



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-
ANNABA**

**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

**Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LANOS**



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de
Doctorat de 3^{ème} cycle en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

**ÉTUDE ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE
BURGERS ET L'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE
D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES**

Présentée par :

MOUS Ilhem

Directeur de Thèse : LAOUAR Abdelhamid Pr Université B.M Annaba

Devant le jury

Président : MAKHLOUF Amar Pr Université B.M. Annaba
Examineurs : AISSAOUI Med Zine Pr Université de Guelma
HADIDI El-Bahi MCA Université B.M. Annaba
MAOUNI Messaoud Pr Université de Skikda

Soutenue, le 27 Octobre 2020

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu le tout puissant pour la volonté, la force et la patience qu'il m'a donnée durant toutes ces longues années d'études afin que je puisse y arriver là.

*Avant tout, je voudrais adresser mes sincères remerciements, ma gratitude, mon appréciation et mon respect au directeur de cette thèse, Monsieur le professeur **LAOUAR Abdelhamid**, pour sa patience, sa disponibilité et surtout pour ses encouragements tout au long de la préparation de ce travail, ses conseils, son accompagnement précieux et ses efforts pour parvenir à ce résultat.*

*Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail. Merci à Mr le professeur **MAKHLLOUF Amar**, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Au professeur **AISSAOUI Med Zine** de l'Université de Guelma, Dr **HADIDI El-Bahi** MCA de UBMA et au professeur **MAOUNI Messaoud** de l'Université de Skikda qui m'ont honoré d'accepter de faire partie du Jury.*

*Je voudrais exprimer ma profonde gratitude, mes remerciements et ma gratitude à Madame **Lagraf Samira** qui m'a accompagné tout au long de mon cursus universitaire, je la remercie de son soutien, de ses conseils et de son aide envers moi.*

*Je voudrais également remercier le professeur **Ronobir Sarker** pour son aide.*

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques, ont guidé mes réflexions et accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant la préparation de cette thèse.

Je voudrais profiter de cette occasion pour remercier toute l'équipe pédagogique de l'Université 20 août 1955 de Skikda et de l'Université Badji Mokhtar - Annaba.

Je remercie du fond du cœur mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et ont su m'accompagner durant les cycles de mes études, avec leurs précieux conseils et orientations pour atteindre ce niveau de formation.

Je remercie mes frères et mes sœurs pour leur encouragement.

Je tiens à témoigner toute ma gratitude à ma famille et mes amis qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de la préparation de cette thèse.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

DÉDICACES

*Je dédie cette thèse :
à mes chers parents,
à mes frères et ma sœur,
à ma familles de près ou de loin,
à mes amis.*

ÉTUDE ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE BURGERS ET L'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES

Résumé

Cette thèse propose l'étude de trois problèmes, à savoir l'équation $D1$ de Burgers, un système couplé d'équations $D2$ de Burgers aux dérivées conformes fractionnaires par rapport au temps et l'étude d'une procédure d'accélération de convergence pour une classe d'algorithmes itératifs dans un cadre de monotonie.

Concernant l'équation non visqueuse de Burgers, nous nous sommes intéressés à la réduction des ondes de choc au voisinage des points de discontinuité par l'utilisation de l'équation modifiée correspondante.

S'agissant du système couplé d'équations $D2$ de Burgers aux dérivées conformes fractionnaires, nous avons utilisé la transformation de Cole-Hopf pour se ramener à une équation linéaire de type équation de chaleur. Nous avons ensuite établi l'étude discrète et complété par des expérimentations numériques afin de justifier l'intérêt de cette transformation.

Pour la procédure d'accélération des méthodes des approximations successives dans un cadre de monotonie (dite aussi méthode de sous et sur solution), nous avons voulu tester une telle procédure pour des algorithmes itératifs et faire redémarrer le processus itératif avec une nouvelle estimation. Un gain important en temps a été obtenu pour la résolution numérique grâce à cette procédure. Pour l'illustration, deux exemples ont été traités pour montrer l'efficacité de cette procédure.

Mots Clés : Dérivées conformes fractionnaires, Équation de Burgers modifiée, Procédure d'accélération de convergence.

ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF THE BURGERS EQUATION AND ACCELERATION CONVERGENCE FOR A CLASSE OF PROBLEMS

Abstract

The content of this thesis proposes the study of three problems. The first is interested in a study of the Burgers' equation $1D$, the second in a coupled system of fractional conformable derivative $2D$ equations with respect to time and the last in a study of a procedure of convergence acceleration for a class of iterative algorithms in a monotonous framework (called also sub/under solution method).

Concerning the Burgers' equation $1D$, we were interested in a reduction of shock waves near the discontinuity points by the use of the corresponding modified equation.

For the coupled fractional conformable derivative $2D$ Burgers equations system, we used the Cole-Hopf transformation to reduce to a linear equation type heat equation. Afterwards, we completed that by illustrating a numerical experiment.

Regarding the procedure of acceleration of successive approximation methods in a monotonous framework, we wanted to test it for a variante of iterative algorithms. Then, we restart the iterative process with a new estimate. To illustrate, two examples were treated to show the effectiveness of this procedure.

Keywords : Convergence acceleration procedure, Fractional conformal derivatives, Modified Burgers equation.

دراسة تحليلية و عددية لمعادلة برقر و تسريع تقارب فئة من المشاكل.

ملخص

نقترح في هذه الأطروحة دراسة ثلاث مشاكل، وهي معادلة برغر في البعد 1 و نظام مزدوج من معادلات ثنائية الأبعاد ذات مشتقات مطابقة كسرية بالنسبة لزمان ودراسة تسريع التقارب لفئة من الخوارزميات التكرارية في إطار رتيب. فيما يتعلق بمعادلة برغر غير اللزجة، نحن مهتمون بتقليل موجات الصدمة بالقرب من نقاط الانقطاع عن طريق استخدام المعادلة المعدلة المقابلة. فيما يتعلق بالنظام المزدوج لمعادلة ثنائية الأبعاد مع مشتقات مطابقة كسرية، استخدمنا تحويل كول هوبف لتحويلها إلى معادلة الحرارة الخطية. ثم أنشأنا الدراسة العددية واستكملناها بالتجارب العددية لتبرير الجانب النظري. بخصوص تسريع الطرق التقريبية المتتالية في إطار رتيب (يسمى أيضا طريقة تحت وعلى حل)، أردنا اختبار مثل هذا الإجراء للخوارزميات التكرارية. للتوضيح، تم التعامل مع مثالين لتعزيز الجانب النظري.

الكلمات الرئيسية: مشتقات المطابقة الجزئية، معادلة برغر المعدلة، إجراء تسريع التقارب

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures	ix
Liste des tableaux	x
Notations	xi
 Introduction générale	 3
 1 Préliminaires	 9
1.1 Définitions et notations	9
1.2 Méthodes de discrétisation	10
1.3 Équation non linéaire de Burgers	14
1.3.1 Étude analytique de L'Eq.(1.9)	14
 2 Onde de choc de l'équation non visqueuse de Burgers et l'équation modifiée correspondante	 21
2.1 Quelques schémas numériques pour l'Eq.(2.1)	21
2.2 Simulations numériques	28
2.3 Remarque et commentaire	32
 3 Étude d'un système couplé d'équations D2 de Burgers aux dérivées conformes fractionnaires	 35
3.1 Position du problème	36
3.2 Notions de base sur les dérivées conformes fractionnaires	36
3.3 Linéarisation du système (3.1) par la transformation de Cole-Hopf	37
3.3.1 Déterminations des conditions initiales et aux bords	41
3.4 Solution analytique	44
3.4.1 Solution analytique de l'équation de la chaleur Eq.(3.35)	44
3.4.2 Solution analytique du système (3.1)	47
3.5 Analogues discrets de (3.35)	47
3.6 Expérimentations numériques	52
3.7 Commentaire	55

4 Procédure d'accélération de convergence pour la méthode des approximations successives dans un cadre de convergence monotone	57
4.1 Définitions et propositions	57
4.2 Description de la procédure d'accélération de convergence (méthodes des sous/sur solutions)	58
4.3 Algorithme itératif d'origine et l'algorithme accéléré correspondant	62
4.4 Application	63
4.4.1 Problème à frontière libre abstrait	64
4.4.2 Analogues discrets du problème abstrait P	66
4.5 Exemples	66
4.5.1 Exemple 1	66
4.5.2 Exemple 2	69
4.6 Commentaire et remarque	70
Conclusion générale	72
Perspectives	73
Bibliographie	78
Annexe	79

TABLE DES FIGURES

1	Transformation de l'équation d'origine en une équation modifiée	5
1.1	Solutions exacte, numérique et discrète.	11
1.2	Lignes caractéristiques sont représentées en $D1$ et $D2$	16
1.3	Caractéristiques issues de x_1 et x_2 et l'apparition de singularité en $1D$	17
1.4	Saut de u_L à u_R	17
1.5	La solution de (1.8) donnée par (1.19) pour $t \leq 1$ et (1.20), pour $t \geq 1$ utilisant la condition initiale (1.18).	19
1.6	Déplacement des points de discontinuité de la solution pour les différentes valeurs t , avec un saut $s = \frac{1}{2}$ (voir les deux derniers graphes).	19
2.1	Graphes du schéma explicite centré (2.5) et du schéma modifié (2.14)	30
2.2	Graphes du schéma explicite en avant (2.17) et du schéma modifié (2.24)	31
2.3	Graphes du schéma de Lax-Friedrichs (2.29) et du schéma modifié correspondant	32
3.1	Transformation du système d'équations $D2$ de Burgers en une équation de chaleur $D2$	35
3.2	Domaine de résolution	41
3.3	Graphes représentant l'erreur relative.	54
3.4	Graphes des solutions exactes et numériques des équations de Burgers fractionnelles, pour $r = 0.5$, $\Delta x = \Delta y = 0.08$ et $\alpha = 0.25; 0.75$ et 0.92	54
4.1	Graphe $q=f(m)$	68

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Les normes $\ \cdot\ _\infty$, $\ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$ pour différents valeurs de α . . .	29
2.2	Les normes $\ \cdot\ _\infty$, $\ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$ pour les différentes valeurs de β	29
3.1	Erreurs relatives L_1	53
3.2	Erreurs relatives L_∞	53
4.1	Temps d'exécution de l'algorithme Alg1 pour l'exemple 1 . . .	68
4.2	Temps d'exécution de l'algorithme Alg2 pour l'exemple 1 . . .	68
4.3	Temps d'exécution de l'algorithme Alg1 pour l'exemple 2 . . .	70
4.4	Temps d'exécution de l'algorithme Alg2 pour l'exemple 2 . . .	70

NOTATIONS

\mathbb{R}^n : L'espace vectoriel réel de dimension n avec $n \geq 2$.

Ω : Ouvert de \mathbb{R}^n .

$\partial\Omega$: La frontière de Ω .

$M_n(\mathbb{R})$: L'ensemble des matrices carrées.

$L^p(\Omega)$: L'espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1, +\infty)$ intégrables sur Ω .

$L^2(\Omega)$: L'espace des fonctions carrées intégrable pour la mesure de Lebesgue dx .

$L^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω .

$C^1(\Omega)$: L'espace des fonctions absolument continues sur Ω .

$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, v \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \text{ avec } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$.

$L_{Loc}^\infty(\Omega) = \{v \text{ mesurable}, v|_k \in L^\infty(\Omega), \forall k \text{ compact } \subset \Omega\}$.

Pour $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$, on note les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$:

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|.$$

$$\|V\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|V\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|,$$

et pour une matrice $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients a_{ij} , on note par :

$$\|\mathcal{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$, où $\lambda_i(A), i = 1, \dots, n$ sont les valeurs propres de A .

Eq : Équation.

EDP : Équation aux dérivées partielles.

EDO : Équation différentielle ordinaire.

MDF : Méthode des différences finies.

MEF : Méthode des éléments finis.

MVF : Méthode des volumes finis.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'analyse numérique est une discipline à l'interface des mathématiques et de l'informatique. Elle s'intéresse tant aux fondements qu'à la mise en pratique des méthodes permettant de résoudre, par des calculs purement numériques, des problèmes d'analyse mathématique. Plus précisément, l'analyse numérique est l'étude des algorithmes permettant de résoudre numériquement en discrétisation les problèmes mathématiques continus (distingués des mathématiques discrètes). Et comme en général, on ne peut pas calculer la solution d'une EDP de manière analytique explicite, par conséquent on a recours à la discrétisation en temps et en espace pour se ramener à un système d'équations de dimension finie. En effet, la discrétisation est la transposition d'un état continu (fonction, modèle, variable, équation) en un équivalent discret. Ce procédé constitue en général une étape préliminaire à la résolution numérique d'un problème pour sa programmation sur machine.

Dans cette thèse, nous avons étudié l'analyse mathématique et numérique de trois problèmes. Le premier s'intéresse à une classe d'équations de type équations de transport et de diffusion qui sont des modèles mathématiques (voir, [8, 19, 28, 32, 42]) intervenant pour décrire, le transfert d'énergie dans un milieu matériel sous différentes formes (thermique, rayonnement, . . .), la dynamique de particules en interaction avec la matière et l'évolution de certaines populations d'organismes vivants (dynamique des populations structurées, . . .). Parmi ces équations on a l'équation de Burgers. D'un point de vue mathématique, l'équation de Burgers est un sujet très intéressant et suggestif : il s'avère qu'une étude de celle-ci conduit à la plupart des idées qui se posent dans le domaine des ondes hyperboliques non linéaires. En physique, c'est une équation aux dérivées partielles fondamentale issue de la mécanique des fluides. Elle apparaît

dans divers domaines de mathématiques appliquées : la modélisation de la dynamique des gaz et le trafic routier ; elle doit son nom à Johannes Martinus Burgers (1895-1981). Cette équation est considérée comme une simplification d'un modèle plus complexe et sophistiqué, et est utilisée comme un outil pour comprendre certains comportements internes du problème de Navier Stokes [28, 32, 41]. En effet, l'équation de Burgers monodimensionnel se déduit de l'équation de Navier Stokes en négligeant la pression et la gravitation. L'évaluation unidimensionnelle de telle équation a fait l'objet d'une attention considérable depuis les études des années 1940, principalement en tant que problème modèle de l'interaction entre phénomènes non linéaires et dissipatifs [8, 19, 32, 41]. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la recherche de la solution analytique et numérique de l'équation 1D visqueuse de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

où, r ($r > 0$) est le coefficient de diffusion (ou de viscosité) et $\partial^2 u / \partial x^2$ est le terme de diffusion ; c'est une équation non linéaire parabolique .

Lorsque r tend vers 0, l'Eq.(1) devient ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

qui est hyperbolique et le plus simple modèle de problèmes de la mécanique des fluides (voir, [18, 28, 41]) et qui possèdent des solutions discontinues (dites ondes de choc) même pour des données initiales régulières. Á ce stade, nous devrions être convaincus de la complexité que la non-linéarité cache du point de vue de l'analyse mathématique. Cette complexité se pose aussi lorsque l'on tente de résoudre l'équation de Burgers à l'aide des méthodes numériques. Des problèmes majeurs surviennent lorsqu'on tente de se rapprocher des solutions pour lesquelles nous avons admis des discontinuités : il se pourrait que la méthode converge vers une autre solution faible de notre équation d'origine (ou c'est la mauvaise solution faible, c'est-à-dire ne satisfait pas l'entropie). Pour cela, nous proposons de remplacer l'équation dite "*originale*" par une équation qu'on appellera l'équation "*modifiée*" afin de pouvoir réduire le nombre de points de discontinuités. L'idée est alors de remplacer l'EDP d'origine par une nouvelle équation "*équation modifiée*" [6, 10, 11, 18, 22, 37, 43] ; c'est-à-dire, nous changeons la forme de la solution de l'équation sans changer la solution de cette équation. Cela peut se faire en ajoutant un terme, qu'on obtient à travers l'expression des erreurs de troncatures, dans l'équation

dite "originale". Il faut noter que cette opération ne doit pas être interprétée dans le sens des petites perturbations. Les avantages d'une telle modification de l'équation originale (voir [18]), nous permet de :

- utiliser des méthodes robustes, performantes et stables pour l'obtention d'une meilleure solution du problème,
- faciliter l'analyse de méthodes de résolution spécifique ainsi que la compréhension générale du problème,
- relier les méthodes existantes de résolution à des nouvelles méthodes.

Pour une meilleure explication, supposons à résoudre dans un cadre général l'EDP $r(u) = 0$, nous nous référons à la figure 1.

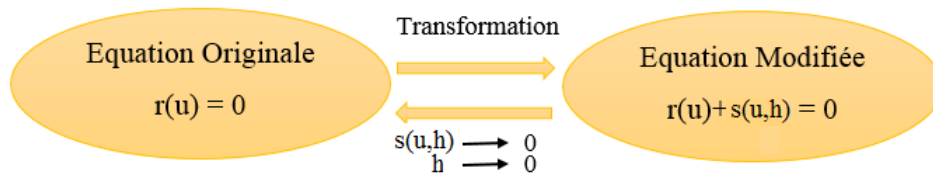


FIGURE 1 – Transformation de l'équation d'origine en une équation modifiée

Ainsi, l'équation originale $r(u) = 0$ est remplacée par une équation modifiée $r(u) + s(u, h) = 0$. Le terme supplémentaire $s(u, h)$ est connu sous divers noms dans la littérature [18]. Ceci dépend de certains paramètres regroupés dans h ainsi que sur u , et que h puisse recevoir certaines interprétations. C'est souvent un ensemble de variables scalaires (le vecteur $h = [h_i]$ est choisi, alors que si $h_i \rightarrow 0$, $s(u, h_i) \rightarrow 0$), l'équation modifiée est donc réduite à $r(u) = 0$.

Le second problème concerne un système couplé d'équations de Burgers aux dérivées conformes fractionnaires par rapport au temps [1, 3, 4, 5, 24], donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = r \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{cases} \quad (3)$$

où $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $r > 0$ est le coefficient de diffusion, $(x, y) \in [0, b] \times [0, b]$, $t > 0$, $\partial^\alpha u / \partial t^\alpha$, $\partial^\alpha v / \partial t^\alpha$ sont les dérivés fraction-

naires conformes d'ordre $\alpha \in]0, 1]$, respectivement de u et v .

Il faut noter que l'intérêt particulier pour la dérivation fractionnaires est lié à la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique.

Le but de cette étude est de vérifier l'applicabilité de la transformation de Cole-Hopf [26, 33, 34, 40] à ce type de problème pour se ramener à une équation aux dérivées conformes linéaires de type équation de chaleur. Pour consolider cette étude, des expérimentations numériques sont proposées pour tester l'efficacité de cette démarche.

