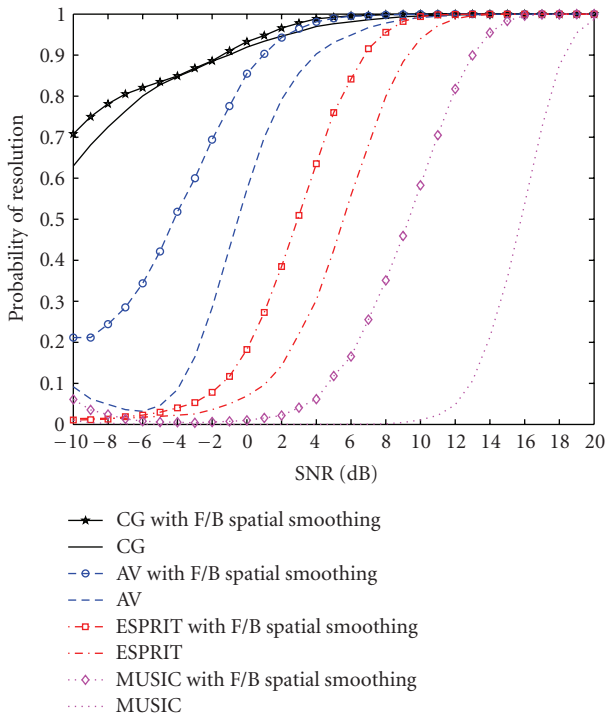


FIGURE 4: Probability of resolution versus SNR (separation 3°, $K = 50$, $r = 0.7$).

forward/backward spatial smoothing (FBSS) [21]. Figure 4 plots the probability of resolution versus SNR for a fixed record data $K = 50$ and Figure 5 plots the probability of resolution versus number of snapshots for an SNR = 5 dB. The two figures demonstrate that the CG-basis estimator still outperforms the AV-basis estimator in probability of resolu-

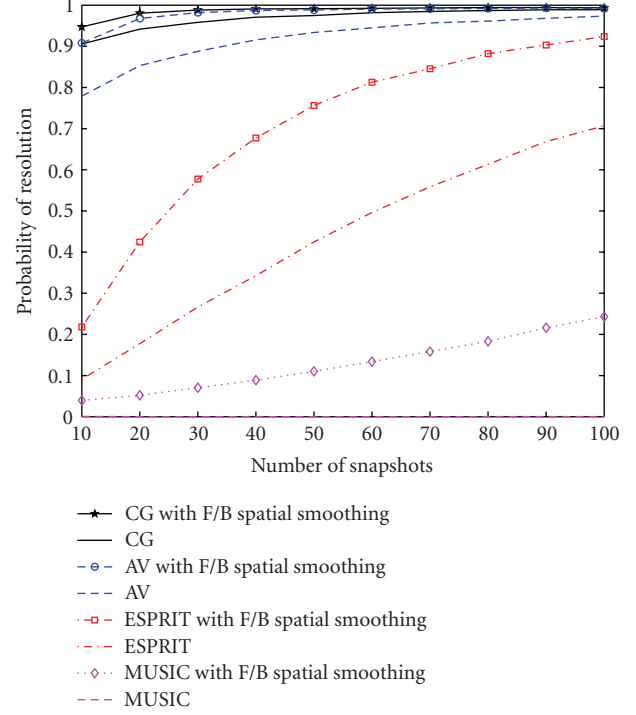


FIGURE 5: Probability of resolution versus number of snapshots (separation 3°, SNR = 5 dB, $r = 0.7$).

tion in the case of correlated sources with or without FBSS. We also note that the CG-based and the AV-based estimators (without FBSS) have better performance than MUSIC and ESPRIT with FBSS, at low SNR and whatever the record data size (Figure 5).

Finally, we repeat the previous simulations for highly correlated sources ($r = 0.9$). At low SNR (see Figure 6), we show that the CG-based method even without FBSS still achieves better results than the AV-based method and over MUSIC and ESPRIT with or without FBSS (<8 dB for ESPRIT with spatial smoothing). In Figure 7, the proposed algorithm reveals again higher performance over MUSIC and ESPRIT with or without FBSS; which is unlike its counterpart the AV-based algorithm where it has less resolution capability compared to ESPRIT with FBSS for data record $K < 70$. We can also notice the improvement of resolution probability for both the CG and AV-based algorithms with FBSS.

6. CONCLUSION

In this paper, the application of the CG algorithm to the DOA estimation problem has been proposed. The new method does not resort to the eigendecomposition of the observation data covariance matrix. Instead, it uses a new basis for the signal subspace based on the residual vectors of the CG algorithm. Numerical results indicate that the proposed algorithm outperforms its counterparts which are the AV

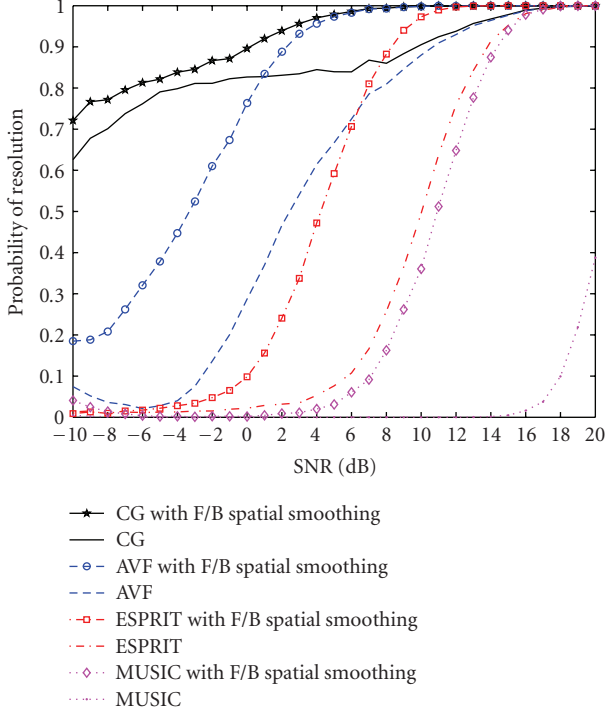


FIGURE 6: Probability of resolution versus SNR (separation 3° , $K = 50$, $r = 0.9$).

algorithm, the classical MUSIC and ESPRIT, in terms of resolution capacity at a small record data and low SNR.

APPENDICES

A.

Let us assume that $\mathbf{b}(\theta) \in \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$. It follows from Algorithm 1 that

$$\mathbf{g}_{\text{cg},1} = \mathbf{b}(\theta) - \alpha_1 \mathbf{R}\mathbf{b}(\theta) \quad (\text{A.1})$$

also belongs to $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$ since

$$\mathbf{R}\mathbf{b}(\theta) = \sum_{j=1}^P E[s_j^2] (\mathbf{a}(\theta_j)^H \mathbf{b}(\theta)) \mathbf{a}(\theta_j) + \sigma^2 \mathbf{b}(\theta) \quad (\text{A.2})$$

is a linear combination of vectors of $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$. Then $\mathbf{d}_2 = \mathbf{g}_{\text{cg},1} - \beta_1 \mathbf{d}_1$ also belongs to $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$ (with $\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}(\theta)$). In the same way, we have

$$\mathbf{g}_{\text{cg},2} = \mathbf{g}_{\text{cg},1} - \alpha_2 \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.3})$$

with

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{R}\mathbf{d}_2 \quad (\text{A.4})$$

also belonging to the extended signal subspace since

$$\mathbf{R}\mathbf{d}_2 = \sum_{j=1}^P E[s_j^2] (\mathbf{a}(\theta_j)^H \mathbf{d}_2(\theta)) \mathbf{a}(\theta_j) + \sigma^2 \mathbf{d}_2(\theta). \quad (\text{A.5})$$

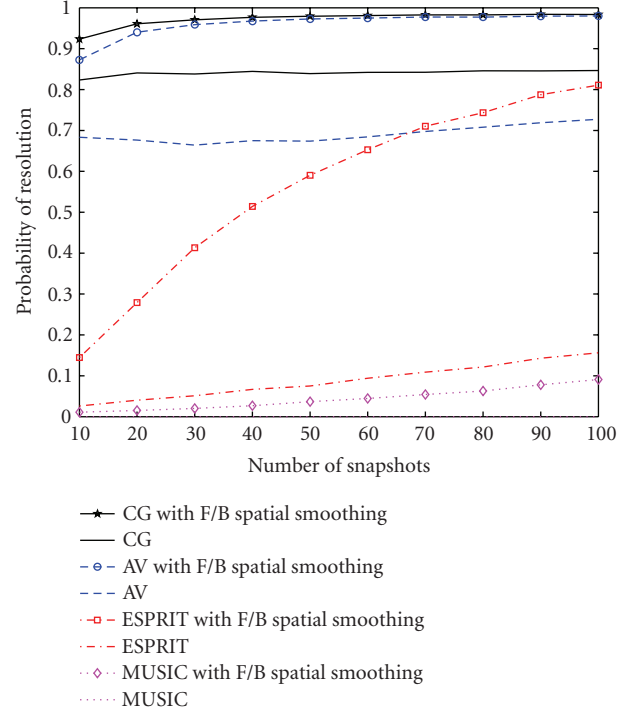


FIGURE 7: Probability of resolution versus number of snapshots (separation 3° , SNR = 5 dB, $r = 0.9$).

More generally, it is then easy to check that when $\mathbf{g}_{\text{cg},i-1}$ and $\mathbf{d}_{\text{cg},i-1}$ are vectors of $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$, then $\mathbf{g}_{\text{cg},i}$ and $\mathbf{d}_{\text{cg},i}$ are also vectors of $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$. Now when $\theta = \theta_j$, the extended subspace reduces to $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$.

B.

Let $\mathbf{g}_{\text{av},i}$ be the auxiliary vector (AV) [18, 19]; it was shown in [16] that a simplified recurrence for $\mathbf{g}_{\text{av},i+1}$, $i \geq 1$, is given by

$$\mathbf{g}_{\text{av},i+1} = \frac{(\mathbf{I} - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{\text{av},l} \mathbf{g}_{\text{av},l}^H) \mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{av},i}}{\|(\mathbf{I} - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{\text{av},l} \mathbf{g}_{\text{av},l}^H) \mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{av},i}\|}, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{g}_{\text{av},1} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{av},0} - \mathbf{g}_{\text{av},0} (\mathbf{g}_{\text{av},0}^H \mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{av},0})}{\|\mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{av},0} - \mathbf{g}_{\text{av},0} (\mathbf{g}_{\text{av},0}^H \mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{av},0})\|}, \quad (\text{B.2})$$

where $\mathbf{g}_{\text{av},0}$ is the first vector in the AV basis. Notice that the auxiliary vectors are restricted to be orthonormal in contrast to the nonorthogonal AV work in [19, 22]. Recall that if initial vectors are equals, that is,

$$\mathbf{g}_{\text{av},0} = \mathbf{g}_{\text{cg},0} = \mathbf{b}(\theta), \quad (\text{B.3})$$

then it is easy to show from Algorithm 1 that

$$\frac{\mathbf{g}_{\text{cg},1}}{\|\mathbf{g}_{\text{cg},1}\|} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{cg},0} - \mathbf{g}_{\text{cg},0} (\mathbf{g}_{\text{cg},0}^H \mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{cg},0})}{\|\mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{cg},0} - \mathbf{g}_{\text{cg},0} (\mathbf{g}_{\text{cg},0}^H \mathbf{R}\mathbf{g}_{\text{cg},0})\|} = -\mathbf{g}_{\text{av},1}. \quad (\text{B.4})$$

From (B.1) we can obtain

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}_i\| \mathbf{g}_{av,i+1} &= \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i} - (\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}) \mathbf{g}_{av,i} - (\mathbf{g}_{av,i-1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}) \mathbf{g}_{av,i-1} \\ \delta_i \mathbf{g}_{av,i+1} &= \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i} - \gamma_i \mathbf{g}_{av,i} - \delta_{i-1} \mathbf{g}_{av,i-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Thus, the last equation (B.5) is the well-known Lanczos recurrence [12], where $\|\mathbf{t}_i\| = \|(\mathbf{I} - \sum_{l=i-1}^i \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}\|$ and the coefficients γ_i and δ_i are the elements of the tridiagonal matrix $\mathbf{G}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{G}_{av,i}$, where $\mathbf{G}_{av,i}$ is the matrix formed by the i normal AV vectors. From the interpretation of Lanczos algorithm, if the initial gradient CG algorithm $\mathbf{g}_{cg,0}$ is parallel to the initial $\mathbf{g}_{av,0}$, then all successive normalized gradients in CG are the same as the AV algorithm [12], that is,

$$\mathbf{g}_{av,i} = (-1)^i \frac{\mathbf{g}_{cg,i}}{\|\mathbf{g}_{cg,i}\|}, \quad i \geq 1. \quad (\text{B.6})$$

From the expression for the CG algorithm, we can express the gradient vectors $\mathbf{g}_{cg,i+1}$ in terms of the previous gradient vectors using line 6 and 9 of Algorithm 1, then we can write

$$\frac{\mathbf{g}_{cg,i+1}}{\alpha_{i+1}} = -\mathbf{R} \mathbf{g}_{cg,i} + \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \mathbf{g}_{cg,i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \mathbf{g}_{cg,i-1}. \quad (\text{B.7})$$

Multiplying and dividing each term of (B.7) by the norm of the corresponding gradient vector results in [23]

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\beta_{i+1}}}{\alpha_{i+1}} \frac{\mathbf{g}_{cg,i+1}}{\|\mathbf{g}_{cg,i+1}\|} \\ = -\mathbf{R} \frac{\mathbf{g}_{cg,i}}{\|\mathbf{g}_{cg,i}\|} + \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \frac{\mathbf{g}_{cg,i}}{\|\mathbf{g}_{cg,i}\|} - \frac{\sqrt{\beta_i}}{\alpha_i} \frac{\mathbf{g}_{cg,i-1}}{\|\mathbf{g}_{cg,i-1}\|}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

If (B.8) is identified with (B.5), it yields

$$\begin{aligned} \delta_i &= \frac{\sqrt{\beta_{i+1}}}{\alpha_{i+1}}, \\ \gamma_i &= \frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \quad i \geq 1, \\ \gamma_1 &= \mathbf{g}_{av,0}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0} = \frac{1}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

We will now prove the relation between the unnormalized last vectors $\mathbf{g}_{cg,P}$ and $\mathbf{g}_{av,P}$. From [13], the last unnormalized vector in AV algorithm is given by

$$\mathbf{g}_{av,P} = (-1)^{P+1} \mu_{P-1} \left(\mathbf{I} - \sum_{l=P-1}^{P-2} \mathbf{g}_{av,l} \mathbf{g}_{av,l}^H \right) \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,P-1}, \quad (\text{B.10})$$

where

$$\mu_i = \mu_{i-1} \frac{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i-1}}{\mathbf{g}_{av,i}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,i}}, \quad i > 1, \quad (\text{B.11})$$

$$\mu_1 = \frac{\mathbf{g}_{av,1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,0}}{\mathbf{g}_{av,1}^H \mathbf{R} \mathbf{g}_{av,1}}. \quad (\text{B.12})$$

Using (B.5) and (B.9), (B.12) can be rewritten as

$$\mu_1 = \frac{\delta_1}{\gamma_2} = \frac{\sqrt{\beta_2}}{\alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^{-1} \quad (\text{B.13})$$

and a new recurrence for μ_i can be done with the CG coefficients as

$$\mu_i = \mu_{i-1} \frac{\sqrt{\beta_{i+1}}}{\alpha_{i+1}} \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{-1}, \quad i > 1, \quad (\text{B.14})$$

hence from (B.6), we can obtain

$$\mathbf{g}_{cg,P} = (-1)^P \frac{\|\mathbf{g}_{cg,P}\|}{|\mu_{P-1}|} \frac{\alpha_P}{\sqrt{\beta_P}} \mathbf{g}_{av,P} \quad (\text{B.15})$$

so the difference between the last unnormalized CG basis and the last unnormalized AV basis is the scalar

$$c_P = (-1)^P \frac{\|\mathbf{g}_{cg,P}\|}{|\mu_{P-1}|} \frac{\alpha_P}{\sqrt{\beta_P}}. \quad (\text{B.16})$$

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to express their gratitude to the anonymous reviewers for their valuable comments, especially the key result given in (22).

REFERENCES

- [1] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research: the parametric approach," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 4, pp. 67–94, 1996.
- [2] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.
- [3] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, 1989.
- [4] R. Kumaresan and D. W. Tufts, "Estimating the angles of arrival of multiple plane waves," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 19, no. 1, pp. 134–139, 1983.
- [5] M. Viberg, B. Ottersten, and T. Kailath, "Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 11, pp. 2436–2449, 1991.
- [6] H. Chen, T. K. Sarkar, S. A. Dianat, and J. D. Brule, "Adaptive spectral estimation by the conjugate gradient method," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 34, no. 2, pp. 272–284, 1986.
- [7] X. Yang, T. K. Sarkar, and E. Arvas, "A survey of conjugate gradient algorithms for solution of extreme eigen-problems of a symmetric matrix," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 10, pp. 1550–1556, 1989.

- [8] P. S. Chang and A. N. Willson Jr., "Adaptive spectral estimation using the conjugate gradient algorithm," in *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '96)*, vol. 5, pp. 2979–2982, Atlanta, Ga, USA, May 1996.
- [9] Z. Fu and E. M. Dowling, "Conjugate gradient eigenstructure tracking for adaptive spectral estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 5, pp. 1151–1160, 1995.
- [10] S. Choi, T. K. Sarkar, and J. Choi, "Adaptive antenna array for direction-of-arrival estimation utilizing the conjugate gradient method," *Signal Processing*, vol. 45, no. 3, pp. 313–327, 1995.
- [11] P. S. Chang and A. N. Willson Jr., "Conjugate gradient method for adaptive direction-of-arrival estimation of coherent signals," in *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '97)*, vol. 3, pp. 2281–2284, Munich, Germany, April 1997.
- [12] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md, USA, 3rd edition, 1996.
- [13] R. Grover, D. A. Pados, and M. J. Medley, "Super-resolution direction finding with an auxiliary-vector basis," in *Digital Wireless Communications VII and Space Communication Technologies*, vol. 5819 of *Proceedings of SPIE*, pp. 357–365, Orlando, Fla, USA, March 2005.
- [14] R. Grover, D. A. Pados, and M. J. Medley, "Subspace direction finding with an auxiliary-vector basis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 2, pp. 758–763, 2007.
- [15] S. Burykh and K. Abed-Meraim, "Reduced-rank adaptive filtering using Krylov subspace," *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2002, no. 12, pp. 1387–1400, 2002.
- [16] W. Chen, U. Mitra, and P. Schniter, "On the equivalence of three reduced rank linear estimators with applications to DS-CDMA," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 9, pp. 2609–2614, 2002.
- [17] G. Xu and T. Kailath, "Fast subspace decomposition," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 3, pp. 539–551, 1994.
- [18] D. A. Pados and S. N. Batalama, "Joint space-time auxiliary-vector filtering for DS/CDMA systems with antenna arrays," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 9, pp. 1406–1415, 1999.
- [19] D. A. Pados and G. N. Karystinos, "An iterative algorithm for the computation of the MVDR filter," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 2, pp. 290–300, 2001.
- [20] Q. T. Zhang, "Probability of resolution of the MUSIC algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 4, pp. 978–987, 1995.
- [21] S. U. Pillai and B. H. Kwon, "Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 1, pp. 8–15, 1989.
- [22] H. Qian and S. N. Batalama, "Data record-based criteria for the selection of an auxiliary vector estimator of the MMSE/MVDR filter," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 10, pp. 1700–1708, 2003.
- [23] D. Segovia-Vargas, F. Iñigo, and M. Sierra-Pérez, "Generalized eigenspace beamformer based on CG-Lanczos algorithm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 8, pp. 2146–2154, 2003.

Hichem Semira was born on December 21, 1973 in Constantine, Algeria. He received the B.Eng. degree in electronics in 1996 and the Magistère degree in signal processing in 1999 both from Constantine University (Algeria). He is now working towards Ph.D. degree in the Department of Electronics at Annaba University (Algeria). His research interests are in signal processing for communications, and array processing.



Hocine Belkacemi was born in Biskra, Algeria. He received the engineering degree in electronics from the *Institut National d'Electricité et d'Electronique (IN-ELEC)*, Boumerdes, Algeria, in 1996, the Magistère degree in electronic systems from *École Militaire Polytechnique*, Bordj El Bahri, Algeria, in 2000, the M.S. (D.E.A.) degree in control and signal processing and the Ph.D. degree in signal processing both from *Université de Paris-Sud XI*, Orsay, France, in 2002 and 2006, respectively. He is currently an Assistant Teacher with the radio communication group at the *Conservatoire National des Arts et Métiers CNAM*, Paris, France. His research interests include array signal processing with application to radar and communications, adaptive filtering, non-Gaussian signal detection and estimation.



Sylvie Marcos received the engineer degree from the *Ecole Centrale de Paris* (1984) and both the Doctorate (1987) and the *Habilitation* (1995) degrees from *Université de Paris-Sud XI*, Orsay, France. She is *Directeur de Recherche* at the National Center for Scientific Research (CNRS) and works in *Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS)* at Supélec, Gif-sur-Yvette, France. Her main research interests are presently array processing, spatio-temporal signal processing (STAP) with applications in radar and radio communications, adaptive filtering, linear and nonlinear equalization and multiuser detection for CDMA systems.