Le dernier problème propose l'étude d'une procédure d'accélération de convergence (voir [15, 17, 29, 31, 36]) des algorithmes itératifs dans un contexte de monotonie d'ordre partiel (dite aussi la méthode de sur et sous solution). Ceci est motivé par l'explosion et l'existence actuelle des grands calculateurs (super-ordinateurs) qui nous offrent la possibilité de résoudre des grands systèmes linéaires ou non linéaires avec des milliers de variables. Pour cela, nous sommes donc encouragés à développer des processus d'accélération de convergence pour des algorithmes itératifs afin de réduire les effets des erreurs d'arrondi de la résolution des grands systèmes linéaires. Falcone [17] et Miellou [36] ont proposé initialement une procédure pour résoudre des systèmes linéaires. Ensuite, elle a été étendue par El-Tarazi [15] pour des systèmes non linéaires. Elle consiste à interrompre les itérations de la suite (u^k) , $k = 1, 2, \dots$, produite par la méthode des approximations successives à la $k^{\text{ième}}$ itération en remplaçant u^k par \tilde{u}^k , où l'élément \tilde{u}^k est obtenu en combinant le vecteur u^{k+1} et le vecteur d'extrapolation $u^k + \eta^k(u^k - u^{k-1})$, avec η^k un paramètre réel à calculer. On redémarre ensuite le processus itératif avec le nouveau \tilde{u}^k comme une nouvelle estimation. Cette suite \tilde{u}^k présente une meilleure approximation de la solution que les itérations u^{k+1} et u^k , et de plus elle préserve la propriété de monotonie. Notre objectif principal, ici, est de tester cette procédure pour les grands systèmes. Pour l'illustration, nous allons l'appliquer à une classe de problèmes à frontière libre [7] du type :

Trouver une fonction u tels que

$$(P) \begin{cases} a(u, u - v) \geq (f, v - u)_{L^2(\Omega)}, \\ u \leq M(u), v \leq M(u), \end{cases} \quad (4)$$

où $a(., .)$ est une forme bilinéaire, $(., .)$ étant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, f une fonction donnée régulière dans $L^2(\Omega)$ et $M(u)$ représente les obs-

tacles (qui sont très importants dans l'étude des gestions des stokes d'énergies).

La thèse comporte quatre chapitres, une introduction, une conclusion et deux annexes. Le chapitre un est consacré à des rappels préliminaires d'analyse numérique. Le chapitre deux concerne l'équation de Burgers et traite plus particulièrement l'onde de choc, utilisant l'équation modifiée de Burgers. Le chapitre trois présente l'étude mathématique et numérique d'un système couplé d'équations $2D$ aux dérivées fractionnaires conformes par rapport à la variable t . Le dernier chapitre propose l'étude d'une procédure d'accélération pour la résolution d'une classe d'algorithmes itératifs dans un cadre de monotonie.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre est composé de deux parties. Dans la première, nous introduisons quelques définitions élémentaires qui sont nécessaires pour le reste de cette thèse. La seconde rappelle l'équation monodimensionnelle de Burgers visqueuse et non visqueuse et donne quelques aspects analytiques et numériques existants dans la littérature [8, 19, 28, 32, 41].

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1. (*Problème de Cauchy*)

Le problème de Cauchy est un problème constitué d'une (ou plusieurs) équation(s) différentielle(s) dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale ; cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle.

Définition 1.2. (*Problème de Riemann, [19, 41]*)

On appelle problème de Riemann pour les équations d'Euler monodimensionnelles le problème qui consiste à chercher une solution des équations avec la condition initiale suivante :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_l & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où u_g et u_l sont deux états très proches.

Définition 1.3. (*Problème bien posé au sens de Hadamard [23]*)

Un problème (P) est dit mathématiquement bien posé si le problème (P) admet une solution unique, qui est stable au sens de Hadamard (c'est-à-dire, cette solution dépend continûment des données initiales).

Définition 1.4. *Un problème numérique est dit numériquement bien posé si la continuité de la solution est suffisamment bonne par rapport aux conditions initiales pour que la solution ne soit pas perturbée par une erreur initiale.*

1.2 Méthodes de discrétisation

Considérons le cas d'une EDP monodimensionnelle évolutive donnée par :

$$\mathcal{A}(u) = \mathcal{F}, \quad (1.2)$$

où $\mathcal{A} : [0, T] \times X \rightarrow [0, T] \times Y$, est un opérateur qui va de l'espace $[0, T] \times X$ dans l'espace $[0, T] \times Y$, u la solution recherchée dans $[0, T] \times X$ et \mathcal{F} est une fonction donnée dans l'espace $[0, T] \times Y$.

Le principe des méthodes de discrétisation numérique des EDP est d'obtenir des solutions numériques discrètes (c'est-à-dire en nombre finis) qui approchent la solution exacte.

L'équation discrète correspondante à l'Eq.(1.2) est donnée par :

$$\mathcal{A}_{\Delta x, \Delta t}(u_{\Delta x}^{\Delta t}) = \mathcal{F}_{\Delta x}^{\Delta t}, \quad (1.3)$$

où $\mathcal{A}_{\Delta x, \Delta t}$ est l'opérateur approché de \mathcal{A} , de $[0, T_{\Delta t}] \times X_{\Delta x}$ dans $[0, T_{\Delta t}] \times Y_{\Delta x}$, avec $X_{\Delta x}$ l'espace approché de X ($X_{\Delta x} \subset X$) et $Y_{\Delta x}$ l'espace approché de Y ($Y_{\Delta x} \subset Y$) et $u_{\Delta x}^{\Delta t}$ est la solution approchée de u , avec Δx ($\Delta x > 0$) et Δt ($\Delta t > 0$) sont respectivement les pas de discrétisation de la variable espace x et la variable temps t .

Les méthodes les plus connues et utilisées sont la méthode des différences finies (MDF), des éléments finis (MEF) et des volumes finis (MVF).

Le principe de ces méthodes est donné brièvement ci-dessous :

La MDF [20] : Le principe de cette méthode consiste à remplacer les dérivées figurant dans les équations aux dérivées partielles par des différences divisées que l'on obtient en faisant des développements limités en série de Taylor où des combinaison de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de point discret aux nœuds du maillage. Cette méthode apparaît comme étant la plus simple et s'applique plus facilement sur des domaines réguliers.

La MVF [20] utilise le découpage du domaine de travail à un ensemble de volumes de contrôle et d'intégration des équations sur chaque volume.

Il faut noter que la méthode des volumes finis a été utilisée initialement pour les équations de lois de conservation hyperbolique, ensuite des développements récents en ont permis son application aux équations elliptiques ou paraboliques surtout en mécanique des fluides.

La MEF [20] utilise l'expression variationnelle d'une EDP pour en déterminer la solution approchée. Contrairement aux MDF et MVE, elle consiste à approcher dans un sous espace de dimension finie un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est, dans ce cas, une fonction à déterminer par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage).

Introduisons maintenant quelques notions qui sont nécessaires lors d'une résolution d'une ou plusieurs EDP au moyen de leurs équivalentes discrétisées. Il y a trois notions principales qui sont la consistance, la stabilité et la convergence. Ces trois notions permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique, effective, calculée par l'ordinateur. Pour mieux comprendre ça, nous allons l'expliquer à travers la figure (1.1)

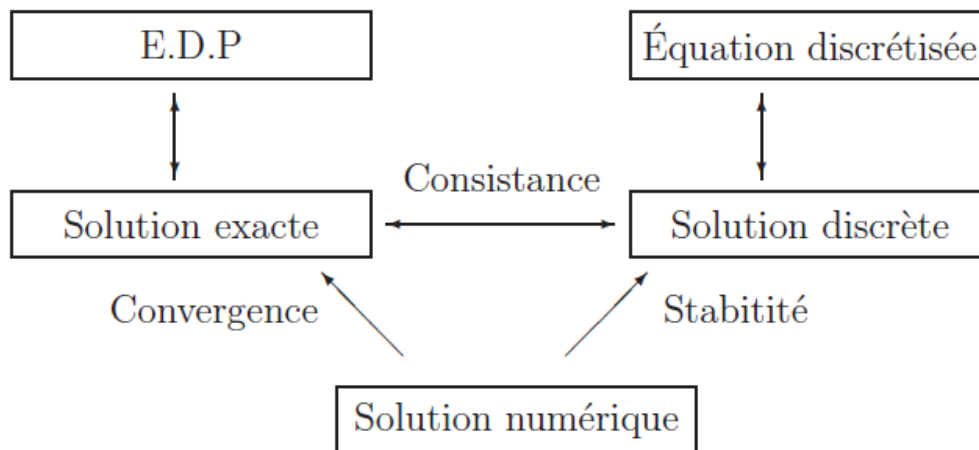


FIGURE 1.1 – Solutions exacte, numérique et discrète.

Consistance, stabilité et convergence

Définition 1.5. (*Erreur de troncature*)

L'erreur de troncature est un terme utilisé pour couper le développement décimal d'un nombre à un certain nombre de chiffres après la virgule, ou le développement limité d'une fonction à un certain ordre. Plus particulièrement pour les équations,

elle se traduit par,

$$ErrT = \varepsilon_i^j = Eq.(1.2) - Eq.(1.3). \quad (1.4)$$

Notons que dans l'Eq.(1.3) la solution approchée $u_{\Delta x}^{\Delta t}$ est substituée par la solution exacte u au point $x = x_i$ à l'instant $t = t_j$

Définition 1.6. (Ordre d'un schéma)

On dit que le schéma numérique (1.3) est d'ordre p en temps t et k en espace x si

$$\varepsilon_i^j \leq O(\Delta t^p + \Delta x^k),$$

où k et p sont deux entiers strictement positifs.

Définition 1.7. (Consistance)

La consistance est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation Δt et Δx tendent vers zéro. Autrement dit, un schéma numérique est dit consistant si :

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} (ErrT) = 0.$$

Définition 1.8. (Stabilité)

La stabilité est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée en certain sens.

Il existe plusieurs types de stabilités, par d'exemple nous donnons la définition de la stabilité au sens de Van Neumann et la stabilité au sens d'une norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.9. (Stabilité au sens de Van Neumann)

Dans cette définition, on ne prend pas en compte les effets du bord de la discrétisations et analyse seulement l'équation ; ceci revient à considérer le problème non plus dans un intervalle borné mais dans tout \mathbb{R} . On cherche donc une solution sous la forme suivante :

$$u_j^n = \xi^n e^{i\pi \mathcal{K} j h}, \quad \text{pour } \mathcal{K} \text{ fixé et avec } i^2 = -1, \quad (1.5)$$

le paramètre ξ est appelé le facteur d'amplification associé au mode \mathcal{K} selon le critère de Von Neumann : la condition de stabilité est donnée par

$$|\xi| \leq 1, \quad \text{pour tout mode } \mathcal{K}.$$

Définition 1.10. (Stabilité au sens d'une norme $\|\cdot\|$)

On dit que le schéma (1.3) est stable pour la norme $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R}^n , si et seulement si, pour tout t ($t > 0$), il existe une constante C indépendante de Δx et Δt telle qu'on ait :

$$\|u^n\| \leq C\|u_0\|, \text{ pour tout } n \geq 0, \quad (1.6)$$

quel que soit la donnée initiale u_0 .

Notons que la stabilité au sens de Von Neumann est équivalente à la stabilité d'un schéma numérique au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$.

Un schéma numérique quelconque peut être :

- soit inconditionnellement stable, c-à-d quels que soient Δx et Δt , les erreurs causées par le schéma numérique n'explose pas au fil des itérations,
- soit conditionnellement stable, c-à-d, on doit imposer une condition sur Δx et Δt pour que la solution n'explose pas,
- soit inconditionnellement instable, c-à-d, quels que soient Δx et Δt , les erreurs s'amplifient au fil des itérations, qui causent des résultats complètement faux.

Définition 1.11. (Convergence)

La convergence est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la solution exacte des équations continues.

Théorème 1.1. (Théorème de Lax-Wendroff)

Tout schéma numérique consistant et conservatif converge lorsqu'on raffine les pas de temps et d'espace, c'est-à-dire lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et $\Delta x \rightarrow 0$, alors il y a une convergence vers une solution faible des équations.

Pour étudier la convergence de la solution numérique $u_{\Delta x}^{\Delta t}$ du schéma aux différences finies (1.3) vers la solution exacte $u(x, t)$ de l'équation (1.2), on peut, soit essayer d'étudier la convergence, ce qui peut être compliqué et pas toujours possible, soit utiliser le résultat d'analyse du à Lax (Richtmyer et Norton 1967) suivant :

Théorème 1.2. Tout schéma consistant et stable est convergeant.

Notons que le théorème de Lax-Wendroff ne garantit ni la convergence ni l'unicité de la solution puisque le schéma peut être instable. Il faut prendre garde au fait que ces notions de stabilité et de consistance varient d'un type de méthode à une autre. Par exemple le cas de la MVF, ce ne sont pas les mêmes définitions (pour plus de détails, on renvoie le lecteur au livre de Herbin [20]).

1.3 Équation non linéaire de Burgers

Nous allons présenter ici un certain nombre de résultats concernant l'équation de Burgers qui sont disséminés dans la littérature [8, 19, 28, 32, 41, 42] et que nous les utiliserons surtout dans les chapitres 2 et 3.

Considérons l'équation monodimensionnelle visqueuse de Burgers suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.7)$$

où, r ($r > 0$) est le coefficient de diffusion (ou de viscosité) et $\partial^2 u / \partial x^2$ est le terme de diffusion ; c'est une équation non linéaire parabolique.

Lorsque r tend vers 0, l'Eq.(1.7) devient ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.8)$$

qui est hyperbolique ; elle modélise la propagation des ondes sans dissipation. L' Eq. (1.8) s'écrit aussi sous forme conservative suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \text{ avec } f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad (1.9)$$

qui est facilement reconnaissable dans la structure des lois scalaires de conservation hyperboliques [31].

Beaucoup d'idées concernant le traitement mathématique, les méthode numériques,..., peuvent être formulées dans le cadre de la théorie des lois scalaires de conservation hyperbolique de sorte que on se réfère souvent à l'Eq.(1.8) sous forme de (1.9) et le développement sera valable pour un $f(u)$, convexe, défini dans (1.9).

1.3.1 Étude analytique de L'Eq.(1.9)

Le problème de Cauchy associé a l'Eq.(1.9) sous forme conservative consiste à trouver une fonction $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.10)$$

Donnons l'étude analytique de l'Eq.(1.9) scalaire en utilisant la méthode des caractéristiques. Avant de commencer le développement de cette méthode, rappelons deux définitions et un lemme.

Définition 1.12. (Solution Classique [41])

On dit que u est une solution classique du problème de Cauchy (1.10) dans un domaine ouvert Q de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, si c'est une fonction de x et t dans Q de classe C^1 , et si elle satisfait (1.10) point par point dans Q .

Définition 1.13. (Solution faible [41])

Soit $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, la fonction $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, est appelée solution faible du problème de Cauchy (1.10), si elle satisfait :

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx + \int_{x=-\infty}^{+\infty} u_0(x) \varphi_0(x) dx = 0, \quad (1.11)$$

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[).$$

Lemme 1.1. ([41])

1. Toute solution classique est une solution faible.
2. Toute solution faible appartenant à $C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ est une solution classique.

Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques [8, 41] fait partie des outils utilisés pour étudier les équation aux dérivées partielles pour calculer la solution u en un point $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. L'idée est de relier ce point (x, t) à un point $(x_0, 0)$ par une courbe le long duquel u est constant. Autrement dit, il s'agit donc de transformer la résolution de l'équation aux dérivées partielles à une résolution d'un système d'EDO. Ce système définit une famille de courbes que l'on nomme courbes caractéristiques. On cherche les caractéristiques du problème de Cauchy (1.10), c'est-à-dire des courbes $x(t)$ tel que u soit constant le long des courbes $t \rightarrow (t, x(t))$.

En effet, considérons la courbe $(x(t), t)$ du plan (x, t) définie par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = c(u(x, t)), & t > 0 \\ x(\bar{t}) = \bar{x}, \end{cases} \quad (1.12)$$

où $c(u(x, t)) = f'(u)$ et (\bar{x}, \bar{t}) est un point quelconque du plan.

Soit u une solution classique de l'Eq.(1.10), alors u satisfait l'équation sous forme non conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.13)$$

Donc, on peut dériver u par rapport au temps le long de cette courbe et obtenir :

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} = 0.$$

Autrement dit, u est constant le long de ces courbes :

$$u(x(t), t) = u(\bar{x}, \bar{t}) \quad t > 0. \quad (1.14)$$

Considérons un point (\bar{x}, \bar{t}) de la forme $(\bar{x}, 0)$, ce point a pour équation :

$$x = \bar{x} + c(u_0(\bar{x}))t, \quad (1.15)$$

et le long de cette droite on a :

$$u(x, t) = u_0(\bar{x}). \quad (1.16)$$

Ceci permet de calculer la valeur de u au point (x, t) , (voir [28]).

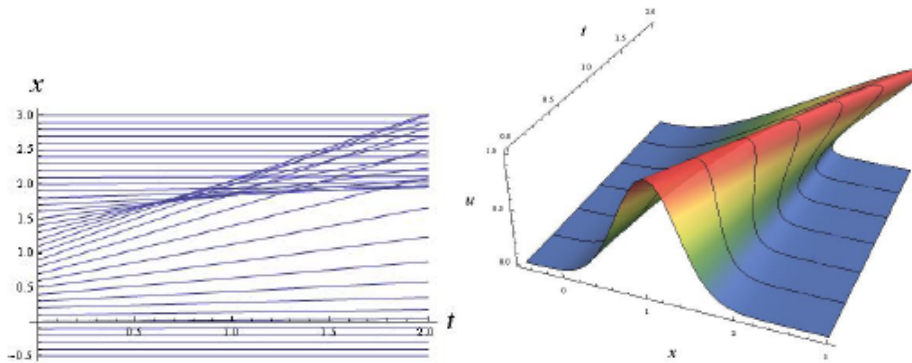


FIGURE 1.2 – Lignes caractéristiques sont représentées en $D1$ et $D2$

Remarque 1.1. La méthode des caractéristiques cesse de fonctionner lorsque les courbes caractéristiques se coupent ainsi provoquant des points de discontinuités et ceci même si la donnée initiale u_0 est régulière. Ces points de discontinuités (voir, fig.1.3) sont appelés les ondes de chocs [22, 28] que nous développerons amplement dans le chapitre 2.

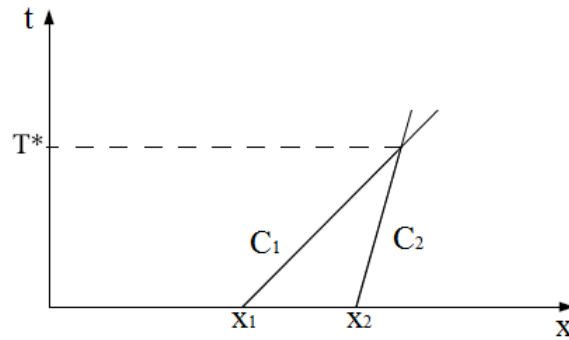


FIGURE 1.3 – Caractéristiques issues de x_1 et x_2 et l'apparition de singularité en 1D

Pour connaître avec exactitude les points de discontinuités et leur vitesse de propagation, nous allons introduire la définition suivante.

Condition de Rankine-Hugoniot

Soient u_L la limite de u approximant (x, t) du côté gauche, u_R la limite de u approximant (x, t) du côté droit.