Interference Cancellation Using a Single Snapshot

Hocine Belkacemi¹, Hichem Semira² and Sylvie Marcos³

^{1,3}Laboratoire des Signaux et Systèmes
CNRS/Supélec, 91192 Gif sur Yvette, France.
{belkacemi, marcos}@lss.supelec.fr

²Annaba University,
Electronic and Electrical engineering dept. Algeria
se_hichem@yahoo.fr

Abstract- In this paper, we show that a single snapshot using a uniform linear array can be applied to interferences cancellation problems in spatial array signal processing. In this context, the antenna weight vector is calculated using a projection matrix constructed from a single snapshot instead of using the eigen-decomposition of the sample covariance matrix. The benefits of this method are two-fold; it reduces the computational cost required by the eigen-decomposition and the number of snapshots. We demonstrate the effectiveness of the proposed method through simulations of different scenarios including coherent and uncorrelated interferences.

I. INTRODUCTION

Adaptive beamforming has found numerous applications in radar, sonar, seismology, array processing, and other areas. The basic algorithm is the sample matrix inversion (SMI), it involves average output power minimization for a set of input data vectors subject to constraints on the beam pattern. However, the SMI algorithm tends to produce high sidelobes pattern and presents a low convergence rate (requires wide sense stationary (WSS) sample support of K snapshots equal to twice the number N of sensors to obtain a signal to interference plus noise ratio SINR performance with 3dB of the optimal SINR in the Gaussian case [1]). To remedy this, an eigen-based beamforming approach has been proposed [1]. One of the well known algorithms of this approach is the eigencanceller (EC) [2, 3]. The key idea of the EC is the separation of the space of observations C^N into interference and noise subspaces and computing the beamformer weight to lie into the noise subspace with an orthogonality constraint between the two subspaces. It is shown in an asymptotic analysis that this algorithm can achieve the same performance of the SMI with only $2r$ snapshots (where r is the number of jammers, in general $r \ll N$) with low sidelobes pattern [4]. However, in spite of the good performance that this algorithm can offer, the computational complexity involved in the

subspaces calculations and the required number of snapshots is important shortcomings in real time applications.

In this paper, based on the work presented by Zhang *et al.* [5, 6], a new algorithm for calculating the weight vector of the beamformer using just a single snapshot is presented. In section II we introduce the data model and the eigencanceller method. The proposed canceller algorithm based on a single snapshot is given in section III. After simulations in section IV, a few concluding remarks are drawn in section V.

II. PROBLEM FORMULATION

A. Signal Model

Consider a uniform linear array composed of N identical sensors on which M ($M = 1 + r$, $M < N$) narrowband plane waves, centered around a known frequency, say ω_0 , impinge on the array from distinct locations (one signal with a known direction of arrival (DOA) θ_1 and r interference signals with unknown DOAs $\{\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{r+1}\}$). For simplicity, assume that the sources are far-field of the array. In this case the only parameter that characterizes the location of the source is its direction-of-arrival θ .

Suppose that it is desired to receive only the source at θ_1 , referred to as the desired source, and reject all the other r sources, referred to as interferences.

The observation vector \mathbf{x} of the sensors output can be written

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

where $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_M]^T \in C^{M \times 1}$ is the vector of signal amplitudes, $\mathbf{n} \in C^{N \times 1}$ is an additive noise vector, and $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)] \in C^{N \times M}$ is the matrix of the steering vectors whose m^{th} column $\mathbf{a}(\theta_m)$ is the steering vector of source m with DOA θ_m , $m=1, \dots, M$,

$$\mathbf{a}(\theta_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[1, e^{j\omega_m}, e^{j2\omega_m}, \dots, e^{j(N-1)\omega_m} \right]^T \quad (2)$$

where $\omega_m = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_m$ in which λ is the wavelength at the operating frequency and d the spacing between the array sensors.

Under the assumption that the noise is spatially and temporally white, the covariance matrix of \mathbf{x} is given by

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] = \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (3)$$

where $(\cdot)^H$, \mathbf{I}_N denote the transpose conjugate and the $N \times N$ identity matrix, respectively. $\mathbf{R}_s = \mathbf{E}[\mathbf{s} \mathbf{s}^H]$ is the signal covariance matrix. We notice that the correlation among the signals can be arbitrary. Specifically, the desired signal can be fully correlated with interferences, as happens in the case of specular multipath propagation and "smart" jamming. In practice, the data covariance matrix can be estimated from the sample covariance matrix

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}(k)^H \quad (4)$$

where K is the number of snapshots and $\mathbf{x}(k)$ is the k th snapshot.

B. The Eigencanceller

For interferences cancellation purposes not all signals are equally treated; the desired signal is to be enhanced while interferences are to be suppressed. To accomplish this, we suggest to use the block diagram of figure 1. Prior to any analysis it is necessary to prevent any signal coming from the desired direction $\mathbf{a}(\theta_i)$ to preclude its cancellation and thus retains only the interference contribution. Therefore, a blocking matrix $\mathbf{B} \in C^{(N-1) \times N}$ is appropriately designed such that \mathbf{B} spans the nullspace of $\mathbf{a}(\theta_i)$; namely $\mathbf{B} \mathbf{a}(\theta_i) = 0$. The blocking matrix \mathbf{B} which excludes the desired signal from the data is obtained from the relation [2]

$$\mathbf{B} \mathbf{a}(\theta) = (e^{j\omega} - e^{j\omega_i}) \tilde{\mathbf{a}}(\theta) \quad (5)$$

where $\mathbf{a}(\theta)$ is a steering vector of any direction θ and $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$ is the same as $\mathbf{a}(\theta)$ restricted to $(N-1)$ dimensional space¹. The elements of \mathbf{B} can be found from (5) by equating coefficients of the two equal polynomials

¹ For blocking d signals the matrix \mathbf{B} can be obtained from equating the coefficients of the following equation [2]

$$\mathbf{B} \mathbf{a}(\theta) = (e^{j\omega} - e^{j\omega_i}) (e^{j\omega} - e^{j\omega_2}) \dots (e^{j\omega} - e^{j\omega_r}) \tilde{\mathbf{a}}(\theta)$$

$\tilde{\mathbf{a}}(\theta) \in C^{N-d}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -e^{j\omega_i} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -e^{j\omega_i} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -e^{j\omega_i} & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

The observed data $\mathbf{y} \in C^{(N-1) \times 1}$ at the blocking matrix output can be defined as

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{B} \mathbf{n} \quad (7)$$

where $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_2), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\theta_{r+1})] \in C^{(N-1) \times r}$ is the interference steering vectors and $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_r]^T$ is the altered source vector amplitude with element $\tilde{s}_m = (e^{j\omega_m} - e^{j\omega_i}) s_m$. The covariance matrix of interference plus noise component \mathbf{y} is $\hat{\mathbf{R}}_y = \mathbf{B} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{B}^H \in C^{(N-1) \times (N-1)}$. Note that the reduction in dimension space is dictated by the removal of the desired signal. We wish to design a linear combiner (complex-valued weighting

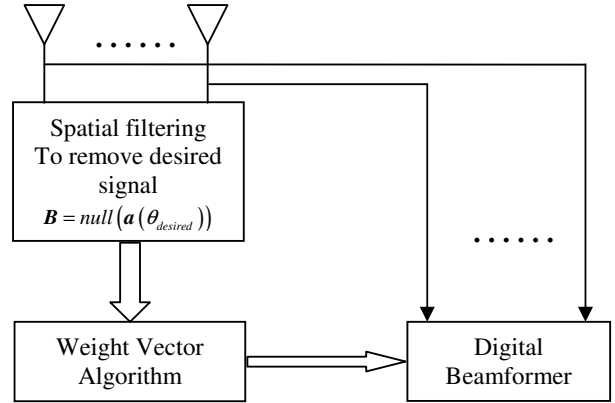


Fig. 1. Block diagram of an Interference Canceller

vector $\mathbf{w} \in C^{N-1}$) to cancel the interferences and retain the desired signal without distortion. This problem can be solved by the application of one of several performance criteria [7] (Mean square error (MSE) criterion, Signal to Noise Ratio (SNR) criterion, Minimum noise Variance (MV) criterion). For convenience we here only present a reduced rank beamformer, the eigencanceller method, that is given by the relation [2]

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I}_{N-1} - \hat{\mathbf{V}}_i \hat{\mathbf{V}}_i^H) \tilde{\mathbf{a}}(\theta_i) \quad (8)$$

where $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$ is the desired steering vector of dimension $(N-1) \times 1$ and the columns of $\hat{\mathbf{V}}_i \in C^{(N-1) \times r}$ span the interference subspace. A common method to calculate $\hat{\mathbf{V}}_i$ is

to retain the eigenvectors of $\hat{\mathbf{R}}_y$ corresponding to the dominant eigenvalues.

III. PROPOSED ALGORITHM

The main drawback of the eigencanceler method is the high computational cost needed to develop the whole structure (projection matrix) due to the eigen-decomposition of the sample covariance matrix (SCM). The need to the finite sample support (number of samples to estimate the SCM), and the problem of the inherent nonstationary nature of the processes push us to use a computationally simple projection method [4] to cancel the interferences based only on a single snapshot. After filtering by \mathbf{B} the snapshot at the i th sensor can be expressed as

$$y_i = \sum_{m=2}^{r+1} \tilde{s}_m e^{j(i-1)\omega_m} + \tilde{n}_i \quad (9)$$

Let us define the r vectors

$$\mathbf{q}_l = [q_{l0}, q_{l1}, \dots, q_{lL-1}]^T \quad l = 1, 2, \dots, r \quad (10)$$

where

$$q_{lt} = \sum_{n=L}^{N-1} y_{n-l} y_{n-t}^* + y_{n-L+t+l}^* y_{n-L+t+l} \quad (11)$$

In fact, vector \mathbf{q}_l is formed by performing forward and backward spatial smoothing of the signals on $(N-L)$ subarrays, each with L sensors $1 \leq L \leq N-1$.

For high INR (Interference to Noise Ratio), (11) can be approximated by

$$q_{lt} \cong \sum_{n=L}^{N-1} \left(\sum_{m=2}^{r+1} \sum_{k=2}^{r+1} \tilde{s}_m \tilde{s}_k^* e^{j(n-1)\omega_m} e^{-j(n-1)\omega_k} e^{-j(n-1)\omega_k} e^{j(n-1)\omega_m} + \sum_{m=2}^{r+1} \sum_{k=2}^{r+1} \tilde{s}_m \tilde{s}_k^* e^{-j(n-L)\omega_m} e^{-j(n-L)\omega_k} e^{j(n-L)\omega_k} e^{j(n-L)\omega_m} \right) \quad (12)$$

and more compactly

$$q_{lt} = \sum_{k=2}^{r+1} \left(\sum_{m=2}^{r+1} u_{km} e^{-j\omega_m} \right) e^{j\omega_k} \quad t = 0, 1, \dots, L-1 \quad (13)$$

where

$$u_{km} = \sum_{n=L}^{N-1} \left(\tilde{s}_m \tilde{s}_k^* e^{j(n-1)\omega_m} e^{j(n-1)\omega_k} + \tilde{s}_m^* \tilde{s}_k e^{j(n-L)\omega_m} e^{j(n-L)\omega_k} \right) \quad (14)$$

Replacing (13) in (10) and after some algebraic manipulations we get

$$\mathbf{q}_l = [\mathbf{a}(\theta_2) \quad \mathbf{a}(\theta_3) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_{r+1})] \left[\sum_{m=2}^{r+1} u_{lm} e^{-j\omega_m} \sum_{m=2}^{r+1} u_{2m} e^{-j\omega_m} \right. \\ \left. \dots \sum_{m=2}^{r+1} u_{mm} e^{-j\omega_m} \right]^T \quad (15)$$

where $\mathbf{a}_L(\theta_m) = [1, e^{j\omega_m}, \dots, e^{j(L-1)\omega_m}]^T$ is the steering vector of the m^{th} source of dimension $L \times 1$, and from (15) we can obtain

$$\mathbf{q}_l = \sum_{m=2}^{r+1} \alpha_{ml} \mathbf{a}_L(\theta_m) \quad l = 1, \dots, r \quad (16)$$

where

$$\alpha_{kl} = \sum_{m=2}^{r+1} u_{km} e^{-j\omega_m} \quad (18)$$

The vector \mathbf{q}_l is a linear combination of $\mathbf{a}_L(\theta_m)$ ($m=2, \dots, r+1$).