Notons par $[u] = (u_L - u_R)$ et $[f] = (f(u_L) - f(u_R))$ les sauts de u et de $f(u)$ à travers la courbe de discontinuité (voir la figure 1.4).

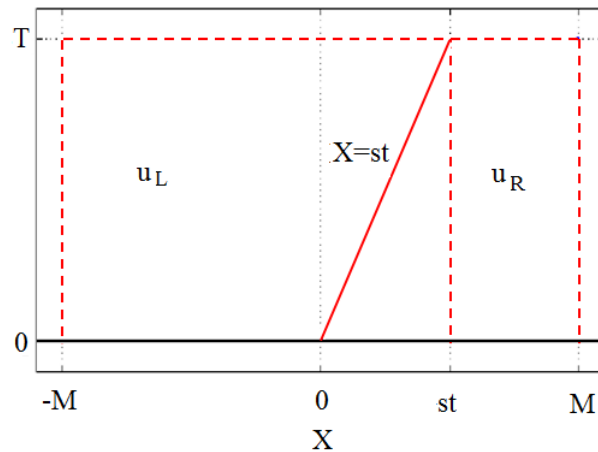


FIGURE 1.4 – Saut de u_L à u_R

Définition 1.14. Si u est solution faible de (1.10) telle que u soit discontinue à travers la courbe $X(t) = s.t$, la relation de Rankine-Hugoniot est définie par :

$$[f(u)] = s[u], \quad (1.17)$$

où, $s = X'(t)$ est la vitesse de propagation (le saut) des points de discontinuité.

Exemple illustratif [28]

Si on prend l'Eq.(1.8) avec la condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x < 0, \\ 1-x & \text{pour } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{pour } x > 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

Dans [28], la solution (voir figure 1.5) est donnée sous la forme suivante :

- Pour $t \leq 1$, on a

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } t < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (1.19)$$

Calculons la vitesse de déplacement de la discontinuité $s = X'(t)$ en utilisant la formule (1.17)

$$\frac{(u_L)^2}{2} - \frac{(u_R)^2}{2} = s[u_L - u_R].$$

On obtient alors $s = \frac{1}{2}$.

- Pour $t \geq 1$

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{t+1}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{t+1}{2}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Pour la donnée initiale, si $x < 0$, on a $u(x,t) = 1$; et si $x > 1$, on a $u(x,t) = 0$ pour $t \geq 1$.

Les figures ci-dessous traduisent le déplacement des points de discontinuité pour les différents t : $t = 0$; $\frac{1}{2}$; 1 ; 2 .

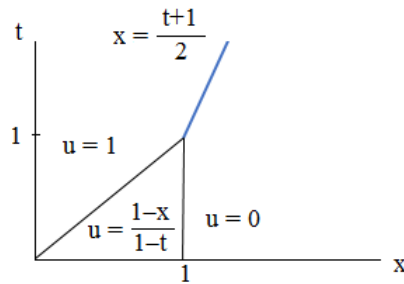


FIGURE 1.5 – La solution de (1.8) donnée par (1.19) pour $t \leq 1$ et (1.20), pour $t \geq 1$ utilisant la condition initiale (1.18).

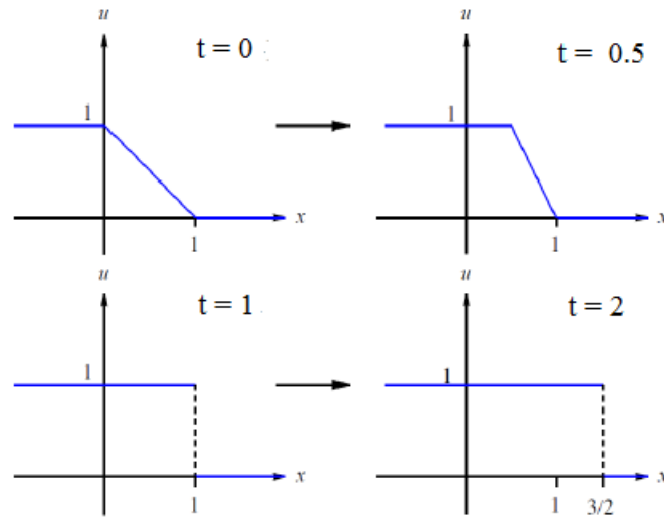


FIGURE 1.6 – Déplacement des points de discontinuité de la solution pour les différentes valeurs t , avec un saut $s = \frac{1}{2}$ (voir les deux derniers graphes).

Remarque 1.2. Pour l'équation visqueuse (1.7), on peut proposer aussi une autre démarche pour déterminer la solution analytique via la transformation de Cole-Hopf et son inverse (pour plus de détails concernant cette méthode, voir le Chapitre 3, pages 32–38).

CHAPITRE 2

ONDE DE CHOC DE L'ÉQUATION NON VISQUEUSE DE BURGERS ET L'ÉQUATION MODIFIÉE CORRESPONDANTE

ONDE DE CHOC DE L'ÉQUATION NON VISQUEUSE DE BURGERS ET L'ÉQUATION MODIFIÉE CORRESPONDANTE

Dans ce chapitre, on étudie l'onde de choc de l'équation non visqueuse de Burgers (1.9) et une équation modifiée [10, 11, 18, 22, 39] que nous introduisons par la suite. Cette dernière nous aidera à réduire ou éliminer les oscillations autour des points de choc [37].

Reprenons l'Eq.(1.9) non visqueuse sous forme conservative,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

où f est une fonction convexe.

Rappelons que la solution analytique de cette équation a été développée dans le Chapitre 1. Commençons par étudier quelques schémas numériques linéarisés et donnons les conditions de stabilité de la solution. Ensuite, nous construisons une équation modifiée, que nous définirons plus tard, pour réduire les oscillations près des ondes de choc. Pour ce faire, nous devons utiliser des schémas possibles d'ordre supérieur.

2.1 Quelques schémas numériques pour l'Eq.(2.1)

Nous construisons des solutions numériques dans la région $S = [L_0 < x < L_1] \times [t > t_0]$, de frontière ∂S , consistée de lignes $x = L_0$, $x = L_1$ et $t = t_0$. Elles recouvrent le maillage rectangulaire dans les points $(x, t) = (x_i, t_j) = (L_0 + i\Delta x, t_0 + j\Delta t)$ avec $i = 0, 1, \dots, N$ et $j = 0, 1, \dots, M$.

Notons par

u_i^j et f_i^j les approximations respectives de u et de f au point $x = x_i$ à l'instant $t = t_j$.

i) Schéma explicite centré linéarisé et le schéma modifié

La MDF appliquée à l'Eq.(2.1), utilisant une simple discrétisation en temps t et une discrétisation centrée en espace x , donne :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

ou

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^j - f_{i-1}^j). \quad (2.3)$$

Soit la relation suivante :

$$f_{i+1}^j - f_{i-1}^j = \alpha(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j), \quad (2.4)$$

où $\alpha = \sup_i |f'(u_i^j)|$ est la valeur propre maximale de la matrice A du jacobien $df/dx = u$.

Le schéma explicite linéarisé s'écrit comme suit :

$$u_i^{j+1} = \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i-1}^j + u_i^j - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

ou sous forme matricielle :

$$Au_i^{j+1} = Cu_i^j, \text{ pour } i = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

où le vecteur $u_i^j = (u_1^j, \dots, u_N^j)^t$, la matrice $A = [0; 1; 0]$ et la matrice $C = \left[\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x}; 1; \frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta x} \right]$.

En utilisant le programme Maple (voir l'annexe I), le facteur d'amplification du schéma (2.5) est un nombre complexe $1 + i(\cdot)$ dont la valeur absolue est toujours supérieure à l'unité, comme le montre la formule ci-dessous :

$$|G|^2 = 1 + \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin(y)^2, \text{ pour tout } y \neq 0(\pi). \quad (2.7)$$

Nous en déduisons que le schéma (2.5) est inconditionnellement instable. L'idée est alors d'introduire l'équation modifiée correspondante à l'Eq.(2.5).

Équation modifiée [18, 37] : A cause des erreurs de discrétisation, la solution exacte de l'équation discrétisée (2.5) ne satisfait pas exactement l'équation continue de départ (2.1) pour des valeurs finies de Δx et Δt . En revanche, la solution de l'équation discrétisée satisfait une équation équivalente appelée équation modifiée. Ainsi, l'équation modifiée diffère de l'équation différentielle de départ par le terme d'erreur de troncature.

Pour ce faire, donnons la définition de l'erreur de troncature comme suit :

$$ErrT = Eq^h.(2.1) - Eq.(2.5). \quad (2.8)$$

Dans l'Eq.(2.5), on substitue u_i^j par la solution exacte en $x = x_i$ et $t = t_j$. En utilisant la formule de Taylor au point (x_i, t_j) et ne retenant que le premier terme, l'Eq.(2.8) donne :

$$ErrT = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \theta(\Delta x^2, \Delta t^2). \quad (2.9)$$

Pour éliminer le terme $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$ du membre droit de l'Eq.(2.9), utilisons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f(u)}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.10)$$

et sa dérivée seconde par rapport au temps t , ceci donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} u = -\left(-u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}\right) - u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &= u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u\right) = u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= 2u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(u), \quad \text{avec } G(u) = \frac{u^3}{3}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation modifiée est obtenue comme suit :

$$Eq^h.(2.1) \simeq \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 G(u)}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

La discrétisation du terme $\partial^2 G(u)/\partial x^2$ autour du point (x_i, t_j) en utilisant la MDF est donnée par :

$$\left(\frac{\partial^2 G(u)}{\partial x^2} \right) \simeq \left(\frac{G(u_{i+1}^j) - 2G(u_i^j) + G(u_{i-1}^j)}{\Delta x^2} \right).$$

Soient les relations suivantes :

$$\beta(u_{i+1}^j - u_i^j) = G(u_{i+1}^j) - G(u_i^j), \text{ pour } i = 0, \dots, N-1, \quad (2.12)$$

et

$$\gamma(u_i^j - u_{i-1}^j) = G(u_i^j) - G(u_{i-1}^j), \text{ pour } i = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

où β et γ sont les valeurs propres maximales de la matrice jacobienne dG/du aux points u_{i+1}^j et u_{i-1}^j .

En utilisant les relations (2.4), (2.12) et (2.13), le schéma modifié est donné par :

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha + \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x} \right) u_{i-1}^j + \left(1 - \left(\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \right) (\beta + \gamma) \right) u_i^j \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(-\alpha + \frac{\beta\Delta t}{2\Delta x} \right) u_{i+1}^j, \text{ pour } i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.14)$$

ou sous forme matricielle

$$A_1 u_i^{j+1} = C_1 u_i^j, \text{ pour } i = 1, \dots, N, \quad (2.15)$$

où le vecteur $u_i^j = (u_1^j, \dots, u_N^j)^t$, la matrice $A_1 = [0; 1; 0]$ et la matrice

$$C_1 = \left[\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha + \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x} \right); 1 - \left(\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \right) (\beta + \gamma); \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(-\alpha + \frac{\beta\Delta t}{2\Delta x} \right) \right].$$

Ainsi, le schéma (2.5) est remplacé par le schéma modifié (2.14) qui présente certains avantages, telles que la stabilité et la réduction des oscillations à proximité des ondes de choc (que nous allons montrer à la fin de ce chapitre à travers les figures 2.1, 2.2 et 2.3).

ii) Schéma explicite en avant linéarisé et le schéma modifié

La discrétisation de l'Eq.(2.1), utilisant le schéma d'Euler explicite en avant en temps t et en espace x est :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - \frac{(f_{i+1}^j - f_i^j)}{\Delta x} = 0, \text{ pour } i = 0, \dots, N-1. \quad (2.16)$$

En utilisant la relation (2.4), l'Eq.(2.16) devient :

$$u_i^{j+1} = \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}\right) u_i^j - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^j, \text{ pour } i = 0, \dots, N-1, \quad (2.17)$$

qui peut être réécrite sous forme matricielle :

$$A_2 u_i^{j+1} = C_2 u_i^j, \text{ pour } i = 1, \dots, N, \quad (2.18)$$

où le vecteur $u_i^j = (u_1^j, \dots, u_N^j)^t$, la matrice $A_2 = [0, 1, 0]$ et la matrice

$$C_2 = \left[0; 1 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}; \frac{-\alpha \Delta t}{\Delta x}\right].$$

Le carré du module du facteur d'amplification du schéma (2.17) est donné par :

$$|G|^2 = 1 + \frac{4\alpha \Delta t}{\Delta x} \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}\right) \sin^2\left(\frac{y}{2}\right). \quad (2.19)$$

On en déduit que $|G|^2 > 1$, pour tout $y \neq 0 \text{ mod}(\pi)$, donc le schéma explicite en avant (2.17) est instable. De la même manière comme précédemment, on introduit l'erreur de troncature définie par :

$$ErrT = Eq^h. (2.1) - Eq.(2.16) \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dt + \theta(\alpha \Delta x, \Delta t^2). \quad (2.21)$$

Alors l'équation modifiée est donnée par :

$$Eq^h \simeq \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 G(u)}{\partial x^2}\right) = 0. \quad (2.22)$$

Il suffit alors de retrancher de l'Eq.(2.16) la quantité suivante :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G(u)}{\partial x^2}\right) dt \simeq \frac{dt}{2} \left(\frac{G(u_{i+2}^j) - 2G(u_{i+1}^j) + G(u_i^j)}{dx^2}\right).$$

Soient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\beta(u_{i+2}^j - u_{i+1}^j) &= G(u_{i+2}^j) - G(u_{i+1}^j) \\ \gamma(u_{i+1}^j - u_i^j) &= G(u_{i+1}^j) - G(u_i^j),\end{aligned}\quad (2.23)$$

le schéma modifié linéarisé est donné par :

$$\begin{aligned}u_i^{j+1} &= \left(-\frac{\beta\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) u_{i+2}^j + \left(\frac{-\alpha\Delta t}{\Delta x} + \frac{\beta\Delta t^2}{2\Delta x^2} + \frac{\beta\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) u_{i+1}^j \\ &+ \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} - \frac{\gamma\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) u_i^j,\end{aligned}\quad (2.24)$$

ou sous forme matricielle

$$A_3 u_i^{j+1} = C_3 u_i^j, \text{ pour } i = 1, \dots, N,$$

où le vecteur $u_i^j = (u_1^j, \dots, u_N^j)^t$, la matrice $A_3 = [0; 1; 0]$ et la matrice

$$C_3 = \left[\left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} - \frac{\gamma\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right); \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(-\alpha + \frac{\beta\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\beta\Delta t}{2\Delta x}\right); \left(-\frac{\beta\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) \right].$$

iii) Schéma implicite linéarisé et le schéma modifié

On utilise le schéma implicite en avant par rapport au temps t et centré par rapport à l'espace x , on obtient alors :

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^{j+1} - f_{i-1}^{j+1}). \quad (2.25)$$

En utilisant la relation (2.4), le schéma (2.25) s'écrit :

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}), \quad (2.26)$$

ou :

$$\frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^{j+1} + u_i^{j+1} - \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^{j+1} = u_i^j, \text{ pour } i = 1, \dots, N. \quad (2.27)$$

En utilisant le programme Maple (voir l'annexe I), le carré du module du facteur d'amplification du schéma (2.27) est donné par :

$$|G|^2 = \frac{\Delta x^2}{dx^2 + \alpha^2 \Delta t^2 \sin(y)^2} < 1, \forall y.$$

qui est exactement l'opposé du facteur d'amplification du schéma centré explicite (2.5) ; il est toujours inférieur à 1, donc le schéma implicite est inconditionnellement stable.

L'erreur de troncature est donnée par :

$$\begin{aligned} ErrT &= Eq.(2.1) - Eq.(2.27) \\ &= \left(\alpha \left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x \partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Delta t + \theta(\alpha \Delta x^2, dt^2). \end{aligned}$$

Comme précédemment, pour éliminer les termes $\partial^2 u(t, x) / \partial x \partial t$ et $\frac{1}{2} \partial^2 u / \partial t^2$ respectifs, nous utilisons les relations (2.12) et (2.13), on obtient alors :

$$\frac{-\alpha \Delta t}{2\Delta x} u_{i-1}^{j+1} + u_i^{j+1} - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1 - \beta - \gamma) u_i^j + \beta u_{i+1}^j, \quad (2.28)$$

ou sous forme matricielle :

$$A_4 u_i^{j+1} = C_4 u_i^j, \text{ pour } i = 1, \dots, N$$

où le vecteur $u_i^j = (u_1^j, \dots, u_N^j)^t$, la matrice $A_4 = \left[\frac{-\alpha \Delta t}{2\Delta x}; 1; -\frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} \right]$ et la matrice $C_4 = [\gamma; (1 - \beta - \gamma); \beta]$.

iv) Schéma de Lax-Friedrichs linéarisé et le schéma modifié

Le schéma de Lax-Friedrichs de l'Eq.(2.1) s'écrit :

$$\frac{u_i^{j+1} - \frac{1}{2}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j)}{\Delta t} + \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, N.$$

En utilisant la relation (2.4), le schéma linéarisé s'écrit :

$$u_i^{j+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} \right) u_{i-1}^j + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} \right) u_{i+1}^j. \quad (2.29)$$

Dans [28], le facteur d'amplification est donné par :

$$G = \cos(k\Delta x) - i \frac{\Delta t}{\Delta x} A \sin(k\Delta x),$$

où la matrice A est le jacobien df/du , qui est le seul élément u pour l'équation de Burgers. La stabilité nécessite que la condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [28] soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha \right| \leq 1,$$

Le carré du module du facteur d'amplification est donné par :

$$|G|^2 = \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + \cos(y)^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right). \quad (2.30)$$

Si la condition CFL est vérifiée, alors le module de (2.30) est inférieur à 1. Grâce au programme Maple (voir l'annexe I), nous obtenons l'erreur de troncature

$$ErrT = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Delta t + \theta(\Delta x, \Delta t^2). \quad (2.31)$$

Pour $i = 1, \dots, N$, le schéma modifié de Lax-Friedrichs est donné par :

$$u_i^{j+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} + \frac{\gamma \Delta t^2}{2\Delta x^2} \right) u_{i-1}^j + \frac{\Delta t^2 (\beta - \gamma)}{2\Delta x^2} u_i^j + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} - \frac{\beta \Delta t^2}{2\Delta x^2} \right) u_{i+1}^j. \quad (2.32)$$

2.2 Simulations numériques

Pour étudier les oscillations autour des points de choc, nous reprenons l'Eq.(1.8) avec les conditions initiales suivantes (C.I.) :

$$i) \phi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (\text{Problème de Riemann})$$

$$ii) \phi_2(x) = \begin{cases} 0.5, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$iii) \phi_3(x) = \exp(-2(x-1)^2), \text{ (condition Gaussian).}$$

$$iv) \phi_4(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Prenons quelques valeurs pour α , fixons les valeurs β et γ , et calculons les normes $\|C\|_\infty$, $\|C\|_1$ et $\|C\|_2$ respectives ; (voir le Tableau 2.1).