We conclude that the vectors \mathbf{q}_l ($l=1, \dots, r$) approximately belong to the interference subspace approximately as long as the INR is high. So the vectors \mathbf{q}_l ($l=1, \dots, r$) span the interference subspace. Then we can write

$$\text{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_r\} = \text{span}\{\mathbf{A}_L\} \quad (16)$$

An orthonormal subspace $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r]$ with

$\mathbf{u}_l \in C^{L \times 1}$ ($l=1, \dots, r$) can be obtained by applying the Gram-Schmidt orthogonalisation to the vectors \mathbf{q}_l ($l=1, \dots, r$). The beamformer weight vector is then given by

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I}_L - \mathbf{U}\mathbf{U}^H) \mathbf{a}_L(\theta_1) \quad (17)$$

IV. SIMULATION RESULTS

In this section, we give some simulation results to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm based on a single snapshot. A uniform array with ten sensors with one-half a wavelength interelement spacing was used in all the simulations. There are four signals impinging on the array, representing one desired signal which arrives broadside (0°) and three jammers with the direction of arrival angles and respective INR (as ordered pairs): $(-30^\circ, 30\text{dB})$; $(30^\circ, 30\text{dB})$; $(60^\circ, 30\text{dB})$.

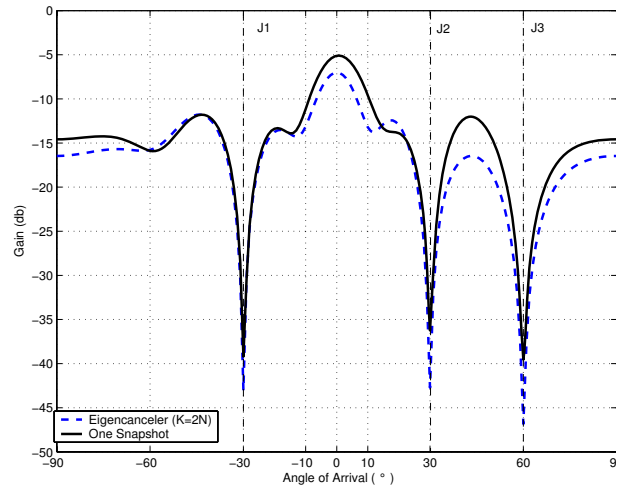


Fig. 2. One snapshot ($L=7$) and eigencanceler ($K=2N$) beampattern without signal blocking, one desired signal at boresight with $\text{SNR}=0\text{db}$, 3 uncorrelated interference sources with $\text{INR}=30\text{db}$.

In the first scenario of simulation we consider the performance of the proposed method without signal blocking matrix. In Figure 2, we consider the case where the desired signal is weak and three jammers uncorrelated with themselves and with the desired signal. We can clearly note the attenuation of the interfering signals without altering the desired one. This is explained by the fact that the desired signal lie in the noise subspace. However, in the case of high SNR desired signal and, as expected, both methods attenuate all the four signals (including the desired signal) (as shown in Figure 3). It is then necessary to remove the desired signal from the data to prevent its cancellation.

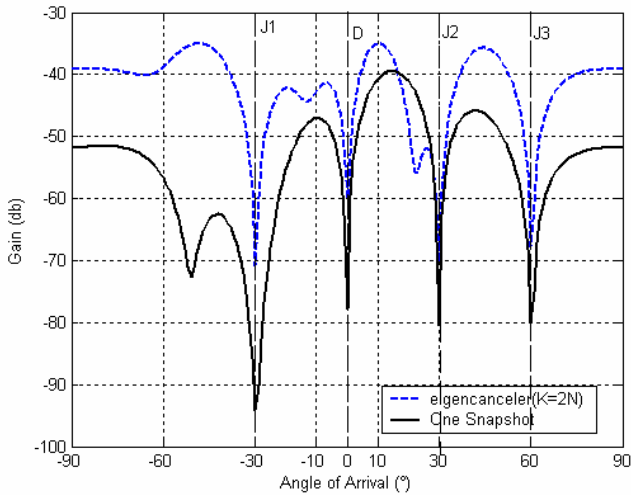


Fig. 3. One snapshot ($L=7$) and eigencanceller ($K=2N$) beam pattern without signal blocking, one desired signal at boresight with $SNR=20dB$, 3 uncorrelated interference sources with $INR=30dB$.

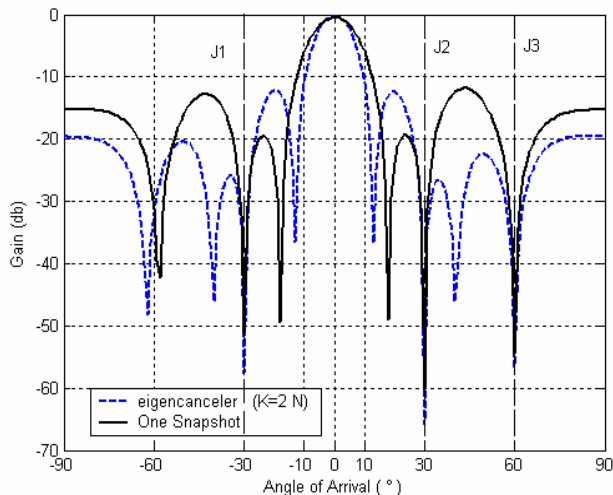


Fig. 4. One snapshot ($L=7$) and eigencanceller ($K=2N$) beam pattern with blocking matrix \mathbf{B} , one desired signal at boresight with $SNR=20dB$, 3 uncorrelated interference sources with $INR=30dB$.

The same scenario as before is now considered with a blocking of the desired signal using the matrix \mathbf{B} as defined in (6). As shown in figure 4, we note that all three jammers are attenuated while the desired signal is maintained. It is logical to see that the mainlobe beamwidth of the eigencanceller is smaller than the mainlobe beamwidth of the proposed method because the aperture of the array is reduced (using $(N-L)$ subarrays).

In the second scenario, we consider that the jammers are fully correlated (coherent) between themselves and with the desired signal. Figure 5, shows the better interferences cancellation provided by the proposed algorithm in the case of coherent signals. This is explained by the fact that the proposed method includes a spatial smoothing process. This latter decorrelates the coherent signals and thus improves the performance of the proposed method which is not the case in the eigen-canceller.

Finally, in the third scenario we keep the same scenario as the second one, but the jammer arriving from -30° was assumed uncorrelated with the other three signals (desired source and the two jammers). As shown in Figure 6 the proposed algorithm always puts deep nulls in the direction of arrival of all the jammers.

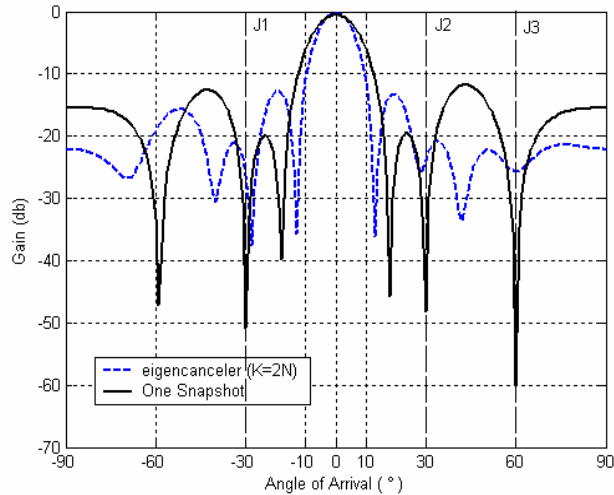


Fig. 5. One snapshot ($L=7$) and eigencanceller ($K=2N$) beam pattern with blocking matrix \mathbf{B} , one desired signal at boresight with $SNR=20dB$, 3 coherent interference sources with $INR=30dB$.

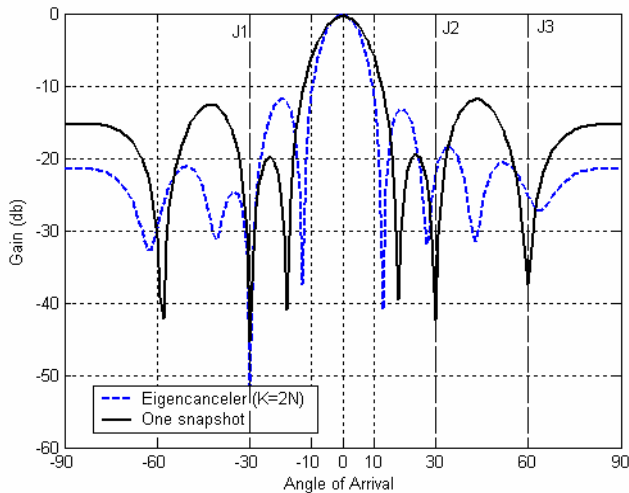


Fig. 6. One snapshot ($L=7$) and eigencanceller ($K=2N$) beampattern with blocking matrix \mathbf{B} , one desired signal at boresight with $\text{SNR}=20\text{dB}$, 1 uncorrelated interference ($-30^\circ, 30\text{dB}$) and 2 coherent interferences ($30^\circ, 30\text{dB}$) and ($60^\circ, 30\text{dB}$).

V. CONNCLUSION

We have presented a significant interferer cancellation using a uniform linear array in the single snapshot case. The proposed method does not compute the covariance matrix or its eigendecomposition; it uses only one snapshot of data. Hence the method is computationally simple and beneficial to real-time processing. Moreover, the proposed approach is capable of handling all type of signals; i.e, coherent, uncorrelated and mixed signals as it has been shown in simulation.

REFERENCES

- [1] I.S. Reed et al. "Rapid convergence rates in adaptive arrays". *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.10 pp. 853-863, Mar. 1974
- [2] A. M. Haimovich and Y. Bar-Ness, "An Eigenanalysis interference canceller" *IEEE Trans. On Signal processing*, vol. 39, pp. 76-84, Jan. 1991.
- [3] A.M Haimovich, "The eigencanceller: adaptive radar by eigen-analysis methods", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 32, pp.532-542, 1996
- [4] A.M. Haimovich, "Asymptotic distribution of the conditional signal-to-noise ratio in eigenanalysis-base adaptive array", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 33, no. 3, pp.988-997, July 1997

- [5] M. Zhang, W. Yang and L. Li, "New method of constructing the projection matrix for array processing in single snapshot case", *Proc. IEE*, pt. F, vol. 138, no. 5, pp. 407-410, Oct. 1991
- [6] M. Zhang, W. Yang and L. Li, "A novel Approach of resolution enhancement with application in array processing of single snapshot", *IEEE Trans. On Antenna. Propagation.*, vol. 39, no. 8, pp. 1125-1129, Aug. 1991.
- [7] R. A. Monzingo and T. W. Miller, *Introduction of Adaptive Arrays*, New York: Wiley, 1980

A NOVEL CONJUGATE GRADIENT-BASED SOURCE LOCALIZATION ALGORITHM

Hichem Semira*, Hocine Belkacemi† and Nouredine Doghmane*

*Département d'électronique, Université d'Annaba, Algérie

†Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS) CNRS,

91192 Gif-sur-Yvette, FRANCE

email: se_hichem@yahoo.fr, belkacemi@lss.supelec.fr, ndoghmane@univ-annaba.org

ABSTRACT

A new method for the subspace-based direction of arrival (DOA) estimation procedure without eigenvector computation is proposed. From the residual vectors of the Conjugate Gradient (CG) method which form a Krylov subspace basis, we build a test spectrum for DOA estimation. This approach is based on the same recently developed procedure which uses a non-eigenvector basis derived from the auxiliary vectors (AV). The AV basis calculation algorithm is replaced by the residual vectors of the CG algorithm. The initial conditions of the CG algorithm start with the linear transformation of the array response search vector by the input covariance matrix. Then, successive orthogonal gradient vectors are derived to form a basis of the signal subspace. The proposed CG-based method outperforms its counterparts in term of resolution of closely spaced-sources with a small number of snapshots and a low signal-to-noise ratio (SNR).

1. INTRODUCTION

Array processing deals with the problem of extracting information from signals received simultaneously by an array of sensors. In many fields such as radar, underwater acoustics and geophysics, the information of interest is the direction of arrival (DOA) of waves transmitted from radiating sources and impinging on the sensor array. Over years, many approaches to the problem of source DOA estimation have been proposed [1]. The subspace based methods, which resort to the decomposition of the observation space into a noise subspace and a source subspace, have proved to have high resolution (HR) capabilities and to yield accurate estimates. These methods almost always use the eigen-decomposition of the covariance matrix of the received signals. Among the most famous of these HR methods are MUSIC [2], ESPRIT [3] and MIN-NORM [4]. Though their HR capabilities, the performance of these methods degrades substantially in the case of closely spaced sources with a small number of snapshots and at a low SNR. In [5, 6] the Conjugate Gradient (CG) have been suggested to implement an adaptive version of pisarenko's harmonic decomposition for spectral and DOA estimation.

All these methods are using CG algorithm (with a modified version) for solving the generalized eigensystem problem. Here, the CG algorithm is applied to generate a non-eigenvector based basis of the signal subspace. The proposed algorithm is based on the residual vectors of the CG algorithm [7] to approximate the signal subspace (no-eigen-decomposition is required). Using the same approach, as described in [8], we form a localization function based only on the collapse of the rank of the extended signal subspace from $P + 1$ to P (where P is the number of sources) when the initial vector falls in the signal subspace.

2. PROBLEM FORMULATION

We consider a uniformly spaced linear array having M omnidirectional sensors receiving P ($P < M$) stationary random signals emanating from uncorrelated or possibly correlated or coherent point sources. The received signals are known to be embedded in zero mean spatially white Gaussian noise with unknown variance σ^2 , with the signals and the noise being mutually statistically independent. We will assume the signals to be narrow-band with center frequency ν_0 . The k th M -dimensional vector of the array output can be represented as

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=1}^P \mathbf{a}(\theta_j) s_j(k) + \mathbf{n}(k) \quad (1)$$

where $s_j(k)$ is the j th signal, $\mathbf{n}(k) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$ is the additive noise vector and $\mathbf{a}(\theta_j)$ is the steering of the array toward direction θ_j that is measured relatively to the normal of the array and takes the following form

$$\mathbf{a}(\theta_j) = \left[1, e^{j2\pi\nu_0\tau_j}, e^{j2\pi2\nu_0\tau_j}, \dots, e^{j2\pi(M-1)\nu_0\tau_j} \right]^T \quad (2)$$

where $\tau_j = \frac{d}{c} \sin(\theta_j)$, in which c and d are the signal propagation speed and inter-element spacing respectively. Equation (1) can be rewritten in a compact form as

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (3)$$

with

$$\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)] \quad (4)$$

and

$$\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_P(k)]^T \quad (5)$$

We can now form the covariance matrix of the received signals of dimension $M \times M$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} [\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}(\Theta)^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (6)$$

where $(\cdot)^H$, \mathbf{I} denote the transpose conjugate and the $M \times M$ identity matrix, respectively. $\mathbf{R}_s = E [\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ is the signal covariance matrix. It is in general a diagonal matrix when the sources are uncorrelated and is non-diagonal and non-singular for partially correlated sources. In practice, the data covariance matrix \mathbf{R} is not available but a maximum likelihood estimate $\hat{\mathbf{R}}$ based on a finite number K of data samples can be obtained as

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k) \quad (7)$$

and the estimation of the directions of arrival of sources is based on this sample covariance matrix.

3. CONJUGATE GRADIENT (CG) ALGORITHM

Let us consider the following linear system of equations

$$\mathbf{R} \mathbf{b} = \mathbf{b} \quad (8)$$

where $\mathbf{R} \in \mathcal{C}^{N \times N}$ is symmetric positive definite. The CG method is an iterative inversion technique for the solution of the linear system in (8) instead of a direct inversion of the matrix \mathbf{R} . A possible approach to derive the CG [7] solution of the linear system (8) is the minimization of the following cost function

$$\Phi(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - 2\text{Re}(\mathbf{b}^H \mathbf{w}) \quad (9)$$

Table 1 depicts a basic version of the CG.

After D iterations of the Conjugate Gradient Algorithm the set of search directions $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_D\}$ and the set of gradients (residuals) $\mathbf{G}_{cg,D} = \{\mathbf{g}_{cg,0}, \dots, \mathbf{g}_{cg,D-1}\}$ have some properties summarized as follows [7]:

1. The gradient vectors are mutually orthogonal i.e. $\mathbf{g}_{cg,i}^H \mathbf{g}_{cg,j} = 0, \forall i \neq j$

Table 1. Basic Conjugate Gradient Algorithm

$\mathbf{w}_0 = 0, \mathbf{d}_1 = \mathbf{g}_{cg,0} = \mathbf{b}, \rho_0 = \mathbf{g}_{cg,0}^H \mathbf{g}_{cg,0}$
for $i = 1$ to D do
$\mathbf{v}_i = \mathbf{R} \mathbf{d}_i$
$\alpha_i = \frac{\rho_{i-1}}{\mathbf{d}_i^H \mathbf{v}_i}$
$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{d}_i$
$\mathbf{g}_{cg,i} = \mathbf{g}_{cg,i-1} - \alpha_i \mathbf{v}_i$
$\rho_i = \mathbf{g}_{cg,i}^H \mathbf{g}_{cg,i}$
$\beta_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}} = \frac{\ \mathbf{g}_{cg,i}\ ^2}{\ \mathbf{g}_{cg,i-1}\ ^2}$
$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{g}_{cg,i} + \beta_i \mathbf{d}_i$
End for

$$2. \mathbf{g}_{cg,i}^H \mathbf{d}_j = 0, \forall j < i$$

$$3. D_D = \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_D\} \equiv \text{span}\{\mathbf{G}_{cg,D}\} \equiv \mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b})$$

where $\mathcal{K}^D(\mathbf{R}, \mathbf{b}) \equiv \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{R}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{R}^{D-1}\mathbf{b}\}$ denotes the Krylov subspace associated with the pair (\mathbf{R}, \mathbf{b}) [7]. The last property indicate that the CG and AV span the same subspace namely Krylov subspace [9]. Notice that an orthonormal basis is found using the CG algorithm by normalization of each gradient i.e., $\mathbf{g}_{cg,i}(\theta) = \frac{\mathbf{g}_{cg,i}(\theta)}{\|\mathbf{g}_{cg,i}(\theta)\|}, i = 1, \dots, D$.

4. PROPOSED DOA ESTIMATION ALGORITHM

In this section, we consider the signal model presented above, adopting the same basis procedure developed in the work of Grover *et al.* [8], to generate an extended signal subspace of rank $P + 1$. Let us define the initial vector $\mathbf{b}(\theta)$ as follows [8]:

$$\mathbf{b}(\theta) = \frac{\mathbf{R}(\theta)}{\|\mathbf{R}(\theta)\|} \quad (10)$$

where $\mathbf{a}(\theta)$ is the search vector for $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$. When the P sources are uncorrelated and $\theta = \theta_i$ for $i \in \{1, \dots, P\}$ we have

$$\mathbf{R}\mathbf{a}(\theta_i) = (E[s_i^2]M + \sigma^2)\mathbf{a}(\theta_i) + \sum_{j=1; j \neq i}^P E[s_j^2] (\mathbf{a}^H(\theta_j)\mathbf{a}(\theta_i))\mathbf{a}(\theta_j) \quad (11)$$

from (11) we note that $\mathbf{b}(\theta_i)$ is a linear combination of the P signal steering vectors and thus lies in the signal subspace of dimension P . However, when $\theta \neq \theta_i$ for $i \in \{1, \dots, P\}$,

$$\mathbf{R}(\theta) = \sum_{j=1}^P E[s_j^2] \mathbf{a}^H(\theta_j)\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}(\theta_j) + \sigma^2\mathbf{a}(\theta) \quad (12)$$

\mathbf{b} is a linear combination of the $P + 1$ steering vectors $\{\mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)\}$ and thus lies in the extended signal subspace of dimension $P + 1$ which includes the true signal subspace of dimension P plus the search vector $\mathbf{a}(\theta)$. Having defined the initial vector as described above and after performing P iterations ($D = P$) of the CG algorithm, we form a set of basis by using normalized residual vectors of the CG algorithm (table 1) $\mathbf{G}_{cg,P} = \{\mathbf{g}_{cg,0}, \mathbf{g}_{cg,1}, \dots, \mathbf{g}_{cg,P-1}\}$. It can be shown that [10] if the initial \mathbf{b} is contained in the true signal subspace. In other words, for $\theta = \theta_i, i = 1, 2, \dots, P$ we have

$$\text{span}\{\mathbf{G}_{cg,P}\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$$

and also the solution vector $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{\|\mathbf{R}(\theta)\|}$ will lie in the signal subspace

$$\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{g}_{cg,0}, \mathbf{g}_{cg,1}, \dots, \mathbf{g}_{cg,P-1}\}$$

However, when $\theta \neq \theta_i$ for $i \in \{1, \dots, P\}$, $\mathbf{G}_{cg,P+1}$ span the extended subspace we have

$$\text{span}\{\mathbf{G}_{cg,P+1}\} \equiv \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta), \mathbf{a}(\theta)\}$$

in this case \mathbf{w} will lie in the extended signal subspace i.e.,

$$\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{g}_{cg,0}, \mathbf{g}_{cg,1}, \dots, \mathbf{g}_{cg,P}\}$$

Proposition 1 After P iterations of the CG algorithm the following equality holds for $\theta = \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, P$

$$\mathbf{g}_{cg,P}^H(\theta) = 0$$

Where $\mathbf{g}_{cg,P}$ is the residual Conjugate Gradient vector left unnormalized at iteration P .