Les valeur			Schéma explicite centré			Schéma explicite avant		
α	β	γ	$\ C\ _\infty$	$\ C\ _1$	$\ C\ _2$	$\ C\ _\infty$	$\ C\ _1$	$\ C\ _2$
0.5	0.06	0.3	1.0398	1.0398	1.0000	1.3050	1.6101	1.3361
0.01	0.06	0.3	1.0004	1.0004	0.9999	0.9111	1.0388	0.9177
0.001	0.06	0.3	1	1	0.9999	0.9038	1.0388	0.9114

TABLEAU 2.1 – Les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ pour différents valeurs de α

On remarque que, dans le Tableau 2.1 pour les différentes valeurs de α , les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont presque identiques pour le schéma centré explicite. Pour le schéma en avant lorsque α diminue, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont inférieures à 1, i.e., il y a plus de stabilité.

Ensuite, nous avons fixé α ($\alpha = 0.1$) et faisons varier β et γ , les résultats sont résumés dans le Tableau 2.2.

Les valeur			Schéma explicite centré			Schéma explicite en avant		
α	β	γ	$\ C\ _\infty$	$\ C\ _1$	$\ C\ _2$	$\ C\ _\infty$	$\ C\ _1$	$\ C\ _2$
0.1	0.06	0.03	1.0076	1.0076	0.9999	0.983	1.3878	1.0242
0.1	0.6	0.3	1.0041	1.0041	0.9999	0.983	1.0388	0.9843
0.1	3	0.6	1	1	0.9999	0.983	1.0388	0.9155

TABLEAU 2.2 – Les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ pour les différentes valeurs de β

On remarque que, dans le Tableau 2.2 pour les différentes valeurs de β , les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont exactement identiques pour le schéma centré explicite. Concernant le schéma en avant lorsque β augmente les normes $\|\cdot\|_\infty$ sont inférieures à 1.

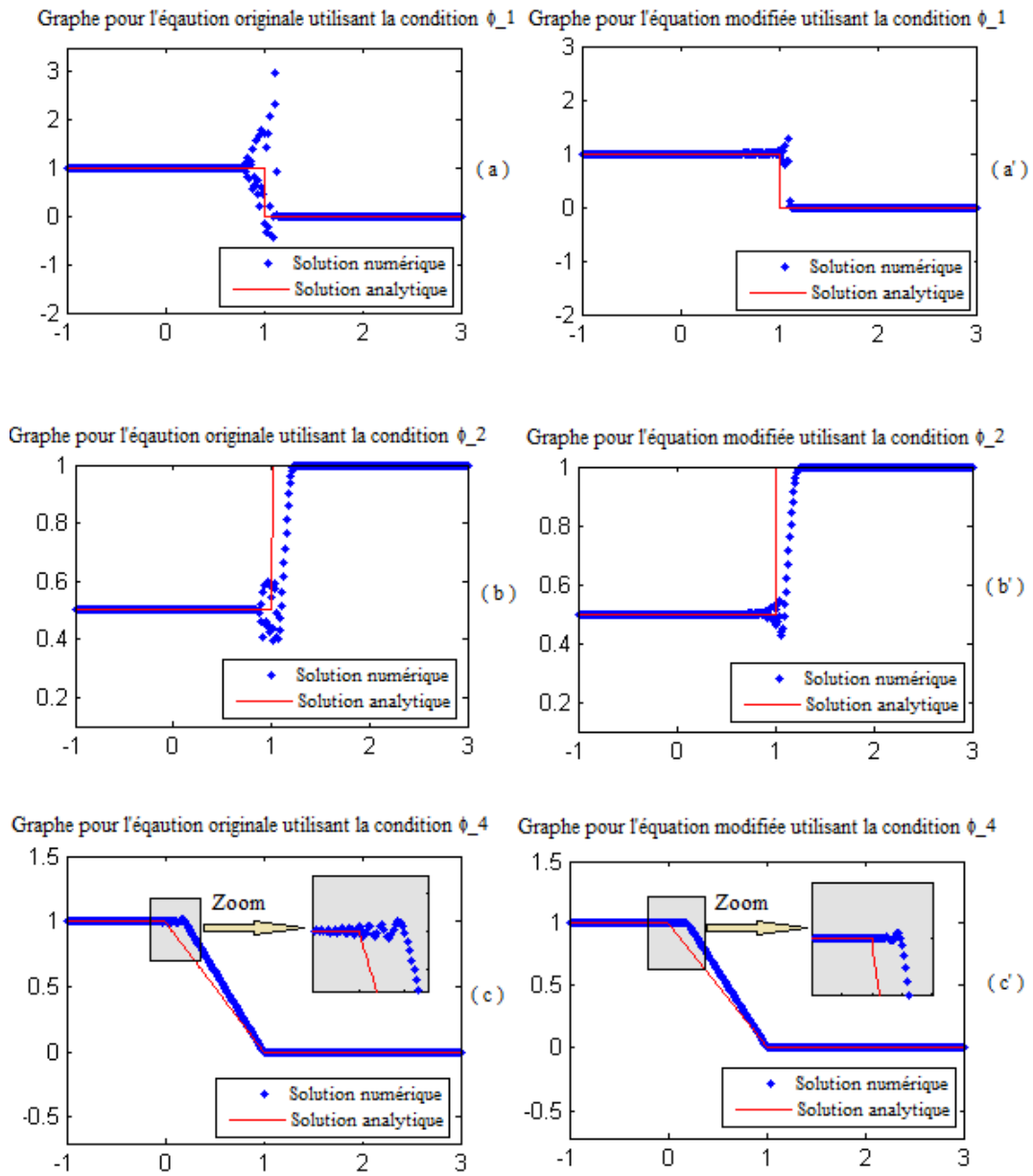


FIGURE 2.1 – Graphes du schéma explicite centré (2.5) et du schéma modifié (2.14)

En utilisant les conditions initiales 1, 2 et 4, les graphes (a'), (b') et (c') montrent qu'il y a une réduction de choc autour des points de discontinuité par rapport aux graphes respectifs (a), (b) et (c), de l'équation d'origine.

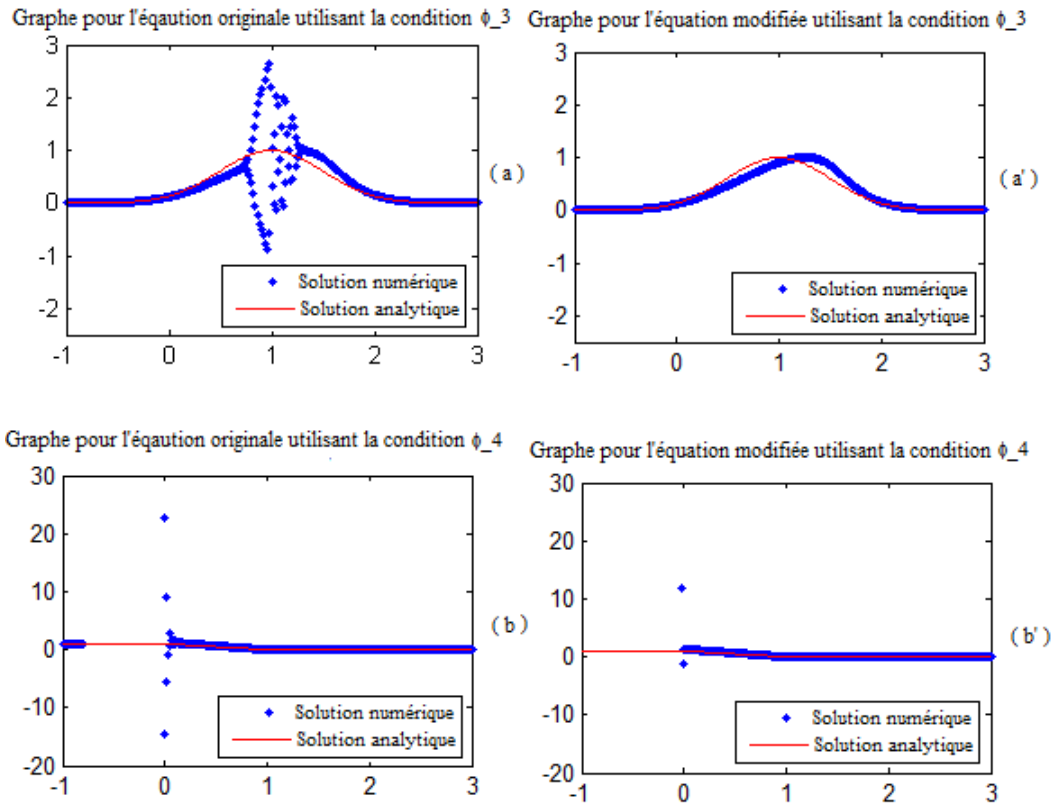


FIGURE 2.2 – Graphes du schéma explicite en avant (2.17) et du schéma modifié (2.24)

En utilisant la condition initiale 3, le graphe (a') montre qu'il y a une élimination de choc autour des points de discontinuité par rapport au graphe (a) de l'équation d'origine. Le graphe (b') montre qu'il y a une réduction de choc autour des points de discontinuité par rapport à celui du graphe (b) de l'équation d'origine.

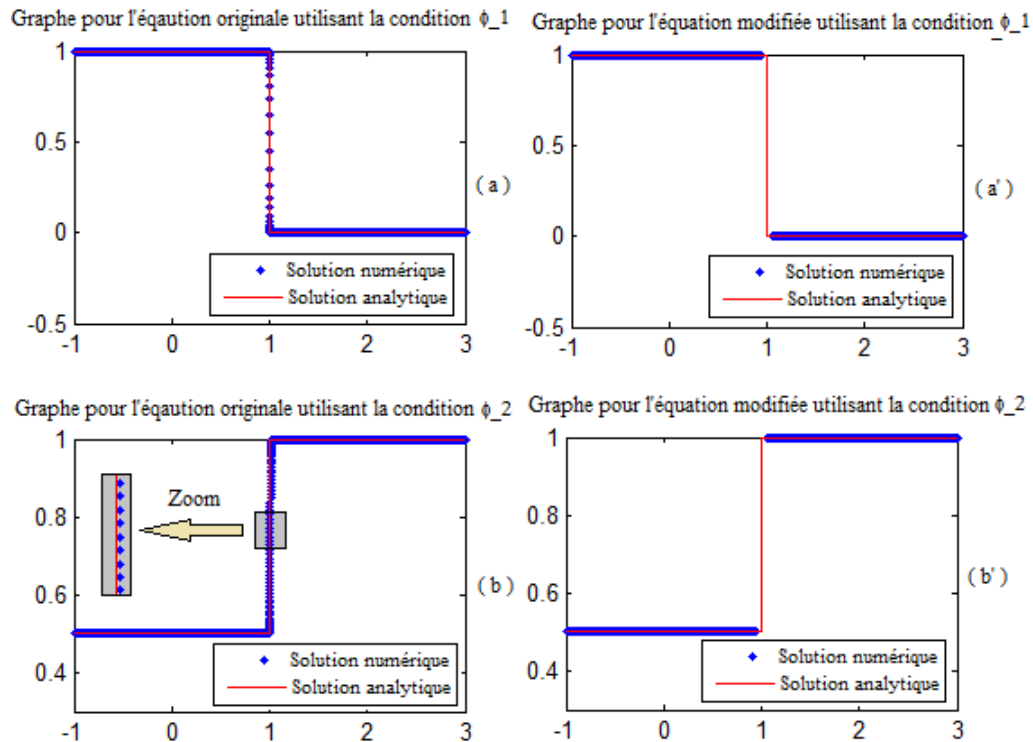


FIGURE 2.3 – Graphes du schéma de Lax-Friedrichs (2.29) et du schéma modifié correspondant

En utilisant les conditions initiales 1 et 2, les graphes (a') et (b') montrent qu'il n'y a pas une amélioration autour des points de discontinuité par rapport à ceux des graphes respectifs (a) et (b) de l'équation d'origine.

2.3 Remarque et commentaire

La théorie mathématique de la solution faible pour les équations hyperboliques est relativement récente. L'existence d'ondes de choc dans un flux supersonique non invisible est un exemple de solution faible. L'équation de Burgers peut être une simple analogie des équations d'Euler pour l'écoulement du fluide non visqueux et constitue un prototype d'équations de conservation qui peut développer des points de discontinuités (ondes de choc). A travers cette étude qui constitue notre apport original, nous nous sommes intéressés à l'effet du terme non linéaire qui possède certaines propriétés. Une solution faible de l'Eq. (1.9) est une solution

authentique, sauf le long d'une surface dans l'espace (x, t) , sur laquelle la fonction u peut être discontinue (point de choc). Par comparaison des schémas analytiques et numériques, l'équation modifiée peut donner des bons résultats. Cette démarche réduit les oscillations autour des points de discontinuités (choc). La discontinuité en mouvement à droite est correctement positionnée et est définie avec précision. La nature dispersive de cette méthode est évidente par la présence d'oscillations près de la discontinuité. Même si la méthode utilise des différences centrées, une certaine asymétrie se produira car la vague est en mouvement. En général, lorsque le nombre CFL est moins petit, la qualité de la solution est dégradée.

CHAPITRE 3

ÉTUDE D'UN SYSTÈME COUPLÉ D'ÉQUATIONS D2 DE BURGERS AUX DÉRIVÉES CONFORMES FRACTIONNAIRES

ÉTUDE D'UN SYSTÈME COUPLÉ D'ÉQUATIONS D2 DE BURGERS AUX DÉRIVÉES CONFORMES FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, on essaiera d'établir une solution analytique et numérique d'un système couplé d'équations aux dérivées conformes fractionnaires [1, 2, 3, 5]. Pour cela, nous concentrons notre attention sur la transformation d'un système couplé d'équations de Burgers fractionnaire à une équation de la chaleur aux dérivées conformes fractionnaires à l'aide de la transformation de Cole-Hopf. Nous pouvons alors obtenir une solution analytique et numérique des équations de Burgers aux dérivées conformes fractionnaires via la combinaison de la solution de l'équation de la chaleur D2 et la transformation inverse de Cole-Hopf [26, 40]. Pour l'illustration, nous complétons l'étude par des simulations numériques en testant l'efficacité de la transformation de Cole-Hopf et les algorithmes numériques utilisés pour cette classe d'équations. Nous schématisons cette démarche à travers la figure 3.1.

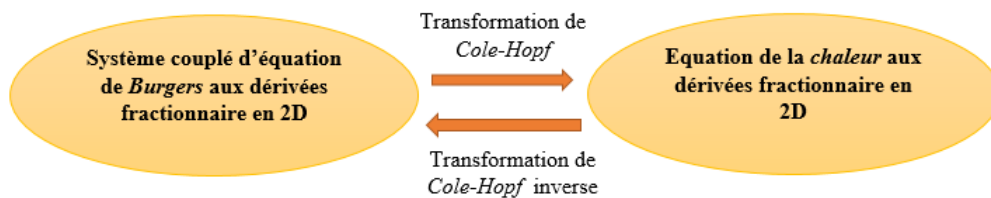


FIGURE 3.1 – Transformation du système d'équations D2 de Burgers en une équation de chaleur D2

3.1 Position du problème

Considérons le système couplé d'équations de Burgers suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = r \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

où : $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $r > 0$ est le coefficient de diffusion, $(x, y) \in [0, b] \times [0, b]$, $t > 0$, $\partial^\alpha u / \partial t^\alpha$, $\partial^\alpha v / \partial t^\alpha$ sont les dérivés fractionnaires conformes d'ordre $\alpha \in]0, 1]$, respectivement de u et v .

Ajoutons à celles-ci les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in \Omega, \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = f(x, y, t), \text{ pour tout } (x, y) \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x, y, t) = g(x, y, t), \text{ pour tout } (x, y) \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où f et g sont deux fonctions données.

Ajoutons aussi la condition de potentiel symétrique :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.4)$$

qui est nécessaire pour le reste de développement [33].

3.2 Notions de base sur les dérivées conformes fractionnaires

Introduisons une définition et quelques propriétés importantes des dérivées conformes fractionnaires qui seront utilisées dans toute la suite.

Définition 3.1. ([5, 24])

Soit une fonction $f : [0 : \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, la dérivée conforme fractionnaire de f d'ordre α est définie par :

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

pour tout $t > 0$, $\alpha \in (0,1)$.

Si f est α -différentiable dans certaines $(0, a)$, $a > 0$, et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ existe, alors on a

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t). \quad (3.6)$$

Les propriétés de cette définition sont résumées dans le théorème ci-dessous.

Théorème 3.1. ([5, 24])

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et f, g être α -différentiable en un point $t > 0$. Alors,

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
3. $T_\alpha(\lambda) = 0$, pour toutes les fonctions constantes $f(t) = \lambda$.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha(f/g) = (gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g))/g^2$.
6. Si de plus f est différentiable, alors $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}df/dt$.

3.3 Linéarisation du système (3.1) par la transformation de Cole-Hopf

Comme nous l'avons indiqué au chapitre un, nous allons déterminer la solution du système (3.1) via la transformation de Cole-Hopf [33, 34, 40].

En utilisant la propriété 6 du Théorème 3.1, nous pouvons réécrire le système (3.1) comme suit :

$$\begin{cases} t^{(1-\alpha)} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ t^{(1-\alpha)} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = r \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{cases} \quad (3.7)$$

Rappelons que la transformation de Cole-Hopf a été introduite par Eberhard Hopf (1950) et Julian Cole (1951) et qui permet de transformer l'équation non linéaire visqueuse de Burgers en une équation linéaire de type chaleur. Cette opération s'effectue en deux étapes.

Étape 1

Posons $u = \psi_x$ et $v = \psi_y$, ainsi le système (3.7) devient :

$$\begin{cases} t^{(1-\alpha)}\psi_{xt} + \psi_x\psi_{xx} + \psi_y\psi_{xy} = r(\psi_{xxx} + \psi_{xyy}), \\ t^{(1-\alpha)}\psi_{yt} + \psi_x\psi_{yx} + \psi_y\psi_{yy} = r(\psi_{yxx} + \psi_{yyy}), \end{cases} \quad (3.8)$$

qui s'écrivent aussi :

$$\begin{cases} t^{(1-\alpha)}\psi_{xt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\psi_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\psi_y^2\right) = r(\psi_{xxx} + \psi_{xyy}), \\ t^{(1-\alpha)}\psi_{yt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\psi_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\psi_y^2\right) = r(\psi_{yxx} + \psi_{yyy}). \end{cases} \quad (3.9)$$

En intégrant la première (resp. seconde) équation du Système (3.9) par rapport à x (resp. y), on obtient :

$$\begin{cases} t^{(1-\alpha)}\psi_t + \left(\frac{1}{2}\psi_x^2\right) + \left(\frac{1}{2}\psi_y^2\right) = r(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \eta_1(y, t), \\ t^{(1-\alpha)}\psi_t + \left(\frac{1}{2}\psi_x^2\right) + \left(\frac{1}{2}\psi_y^2\right) = r(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \eta_2(x, t), \end{cases} \quad (3.10)$$

où $\eta_1(y, t)$ et $\eta_2(x, t)$ sont deux fonctions arbitraires dépendantes respectivement de y et x .