Proof: we have $\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{G}_{cg,P}\}$ and since $\text{span}\{\mathbf{G}_{cg,P}\} \equiv \text{span}\{D_P\}$ and the \mathbf{d}_i are independent. It follows that the iteration cannot progress beyond P steps to converge to the full rank solution \mathbf{w} , [Theorem 10.2.5, [7]]¹. This implies that at the $(P+1)$ th iteration, we have $\mathbf{w}_P = \mathbf{w}$ and using the fact that $\mathbf{g}_{cg,P} = \mathbf{b} - \mathbf{R}_P \mathbf{w}$, therefore, $\mathbf{g}_{cg,P} = 0$. Using proposition 1, and as initial vector as defined in (10), we can define the following localization function [8]:

$$\mathcal{P}_K(\theta^{(n)}) = \frac{1}{\|\mathbf{g}_{cg,p}^H(\theta^{(n)}) \mathbf{G}_{cg,p+1}(\theta^{(n-1)})\|^2} \quad (13)$$

where $\theta^{(n)} = n\Delta$ with $n = 1, 2, 3, \dots, \frac{180^\circ}{\Delta}$ and Δ is the search angle step. It is easy to show that we can obtain a peak in the spectrum if $\theta^{(n)} = \theta_i, i = 1, \dots, P$ because the last vector in the basis $\mathbf{g}_{cg,P}(\theta^{(n)}) = 0$. When on the other hand, $\theta^{(n)} \neq \theta_i, i = 1, \dots, P$, $\mathbf{g}_{cg,P}(\theta^{(n)})$ is contained in the extended signal subspace, hence $\|\mathbf{g}_{cg,P}^H(\theta^{(n)}) \mathbf{G}_{cg,p+1}(\theta^{(n-1)})\| \neq 0$ because a part of $\mathbf{g}_{cg,P}(\theta^{(n)})$ lies in the subspace of $\mathbf{G}_{cg,p+1}(\theta^{(n-1)})$. According to the modified orthonormal AV [9], the normalized gradient CG and the AV are identical because the AV recurrence is formally the same as Lanczos recurrence [7]. Thus, if the initial vector $\mathbf{g}_{cg,0}$ in CG Algorithm is parallel to the initial vector in AV, then all successive normalized gradient in CG will be parallel to the corresponding AV vectors. Let $\mathbf{g}_{av,i}, i = 0, \dots, P-1$ represent the orthonormal basis in AV procedure and the last unnormalized vectors by $\mathbf{g}_{av,P}$ it is easy to show that the CG spectra is related to the AV spectra by

$$\mathcal{P}_K(\theta^{(n)}) = |c_P(\theta^{(n)})|^{-2} \left(\|\mathbf{g}_{av,p}^H(\theta^{(n)}) \mathbf{g}_{av,0}(\theta^{(n-1)})\|^2 + \dots + |c_P(\theta^{(n-1)})|^2 \|\mathbf{g}_{av,p}^H(\theta^{(n)}) \mathbf{g}_{av,P}(\theta^{(n-1)})\|^2 \right)^{-1}$$

The difference between the CG spectra and the AV spectra is due to the last unnormalized vectors $\mathbf{g}_{av,P}$ [8] and $\mathbf{g}_{cg,P}$. The later relation can be expressed as follows:

$$\mathbf{g}_{cg,P}(\theta^{(n)}) = (-1)^P \frac{\|\mathbf{g}_{cg,P}(\theta^{(n)})\|}{\|\mu_{P-1}(\theta^{(n)})\|} \frac{\alpha_P(\theta^{(n)})}{\sqrt{\beta_P(\theta^{(n)})}} \mathbf{g}_{av,P}(\theta^{(n)}) \quad (14)$$

with

$$|c_P(\theta^{(n)})| = \frac{\|\mathbf{g}_{cg,P}(\theta^{(n)})\|}{\|\mu_{P-1}(\theta^{(n)})\|} \frac{\alpha_P(\theta^{(n)})}{\sqrt{\beta_P(\theta^{(n)})}} \quad (15)$$

¹Theorem: if $\mathbf{R} = \mathbf{B} + \mathbf{I}$ where \mathbf{I} is the identity and \mathbf{B} is a matrix of rank P , then CG algorithm converges to the full rank solution in at most $P+1$ steps.

and

$$\mu_i = \mu_{i-1} \frac{\sqrt{\beta_i}}{\alpha_i} \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{-1}, i > 1 \quad (16)$$

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\beta_1}}{\alpha_1} \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^{-1} \quad (17)$$

In real situation \mathbf{R} is unknown, we use the sample average estimate $\hat{\mathbf{R}}$ as defined in (7). From (13), it is clear that when $\theta^{(n)} = \theta_i, i = 1, \dots, P$ we have $\|\hat{\mathbf{g}}_{cg,P}^H(\theta^{(n)}) \hat{\mathbf{G}}_{cg,p+1}(\theta^{(n-1)})\| \simeq 0$ and $\hat{\mathcal{P}}_K(\theta^{(n)}) \rightarrow \infty$.

5. SIMULATION RESULTS

In this section, computer simulations were conducted with a uniform linear array composed of 10 isotropic sensors, whose spacing equals half-wavelength. There are two equal-power uncorrelated plane waves arriving at the array. The internal noises of equal power exist at each sensor element and they are statistically independent of the incident signal and of each other. Angles of arrival are measured from the broadside direction of the array. First, we fix the signal angles of arrival at -1° and 1° and the SNR's at 10dB. In Figure 1 we examine the proposed spectrum when the observation data record $K = 50$, that we compare with that of AV [11, 8] and the standard MUSIC. The CG spectra resolves the two sources better than the AV algorithm does, where the MUSIC algorithm completely fails. Notice that the higher gain of CG method is due to the factor $c_P(\theta^{(n)})$ which depends on the norm of the gradient vector. To analyze the performance of the algorithms in terms of the resolution probability, we use the following random inequality [12]

$$|\hat{\theta}_1 - \theta_1| \text{ and } |\hat{\theta}_2 - \theta_2| < |\theta_1 - \theta_2|/2 \quad (18)$$

where θ_1 and θ_2 are the angles of arrivals of the two signals and $\hat{\theta}_1$ and $\hat{\theta}_2$ denotes their estimates using the pseudo-spectrum defined in (13). We have considered the presence of two uncorrelated complex Gaussian sources separated by 3° . Figures 2 and 3 show the probability of resolution of the algorithms as a function of the SNR and the number of snapshots, respectively. To illustrate the performance of the proposed algorithm, we have run the simulation by a search step $\Delta = 0.1^\circ$. For purpose of comparisons, we added the ESPRIT algorithm [3]. We note clearly the complete failure of the MUSIC as well as ESPRIT to resolve the two signal compared to the two algorithms CG and AV (Krylov subspace-based algorithms). The two figures show the outperformance of the CG-based algorithms over its counterparts in term of the resolution probability.

6. CONCLUSION

In this paper, we have proposed the application of the CG algorithm to the DOA estimation problem. The adopted method does not resort to the computation of the eigen-decomposition of the input covariance matrix. Instead they use new basis for the signal subspace based on the residuals vectors of the CG algorithm. Numerical results indicate

that the proposed algorithm outperforms its counterparts which are the AV algorithm, the classical MUSIC and ESPRIT, in terms of resolution capacity at a small record data and low SNR.

7. REFERENCES

- [1] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research," *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 67–94, July 1996.
- [2] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 34, pp. 276–280, March 1986.
- [3] R. Roy and K. Kailath, "Esprit estimation of signal parameter via rotational invariance technique," *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-37, no. 7, pp. 984–995, July 1989.
- [4] R. Kumaresan and D. W. Tufts, "Estimating the angles of arrival of multiple plane waves," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 19, pp. 134–139, 1983.
- [5] H. Chen, T. K. Sarkar, S. A. Dianat, and J. D. Brulé, "Adaptive spectral estimation by the conjugate gradient method," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 34, pp. 272–284, Apr. 1986.
- [6] P. S. Chang and A. N. W. Jr., "Conjugate gradient method for adaptive direction-of-arrival estimation of coherent signals," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing*, Munich, Apr. 1997, pp. 2281–2284.
- [7] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix computations*, 3rd ed. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996.
- [8] R. Grover, D. A. Pados, and M. J. Medley, "Super-resolution direction finding with an auxiliary-vector basis," in *Proc. of SPIE vol 5819, Defense and security Symposium*, Orlando, March 2005, pp. 357–365.
- [9] W. Chen, U. Mitra, and P. Schniter, "On the equivalence of three reduced rank linear estimators with applications to ds-cdma," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 48, no. 9, pp. 2609–2614, Sep. 2002.
- [10] L. Huang, S. Wu, Feng, and L. Zhang, "Low complexity method for signal subspace fitting," *IEE Electronics Letters*, vol. 40, July 2004.
- [11] D. A. Pados and S. N. Batalama, "Joint space-time auxiliary-vector filtering for ds/cdma systems with antenna arrays," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 47, no. 9, pp. 1406–1414, Sep. 1999.
- [12] P. Stoica and A. B. Gershman, "Maximum-likelihood doa estimation by data-supported grid search," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 6, no. 10, pp. 273–275, Oct 1999.