En combinant les deux équations du Système (3.10) et utilisant la condition (3.4), nous pouvons conclure que ψ satisfait l'équation suivante (pour plus de détails voir [33]) :

$$t^{(1-\alpha)}\psi_t + \left(\frac{1}{2}\psi_x^2\right) + \left(\frac{1}{2}\psi_y^2\right) = r(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \eta(t). \quad (3.11)$$

Étape 2

Introduisons un deuxième changement de variable $\psi = -2r \ln \phi$, alors on a :

$$u = -2r \frac{\phi_x}{\phi} \quad \text{et} \quad v = -2r \frac{\phi_y}{\phi}. \quad (3.12)$$

Le calcul des dérivées de la fonction ψ donne :

$$\psi_t = -2r \frac{\phi_t}{\phi}, \quad \psi_x = -2r \frac{\phi_x}{\phi}, \quad \psi_y = -2r \frac{\phi_y}{\phi}. \quad (3.13)$$

$$\psi_{xx} = -2r \frac{\phi_{xx}}{\phi} + 2r \frac{\phi_x^2}{\phi^2}, \quad \psi_{yy} = -2r \frac{\phi_{yy}}{\phi} + 2r \frac{\phi_y^2}{\phi^2}. \quad (3.14)$$

Par l'insertion les dérivées ψ_t , ψ_x et ψ_y dans le membre gauche (resp. ψ_{xx} et ψ_{yy} dans le membre droit) de l'Eq.(3.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -2rt^{(1-\alpha)} \frac{\phi_t}{\phi} + \frac{1}{2} \left(-2r \frac{\phi_x}{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-2r \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 = \\ & r \left(-2r \frac{\phi_{xx}}{\phi} + 2r \frac{\phi_x^2}{\phi^2} - 2r \frac{\phi_{yy}}{\phi} + 2r \frac{\phi_y^2}{\phi^2} \right) + \eta(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'Eq.(3.15) peut être réduite à :

$$\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial t^\alpha} = r(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \zeta(t)\phi, \quad (3.16)$$

où $\zeta(t) = \frac{-\eta(t)}{2r}$.

Maintenant, nous énonçons le théorème suivant pour montrer que le calcul des fonctions $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ est indépendant de la fonction $\zeta(t)$.

Théorème 3.2. [33] Soit $\phi(x, y, t)$ la solution de l'Eq.(3.16), $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ sont définies dans (3.12), alors les solution u et v sont indépendant de $\zeta(t)$.

Démonstration. Soit

$$\beta(t) = \int \frac{1}{t^{1-\alpha}} \zeta(t) dt,$$

puis,

$$\beta'(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}} \zeta(t).$$

Multiplions par $e^{-\beta(t)}$ les deux membres de l'Eq.(3.16), nous obtenons :

$$\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial t^\alpha} e^{-\beta(t)} = r(\phi_{xx} + \phi_{yy}) e^{-\beta(t)} + \zeta(t) \phi e^{-\beta(t)}. \quad (3.17)$$

En utilisant la Propriété 6 du Théorème 3.1, l'Eq.(3.17) devient :

$$t^{1-\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-\beta(t)} - \zeta(t) \phi e^{-\beta(t)} = r(\phi_{xx} + \phi_{yy}) e^{-\beta(t)}, \quad (3.18)$$

qui s'écrit aussi,

$$t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\beta(t)} \phi \right) = r((e^{-\beta(t)} \phi)_{xx} + (e^{-\beta(t)} \phi)_{yy}). \quad (3.19)$$

Posons maintenant,

$$\psi(x, y, t) = e^{-\beta(t)} \phi(x, y, t),$$

alors $\psi(x, y, t)$ vérifie l'équation de la chaleur suivante :

$$t^{1-\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = r(\psi_{xx} + \psi_{yy}), \quad (3.20)$$

qui peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = r(\psi_{xx} + \psi_{yy}). \quad (3.21)$$

Notons que la différence entre la solution de l'Eq.(3.16) et de l'Eq.(3.21) réside seulement dans la présence du facteur $e^{-\beta(t)}$. Alors on a :

$$u(x, y, t) = \frac{\phi_x}{\phi} = \frac{e^{-\beta(t)} \phi_x}{e^{-\beta(t)} \phi} = \frac{\psi_x}{\psi}, \quad (3.22)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\phi_y}{\phi} = \frac{e^{-\beta(t)} \phi_y}{e^{-\beta(t)} \phi} = \frac{\psi_y}{\psi}. \quad (3.23)$$

Il est clair que les solutions u et v sont indépendantes de la fonction $\zeta(t)$. □

Pour simplifier l'étude prenons le cas particulier $\zeta(t) \equiv 0$, l'Eq.(3.16) est alors :

$$\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial t^\alpha} = r(\phi_{xx} + \phi_{yy}). \quad (3.24)$$

3.3.1 Déterminations des conditions initiales et aux bords

Dans la suite, nous déterminons les conditions initiales et aux bords correspondes à l'Eq.(3.24). Par souci de clarté, prenons

$$\Omega = [0, b] \times [0, b], \quad \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{0 \leq x \leq b, y = 0\}, & \Gamma_2 &= \{0 \leq x \leq b, y = b\}, \\ \Gamma_3 &= \{x = 0, 0 \leq y \leq b\} & \text{et } \Gamma_4 &= \{x = b, 0 \leq y \leq b\}. \end{aligned}$$

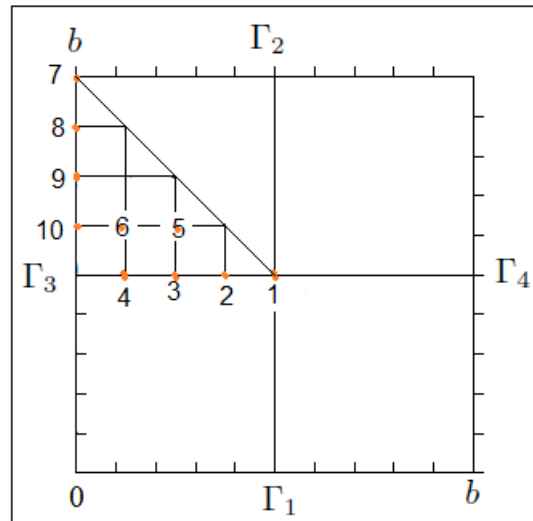


FIGURE 3.2 – Domaine de résolution

Détermination de la condition initiale (CI).

De l'Eq.(3.12), nous avons

$$\frac{\phi_x}{\phi} = \frac{u(x, y, t)}{-2r}. \tag{3.25}$$

En intégrant les deux membres de l'Eq.(3.25) par rapport à x , nous obtenons :

$$\ln(\phi) = \frac{-1}{2r} \int_0^x u(s, y, t) ds + \ln(\phi(0, y, t)).$$

Ceci implique

$$\phi(x, y, t) = \phi(0, y, t) \exp\left(\frac{-1}{2r} \int_0^x u(s, y, t) ds\right), \quad (3.26)$$

où $\phi(0, y, t)$ est une fonction inconnue et pour la déterminer il faut utiliser la deuxième formule de l'Eq.(3.12) qui peut également être réorganisée en :

$$\frac{\phi_y}{\phi} = \frac{v(x, y, t)}{-2r}. \quad (3.27)$$

L'intégration de l'équation ci-dessus par rapport à y donne :

$$\ln(\phi) = \frac{-1}{2r} \int_0^y u(x, s, t) ds + \ln(\phi(x, 0, t)),$$

Ceci implique,

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, 0, t) \exp\left(\frac{-1}{2r} \int_0^y v(x, s, t) ds\right). \quad (3.28)$$

Pour $x = 0$, l'Eq.(3.28) est :

$$\phi(0, y, t) = \phi(0, 0, t) \exp\left(\frac{-1}{2r} \int_0^y v(0, s, t) ds\right). \quad (3.29)$$

Par l'insertion de l'Eq.(3.29) dans l'Eq.(3.26), on obtient

$$\phi(x, y, t) = \phi(0, 0, t) \exp\left(-\frac{1}{2r} \int_0^y v(0, s, t) ds - \frac{1}{2r} \int_0^x u(s, y, t) ds\right). \quad (3.30)$$

Pour $t = 0$, on obtient la condition initiale ci-dessus :

$$\phi(x, y, 0) = \phi(0, 0, 0) \exp\left(-\frac{1}{2r} \int_0^y v(0, s, 0) ds - \frac{1}{2r} \int_0^x u(s, y, 0) ds\right). \quad (3.31)$$

Afin de montrer que $\phi(0, 0, 0)$ n'a pas d'effet sur la solution du système initial des équations de Burgers, nous posons $\tilde{\phi} = c\phi$, avec c constante et énonçons la proposition suivante.

Proposition 3.1. [33] Soit $\tilde{\phi}$ la solution de l'équation de chaleur (3.24), Soit \tilde{u} et \tilde{v} la solution définie dans la relation (3.12), alors $\tilde{u}(x, y, t)$ et $\tilde{v}(x, y, t)$ sont indépendants de la constante c .

Démonstration. D'après l'Eq.(3.12), nous avons

$$\tilde{u}(x, y, t) = -2r \frac{(\tilde{\phi})_x}{\tilde{\phi}} = -2r \frac{c(\phi)_x}{c\phi} = -2r \frac{(\phi)_x}{\phi} = u(x, y, t),$$

et

$$\tilde{v}(x, y, t) = -2r \frac{(\tilde{\phi})_y}{\phi_c} = -2r \frac{c(\phi)_y}{c\phi} = -2r \frac{(\phi)_y}{\phi} = v(x, y, t).$$

Ainsi, la preuve est complète. □

Pour simplifier l'étude, on peut considérer, $\phi(0, 0, 0) = 1$, cela donne :

$$\phi_0(x, y) = \exp \left(-\frac{1}{2r} \int_0^y v(0, s, 0) ds - \frac{1}{2r} \int_0^x u(s, y, 0) ds \right). \quad (3.32)$$

Détermination des conditions aux bords (CB)

Utilisons l'Eq.(3.12), les conditions aux limites sont réduites à

$$\begin{cases} \phi_x = -\frac{1}{2r} u(x, y, t) \phi(x, y, t), & (x, y, t) \in (\partial\Omega \times (0, T)), \\ \phi_y = -\frac{1}{2r} v(x, y, t) \phi(x, y, t), & (x, y, t) \in (\partial\Omega \times (0, T)). \end{cases} \quad (3.33)$$

Par conséquent, l'équation de la chaleur aux dérivées conformes fractionnaires avec la condition initiale et la condition aux bords de Neumann se résume ainsi :

$$\begin{cases} Eq. : & \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial t^\alpha} = r(\phi_{xx} + \phi_{yy}). \\ CI : & \phi_0(x, y) = \exp \left(-\frac{1}{2r} \int_0^y v(0, s, 0) ds - \frac{1}{2r} \int_0^x u(s, y, 0) ds \right). \\ CB : & \begin{cases} \phi_x = -\frac{1}{2r} u(x, y, t) \phi(x, y, t), & (x, y, t) \in (\partial\Omega \times (0, T)), \\ \phi_y = -\frac{1}{2r} v(x, y, t) \phi(x, y, t), & (x, y, t) \in (\partial\Omega \times (0, T)). \end{cases} \end{cases} \quad (3.34)$$

Reformulons le problème (3.34) en utilisant la Propriété 6 du Théorème 3.1, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eq. :} \quad t^{(1-\alpha)} \frac{\partial \phi}{\partial t} = r(\phi_{xx} + \phi_{yy}). \\ \text{CI :} \quad \phi_0(x, y) = \exp \left(-\frac{1}{2r} \int_0^y v(0, s, 0) ds - \frac{1}{2r} \int_0^x u(s, y, 0) ds \right). \\ \text{CB :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_x = -\frac{1}{2r} u(x, y, t) \phi(x, y, t), \quad (x, y, t) \in (\partial\Omega \times (0, T)), \\ \phi_y = -\frac{1}{2r} v(x, y, t) \phi(x, y, t), \quad (x, y, t) \in (\partial\Omega \times (0, T)). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

3.4 Solution analytique

Nous déterminons la solution analytique du système (3.1) via l'équation de la chaleur (3.35) et à l'aide la transformation inverse de Cole-Hopf.

3.4.1 Solution analytique de l'équation de la chaleur Eq.(3.35)

Afin de résoudre l'Eq.(3.35), nous introduisons la transformée de Fourier (T.F)

$$T.F(\phi(x, y, t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \phi(x, y, t) dx dy = \widehat{\phi}(k_x, k_y, t), \quad (3.36)$$

et la transformée inverse de Fourier ($T.F^{-1}$)

$$T.F^{-1}(\phi(x, y, t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \widehat{\phi}(k_x, k_y, t) dk_x dk_y. \quad (3.37)$$

Dans un premier temps, nous appliquons la T.F au terme ϕ_t ,

$$\begin{aligned}
T.F\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)} \frac{\partial\phi}{\partial t} dx dy, \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)} \phi dx dy, \\
&= \frac{\partial\widehat{\phi}(k_x, k_y, t)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Puis, nous devons examiner la T.F au terme ϕ_x , i.e. :

$$T.F(\phi_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)} \phi_x dx dy, \tag{3.39}$$

L'intégration par partie de l'Eq.(3.39), on pose f et g' comme suit :

$$\begin{cases} f = e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)} \implies f' = -2i\pi k_x e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)}, \\ g' = \phi_x \implies g = \phi, \end{cases} \tag{3.40}$$

ce qui donne,

$$T.F(\phi_x) = e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)} \phi \Big|_{-\infty(x,y)}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi k_x e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)} \phi \tag{3.41}$$

Selon [42], les conditions aux limites de l'équation de chaleur sur l'intervalle infini : $\phi(x, y, t) = 0$ si $|x| = |y| = \infty$, donc on a :

$$\begin{aligned}
T.F(\phi_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi k_x e^{-2i\pi(k_x.x+k_y.y)} \phi \\
&= 2i\pi k_x \times T.F(\phi(x, y, t)) = 2i\pi k_x \widehat{\phi}(k_x, k_y, t),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

On peut itérer ce résultat pour obtenir la T.F du terme ϕ_{xx}

$$\begin{aligned}
T.F(\phi_{xx}) &= T.F((\phi_x)_x) \\
&= 2i\pi k_x \times T.F(\phi_x) \\
&= (2i\pi k_x)^2 \widehat{\phi}(k_x, k_y, t),
\end{aligned} \tag{3.43}$$

De la même manière, on procède pour la variable y , on a donc :

$$T.F(\phi_{yy}) = (2i\pi k_y)^2 \widehat{\phi}(k_x, k_y, t).$$

En substituant les résultats ci-dessus dans l'Eq.(3.35), nous obtenons

$$t^{(1-\alpha)} \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial t} + r(2\pi)^2 (k_x^2 + k_y^2) \widehat{\phi} = 0. \quad (3.44)$$

Ainsi, la solution de l'Eq.(3.44) est donnée par :

$$\widehat{\phi} = A(k_x, k_y) e^{-4r\pi^2 (k_x^2 + k_y^2) t^\alpha / \alpha}, \quad (3.45)$$

où $A(k_x, k_y)$ est la constante d'intégration qui est donnée par :

$$A(k_x, k_y) = \widehat{\phi}_0(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x', y') e^{-2i\pi(k_x \cdot x' + k_y \cdot y')} dx' dy'$$

En appliquant T.F⁻¹ à l'Eq.(3.45), on obtient :

$$\begin{aligned} T.F^{-1}(\phi(x, y, t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \widehat{\phi}(k_x, k_y, t) dk_x dk_y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x', y') \times I \times dx' dy', \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y) - 2i\pi(k_x \cdot x' + k_y \cdot y') - 4r\pi^2 (k_x^2 + k_y^2) t^\alpha / \alpha} dk_x dk_y \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(x-x')k_x - 4r\pi^2 k_x^2 t^\alpha / \alpha} dk_x \right] \\ &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(y-y')k_y - 4r\pi^2 k_y^2 t^\alpha / \alpha} dk_y \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le programme Maple (voir Annexe II), la solution de l'Eq.(3.34) est donnée par :

$$\phi(x, y, t) = \frac{\alpha t^{-\alpha}}{4r\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{-\alpha(x-x')^2 - \alpha(y-y')^2}{4rt^\alpha} \right] \phi_0(x', y') dx' dy'. \quad (3.46)$$

3.4.2 Solution analytique du système (3.1)

Calculons

$$\phi_x(x, y, t) = \frac{-\alpha t^{-\alpha}}{8r\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(x-x') \times J}{rt^\alpha} \phi_0(x', y') dx' dy', \quad (3.47)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \frac{-\alpha t^{-\alpha}}{8r\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(y-y') \times J}{rt^\alpha} \phi_0(x', y') dx' dy'. \quad (3.48)$$

où,

$$J = \exp\left(\frac{-\alpha(x-x')^2 - \alpha(y-y')^2}{4rt^\alpha}\right).$$

Une fois les fonctions $\phi(x, y, t)$, $\phi_x(x, y, t)$ et $\phi_y(x, y, t)$ sont calculées et en utilisant (3.12), donc la solution est

$$u(x, y, t) = \frac{\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x') \exp\left[\frac{-\alpha(x-x')^2 - \alpha(y-y')^2}{4rt^\alpha}\right] \phi_0(x', y') dx' dy'}{t^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-\alpha(x-x')^2 - \alpha(y-y')^2}{4rt^\alpha}\right] \phi_0(x', y') dx' dy'}, \quad (3.49)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y-y') \exp\left[\frac{-\alpha(y-y')^2 - \alpha(x-x')^2}{4rt^\alpha}\right] \phi_0(x', y') dx' dy'}{t^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-\alpha(x-x')^2 - \alpha(y-y')^2}{4rt^\alpha}\right] \phi_0(x', y') dx' dy'}. \quad (3.50)$$

3.5 Analogues discrets de (3.35)

Discrétisation du problème (3.35) par la MDF

Nous discrétisons le domaine Ω par la MDF en nx points (resp. ny), chacun des intervalles de longueur $\Delta x = (b-a)/nx$ (resp. $\Delta y = (b-a)/ny$) le long de l'axe des x (resp. y), et définissons les points du maillage discret (x_i, y_j, t_n) , pour $(a + i\Delta x, a + j\Delta y, n\Delta t)$, où $i = 0, \dots, nx$, $j = 0, \dots, ny$ et $n = 0, \dots, T$.

i) Schéma explicite

Le schéma explicite de l'Eq.(3.35) est donné par :

$$t_n^{(1-\alpha)} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = r \left(\frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right).$$

Ainsi, pour chaque point intérieur (x_i, y_j) , pour $i = 1, \dots, nx - 1$, $j = 1, \dots, ny - 1$, on obtient :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \vartheta_1 \phi_{i,j}^n + \vartheta_2 (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n) + \vartheta_3 (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n), \quad (3.51)$$

où,

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 1 - \frac{2r\Delta t}{(\Delta x)^2 t_n^{(1-\alpha)}} - \frac{2r\Delta t}{(\Delta y)^2 t_n^{(1-\alpha)}}, \\ \vartheta_2 &= \frac{r\Delta t}{(\Delta x)^2 t_n^{(1-\alpha)}}, \quad \vartheta_3 = \frac{r\Delta t}{(\Delta y)^2 t_n^{(1-\alpha)}}. \end{aligned}$$

Calcul les éléments aux bords

Discretisons les CB :

$$\begin{cases} \phi_x(x_i, y_j, t_n) \simeq \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = -\frac{1}{2r} u_{i,j}^n \phi_{i,j}^n, \\ \phi_y(x_i, y_j, t_n) \simeq \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = -\frac{1}{2r} v_{i,j}^n \phi_{i,j}^n, \end{cases} \quad (3.52)$$

qui s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} \phi_{i+1,j}^n = \phi_{i-1,j}^n - \frac{\Delta x}{r} u_{i,j}^n \phi_{i,j}^n, \\ \phi_{i,j+1}^n = \phi_{i,j-1}^n - \frac{\Delta y}{r} v_{i,j}^n \phi_{i,j}^n. \end{cases} \quad (3.53)$$

Calcul des CB sur les bords $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 .

- Sur Γ_1 , pour $j = 0$, la relation (3.53) devient :

$$\begin{cases} \phi_{i+1,0}^n = \phi_{i-1,0}^n - \frac{\Delta x}{r} u_{i,0}^n \phi_{i,0}^n, \\ \phi_{i,1}^n = \phi_{i,-1}^n - \frac{\Delta y}{r} v_{i,0}^n \phi_{i,0}^n. \end{cases} \quad (3.54)$$

En substituant (3.54) dans l'Eq.(3.51), pour $i = 1, \dots, nx$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\phi_{i,0}^{n+1} &= \vartheta_1 \phi_{i,0}^n + \vartheta_2 (\phi_{i+1,0}^n + \phi_{i-1,0}^n) + \vartheta_3 (\phi_{i,1}^n + \phi_{i,-1}^n) \\ &= \vartheta_1 \phi_{i,0}^n + \vartheta_2 \left(2\phi_{i-1,0}^n - \frac{\Delta x}{r} u_{i,0}^n \phi_{i,0}^n \right) + \vartheta_3 \left(2\phi_{i,1}^n - \frac{\Delta y}{r} v_{i,0}^n \phi_{i,0}^n \right).\end{aligned}$$

De la même manière comme précédemment sur Γ_1 , nous pouvons donner respectivement les expressions similaires sur Γ_2 , ($j = ny$) Γ_3 , ($i = 0$) et Γ_4 , ($i = nx$).

$$\phi_{i,ny}^{n+1} = \vartheta_1 \phi_{i,ny}^n + \vartheta_2 \left(2\phi_{i-1,ny}^n - \frac{\Delta x}{r} u_{i,ny}^n \phi_{i,ny}^n \right) + \vartheta_3 \left(2\phi_{i,ny-1}^n - \frac{\Delta y}{r} v_{i,ny}^n \phi_{i,ny}^n \right). \quad (3.55)$$

pour, $i = 1, \dots, nx$.

$$\phi_{0,j}^{n+1} = \vartheta_1 \phi_{0,j}^n + \vartheta_2 \left(2\phi_{1,j}^n + \frac{\Delta x}{r} u_{0,j}^n \phi_{0,j}^n \right) + \vartheta_3 \left(2\phi_{0,j-1}^n - \frac{\Delta y}{r} v_{0,j}^n \phi_{0,j}^n \right), \quad (3.56)$$

$$\phi_{nx,j}^{n+1} = \vartheta_1 \phi_{nx,j}^n + \vartheta_2 \left(2\phi_{nx-1,j}^n - \frac{\Delta x}{r} u_{nx,j}^n \phi_{nx,j}^n \right) + \vartheta_3 \left(2\phi_{nx,j-1}^n - \frac{\Delta y}{r} v_{nx,j}^n \phi_{nx,j}^n \right), \quad (3.57)$$

pour, $j = 1, \dots, ny$.

Pour le sommet inférieur à gauche (x_0, y_0) , nous avons :

$$\phi_{0,0}^{n+1} = \vartheta_1 \phi_{0,0}^n + \vartheta_2 \left(2\phi_{1,0}^n + \frac{\Delta x}{r} u_{0,0}^n \phi_{0,0}^n \right) + \vartheta_3 \left(2\phi_{0,1}^n + \frac{\Delta y}{r} v_{0,0}^n \phi_{0,0}^n \right). \quad (3.58)$$

ii) Schéma implicite

En utilisant une discrétisation simple en avant en temps t et centrée en espace x et y , autour du point (x_i, y_j, t_n) , le schéma implicite pour l'Eq.(3.35) est donné par :

$$t_n^{1-\alpha} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = r \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right),$$

qui peut s'écrire ainsi :

$$-\alpha(\phi_{i+1,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^{n+1}) + \gamma\phi_{i,j}^{n+1} - \beta(\phi_{i,j+1}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1}) = \phi_{i,j}^n, \quad (3.59)$$

où

$$\alpha = \frac{r\Delta t}{(\Delta x)^2 t_n^{1-\alpha}}, \quad \beta = \frac{r\Delta t}{(\Delta y)^2 t_n^{1-\alpha}}, \quad \gamma = 1 + 2\alpha + 2\beta,$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B},$$

avec,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ C & D & K & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & C & D & K \\ 0 & \cdots & 0 & L & M \end{pmatrix}_{(nx \times ny, nx \times ny)},$$

$$\mathcal{X}^t = (\phi_{0,0}^{n+1}, \phi_{0,1}^{n+1}, \dots, \phi_{nx,ny}^{n+1}) \text{ et } \mathcal{B} = (\phi_{0,0}^n, \phi_{0,1}^n, \dots, \phi_{nx,ny}^n).$$

A, B, C, D, K, L et M sont des sous-matrices de dimension (nx, ny) données respectivement par :

$$A = \begin{pmatrix} a & -2\beta & 0 & \cdots & 0 \\ -2\beta & \gamma & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -2\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\alpha & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & -2\beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & \gamma & -\beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma & -\beta \\ 0 & \cdots & 0 & -2\beta & d_{ny} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\alpha & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} m' & -2\beta & 0 & \cdots & 0 \\ -2\beta & m_1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & m_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -2\beta & m_{ny} \end{pmatrix}.$$

Avec,

$$a = -\frac{\alpha\Delta x}{r}u_{0,0}^n + \gamma - \frac{\beta\Delta y}{r}v_{0,0}^n$$

$$b_j = -2\alpha - \frac{\alpha\Delta x}{r}u_{0,j}^n + \frac{\beta\Delta y}{r}v_{0,j}^n \text{ pour } j = 1, \dots, ny.$$

$$d_1 = -\frac{\alpha\Delta x}{r}u_{1,0}^n + \gamma - \frac{\beta\Delta y}{r}v_{1,0}^n$$

$$d_{ny} = -\frac{\alpha\Delta x}{r}u_{nx,ny}^n + \gamma + \frac{\beta\Delta y}{r}v_{nx,ny}^n$$

$$m' = d_1, m_i = -\frac{\alpha\Delta x}{r}u_{i,ny}^n + \gamma + \frac{\beta\Delta y}{r}v_{i,ny}^n \text{ pour } i = 1, \dots, nx.$$

Solution discrète du système (3.1)

La solution du Système (3.1) peut être obtenue par la transformation inverse de Cole-Hopf et les formules (3.48) et (3.49).

Soient $D_x\phi_{i,j}^n$ et $D_y\phi_{i,j}^n$ les dérivées respectivement de ϕ au point (x_i, y_j, t_n) par rapport à x et y . Alors, $D_x\phi_{i,j}^n$ et $D_y\phi_{i,j}^n$ peuvent être calculées à partir de la formule de différence centrée au premier ordre, pour $i = 1, \dots, nx - 1$, $j = 1, \dots, ny - 1$

$$D_x\phi_{i,j}^n = \frac{\partial\phi}{\partial x} \simeq \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x},$$

$$D_y\phi_{i,j}^n = \frac{\partial\phi}{\partial y} \simeq \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2\Delta y}.$$
(3.60)

Sachant que les dérivées $D_y\phi_{0,j}^n, D_y\phi_{nx,j}^n, D_x\phi_{i,0}^n$ et $D_x\phi_{i,ny}^n$ aux bords sont déjà connues. Une fois que les valeurs approximatives de ϕ, ϕ_x et ϕ_y sont calculées dans l'ensemble des points discrets (x_i, y_j, t_n) , alors les valeurs approximatives de u et v , aux points discrets, peuvent être calculées à par-

tir des formules suivante :

$$\begin{cases} u_{i,j}^n = -2r \frac{D_x \phi_{i,j}^n}{\phi_{i,j}^n}, \\ v_{i,j}^n = -2r \frac{D_y \phi_{i,j}^n}{\phi_{i,j}^n}, \text{ pour } i = 1, \dots, nx, \quad j = 1, \dots, ny. \end{cases} \quad (3.61)$$

3.6 Expérimentations numériques

Pour l'illustration et la validation de la méthode proposée, nous calculons l'erreur relative en norme L_1 et en norme L_∞ qui sont définies par :

$$\| \text{Erreur } u \|_{L_1} = \frac{\|u_a - u_n\|_{L_1}}{\|u_a\|_{L_1}}, \quad \| \text{Erreur } v \|_{L_1} = \frac{\|v_a - v_n\|_{L_1}}{\|v_a\|_{L_1}}, \quad (3.62)$$

et

$$\| \text{Erreur } u \|_{L_\infty} = \frac{\|u_a - u_n\|_{L_\infty}}{\|u_a\|_{L_\infty}}, \quad \| \text{Erreur } v \|_{L_\infty} = \frac{\|v_a - v_n\|_{L_\infty}}{\|v_a\|_{L_\infty}}, \quad (3.63)$$

où, le couple (u_a, v_a) représente la solution analytique (voir, [33], p. 581 , pour le cas particulier $\alpha = 1$) du système (3.1) et le couple (u_n, v_n) représente la solution numérique calculée via le système (3.61).

Pour la simulation, nous avons utilisé la solution exacte ci-après du système (3.1) sur le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{cases} u_a(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4[1 + \exp((-4x\alpha + 4y\alpha - t^\alpha)/32r\alpha)]}, \\ v_a(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4[1 + \exp((-4x\alpha + 4y\alpha - t^\alpha)/32r\alpha)]}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Pour les conditions initiales et limites, on peut les extraire de la solution exacte. Après calcul, nous évaluons respectivement les erreurs relatives en utilisant les normes (3.62) et (3.63). Nous simulons les schémas explicites et implicites. La convergence pour chaque schéma est résumé dans les tableaux (3.1) et (3.2) suivants :

Erreur relative	$\ Erreur u\ _{L_1}$		$\ Erreur v\ _{L_1}$	
Schéma	Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
T=0.1				
$\Delta x = \Delta y = 0.2$	$3.30e - 03$	$3.34e - 03$	$3.20e - 03$	$3.22e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.1$	$2.17e - 03$	$2.17e - 03$	$1.55e - 03$	$1.55e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.05$	$1.46e - 03$	$1.53e - 03$	$8.19e - 04$	$8.02e - 04$
T=0.5				
$\Delta x = \Delta y = 0.2$	$5.60e - 03$	$5.64e - 03$	$1.63e - 03$	$1.58e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.1$	$4.69e - 03$	$4.56e - 03$	$1.58e - 03$	$1.41e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.05$	$4.48e - 03$	$4.52e - 03$	$1.46e - 03$	$1.37e - 03$
T=1				
$\Delta x = \Delta y = 0.2$	$7.85e - 03$	$7.90e - 03$	$1.43e - 03$	$1.43e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.1$	$7.37e - 03$	$7.47e - 03$	$1.37e - 03$	$1.31e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.05$	$7.26e - 03$	$7.35e - 03$	$1.06e - 03$	$1.29e - 03$

TABLEAU 3.1 – Erreurs relatives L_1 .

Erreur relative	$\ Erreur u\ _{L_\infty}$		$\ Erreur v\ _{L_\infty}$	
Schéma	Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
T=0.1				
$\Delta x = \Delta y = 0.2$	$3.35e - 03$	$3.34e - 03$	$3.20e - 03$	$3.22e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.1$	$2.39e - 03$	$2.39e - 03$	$1.70e - 03$	$1.70e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.05$	$1.52e - 03$	$1.53e - 03$	$8.29e - 04$	$8.29e - 04$
T=0.5				
$\Delta x = \Delta y = 0.2$	$5.62e - 03$	$5.64e - 03$	$1.69e - 03$	$1.69e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.1$	$4.76e - 03$	$4.76e - 03$	$1.57e - 03$	$1.91e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.05$	$4.62e - 03$	$4.62e - 03$	$1.48e - 03$	$1.87e - 03$
T=1				
$\Delta x = \Delta y = 0.2$	$7.88e - 03$	$7.90e - 03$	$1.68e - 03$	$1.68e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.1$	$7.47e - 03$	$7.47e - 03$	$1.50e - 03$	$1.51e - 03$
$\Delta x = \Delta y = 0.05$	$7.34e - 03$	$7.35e - 03$	$1.47e - 03$	$1.49e - 03$

TABLEAU 3.2 – Erreurs relatives L_∞ .

Montrons à travers la figure (3.3) la tendance des erreurs relatives.

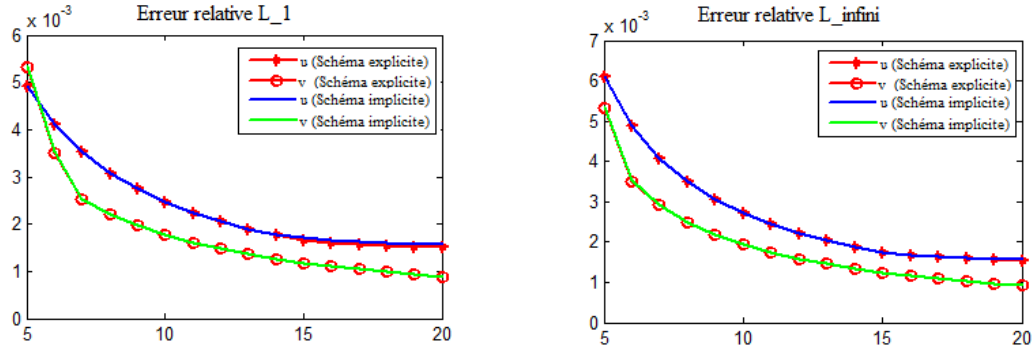


FIGURE 3.3 – Graphes représentant l'erreur relative.

À travers la figure 3.4, nous donnons les graphes des solutions exactes et numériques du système (3.1).

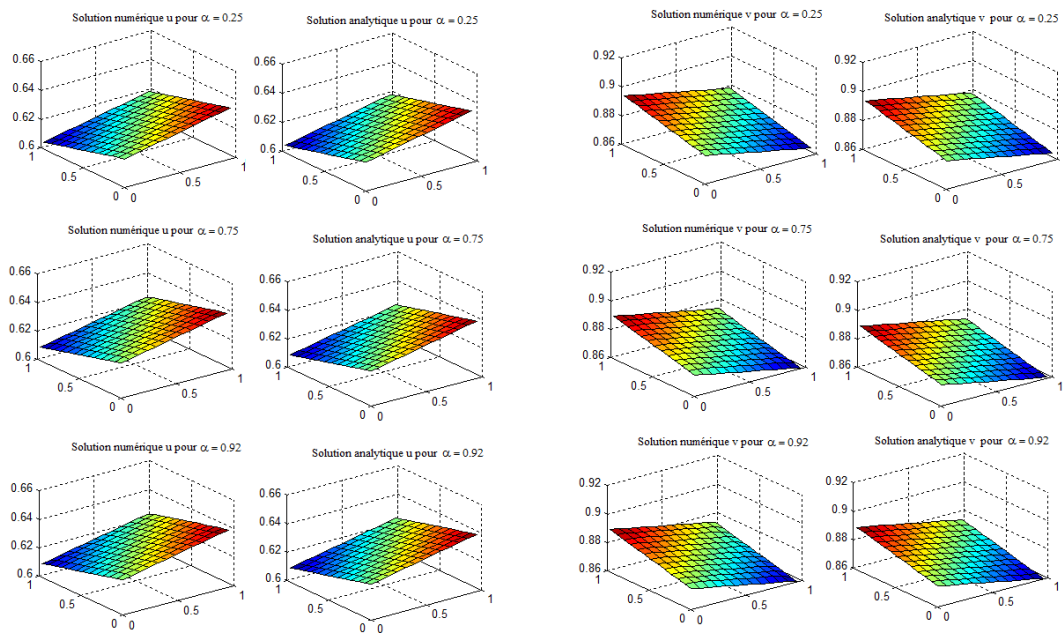


FIGURE 3.4 – Graphes des solutions exactes et numériques des équations de Burgers fractionnelles, pour $r = 0.5$, $\Delta x = \Delta y = 0.08$ et $\alpha = 0.25; 0.75$ et 0.92 .

3.7 Commentaire

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la transformation de Cole-Hopf pour un système couplé d'équations Burgers aux dérivées conformes fractionnaires afin de le transformer en une équation linéaire fractionnaire de type chaleur. La combinaison de la solution obtenue de l'équation de diffusion et la transformation inverse de Cole-Hopf donne la solution du système d'équations de Burgers aux dérivées conformes. Ainsi, on peut dire que l'utilisation de la transformation de Cole-Hopf et de son inverse sont très efficaces pour résoudre cette classe d'équations fractionnaires non linéaires. Pour la vérification si nous prenons le cas $\alpha = 1$, la solution est la même que celle du système d'équations de Burgers classique.

CHAPITRE 4

PROCÉDURE D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE POUR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DANS UN CADRE DE CONVERGENCE MONOTONE

PROCÉDURE D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE POUR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DANS UN CADRE DE CONVERGENCE MONOTONE

Dans ce chapitre, nous allons étudier une procédure d'accélération de convergence ([15, 17, 29, 36]) des méthodes des approximations successives appliquée à des systèmes linéaires dans un cadre de convergence monotone (dite aussi la méthode de sur et sous solutions).

Pour ce faire, supposons qu'on veut résoudre le système linéaire

$$Ax = b,$$

où A est une matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$ et $b, x \in \mathbb{R}^n$.

Considérons la suite des approximations successives associée est donnée par :

$$u^{k+1} = Tu^k + b, \quad k = 0, 1, \dots,$$

où T (avec, $A = I - T$) est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ et b, u^k sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

4.1 Définitions et propositions

Définition 4.1. ([41]) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite monotone, si A est inversible et si $A^{-1} \geq 0$, (i.e., tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls).

Proposition 4.1. ([41]) Une matrice A est monotone, si et seulement si :

$$AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0, \text{ pour tout vecteur } x \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

Définition 4.2. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite M -matrice si elle est monotone et si les $a_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$, où les a_{ij} sont les coefficients de A

Proposition 4.2. ([41]) Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{cases} a_{ij} \leq 0, \text{ pour } i \neq j, \\ \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} > 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.2)$$

alors A est une M -matrice.

Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n avec $u = (u_1, \dots, u_n)^t$ et $v = (v_1, \dots, v_n)^t$, et A, C deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On définit l'ordre partiel naturel sur \mathbb{R}^n par :

$$\forall u \text{ et } v \in \mathbb{R}^n, u < v \iff u_i < v_i, i = 1, \dots, n.$$

$$\forall u \text{ et } v \in \mathbb{R}^n, u \leq v \iff u_i \leq v_i, i = 1, \dots, n.$$

$$\forall A \text{ et } C \in M_n(\mathbb{R}), A < C \iff a_{i,j} < c_{i,j}, i, j = 1, \dots, n.$$

$$\forall A \text{ et } C \in M_n(\mathbb{R}), A \leq C \iff a_{i,j} \leq c_{i,j}, i, j = 1, \dots, n.$$

4.2 Description de la procédure d'accélération de convergence (méthodes des sous/sur solutions)

Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, considérons le système linéaire :

$$u = Tu + b. \quad (4.3)$$

Notons par u^* le point fixe de l'Eq.(4.3).

La suite des approximations successives est définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout vecteur initial } u^0 \in \mathbb{R}^n / \\ u^{k+1} = Tu^k + b, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.4)$$

Définition 4.3. Dans la relation (4.3), on appelle :

- sous-solution si $z \leq Tz + b$,
- sur-solution si $Tz + b \leq z$, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 4.1. Si le rayon spectral $\rho(T)$ est inférieur à l'unité, alors l'itération (4.4) converge vers la solution u^* pour tout $u^0 \in \mathbb{R}^n$; notons que la convergence n'est pas nécessairement monotone [15, 29]. En outre,

$$\text{si : } T \geq 0, \rho(T) < 1 \quad \text{et} \quad Tu^0 + b \leq u^0 \quad (\text{resp. } u^0 \leq Tu^0 + b),$$

la suite (4.4) décroît ou croît dans un ordre partiel \mathbb{R}^n et converge vers u^* , mais si $\rho(T)$ est proche de l'unité, la convergence de (4.4) peut être très lente.

Considérons l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad \begin{cases} T \in L(\mathbb{R}^n) \text{ avec } T \geq 0, \\ \text{et } \rho(T) \text{ strictement inférieur à } 1. \end{cases}$$

Lemme 4.1. Sous l'Hypothèse H et pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$Tu + b \leq u \text{ et } Tv + b \leq v.$$

Soit $z \in \mathbb{R}^n$ défini par :

$$z = \min(u, v) \text{ [i.e. } z_i = \min(u_i, v_i), i = 1, \dots, m],$$

on a alors :

$$Tz + b \leq z.$$

Preuve 4.1. Par définition de z , $z_i = u_i$ (ou bien, $z_i = v_i$), pour $i = 1, \dots, n$. Comme $z \leq u$ (resp. $z \leq v$) et $t_{i,j} \geq 0$, ($t_{i,j}$ les coefficients de la matrice T), on a alors

$$\sum_{i=1}^m t_{i,j}(z_j - u_j) \leq 0 \quad (\text{resp. } \sum_{i=1}^m t_{i,j}(z_j - v_j) \leq 0), \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

On en déduit que :

$$(Tz + b - z)_i \leq (Tu + b - u)_i \leq 0 \quad (\text{resp. } (Tz + b - z)_i \leq (Tv + b - v)_i \leq 0).$$

et par conséquent on a :

$$Tz + b \leq z.$$

Proposition 4.3. *Supposons que l'Hypothèse H soit vérifiée. Soit*

$$Tu^0 + b \leq u^0 \text{ (resp. } v^0 \leq Tv^0 + b),$$

alors la suite u^k (resp. v^k) définie par :

$$u^{k+1} = Tu^k + b \text{ (resp. } v^{k+1} = Tv^k + b),$$

satisfait

$$u^* \leq \dots \leq u^{k+1} \leq u^k \leq \dots \leq u^0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} u^k = u^* \\ \text{(resp. } v^0 \leq \dots \leq v^k \leq v^{k+1} \leq \dots \leq u^* \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} v^k = u^*).$$

Preuve 4.2. On a $\rho(T) < 1$ et $T \geq 0$, alors $(I - T)^{-1} \geq 0$.
Donc, $(I - T)$ est une M-matrix avec $Tu^0 + b \leq u^0$ (resp. $v^0 \leq Tv^0 + b$), on peut démontrer aisément le reste de la proposition.

Théorème 4.1. *Supposons que l' Hypothèse H est vérifiée.*

Soient $Tu^0 + b \leq u^0$ et un paramètre η^k ($\eta^k > 0$) défini par :

$$\eta^k = \min_{i \in m} \left\{ \frac{[T(u^{k-1} - u^k)]_i}{[(I - T)(u^{k-1} - u^k)]_i} \right\} = \min_{i \in m} \left\{ \frac{[(I - T)u^k - b]_i}{[(I - T)(u^{k-1} - u^k)]_i} \right\}, \quad (4.5)$$

Ce minimum est choisi pour i vérifiant

$$[(I - T)(u^{k-1} - u^k)]_i > 0 \text{ et } u^{k+1} = Tu^k + b, \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

Alors, on a :

$$\tilde{u}^k = u^k + \eta^k(u^k - u^{k-1}),$$

qui satisfait

$$u^* \leq \tilde{u}^k \leq u^{k+1} \leq u^k \text{ et } T\tilde{u}^k + b \leq \tilde{u}^k.$$

Preuve 4.3. Sous l'Hypothèse H, u^k satisfait la Proposition 4.2 et $u^{k-1} \leq u^k$ pour tout k .

On distingue deux cas :

– Si $u^{k-1} = u^k$, alors $u^k = u^*$ et la démonstration est évidente.

– Si $u^{k-1} \neq u^k$, comme $(I - T)^{-1} \geq 0$, alors $(I - T)(u^{k-1} - u^k)$ admet au moins une composante positive, donc le paramètre η^k est bien défini et positif, pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Par (4.5), on peut écrire alors :

$$\eta^k \left[(I - T)(u^k - u^{k-1}) \right]_i \leq \left[(I - T)u^k - b \right]_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Ceci est vrai même si,

$$\left[(I - T)(u^{k-1} - u^k) \right]_i \leq 0, \quad \text{comme } (I - T)u^k - b \geq 0.$$

Par conséquent,

$$T \left[u^k + \eta^k (u^k - u^{k-1}) \right] + b \leq u^k + \eta^k (u^k - u^{k-1}), \quad \text{avec } Tu^{k+1} + b \leq u^{k+1}.$$

Et en vertu du Lemme 4.2, on a :

$$T\tilde{u}^k + b \leq \tilde{u}^k, \quad \tilde{u}^{k+1} \leq u^{k+1} \leq u^k$$

et

$$(I - T)u^* - b \leq (I - T)\tilde{u}^k - b, \quad \text{avec } (I - T) \geq 0.$$

D'où, $u^* \leq \tilde{u}^k$ ce qui complète la démonstration du Théorème 4.1.

Théorème 4.2. *Sous l'Hypothèse H, soient $v^0 \leq Tv^0 + b$ et un paramètre θ^k ($\theta^k > 0$) défini par :*

$$\theta^k = \min_{i \in m} \left\{ \frac{[T(v^{k-1} - v^k)]_i}{[(I - T)(v^{k-1} - v^k)]_i} \right\} = \min_{i \in m} \left\{ \frac{[(I - T)v^k - b]_i}{[(I - T)(v^{k-1} - v^k)]_i} \right\}, \quad (4.6)$$

où le minimum est choisi pour tout i , vérifiant :

$$\left[(I - T)(v^{k-1} - v^k) \right]_i < 0 \quad \text{et} \quad v^{k+1} = Tv^k + b, \quad k = 1, 2, \dots$$

Alors

$$\tilde{v}^k = v^k + \theta^k (v^k - v^{k-1}),$$

satisfait

$$v^k \leq v^{k+1} \leq \tilde{v}^k \leq u^* \quad \text{et} \quad \tilde{v}^k \leq T\tilde{v}^k + b.$$

Preuve 4.4. De la même façon, comme dans le Théorème 4.1, nous pouvons facilement montrer le Théorème 4.2.

Sous l'Hypothèse H et les Théorèmes 4.1 et 4.2, nous pouvons avoir l'estimation des du côté gauche et droit.

$$v^k \leq \tilde{v}^k \leq u^* \leq \tilde{u}^k \leq u^k,$$

ce qui nous permet d'obtenir une approximation de la solution exacte u^* pour toute tolérance souhaitée.

4.3 Algorithme itératif d'origine et l'algorithme accéléré correspondant

Nous allons décrire la procédure d'accélération, commençons tout d'abord par écrire l'algorithme d'origine Alg1.

Algorithme d'origine Alg1 :

Étape 0 : Considérons $u^0, v^0 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$u^0 \leq Tu^0 + b \quad \text{et} \quad Tv^0 + b \leq v^0.$$

Étape 1 : Pour $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} u^{k+1} = Tu^k + b, \\ v^{k+1} = Tv^k + b. \end{cases} \quad (4.7)$$

Écrivons ensuite l'algorithme accéléré

Algorithme accéléré Alg2 :

Étape 0 : Considérons $u^0, v^0 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$u^0 \leq Tu^0 + b \quad \text{et} \quad Tv^0 + b \leq v^0.$$

Étape 1 : Pour $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} u^{k+1} = \max [Tu^k + b, u^k + \eta^k (u^k - u^{k-1})], \\ v^{k+1} = \min [Tv^k + b, v^k + \theta^k (v^k - v^{k-1})], \end{cases} \quad (4.8)$$

où, le paramètre η^k (resp. θ^k) est calculé à travers l'expression (4.5) (respectivement (4.6)).

Pour résoudre les systèmes itératifs (4.7) et (4.8), nous appliquons, par exemple, la méthode de Jacobi.

Posons :

$$(I - T) = A, \text{ où } A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Notons par :

$D = (d_{i,j})$ $1 \leq i, j \leq n$, la matrice diagonale, où $d_{i,j} = a_{i,j}$, si $i = j$ et $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, et $-E(-F)$ est la matrice triangulaire strictement inférieure (resp. supérieure) de A .

Ainsi, l'algorithme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } u^0 \in \mathbb{R}^n \text{ une donnée arbitraire, la suite } u^k \text{ est définie par :} \\ u^{k+1} = (I_n - D^{-1}(E + F))u^k + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Pour le test de convergence des algorithmes, nous utilisons la norme $\|u^k - v^k\|_\infty < \varepsilon$, où ε est la tolérance.

Choix des vecteurs initiaux

Les vecteurs initiaux u^0 et v^0 à l'étape 0 peuvent être choisis comme suit :

$$u^0 = -v^0 = -(\delta, \dots, \delta)^t, \quad \text{où } \delta > \max\left(\frac{\bar{b}}{\underline{\lambda}}, \frac{-\underline{b}}{\underline{\lambda}}\right) > 0,$$

où

$$\underline{\lambda} = \min_i \left(\sum_j a_{i,j} \right) > 0, \quad \underline{b} = \min_i (b_i) \quad \text{et} \quad \bar{b} = \max_i (b_i).$$

4.4 Application

Pour l'illustration, nous prenons un exemple des exemples généraux du livre de Bensoussan-Lions [7]; c'est un problème de gestion des stocks d'énergie. Notre objectif, ici, se limite à l'application numérique en utilisant le processus d'accélération. Donc, nous n'avons pas l'intention de présenter l'étude complète de ce problème (pour plus de détails, voir [7]).

4.4.1 Problème à frontière libre abstrait

Considérons le problèmes dans sa forme générale suivante ([7, 29]) :
Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n de frontière régulière $\partial\Omega$, le problème est alors

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tels que} \\ a(u, u - v) \geq (f, v - u)_{L^2(\Omega)}, \\ u \leq M(u), v \leq M(u), \end{cases} \quad (4.10)$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \mu_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_{\Omega} \alpha_0(x) u v dx. \quad (4.11)$$

Les coefficients $\sigma_{i,j}$, μ_j et $\alpha_0 \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \dots, n$, avec $\alpha_0 \geq 0$,
(\cdot, \cdot) étant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et f une fonction donnée régulière dans $L^2(\Omega)$. $M(u)$ représente les obstacles de contrôle d'impulsion.
Le problème général P est théoriquement bien connu d'un point de vue mathématique et analytique (voir Bensoussan-Lions [7]). On peut l'écrire sous forme de trois inéquations quasi-variationnelles :

Trouver $u_i \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{cases} A_i u_i \leq f_i, \\ u_i \leq M(u_i), \\ (A_i u_i - f_i)^t \cdot M(u_i) = 0, \text{ pour } i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (4.12)$$

où A_1, A_2 et A_3 sont trois opérateurs, la fonction $M(u)$ est défini par :

$$M(u_i) = \inf_{i,j} \{ \Psi_{i,j} + u_i \}, \text{ pour } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ avec } i \neq j,$$

où $\Psi_{i,j}$ sont les obstacles.

Le problème économique consiste à ajuster la période pendant laquelle un régime est utilisé pour satisfaire la demande du coût le plus bas.

Autre formulation du problème (4.12) :

Trouver $u_i \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\max \left[(A_i u_i - f_i)^t \cdot (u_i - \inf_{i,j} (\Psi_{i,j} + u_i)) \right] = 0, \text{ Pour } i = 1, 2, 3. \quad (4.13)$$

Les sous problèmes (4.12) sont explicités ainsi :

Trouver les solutions u_1, u_2, u_3 des trois sous-problèmes tels que :

$$(Ps) \left\{ \begin{array}{l} (P_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 u_1 \leq f_1, \\ u_1 \leq \inf(\Psi_{1,2} + u_2, \Psi_{1,3} + u_3), \\ (A_1 u_1 - f_1)^t (u_1 - \inf(\Psi_{1,2} + u_2, \Psi_{1,3} + u_3)) = 0, \end{array} \right. \\ \\ (P_2) \left\{ \begin{array}{l} A_2 u_2 \leq f_2, \\ u_2 \leq \inf(\Psi_{2,1} + u_1, \Psi_{2,3} + u_3), \\ (A_2 u_2 - f_2)^t (u_2 - \inf(\Psi_{2,1} + u_1, \Psi_{2,3} + u_3)) = 0, \end{array} \right. \\ \\ (P_3) \left\{ \begin{array}{l} A_3 u_3 \leq f_3, \\ u_3 \leq \inf(\Psi_{3,1} + u_1, \Psi_{3,2} + u_2), \\ (A_3 u_3 - f_3)^t (u_3 - \inf(\Psi_{3,1} + u_1, \Psi_{3,2} + u_2)) = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Remarque L'étape de passer d'un régime à un autre est décrite à partir du problème Ps ; par exemple, on paye $\Psi_{1,2}$ et $\Psi_{1,3}$ lorsque on passe du régime (P_1) au régime (P_2) , si

$$u_1 \leq \inf(\Psi_{1,2} + u_2, \Psi_{1,3} + u_3),$$

n'est pas vérifié, alors on projette sur le convexe K .

De même, on paye $\Psi_{3,1}$ et $\Psi_{3,2}$, lorsqu' on passe du régime (P_2) au régime (P_3) . Si

$$u_2 \leq \inf(\Psi_{2,1} + u_1, \Psi_{2,3} + u_3),$$

n'est pas vérifiée, alors nous projetons (pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au livre de Bensoussan-Lions [7] et [9]).

Les opérateurs A_1, A_2 et A_3 sont définis :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 u_1 = - \sum_{i=1} \sigma_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^n \mu_j(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \alpha_0(x) u_1, \quad (I) \\ \\ A_2 u_2 = - \sum_{i=1} \sigma_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} + \alpha_0(x) u_2, \quad (II) \\ \\ A_3 u_3 = - \sum_{i=1} \sigma_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2}, \quad (II) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

où les coefficients $\sigma_{i,j}(x)$, $\mu_i(x)$ et $\alpha_0(x)$ sont des fonctions régulières.

4.4.2 Analogues discrets du problème abstrait P

La version discrète du Problème P peut s'écrire comme suit :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \text{ la solution discrète,} \\ a_h(u_h, u_h - v_h) \geq (f_h, v_h - u_h), \\ u_h \leq r_h M_h, v_h \leq r_h M_h, \end{cases} \quad (4.16)$$

où r_h l'opérateur d'interpolation usuel.

L'application du point fixe associée au Problème P_h est définie par :

$$(T_h) \begin{cases} T_h: (L^\infty(\Omega_h))^+ \rightarrow V_h, \\ w \rightarrow T_h w = z_h(w), \end{cases} \quad (4.17)$$

où V_h est l'espace d'éléments finis P_1 approximant $H^1(\Omega_h)$ et $z_h(w)$ la solution discrète du problème suivant :

$$(P'_h) \begin{cases} \text{Trouver } z_h \text{ tels que,} \\ a_h(z_h(w), v_h - z_h(w)) \geq (f_h, v_h - z_h(w)), \\ z_h(w) \leq r_h M_h(w), v_h \leq r_h M_h. \end{cases} \quad (4.18)$$

4.5 Exemples

Pour l'illustration numérique, nous considérons deux exemples pour cela nous évaluons le temps d'exécution en pourcentage. Nous utilisons la formule suivante :

$$q = \frac{\text{Temps d'exécution de l'algorithme Alg2}}{\text{Temps d'exécution de l'algorithme Alg1}}.$$

4.5.1 Exemple 1

Dans cet exemple (voir [7]), on traite le cas particulier du problème (4.15 – I) en prenant $M(u) = \Psi$. Pour la discrétisation du problème P_h , on prend $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et choisit un maillage régulier de longueur h ($h = 1/(n+1)$, $n > 0$). Nous utilisons la MDF en cinq points nous obtenons le système suivant :

$$A_h u_h = F_h, \quad (4.19)$$

où A_h est la matrice de discrétisation, u_h le vecteur solution recherchée et $F_h = (h^2 f_1, \dots, h^2 f_n)^T$.

Pour simuler, nous prenons :

$$k_1 = 4\left(\frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) + \alpha_0 h^2, \quad k_2 = -\frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\mu_1 h}{2}, \quad k_3 = -\frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\mu_1 h}{2},$$

$$k_4 = -\frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{\mu_2 h}{2}, \quad k_5 = \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\mu_2 h}{2},$$

avec, $\sigma_1 = \sigma_2 \approx \sigma_{i,j}(x)$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_j$, pour $i, j = 1, \dots, n$.

Les coefficients de la matrice sont donnés par :

$$a_{i,i} = k_1 \quad \text{pour } i = \overline{1, m},$$

$$a_{i,i+1} = \begin{cases} k_2 & \text{si } i = \overline{1, m} \text{ et } i \neq n, 2n, \dots, m-1, \\ 0 & \text{si } i = n, 2n, \dots, m-1, \end{cases}$$

$$a_{i,i-1} = \begin{cases} k_3 & \text{si } i = \overline{2, m} \text{ et } i \neq n, 2n, \dots, m-1, \\ 0 & \text{si } i = n, 2n, \dots, m-1, \end{cases}$$

$$a_{i,i+n} = k_4 \quad \text{et} \quad a_{i+n,i} = k_5 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1.$$

Notons que la matrice A_h a une structure multi-diagonale et n'est pas symétrique. Pour la résolution du système (4.19), nous appliquons la méthode de Jacobi avec une projection sur l'espace convexe (c-à-d, si $u^k \leq r_h \Psi_h$ et $v^k \leq r_h \Psi_h$ est vérifiée à l'itération k , sinon on prend u^k et v^k égal à l'obstacle). Ainsi, nous calculons la sous-solution et la sur-solution. Nous évaluons le temps d'exécution en *cpu* pour la résolution de l'algorithme *Alg1* et le temps d'exécution pour la résolution de l'algorithme accéléré *Alg2*.