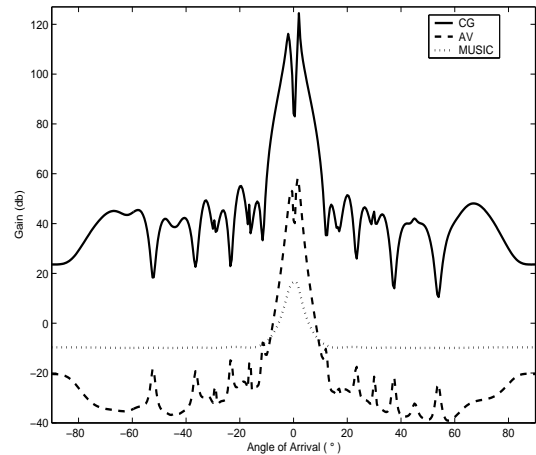


Figure 1. CG, AV, and MUSIC spectra ($\theta_1 = -1^\circ$, $\theta_2 = 1^\circ$, $SNR1 = SNR2 = 10$ db, $K = 50$)

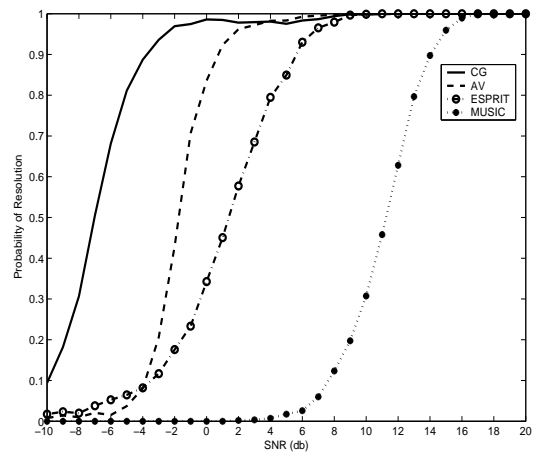


Figure 2. Probability of resolution versus SNR (separation 3° , $K=50$)

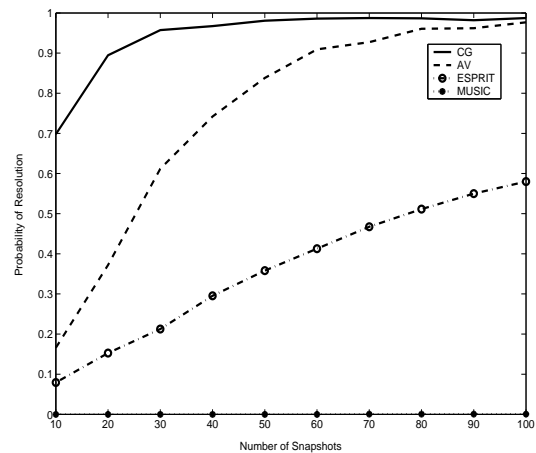


Figure 3. Probability of resolution versus Number of Snapshots (separation 3° , $SNR = 0$ db)

SINGLE SNAPSHOT PROJECTION BASED METHOD FOR AZIMUTH/ELEVATION DIRECTIONS OF ARRIVAL ESTIMATION

Hichem Semira*, Hocine Belkacemi[†] and Noureddine Doghmane*

*Département d'électronique, Université d'Annaba, Algérie

[†]Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS) CNRS,
91192 Gif-sur-Yvette, FRANCE

email: se_hichem@yahoo.fr, belkacemi@lss.supelec.fr, ndoghmane@univ-annaba.org

ABSTRACT

In this paper we address the problem azimuth/elevation directions of arrival estimation using a uniform rectangular array URA. A new low computational cost projection approach, based only on a single snapshot is proposed. It consists of two one dimensional (1-D) search Procedures using projection matrices constructed from the rows and the columns of the data matrix, such approach is followed by a pair matching method. Simulations results show that the new method is effective when the signal-to-noise ratio (SNR) is high.

1. INTRODUCTION

Array signal processing has found its potential application in many fields such as radar, sonar, communication and seismology. One practical problem of interest is the direction-of-arrival (DOA) estimation. The well known high resolution techniques used to distinguish multiple closely spaced sources are the subspace based methods such as MUSIC [1]. These techniques are not suitable for real-time applications due of the eigen decomposition of the covariance matrix which has a high computational cost. Although generalization of such techniques to two dimensional (2-D) DOA estimation case using a uniform rectangular array is relatively straightforward, and has received much attention in the literature [2, 3, 4], its computational and storage costs are further increased due to the 2-D spectrum peaks search procedure.

In this paper, a low complexity single snapshot projection based method for two-dimensional (2-D) DOA estimation is proposed. This method is based on an extension of the work presented in [5]. The new technique constructs a new projection matrix based on a single snapshot rather than using eigen decomposition of the covariance matrix. Moreover, this approach uses a 1-D search procedures and thus it results in a considerable computational saving. This paper is organized as follows, in section 2 we introduce the data model. The proposed method is given in section 3. After the simulations we give in section 4 a few concluding remarks are drawn in section 5.

2. SYSTEM MODEL

We consider a uniform rectangular array (URA) of $M \times N$ omnidirectional sensors receiving K ($K < M$ and $K < N$) stationary random signals emanating from far field uncorrelated or possibly correlated point sources, as shown in figure 1. The element spacings along the X-direction and Y-direction are d_x and d_y respectively. The DOA of the k th source is denoted by (θ_k, ϕ_k) . We assume that all the source signals are narrow-band with center frequency ν_0 . x_{mn} denotes the output of the mn^{th} array element which is located at the intersection of the m th row and the n th column and can be expressed as

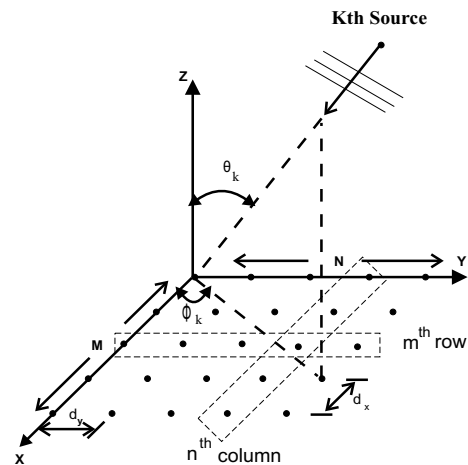


Figure 1. The 2-D $M \times N$ rectangular array

$$x_{mn} = \sum_{k=1}^K s_k e^{j\pi((m-1)u_k + (n-1)v_k)} + w_{mn} \quad (1)$$

$$m = 1, \dots, M$$

$$n = 1, \dots, N$$

where without loss of generality, we assume that $d_x = d_y = \frac{\lambda_0}{2}$ with λ_0 being signal wavelength, s_k is the complex amplitude of the k th wavefront, $u_k = \sin\theta_k \cos\phi_k$,

$v_k = \sin\theta_k \sin\phi_k$, and w_{mn} is the additive white gaussian noise at the $(m, n)^{th}$ array element.

The received vector $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^{NM \times 1}$ at the rectangular array can be defined as

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_M^T]^T = \sum_{k=1}^K s_k \mathbf{a}(\theta_k, \phi_k) + \mathbf{w} \quad (2)$$

where the superscript T denotes the transpose, $\mathbf{x}_m \in \mathcal{C}^{N \times 1}$, $m = 1, \dots, M$, are the received vectors at the m th row and $\mathbf{a}(\theta_k, \phi_k)$ being the 2-D source steering vector given by

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta_k, \phi_k) &= [\mathbf{a}(v_k)^T, \dots, e^{j\pi(M-1)u_k} \mathbf{a}(v_k)^T]^T \\ &= \mathbf{a}(u_k) \otimes \mathbf{a}(v_k) \end{aligned} \quad (3)$$

with $\mathbf{a}(u_k) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$ and $\mathbf{a}(v_k) \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ are the steering vectors of the k th source at the n th column and m th row, respectively, defined by

$$\mathbf{a}(u_k) = [1, e^{j\pi u_k}, \dots, e^{j\pi(M-1)u_k}]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{a}(v_k) = [1, e^{j\pi v_k}, \dots, e^{j\pi(N-1)v_k}]^T \quad (5)$$

In the sequel, we denote by $\mathbf{x}_m \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ and $\mathbf{x}_n \in \mathcal{C}^{M \times 1}$, the received signals at the m th row and the n th column of the array, respectively, as following

$$\mathbf{x}_m = [x_{m1}, \dots, x_{mN}]^T = \sum_{k=1}^K s_k e^{j\pi(m-1)u_k} \mathbf{a}(v_k) + \mathbf{w}_m \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_n = [x_{1n}, \dots, x_{Mn}] = \sum_{k=1}^K s_k e^{j\pi(n-1)v_k} \mathbf{a}(u_k) + \mathbf{w}_n \quad (7)$$

where $\mathbf{w}_m \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ and $\mathbf{w}_n \in \mathcal{C}^{M \times 1}$ are the m th row and n th column noise vector respectively. Putting the received 2-D signal in a more compact form renders

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\theta, \phi) \mathbf{s} + \mathbf{w} \quad (8)$$

with

$$\mathbf{A}(\theta, \phi) = [\mathbf{a}(\theta_1, \phi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \phi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K, \phi_K)] \quad (9)$$

and

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_K]^T \quad (10)$$

3. PROPOSED METHOD

The main drawbacks of the 2-D DOA estimation using the classical subspace-based algorithms, such as MUSIC, is their high computational cost. This is due to the eigen-decomposition of the sample covariance matrix and the 2-D search to estimate the DOA of the sources.

In this section we discuss the approach of using a computationally simple projection method [5] to estimate the DOA based only on a single snapshot. The new method employs two 1-D search procedures followed by a pair

matching method which gains much computational savings compared to the classical 2-D search method. The proposed method is based on the fact that the DOA of the k th source (θ_k, ϕ_k) can be solved from the spatial frequencies v_k and u_k if they are properly estimated. In the following, the estimation of v_k and u_k is studied using the rows and columns of single snapshot data matrix, respectively. We first consider the estimation of the spatial frequency v_k , $k = 1, 2, \dots, K$. We define the following $K(K < N)$ vectors [5]

$$\mathbf{h}_l^m = [h_{l0}^m, h_{l1}^m, \dots, h_{lL_r-1}^m]^T \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (11)$$

where

$$h_{lt}^m = \sum_{n=L_r}^N x_{m(n-l)} x_{m(n-t)}^* + x_{m(n-L_r+l+1)}^* x_{m(n-L_r+t+1)} \quad (12)$$

In fact, the set of vectors \mathbf{h}_l^m is formed by performing forward and backward spatial smoothing of the signals on $(N - L_r + 1)$ subarrays using the m th row of URA, each with L_r sensors $1 \leq L_r \leq N$.

for high SNR (Signal to Noise Ratio), (12) can be approximated by

$$\begin{aligned} h_{lt}^m &\cong \sum_{n=L_r}^N \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^K s_k s_p^* e^{j(m-1)\mu_k} e^{j(n-1)\nu_k} e^{-j l \nu_k} \right. \\ &\quad e^{-j(m-1)\mu_p} e^{-j(n-1)\nu_p} e^{j t \nu_p} + \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^K s_k^* s_p \\ &\quad e^{-j(m-1)\mu_k} e^{-j(n-L_r)\nu_k} e^{-j l \nu_k} e^{j(m-1)\mu_p} \\ &\quad \left. e^{j(n-L_r)\nu_p} e^{j t \nu_p} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

where $\mu_k = \pi u_k$ and $\nu_k = \pi v_k$, and more compactly

$$h_{lt}^m \cong \sum_{p=1}^K \left(\sum_{k=1}^K \beta_{pk}^m e^{-j l \nu_k} \right) e^{j t \nu_p} \quad t = 0, 1, \dots, L_r - 1 \quad (14)$$

where

$$\begin{aligned} \beta_{pk}^m &= \sum_{n=L_r}^N \left(s_k s_p^* e^{j(m-1)\mu_k} e^{j(n-1)\nu_k} e^{-j(m-1)\mu_p} \right. \\ &\quad e^{-j(n-1)\nu_p} + s_k^* s_p e^{-j(m-1)\mu_k} e^{-j(n-L_r)\nu_k} \\ &\quad \left. e^{j(m-1)\mu_p} e^{j(n-L_r)\nu_p} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

replacing (14) in (11) and after some algebraic manipulations we get

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_l^m &\cong [\mathbf{a}_{L_r}(v_1) \mathbf{a}_{L_r}(v_2) \dots \mathbf{a}_{L_r}(v_K)] \left[\sum_{k=1}^K \beta_{1k}^m e^{-j l \nu_k} \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^K \beta_{2k}^m e^{-j l \nu_k} \dots \sum_{k=1}^K \beta_{Kk}^m e^{-j l \nu_k} \right]^T \end{aligned} \quad (16)$$

where $\mathbf{a}_{L_r}(v_k) = [1, e^{j\pi v_k}, \dots, e^{j\pi(L_r-1)v_k}]^T$ is the steering vector of the k^{th} source of dimension $L_r \times 1$,

and from (16) we can obtain

$$\mathbf{h}_l^m \cong \sum_{k=1}^K \alpha_{kl}^m \mathbf{a}_{L_r}(v_k) \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (17)$$

where

$$\alpha_{pl}^m = \sum_{k=1}^K \beta_{pk}^m e^{-jlv_k} \quad (18)$$

After obtaining the vectors \mathbf{h}_l^m , $l = 1, 2, \dots, K$, $m = 1, 2, \dots, M$, the final vector \mathbf{h}_l , $l = 1, 2, \dots, K$ can be computed by averaging over the all M \mathbf{h}_l^m vectors

$$\mathbf{h}_l = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{h}_l^m \cong \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \alpha_{kl}^m \right) \mathbf{a}_{L_r}(v_k) \quad (19)$$

the vector \mathbf{h}_l is a linear combination of $\mathbf{a}_{L_r}(v_k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$). Thus it lies in the signal subspace as long as the SNR is high. Consequently, the vectors \mathbf{h}_l ($l = 1, 2, \dots, K$) span the signal subspace. Then we can write

$$\text{span}\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_K\} = \text{span}\{\mathbf{a}_{L_r}(v_1), \dots, \mathbf{a}_{L_r}(v_K)\}$$

An orthonormal subspace $\mathbf{Q}_r = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_K]$ with $\mathbf{q}_l \in \mathcal{C}^{L_r \times 1}$ ($l = 1, 2, \dots, K$) can be obtained by applying the Gram-Schmidt orthonormalisation to the vectors \mathbf{h}_l ($l = 1, 2, \dots, K$). The projection matrix over rows is then given by

$$\mathcal{P}_r = \mathbf{I}_{L_r} - \mathbf{Q}_r \mathbf{Q}_r^H \quad (20)$$

where $(\cdot)^H$, \mathbf{I}_{L_r} denote the transpose conjugate and the $L_r \times L_r$ identity matrix, respectively. So the spatial spectrum using only the rows of the URA can be estimated as

$$S_r(v) = \frac{1}{\mathbf{a}_{L_r}^H(v) \mathcal{P}_r^H \mathcal{P}_r \mathbf{a}_{L_r}(v)} \quad (21)$$

where $\mathbf{a}_{L_r}(v) \in \mathcal{C}^{L_r \times 1}$ is the search vector with $-1 \leq v \leq 1$. Peaks of $S_r(v)$ will indicate v_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Proceeding in the same way, the spatial frequency u_k can be estimated by performing forward and backward spatial smoothing along the columns of the single snapshot data matrix using $(M - L_c + 1)$ subarrays each with L_c sensors $1 \leq L_c \leq M$. We get the equivalent signal subspace defined by the set of vectors \mathbf{g}_l , $l = 1, \dots, K$,

$$\text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_K\} = \text{span}\{\mathbf{a}_{L_c}(u_1), \dots, \mathbf{a}_{L_c}(u_K)\} \quad (22)$$

where $\mathbf{a}_{L_c}(u_k) = [1, e^{j\pi u_k}, \dots, e^{j\pi(L_c-1)u_k}]^T$ is the steering vector of the k^{th} source of dimension $L_c \times 1$ with

$$\mathbf{g}_l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{g}_l^n \quad (23)$$

where $\mathbf{g}_l^n = [g_{l0}^n, g_{l1}^n, \dots, g_{lL_c-1}^n]^T$ $l = 1, 2, \dots, K$

$$g_{lt}^n = \sum_{m=L_c}^M x_{(m-l)n} x_{(m-t)n}^* + x_{(m-L_c+l+1)n} x_{(m-L_c+t+1)n}^* \quad (24)$$

Then u_k ($k = 1, 2, \dots, K$) can be estimated from

$$S_c(u) = \frac{1}{\mathbf{a}_{L_c}^H(u) \mathcal{P}_c^H \mathcal{P}_c \mathbf{a}_{L_c}(u)} \quad (25)$$

where $\mathbf{a}_{L_c}(u) \in \mathcal{C}^{L_c \times 1}$ is the search vector with $-1 \leq u \leq 1$, and

$$\mathcal{P}_c = \mathbf{I}_{L_c} - \mathbf{Q}_c \mathbf{Q}_c^H \quad (26)$$

is the projection matrix over columns, with $\mathbf{Q}_c \in \mathcal{C}^{L_c \times K}$ ($K < M$) is the orthonormal signal subspace over columns of the URA obtained by applying the Gram-Schmidt orthonormalisation procedure to the vectors \mathbf{g}_l ($l = 1, 2, \dots, K$). Peaks of $S_c(u)$ will indicate u_k ($k = 1, 2, \dots, K$).

Once the spatial frequencies v_k and u_k , $k = 1, 2, \dots, K$ are estimated, we use a 2-D pair matching procedure. Here, we use the Condensed Maximum Likelihood CML cost function [6, 7] defined

$$f_{ML} = \log[\mathbf{x}^H \mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_k, \phi_k)}^\perp \mathbf{x}] \quad (27)$$

where $\mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_k, \phi_k)}^\perp = \mathbf{I}_{MN} - \mathbf{a}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{a}(\theta_k, \phi_k)^\dagger$ is the projection matrix that projects onto the subspace orthogonal to the space of $\mathbf{a}(\theta_k, \phi_k)$, and superscript \dagger denotes the pseudoinverse. We have a total of K^2 combination of (u_k, v_k) to be verified. The K smallest outcomes of the cost function f_{ML} indicate the correct combination of (v_k, u_k) , $k = 1, 2, \dots, K$. Then, (v_k, u_k) is correctly matched to the equivalent (θ_k, ϕ_k) pair.

4. SIMULATION RESULTS

In this section, simulation is conducted to examine the effectiveness of the proposed method based on a single snapshot. Assume that there are two uncorrelated sources located at $(45^\circ, 10^\circ)$ and $(45^\circ, 65^\circ)$, respectively, with equal signal to noise ratio (SNR) 10db. The signals impinge on a uniform rectangular array of 5×5 sensors with half wavelength interelement spacing in both axes. In the simulations, we used $L_r = L_c = 4$.

Figures 2, 3 show the spectrum $\hat{S}_r(v)$ and $\hat{S}_c(u)$ as function of the spatial frequency v and u respectively. We note that the two sources are successfully resolved with peaks located at $(v_1 = 0.1242, v_2 = 0.6404)$ and $(u_1 = 0.2946, u_2 = 0.7138)$.

The correct combination of v_k and u_k are determined by performing a 2-D pair matching method using the CML cost function as given in (27), the results are summarized in Table 1. The DOA's computed from the two combination having the lowest output are $(46.42^\circ, 9.87^\circ)$ and $(44.82^\circ, 65.29^\circ)$.

5. CONCLUSION

In this paper a projection based method for two-dimensional direction-of-arrival estimation is presented. The proposed method does not involve the computation of the covariance

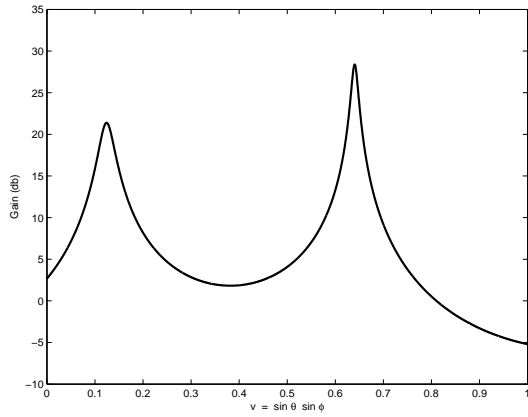


Figure 2. 1-D search output of $v = \sin\theta \sin\phi$

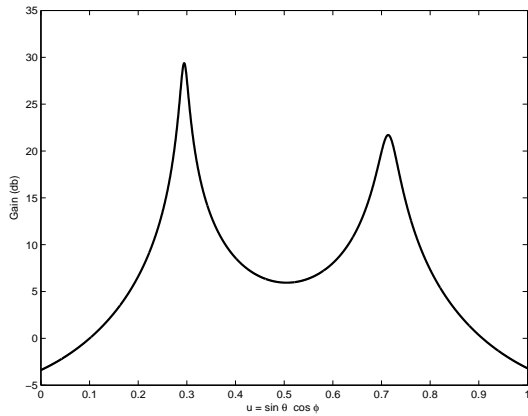


Figure 3. 1-D search output of $u = \sin\theta \cos\phi$

Table 1. 2-D Verification of the correct combination from 1-D processing

Combination	f_{ML} (db)
$v = 0.1242$ $u = 0.2946$	30.2
$v = 0.6404$ $u = 0.2946$	29.54
$v = 0.1242$ $u = 0.7138$	23.25
$v = 0.6404$ $u = 0.7138$	30.34

rectangular arrays,” in *Proc. IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Conf.*, Aug. 2002, pp. 327–331.

- [5] M. zhang, w. yang, and L. Li, “New method of constructing the projection matrix for array processing in single snapshot case,” *Proc. IEE, pt. F*, vol. 138, no. 5, pp. 407–410, Oct. 1991.
- [6] P. Stoica and A. Nehorai, “MUSIC, maximum likelihood, and Cramer–Rao bound,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 5, pp. 720 – 741, May 1989.
- [7] B. M. Radich and K. M. Buckley, “Single-snapshot DOA estimation and source number detection,” *IEEE signal processing letters*, vol. 4, no. 4, pp. 109–111, April 1997.

matrix or its eigen-decomposition to calculate the projection matrix. It is computationally simple and beneficial to real-time processing in the way that it is based on a single snapshot.

6. REFERENCES

- [1] R. O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 34, pp. 276–280, March 1986.
- [2] C.-C. Yeh, J.-H. Lee, and Y.-M. Chen, “Estimating two-dimensional angles of arrival in coherent source environment,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 1, pp. 153–155, Jan. 1989.
- [3] S. Sekizawa, “Estimation of arrival directions using MUSIC algorithm with a planar array,” in *Proc. IEEE Universal Personal Communications*, Italy, 1998, pp. 555–559.
- [4] M. Pesavento and J. Bohme, “Eigenstructure-based azimuth and elevation estimation in sparse uniform