Résultats numériques

Pour l'expérimentation, nous avons pris :

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$, $\alpha_0 = 100$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.01$, Ψ est une constante positive avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-14}$.

Notons que le nombre d'itérations ne peut faire, ici, un critère de comparaison car l'algorithme *Alg2* est différent de l'algorithme *Alg1*. On compare donc les temps d'exécution pour la résolution des deux algorithmes *Alg1* et *Alg2* respectivement.

Nous présentons quelques résultats dans les deux tableaux suivants:

m	Itérations	Temps cpu (en % de second)
64	65	36.8000
169	141	414.960
225	180	896.440
289	202	1272.020

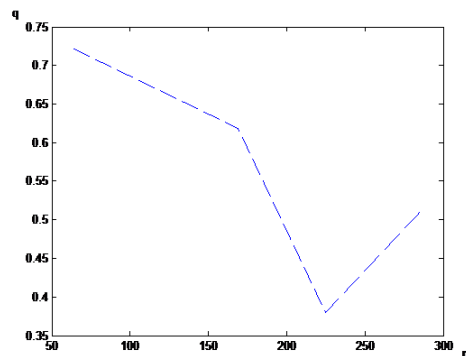
TABLEAU 4.1 – Temps d'exécution de l'algorithme Alg1 pour l'exemple 1

m	Itérations	Temps cpu (en % de second)
64	30	26.5600
169	69	256.560
225	88	340.760
289	93	658.670

TABLEAU 4.2 – Temps d'exécution de l'algorithme Alg2 pour l'exemple 1

Commentaire : Nous remarquons que le résultat obtenu dans cette étude est meilleur et que la situation est plus favorable que celle obtenue dans [15, 29]. Puisque les résultats, d'après les Tableaux 4.1 et 4.2 montrent qu'il y a une meilleure accélération de convergence. Par exemple pour $m = 64$, nous gagnons environ 30% de temps CPU. En outre, lorsque m augmente, le gain en temps peut atteindre jusqu'à 50%.

Représentons maintenant graphiquement les résultats des tableaux (4.1) et (4.2) (voir Figure 4.1).

FIGURE 4.1 – Graphe $q=f(m)$.

4.5.2 Exemple 2

Dans cet exemple (voir [7]), nous considérons le problème général 3D (4.14) avec, $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\times]0, 1[$. Pour la discrétisation des problèmes (4.15)–(I), (4.15)–(II) et (4.15)–(III), nous utilisons une discrétisation standard : le schéma des différences finies usuel en neuf points. Ainsi, nous obtenons les systèmes correspondants respectifs,

$$\begin{cases} A_h^{(1)} u_h = F_h^{(1)}, & (I_h) \\ A_h^{(2)} v_h = F_h^{(2)}, & (II_h) \\ A_h^{(3)} w_h = F_h^{(3)}, & (III_h) \end{cases} \quad (4.20)$$

où $A_h^{(1)}$, $A_h^{(2)}$ et $A_h^{(3)}$, sont respectivement les matrices de discrétisation des opérateurs A_1 , A_2 et A_3 ; u_h , v_h et w_h sont les vecteurs solutions de (I_h) , (II_h) et (III_h) ; $F_h^{(1)}$, $F_h^{(2)}$, $F_h^{(3)}$ sont les seconds membres respectifs.

Nous résolvons les systèmes (4.20)– (I_h) , (4.20)– (II_h) et (4.20)– (III_h) par la méthode de Gauss-Seidel qui s'écrit comme suit :

Pour $i = \overline{1, m}$, nous avons

$$\begin{cases} \tilde{u}_i^{(k+1)} = - \sum_{i < j} a_{i,j} u_i^{(k)} - \sum_{i > j} a_{i,j} u_i^{(k+1)} + F_h^{(i)}, \\ w_i^{(k+1)} = \text{proj}_V \tilde{u}_i^{(k+1)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.21)$$

où,

$$V = \left\{ u_i^{(k+1)} / u_i^{(k+1)} \leq \inf(\Psi_{i,j} + v_i^{(k)}, \Psi_{i,j} + w_i^k) \right\},$$

avec v_i^k, w_i^k les itérations calculées respectivement par les systèmes (4.20) – (II_h) et (4.20) – (III_h) .

Résultats numériques

Pour la simulation, nous avons pris :

les obstacles $\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1} = 3$, $\Psi_{1,3} = \Psi_{3,1} = 4$ et $\Psi_{2,3} = \Psi_{3,2} = 2.5$;

les coefficients $\sigma_{i,j} = 2$, $\mu_j = 1$ et $\alpha_0 = 4$, les vecteurs initiaux $u^{(0)} = v^{(0)} = w^{(0)} = 1,7$ et une tolérance $\varepsilon = 10^{-8}$.

Voici le résumé des résultats obtenus dans les tableaux qui suivent :

$h = 1/(m + 1)$	Itérations	Temps cpu (en % de second)
1/8	13	3.06
1/11	12	4.44
1/16	15	12.72
1/32	45	30.11

TABLEAU 4.3 – Temps d’exécution de l’algorithme Alg1 pour l’exemple 2

et

$h = 1/(m + 1)$	Itérations	Temps cpu (en % de second)
1/8	12	2.55
1/11	8	3.77
1/16	9	11.73
1/32	30	25.09

TABLEAU 4.4 – Temps d’exécution de l’algorithme Alg2 pour l’exemple 2

4.6 Commentaire et remarque

Nous remarquons que notre résultat est meilleur et plus favorable que ceux obtenus dans M. N. El Tarazi [15] et A. Laouar [29], puisque il y a une meilleure d’accélération de convergence et le gain en temps CPU est de l’ordre de 30%. Cependant dans cette étude, la question concernant la sensibilité de cette procédure aux choix optimaux du paramètre de relaxation n’a pas été abordée et sera l’objet de notre prochain travail de recherche. Cette procédure pourrait être, aussi, appliquée à des problèmes à frontière libre : par exemple, le problème de Stefan et le problème de contrôle optimal du type elliptique avec des contraintes sur l’état de contrôle.

**CONCLUSION GÉNÉRALE
ET PERSPECTIVES**

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'effet du terme non linéaire de l'équation non visqueuse Burgers qui provoque certains points de singularité. Nous constatons ainsi que le terme de diffusion dans l'équation visqueuse joue le rôle d'un régularisant. L'introduction de l'équation modifiée pour l'équation non visqueuse et les schémas modifiés correspondant ont permis de réduire relativement les points de discontinuité. Concernant le système couplé d'équations Burgers aux dérivées conformes fractionnaires, l'utilisation de la transformation de Cole-Hopf a permis de se ramener à la résolution d'une équation linéaire aux dérivées conformes fractionnaires du type équation de diffusion. Pour la procédure d'accélération, les résultats obtenus sont très encourageants, il est intéressant de l'appliquer à des problèmes complexes de dimension supérieure pour pouvoir tirer une conclusion générale.

PERSPECTIVES

- Concernant l'équation modifiée de Burgers, nous envisageons de tester quelques schémas numériques : schémas de Gear, Lax-Wendroff, saute-mouton, Godunov, etc., et en deuxième lieu, d'étudier des schémas numériques non linéaires afin de pouvoir établir une comparaison et donner une synthèse.
- Pour les équations aux dérivées conformes fractionnaires, nous entendons d'étudier d'autres problèmes non linéaires en utilisant la transformation de Cole-Hopf.
- Concernant la procédure d'accélération de convergence, il est intéressant de la tester sur des grands systèmes linéaires en utilisant le calcul parallèle.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math.* 279, 57 – 66 (2015).
- [2] T. Abdeljawad, M. Al Horani, R. Khalil, Conformable Fractional Semigroup Operators. *Journal of Semigroup Theory and Applications* Article ID, 7 (2015).
- [3] H.I. Abu, R. Khalil, Fractional Fourier Series with applications. *Amer. J. Comput. Appl. Math.* 4 : 187 – 191 (2014).
- [4] D.R. Anderson, D.J. Ulness, Newly Defined Conformable Derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 10, 109 – 137 (2015).
- [5] A. Atangana, D. Baleanu, A. Alsaedi, New properties of conformable derivative. *Open Phys.*,13 : 889 – 898 (2015).
- [6] S. Bendaas, Periodic wave shock solution of Burgers equations. *Congent Mathematics & Statistics* (2018), 5 : 1463597.
- [7] A. Bensoussan and J. L. Lions, Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique. Ed. Dunod, Paris (1978).
- [8] A. S. Bonnet-BenDhia et.al., Introduction aux équations aux dérivées partielles et à leur approximation numérique, April 25, 2012.
- [9] M. Boulbrachene, The Noncoercive Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problems. *Jour. Computers Math. Applic*, Vol. 35 N 12, pp. 101 – 108 (1998).
- [10] A. Boussaha, A. Laouar, A. Guerziz and S. Hossam, Hassan, A new modified scheme for linear shallow-water equations with distant propagation of irregular wave trains tsunami dispersion type for inviscid and weakly viscous fluids. *Global Jour. of Pur. and Appl. Math.*, Vol. 10, N 6, 793-815 (2014) .
- [11] A.G. Bratsos, A fourth-order numerical scheme for solving the modified Burgers equation. *Computers and Mathematics with Applications*. 60 1393 – 1400 (2010).
- [12] C. Brezinski and C. Chehab, Nonlinear Hybrid Procedure and Fixed Point Iterations. *Numer. Funct. Anal. Optimization*, pp. 465 – 487 (1998).

-
- [13] Y. Çenesiz, A. Kurt, The new solution of time fractional wave equation with conformable fractional derivative definition. *J. N. Theor.* 7 : 79 – 85 (2015).
- [14] M. Chau, A. Laouar, Th. Garcia, and P. Spiteri, Grid Solution of Problem with Unilateral Constraints. *Journal of Numerical Algorithms*, Springer (2017).
- [15] M.N. EL-Tarazi, On a monotony preserving accelerator process for the successive approximations method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 6 pp.439 – 446 (1986).
- [16] M. Eslami, H. Rezazadeh, The first integral method for Wu-Zhang system with conformable time fractional derivative. *Calcolo*, 1 :1 – 11 (2015).
- [17] M. Falcone, A numerical approach to infinite horizon problem of deterministic control theory. *Conf. CNR-GNAFA*, Italy (1984).
- [18] Carlos A. Felippa, Equation modification methods, (2001). www.Colorado.edu/engineering.
- [19] E. Goncalvès, Résolution numérique des equations d'Euler monodimensionnelles, Institut National Polytechnique de Grenoble (2004).
- [20] R. Herbin, Analyse numériques des équations aux dérivées partielles. Engineering School, Marseille, 2011. [https:// cel.archives-ouvertes.fr/cel-00637008](https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00637008).
- [21] A. Hossein, A.E. Tabatabaei, E. Shakour and M. Dehghan, Some implicit methods for the numerical solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*. 191, 560 – 570 (2007).
- [22] M. Javidi, A numerical solution of Burger's equation based on modified extended BDF scheme, *Inter. Math.Forum* 1, no. 32, 1565 – 1570 (2006).
- [23] F. Jędrzejewski, Introduction aux méthodes numériques. 2^{me} édition, Springer-Verlag, Paris (2005).
- [24] R. Khalil, M. Al Horani, A. Youcef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.* 264 : 65 – 701 (2014).
- [25] S. Kutluay, A.R. Bahadir, A. Ozdes, Numerical solution of one-dimensional Burgers equation : explicit and exact-explicit finite difference methods. *J. of Comput. and Appl. Math.* 103, 251 – 261 (1999).
- [26] A. Kurt, Y. Çenesiz, O. Taşbozan, Exact Solution for the Conformable Burgers'Equation by the Hopf-Cole Transform. *Çankaya University Journal of Science and Engineering*, 13(2), 018 – 023 (2016).
-

-
- [27] A. Kurt, Y. Çenesiz, O. Taşbozan, On the Solution of Burgers' Equation with the New Fractional Derivative. *De Gruyter Open, Open Phys.*, 13 :355 – 360 (2015).
- [28] M. Landajuela, Burgers Equation, BCAM Basque Center for Applied Mathematics, Internship - Summer (2011).
- [29] A. Laouar, Aspects de l'analyse numérique de méthodes itératives de point fixe : Erreurs d'arrondi, Accélération de convergence, Sous-domaines. Thèse, Université de Besançon, France (1988).
- [30] A. Laouar, A. Guerziz, and A. Boussaha, Calculation of eigenvalues of Sturm-Liouville equation for simulating hydrodynamic soliton generated by a piston wave maker. *Applied Math.*, SpringerPlus (2016).
- [31] A. Laouar and I. Mous, An Accelerate Process for the Successive Approximations Method in the Case of Monotonous Convergence. *AAM : Intern. J.*, Vol. 13, Issue 1 (*June* 2018).
- [32] J. Leveque Randall, Numerical methods for conservation laws. *Lectures in Mathematics ETH Zürich*, Birkhäuser Verlag (1992).
- [33] W. Liao, A fourth-order finite method for solving the system of two-dimensional Burgers' equation. *Inter J. for Num. Methods in Fluids*, 64 :565 – 590 (2010).
- [34] T.P. Liu, Hopf-Cole transformation. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, New Series*, 12(1), 71 – 101 (2017).
- [35] RuXun Liu. YaLi Duan, Lattice Boltzmann model for two-dimensional unsteady Burgers's equation. *J. of Comput. and Appl. Math.* 206 432 – 439 (2007).
- [36] J.C. Miellou, Extrapolation aggregation of monotone kind. Application to one "obstacle's" stationary problems. *Proceedings of intensive seminary one free boundary value problems*. Pavia, Ed. Magenes, pp. 411 – 437 (1979).
- [37] I. Mous and A. Laouar, A study of the shock wave schemes for the modified burgers' equation. *Journal of Mathematical Analysis*, Vol 11, November 2019.
- [38] J. M. Ortega and W. C Reinboldt, *Iterative Solution on Non Linear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York (1970).
- [39] A. Ramadan Mohamed and S. El-Danaf Talaat, Numerical treatment for the modified Burgers equation, *Mathematics and Computers in Simulation*. 70, 90 – 98 (2005).
-

-
- [40] C. Sarker Ronobir and L. S. Andallah, Numerical Solution of Burger's equation via Cole-Hopf transformation diffusion equation. *Int. J. Scien & Engr. Rech.*, Vol 4, June-2013.
- [41] J. F . Scheid, Méthodes numériques pour la dynamique des fluides. Université de Lorraine,(2011-2012).
- [42] T. Ursell, Solution of the 2D Diffusion Equation : Diffusion of solid particles confined in a viscous fluid. APh 162-Biological Phusics Laboratory (2005).
<http://rpdata.caltech.edu/courses/aph162/2006/Protocols/diffusion.pdf>.
- [43] R. Warming, and R. Hyett, The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. *J. Comput. Phys.*, 14, pp. 159 – 179 (1974).
- [44] S. Zhou and Z. Zou, An iterative algorithm for a quasivariational inequality system related to HJB equation. *Jour. of Comp. and Appl. Math.*, Elsevier (2007).
-

ANNEXE

ANNEXE I

Programme Maple pour évaluer
le facteur d'amplification
et l'erreur de troncature

```
#=====#
#                DÉBUT du PROGRAMME                #
#=====#
#                Étude de l'équation de Burgers      #
restart;diff(U(t,x),t)+U(t,x)*diff(U(t,x),x)=0;eq:=%:
#=====#
#                Schéma aux différences finis        #
#=====#
#                Définition des coefficients du schéma #
c:= # Entrer les coefficients du matrice c;
a:= # Entrer les coefficients du matrice a;
#=====#
a[1]*U[n+1,i-1]+a[2]*U[n+1,i]+a[3]*U[n+1,i+1]=
c[1]*U[n,i-1]+c[2]*U[n,i]+c[3]*U[n,i+1];
eqh:=lhs(%)-rhs%=0:
#=====#
# Stabilité
Up:=(n,i)->Psi[n]*exp(I*omega*i*dx);
subs(U[n+1,i]=Up(n+1,i),U[n+1,i+1]=Up(n+1,i+1),
U[n+1,i-1]=Up(n+1,i-1),U[n,i]=Up(n,i), U[n,i-1]=Up(n,i-1),
U[n,i+1]=Up(n,i+1),U[n,i-2]=Up(n,i-2),eqh);
expand(simplify((%)*dt*exp(-I*omega*i*dx)));rel1:=%:
simplify(subs(Psi[n+1]=G*Psi[n],rel1/Psi[n])):
G=solve(%,G);rel2:=rhs(%):
#=====#
# Coefficient d'amplification et le carré du module #
#=====#

G:=simplify(subs(omega*dx=y,V=CFL*dx/dt,evalc(rel2)),trig);
```

```

G2:=(evalc(Re(G))^2+evalc(Im(G))^2);
# Consistance
Uex:=(p,q)->U(t+(p-n)*dt,x+(q-i)*dx);
subs(U[n,i]=Uex(n,i),U[n,i+1]=Uex(n,i+1),
U[n,i-1]=Uex(n,i-1),
U[n+1,i]=Uex(n+1,i),U[n+1,i+1]=Uex(n+1,i+1),
U[n+1,i-1]=Uex(n+1,i-1),lhs(eqh)); rel3:=%:
expand(simplify(rel3-lhs(eq)));rel4:=%:

#=====#
#           Développement en série de Taylor           #
#=====#

U(t+dt,x)=convert(mtaylor(U(t+dt,x),[dt],4),diff);
S1:=%:
U(t+dt,x+dx)=convert(mtaylor(U(t+dt,x+dx),[dt,dx],4),diff):
S2:=%:
U(t+dt,x-dx)=convert(mtaylor(U(t+dt,x-dx),[dt,dx],4),diff):
S3:=%:
U(t,x+dx)=convert(mtaylor(U(t,x+dx),[dx],4),diff):
S4:=%:
U(t,x-dx)=convert(mtaylor(U(t,x-dx),[dx],4),diff):
S5:=%:

#=====#
#           Erreur de troncature           #
#=====#

simplify(subs(S1,S2,S3,S4,S5,rel4)):
ErrT:=collect(%,dt);

#=====#
#           FIN DU PROGRAMME           #
#=====#

```

ANNEXE II

Programme Maple pour
calculer l'intégral
d'une expression

```
#=====#  
#                DÉBUT du PROGRAMME                #  
#=====#  
# restart;  
#=====#  
#                Entrer l'expression                #  
#                F:= ;  
#=====#  
#                int(F,k_x=-infinity..+infinity);  
#                # où k_x est le variable d'intégration.  
#=====#  
#                FIN DU PROGRAMME                #  
#=====#
```